

Sincronización generalizada en orden reducido para sistemas caóticos

Juan Ángel Rodríguez Liñán, Jesús De León Morales

Centro de Innovación, Investigación y Desarrollo en Ingeniería y Tecnología
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL
angel.rodriguezln@uanl.edu.mx, drjleon@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se presentan esquemas que permiten la sincronización unidireccional generalizada en orden reducido entre sistemas distintos y de diferente orden y que ofrecen condiciones suficientes para asegurar tal sincronización. La estrategia presentada se basa en técnicas por modos deslizantes de alto orden, por lo cual se tiene convergencia en tiempo finito. Además, se presenta una estrategia para supresión de oscilaciones caóticas, basada en un controlador retroalimentado y un observador adaptable. Estos esquemas se implementan y sus resultados se ilustran en algunos casos de estudio.

PALABRAS CLAVE

Sincronización, sistemas caóticos, supresión de caos, observadores por modos deslizantes, control por retroalimentación.

ABSTRACT

Schemes are presented to allow unidirectional generalized synchronization in reduced order for distinct systems with different order and sufficient conditions are offered to ensure such synchronization are presented in this work. The presented strategy is based on high order sliding-mode techniques, achieving finite-time convergence. Moreover, a strategy, based on a feedback controller and an adaptive observer, is presented for chaos suppression. These schemes are implemented and their results are illustrated with some examples.

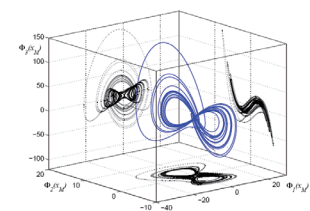
KEYWORDS

Synchronization, chaotic systems, chaos suppression, sliding-mode observers, feedback control.

INTRODUCCIÓN

La sincronización de sistemas implica realizar acciones para lograr que dos o más sistemas tengan un comportamiento común o coincidente en el tiempo. Este fenómeno ha sido muy interesante desde sus primeros hallazgos,¹ tanto por su análisis, como para el desarrollo de tecnologías derivadas de una adecuada manipulación de este fenómeno, ver figura 1.

La sincronización se ha estudiado en sistemas electrónicos, mecánicos, acústicos, biológicos, por citar algunos.¹ Sin embargo, en el estudio de la sincronía



Artículo basado en el proyecto galardonado con el Premio de Investigación UANL 2009, en la categoría de Ciencias Exactas, otorgado en la Sesión Solemne del Consejo Universitario de la UANL, celebrada el 10 de septiembre de 2009.

han surgido algunos casos particulares en los cuales no es evidente el alcance y mantenimiento de un estado sincrónico. Algunos de estos casos se presentan con los sistemas, caóticos, los cuales son sistemas dinámicos deterministas en los que la evolución de sus variables, con determinadas condiciones iniciales, es muy diferente a la evolución de las variables del mismo sistema ante un pequeño cambio en sus condiciones iniciales. Este hecho es bien conocido en fenómenos tales como la turbulencia de fluidos, sistemas meteorológicos, sistemas mecánicos, eléctricos, procesos biológicos y otros.^{2,3}

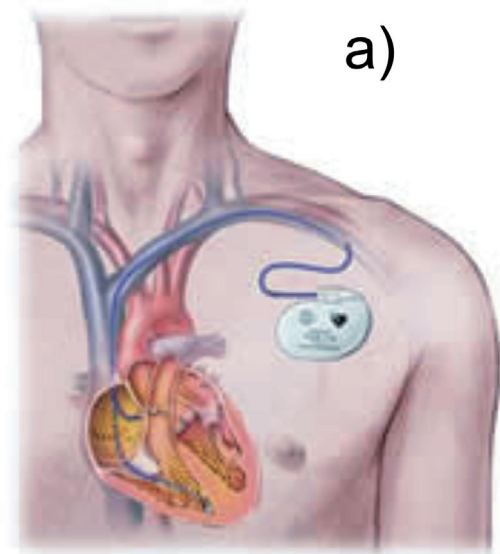


Fig. 1. Aplicaciones de sincronización en sistemas no lineales en general: a) Marcapasos electrónico para sincronizar el ritmo cardíaco, b) Robots manipuladores sincronizados.

A causa de su alta sensibilidad a las condiciones iniciales, dos sistemas caóticos aislados, aunque sean idénticos, no permanecerían en sincronía. A pesar de esto, un estudio de L.M. Pecora y T.L. Carroll⁴ mostró que algunos sistemas caóticos idénticos con una señal común de acoplamiento sí pueden evolucionar en sincronía. Sin embargo, los esquemas en dicho estudio no garantizaban sincronización en forma robusta, porque aun siendo sistemas caóticos idénticamente replicados, en la práctica existen inexactitudes e incertidumbres en los parámetros y componentes de cada sistema, lo cual provocaría divergencia en su evolución dinámica.

En la actualidad, es conveniente que el desarrollo de técnicas para sincronización sea bajo esquemas robustos,⁵ tanto para sistemas idénticos como diferentes, con inexactitudes, con dinámicas desconocidas, de orden diferente, con información limitada o medición parcial de sus variables.¹ De hecho, la sincronización puede alcanzarse en diferentes tipos o grados,⁶ éstos son la sincronización idéntica, sincronización de fase, sincronización en atraso y en adelanto, sincronización generalizada, sincronización completa, sincronización parcial, sincronización en orden reducido.

