

# Maquinado de una sucesión de curvas

F. Eugenio López G. \*, Rafael Colás O.\*  
Francisco Ramírez C. \*, Klaus Rall\*\*

## Abstract

Many objects in the nature are inherently of soft and continuous geometry, so the computers to have to model them, as well as the machines that manufacture the objects starting from the computer models, should be able to reproduce such geometries. Computer aided design and manufacturing systems (CAD/CAM), high quality typography, artistic sketches and the movement of a movie camera are examples of such soft and continuous curves.

This article proposes a solution to the problem of machining geometries with continuous curves in a plane. At the same time, different mathematical aspects of the problem are discussed.

**Keywords:** CAD/CAM, geometric modelling, Bezier, NURBS, machining, interpolation, CNC.

## INTRODUCCIÓN

La realidad es diferente a la abstracción geométrica simple. El ejemplo clásico es el de un círculo o una esfera, los cuales no se encuentran *a priori* en la naturaleza, salvo como abstracción geométrica. Un objeto esférico es resultado de la inteligencia. O, dicho de otra manera, los objetos reales en la naturaleza pueden ser considerados geoméricamente como complejos, que se simplifican por medio de un encadenamiento de varias curvas de geometría sencilla.



En el ambiente computacional, los formatos de intercambio de datos son mejorados continuamente, y ya desde hace algunos años están incluídas en el formato IGES las curvas NURBS (ver glosario), por ejemplo. Aunque los controles de máquinas-herramienta más modernos permiten el manejo de estructuras de datos de este tipo, la gran mayoría de los controles de máquinas que están trabajando en plantas productivas no lo hacen.

Esto establece una diferencia bastante grande entre las capacidades de los controles de la última generación con respecto a sus antecesores. Si una planta productiva desea intentar permanecer en su plano competitivo –o desea mejorarlo- tiene como alternativas solamente la compra de equipo nuevo o implementar ingeniería más eficiente mientras llega el momento de invertir en equipo nuevo.

\* Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica UANL.

\*\* Departamento de Materiales y Automatización,  
TUHH, Alemania.

## OBJETIVOS

El presente trabajo muestra cómo es posible implementar una fase de cálculos para mejorar las capacidades de maquinado para el caso de geometrías de curva continua, como son las curvas de Bezier. Ya que éstas son una clase de las B-Splines, la metodología puede también ser usada para toda esta familia de curvas, y en donde se mantenga la matemática que define la geometría, dando como resultado que el proceso de generación de código de maquinado es prácticamente el mismo.

Los controles de máquinas-herramienta utilizan un estándar internacional, y las primitivas geométricas disponibles son la línea recta y los arcos. Los códigos correspondientes son G01 (movimiento lineal) y G02/G03 (arcos maquinados a favor y en contra de las manecillas del reloj). Los sistemas de diseño y manufactura asistida por computadora (CAD/CAM por sus siglas en inglés) utilizan para trayectorias de herramienta diferentes al arco y la recta las interpolaciones lineales. Sin embargo, el número de puntos y en general el proceso de interpolación está fuera de la influencia del usuario del sistema. Es frecuente encontrar plantas que trabajan con situaciones no óptimas, en las que puede ser deseable la modificación o mejora del proceso de interpolación de curvas complejas, las cuales no es factible hacer debido a la estructura interna del programa de cálculo.

Los cálculos tradicionales para curvas utilizan funciones matemáticas basadas en polinomios, ya sea en forma natural o racionalizada. De esta manera es sencillo representar curvas tales como líneas y arcos, parábolas o hipérbolas, objetos tridimensionales como conos, pirámides o esferas, y en general cualquier tipo de primitiva geométrica. En la siguiente sección se describen las formas de representación más comunes y su fundamento matemático.

