Estimación del fasor dinámico en oscilaciones de sistemas de potencia

José Antonio de la O Serna

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica-UANL jdelao@mail.uanl.mx

RESUMEN

El fasor ha sido considerado como un concepto esencialmente de estado estable desde su invención, por lo que hasta ahora la mayoría de los algoritmos de estimación fasorial están conformados así. Este trabajo rompe ese viejo paradigma relajando el concepto estático de fasor a uno dinámico: una función temporal compleja con libertad de movimiento. Se presenta un algoritmo para aproximarlo con un polinomio de Taylor de segundo orden y compara las nuevas estimaciones fasoriales con la tradicional. Esta aproximación conduce a la definición del vector de estado fasorial, el cual contiene no sólo el estimado del fasor dinámico, sino el de sus derivadas. Estas nuevas estimaciones mejoran la precisión de la estimación de la oscilación, al incluir nuevos detalles de Taylor en la interpolación. Errores del orden de 10^4 son alcanzados con esta aproximación sobre señales pasabanda en intervalos de dos ciclos.



PALABRAS CLAVE

Fasor dinámico, sistemas de potencia, Taylor, estimación fasorial.

ABSTRACT

Since its invention, the phasor has been essentially considered as a steady state concept. This assumption has shaped most of the algorithms for phasor estimation up to now. This work breaks that old paradigm by relaxing the static phasor concept to a dynamic one: the dynamic phasor, is one complex time function with movement freedom. This article presents the algorithm to approximate the dynamic phasor by a second-order Taylor polynomial and compares its phasor estimate to the traditional one. This approximation leads to the definition of the phasor state vector, which contains not only the estimate of the dynamic phasor, but also the estimates of its derivatives. These new estimates improve the accuracy of the oscillation estimation, by including new Taylor details into the interpolation in bandpass signals over observation intervals of two cycles.

KEYWORDS

Dynamic phasor, power system, Taylor, phasorial estimation.

INTRODUCCIÓN

Desde el artículo de Charles Proteus,¹ hace ya más de un siglo, los ingenieros electricistas consideran el fasor como un concepto esencialmente de estado estable: un número complejo conteniendo la amplitud y fase constantes de una señal

senoidal a la frecuencia fundamental del sistema. Solo recientemente se demuestra que la idea de fasor puede ser extendida para incluir variaciones de amplitud, fase, e incluso de frecuencia, proponiendo un algoritmo para estimarlos.^{2,3}

Nuevos estimados fasoriales son obtenidos aproximando la función envolvente de la senoidal en una oscilación, referida como fasor dinámico, mediante un polinomio de Taylor alrededor del centro de cualquier intervalo de observación. Los coeficientes de la expansión de Taylor corresponden a las estimaciones del fasor dinámico y sus derivadas en dicho centro. Así, una aproximación de un polinomio de Taylor de *n* ésimo orden conduce a la definición del espacio de estado fasorial de dimensión n+1, en el cual cada vector de estado, contiene no sólo el fasor tradicional, sino también sus derivadas, las cuales indican la evolución dinámica del sistema.

Estas nuevas mediciones fasoriales serán muy útiles para mejorar el control de sistemas eléctricos ante oscilaciones, debido a que portan información (velocidad y aceleración) inexistente en el fasor tradicional. Además, al incluir más derivadas en el modelo de señal, se resuelven las deficiencias del estimador del fasor tradicional, el cual corresponde al polinomio de Taylor de orden cero. De hecho la restricción constante impuesta en la amplitud y fase constituye hoy en día una severa limitación, que impide el monitoreo y control eficaz y eficiente de los sistemas de potencia, especialmente cuando se encuentran en condiciones transitorias. Esta falta de información podría ser la causa de los apagones en cascada que se han producido en diferentes partes del mundo, debido a la confusión entre falla y oscilación reportada en múltiples relevadores de protecciones que desconectaron erróneamente, hasta catorce falsos disparos en el de Nueva York, líneas que aportaban energía a la red de área amplia colapsada.

Al sustituir la amplitud y fase constante por un polinomio de Taylor de segundo orden alrededor del centro de cada intervalo de tiempo, la amplitud y fase de la oscilación son aproximadas por polinomios cuadráticos, en vez de la función escalonada del fasor convencional. Pero no sólo se mejora la interpolación, sino la exactitud del fasor estimado, ya que se excluyen las infiltraciones de velocidad y aceleración de la señal de entrada que se producen cuando no se reserva sitio para ellos en el subespacio definido por el modelo de señal.

La solución completa para estimar los parámetros del vector de estado fasorial conduce a una nueva transformación digital, llamada Transformada de Taylor-Fourier, debido a que se estiman las componentes de Taylor de la envolvente compleja a la frecuencia fundamental. Esta nueva transformación se calcula sobre intervalos cortos de tiempo, ajustando el modelo de señal de Taylor (ajuste polinomial) a la oscilación mediante el método de mínimos cuadrados, es decir resolviendo las ecuaciones normales. Debido a que la solución se obtiene con bases formadas por vectores no ortogonales (oblicuos), los estimados se obtienen mediante una transformación inversa de las transformadas de Fourier de la secuencia de entrada enventaneada con los monomios de Taylor. La transformación inversa es dada por la inversa de la matriz de Gram de las ecuaciones normales, y constituye una solución digital que llena el hueco existente entre la transformada de Laplace y Fourier, complementando la brillante idea de Fourier que considera la descomposición de una señal periódica como un problema geométrico, y que se encuentra en la base de toda la teoría de procesamiento de señales.

Finalmente, contemplando la solución de este problema como una técnica de diseño de filtrado digital, puede decirse que ésta consiste en diseñar un banco de filtros de estado state filters con respuesta en frecuencia real, y por tanto con respuesta impulsional compleja con simetría hermitiana; el dual de la suposición de los métodos tradicionales de diseño de filtros digitales, tal como la técnica de enventaneado, muestreo frecuencial, o la técnica de equirizado de Parks y McClellan.⁴ Estimando las derivadas mediante el ajuste de polinomios de Taylor por mínimos cuadrados, este método ofrece filtros de estado, que consisten en diferenciadores pasabanda centrados en la frecuencia fundamental del sistema, que es donde se encuentra el espectro esperado de la oscilación. Estos diferenciadores pasabanda difieren de los de banda total (full band)⁵ diseñados también en base a polinomios de Taylor, pero son calculados por la solución exacta sobre el dominio completo de frecuencia.