En este trabajo se estudia la sincronización unidireccional generalizada de orden reducido, la cual consiste en que todas las variables de un sistema esclavo sean sincronizadas, mediante un mapeo, con proyecciones de las variables de un sistema maestro; donde el esclavo es de menor orden que el maestro, dicho de otra manera, de menor cantidad de variables. Este problema es el que se presenta en sistemas o redes de sistemas que no son idénticos, sino de diferentes modelos y diferente orden siguiendo a un sistema líder o maestro, tales como en tareas de robots múltiples, navegación en formación de grupos de vehículos, sistemas láser, procesos automatizados de manufactura y logística sincronizados, por mencionar algunos.^{7,8}

En este trabajo se encuentran condiciones suficientes para garantizar la sincronización generalizada en orden reducido entre sistemas de diferente orden, considerando incertidumbre y dinámicas no modeladas. Considerando que no se dispone de información medible de todas las variables de los sistemas. Debido a esto, se proponen

estrategias basadas en controladores y observadores de estado por modos deslizantes de alto orden para alcanzar la sincronización. Este trabajo se organiza de la siguiente manera: Primeramente, se plantea el problema de sincronización. Luego, se ofrecen dos esquemas de control para sincronización basados en técnicas de modos deslizantes. Posteriormente, se verifica el desempeño del esquema de sincronización implementándolo en algunos casos de estudio. Además, se presenta una estrategia para la supresión de caos, el cual es otro problema importante que consiste en eliminar la dinámica caótica de un sistema. Y finalmente se ilustran los resultados de la implementación del esquema de supresión mediante pruebas experimentales.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

A continuación se presentan algunas consideraciones que se deben hacer para abordar el problema de sincronizar de forma unidireccional dos sistemas caóticos distintos y de diferente orden. Específicamente para que un sistema esclavo siga la dinámica de un sistema líder o maestro de orden mayor.

Considere un sistema maestro dado por

$$\Sigma_M : \begin{cases} \dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)u_M \\ y_M = h_M(x_M) \end{cases} \quad (1)$$

donde $x_M = [x_{1,M}, x_{2,M}, \dots, x_{n_M,M}]^T \in \mathbb{R}^{n_M}$ es el vector de estado, $u_M \in \mathbb{R}$ es una entrada, $y_M \in \mathbb{R}$ es una variable de salida del sistema maestro, f_M y g_M son campos vectoriales suaves, y (1) tiene grado relativo r_M .

Considere un sistema esclavo descrito por

$$\Sigma_s : \begin{cases} \dot{x}_s = f_s(x_s) + g_s(x_s)u_s \\ y_s = h_s(x_s) \end{cases} \quad (2)$$

donde $x_s = [x_{1,s}, x_{2,s}, \dots, x_{n_s,s}]^T \in \mathbb{R}^{n_s}$ es el vector estado, $u_s \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, y_s es una variable de salida, f_s y g_s son campos vectoriales suaves, el sistema (2) tiene grado relativo r_s .

La sincronización en orden reducido corresponde a $n_s < n_M$, aunque en este trabajo se incluye $n_s = n_M$.

Con el fin de encontrar un control u_s que induzca a que las variables del esclavo (2) se sincronicen

con proyecciones de un mapeo de las variables del maestro (1), se define el error de sincronización $\varepsilon = x_s - \Phi(x_M)$, donde $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$ es un mapeo con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n_M}$. Esto se llama sincronización generalizada y está definida como sigue.

Definición 1.⁹ Un sistema esclavo (2) exhibe sincronización generalizada con el sistema maestro (1), si existe un mapeo Φ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s - \Phi(x_M)\| = 0 \quad (3)$$

$\forall t \geq 0$ y cualquier condición inicial $\varepsilon(t_0) = x_s(t_0) - \Phi(x_M(t_0))$.

La definición 1 implica $x_s \rightarrow \Phi(x_M)$, para cualquier diferencia inicial $\varepsilon(t_0) = x_s(t_0) - \Phi(x_M(t_0))$, $\forall t \geq 0$.

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

El error dinámico de sincronización puede representarse como:

$$\Sigma_\varepsilon : \begin{cases} \dot{\varepsilon} = f_\varepsilon(\varepsilon) + g_\varepsilon(\varepsilon)u_s + q(\varepsilon, \xi(x_M, u_M)) \\ y_\varepsilon = h_\varepsilon(\varepsilon) \end{cases} \quad (4)$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n_s}$, y_ε es una función de salida del error de sincronización disponible para retroalimentación, f_ε y g_ε son campos vectoriales suaves y $q(\varepsilon, \xi(x_M, u_M))$ es un campo vectorial suave que contiene términos que dependen del error de sincronización ε , de los estados x_s , x_M y de la entrada u_M contenidos en una función ξ , vista como una perturbación de (4).

El grado relativo¹⁰ es un número entero igual al menor orden de la derivada temporal de la salida y_ε para la cual aparece explícitamente el control u_s . El sistema (4) tiene grado relativo r_s . Similarmemente, el índice característico de perturbación¹⁰ es el número ν de diferenciaciones de la salida y_s que se requieren para que aparezca explícitamente el término ξ .

Basándose en un análisis¹⁰ acerca de la relación entre el grado relativo y el índice de perturbación se llega a las siguientes observaciones.

Nota 1. El caso $\nu < r_s$ no se considera ya que no puede diseñarse un control que garantice el rechazo a la función ξ , a lo más se puede atenuar, y por tanto no se garantiza que el error de sincronización ε tienda a cero. El caso $\nu > r_s$ es trivial puesto que

la función $q(\varepsilon, \xi)$ no afecta el objetivo de control, entonces se puede lograr la sincronización. El caso más interesante es cuando $v=r_s$.

Suposición 1. El sistema (4) es de fase mínima.

Suposición 2. Para el sistema de error de sincronización (4), el índice característico de perturbación se supone $v=r_s$.

Suposición 3. El sistema esclavo tiene grado relativo completo $r_s=n_s$.

Luego, el sistema de error de sincronización (4) se puede transformar en un sistema en nuevas coordenadas en la forma canónica de Brunovsky.

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{e} = A_e e + B_e [\beta(e)u_s + \xi(e, u_M)] \\ \dot{e}^\perp = \eta(e, e^\perp) \\ y_\varepsilon = C_e e \end{cases} \quad (5)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_e = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$

donde $\varepsilon = x_s - \Phi(x_M)$, $e = [e, e^\perp]^T = \phi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_s}$ es el vector de error de sincronización en coordenadas transformadas, $u_s \in \mathbb{R}$ es la entrada de control y $y_\varepsilon \in \mathbb{R}$ es la salida tanto del sistema de error (4) como del sistema (5). Bajo la suposición 1, $\beta(e) = L_{g_e} L_{f_e}^{r_s-1} h_e$ y la función $\xi(e, u_M) = L_{f_e}^{r_s} h_e + L_q L_{f_e}^{r_s-1} h_e$ se considera como un término de perturbación. La función $\eta(e, e^\perp)$, dada por $L_{f_e} e_j^\perp + L_q e_j^\perp$ ($1 \leq j \leq n_s - r_s$), representa la dinámica interna que se supone asintóticamente estable, i.e., el sistema es de fase mínima.¹⁰

Para obtener el cambio de coordenadas de (5) es necesario mantener las siguientes relaciones.

