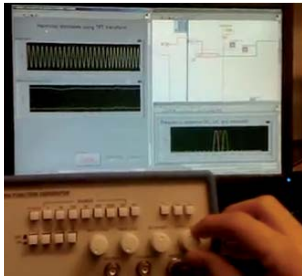


Análisis de armónicas dinámicas mediante la transformada Taylor-Fourier

Miguel Ángel Platas Garza, José Antonio de la O Serna
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL
miguel.platas@gmail.com , jdelao@ieee.org



RESUMEN

Se presenta un nuevo estimador de armónicas dinámicas mediante una extensión de la Transformada rápida de Fourier (FFT), denominada Transformada Taylor-Fourier (TFT), la que se basa en la expansión en series de McLaurin de cada envolvente compleja. La TFT es capaz de estimar mejor las armónicas variantes en el tiempo dentro de la ventana temporal de observación, además, los coeficientes de la TFT tienen significado físico, pues representan muestras instantáneas de las primeras derivadas de la envolvente compleja: posición, velocidad, aceleración, etc. tanto de la amplitud como de la fase, y se obtienen de un golpe por una transformación lineal. El estimador Taylor-Fourier puede concebirse como un banco de filtros máximamente lisos de respuesta impulsional finita (FIR). Además de obtener estimaciones fasoriales más nítidas bajo condiciones dinámicas, también estima la frecuencia instantánea del sistema y las primeras derivadas de cada armónica, tan útiles para detectar la inestabilidad del sistema. Dos ejemplos reales permiten evaluar el rendimiento del nuevo estimador propuesto.

PALABRAS CLAVE

Estimación armónica, estimación fasorial, transformada de Fourier, diferenciadores digitales, filtros máximamente lisos, envolvente compleja, ajuste espectral, interpolación.

ABSTRACT

A new dynamic harmonic estimator is presented as an extension of the Fast Fourier Transform (FFT) named Taylor-Fourier Transform (TFT) since it is based on the McLaurin series expansion of each complex envelope. This estimator is able to produce a better estimated of harmonics that are time varying inside the observation window, and the coefficients of the TFT have physical meaning: they represent instantaneous samples of the first derivatives of the complex envelope, all of them calculated at once through a linear transform. The Taylor-Fourier estimator can be seen as a bank of maximally flat FIR filters. In addition to cleaner harmonic phasor estimates under dynamic conditions, also estimates the instantaneous frequency and first derivatives of each harmonic. Two examples are presented to evaluate the performance of the proposed estimator.

KEYWORDS

Harmonic estimation, phasor estimation, Fourier transform, digital differentiators, maximally flat filters, complex envelope, spectral fit, interpolation.



Traducido de la versión original: M.A. Platas-Garza y J. A. de la O, "Dynamic Harmonic Analysis through Taylor-Fourier Transform", IEEE Transaction on instrumentation and measurement, Vol. 60, No. 3, pp. 804-813, marzo 2011. Publicado con el permiso de la IEEE Instrumentation and Measurement Society.

INTRODUCCIÓN

La estimación armónica es muy importante en muchas áreas de la ingeniería, algunos ejemplos de sus aplicaciones se muestran en^{1,2,3}. Las técnicas de estimación armónica asumen que la señal analizada es periódica, lo que implica frecuencia fundamental y coeficientes de Fourier constantes (en amplitud y fase) en la ventana temporal de observación. Hacen uso de la transformada de Fourier de tiempo discreto (DFT) para estimar los coeficientes de Fourier, que ofrece la mejor aproximación del modelo de señal periódica a la señal analizada. De hecho, ofreciendo una base completa para señales periódicas,⁴ la DFT, o en su versión rápida, la FFT, es una excelente técnica para estimar armónicos estáticos. Pero, es bien sabido que en la práctica, en muchas aplicaciones, las señales no cumplen con la supuesta periodicidad. Y en particular, la DFT no es adecuada para la estimación de armónicas dinámicas, es decir, armónicas que contienen fluctuaciones dentro de la ventana temporal de observación. Cuando éstas suceden, lo mejor que puede hacer la DFT es estimarlas por su mejor promedio constante durante toda la ventana de observación, truncando las fluctuaciones que se desea capturar, de manera semejante a la foto tomada a un objeto en movimiento, cuya imagen sale borrosa debido a que su elaboración supone una imagen estática.