A continuación se formula el modelo de señal pasabanda del estimador, luego se ilustra la respuesta en frecuencia de los estimadores fasoriales obtenidos con polinomios de Taylor de orden creciente, se muestran resultados experimentales, y finalmente se estiman las cotas de error de la aproximación obtenida con el modelo de segundo orden, estimadas con secuencias ideales generadas aleatoriamente.

MODELO DE SEÑAL PARA OSCILACIONES DE POTENCIA

Hasta ahora, las técnicas de estimación fasorial asumen una señal senoidal con amplitud y fase constante sobre todo el intervalo temporal (suposición de estado estable):

$$s(t) = a_0 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0), \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$
 (1)

Esta suposición es muy severa para oscilaciones de potencia, en donde todas las variables cambian. Las oscilaciones en sistemas de potencia se pueden modelar completamente por una señal pasabanda⁶ de la forma:

$$s(t) = a(t)\cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \tag{2}$$

en la cual, a(t) es la amplitud y $\varphi(t)$ la fase de la señal s(t). Todas ellas son señales reales. En una señal pasabanda, el contenido frecuencial se concentra en una banda frecuencial angosta confinada en una vecindad alrededor de la frecuencia fundamental f_1 .

Este modelo puede reescribirse en términos de funciones exponenciales complejas como:

$$s(t) = \frac{1}{2} \left(p(t)e^{j2\pi f_{1}t} + \overline{p}(t)e^{-j2\pi f_{1}t} \right)$$

= Re{ $p(t)e^{j2\pi f_{1}t}$ }, $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ (3)

en la cual $p(t)=a(t)e^{i\varphi}(t)$ es la envolvente compleja complex envelope de la señal pasabanda s(t), y que se llamará fasor dinámico de la oscilación. Está dado por una función compleja expresada en forma polar, en la cual a(t) y $\varphi(t)$ son las funciones (reales) de la modulación en amplitud y fase en s(t).

En^{7,8} se presentó un método de estimación fasorial a partir de fasoretas y se analizó su rapidez y precisión. Este método, que estima el fasor como la transformada inversa de una fasoreta calculada en una fracción del ciclo fundamental, produce estimados fasoriales exactos cuando la señal de entrada coincide con el modelo de señal usado en el estimador. Motivados por este interesante resultado, se propone aproximar a la función del fasor dinámico p(t), sobre cada intervalo de longitud T, con un polinomio de Taylor de segundo orden alrededor del centro del intervalo $t_0=0$:

$$p^{(2)}(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 - \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$
(4)

En esta expresión $p_0, p_1, p_2, \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$. Note que los coeficientes de la serie corresponden a las derivadas del fasor dinámico en el centro del intervalo: $p_0=p(0)$, $p_1,=p'(0), y p_2=p''(0)/2$. La única condición necesaria para esta aproximación es que el fasor dinámico sea dado por una función analítica.

Observe también que la función aproximada es una serie de potencias en t truncada, caracterizada por una mejor precisión al disminuir t, la aproximación es exacta en el límite cuando $t\rightarrow 0$; por otra parte intervalos más largos requieren mayor número de términos para conservar la misma precisión. Aunque se podría aplicar polinomios de Taylor de orden más elevado, los coeficientes de la función cuadrática en (4) ofrecen buenos estimados, como se verá al evaluar el error.

El polinomio de segundo orden aproximado a la señal pasabanda junto al centro de cualquier intervalo de observación está dado por:

$$s^{(2)}(t) = \operatorname{Re}\{p^{(2)}(t)e^{j2\pi f_{1}t}\}.$$
(5)

Este modelo reducido puede aplicarse en cualquier intervalo de tiempo de longitud T. Así, para una señal de larga duración, se genera una secuencia de polinomios, sobre intervalos disjuntos de tamaño T:

$$s_{\ell}^{(2)}(t) = \operatorname{Re}\left\{ \left[p_{0,\ell}^{(2)} + p_{1,\ell}^{(2)}(t-\ell T) + p_{2,\ell}^{(2)}(t-\ell T)^2 \right] e^{j2\pi f_1(t-\ell T)} \right\}, \\ (\ell - \frac{1}{2})T \le t \le (\ell + \frac{1}{2})T.$$
(6)

Suponiendo que la señal es muestreada a N_1 muestras por ciclo $T_1 = \frac{1}{f_1}$, la ecuación anterior (6) genera un sistema de *N* ecuaciones lineales en la ecuación (7) sobre cada intervalo ℓ de tamaño *T*. El tamaño del intervalo en muestras es ahora dado por $N = \frac{T}{T_1}N_1$. Si *N* es par, se fuerza a ser impar, de manera que la muestra en el centro del intervalo sea siempre incluida, con la misma cantidad N_h de muestras a la izquierda y derecha del intervalo.

$$\begin{pmatrix} s_{\ell}^{(2)}(0) \\ \vdots \\ s_{\ell}^{(2)}(Nh) \\ \vdots \\ s_{\ell}^{(2)}(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{h}^{2}e^{jN}h^{\omega_{1}} - N_{h}e^{jN}h^{\omega_{1}} e^{jN}h^{\omega_{1}} e^{jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} - N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}^{2}e^{-jN}h^{\omega_{1}} \\ \vdots \\ s_{\ell}^{(2)}(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{h}^{2}e^{jN}h^{\omega_{1}} - N_{h}e^{jN}h^{\omega_{1}} e^{jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} - N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}^{2}e^{-jN}h^{\omega_{1}} \\ \vdots \\ N_{h}^{2}e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} \\ N_{h}^{2}e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} N_{h}e^{-jN}h^{\omega_{1}} \end{pmatrix}$$

$$(7)$$

Así se tiene $N=2N_h+1$. En este sistema, $\omega_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ corresponde a la frecuencia angular fundamental. Note que (7) es la ecuación de síntesis de la señal de tiempo discreto $\{s^{(2)}(n)\}_{n=0,1,...,N-1}$, en términos de sus coeficientes Taylor-Fourier. Estos coeficientes serán obtenidos por la transformada Taylor-Fourier de $s^{(2)}(n)$ como se verá más adelante.

