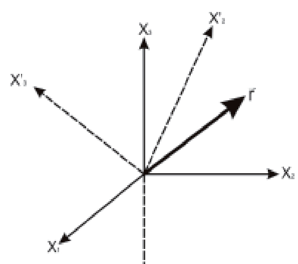
Los vectores en la física

Felipe A. Robledo Padilla, Mónica Menchaca Maciel, Rubén Morones Ibarra
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UANL
frobledo@fcfm.uanl.mx, monica.menchaca@uanl.mx,
rmorones@fcfm.uanl.mx,



RESUMEN

Las leyes de la física están expresadas en forma matemática; uno de los requisitos fundamentales de estas expresiones es que tengan la misma forma para todos los observadores inerciales. Este requisito, conocido como invarianza de forma o covarianza, se satisface cuando las ecuaciones se escriben en forma tensorial. Los vectores son tensores de primer orden y por lo tanto una ecuación escrita en forma vectorial satisface el requisito de invarianza de forma. Como una aplicación en este trabajo se muestra cómo el uso de cuadrivectores en el espacio-tiempo, conduce a una evidente manifestación de la unificación de los campos eléctrico y magnético, mostrándolos como aspectos diferentes de una entidad única: el campo electromagnético.

PALABRAS CLAVE

Vector, simetría, covarianza, invarianza de forma, tensor.

ABSTRACT

Physical laws are written by using mathematical expressions; among the fundamental requirements for these expressions is that they have the same mathematical form for all inertial observers. This requirement, called form invariance or covariance, is fullfilled when the equations are written in tensor form. Vectors are tensors of first order, hence, a vector equation satisfies the form invariance requirement. As an application, it is also shown how, by using four-vectors in the spacetime, the electric and magnetic fields appear as different aspects of the unique entity: the electromagnetic field.

KEYWORDS

Vector, symmetry, covariance, form invariance, tensor.

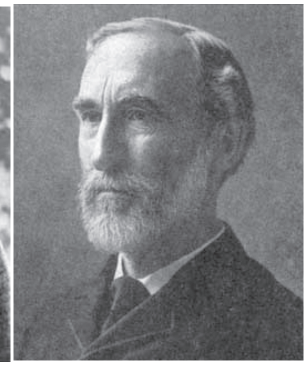
INTRODUCCIÓN

Los vectores se introdujeron en la física como cantidades que se necesitan para representar ciertas variables físicas cuyas características no pueden ser expresadas mediante números reales, debido a que sus propiedades no se reflejan en el álgebra de los números reales. Como un ejemplo sencillo tenemos el problema de ubicar la posición final de un objeto que se desplaza en un plano una cierta distancia, digamos a 10 metros de un punto inicial. La posición final no queda determinada debido a que el objeto puede estar en cualquier punto alrededor de un círculo de 10 metros de radio con centro en el punto inicial. Para que la posición final del objeto quede determinada necesitamos otra cantidad, aparte de la longitud del desplazamiento: la dirección. Estas dos magnitudes son necesarias para la determinación de la posición final del objeto y muestran la necesidad del empleo de los vectores. Si en este ejemplo agregamos la información de que, después del primer desplazamiento el objeto se mueve, digamos 15 metros más en otra dirección y queremos determinar la posición final, nos daremos cuenta de que requerimos para efectuar la suma, no la regla para sumar números reales sino la regla de suma de vectores.

Muchas otras cantidades físicas derivadas de los segmentos dirigidos, como la velocidad y la aceleración se regirán por las reglas del álgebra vectorial. Cantidades físicas como la fuerza, el campo eléctrico, el magnético y muchas más caen en la categoría de los vectores. Sin embargo, el verdadero poder y la utilidad de los vectores no se circunscribe a su álgebra, la cual se requiere en el cálculo de cantidades físicas, sino en sus propiedades de transformación.

Después de que Einstein estableciera en el primer postulado de la teoría de la relatividad especial que todas las leyes de la física tienen la misma forma matemática en todos los marcos de referencia inerciales, los vectores han jugado un papel fundamental en esta ciencia porque con ellos se puede garantizar el cumplimiento de este postulado.[1] El concepto de vector como se usa en la física ya no está limitado a la idea de una flecha, de una cantidad con magnitud y dirección, sino que es un objeto matemático con ciertas propiedades de transformación que permiten asociarlo con conceptos más profundos y fundamentales de la naturaleza.