## REPRESENTACIÓN DE CURVAS POR MEDIO DE POLINOMIOS

Un método de representación de curvas consistente debe observar que:

- sea posible representar exactamente todas las curvas que sean necesarias,
- sea fácil, eficiente y lo más exacto posible procesarlas en computadora,
- el cálculo de puntos y derivadas sea sencillo,
- los métodos numéricos sean robustos y acarreen el mínimo error de redondeo,
- se requiera poca memoria computacional para procesar,
- sean sencillas y matemáticamente fáciles de entender.

Sin embargo, hay curvas que no pueden ser representadas en forma precisa usando polinomios.

## FORMA IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA

Los métodos usados para la representación de geometrías son las ecuaciones implícitas y las paramétricas. La función  $f(x,y) = 0$  es una función implícita. Un ejemplo la figura 1 es la clásica ecuación de un círculo de radio unitario y centro en el origen:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Sin embargo, ésta no es la única forma de representar un círculo. Es ampliamente demostrado que un círculo puede representarse por medio de las funciones trigonométricas seno y coseno:

$$x(t) = \text{sen}(t)$$

$$y(t) = \text{cos}(t)$$

en donde  $0 < t < \pi$

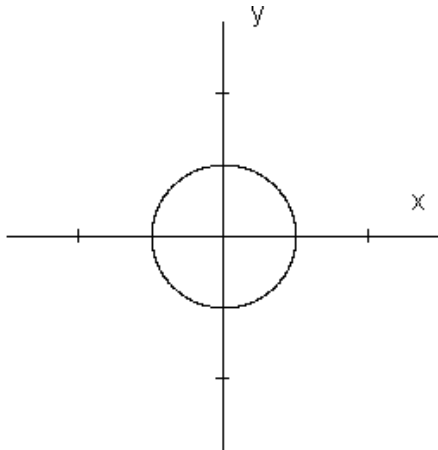


Fig. 1. Forma implícita de un círculo con radio unitario.

Con lo que se tiene un círculo en forma paramétrica. Es importante hacer notar que puede existir más de una forma paramétrica para una curva. Sin embargo, la selección de esta forma está determinada por los criterios de sencillez que se deseen tener en un caso determinado.

El uso de la forma paramétrica se ha extendido mucho debido a las propiedades matemáticas que permiten su manejo sencillo y flexible como se ve en la figura 2.

### REPRESENTACIÓN DE CURVAS POR MEDIO DE CURVAS DE BEZIER

La parametrización de una curva por medio de la de sus componentes coordenadas  $x(u)$ ,  $y(u)$  puede ser arbitraria, y en consecuencia es posible obtener un espectro de curvas amplio. Por razones de espacio este artículo se centra en curvas en el plano XY, aunque la matemática es la misma que para el caso de tres dimensiones.

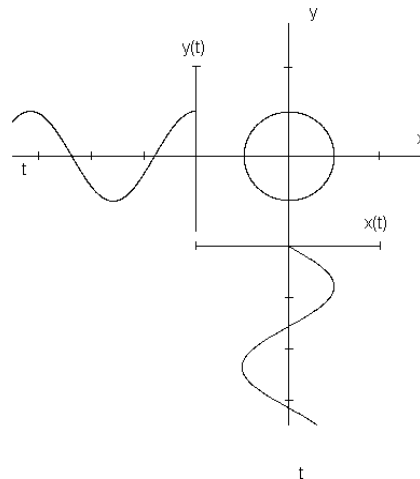


Fig. 2. Forma paramétrica de un círculo con radio unitario.

Las curvas de Bezier se basan en los polinomios de Bernstein, que a su vez se definen como:

$$B_{i,n}(u) := \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (1)$$

en donde:  $0 < u < 1$ .  $i$  es el índice del vector de  $n$  polinomios.

Las ventajas que justifican su uso son:

- No negatividad:  $B_{i,n}(u) \geq 0$  para toda  $i, n$  y  $0 < u < 1$
- Partición unitaria
- $B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$
- Simetría con respecto a:  $u=i/n$
- Definición recursiva inclusive sus derivadas.