Para cada intervalo de tiempo
$$\ell$$
, tenemos
 $\mathbf{s}_{\ell}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{p}_{\ell}^{(2)}$
(8)

en la cual, los elementos de los vectores columna de B⁽²⁾ son de la forma $n^2 e^{jn\omega_1}$, $ne^{jn\omega_1}$, $e^{jn\omega_1}$, y sus conjugados complejos.

Cabe señalar que el algoritmo de estimación fasorial convencional⁹ viene de un subsistema de la ecuación (8) en el cual únicamente las dos columnas centrales de $\mathbf{B}^{(2)}$ son tomadas en cuenta. Este estimado es calculado con el bien conocido filtro de Fourier de un ciclo $(N=N_1)$. Este subsistema puede escribirse como $(\mathbf{s}_{\ell}^{(0)} = \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{p}_{\ell}^{(0)})$, en la cual $(\mathbf{p}_{\ell}^{(0)} = \frac{1}{2}[p_0^{(0)}, \overline{p}_0^{(0)}])$. Este caso aproxima al fasor dinámico con un polinomio de orden cero en cada intervalo, generando una función escalonada, con cambios de paso de un intervalo al siguiente. En este contexto, el fasor tradicional puede ser referido como estimado fasorial de orden cero. Como puede esperarse, el modelo de Taylor de orden cero es adecuado (exacto) únicamente cuando el segmento de señal de entrada está en estado estable. Pero es insuficiente bajo oscilaciones de potencia, en las cuales tanto la primera como la segunda derivada son tan relevantes como el término constante.

Otro subsistema, aproxima al fasor dinámico con funciones lineales en cada intervalo, generando una función a trozos lineales, se obtiene cuando se incluyen los cuatro vectores centrales de la matriz $\mathbf{B}^{(2)}$. Esta expansión de Taylor de primer orden incluye dos coeficientes; uno con la amplitud y fase y el otro con sus derivadas, y puede escribirse como $\mathbf{s}_{\ell}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{p}_{\ell}^{(1)}$, en la cual $\mathbf{B}^{(1)}$ contiene sólo las cuatro columnas centrales de $\mathbf{B}^{(2)}$.

Para cualquier vector columna de tamaño N y orden de matriz **B**, los estimados de estado fasorial son obtenidos mediante mínimos cuadrados como los coeficientes de Fourier. El error entre la señal de entrada **s** y el polinomio de Taylor de *n* ésimo orden $\mathbf{B}^{(n)}\mathbf{p}^{(n)}$ se define como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{s} - \mathbf{B}\mathbf{p} \tag{9}$$

Los mejores estimados de p se obtienen entonces resolviendo las ecuaciones normales:

$$\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{s} \tag{10}$$

en donde *H* es el operador transpuesto hermitiano. Esta ecuación iguala las fasoretas^{7,8} en sus dos posibles expresiones: del lado derecho, las fasoretas son la transformada de Fourier de las secuencias $\{s(n), ns(n), n^2s(n)\}_{n=-N_h,...,N_h}$; y del lado izquierdo, son una transformación del vector estimado de estado fasorial \hat{p} , la transformación lineal es definida por la matriz de Gram $B^H B$. De esta ecuación es claro que los fasores son dados por una transformada inversa de las fasoretas. La solución de esta ecuación matricial ofrece los mejores parámetros, en tanto que minimizan la suma de los cuadrados del error en (9). El estimado fasorial es entonces

$$\hat{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{B}^H \boldsymbol{B})^{-1} \boldsymbol{B}^H \boldsymbol{s},\tag{11}$$

y la señal aproximada es simplemente

$$\hat{s} = B\hat{p}.$$
(12)

La mejor solución (en el sentido de mínimos cuadrados) existe a condición de que la matriz de Gram sea invertible, y esto sucede cuando los vectores columna de \boldsymbol{B} son linealmente independientes. Así, la ortogonalidad de los vectores columna en \boldsymbol{B}

simplificaría la solución, pues bajo esa condición la inversa de la matriz de Gram es proporcional a la matriz identidad, pero no es una condición necesaria para la existencia de la solución, como muchos creen. La inversión de la gramiana depende del tamaño del intervalo N y el orden del modelo de señal. Note que la matriz pseudoinversa $B^+ = (B^H B)^{-1} B^H$ de B depende solamente de los elementos del modelo de señal, y por tanto sólo es necesario calcularla una vez. La pseudoinversa contiene en sus renglones las respuestas impulsionales de los filtros que generan los estimados del vector de estado fasorial. De esta manera, hablando computacionalmente, nuestro método se implementa con un conjunto de n filtros de respuesta impulsional finita (FIR) de longitud N usando las técnicas convencionales de Fast Fourier Transform (FFT) para acelerar el proceso.⁴ Como se aprecia en las ecuaciones (11) y (12), los vectores renglón de B^+ son ortonormales a los vectores columna de **B**, y estos son los vectores de la base del subespacio definido por el modelo de señal. Es por esta razón que si la señal de entrada está en el subespacio del modelo s=Bp), entonces el ajuste es perfecto, el estimado es exacto $\hat{p} = p$ y el error es nulo, e=0. Así, el estimado fasorial en el centro del intervalo, donde el error de Taylor es nulo, será exacto cuando el segmento de señal de entrada corresponde al modelo de señal adoptado, para el cual el error mínimo cuadrático (LMS) es también nulo. Un error LMS se infiltra en el estimado cuando la señal de entrada está fuera del subespacio del algoritmo LMS.

