

# Elementos no-lineales en circuitos eléctricos y procesos iterativos

Salvador Acha Daza\*

## Resumen

Este documento trata sobre la solución iterativa requerida en problemas donde se tienen elementos no-lineales en una red eléctrica. Se plantea el desarrollo de la ecuación no lineal en serie de Taylor y se retienen solamente los términos lineales. En el documento se hace uso de instrucciones del MATLAB para mostrar ejemplos numéricos e ilustrar el proceso de convergencia.

**Palabras clave:** Método de Newton, convergencia cuadrática, elementos no-lineales, sistemas eléctricos.

Un gran número de elementos eléctricos presentan un comportamiento no-lineal, entre dichos elementos se puede mencionar a los diodos, transistores, tiristores y cargas eléctricas cuya potencia o corriente depende de una manera no lineal del voltaje aplicado a sus terminales, de la corriente que circula por ellos, o de la frecuencia de operación. Así, es importante tener procedimientos iterativos que tengan una convergencia rápida y confiable para encontrar el punto de equilibrio o punto solución; a diferencia de procesos iterativos tipo Gauss, que presentan una convergencia lenta y en ocasiones, errática. Las ventajas mostradas en el artículo son las de justificar un método con convergencia cuadrática y la interpretación para el proceso iterativo por medio de circuitos acompañantes; los cuales son términos familiares para ingenieros electricistas.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Por medio de un ejemplo sencillo de una red lineal con elemento no lineal, que se muestra en la Figura 1, se plantean los pasos principales que ilustran el tipo de problemas; suponiendo voltaje en

terminales en función de la corriente que pasa por el elemento.

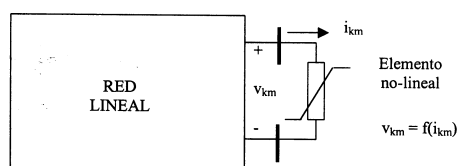


Fig.1. Red lineal y elemento no lineal.

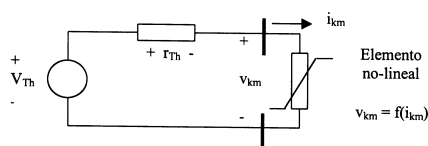


Fig.2. Equivalente de Thévenin para la red lineal y elemento no lineal.

De la Figura 2, la ecuación que debe satisfacerse es:

$$v_{km} = f(i_{km}) = V_{Th} - r_{Th} i_{km} \quad (1)$$

La naturaleza no lineal del problema requiere del proceso iterativo, ya que la corriente  $i_{km}$  aparece en ambos lados de la ecuación, y se supone que no es posible despejarla. Para resolver el problema se desarrolla en serie de Taylor<sup>1,2</sup> la ecuación (1), y se desprecian los términos de orden superior, con lo cual se obtiene la expresión linealizada (2). Si se conoce o puede calcularse un valor de arranque para  $i_{km}^r$  se inicia el proceso iterativo.

$$v_{km}^{r+1} = f(i_{km}^r) + f'(i_{km}^r) \Delta i_{km} \quad (2)$$

donde

$$\Delta i_{km} = i_{km}^{r+1} - i_{km}^r \quad (3)$$

\*

Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL.

Al despejar  $i_{km}^{r+1}$

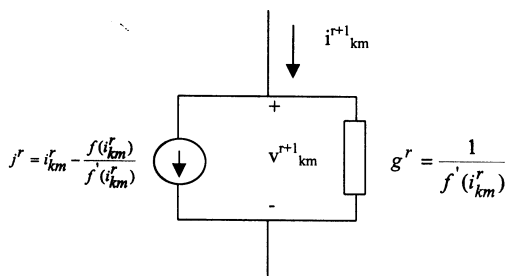
$$i_{km}^{r+1} = i_{km}^r - \frac{f(i_{km}^r)}{f'(i_{km}^r)} + \frac{v_{km}^{r+1}}{f'(i_{km}^r)} = j^r + \frac{1}{f'(i_{km}^r)} v_{km}^{r+1} \quad (4)$$

En (4) se tiene una forma que puede interpretarse en términos de circuito equivalente, con  $j^r$  como una fuente de corriente cuyo valor depende de la corriente conocida o supuesta, también de la función que describe al elemento no lineal y de la derivada de dicha función. Además se conecta en paralelo a la fuente de corriente una conductancia con valor que depende del recíproco de la derivada de la función,  $f'(i_{km}^r)$ .