El desarrollo moderno del concepto de vector y de la notación vectorial se debe al científico británico Oliver Heaviside y al físico norteamericano John W. Gibbs. Maxwell había escrito las ecuaciones del electromagnetismo en forma de componentes, lo que las hacía aparecer con una enorme abundancia de símbolos. En su formulación original, las ecuaciones del electromagnetismo eran veinte, conteniendo veinte variables. Posteriormente Maxwell intentó una reformulación matemática de sus ecuaciones que tampoco resultó ser sencilla. Veinte años

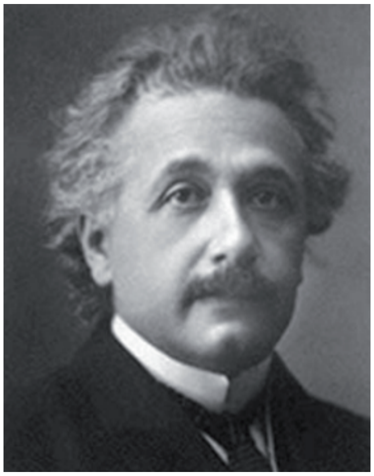


El científico británico Oliver Heaviside y el físico norteamericano John W. Gibbs desarrollaron el concepto de vector y de la notación vectorial.

después de la formulación matemática original del electromagnetismo, Heaviside y Gibbs escribieron las ecuaciones en forma vectorial, obteniendo una simplificación notable. La elegancia y la belleza que adquirieron las ecuaciones de Maxwell fue tal que el físico alemán Ludwig Boltzmann, cuando terminó de leerlas exclamó: "¿fue un Dios quien escribió estos símbolos?", en una franca alusión al placer que sintió el Fausto de Goethe cuando abre el libro donde se revelan los misterios del macrocosmos.

La simplicidad y la belleza de estas cuatro ecuaciones de Maxwell, donde quedan sintetizados todos los fenómenos del electromagnetismo y de la luz, causaron gran admiración en el mundo científico. Sin embargo, la utilidad de la notación vectorial no se reduce solamente a que proporciona una forma compacta de escribir expresiones matemáticas. Subyace en la estructura de los vectores un aspecto conceptual que los hace muy poderosos desde el punto de vista de su utilidad en la física. El poder y alcance de los vectores se puso de manifiesto a principios del siglo XX, con el desarrollo de las ideas de Einstein sobre la invarianza de las leyes de la física.

Existen varios principios en la física cuya importancia no se destaca en los tratados elementales. Aquí nos referiremos solamente a dos de ellos: la homogeneidad y la isotropía del espacio. Homogeneidad del espacio significa, en términos sencillos, que la descripción matemática de un sistema físico no debe depender del origen de coordenadas utilizado para la descripción. Similarmente, la isotropía significa que no hay direcciones privilegiadas en el espacio, o, equivalentemente,



Albert Einstein (1879-1955). Su trabajo impulsa la ciencia del siglo XX. Describe con éxito el efecto fotoeléctrico y explica el movimiento browniano con la naciente teoría cuántica. Desarrolla la Teoría de Relatividad.

la orientación del sistema de coordenadas no debe reflejarse en las ecuaciones que describen un sistema físico. Estos dos principios o postulados, implícitos en toda teoría física, exigen que las ecuaciones que describen el comportamiento físico del sistema, deban ser invariantes ante traslaciones y rotaciones de las coordenadas. Cuando las ecuaciones se expresan en forma vectorial el requisito de isotropía del espacio se satisface automáticamente, como se verá más adelante. En cuanto al requisito de homogeneidad del espacio, se satisface cuando los términos en las ecuaciones contienen derivadas respecto al tiempo o factores que dependen solo de la distancia entre dos puntos.