Las curvas de Bezier son un caso particular de splines y se definen como la multiplicación de estos polinomios por un vector de puntos  $\{P_i\}$ .

$$C(u) := \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u) \quad (2)$$

A continuación se presentan ejemplos de la determinación de los polinomios:

Ejemplo 1:

Suponiendo  $n=1$  y sustituyendo en (1), el desarrollo de los polinomios sería

$$B_{0,1}(u) = (1-u)$$

$$B_{1,1}(u) = u$$

La ecuación (2) sería la de una recta de  $P_0$  a  $P_1$

$$C(u) = (1-u)P_0 + uP_1$$

Ejemplo 2:

Suponiendo  $n=3$  y haciendo de nuevo las sustituciones correspondientes

$$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3$$

Si  $P = [(4.0,0.5), (3.0,9.0), (10.0,3.0), (10.0,10.0)]$ , como se muestra en la figura 3, las ecuaciones para cada una de las coordenadas son:

$$C_x(u) := \sum_{i=0}^n P_{x_i} \cdot B(i, n, u) \quad (3)$$

$$C_y(u) := \sum_{i=0}^n P_{y_i} \cdot B(i, n, u)$$

Cuya curva graficada se muestra en la figura 3.

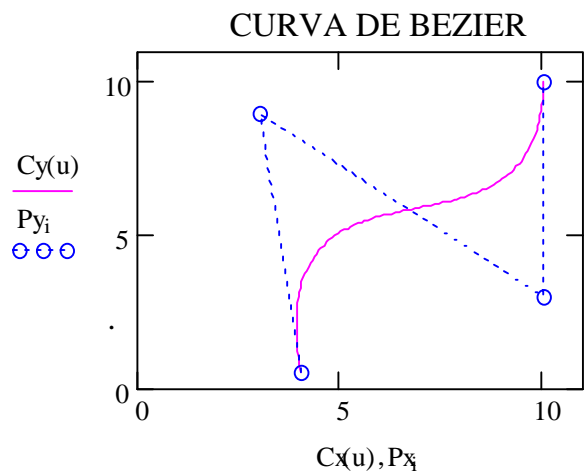


Fig. 3. Gráfica de los valores usados en el ejemplo 2.

Se debe hacer notar la posición de los puntos  $\{P_i\}$ . El primer punto del vector es el punto de *inicio* de la curva; el último es el punto *final* de la curva. La curva *sigue* a los puntos intermedios, por lo que al vector  $\{P_i\}$  se le llama vector de puntos de control. Al polígono formado por el vector  $\{P_i\}$  se le conoce como polígono de control.

Las ventajas de representar curvas parametrizadas por este método se pueden concluir a través de sus propiedades matemáticas:

- Los polígonos de control aproximan la silueta de la curva
- $P_0 = C(0)$  y  $P_3 = C(1)$
- Las direcciones de tangencia de los puntos inicio y final son paralelos al segmento  $P_1-P_0$  y  $P_3-P_2$
- Al inicio ( $u=0$ ) la curva toma la dirección de  $P_0P_1P_2$ . Al final ( $u=1$ ) toma la dirección de  $P_1P_2P_3$

## VECTOR DE PESOS

Es posible alterar la trayectoria de la curva de Bezier "jalándola" hacia los puntos de control intermedios. De esta manera puede modificarse sin alterar los puntos de inicio y final, conservando con esto la continuidad geométrica de la unión entre segmentos. El mecanismo para hacerlo es utilizando un vector de pesos  $\{w_i\}$  y con ello obtener la curva racionalizada. Este vector es un valor de peso asignado a cada punto de control. El cálculo de las coordenadas será.