Los determinantes de las gramianas de orden cero, uno, y dos se muestran en la figura 1. Cada uno aparece normalizado por el determinante en $N=N_1$, correspondiente a un intervalo de tiempo de un ciclo fundamental. Los determinantes de las gramianas de orden cero, uno y dos se muestran con las líneas a puntos, punteada y sólida respectivamente (figura 1). De esta gráfica se desprende que es posible obtener estimados en fracciones de ciclo para todos los órdenes de modelo. El intervalo más corto que ofrece solución determina la velocidad real del proceso de estimación y el retraso mínimo de los estimados.

Los coeficientes complejos \hat{p}_0, \hat{p}_1 y \hat{p}_2 específican el estado fasorial. El primero contiene la estimación del fasor dinámico, el segundo de su tasa de cambio, y el tercero de su aceleración,



Fig. 1. Determinantes normalizados de las matrices de Gram de los modelos de orden cero (línea punteada), uno (línea a rayas), y dos (línea continua).

todos tomados en el centro del intervalo. Así son los primeros tres *componentes de Taylor* de la función del fasor dinámico. Los últimos dos coeficientes serán nulos en estado estable. Pero note que este resultado es obtenido a *posteriori* y no a *priori* como sucede con la suposición de que la amplitud y fase son constantes del modelo convencional, y a que el modelo que aquí se propone da cabida a dichas variaciones.

Las relaciones entre los estimados del estado fasorial y las amplitudes y fases se establecen con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\hat{a}(\ell T) = 2|\hat{p}_{0}|,$$

$$\hat{\varphi}(\ell T) = \angle \hat{p}_{0},$$

$$\hat{a}'(\ell T) = 2\operatorname{Re}\{\hat{p}_{1}e^{-j\hat{\varphi}(\ell T)}\},$$

$$\hat{\varphi}'(\ell T) = \frac{2}{\hat{a}(\ell T)}\operatorname{Im}\{\hat{p}_{1}e^{-j\hat{\varphi}(\ell T)}\},$$

$$\hat{a}''(\ell T) = 4\operatorname{Re}\{\hat{p}_{2}e^{-j\hat{\varphi}(\ell T)}\} + \hat{a}(\ell T)[\hat{\varphi}'(\ell T)]^{2},$$

$$\hat{\varphi}''(\ell T) = \frac{4\operatorname{Im}\{\hat{p}_{2}e^{-j\hat{\varphi}(\ell T)}\} - 2\hat{a}'(\ell T)\hat{\varphi}'(\ell T)}{\hat{a}(\ell T)}.$$
(13)

Estas ecuaciones son válidas sin importar el orden del modelo. El modelo de orden cero usaría las primeras dos. El de orden uno, las primeras cuatro y el de segundo orden todo el conjunto. Sin embargo, un estimado puede ser completamente diferente de un orden a otro. Note que los estimados de derivadas de más alto orden dependen de los precedentes, y que el primero y segundo coeficientes son compensados en fase. Con estos parámetros de amplitud y fase, se pueden obtener las expansiones de Taylor de a(t)y $\varphi(t)$ alrededor del centro de cada intervalo, y por tanto aproximar la trayectoria del fasor dinámico p(t) en el plano complejo, durante una oscilación de potencia o en presencia de cualquier transitorio en la envolvente compleja. Se tiene simplemente:

$$\hat{a}_{\ell}(t) = \hat{a}(\ell T) + \hat{a}'(\ell T)(t - \ell T) + \hat{a}''(\ell T)\frac{(t - \ell T)^2}{2}, \quad (14)$$
$$\hat{\phi}_{\ell}(t) = \hat{\phi}(\ell T) + \hat{\phi}'(\ell T)(t - \ell T) + \hat{\phi}''(\ell T)\frac{(t - \ell T)^2}{2}, \quad (15)$$
$$(\ell - \frac{1}{2})T \le t \le (\ell + \frac{1}{2})T.$$

Mediante este proceso de interpolación, la señal pasabanda es demodulada excluyendo simplemente la exponencial compleja en la ecuación (5). Note que el proceso de estimación corre sobre la señal pasabanda, la cual contiene exponenciales complejas enventaneadas con polinomios de Taylor, pero la reconstrucción de la envolvente compleja toma en cuenta únicamente los polinomios de Taylor (14) y (15), esta es la manera tan simple por la cual los coeficientes de Taylor se desacoplan de los de Fourier. Note que $\hat{\phi}'(\ell T)$ corresponde al estimado de la desviación de frecuencia con respecto a la frecuencia fundamental f_1 , y que $\hat{\phi}''(\ell T)$ a la derivada de la frecuencia. Estos estimados son muy útiles para la estimación de estado del sistema de potencia y para el entendimiento de la situación dinámica de una red de transmisión de área amplia. La derivada de la frecuencia es extremadamente útil pues es una medida del desbalance entre generación y carga en una red. Todos estos parámetros son estimados mediante un proceso de mínimos cuadrados, por ello son menos sensibles al ruido que los obtenidos mediante las ecuaciones en diferencias finitas de las derivadas,¹⁰ los cuales son extremadamente sensibles al ruido.

Con el fin de evaluar el rendimiento (precisión y rapidez) de los estimados de estado fasorial, dependiendo del contenido frecuencial de la señal de entrada, en la siguiente sección se considera el proceso de estimación como un proceso de filtrado digital.

RESPUESTA EN FRECUENCIA

El análisis frecuencial de los estimadores de la sección anterior ilustra cómo es posible considerarlos

como salidas de un banco de filtros. Este análisis consiste en estimular el algoritmo con exponenciales complejas de la forma $s(n) = e^{j\omega n}$, para $-\pi < \omega \le \pi$. Las respuestas en frecuencia ayudan a explicar el comportamiento de los estimados cuando otras componentes frecuenciales están presentes en la señal de entrada o ante cambios de su frecuencia fundamental.