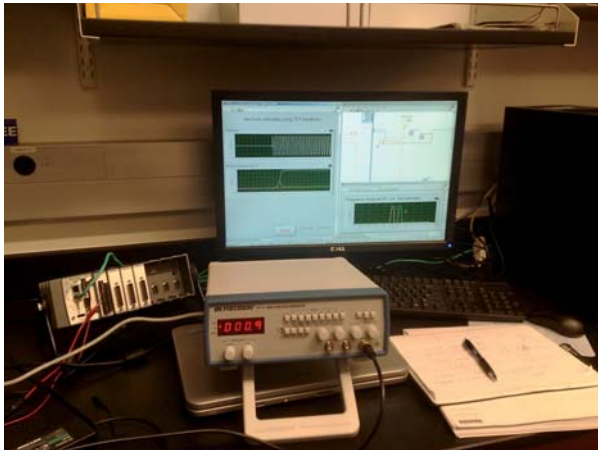
Hay principalmente dos anomalías reportadas ampliamente en la literatura: las fugas espectrales y la interferencia interarmónica.⁵ La primera se refiere a los errores que se producen cuando la frecuencia fundamental de la señal periódica fluctúa; la segunda, alude a los errores debidos a la superposición de componentes armónicos ensanchados. Sin embargo, ambas anomalías se explican teniendo en mente el paradigma DFT:⁶ en el primer caso, se supone que la frecuencia cambia de un ciclo al siguiente, pero permaneciendo constante en cada uno de ellos; en el segundo, se supone que el filtro de Fourier de cada armónica es ortogonal al lóbulo principal de cualesquiera de las otras, pero de nuevo, esto es solamente válido bajo la suposición estática de la DFT. Ambas anomalías son inherentes a las pobres propiedades espectrales de la DFT. Muchas soluciones paliativas a estos problemas se han propuesto en la literatura, ver por ejemplo:⁷⁻¹⁴

Otro problema bien conocido de la FFT fue señalado por los pioneros de la teoría de onduletas: su falta de resolución tiempo-frecuencia. La transformada corta de Fourier (STFT)¹⁵⁻¹⁶ trató de resolverlo, pero todavía presenta una resolución constante tiempo-frecuencia. Entonces se propusieron las transformadas onduletas (WT),¹⁷⁻¹⁸ para mejorar la resolución en el plano tiempo-frecuencia, ofreciendo una buena compresión en la codificación de la señal. El principal problema de las transformadas onduletas es la falta de significado físico de sus coeficientes. Es por eso que su uso quedó limitado a la pura compresión del código de la señal. Otro problema de las WT es que en general no garantizan un error de reconstrucción inferior al de la FFT.

Aunque las técnicas mostradas aquí puedan aplicarse en cualquier área de la ingeniería, concentraremos nuestra atención en estimación de armónicos en sistemas de potencia bajo oscilaciones. La contaminación armónica en la red se ha convertido en un serio problema con la proliferación de cargas no lineales de dispositivos electrónicos, produciendo efectos nocivos. Además, en la última década, con el aumento de intercambios de potencia a través de las redes de área amplia (WANS), las oscilaciones han proliferado en los sistemas de potencia. Debido a la presencia de sistemas no lineales en las WANS, es obvio que dicha condición oscilatoria se propague a todas las armónicas presentes en la red. Como las oscilaciones anuncian el probable colapso de la red, las armónicas deben de monitorearse con la máxima precisión posible.

Se han propuesto un gran número de algoritmos para estimar las armónicas en un sistema de potencia, el más usado es la FFT.¹⁹ Algunos algoritmos recientes usan aproximaciones recursivas para estimar las armónicas, ver por ejemplo.^{20 y 21} En²¹ se presenta un filtro adaptivo para extraer las componentes armónicas usando retroalimentación de frecuencia para adaptar los parámetros del filtro. Pero este método usa respuestas en frecuencia no planas, las cuales no son adecuadas para la estimación de las armónicas dinámicas; tiene retrasos entre sus etapas; y no es válido para aplicaciones en tiempo real.

La principal idea de este artículo, cuya versión en inglés ya está disponible electrónicamente en²², consiste en relajar la restricción constante impuesta



en el modelo de señal a los coeficientes de Fourier. Cada armónica puede ser ahora modulada por una función temporal suave, definida por un polinomio de Taylor de un orden dado mayor a cero. Este modelo expandido conduce a una mejora importante del análisis de Fourier mediante la dilatación del espacio vectorial de la DFT. De esta manera, los coeficientes de la transformada Taylor-Fourier (TFT) incluirán, además de los valores instantáneos de la fluctuación armónica, sus primeras derivadas, como en cualquier aproximación de Taylor. Entonces el subespacio expandido de la TFT será igual o mayor que el subespacio generado por la transformada de Fourier (FT). Y en consecuencia, el error de aproximación de la TFT será siempre menor o igual al de la FT. Además, la estimación de los coeficientes TFT de orden cero mejorarán siempre los de la FT, debido a que la TFT rechaza las derivadas de las fluctuaciones armónicas que se infiltran en los de la FT.