$$x(u) := \frac{X(u)}{W(u)} \quad y(u) := \frac{Y(u)}{W(u)} \quad (4a)$$

En donde

$$X(u) := \sum_{i=0}^n P_{x_i} \cdot B_{i,n}(u) \cdot w_i \quad (4b)$$

$$Y(u) := \sum_{i=0}^n P_{y_i} \cdot B_{i,n}(u) \cdot w_i$$

y

$$W(u) := \sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u) \quad (4c)$$

## SUCESIÓN DE CURVAS

Continuidad geométrica. El requisito para poder formar una curva a través de la unión de una sucesión de curvas es la continuidad geométrica. Ésta expresa la suavidad de la unión de dos curvas. Significa que a lo largo de una trayectoria determinada en las uniones de las curvas no existen altibajos o cambios abruptos de trayectoria.

Considerando una curva compuesta de dos segmentos, la continuidad geométrica se definiría como sigue: si los dos segmentos de curva están unidos en un punto, entonces la curva tiene continuidad geométrica y se representa por  $G^0$ . Si las direcciones de las tangentes de cada segmento son iguales en el punto de unión, entonces se dice que la curva tiene continuidad geométrica  $G^1$ . Si los vectores tangente (primer derivada) de cada segmento son iguales tanto en magnitud como en dirección en el punto de unión, entonces se dice que la curva tiene continuidad geométrica  $C^1$ . Si los vectores resultado de la derivada  $n$  de ambos segmentos en el punto de unión son iguales, entonces se dice que la curva tiene  $C^n$  (continuidad geométrica  $n$ ).

Para que exista continuidad geométrica en una cadena de curvas de Bezier es necesario que el último punto del polígono de control de una curva sea el primero del polígono de control de la siguiente. Ver tabla I, figura 4.

Tabla I. Valores XY para los puntos de control {P} y {Q} de la figura 4.

Vector de puntos de control {P}		Vector de puntos de control {Q}	
Px	Py	Qx	Qy
4	0.5	10	10
3	9	10	29
10	3	20	13
10	10	15	5

Tabla II. Valores del vector de pesos {W} para las curvas P y Q de la figura 5.

Vector de pesos {w <sub>p</sub> }	Vector de pesos {w <sub>q</sub> }
1	1
3	10
6	6
1	1

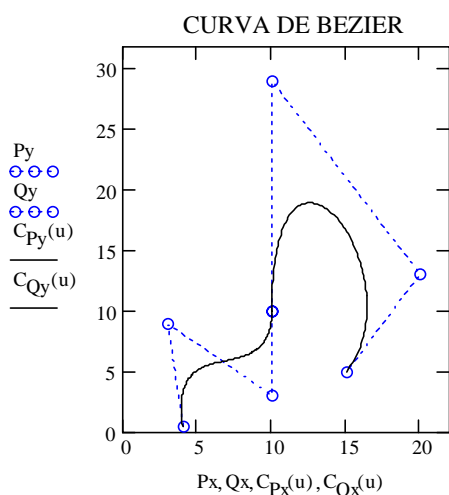


Fig. 4. Vectores de puntos {P} y {Q} y sus curvas de Bezier.

Ya que la pendiente de la curva en sus extremos está determinada por el segmento de puntos de control inicial (o final, según sea el caso) la condición de continuidad geométrica está determinada por la posición del segmento final de la curva con respecto al inicial de la siguiente. Para cumplir con la condición de G<sup>1</sup> basta con que los tres puntos –que determinan la unión de los dos segmentos en cuestión- sean colineales. Ver tabla II, figura 5.

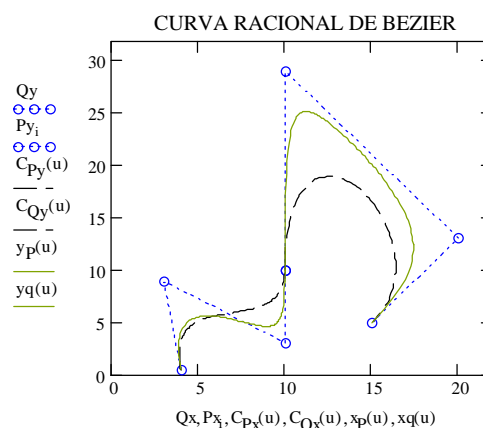


Fig. 5. Curva resultante tras considerar el vector de pesos {w<sub>i</sub>}.