La figura 2 muestra las respuestas en magnitud del estimador fasorial $\hat{p}_0^{(0)}$, generado con el modelo de orden cero $(\mathbf{B}^{(0)})$ para intervalos temporales de $T = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ y 1 ciclo. Note que todos ellos tienen ganancia unitaria en la frecuencia fundamental (u=1), y ganancia nula en su valor negativo (u=-1). Para intervalos cortos el filtro es muy sensible a componentes no fundamentales, así si están presentes en la señal de entrada, este estimador será muy impreciso. Cuando el intervalo temporal aumenta las respuestas en frecuencia se hacen más selectivas alrededor de la frecuencia fundamental, pero todas las respuestas en magnitud muestran una concavidad negativa en (u=1), y una ganancia lineal en (u=-1). Esta joroba indica que el espectro de la oscilación sufrirá distorsión en amplitud alrededor de la frecuencia fundamental (infiltración de la aceleración de la envolvente), y la ganancia lineal que una infiltración de la derivada alrededor de la frecuencia negativa fundamental (la cual tiene la mitad de la energía de la señal pasabanda). Estas infiltraciones se manifestarán como errores en los estimados. Este comportamiento frecuencial es una



Fig. 2. Respuesta en frecuencia del estimado fasorial $p_0^{(0)}$ obtenido con el modelo de señal de orden cero para *T*=1/8, 1/4, 1/2 y 1 ciclo.

fuerte limitación para los estimados del fasor de orden cero. Sin embargo, debe reconocerse que el estimador será exacto cuando la señal de entrada coincide con la señal senoidal de estado estable, para la cual el contenido espectral está formado por líneas concentradas solamente en las frecuencias $u=\pm 1$.

Cuando se agrega el término de primer orden en el polinomio de Taylor, (**B**⁽¹⁾), el lóbulo principal de la respuesta en magnitud del estimador fasorial $\hat{p}_0^{(1)}$ preserva la forma cóncava del caso anterior, como puede apreciarse en la figura 3 para T=3/4,1 y 2 ciclos. Pero la respuesta en frecuencia mejora alrededor de la frecuencia fundamental negativa *u*=-1, en la cual ahora se obtiene una ganancia nula. Esta ganancia nula rechaza completamente el espectro izquierdo de la oscilación, resultado de haber reservado sitio para la primera derivada en el modelo expandido, de manera que la primera derivada es ahora canalizada a través del filtro del estimador $\hat{p}_1^{(1)}$.

Finalmente, las respuestas en magnitud del estimador frecuencial $\hat{p}_0^{(2)}$ generado con el modelo de Taylor de segundo orden ($\mathbf{B}^{(2)}$) son mostradas en la figura 4. Ahora se obtienen ganancias constantes 0 y 1 en *u*=-1 y *u*=1 respectivamente, lo que indica un rechazo completo del espectro izquierdo de la oscilación, alrededor de *u*=-1, y la transferencia perfecta del espectro derecho *u*=1 a través del filtro, sin otra distorsión que el retardo inevitable asociado con el proceso de estimación. Una ganancia unitaria constante en *u*=1 también indica que el estimador



Fig. 3. Respuestas en frecuencia del estimado fasorial $p_0^{(1)}$ obtenido con el modelo de primer orden, para T=3/4, 1 y 2 ciclos.



Fig. 4. Respuesta en frecuencia del estimado fasorial $p_0^{(2)}$ obtenido con el modelo de segundo orden, para T = 1, 3/2, 2 y 4 ciclos.

 $\hat{p}_0^{(2)}$ es insensible a las pequeñas variaciones de la frecuencia fundamental. Este algoritmo mejora el rendimiento del convencional ilustrado en la figura 2. La lección es que al incluir el primer y segundo término en el estimador Taylor-Fourier, el estimador del fasor constante se mejora enormemente para señales pasabanda. La banda frecuencial bajo la ganancia unitaria constante es de ±20% de la frecuencia fundamental para dos ciclos, y ±10% para cuatro ciclos. La banda del primer filtro es más amplia (±15%) que la obtenida con el filtro coseno levantado de cuatro ciclos.¹¹ El estándar IEEE C37.118¹² específica una banda de frecuencia de ±5 Hz, por lo que estos estimadores la superan.

Las respuestas impulsionales en la matriz pseudoinversa \mathbf{B}^+ son complejas, con simetría hermitiana, lo cual asegura respuestas en frecuencia reales para todos los filtros de estados anteriores. Esto corresponde al dual de la suposición de la mayoría de las técnicas de diseño de filtros FIR disponibles en la literatura, las cuales asumen respuesta impulsional real y respuesta en frecuencia con simetría hermitiana. Finalmente, la figura 5 muestra las respuestas en frecuencia de los diferenciadores pasabanda $p_1^{(2)}$ y $p_2^{(2)}$, asociados al modelo de segundo orden. Se puede ver que, alrededor de la fundamental u=1, el primer diferenciador tiene ganancia lineal, mientras que el segundo una ganancia cuadrática, con concavidad positiva, correspondiente al doble derivador teórico. Y ambas tienen una ganancia nula alrededor de la frecuencia fundamental negativa (u=-1).



Fig. 5. Respuestas en frecuencia de los diferenciadores de primer y segundo orden, $p_1^{(2)}$ y $p_2^{(2)}$, para *T*=1, 3/2, 2 y 4 ciclos.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

La señal de oscilación analizada en este trabajo fue capturada por una unidad de medición fasorial (Phasor measurement unit, PMU) instalada en una subestación del sistema eléctrico mexicano. La señal fue tomada a 48 muestras por ciclo con doce bits de resolución, durante un segundo. Se ilustra, junto con su espectro en la figura 6. Como se puede ver, la señal contiene una 5^a armónica (1.51%).

En la figura 7 se muestran los estimados de amplitud y fase por unidad (pu) y radianes respectivamente. Los estimados fueron tomados con el modelo de segundo orden, cada dos ciclos e



Fig. 6. Oscilación y su espectro. El tiempo está en ciclos y la frecuencia normalizada.