INVARIANZA DE LAS LEYES DE LA FÍSICA

Lo primero que se desea asegurar en la formulación de una teoría física es que las leyes que aparecen en la teoría sean las mismas para todos los observadores. Sin embargo, para establecer bien este principio, conocido como "Principio de Invariancia", necesitamos especificar de qué tipo de observadores estamos hablando. Nosotros nos concretaremos aquí a considerar los observadores inerciales, es decir, los observadores para los cuales tiene validez la primera ley de Newton, esto es, la ley de la inercia. Todas las demás teorías físicas, excepto la teoría general de la relatividad, son construidas en marcos de referencia inerciales, que es donde se ubican los observadores inerciales.[2] En un marco de referencia no inercial tendríamos que incluir las fuerzas ficticias, las cuales son fuerzas no atribuibles a sistemas físicos sino a la misma elección del marco de referencia.[3]

La herramienta matemática que permite garantizar la invarianza de forma de las leyes de la física es el análisis vectorial (en realidad la rama de las matemáticas que trata este tema en forma más general se conoce como análisis tensorial). Un vector se define en términos de sus propiedades de transformación. El vector de posición es el prototipo de vector y lo usaremos para introducir este concepto.[4]

Primeramente, dada la hipótesis de la isotropía del espacio, debemos garantizar que las rotaciones no modifican la forma de las ecuaciones de la física. Para esto introducimos la definición de vector a través de sus propiedades de transformación ante rotaciones de coordenadas.

ROTACIÓN DE COORDENADAS (COORDENADAS CARTESIANAS)

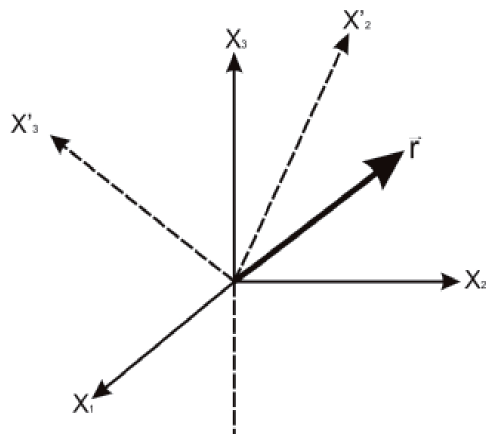
Consideremos un sistema de coordenadas con una base ortonormal[5] $\{\hat{e}_i\}$; tenemos entonces que $\hat{e}_i \bullet \hat{e}_j = \delta_{ij}$, donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

es la delta de Kronecker.

Sean (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de un punto en el marco de referencia original y (x_1', x_2', x_3') las coordenadas del mismo punto en un marco de referencia rotado. Las transformaciones de coordenadas que preservan la distancia, se conocen como transformaciones ortogonales, las cuales son casos particulares de transformaciones rígidas. Un punto en el espacio determina el vector de posición $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

En este sistema de coordenadas este punto se puede representar o escribir como $\vec{r} = \sum_i x_i \hat{e}_i$ con $\hat{e}_1 = (1,0,0)$, $\hat{e}_2 = (0,1,0)$ y $\hat{e}_3 = (0,0,1)$ Por otra parte, en un marco de referencia rotado respecto al primero, ver diagrama, y con una base ortonormal $\{\hat{e}_i'\}$, este mismo punto se expresa como $\vec{r}\,' = \sum_i x_i' \hat{e}_i'$.



El punto no cambia, lo que cambian son las coordenadas de este punto expresadas en diferentes marcos de referencia, por lo tanto: $\vec{r} = \vec{r}\,'$

$$\sum_i x'_i \hat{e}'_i = \sum_j x_j \hat{e}_j \qquad (1)$$

Multiplicamos escalarmente la ecuación (1) por la izquierda por $\hat{e}'_k$, obtenemos,

$$\sum_i x'_i \hat{e}'_k \bullet \hat{e}'_i = \sum_j x_j \hat{e}'_k \bullet \hat{e}_j$$

Es decir,

$$\sum_i x'_i \delta_{ki} = \sum_j \lambda_{kj} x_j$$

Lo cual equivale a

$$x'_k = \sum_j \lambda_{kj} x_j \qquad (2)$$

donde $\lambda = (\lambda_{kj}) = (\hat{e}'_k \bullet \hat{e}_j)$ es la matriz formada por los cosenos directores de los vectores coordenados unitarios del sistema primado, en el marco de referencia no primado.