El nuevo error de sincronización está dado por $e = \bar{z}_s - \phi_{proj}(\bar{z}_M)$, donde $\bar{z}_s = \bar{\Phi}_s(x_s)$ y $\bar{z}_M = \bar{\Phi}_M(x_M)$ son transformaciones de coordenadas originales a la forma Brunovsky basadas en geometría diferencial,¹⁰ tanto del esclavo como del maestro, respectivamente; ϕ_{proj} es el mapeo de proyección de la dimensión del maestro \mathbb{R}^{r_M} en la dimensión del esclavo \mathbb{R}^{r_s} . Este error de sincronización puede escribirse en función de las coordenadas originales x_s y x_M como sigue: $e = \bar{\Phi}_s(x_s) - \phi_{proj} \circ \bar{\Phi}_M(x_M)$,

entonces

$$\bar{\Phi}_s^{-1}(e) = x_s - \bar{\Phi}_s^{-1} \circ \phi_{proj} \circ \bar{\Phi}_M(x_M)$$

$$\bar{\Phi}_s^{-1}(e) = x_s - \Phi(x_M) = \varepsilon$$

$$e = \bar{\Phi}_s(\varepsilon)$$

Nota 2. La sincronización generalizada mediante (2) con (1) puede resolverse estabilizando el error de sincronización $e(t)$ del sistema (5) en el origen, equivalentemente ε en el origen.

A partir de lo anterior y bajo la suposición 2 y que $r_s \leq v$, se ha obtenido un método para calcular el mapeo Φ . Este método se resume de la siguiente manera:

1. Para el sistema maestro (1), se calcula el difeomorfismo $\bar{\Phi}_M = [h_M(x_M), L_{f_M} h_M(x_M), \dots, L_{f_M}^{r_M-1} h_M(x_M)]^T$.
2. Para el sistema esclavo (2), se calcula el difeomorfismo $\bar{\Phi}_s = [h_s(x_s), L_{f_s} h_s(x_s), \dots, L_{f_s}^{r_s-1} h_s(x_s)]^T$.
3. Se elige un mapeo de proyección lineal $\phi_{proj} : \mathbb{R}^{r_M} \rightarrow \mathbb{R}^{r_s}$, dado por

$$\phi_{proj}(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r_s \times r_M} \quad (6)$$

para relacionar una a una, tanto a las salidas y_M y y_s como a sus derivadas, puesto que $C_M = [10\dots0]$ y $C_s = [10\dots0]$.

4. Finalmente, se calcula el mapeo dado por $\Phi(\cdot) = \bar{\Phi}_s^{-1} \circ \phi_{proj} \circ \bar{\Phi}_M(\cdot)$.

Es claro que algunos grados o tipos de sincronía de los ya mencionados están contenidos en este análisis, por tanto se pueden abordar con esta misma metodología con mayor generalidad.

ESTRATEGIAS DE CONTROL PARA LA SINCRONIZACIÓN

La sincronización entre los sistemas caóticos (1) y (2) puede interpretarse como un problema de estabilización del sistema de error (5) en el origen.

Se consideran dos estrategias robustas de estabilización del sistema (5) en el origen, constituidas por: (i) Un controlador linealizante

por retroalimentación de estado y un observador por modos deslizantes de alto orden que además identifica la función ξ para que sea cancelada por el controlador. (ii) Un controlador por modos deslizantes de alto orden cuasicontinuo y un diferenciador exacto robusto; esta técnica no identifica a la función ξ y el controlador cuasicontinuo no la requiere. Ambos casos pueden representarse en forma general por el esquema de la figura 2.

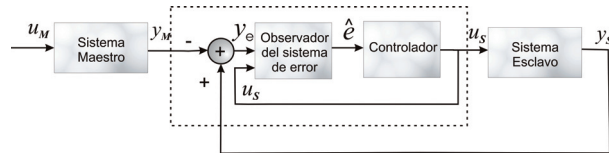


Fig. 2. Esquema para sincronización.

Controlador por retroalimentación y observador por modos deslizantes de alto orden

La técnica de linealización por retroalimentación de estado puede aplicarse con el propósito de estabilizar globalmente al sistema dinámico no lineal, mediante el control

$$u_s = \frac{-\xi(e, u_M) + \sum_{i=1}^{n_s} k_i e_i}{\beta_s(e)} \quad (7)$$

donde los valores de las ganancias k_i , deben ser tales que $s^{n_s} + k_{n_s} s^{n_s-1} + \dots + k_2 s + k_1 = 0$ sea un polinomio Hurwitz.

Con el fin de estimar todas las componentes de e e identificar la entrada desconocida ξ , se presenta el diseño de un observador por modos deslizantes de alto orden¹¹ para reconstruir los estados no medibles e identificar las entradas desconocidas ξ con convergencia exacta en tiempo finito,¹¹ el cual está dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_{r_s+1} M^{1/(r_s+1)} |\hat{e}_1 - e_1|^{r_s/(r_s+1)} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\lambda_{r_s} M^{1/r_s} |\hat{e}_2 - v_1|^{(r_s-1)/r_s} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1) + \hat{e}_3 = v_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{e}}_{r_s} = -\lambda_2 M^{1/2} |\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}) + \hat{\xi} + u_s \\ \dot{\hat{\xi}} = -\lambda_1 M \text{sign}(\hat{\xi} - v_{r_s}) \end{array} \right. \quad (8)$$

donde \hat{e}_i es la estimación de e_i , $\hat{\xi}$ es el valor identificado de ξ , el parámetro M se elige como una constante $M > \xi_1^+$ y las constantes λ_i se escogen suficientemente grandes en forma recursiva.¹² Entonces, puede establecerse los siguientes lemas:

Lema 1. Considere el sistema (5) que satisface las suposiciones de que tiene grado relativo r_s con respecto a la función $\zeta(t)$, la cual está acotada por $|\zeta(t)| \leq \xi^+$. Entonces el sistema (8) es un observador para el sistema (5), donde el error de estimación $(\varrho, \tilde{\xi})^T = (e, \xi)^T - (\hat{e}, \hat{\xi})^T$ converge a cero en tiempo finito, i.e., los estados estimados \hat{e}_i convergen a los estados e_i y $\hat{\xi}(t)$ a la función desconocida $\zeta(t)$.