Fig. 7. Estimados de amplitud y fase calculados cada dos ciclos e interpolados con polinomios de Taylor de segundo orden.

interpolados alrededor del centro de cada intervalo con polinomios de Taylor de segundo orden. Segmentos parabólicos son perceptibles donde hay cambios abruptos. También se perciben discontinuidades en los extremos de los intervalos disjuntos de interpolación. Una manera de mejorar estas discontinuidades es aplicar el estimador Taylor-Fourier de dos ciclos pero sobre cada uno, e interpolar cada ciclo. Obviamente, el límite de esta mejora se alcanza cuando se obtienen estimados fasoriales instantáneos $p_0^{(2)}$ en cada muestra de señal de entrada (sin interpolación). Estos estimados se ilustran en la figura 8. El retraso de estos estimados es



Fig. 8. Amplitud y fase instantáneas calculados con el estimador de Taylor-Fourier cada dos ciclos.

de un ciclo, lo que explica los márgenes vacíos en esa figura. Los estimados aparecen en el centro de cada intervalo de estimación, y ésta es la representación más fina de la oscilación. Otra ventaja de esta nueva técnica de estimación fasorial es que la velocidad y aceleración son estimadas junto con el fasor. Estas estimaciones se muestran en la figura 9. La derivada de la fase es la frecuencia dinámica, dada en rad/ciclo (la escala deberá ser multiplicada por $\left(\frac{60}{2\pi}\right)$ para obtener la frecuencia se alcanza en el transitorio alrededor del décimo ciclo, y es de 0.95 Hz. Como se puede ver en esas gráficas, la primera y segunda derivadas de la envolvente compleja son útiles para detectar transitorios rápidos. Finalmente, en la figura 10, se



Fig. 9. Estimados instantáneos de velocidad y aceleración de amplitud y fase obtenidos con el estimador de Taylor Fourier de dos ciclos.



Fig. 10. Gráfica polar de la oscilación con los estimados fasoriales instantáneos en el plano fasorial complejo.

ilustran los estimados instantáneos del fasor dinámico de la oscilación analizada en el plano complejo.

INFILTRACIÓN DE RUIDO EN LOS PARÁMETROS

El vector de estado fasorial propuesto es un estimado por mínimos cuadrados en el caso sobredeterminado¹³ para el modelo de señal más ruido en (ecuación 9), el cual puede reescribirse como:

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{e} \tag{16}$$

considerando que **B** es conocido, **p** es determinístico, y **e** es un ruido distribuido como $\mathbf{N}[0,\sigma^2\mathbf{I}]$. Note que estas suposiciones corresponden al enfoque de telecomunicaciones, donde para cada símbolo, un **p** es dado, el modulador genera su señal **Bp** durante el período simbólico, y entonces **s** es recibido con ruido aditivo. De tal suerte que la señal recibida viene del subespacio del modelo pero con ruido aditivo. En este caso, \hat{p} en (ecuación 11) es un estimado insesgado de **p**, y **s** es distribuido como $\mathbf{N}[\mathbf{Bp}, \sigma^2\mathbf{I}]$.

El error fasorial absoluto debido a la presencia del ruido es entonces:

$$\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{B}^+ \boldsymbol{e}. \tag{17}$$

A continuación se muestra el comportamiento del error paramétrico cuadrático medio $\hat{p} - p$ debido a la presencia de ruido gausiano blanco aditivo (*Additive White Gaussian Noise*, AWGN) en la señal de entrada. En particular, se compara el error cuadrático medio debido a la infiltración de ruido a través de los filtros de estado de orden cero y dos en dos ciclos.

La figura 11 muestra el error cuadrático medio en los estimados $\hat{p}_0^{(0)}, \hat{p}_0^{(2)}, \hat{p}_1^{(2)}, y \hat{p}_2^{(2)}$ cuando la tasa señal a ruido va de 0 a 80 dB. Note que el error fasorial que pasa a través del primer filtro del modelo de segundo orden es mayor (2.4 veces) que el que pasa a través del modelo de orden cero. Esto es debido a que la banda de paso es más amplia para el filtro del modelo de segundo orden. Este es el precio que se paga por evitar la distorsión en amplitud de la oscilación. Sin embargo, para señales con tasas señal a ruido superior a 70 dB, el error para ambos modelos es despreciable. Este es el nivel de tasa señal a ruido alcanzado por los convertidores análogo digitales de más de 12 bits más comunes hoy en día.



Fig. 11. Error cuadrático medido normalizado en estimados paramétricos debido a infiltración de ruido en la señal de entrada.

COTAS DE ERROR

Se procede a evaluar la raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado incurrido en el ajuste de señales con el propósito de evaluar la precisión de las aproximaciones de señal del algoritmo propuesto. En ella se asume que la señal de entrada es pasabanda sin ruido.

En datos reales, la amplitud y fase de la oscilación son desconocidas, debido a que la señal que viene de un PMU en el campo es muestreada directamente. Para evaluar el error de la aproximación propuesta, se requiere usar señales de prueba con envolvente complejo conocido. Con este propósito, se generaron quinientas señales de oscilación de amplitud sobre cien ciclos con el siguiente modelo de señal:

$$a(t) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} e^{-t/\tau_i} \cos(2\pi f_i t)$$
(18)

en el cual las constantes de tiempo τ_i fueron generadas por un proceso aleatorio uniforme en el intervalo [20,40] ciclos. De manera similar, las tres frecuencias se generaron aleatoriamente en el rango ±1 Hz alrededor de las frecuencias dos, cuatro y seis Hertz. Las señales fueron además normalizadas (señales con norma euclidiana unitaria) y mezcladas con una portadora de 60 Hz. La figura 12 muestra los histogramas de la raíz cuadrada de la amplitud media cuadrática (rms) del error cuando el ajuste se llevó a cabo en intervalos de dos ciclos con los estimados tomados en el centro. El error rms varía entre 6x10⁻⁴ y 12x10⁻⁴. Dado que las señales de entrada son pasabanda, este error corresponde principalmente al ajuste de los polinomios de Taylor (el error mínimo cuadrático es nulo cuando la señal está en el subespacio del modelo). Al observar el error en las aproximaciones, se observó que los errores mayores se encontraban en los extremos de los intervalos de interpolación, especialmente en aquellos intervalos en los cuales la amplitud tenía un punto de inflexión, donde hacía falta el término de la tercera derivada en el polinomio de Taylor. La figura 13 muestra el error rms al estimar la amplitud con estimados instantáneos, i.e. estimando la amplitud en cada



Fig. 12. Raíz de la media cuadrática del error de la amplitud interpolada con el polinomio de Taylor de segundo orden, en intervalos de dos ciclos, con fasores estimados en los centros de cada intervalo.