Una objeción podría suscitarse aquí. Es el hecho de que los términos de Taylor no sean ortogonales entre sí, y que por lo tanto la base vectorial de la TFT sea oblicua. Esta objeción se resuelve afirmando que la ortogonalidad no es del todo una condición para la existencia de la solución de la aproximación por mínimos cuadrados. La condición necesaria es que los vectores de la base sean linealmente independientes, la cual se cumple en bases oblicuas. Además, las ecuaciones normales de la solución de mínimos cuadrados garantiza que los filtros resultantes tengan respuestas en frecuencia máximamente lisas²³ junto a las frecuencias armónicas. Esto quiere decir que en cada armónica, sus ganancias complejas correspondan a la de los diferenciadores ideales

tomados en cuenta; con ganancia nula, también máximamente lisa, en las armónicas restantes.

La principal contribución de este artículo es aportar una nueva transformada digital, la transformada Taylor-Fourier. Ésta provee un banco de filtros FIR mejorado para la estimación de armónicas dinámicas. Los nuevos filtros en cada armónica no solamente tienen ganancias lisas de diferenciación más amplias (lo que elimina las distorsiones de amplitud y fase), sino que también rechazan la interferencia interarmónica, con ganancias lisas nulas junto a las armónicas restantes. Además de mejorar los coeficientes de Fourier, la nueva transformación estima los coeficientes de Taylor, correspondientes a las primeras derivadas de las envolventes complejas de cada armónica.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la siguiente sección se describe el modelo de señal en el caso continuo y discreto. Enseguida se caracterizan las respuestas en frecuencia de los filtros FIR del banco. Finalmente se presentan dos ejemplos, uno teórico y otro real, tomado de una red eléctrica europea, para ilustrar y cuantificar la mejora de las estimaciones. En las últimas dos secciones se dan las principales conclusiones y limitaciones de la nueva transformación.

MODELO DE SEÑAL

Sea $L_2(R)$ un espacio de Hilbert, el cual contiene todas las funciones complejas cuadráticamente integrables, y sea $x(t) \in L_2(R)$ una señal no necesariamente periódica, la cual, en presencia de armónicas, describe el comportamiento de un sistema de potencia bajo condiciones de oscilación

$$x(t) = \sum_{h=0}^H \alpha_h(t) \cos(2\pi h f_1 t + \varphi_h(t)) \quad (1)$$

o equivalentemente por:

$$x(t) = \sum_{h=-H}^H c_h(t) e^{j2\pi h f_1 t} \quad (2)$$

donde f_1 representa la frecuencia fundamental (típicamente 60 o 50 Hz), H el número máximo de armónicas incluidas en el modelo, $a_h(t)$ y $\varphi_h(t)$ la variación de amplitud y fase de la h -ésima armónica (dinámica). De manera sintética, $c_h(t) = a_h(t) e^{j\varphi_h(t)}$ se define como la envolvente compleja de cada armónica h . Nuestra principal suposición es que

$c_h(t)$ es de banda limitada por ρ , con $\rho \ll f_1$. Note que si $\rho \rightarrow 0$ entonces $c_h(t) \rightarrow c_h$, con c_h un número complejo para cada h , y entonces (2) se reduce a la fórmula de síntesis clásica de Fourier

$$x_p(t) = \sum_{h=-H}^H c_h e^{j2\pi h f_1 t} \quad (3)$$

siendo $x_p(t)$ una señal periódica.

Las señales eléctricas de un sistema de potencia en estado estable pueden representarse por $x_p(t)$, con armónicas c_h . Bajo esta condición el análisis de Fourier es adecuado. Pero cuando el sistema está oscilando, aparecen variaciones temporales de amplitud y fase (típicamente inferiores a 5 Hz) de manera que la periodicidad de la señal se pierde, entonces $x_p(t)$ deja de ser un modelo apropiado, y la estimación armónica usando FT será pobre. En este caso, nuestro modelo expandido (1)-(2) es más adecuado, debido a que permite cambios dinámicos lentos en las armónicas dentro de la ventana de observación. Con lo que las armónicas dinámicas se pueden definir como un conjunto de señales pasabanda con frecuencias centrales equiespaciadas por múltiplos de la frecuencia fundamental. La oscilación ensancha pues las tradicionales líneas espectrales de las armónicas en estado estable, convirtiéndolas en densidades espectrales angostas junto a cada frecuencia armónica.