La condición que se impone sobre la rotación es que se preserve la norma del vector de posición, es decir, $|\vec{r}\,'| = |\vec{r}|$ o bien $\vec{r}\,'^2 = \vec{r}^{\,2}$. El tipo de transformaciones que satisfacen esta condición como ya se mencionó se denominan "Transformaciones Ortogonales".[6]

$$\vec{r}\,'^2 = \sum_i x'^2_i = \vec{r}^{\,2} = \sum_i x_i^2 \qquad (3)$$

$$\sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} x_j \right)^2 = \sum_i x_i^2$$

$$\sum_i \sum_j \lambda_{ij} x_j \sum_l \lambda_{il} x_l = \sum_i x_i^2$$

$$\sum_j \left(\sum_i \sum_l \lambda_{ij} \lambda_{il} x_j x_l \right) = \sum_i x_i^2$$

$$\sum_j \sum_l \left(\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{il} \right) x_j x_l = \sum_i x_i^2$$

Para que se satisfaga la ecuación (3) se debe cumplir que

$$\sum_i \lambda_{il} \lambda_{ij} = \delta_{jl} \qquad (4)$$

$$\sum_j \sum_l \delta_{jl} x_j x_l = \sum_i x_i^2$$

$$\sum_j x_j x_j = \sum_i x_i^2$$

$$\sum_j x_j^2 = \sum_i x_i^2$$

La ecuación (4) se puede escribir como,

$$\sum_i \lambda_{li}^T \lambda_{ij} = \delta_{jl} \qquad (5)$$

y la ecuación (5) se escribe en forma matricial como

$$\lambda^T \lambda = \mathrm{I} \qquad (6)$$

La ecuación (6) es la condición que deben satisfacer las matrices de transformación para que dejen invariante la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio. Una matriz λ que satisface la ecuación (6) se dice que es una matriz ortogonal.

Por extensión, definimos un vector cartesiano $\vec{A}$ como un conjunto de tres componentes $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ que se transforman ante una rotación de coordenadas descrita por la matriz ortogonal (λ_{ij}), en $\vec{A}' = (A'_1, A'_2, A'_3)$ de la misma manera que las coordenadas de un punto, es decir, mediante la relación.

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j \qquad (7)$$

donde A'_i y A_i representan las componentes del vector $\vec{A}$ en el sistema rotado y en el original, respectivamente.

Con los resultados anteriores podemos probar que cualquier ecuación expresada en forma vectorial es invariante de forma ante rotaciones.

Consideremos la ecuación vectorial expresada en el marco de referencia O, como

$$\alpha \vec{A} = \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} \qquad (8)$$

Donde $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores, como lo indican

Isacc Newton (1642-1727). Desarrolló el cálculo diferencial e integral y formuló las leyes de la mecánica y de la gravitación. Su principal obra, Philosophiae naturales principia mathematica, establece las bases donde se apoya la ciencia actual.

las flechas sobrepuestas, y α, β y γ son escalares (números) que no cambian en la transformación de coordenadas.

Usando la notación de componentes, en el marco de referencia rotado, O', la forma de esta ecuación la podemos obtener multiplicando (8) por (λ_{ij}) y sumando sobre j, obtenemos,

$$\alpha \sum_j \lambda_{ij} A_j = \beta \sum_j \lambda_{ij} B_j + \gamma \sum_j \lambda_{ij} C_j$$

La cual, de acuerdo con la regla de transformación dada por (7), se puede escribir como,

$$\alpha A_i' = \beta B_i' + \gamma C_i' \qquad (9)$$

Como podemos ver, la forma matemática de las ecuaciones (8) y (9) es la misma, lo que significa que cada observador, en su marco de referencia con diferente orientación, podrá usar la forma vectorial de las ecuaciones con la garantía de que son las mismas para los demás observadores. Este es el concepto de covarianza de las ecuaciones ante rotaciones de coordenadas.

Un ejemplo de una ecuación que no fuera invariante de forma ante rotaciones, sería aquella en la que apareciera, por ejemplo, un término escalar y uno vectorial. Se puede probar que el producto "punto" entre dos vectores $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$, definido como $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$ es un escalar, esto es, una cantidad que no cambia de forma ante rotaciones.

Una ecuación como $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$, donde $\vec{D}$ es un vector, no puede representar una ley de la naturaleza, ya que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es un escalar mientras que $\vec{C}$ y $\vec{D}$ son vectores. En el momento de efectuar una rotación de coordenadas, la ecuación cambiaría de forma, ya que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ no cambia de forma, mientras que los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ se transformarán de acuerdo con la ecuación (7).

Toda ecuación de la física debe escribirse en forma vectorial o de una manera tal que todos sus términos se trasforman de la misma manera, covariantemente. Esto garantiza la invarianza de forma o covarianza, de las ecuaciones.