Fig. 13. Raíz de la media cuadrática del error de estimados de amplitud instantáneos obtenidos con el estimador de segundo orden.

muestra de señal. En este caso, el error se reduce por un factor de diez con respecto al caso anterior. Como se puede ver, la magnitud del error obtenido con el modelo de segundo orden es bastante razonable.

Los errores de aproximación en señales reales son debidos a la discrepancia entre la señal de entrada y el modelo de estimación. Los errores máximos fueron encontrados cercanos a discontinuidades de la amplitud o la fase como los del ejemplo ilustrado en la sección anterior, o debidos a infiltraciones de frecuencias no fundamentales. En este caso, el mejor criterio de rendimiento lo ofrece la respuesta en frecuencia de cada estimador. Cuando la señal de entrada contiene un alto contenido armónico, los filtros pasabanda deben diseñarse con ganancia nulas en esas frecuencias. Una etapa de prefiltrado podría también ser utilizada para eliminar esas componentes antes de aplicar los estimadores, pero esa solución introduciría un retraso adicional.

DISCUSIÓN

El concepto de fasor dinámico presentado en este artículo difiere del concepto de Stankovic.^{14,15} El de Stankovic es en realidad el estimado fasorial de orden cero, es decir, el coeficiente de Fourier $X_k(t)$ de la forma de onda $x(\tau)$, calculado sobre un intervalo de tamaño *T* terminando e incluyendo el instante *t*. Luego, en su ecuación de estado, él utiliza la derivada del estimado anterior, pero ambos parámetros permanecen en el dominio de Fourier y siguen asumiendo amplitud y fase constantes en todo el intervalo. La dinamicidad de Stankovic se refiere pues al cambio de intervalo a intervalo del estimador tradicional de Fourier.

En este trabajo, el fasor dinámico es entendido como la envolvente compleja del modelo de señal pasabanda. Se trata de un concepto único, al cual se le puede aproximar con diferentes estimadores.

Los estimadores propuestos aquí incluyen las transformadas de Fourier de $x(\tau), \tau x(\tau)$ y $\tau^2 x(\tau)$, es decir requieren de los monomios de Taylor para mejorar la aproximación. Esta aproximación conduce al vector de estado fasorial, el cual contiene no sólo el estimado del fasor dinámico, sino también estimados de sus derivadas. Y no es lo mismo la derivada de un estimado, como la usada por Stankovic, que el estimado de la derivada, como el usado en este trabajo.

La inclusión del término de segundo orden ofrece el mejor estimado fasorial ($\hat{p}_0^{(2)}$), el cual es insensible a las pequeñas variaciones en frecuencia presentes en la oscilación y rechaza completamente el espectro de la oscilación en frecuencias negativas. Esto constituye una mejora importante sobre el estimador fasorial obtenido con el filtro de Fourier de un ciclo, o de orden cero, y cualquiera de sus derivaciones,¹⁶ los cuales son incapaces de alcanzar ganancias constantes en las bandas de paso y rechazo.

El estimador utilizado en los resultados numéricos es de dos ciclos, y produce un retraso de un ciclo, el cual es muy corto comparado con las soluciones disponibles comercialmente,¹¹ las cuales son del orden de dos ciclos. En la referencia anterior, se propuso el filtro coseno levantado (RC), la mejor solución dada a la demodulación de señales pasabanda en sistemas de transmisión digital.^{17,18} Finalmente, en ¹⁹ el problema de los retrasos en las estimaciones es discutido para filtros FIR e IIR.

Los métodos de diseño de filtros digitales mediante mínimos cuadrados conocidos en la literatura, tales como el método de Padé, Prony o Shanks se basan en un modelo de señal auto regresivo y de promedio móvil (Autoregressive and Moving Average, ARMA), el cual asume una descomposición de señal en señales retrasadas consecutivamente de la entrada y salida. Todos ellos asumen señales causales empezando en cero.

La descomposición de señal Taylor-Fourier utilizada en este artículo asume segmentos de señal simétricos en el tiempo de -T a T. Estamos ahora investigando el método de Shanks como una solución alternativa para estimación del estado fasorial, pero hasta ahora hemos sido incapaces de obtener filtros planos, como el obtenido con el modelo de orden dos.

Finalmente, el modelo propuesto de señal utiliza la frecuencia fundamental f_1 , pero nada impide utilizar cualquier otra frecuencia o conjunto de frecuencias. En consecuencia, esta técnica de estimación pude ser utilizada para estimar la envolvente compleja de cualquier armónica dinámica o un conjunto de ellas.

CONCLUSIONES

La definición teórica de fasor dinámico fue presentada y una aproximación razonable fue propuesta. Se trata de un nuevo concepto que libera al fasor tradicional de sus restricciones estáticas. La aproximación con polinomios de Taylor de segundo orden mejora los estimados fasoriales. En particular, el estimado del fasor de orden cero se mejora al incluir las componentes de velocidad y aceleración en el modelo de señal, ya que evita las infiltración de estas componentes en el estimado. Estos estimados ayudan a comprimir la información de la oscilación en el centro de los intervalos. El error de aproximación es del orden de 10⁻⁴ para señales pasabanda.