A. Caso Continuo

Nuestro problema consiste en encontrar buenas estimaciones de $c_h(t)$, usando mediciones de $x(t)$ dentro de una ventana de observación $t \in [-\Delta, \Delta]$. Para lograr este objetivo, se propone una base para generar un subespacio $\mathcal{S} \subset L_2(\mathcal{R})$, con el conjunto de los vectores linealmente independientes:

$$\begin{aligned} t &\in [-\Delta, \Delta] \\ \Psi_{(k,h)}(t) &= t^k e^{-j2\pi h f_1 t}, \quad k = 0, 1, \dots, K \\ h &= -H, \dots, H \end{aligned} \quad (4)$$

representando versiones moduladas de potencias enteras de t (i.e. formando una serie de Taylor de orden K junto a cada armónica). Cualquier señal $\tilde{x}(t)$ que se encuentre en \mathcal{S} puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de la base:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^K \sum_{h=-H}^H \sigma_{(k,h)} t^k e^{-j2\pi h f_1 t}. \quad (5)$$

Se desea encontrar la mejor aproximación $\hat{x}(t)$ en \mathcal{S} a $x(t)$ en el sentido de mínimos cuadrados. Ésta es dada por:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^K \sum_{h=-H}^H \hat{\sigma}_{(k,h)} t^k e^{-j2\pi h f_1 t}, \quad (6)$$

donde los coeficientes óptimos son dados por def. 2.2, p.19 de la referencia¹⁸

$$\hat{\sigma}_{(k,h)} = \langle \tilde{\Psi}_{(k,h)}(t), x(t) \rangle, \quad (7)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto punto en $L_2(\mathcal{R})$, y $\tilde{\Psi}_{(k,h)}(t)$ representa los elementos de la base dual dadas en la sect. 2.2.4, p.25 de la referencia.¹⁸ La existencia de estos elementos está garantizada por la independencia lineal de los elementos de la base. Los elementos de la base dual $\tilde{\Psi}_{(k,h)}(t)$ pueden verse como los elementos que garantizan la restricción de biortogonalidad:

$$\langle \Psi_{(k,h)}(t), \tilde{\Psi}_{(\ell,m)}(t) \rangle = \begin{cases} 1 & k = \ell, h = m \\ 0 & \text{otro caso,} \\ & t \in [-\Delta, \Delta] \\ & k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ & h, m = -H, \dots, H \end{cases} \quad (8)$$

Note de (4) que el análisis de Fourier usa un subconjunto ortogonal (con $K=0$) de los elementos de nuestra base, que representan correctamente sólo las señales periódicas en estado estable. Entonces, el estimado de Fourier $\hat{x}_F(t)$ es la mejor aproximación periódica a $x(t)$. Al incluir términos de Taylor no considerados en la base de Fourier, se logra una mejor aproximación a $x(t)$, es decir:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|x(t) - \hat{x}_F(t)\| \quad (9)$$

con $\|\cdot\|$ representando la norma L_2 . Note que en (9) la igualdad cumple sólo para señales periódicas $x(t)$.

B. Implementación Discreta

Lo anterior cumple para el caso continuo. En el caso discreto, los elementos de la base son una versión muestreada uniformemente de (4) con N muestras. Un número impar de muestras asegura una muestra en el centro de la ventana de observación, donde el error de Taylor es nulo.

En el caso discreto la ecuación de síntesis puede verse como la versión muestreada de (6):

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^K \sum_{h=-H}^H \hat{\theta}_{(k,h)} T_s^k n^k e^{-j2\pi h f_1 n T_s}, \quad (10)$$

donde T_s es el período de muestreo.

Note que (10) puede ser también representada como una transformación lineal:

$$\hat{x} = B\hat{\theta} \quad (11)$$

con $\hat{\theta} \in \mathcal{C}^{(K+1)(2H+1)}$ un vector columna conteniendo los coeficientes óptimos $\hat{\theta}_{(k,h)}$, $B \in \mathcal{C}^{N \times (K+1)(2H+1)}$ una matriz conteniendo en cada columna N muestras de cada elemento de la base discreta $\psi_{(k,h)}(n)$, y finalmente $\hat{x} \in \mathcal{R}^N$ un vector columna con N muestras de la señal estimada.