Fig.3. Modelo Norton iterativo tipo Newton del elemento no-lineal.

### 1.1 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Para concentrarnos en el proceso iterativo solamente e incluir el equivalente Norton iterativo



tipo Newton del elemento no lineal; se supone que la red lineal se describe por medio del equivalente Thévenin. Se considera que existe elemento no

lineal, definido por  $v_{20} = f(i_{20}) = \sqrt{i_{20}}$  y con derivada dada por la siguiente expresión:

$$f'(i_{20}) = \frac{1}{2\sqrt{i_{20}}}$$

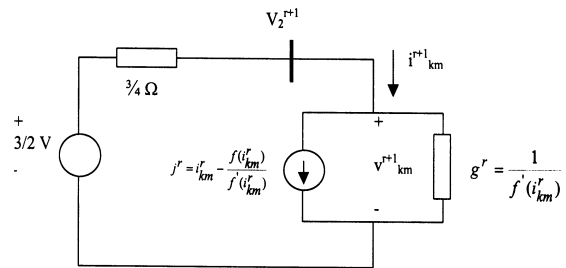


Fig.4. Ejemplo de equivalente Norton para proceso iterativo tipo Newton.

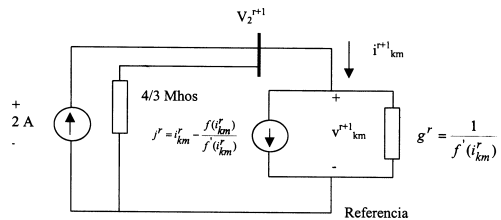


Fig.5. Circuito nodal con equivalente Norton para proceso iterativo.

La ecuación nodal que resulta es:

$$\left[ \frac{4}{3} + 2\sqrt{i_{20}^r} \right] [V_2^{r+1}] = [2 - j^r]$$

o bien

$$\left[ \frac{4}{3} + 2\sqrt{i_{20}^r} \right] [V_2^{r+1}] = [2 + i_{20}^r] \quad (5)$$

Una vez conocido el voltaje del nodo 2,  $V_2^{r+1}$ , que coincide con el voltaje en terminales del elemento no lineal  $v_{20}^{r+1}$ , se determina la corriente que pasa por el elemento; usando (4):

$$i_{20}^{r+1} = i_{20}^r - \frac{f(i_{20}^r)}{f'(i_{20}^r)} + \frac{v_{20}^{r+1}}{f'(i_{20}^r)} = -i_{20}^r + 2\sqrt{i_{20}^r} v_{km}^{r+1} \quad (6)$$

En caso de desear análisis gráfico del proceso de convergencia se puede sustituir en (6) la solución de voltaje dada por (5), es decir:

$$i_{20}^{r+1} = -i_{20}^r + 2\sqrt{i_{20}^r} \left( \frac{2 + i_{20}^r}{4/3 + 2\sqrt{i_{20}^r}} \right) \quad (7)$$