El diseño de estos nuevos estimadores condujo a un nuevo banco de filtros. Estos nuevos filtros fueron llamados filtros de estado ya que generan en su salida el vector de estado fasorial, es decir las primeras *n* derivadas de la envolvente compleja. Las derivadas son estimadas mediante el método de mínimos cuadrados, lo cual produce estimadores más robustos al ruido si se les compara con los estimadores basados en las ecuaciones de diferencias finitas. La señal de entrada fue supuesta pasabanda, pero nada impide procesar señales banda base, como en la mayoría de aplicaciones de control ($f_1=0$).

La formulación matemática propuesta aquí condujo también a una nueva transformada de tiempo discreto, llamada transformada Taylor-Fourier, el eslabón perdido entre la transformada de Laplace y la de Fourier. Esta nueva transformación ayudará sin duda a caracterizar mejor procesos dinámicos.

Los tres puntos anteriores constituyen contribuciones muy importantes en los campos de la ingeniería de potencia, de control automático y de procesamiento de señales.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo fue financiado exclusivamente por la Universidad Autónoma de Nuevo León, bajo el Proyecto PAICYT CA1021-05: Estimación Fasorial con Fasoretas bajo Sistemas Eléctricos de Potencia.

REFERENCIAS

- C. P. Steinmetz, "Complex quantities and their use in electrical engineering," in AIEE Proceedings of the International Electrical Congress, Chicago, USA, 1894, pp. 33–74.
- J. A. de la O, "Dynamic phasor estimates for power system oscillations and transient detection," in IEEE Power Engineering Society General Meeting, Montréal, Canada, June 18-22 2006.
- J. A. de la O, "Dynamic phasor estimates for power system oscillations," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 56, no. 5, pp. 1648–1657, Oct. 2007.
- J. G. Proakis & D. G. Manolakis, Digital Signal Processing, 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996, ch. 8, pp. 614-726.
- I. R. Khan & R. Ohba, "New design of full band differentiators based on taylor series," IEE Proc.-Vis Image Sigal Process, vol. 146, no. 4, pp. 185–189, August 1999.
- L. W. Couch, Digital and Analog Communication Systems. New Jersey: Prentice-Hall, 1993, pp. 228-229.
- J. A. de la O, "Phasor estimation from phasorlets," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 54, no. 1, pp. 134–143, Feb 2007.
- J. A. de la O, "Reducing the phasor error in estimates from phasorlets in fault voltage and current signals," IEEE Trans. Instrum. Meas., Feb 2007, in Press. Also in Proceedings of the IEEE PES General Meeting, San Francisco, CA, USA, june 2005.
- 9. A. G. Phadke and J. S. Thorp, Computer Relaying For Power systems. John Wiley and Sons, 1988.
- 10.J. Zuo, Z. Zhong, R. M. Gardner, and H. Zhang, "Off-line event filter for the wide area frequency measurements," in Proceedings of the IEEE PES General Meeting. Montréal, Canada: IEEE, jul 2006.
- 11.J. A. de la O and K. Martin, "Improving phasor measurements under power system oscillations," IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 1, pp. 160–166, Feb. 2003.

- 12.IEEE Standard for Synchrophasors for Power Systems. IEEE Std. C37.118-2005, 2006.
- 13.A. J. Thorpe & L. L. Scharf, "Data adaptive rank-shaping methods for solving least squares problems," IEEE Trans. Signal Process., vol. 43, no. 7, pp. 1591–1601, Jul. 1995.
- 14.A. M. Stankovic & T. Aydin, "Analysis of asymmetrical faults in power systems using dynamic phasors," IEEE Trans. Power Syst., vol. 15, no. 3, pp. 1062–1068, August 2000.
- 15. A. M. Stankovic, H. Lev-Ari, & M. M. Perisic, "Analysis and implementation of model-based linear estimation of dynamic phasors," IEEE Trans. Power Syst., vol. 19, no. 4, pp. 1903–1910, Nov 2004.

- 16.L. Wang, "Frequency responses of phasor-based microprocessor reyalying algorithms," IEEE Trans. Power Del., vol. 14, no. 1, pp. 98–109, Jan. 1999.
- 17.J. G. Proakis, Digital Communications Systems, 4th ed. New York: McGraw Hill, 2000, ch. 9, pp. 556-561.
- 18.T. S. Rapaport, Wireless Communications: Principles and Practice, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999, p. 287.
- 19.J. A. de la O, "Reducing the delay of phasor estimates under power system oscillations," IEEE PES General Meeting, Jun. 2005, submitted to IEEE Trans. Instrum Meas.



La Sociedad Mexicana de Instrumentación, el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad Veracruzana, y la Facultad de Instrumentación Electrónica y Ciencias Atmosféricas convocan al

CONGRESO DE INSTRUMENTACIÓN SOMI XXIII

1 - 3 de octubre de 2008 XALAPA, VERACRUZ SEDE: Museo de Antropología

CONFERENCIAS MAGISTRALES, SESIONES ORALES SIMULTÁNEAS Y DE CARTELES

OBJETIVO: Promover la investigación y desarrollo relacionados con la aplicación de la ciencia y la ingeniería en los diversos campos de la instrumentación y propiciar el intercambio de conocimientos y experiencias entre los participantes.

TRABAJOS EN LAS SIGUIENTES ÁREAS: Acústica aplicada y vibraciones, Cibernética y sistemas complejos, Control, Automática y robótica, Electrónica, Ingeniería biomédica, Ingeniería mecánica (diseño, mecatrónica y micromecánica), Ingeniería óptica, Ingeniería térmica y de fluidos, Instrumentación didáctica, Materiales, Sensores y películas delgadas, metrología, Microondas y telecomunicaciones, Tecnologías de la información e informática, Visualización y procesamiento de imágenes, geofísica de la fractura.

INFORMACIÓN

Secretario Ejecutivo de la SOMI, Dr. Gabriel Ascanio Gasca E-mail: somi@ccadet.unam.mx Tel. +(52) (55) 5622-8635, Fax +(52) (55) 5550-0654 http://somi.cinstrum.unam.mx/somi23/