El siguiente resultado permite asegurar que se preserva la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando se reemplazan los estados en la ley de control (7) por sus valores estimados por el observador (8).

Lema 2. Considere el sistema (5), para el cual se diseña el control linealizante por retroalimentación (7). Suponga que se diseña el observador (8) con convergencia en tiempo finito. Entonces, el sistema aumentado en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Los detalles de estas pruebas pueden consultarse en la referencia¹³.

Controlador por modos deslizantes de alto orden cuasicontinuo y diferenciador exacto robusto

Considérese la dinámica controlable del sistema (5) reescrita en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{e} = a_e(t, e) + b_e(t, e)u_s \\ \sigma = \sigma(t, e) \end{cases} \quad (9)$$

donde $e \in \mathbb{R}^{r_s}$; $a_e, b_e: \mathbb{R}^{r_s} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r_s}$ y $\sigma: \mathbb{R}^{r_s} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones desconocidas suaves, además σ es la variable de salida y $u_s \in \mathbb{R}$ es la variable de entrada. Al compararlo con el sistema (5), se tiene que $a_e(t, e) = A_e e + B_e \xi(x_M, u_M)$, $b_e(t, e) = B_e \beta(e)$ y $\sigma(t, e) = C_e e$.

El objetivo es lograr que $\sigma = 0$ en tiempo finito y mantenerlo exactamente ahí mediante alguna retroalimentación. Dado que la derivadas temporales $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r_s-1)}$ son funciones continuas de la salida del sistema en lazo cerrado y la superficie de deslizamiento definida por

$$\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r_s-1)} = 0 \quad (10)$$

es no vacía y consiste localmente de trayectorias de Filippov, el movimiento sobre (10) se llama modo r_s -deslizante (o deslizante de r_s -ésimo orden).¹² El control aparece en forma explícita en la r_s -ésima derivada temporal de σ , la cual está dada por

$$\sigma^{(r_s)} = h(t, e) + g(t, e)u_s \quad (11)$$

donde $h(t, e) = \sigma^{(r_s)}|_{u_s=0}$, $g(t, e) = (\partial/\partial u_s)\sigma^{(r_s)} \neq 0$.

Se supone que, para algún $K_m, K_M, C > 0$, se preserva la siguiente desigualdad

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u_s} \sigma^{(r_s)} \leq K_M, \quad |\sigma^{(r_s)}|_{u_s=0} \leq C \quad (12)$$

A partir de (11) y (12), la inclusión diferencial de Filippov.

$$\sigma^{(r_s)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u_s. \quad (13)$$

significa que el conjunto vectorial del lado derecho se extiende dentro de las cotas C, K_m, K_M en lugar de satisfacer un único punto o solución.¹⁴ Así, la estabilización en tiempo finito de (13) en el origen resuelve el problema planteado de manera simultánea para todos los sistemas (9) que satisfacen (12). Un controlador que permite estabilizar a (13) en tiempo finito corresponde a los teoremas.

Teorema 1¹⁵ El controlador

$$u_s = -k\Psi_{r_s-1, r_s}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r_s-1)}) \quad (14)$$

es homogéneo r_s -deslizante y, con los parámetros $\beta_1, \dots, \beta_{r_s-1}, k > 0$ elegidos suficientemente grandes, provee estabilidad en tiempo finito de (13) y (14). El modo r_s -deslizante estable en tiempo finito $\sigma \equiv 0$ se establece en el sistema (9) y (14).

El controlador (14) es una función continua excepto en la superficie (10) y requiere el cálculo en tiempo real de $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r_s-1)}$. Como se ha supuesto que no todos los estados están disponibles se presenta un diferenciador, el cual es un sistema capaz de calcular las derivadas a partir del conocimiento de la variable σ . Un diferenciador de r_s -ésimo orden está dado por

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_{r_s+1} |\hat{e}_1 - e_1|^{r_s/(r_s+1)} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\lambda_{r_s} |\hat{e}_2 - v_1|^{(r_s-1)/r_s} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1) + \hat{e}_3 = v_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{e}}_{r_s} = -\lambda_2 |\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}) + \hat{e}_{r_s+1} = v_{r_s} \\ \dot{\hat{e}}_{r_s+1} = -\lambda_1 M \text{sign}(\hat{e}_{r_s+1} - v_{r_s}) \end{cases} \quad (15)$$

donde los parámetros del diferenciador (15) se eligen de acuerdo a la condición $|\sigma^{(r_s)}| \leq M$, tal que $M \geq C + kK_M$. La convergencia del diferenciador en tiempo finito se establece tomando λ_i como en.¹²

Teorema 2.¹² Eligiendo los parámetros λ_i como en la referencia¹², son ciertas las igualdades $\hat{e}_1 = e_1$ y $\hat{e}_{i+1} = v_i = e_1^{(i)}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, r_s$, en ausencia de ruido de entrada, después de un transitorio de tiempo finito.

Entonces, una solución al problema de sincronización para dos sistemas con diferente grado relativo se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3. Considere el sistema incierto (9) que satisface la desigualdad (12) y las suposiciones 1, 2, 3. El sistema incierto (9) en lazo cerrado con el control (14) y utilizando el diferenciador exacto robusto (15) es tal que el error de sincronización e , equivalente a ε , tiende a cero en tiempo finito.

Los detalles de estas pruebas pueden consultarse en la referencia¹⁶.