Se muestra instrucciones de MATLAB<sup>6</sup>, para solución del voltaje  $V_2$  usando la expresión (5), con valor inicial de la corriente  $i_{20}^{(0)} = 1.8$ . Se obtienen gráficas de (7) con la forma  $y = x$ , e  $y = -x + 2(2 + x)\sqrt{x}/(4/3 + 2\sqrt{x})$ , que es una representación gráfica del proceso iterativo.

```
% r es el contador de iteraciones
i20r=1.8;% Valor inicial de la corriente
desaj=1000;%
fprintf('iter   i(iter)   Desaj   v(iter)\n')
fprintf('%0.0f   %0.8f\n',0,i20r)
for r=1:10
    if desaj<=1e-5
        break
    end
    vr1=(2+i20r)/(4/3+2*sqrt(i20r));
    % Cálculo de voltaje nodal
```

```
i20r1=-i20r+2*sqrt(i20r)*vr1;
%m Actualización de la corriente
desaj=abs(i20r-i20r1);
% Cálculo de diferencia entre iteraciones
fprintf('%0.0f   %0.8f   %0.8e   %0.8f\n',r,i20r1,desaj,vr1)
i20r=i20r1;
end
```

iter	i(iter)	Desaj	v(iter)
0	1.80000000		
1	0.73857296	1.06142704e+000	0.94607028
2	0.80364853	6.50755703e-002	0.89726360
3	0.80425961	6.11086054e-004	0.89680529
4	0.80425966	4.95332981e-008	0.89680525

Gráficas para interpretar el proceso iterativo:

```
x=linspace(0,2,100);
y1=x;
y2=-x+2*sqrt(x)*((2+x)/(4/3+2*sqrt(x)));
plot(x,y1,x,y2)
```

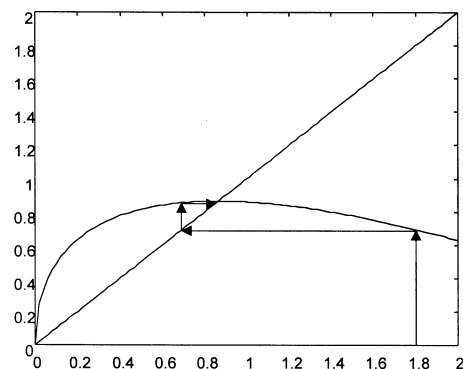


Fig.6. Gráficas para explicar la dinámica del proceso iterativo.

Se observa que el punto solución es un punto de atracción y se logra convergencia iniciando a la izquierda o a la derecha del mismo.

## 2. CORRIENTE EN FUNCIÓN DEL VOLTAJE

Existe la posibilidad de describir al elemento no lineal, como una corriente en función del voltaje; lo cual se ilustra en la figura 7.

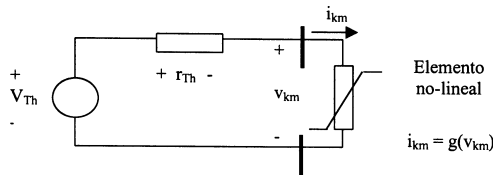


Fig.7. Equivalente Thévenin de Red lineal, y elemento no-lineal en función de voltaje.

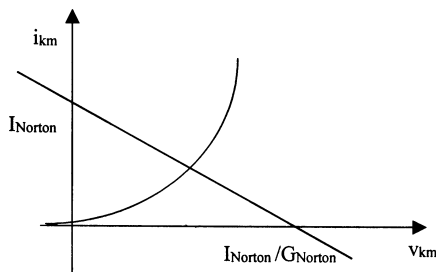


Fig.8. Característica del equivalente Norton y del elemento no-lineal.

Ecuación que debe satisfacerse:

$$i_{km} = g(v_{km}) \tag{8}$$

En ocasiones hay la tendencia a plantear proceso iterativo con base a la figura 8, sin embargo, este tipo de algoritmos tiene convergencia lenta.