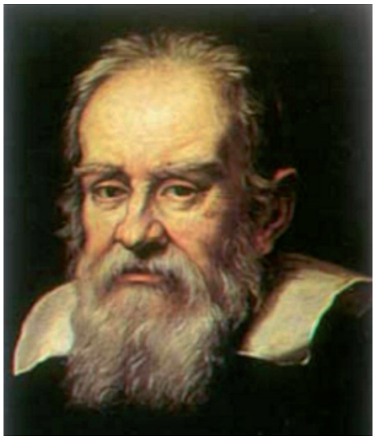
En particular, en el caso de la mecánica Newtoniana, la ley fundamental que describe el movimiento de una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}$, es la segunda ley de Newton, expresada matemáticamente como

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Siendo la masa m un invariante absoluto. La invarianza de esta ecuación ante rotaciones queda garantizada por el resultado general, discutido anteriormente, para una ecuación vectorial. La forma matemática de la segunda ley de Newton también nos asegura que la homogeneidad del espacio se satisface, ya que la aceleración es la segunda derivada del vector de posición respecto al tiempo. En cuanto a la homogeneidad del tiempo, esta queda garantizada en la mecánica Newtoniana debido a la hipótesis de que el tiempo es absoluto, es decir, es el mismo para todos los observadores.

Respecto al electromagnetismo, cuya descripción se hace a través de las ecuaciones de Maxwell, la forma vectorial de estas ecuaciones nos garantiza su invarianza de forma ante rotaciones. Este es el aspecto esencial del uso de los vectores en la física.

Las transformaciones dadas por (7), garantizan el postulado de la isotropía del espacio. Sin embargo, existe otro tipo de transformaciones que involucran al tiempo y que conectan los marcos de referencia inerciales. En estos marcos de referencia las transformaciones de Galileo nos garantizan que las ecuaciones de la mecánica son las mismas para todos los observadores inerciales.[7] En este caso, la forma vectorial de las ecuaciones es también de mucha utilidad.



Galileo Galilei (1564-1642). Astrónomo y matemático que estudió la caída de los cuerpos, el movimiento relativo sentando las bases para el desarrollo de la mecánica.

Sin embargo, con el electromagnetismo ocurre algo diferente a lo que sucede con la mecánica; el electromagnetismo no es invariante ante transformaciones de Galileo. Para satisfacer el requisito de que todas las leyes de la física sean las mismas para todos los observadores inerciales, se requirió modificar la mecánica y la introducción de un nuevo tipo de transformación para relacionar las observaciones entre diferentes marcos de referencia inerciales. Las nuevas transformaciones se conocen como "Transformaciones de Lorentz".

La mecánica relativista es construida a partir de cuadrivectores, llamados vectores de Lorentz, los cuales son definidos bajo el requisito de que la velocidad de la luz en el vacío permanezca constante y que las ecuaciones de transformación, las transformaciones de Lorentz, dejen invariante la longitud del intervalo *ds*, definido en un nuevo espacio de cuatro dimensiones, el espacio-tiempo o espacio de Minkowski. El elemento de longitud en el espacio de Minkowski se define como:[8]

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \qquad (10)$$

Las transformaciones de Lorentz pueden ser interpretadas como rotaciones en el espacio-tiempo de Minkowski.

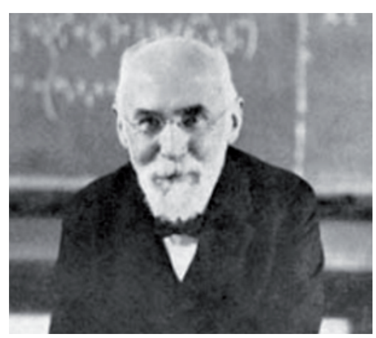
Con las leyes de la física, expresadas en forma vectorial o tensorial, como tensores de Lorentz, garantizamos que estas son invariantes de forma cuando hacemos la transformación entre observadores inerciales, lo cual satisface el primer postulado de la Teoría Especial de la Relatividad.

LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ COMO ROTACIONES EN EL ESPACIO-TIEMPO

En la relatividad especial, el tiempo y el espacio pertenecen a la misma categoría de objetos, juegan papeles equivalentes. Por esta razón debemos ampliar el espacio matemático en el que elaboramos las leyes de la física a un espacio de cuatro dimensiones.