La condición de continuidad geométrica está determinada por la derivada de la curva, y está dada por

$$\frac{d}{du} B_{i,n}(u) := n \cdot [B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)] \quad (5)$$

### CONDICIONES DE MAQUINADO

Para efectos de la generación de código NC, el cálculo de puntos a lo largo de la curva se hizo en función del radio de la herramienta a utilizar, considerando la longitud del arco del segmento y sin tomar el cuenta el valor de curvatura. La

longitud de arco  $L$  de cualquier curva paramétrica con límites  $0 < u < 1$  está definida por:

$$L := \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d}{du} Cx(u)\right)^2 + \left(\frac{d}{du} Cy(u)\right)^2} du \quad (6)$$

Que es la distancia que tendrá que recorrer la herramienta a lo largo de la curva. La interpolación lineal se determinó como  $\frac{1}{4}$  del valor del radio de la herramienta:

$$k := 0, \frac{r}{4L} .. 1 \quad (7)$$

Los puntos calculados para el código NC son

$$Cx(k) \text{ y } Cy(k) \quad (8)$$

a lo largo del segmento. Ver tabla III.

Tabla III. Valores de los parámetros utilizados en los experimentos		
	Curva P	Curva Q
Número de puntos de control	4	4
Longitud de arco	15.393	37.913
Radio de herramienta	2	2
Número de puntos calculados	31	76

### COMPROBACIÓN DE RESULTADOS

Generación de archivos CLF. Utilizando (8) para el cálculo de puntos, y omitiendo las compensaciones de la herramienta por radio, la localización de la herramienta es directamente asignada por los vectores de puntos  $Cx(k)$  y  $Cy(k)$ . Los códigos de control numérico para el posicionamiento inicial de la herramienta, las

velocidades de avance (F) y rotación (S), así como el uso de las funciones específicas de la máquina-herramienta (como por ejemplo el punto cero de referencia del programa, G55) están contenidos en el archivo NC resultante.

Para verificar el código NC generado se hizo una simulación de maquinado utilizando SurfCAM Verify Plus v4.0.2.

La figura 6 muestra el resultado final de la simulación. El programa aceptó sin problemas el código NC generado, lo cual implica cero errores de sintaxis, y posiciones de planos de trabajo válidas. El análisis de colisiones reporta que no existe ninguna colisión, ni condiciones de corte inválidas (por ejemplo enterramiento de herramienta).

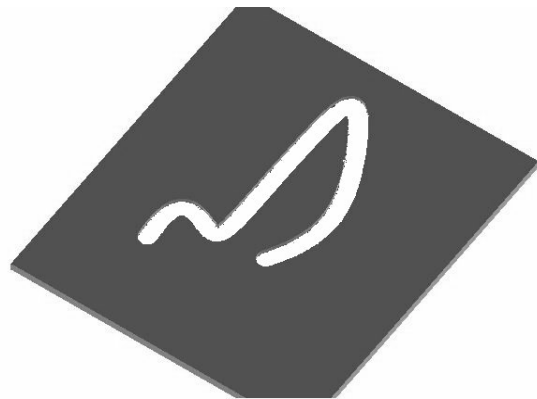


Fig. 6. Simulación del proceso de maquinado con el archivo NC resultado de los cálculos del ejemplo de la figura 5.