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESQUEMAS DE SINCRONIZACIÓN

Ahora, con el fin de ilustrar la implementación de los esquemas presentados, se consideran los siguientes casos de estudio.

Transductor electrostático no lineal - Ecuación Duffing

El sistema maestro corresponde a un modelo de transductores electrostáticos no lineal de cuarto orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,M} = x_{2,M} \\ \dot{x}_{2,M} = -c x_{2,M} - d^2(x_{1,M} - x_{3,M} - x_{1,M}x_{3,M}) \\ \dot{x}_{3,M} = x_{4,M} \\ \dot{x}_{4,M} = -a x_{4,M} - x_{3,M} - x_{3,M}^3 + b(x_{1,M} + x_{1,M}^2/2) + u_e(t) \end{cases} \quad (16)$$

donde $x_{i,M}$ son las variables de estado, a, b, c, d, f son parámetros del sistema y $u_e(t)$ es una excitación de entrada, $y = x_{1,M}$ es la variable de salida medible.

El sistema esclavo corresponde a la conocida ecuación Duffing con dos entradas de excitación dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,s} = x_{2,s} \\ \dot{x}_{2,s} = -\rho x_{2,s} + \omega_0 x_{1,m} - \gamma x_{1,s}^3 \\ \quad + K_1 \cos(\omega_1 t) + K_2 \cos(\omega_2 t) + u_s \end{cases} \quad (17)$$

Donde $x_{i,s}$ son las variables de estado, u_s es la entrada de control. $y=x_{l,s}$ es la variable de salida medible, ρ, ω_0, γ son parámetros constantes del sistema, K_i y ω_i son las amplitudes y frecuencias de las entradas de excitación.

Siguiendo el procedimiento presentado en este trabajo se calcula el mapeo $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(x_M) = \bar{\Phi}_s^{-1} \circ \Phi_{proj} \circ \bar{\Phi}_M(x_M) = [\Phi_1(x_M), \Phi_2(x_M)]^T$$

$$\Phi(x_M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,M} \\ x_{2,M} \end{bmatrix}$$

Entonces, se implementa el esquema sincronización para el sistema (11) con un subsistema de (10).

La ley de control u_s está dada por:

$$u_s = -\xi - k_1 e_1 - k_2 e_2 \quad (18)$$

Un observador que estima las variables e_1, e_2 y la función ξ queda expresado por

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_3 M^{1/3} |\hat{e}_1 - e_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = \underbrace{-\lambda_2 M^{1/2} |\hat{e}_2 - v_1|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1)}_{v_2} + \hat{\xi} + u_s \quad (19) \\ \dot{\hat{\xi}} = -\lambda_1 M \text{sign}(\hat{\xi} - v_2) \end{cases}$$

El desempeño del esquema formado por el controlador (18) y observador (19) en lazo cerrado con los sistemas (16) y (17) está ilustrado en simulación con los siguientes parámetros: $a=0.03, b=0.1, c=0.3, d=0.985, \rho=1, \omega_0=10, \gamma=100, K_1=K_2=1, \omega_1=2, \omega_2=4, M=1950, \lambda_3=3.0, \lambda_2=1.5, \lambda_1=1.1$. La entrada de excitación fue $u_e(t)=0.3\cos(t)$. Las condiciones iniciales fueron $x_M(0)=[0 \ 0]^T$ y $x_s(0)=[0.1 \ 0]^T, \hat{e}_1(0)=4, \hat{e}_2(0)=-2$ y $\hat{\xi}(0)=1$.

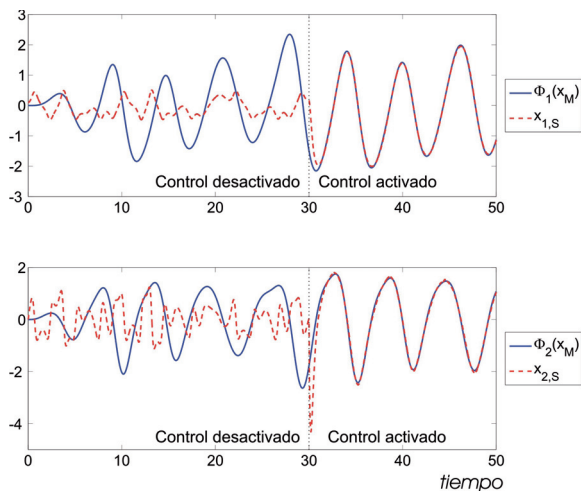


Fig. 3. Sincronización del sistema (16) y (17).

Los resultados de sincronización se muestran en la figura 3, sincronizando el estado x_s con el mapeo $\Phi(x_M)$ a partir de $t=30$ segundos.

Lorenz generalizado - Rössler

En este caso se sincronizan los siguientes sistemas caóticos. El sistema maestro está representado por el sistema generalizado de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,M} = -a_M x_{1,M} + a_M x_{2,M} + c_M x_{4,M} \\ \dot{x}_{2,M} = h_M x_{1,M} - x_{2,M} - x_{1,M} x_{3,M} \\ \dot{x}_{3,M} = -b_M x_{3,M} + x_{1,M} x_{2,M} \\ \dot{x}_{4,M} = -x_{1,M} - a_M x_{4,M} \end{cases} \quad (20)$$

donde x_M es el vector de estado, $y_M=x_{1,M}$ es la salida medible, $a_M, b_M, c_M,$ y h_M son coeficientes constantes.