La idea de un espacio matemático abstracto, el espacio-tiempo, no es de Einstein, sino del físico-matemático alemán H. Minkowski quien introdujo en 1908 la manera de medir distancias en este espacio, mediante la generalización de la métrica euclidiana, al introducir una coordenada temporal imaginaria: $x_4 = ict$. Un punto en el espacio-tiempo se representa mediante las coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4). La cuarta componente en el espacio de Minkowski es ict, donde la unidad imaginaria i se introduce como factor para obtener la métrica de Minkowski dada en la ecuación (10) la cual garantiza la invarianza de la velocidad de la luz en el vacío ante las transformaciones de coordenadas. El factor c, que es la velocidad de la luz, proporciona a la componente x_4 las dimensiones de longitud, en concordancia con las dimensiones de longitud de las otras tres componentes.

De acuerdo con Minkowski, no solo el tiempo y el espacio deben considerarse como diferentes componentes del espacio cuadridimensional que él propone, también el trimomentum $\vec{p}$ y la cantidad $\frac{E}{c}$, donde E es la energía y c la velocidad de la luz, forman un cuadrivector en este espacio abstracto. La generalización de estas ideas a otras cantidades físicas es también posible. Con esta construcción se logra la formulación covariante de la mecánica relativista y también del electromagnetismo. Toda teoría física



Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928). Su contribución a la física fue fundamental para el desarrollo de la Teoría de la Relatividad.

o modelo nuevo que pretenda ser consistente con la teoría de la relatividad es formulada en este espacio cuadridimensional.

La generalización de la definición de la distancia en el espacio cuadridimensional se realiza en forma natural, simplemente definiendo la distancia s del punto (x_1, x_2, x_3, x_4) al origen $(0,0,0,0)$ como

$$s^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \tag{11}$$

Tenemos entonces que el elemento de longitud ds entre dos puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) y (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), muy próximos entre sí, está dada por

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2$$

lo cual corresponde, en una notación ligeramente diferente, a la ecuación (10). Con esta notación, la extensión de las ideas ya establecidas sobre rotaciones de coordenadas en el espacio tridimensional a rotaciones en el espacio-tiempo se obtienen de la misma manera que en las ecuaciones (1)-(4). Las transformaciones de Lorentz que son las transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones relativistas, resultan ser rotaciones en el espacio-tiempo. Estas rotaciones en cuatro dimensiones se pueden separar en traslaciones con velocidad constante en las tres direcciones de los ejes espaciales más las rotaciones en el espacio, del tipo que ya hemos mencionado en otra sección de este artículo.

Un caso particular de transformaciones de Lorentz está dado por las transformaciones que conectan las mediciones de dos observadores en marcos de referencia inerciales O y O', donde O' se mueve con velocidad constante v en la dirección $+x$ respecto al marco de referencia O.[9]

En este caso particular las transformaciones de Lorentz toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \tag{12}$$

donde $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Usaremos estas transformaciones para describir, en el siguiente punto, la relación entre las observaciones de un fenómeno electromagnético hechas por dos observadores inerciales.

LA UNIFICACIÓN DE LA ELECTRICIDAD Y EL MAGNETISMO

Aún cuando las ecuaciones de Maxwell muestran la unidad de los campos eléctrico y magnético, el estudio de estos fenómenos en el espacio tridimensional no muestra el aspecto fundamental de la unificación, la cual sólo se observa cuando analizamos los fenómenos en el espacio-tiempo. En este espacio de cuatro dimensiones se manifiesta de manera clara la estructura de la teoría electromagnética, poniendo en evidencia que la electricidad y el magnetismo son sólo aspectos diferentes de los fenómenos producidos por las cargas eléctricas y que el hecho de que se manifieste uno, el otro o los dos, depende solamente del observador. Estudiando los fenómenos en el espacio-tiempo se logra observar también que el magnetismo es de hecho un efecto relativista. Esto significa que el magnetismo puede obtenerse como resultado de exigir que se cumpla el segundo postulado de la relatividad especial, es decir, la invariancia de las leyes de la física ante transformaciones de Lorentz.