Computacionalmente es más eficiente un desarrollo en serie de Taylor para (8) reteniendo solamente los términos de primer orden, pero se requiere de valor conocido para  $v_{km}^r$  para iniciar el proceso iterativo.

$$i_{km}^{r+1} = i_{km}^r + \Delta i_{km} = g(v_{km}^r) + g'(v_{km}^r) \Delta v_{km} \tag{9}$$

donde:  $\Delta v_{km} = v_{km}^{r+1} - v_{km}^r$ , por lo cual:

$$i_{km}^{r+1} = i_{km}^r - g'(v_{km}^r) v_{km}^r + g'(v_{km}^r) v_{km}^{r+1} = j^r + g'(v_{km}^r) v_{km}^{r+1} \tag{10}$$

De (10) se obtiene el circuito equivalente de la figura 9, con  $j^r$  como una fuente cuyo valor depende del voltaje conocido o supuesto, de la función que describe al elemento no lineal y la derivada de dicha función. Además, en paralelo, se conecta una conductancia con valor que depende del recíproco de la derivada de la función,  $g'(v_{km}^r)$ .

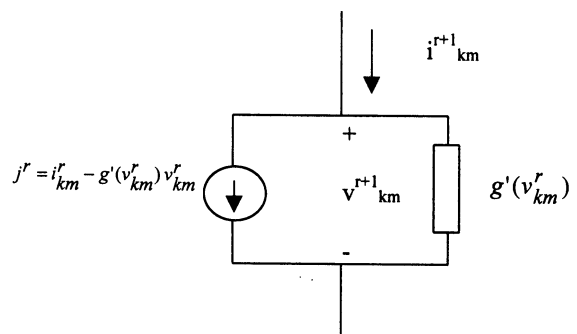


Fig.9. Equivalente Norton iterativo tipo Newton para el elemento no-lineal.

**2.1. EJEMPLO ILUSTRATIVO**

Para establecer el proceso iterativo e incluir el equivalente iterativo de Newton del elemento no lineal se supone la red lineal de la figura 4, descrita por medio del equivalente Thévenin. Se considera elemento no lineal, el cual está definido por  $i_{20} = g(v_{20}) = e^{v_{20}} - 1$  y con derivada dada por:  $g'(v_{20}) = e^{v_{20}}$ .

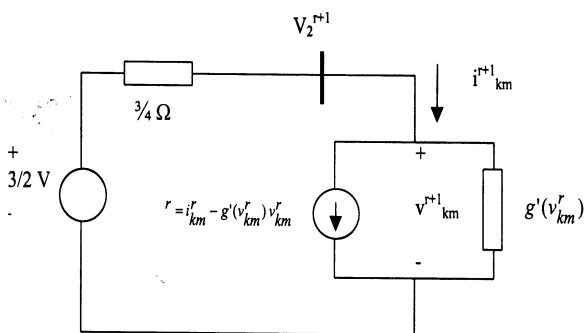


Fig.10. Ejemplo de equivalente Norton iterativo tipo Newton.

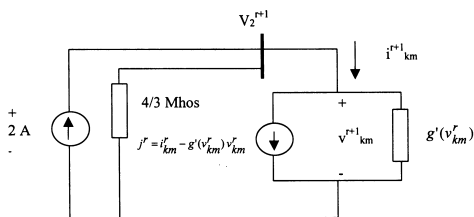


Fig.11. Circuito nodal para proceso iterativo, iteración r-ésima.

La ecuación nodal que resulta es:

$$\left[ \frac{4}{3} + e^{v_{20}^r} \right] \left[ V_2^{r+1} \right] = \left[ 2 - i_{20}^r + e^{v_{20}^r} v_{20}^r \right] \quad (11)$$

Con el voltaje del nodo 2, que coincide con el voltaje en terminales del elemento no lineal, se determinan los valores para la expresión iterativa, (11).

$$\left[ V_2^{r+1} \right] = \left[ \frac{4}{3} + e^{v_{20}^r} \right]^{-1} \left[ 2 - (e^{v_{20}^r} - 1) + e^{v_{20}^r} v_{20}^r \right] \quad (12)$$