El sistema esclavo está dado por el sistema Rössler

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,s} = -x_{2,s} - x_{3,s} \\ \dot{x}_{2,s} = x_{1,s} + a_s x_{2,s} \\ \dot{x}_{3,s} = x_{3,s} (x_{1,s} - c_s) + b_s + u_s \end{cases} \quad (21)$$

donde x_s es el vector de estado, $y_s = x_{2,s}$ es la salida medible, u_s es la entrada de control; a_s, b_s y c_s son coeficientes constantes. Se calcula el mapeo $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, el cual es $\Phi(x_M)=$

$$\begin{bmatrix} -(a_M+a_s) & a_M & 0 & c_M \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ (c_M-a_M(a_s+a_M+h_M)-1) & a_M(1+a_M+a_s) & a_M x_{1,M} & c_M(2a_M+a_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,M} \\ x_{2,M} \\ x_{3,M} \\ x_{4,M} \end{bmatrix}$$

El controlador cuasicontinuo estabilizante (14) calculado para el ejemplo es dado por

$$u_s = -k \frac{[\hat{e}_3 + 2(|\hat{e}_2| + |\hat{e}_1|^{2/3})^{-1/2} (\hat{e}_2 + |\hat{e}_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{e}_1))]}{[|\hat{e}_3| + 2(|\hat{e}_2| + |\hat{e}_1|^{2/3})^{1/2}]} \quad (22)$$

Para estimar las funciones e_i en tiempo real, se diseña el diferenciador (15)

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_4 |\hat{e}_1 - e_1|^{3/4} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\lambda_3 |\hat{e}_2 - v_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1) + \hat{e}_3 = v_2 \\ \dot{\hat{e}}_3 = \underbrace{-\lambda_2 |\hat{e}_3 - v_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_3 - v_2)}_{v_3} + \hat{e}_4 + u_s \\ \dot{\hat{e}}_4 = -\lambda_1 \text{sign}(\hat{e}_4 - v_3) \end{cases} \quad (23)$$

Se tomaron los siguientes parámetros para mostrar el desempeño en simulación: $a_M=1.0, b_M=0.07,$

$c_M=1.5$, $h_M=26$, $a_s=0.2$, $b_s=0.2$, y $c_s=5.7$, $\lambda_1=1.1M$, $\lambda_2=1.5M^{1/2}$, $\lambda_3=2.0M^{1/3}$, $\lambda_4=3.0M^{1/4}$, $M=12000$, $k=30$. Las condiciones iniciales se ubicaron en $x_M(0)=(1,0,-1,1)^T$, $x_s(0)=(-1,2,2)^T$, $\hat{e}(0)=[0,0,0,0]^T$.

En la figura 4 se muestra la sincronización en tiempo finito del estado x_s con el mapeo $\Phi(x_M)$, accionado a partir de $t=15$ segundos.

Con estos casos se muestra el buen desempeño de los esquemas para sincronización generalizada unidireccional en orden reducido.

SUPRESIÓN DE DINÁMICAS CAÓTICAS

También se presenta una estrategia para otro problema de control de caos: La supresión de caos. Se muestra que las trayectorias de un sistema caótico se estabilizan alrededor de algún punto de equilibrio. Esto es importante debido a que las oscilaciones erráticas de un sistema caótico son impredecibles y pueden producir daños. Actualmente, la supresión de caos ayuda en tratamientos de desórdenes cardíacos y epilepsia, en sistemas de láser, en mecatrónica.^{7,17}

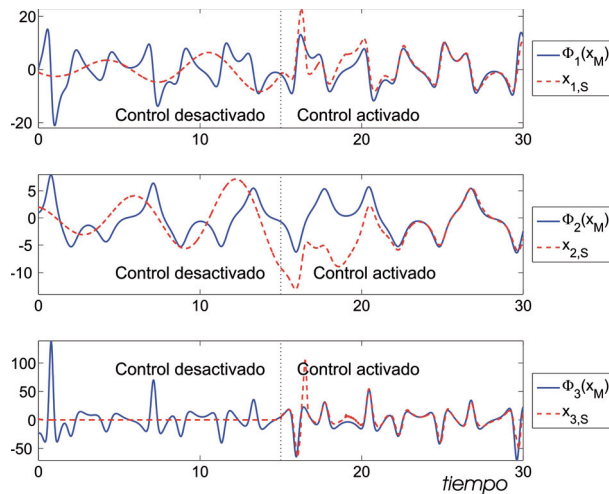


Fig. 4. Sincronización de los sistemas (20) y (21).

Sistemas caóticos de clase P

Malasoma¹⁸ reportó seis sistemas que satisfacen una ecuación $jerk \ x^{(3)} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$, con soluciones caóticas. Estos sistemas se agrupan en una clase, llamada clase P, la cual se reporta como la clase de sistemas caóticos más simples actualmente. La ecuación diferencial de estos seis sistemas de tercer orden contiene una no linealidad tipo cuadrática:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 1 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2 \end{cases}$$

Todos los sistemas clase P son caóticos para el intervalo¹⁸ $2.0168 < \alpha < 2.0577$.

Ley de control para supresión

Considerando los sistemas caóticos clase P en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x; \alpha) + g(x; \alpha)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (24)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, u , y y son los vectores de estado, entrada y salida a controlar del sistema, respectivamente. Si el sistema tiene puntos de equilibrio en su dominio y es de grado relativo pleno $r=n$, puede ser estabilizado mediante un control por retroalimentación de estado descrito por

$$u = \frac{-L_f^r h(x) - k_1 y - k_2 y^{(1)} - \dots - k_r y^{(r-1)}}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (25)$$

donde k_i ($i=1,2,\dots,r$) deben ser tales que $s^r + k_r s^{r-1} + \dots + k_2 s + k_1$ es un polinomio Hurwitz.

Esta ley de control requiere todas las variables de estado, así como el parámetro incierto α . Sin embargo, se hace la suposición de que sólo se dispone de una salida medible $y_m(t)$. Entonces, se presenta un observador adaptable para superar esta

limitación, este observador estima tanto el estado como el parámetro desconocido.

$$\begin{cases} \dot{z} = A(u, y_m)z + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\theta \\ y_m = Cz \end{cases} \quad (26)$$

donde las componentes de $A(u, y_m)$, $\varphi(u, y_m)$ y $\Phi(u, y_m)$ son funciones continuas uniformemente acotadas dependientes de u, y_m , y θ es un vector de parámetros constantes desconocidos. Ahora, se introducen algunas suposiciones requeridas.

Suposición 4.¹⁹ Existe una matriz variante en el tiempo $K(t)$ acotada tal que el sistema $\dot{\eta} = (A(t) - K(t)C)\eta$ es estable en forma exponencial.