### MEJORAS POR DESARROLLAR

La selección de la herramienta adecuada y su compensación, es crítica para el proceso de maquinado. En el caso presentado aquí no se considera la compensación geométrica y se da por asentado que el radio de la herramienta es lo

suficientemente pequeño para que la trayectoria de la herramienta no contenga colisiones con segmentos de la curva cercanos o con valores de curvatura en donde no quepa la herramienta. También se presupone que la curva no presenta intersecciones consigo misma o que, si así sucede, es intencional.

El impacto de los cálculos en el material y su acabado no es considerado; el número de puntos de la interpolación tiene relación directa con ello. Estas consideraciones se proponen para la continuación de este trabajo en el Centro de Manufactura FIME-UANL.

## RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado por los autores como parte de su proyecto de investigación doctoral en el programa de Materiales FIME-UANL durante su estancia en el Departamento de Materiales y Técnicas de Automatización de la Universidad Técnica de Hamburgo, Alemania, bajo el apoyo de PROMEP.

Agradecemos la colaboración del Dr. Moisés Hinojosa en la revisión del manuscrito.

## GLOSARIO DE TÉRMINOS

La disciplina que comprende la interacción entre la matemática geométrica, el modelaje computacional y la manufactura con máquinas-herramientas utiliza términos provenientes del inglés que se han convertido en un argot disponible para el buen entendimiento entre las personas que trabajan en ello. La lectura de bibliografía especializada obliga el conocimiento y uso de él, por lo que intencionalmente no se omitió aquí. A continuación se presenta la definición de los términos usados en este texto.

archivos CLF Archivo conteniendo los datos de las posiciones del cortador de la herramienta. Del inglés Cutter Location File.

B-Splines Curvas similares a las de Bezier presentadas aquí, con un nivel de complejidad mayor. La curvas de Bezier son una subclase de las B-Spline.

CAD/CAM Diseño, Manufactura Asistida por Computadora.

código NC Código de control numérico estandarizado para el uso y control de las máquinas-herramientas. Del inglés Numerical Control.

IGES Estándar americano desarrollado a inicio de los ochentas para intercambio de información entre sistemas de CAD/CAM. Especifica formatos de datos gráficos y geométrico para aplicaciones tales como: diseño de circuitos, elemento finito, construcción, etc.

NURBS Curvas tipo B-Spline racionales no uniformes. Del inglés Non-Uniform Rational B-Splines.

## LITERATURA

1. Foley, James D. Computer Graphics Principles and Practice. Addison Wesley, 1996.
2. Piegl, Les The NURBS Book. Springer Verlag, 1997.



3. López Guerrero, F. Eugenio. Maquinado de Trayectorias en Dos Dimensiones Basadas en Pixeles. Revista Ingenierías Vol. III, No. 9, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Octubre-Diciembre 2000.
4. Leithold, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla, 1973.
5. Klein, Friedrich. NC-Steuerung für die 5-achsige Fräsbearbeitung auf der Basis von NURBS. Shaker Verlag. Ph.D. Dissertation, Technische Hochschule Aachen, 1995.
6. López Guerrero, F. Eugenio. Generación de Código de Maquinado en 3D para Modelos Geométricos Basados en Mallas. Revista Ingenierías Vol. III, No. 10, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Enero-Marzo 2001.
7. Chuang, S. and Lin W. Tool-Path Generation for Pockets with Freeform Curves Using Bezier Convex Hulls. Advanced Manufacturing Technology 13:109 Springer-Verlag London, 1997.
8. Glassner, A. The Perils of Problematic Parametrization. IEEE Computer Graphics and Applications, September/October 1997.
9. Jeon, J. and Kim, K. Generation of Tool Paths for Machining Free-Form Pockets with Islands Using Distance Maps. Advanced Manufacturing Technology 15:311 Springer-Verlag London, 1999.
10. Jeon, J. and Kim, K. Generating Tool Paths for Free-Form Pocket Machining Using Z-Buffer-Based Voronoi Diagrams. Advanced Manufacturing Technology 15:182 Springer-Verlag London, 1999.