Por otra parte, como en (7), la ecuación de análisis depende de la base dual [24, p. 47]:

$$\hat{\theta}_{(k,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(k,h)}(n), x(n) \rangle, \quad (12)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto punto discreto. Este conjunto de ecuaciones son dadas por las ecuaciones normales de la aproximación por mínimos cuadrados:

$$\hat{\theta} = (B^H B)^{-1} B^H x, \quad (13)$$

donde H denota la transpuesta hermitiana, y $(B^H B)^{-1} B^H = B^\dagger$ es la matriz pseudoinversa. Comparando (12) y (13) note que los renglones de la pseudoinversa B^\dagger contienen los elementos de la base dual. El caso discreto se puede implementar calculando la matriz pseudoinversa de B , la cual está formada por N muestras de cada vector de la base. Note que dependen únicamente de la frecuencia fundamental f_1 . Para obtener la matriz pseudoinversa debemos tener un sistema sobredeterminado de ecuaciones, por lo que la cantidad de muestras en la ventana de observación deberá cumplir:

$$N \geq (2H + 1)(K + 1) \quad (14)$$

esta condición nos da la mínima longitud posible de los filtros FIR que pueden usarse utilizando esta metodología.

C. Interpretación de los coeficientes

Un hecho importante de la transformación biortogonal presentada en la sección anterior es el significado físico de sus coeficientes. La Eq. (5) puede verse como una suma modulada de series de McLaurin, entonces el coeficiente $\hat{\sigma}_{(k,h)}$ representa la k -ésima derivada de la h -ésima armónica $c_h(t)$. En el caso continuo se tiene:

$$\hat{\sigma}_{(k,h)} = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k c_h(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \quad (15)$$

y, en el caso discreto¹:

$$\hat{\theta}_{(k,h)} = \left. \frac{T_s^k}{k!} \frac{d^k c_h(t)}{dt^k} \right|_{t=0}. \quad (16)$$

Si la señal de entrada $x(n)$ está en el subespacio generado por el modelo de señal Taylor-Fourier, el error de aproximación será nulo, y las Eqs. (13) y (11), en este caso sin sombreros, son las ecuaciones de análisis y síntesis de la transformada digital Taylor-Fourier. En la próxima sección, veremos que, cuando la señal está fuera del subespacio, el error de las aproximaciones en (16) dependerá del contenido frecuencial de cada armónica dinámica. Esto es porque la respuesta en frecuencia del banco de filtros estimadores está compuesto de ganancias máximamente lisas de diferenciadores ideales junto a cada armónica.

BANCO DE FILTROS

Nuestro estimador está formado por un banco de $(K+1)$ filtros FIR en cada armónica, cuyas respuestas impulsionales son las versiones reflejadas en el tiempo de los elementos de la base dual correspondientes a dicha armónica.

$$h_{(k,h)}(t) = \tilde{\psi}_{(k,h)}(-t) \quad (17)$$

donde $h_{(k,h)}(t)$ denota la k -ésima respuesta impulsional de la armónica h . En consecuencia, las correspondientes respuestas en frecuencia son los conjugados complejos de las transformadas de Fourier de dichos elementos de la base.

$$H_{(k,h)}(\omega) = \tilde{\Psi}_{(k,h)}(-\omega) \quad (18)$$

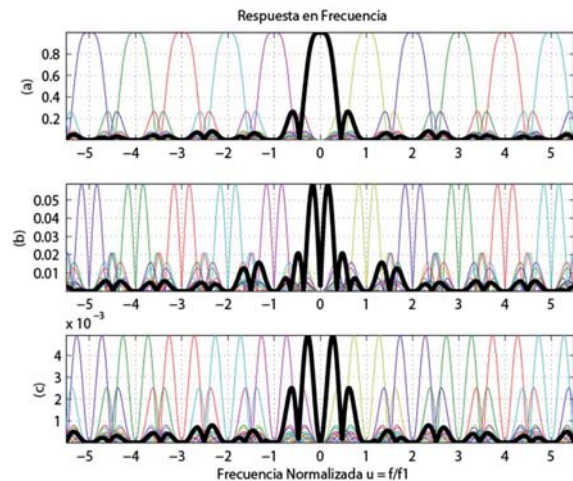


Fig. 1. Respuestas en magnitud de los filtros de la TFT con $K=2$, $H=5$, y $N=48$, para los estimados de orden (a) cero (posición), (b) uno (velocidad) y (c) dos (aceleración).