Consideremos dos marcos de referencia inerciales, moviéndose el sistema primado en la dirección $+x$ con velocidad v. Consideremos ahora la ecuación de Maxwell[10]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Consideremos la componente en y de esta ecuación:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{13}$$

Apliquemos ahora la transformación de Lorentz dadas por las ecuaciones (12)

James Clerk Maxwell (1831-1879). Desarrolló las ecuaciones que describen los fenómenos eléctricos y magnéticos sintetizando los trabajos de Ampere y Faraday en la teoría electromagnética.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=\frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial E_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial E_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x'}(0)+\frac{\partial E_x}{\partial y'}(0)+\frac{\partial E_x}{\partial z'}(1)+\frac{\partial E_x}{\partial t'}(0)=\frac{\partial E_x}{\partial z'}$$

por lo tanto $\dfrac{\partial E_x}{\partial z}=\dfrac{\partial E_x}{\partial z'}$ (14)

Obtengamos ahora $\dfrac{\partial E_z}{\partial x}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial E_z}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial E_z}{\partial x'}(\gamma)+\frac{\partial E_z}{\partial y'}(0)+\frac{\partial E_z}{\partial z'}(0)+\frac{\partial E_z}{\partial t'}(-\frac{v}{c^2}\gamma)$$

por lo tanto $\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=\gamma\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial x'}-\dfrac{v}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t'}\right)$ (15)

Por otra parte,

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{\partial B_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t}$$

Nuevamente, de las trasformaciones de Lorentz dadas por (12)

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{\partial B_y}{\partial t'}\gamma+\frac{\partial B_y}{\partial x'}(-v\gamma)$$

es decir

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=\gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}-v\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right) \quad (16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (14), (15) y (16) en la ecuación (13), obtenemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\right)=-\frac{1}{c}\gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}-v\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right)$$

Agrupando términos, obtenemos:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\frac{v}{c}\gamma\frac{\partial B_y}{\partial x'}=-\frac{1}{c}\gamma\frac{\partial B_y}{\partial t'}-\frac{v}{c^2}\gamma\frac{\partial E_z}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(E_z+\frac{v}{c}B_y\right)\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_y+\frac{v}{c}E_z\right)\right] \quad (17)$$

Puesto que esta ecuación fue obtenida transformando solamente las coordenadas espacio temporales y no los campos, podemos encontrar cómo deben transformarse éstos para que se cumpla la invarianza de forma de la ecuación (13) frente a las transformaciones de Lorentez dadas por (12). El requisito es que la ecuación (13) debe tener la forma que se indica en la ecuación (18) en el marco de referencia transformado,

$$\frac{\partial E_{x'}}{\partial z'}-\frac{\partial E_{z'}}{\partial x'}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_{y'}}{\partial t'} \quad (18)$$

Comparando las ecuaciones (17) y (18), obtenemos que para que se satisfaga la invarianza de forma, deberemos identificar los términos correspondientes, con lo cual se obtiene que:

$$E_{z'}=\gamma\left(E_z+\frac{v}{c}B_y\right)$$

$$E_{x'}=E_x$$

$$B_{y'}=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c}E_z\right)$$

continuando con un tratamiento semejante para los demás términos, y haciendo lo propio para las demás ecuaciones de Maxwell, obtenemos que la transformación de los campos está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}E_{y'}&=\gamma\left(E_y-\frac{v}{c}B_z\right)\\E_{z'}&=\gamma\left(E_z+\frac{v}{c}B_y\right)\\E_{x'}&=E_x\\B_{x'}&=B_x\\B_{y'}&=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c}E_z\right)\\B_{z'}&=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c}E_z\right)\end{aligned} \quad (19)$$

Debido a que hemos tomado el movimiento relativo del marco de referencia en la dirección +*x*, observamos lo siguiente:

$$\mathbf{E'}_{\parallel}=\mathbf{E}_{\parallel} \text{ y } \mathbf{B'}_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}$$

$$\mathbf{E'}_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{E}_{\perp}+\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right);\mathbf{B'}_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{B}_{\perp}-\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{c}\right)$$

En esta notación $\mathbf{E}_{\parallel}$ y $B_{\parallel}$, indican las componentes paralelas al eje x de los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Similarmente $\mathbf{E}_{\perp}$ y $B_{\perp}$ indican las componentes perpendiculares a la dirección x.