Para el análisis gráfico del proceso de convergencia se puede partir de (12), en la forma:

$$\left[ v_{20}^{r+1} \right] = \left[ \frac{4}{3} + e^{v_{20}^r} \right]^{-1} \left[ 3 - e^{v_{20}^r} (1 - v_{20}^r) \right] \quad (13)$$

```
clear
% r es el contador de iteraciones
v20r=1.0;      % Valor inicial del voltaje
desaj=1000;    %
fprintf('iter  v(iter)      Desaj      i(iter)\n')
fprintf('%0f   %0.8f\n',0,v20r)
for r=1:10
    if desaj<=1e-5
        break
    end
    jr=(exp(v20r)-1)-exp(v20r)*v20r;
    vr1=(2-jr)/(4/3+exp(v20r));
    % Voltaje nodal
    ir1=jr+exp(v20r)*vr1;
    % Actualización de la corriente
    desaj=abs(vr1-v20r);
    % Cálculo de diferencia entre iteraciones
```

```

fprintf('%0f %0.8f %0.8e %0.8f\n',r,vr1,desaj,ir1)
v20r=vr1;
end
iter    v(iter)      Desaj      i(iter)
0      1.00000000
1      0.74044545  2.59554553e-001  1.01273940
2      0.71591922  2.45262321e-002  1.04544105
3      0.71573411  1.85105859e-004  1.04568785
4      0.71573410  1.03731914e-008  1.04568787
x=linspace(0,2,100);
y1=x;
y2=(3-exp(x).*(1-x))./(exp(x)+4/3);
plot(x,y1,x,y2)

```

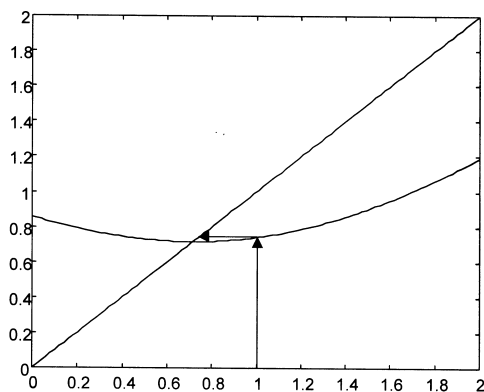


Fig.12. Gráfica para explicar la dinámica del proceso iterativo.

La gráfica del proceso iterativo muestra un punto de atracción al cual se llega iniciando a la izquierda o a la derecha del punto solución.

#### 4.- CONCLUSIONES

En el trabajo se ha mostrado la obtención de circuitos equivalentes para interpretar el comportamiento de un proceso iterativo. En este trabajo la linealización se lleva a cabo por medio de un desarrollo en serie de Taylor para la función no lineal, y se retiene solamente el término lineal. El proceso de convergencia es cuadrático, según se demuestra en otras publicaciones<sup>1,2</sup>, y en éste trabajo se ilustra gráficamente el proceso de convergencia del método de Newton. Al aplicar el método a circuitos eléctricos no lineales se muestra el punto de atracción que representa la solución del sistema de ecuaciones no lineales.

#### REFERENCIAS

1. F. S. Acton, Numerical Methods that Work, Harper and Row, 1970.
2. S. Acha, Solución de Ecuaciones Polinomiales, (Método de Newton), Reporte Técnico, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Mich., Julio 1979.
3. Robert L. Devaney, Chaos, Fractals and Dynamics Computer Experiments in Mathematics, Addison-Wesley, 1990.
4. T. L. Pillage, R. A. Rohrer, C. Visweswariah, Electronic Circuit & System Simulation Methods, McGraw-Hill, 1995.
5. H. W. Dommel, "Nonlinear and time-varying elements in digital simulation of electromagnetic transients," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. 90, No. 6, pp. 2561-2567, November/December 1971.
6. The Student Edition of MATLAB, Version 5, User's Guide, The Math Works Inc., 1997.