Estos filtros tienen propiedades espectrales y simetrías muy interesantes, como puede verse en la figura 1, la cual muestra las respuestas en frecuencia del banco de filtros para $K=2, H=5$ y $N=48$ muestras. Las líneas gruesas corresponden a los filtros del estimador de corriente directa (dc) ($h=0$). Note que los filtros poseen las ganancias de diferenciadores ideales junto a $\omega=0$, y ganancias nulas planas junto a las demás armónicas. Esto indica una perfecta extracción de las derivadas en la frecuencia central, y un rechazo completo a las demás componentes armónicas, cuando su densidad espectral esté contenida dentro de esos intervalos. Note también que cada conjunto de filtros armónicos es una versión modulada del estimador dc. Por tanto, cada banco estimador armónico será un excelente extractor de las primeras derivadas de su propia envolvente compleja, y un rechazador del resto de las armónicas, a condición de que su densidad espectral esté confinada dentro de los intervalos de ganancia lisa, centrados en las frecuencias armónicas. Se podría decir, de manera figurada, que en los estimadores armónicos resuenan las derivadas de la envolvente espectral de cada armónica. Una mejor explicación de estas propiedades puede encontrarse en la demostración del teorema en la siguiente sección.

RESPUESTAS MÁXIMAMENTE LISAS

Aquí se explica porqué las respuestas frecuenciales de los filtros logran estructuras tan bellas e interesantes. Se inicia demostrando la versión modulada del teorema de momentos²⁵ que emplearemos más tarde.

Definición 1: Sean

$$m_{k,\omega_h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k e^{-j\omega_h t} dt \quad (19)$$

los momentos de la modulación de $f(t)$, $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$, y $F^{(k)}(\omega_h)$ la k -ésima derivada de $F(\omega)$ en ω_h , entonces:

$$F^{(k)}(\omega_h) = (-j)^k m_{k,\omega_h}. \quad (20)$$

Como se vio en la figura 1, las respuestas en frecuencia de los filtros del h -ésimo banco tienen las ganancias de los diferenciadores ideales en la frecuencia armónica, y ganancias nulas planas en el resto de las armónicas. Aquí se demuestra que esta propiedad es una consecuencia de la solución de la

aproximación por mínimos cuadrados (LS) cuando se usa la base vectorial de la TFT.

Teorema: Sea $\psi_{(k,h)}(t)$ los elementos de la base presentados en (4), $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ los elementos de la base dual, y $h_{(k,h)}(t) = \tilde{\psi}_{(k,h)}(-t)$ las respuestas impulsionales de los filtros. Sean $\Psi_{(k,h)}(\omega)$, $\tilde{\Psi}_{(k,h)}(\omega)$ y $H_{(k,h)}(\omega)$ sus transformadas de Fourier respectivamente. Entonces:

$$\left. \frac{d^k H_{(\ell,m)}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & k = \ell, h = m \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (21)$$

Prueba: Empezamos usando (4), la condición biortogonal de la solución LS:⁸

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}_{(\ell,m)}(t)t^k e^{j2\pi h f t} dt = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (22)$$

$k, \ell = 0, 1, \dots, K$
 $h, m = -H, \dots, H$

Del teorema de momentos de funciones moduladas (ver definición 1), se tiene:

$$\left. \frac{d^k \tilde{\Psi}_{(\ell,m)}(-\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (23)$$

$k, \ell = 0, 1, \dots, K$
 $h, m = -H, \dots, H$

y usando (18), la respuesta en frecuencia del ℓ -ésimo filtro diferenciador de la m -ésima armónica dinámica debe cumplir con:

$$\left. \frac{d^k H_{(\ell,m)}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (24)$$

$k, \ell = 0, 1, \dots, K$
 $h, m = -H, \dots, H$

Estas son las restricciones de máxima suavidad,²⁶⁻²⁷ que indican que las respuestas en frecuencia de los filtros asociados con cada armónica exhiben ganancias diferenciadoras ideales junto a la frecuencia armónica, y ganancias nulas máximamente lisas en las frecuencias armónicas restantes.

Además, la condición (21) declara que la respuesta en frecuencia del k -ésimo diferenciador de la h -ésima armónica debería tener k ceros en la frecuencia armónica (lo que genera la ganancia ideal en la h -ésima armónica), y $K+1$ ceros en las frecuencias armónicas restantes (que generan

ganancias nulas). Entonces la respuesta en magnitud puede expresarse de la siguiente manera:

$$|H_{(k,h)}(\omega)| = \left| (\omega - \omega_h) \prod_{\ell \neq h}^k (\omega - \omega_\ell) \right|^{k+1} |R(\omega)| \quad (25)$$

donde $R(\omega)$ es un polinomio libre.