Suposición 5.¹⁹ La solución $\Lambda(t)$ de $\dot{\Lambda}(t) = [A(t) - K(t)C]\Lambda(t) + \Phi(t)$ es un término de excitación persistente en el sentido que existen α_1, β_1, T_1 , tales que

$$\alpha_1 I \leq \int_t^{t+T_1} \Lambda(\tau)^T C^T \Sigma C(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta_1 I \quad (27)$$

para alguna matriz definida positiva acotada Σ .

Suposición 6.²⁰ La entrada u es de excitación persistente en el sentido que existen $\alpha_2, \beta_2, T_2 > y t_0 \geq 0$ tales que

$$\alpha_2 I \leq \int_t^{t+T_2} \Psi_u(\tau, t)^T C^T \Sigma C(\tau) \Psi_u(\tau, t) d\tau \leq \beta_2 I \quad (28)$$

$\forall t \geq t_0$, donde Ψ_u denota la matriz de transición para el sistema $\dot{z} = Az, y_m = Cz$ y Σ alguna matriz definida positiva acotada.

A partir de las condiciones de excitación (27) y (28) con $K=S^{-1}C^T$, donde S es solución de $\dot{S} = -\rho S - A(u, y_m)^T S - SA(u, y_m) + C^T \Sigma C$. Entonces, un observador adaptable para (24) está dado por

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A(u, y_m)\hat{z} + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\hat{\theta} \\ \quad + \{\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T + S_z^{-1} C^T\} \Sigma (y_m - C\hat{z}) \\ \dot{\hat{\theta}} = S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma (y_m - C\hat{z}) \\ \dot{\Lambda} = \{A(u, y_m) - S_z^{-1} C^T \Sigma C\} \Lambda + \Phi(u, y_m) \\ \dot{S}_z = -\rho_z S_z - A(u, y_m)^T S_z - S_z A(u, y_m) + C^T \Sigma C \\ \dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \end{cases} \quad (29)$$

donde $S_z(0) > 0$ y $S_\theta(0) > 0$, ρ_z y ρ_θ son constantes positivas y Σ una matriz definida positiva.

Teorema 4.²¹ Si se satisfacen las suposiciones 4, 5 y 6, entonces el sistema (29) es un observador

adaptable para el sistema (26). Además, el vector de error de estimación ($e_z := \hat{z} - z, \epsilon_\theta := \hat{\theta} - \theta$) converge exponencialmente a cero con una razón dada por $\rho = \min(\rho_z, \rho_\theta)$.

Por otro lado, se observa que un sistema clase P en la forma (24) puede transformarse en un sistema afín en el estado (26) mediante la transformación $z=Q(x)$, la cual existe y es invertible en la clase P.¹⁸

El esquema completo en lazo cerrado controlador, observador y planta se muestra en la figura 5. El análisis de estabilidad se resume en el siguiente teorema.

Teorema 5. Si el estado extendido $Z=[z\theta]^T$ de lazo cerrado permanece para tiempo positivo

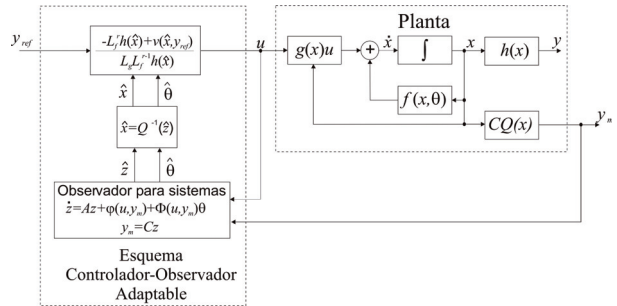


Fig. 5. Esquema control y observador para supresión de caos.

en un conjunto compacto Ω (el cual contiene el punto de equilibrio del controlador nominal) $\forall Z(0) \in \Omega$, el sistema completo en lazo cerrado es global y asintóticamente estable en $\Omega \times \mathbb{R}^n \times S_n^+$, $\forall Z(0) \in \Omega, \forall \dot{Z}(0) \in \mathbb{R}^n, \forall S(0) > 0$.

Los detalles de esta prueba puede consultarse en la referencia²².

La implementación se realiza considerando el siguiente sistema caótico clase P

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (30)$$

donde sólo se mide $y_m = x_2$, el parámetro α es constante y desconocido. La variable $y_c = x_1$ es estabilizada en el origen.

El sistema (30) se implementó con amplificadores operacionales y otros componentes. Se diseñó la ley de control (25) y el observador (26) y se implementaron mediante un sistema de adquisición de datos DSpace 1104. Las figuras 6 y 7 muestran, respectivamente, una foto del equipo experimental e imágenes del osciloscopio en donde se aprecian las

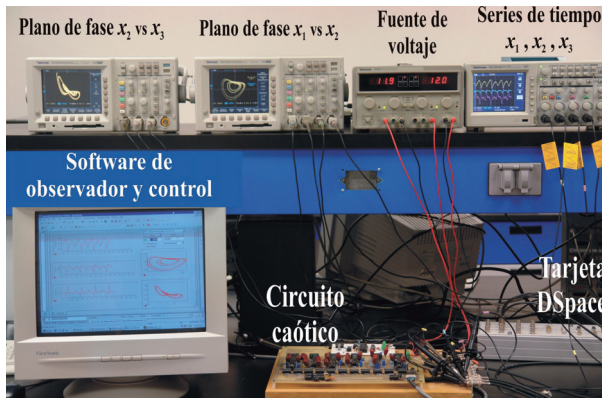


Fig. 6. Foto del equipo experimental.

series de tiempo y proyecciones del atractor caótico en dos planos durante los experimentos.

La supresión de las oscilaciones caóticas se muestra en la figura 8, éstas se suprimen durante un intervalo predefinido en el que se aplica la señal de control. Al desactivar la señal de control, la dinámica caótica vuelve aparecer.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una solución al problema de sincronización unidireccional generalizada de mismo orden y en orden reducido para una clase de sistemas. La sincronización puede lograrse si el índice característico de perturbación es mayor o igual al grado relativo en el sistema de error de sincronización.

Se propuso un procedimiento para el cálculo sistemático de los mapeos requeridos en sincronización generalizada.