Una vez que hemos obtenido las ecuaciones de transformación entre los campos podemos plantear el siguiente problema. Consideremos una carga eléctrica en reposo en el marco O. Esto significa que sólo tendremos la presencia de un campo eléctrico observado por O. Consideremos ahora un observador en O' que se mueve con velocidad v en la dirección +*x*. De acuerdo con las reglas de transformación de los campos, encontramos que el observador O' también detecta la existencia de un campo magnético.

Las componentes de este campo se obtienen de las ecuaciones (19); Con $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ y $\vec{B} = 0$ en el marco de referencia O, obtenemos que

$$E_{y'} = \gamma E_y$$

$$E_{z'} = \gamma E_z$$

$$E_{x'} = E_x$$

$$B_{x'} = B_x = 0$$

$$B_{y'} = \gamma \left(\frac{v}{c} E_z \right)$$

$$B_{z'} = \gamma \left(-\frac{v}{c} E_z \right)$$

Este resultado muestra que la presencia del campo magnético en el marco de referencia O' es consecuencia de la invarianza relativista.[11] Fenómenos que son de naturaleza puramente eléctrica solo lo son en un marco de referencia particular; en general el fenómeno es electromagnético. Los campos eléctricos y magnéticos no son independientes, por el contrario, están ligados estrechamente y la relación entre ellos depende del marco de referencia seleccionado.[12]

La consistencia entre este desarrollo teórico y lo observado experimentalmente, muestra la utilidad de los conceptos de invarianza y de los vectores como el instrumento matemático para implementarla.

COMENTARIO FINAL

En el desarrollo de este trabajo se ha puesto de manifiesto que el uso de vectores, definidos como objetos matemáticos que satisfacen ciertas propiedades de transformación, nos garantiza que la forma matemática de las ecuaciones que representan leyes de la naturaleza, no cambiará durante las transformaciones. El significado físico atribuido a una transformación es que ésta es equivalente a cambiar de observador. Que la ecuación sea invariante de forma significará que ambos observadores llegan a las mismas conclusiones físicas sobre el comportamiento del sistema observado.

Para elaborar un modelo matemático que represente una ley de la naturaleza, se debe recurrir a una estructura matemática que garantice el cumplimiento de ciertas simetrías que suponemos válidas para el espacio y el tiempo. Entre las simetrías fundamentales están las de homogeneidad del tiempo y la homogeneidad e isotropía del espacio. La estructura matemática que garantiza esto es el análisis tensorial, donde los vectores son casos particulares de los tensores. Cuando escribimos una ley de la naturaleza en forma matemática, todos los términos de la expresión deben ser de la misma naturaleza tensorial, lo cual garantiza la invarianza de la ecuación ante las transformaciones que exige la simetría. Este hecho nos libera de la preocupación de que otros observadores obtengan formas matemáticas diferentes para las leyes de la física. Cuando escribimos una ecuación en forma vectorial, estamos seguros que su forma matemática no cambiará cuando realizamos ciertas transformaciones en las coordenadas. Estas transformaciones son las que nosotros, de antemano, hemos impuesto guiados por la simetrías que suponemos deben satisfacerse en la naturaleza. Así mismo, la aplicación del concepto de vector en el espacio-tiempo nos permite lograr una comprensión más profunda de los fenómenos electromagnéticos.

REFERENCIAS

1. Sokolnikoff, I. S., Análisis tensorial, Limusa, 1976.
2. W. S. C. Williams, Introducing Special Relativity, Ed. Taylor and Francis, 2002.
3. Wolfang Rindler, Introduction to Special Relativity, Clarendon Press, 1982.
4. Wrede, R. C. Introduction to vector and tensor analysis, John Wiley and Sons, 1963.
5. Butkov, E. Mathematical Physics, Addison-Wesley, 1980.
6. Lebedev, L. P. and Cloud, M. J., Tensor Analysis, World Scientific, 2003.
7. Morones, J. R., Ingenierías Julio-Sept. 2006, Vol. 9. No. 32, P. 25.
8. Mohammad Saleem and Muhammad Rafique, Special Relativity, Ed. Ellis Horwood, 1992.
9. W. S. C. Williams, Introducing Special Relativity, Ed. Taylor and Francis, 2002.
10. Eyges, L., The Classical Electromagnetic Field, Dover, 1980.
11. Ohanian, H. C., Classical Electrodynamics, Allyn and Bacon, Inc., 1988.
12. Barut, A. O., Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles, Dover, 1980.