Note que la condición (25) es válida también para el caso FT, en el cual la respuesta en frecuencia del filtro estimador de la h -ésima armónica es dado por la función seno cardinal, el cual cumple con:

$$|F_h(\omega)| = \prod_{\ell \neq h} |(\omega - \omega_\ell)| |R(\omega)| \quad (26)$$

En la figura 2 se comparan las respuestas en frecuencia de los estimadores dc con la FFT ($K=0$, $H=2$, $N=15$ muestras) y TFT ($K=2$, $H=2$, $N=15$ muestras). Note que debido a (25), los de la FFT tienen un cero en cada frecuencia armónica distinta de cero, mientras que los de la TFT tienen 3 ceros. Por esta razón, los filtros de la TFT serán referidos como filtros barandal, ya que su ganancia nula cubre una banda de frecuencias, en vez de un solo punto en los filtros peine de la FFT. Los filtros armónicos de la TFT no pueden considerarse versiones moduladas de los filtros de estimación fasorial propuestos en.²⁸⁻²⁹ La inclusión del conjunto completo de vectores en la misma matriz de la base es la que asegura las respuestas nulas planas en cada frecuencia distinta a la de interés. Si la carga espectral está confinada junto a las frecuencias armónicas, las ganancias nulas reducen la infiltración interarmónica predominante,

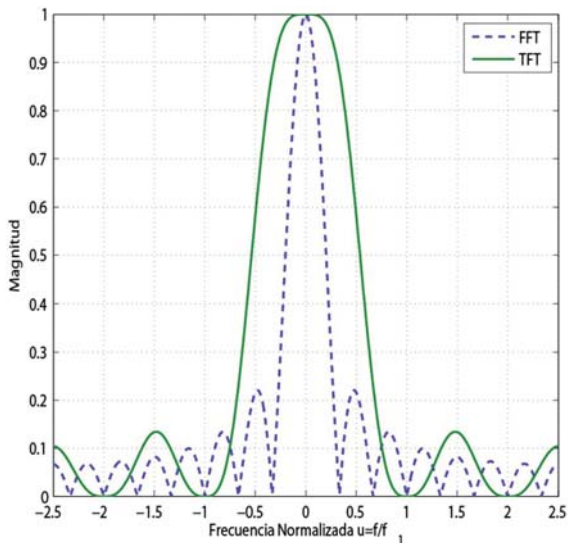


Fig. 2. El filtro TFT mejora la respuesta en frecuencia, con tres ceros en las frecuencias armónicas, en vez de únicamente uno de la FFT, el cual corresponde a ganancias del primer diferenciador en las demás frecuencias.

aun cuando la ganancia en las bandas subarmónicas sea superior a la de los filtros de la FFT. En este caso, la supresión armónica prevalece sobre la amplificación subarmónica. Veremos este tipo de infiltración en los siguientes ejemplos. Además, la ganancia subarmónica puede reducirse en los estimadores de la TFT usando ventanas como ponderaciones del criterio de mínimos cuadrados ponderados (ver apéndice).

EJEMPLO TEÓRICO

El propósito del siguiente ejemplo es mostrar los errores de estimación de los coeficientes armónicos de una señal conocida. Sea

$$s(t) = \alpha(t) \left(\sum_{h=0}^{\infty} c_h \cos(2\pi h f_1 t) \right) \quad (27)$$

la señal de entrada del estimador, con $f_1 = 50$ Hz, y coeficientes no nulos ($c_1 = 1$, $c_3 = .4$, y $c_5 = .2$), donde $a(t)$ representa la amplitud de una oscilación, dada por el siguiente polinomio de segundo orden:

$$a(t) = \frac{at^2 + bt + c}{d}, \quad (28)$$

con coeficientes $a=1$, $b=-1000$, $c=1$ y $d=2.5 \times 10^5$.

La señal digital correspondiente se obtiene muestreándola a 20 muestras por ciclo fundamental $1/f_1$.

Se estimaron los coeficientes armónicos con la FFT y la TFT ($K=3$), ambas de cuatro ciclos. Los resultados

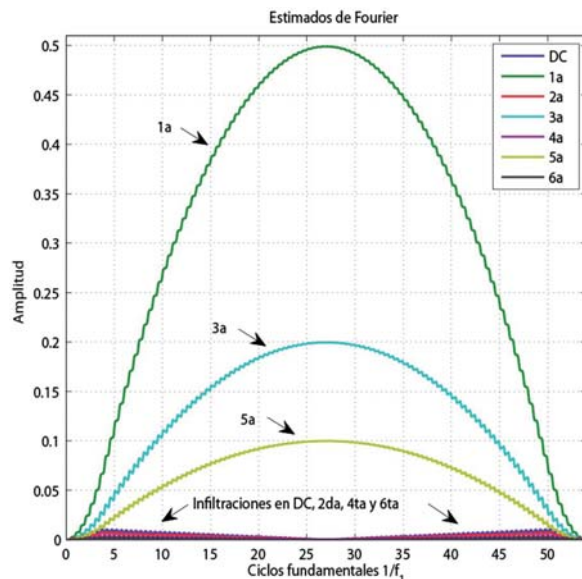


Fig. 3. Estimaciones de los coeficientes de Fourier con la FFT.