Se ofrecieron dos esquemas de técnicas de control para sincronización y estimación de variables no medibles, para los cuales se obtuvieron condiciones suficientes de convergencia y estabilidad de lazo cerrado en tiempo finito.

Se verificó el funcionamiento de los esquemas de sincronización implementándolos en algunos casos de estudio.

Por otra parte, se presentó un esquema para supresión de oscilaciones caóticas, basado en un control retroalimentado y un observador adaptable, para el cual se ofrecieron condiciones suficientes de estabilidad en lazo cerrado. Los resultados de este esquema de supresión se verificaron experimentalmente mediante osciladores electrónicos.

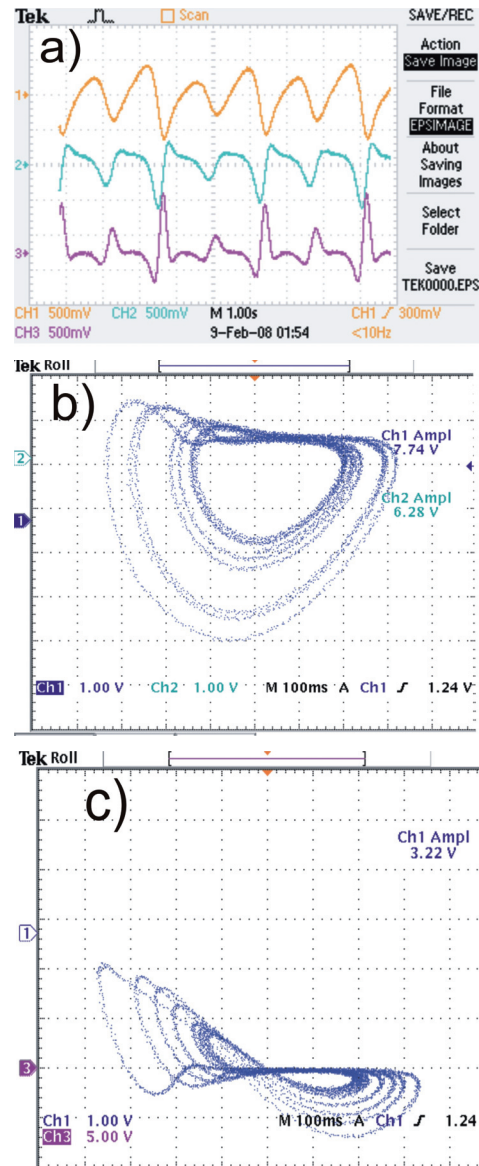


Fig. 7. Señales caóticas del circuito en osciloscopio.

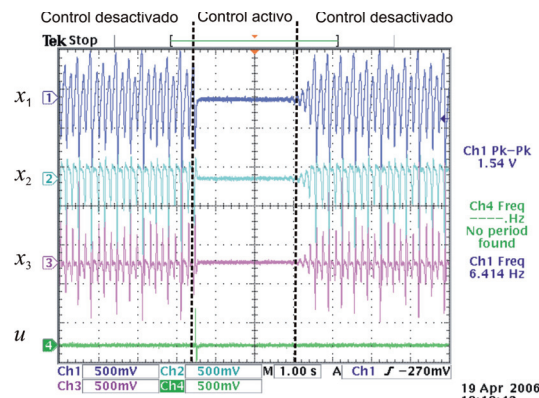


Fig. 8. Oscilaciones caóticas suprimidas en un intervalo de tiempo.

REFERENCIAS

1. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2001.
2. E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmospheric Sci.*, 20(2):130–141, 1963.
3. B.R. Andrievskii and A.L. Fradkov, Control of chaos: Methods and applications, *Automation and Remote Control*, Vol. 64, No. 5, pp. 673–713, 2003.
4. L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64, No. 8, pp. 821–824, 1990.
5. R. Femat and Solís-Perales. *Robust Synchronization of chaotic systems via feedback*, Vol. 378, Lecture notes in control and information sciences. Springer, 2008.
6. R. Femat and G. Solís-Perales. On the chaos synchronization phenomena. *Physics Letters A*, 262:50–60, 1999.
7. S. Dong and J.K. Mills. Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(4):498–510, 2002.
8. R. McAllister, A. Uchida, R. Meucci, and Rajarshi-Roy. Generalized synchronization of chaos: Experiments on a two-mode microchip laser with optoelectronic feedback. *Physica D*, 195:244–262, 2004.
9. S.S. Yang and C.K. Duan. Generalized synchronization in chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9(10):1703–1707, 1998.
10. R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive, and Robust*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1995.
11. L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, and X.G. Yan. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5):399–413, 2008.
12. A. Levant. High-order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76(9/10):924–941, 2003.
13. A. Rodríguez, J. De León, and L. Fridman. Synchronization in Reduced-Order of Chaotic Systems via Control Approaches based on High-Order Sliding-Mode Observer. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 42, pp. 3219–3233, 2009.
14. A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830, 2005.
15. A. Levant. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1812–1816, November 2005.
16. A. Rodríguez, J. De León, L. Fridman, Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers for reduced-order chaos synchronization, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43 pp. 948–961, 2008.
17. O. Peñaloza, J. Alvarez, Supresión de Caos en un manipulador planar subactuado, *Revista IEEE América Latina*, Vol. 2, No. 1, 2004.
18. J.M. Malasoma, A New Class of Minimal Chaotic Flows, *Phys. Lett. A*, Vol. 305, pp. 52–58, 2002.
19. Q. Zhang, Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 47, No. 3, pp. 525–529, 2002.
20. H. Hammouri and J. De León-Morales, Observers synthesis for state affine systems, in *Proceedings of the 29th IEEE Conference of Decision and Control*, pp. 784–785, Honolulu, Hawaii, 1990.
21. G. Besançon, J. De-León, and O. Huerta. On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control*, 79(6):581–591, June 2006.
22. Ángel Rodríguez, Jesús De León, Ricardo Femat, Crescencio Hernández-Rosales, A dynamic parameter estimator to control chaos with distinct feedback schemes, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, Vol. 14, pp. 4280–4291, 2009.