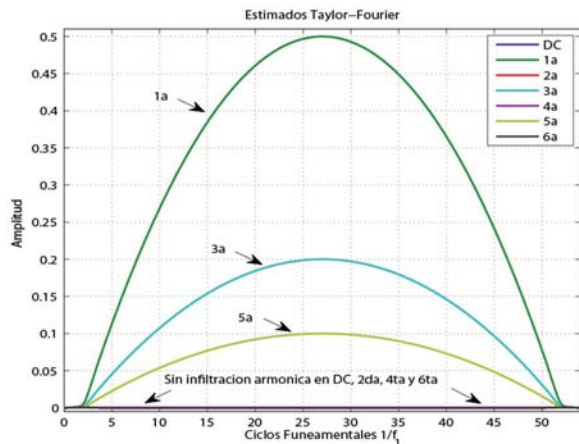


Fig. 4. Estimados de los coeficientes de Fourier con la TFT.

se ilustran en las figuras 3 y 4 respectivamente. Note que la FFT produce coeficientes borrosos debido a la infiltración de las componentes dinámicas de la evolución no constante. Las estimaciones más suaves se alcanzan en la mitad, donde la evolución parabólica alcanza las condiciones de estado estable. Además, la FFT produce armónicas fantasma (dc, segunda, cuarta y sexta). Éstas se deben a que las respuesta en frecuencia Seno Cardenal de los filtros de la FFT tienen ganancias lineales junto a las frecuencias armónicas diferentes a la de paso, las cuales corresponden a diferenciadores de las armónicas vecinas. Por lo tanto, en cada estimación de la FFT se infiltra no solamente sus propias componentes no constantes de Taylor (distorsión de amplitud), sino las primeras derivadas de las

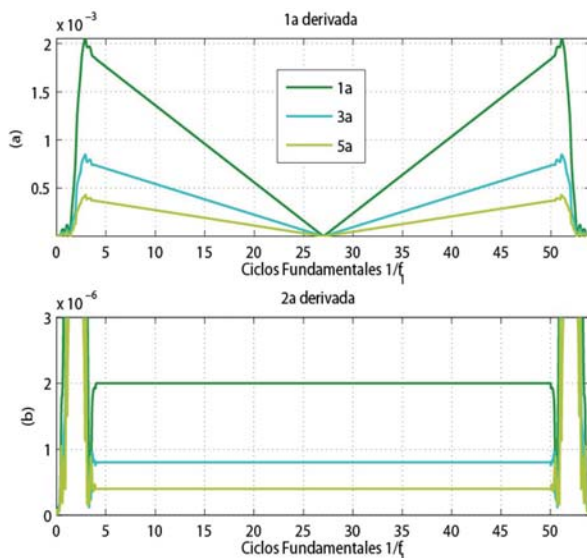


Fig. 5. Estimaciones de los coeficientes Taylor-Fourier de primer (velocidad) y segundo orden (aceleración).

demás armónicas. De hecho, los filtros de la FFT se comportan más bien como colectores de las primeras derivadas de las armónicas vecinas.

Las estimaciones de los coeficientes de las armónicas dinámicas (de orden cero) obtenidos con la TFT en la figura 4 son más limpias que los de la FFT. Y esto es válido no solamente para los coeficientes de Fourier ($k=0$), sino también para los de Taylor, como puede apreciarse en la figura 5, en la cual las derivadas estimadas siguen polinomios puros de primero y segundo orden, como ya se esperaba. Al reconstruir la señal estimada usando las ecuaciones de síntesis de ambos estimados, el error de la aproximación de la TFT es inferior al de la FFT. Esto es porque la TFT usa una expansión de la base de Fourier que abarca la señal dada, y más apropiada para las señales con armónicas dinámicas.

Para evaluar el rendimiento global, usamos como función de costo del error la raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado (NRMSE), definido por:

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum_n |\hat{s}(n) - s(n)|^2}{\sum_n |s(n)|^2}}, n \in \mathcal{P} \quad (29)$$

Tabla I. Función de costo NRMSE, para los coeficientes de Fourier.

Armónica dinámica	FT	TFT
$c_1^{(0)}(t)$	2.68×10^{-5}	2.81×10^{-12}
$c_3^{(0)}(t)$	1.03×10^{-4}	6.71×10^{-12}
$c_5^{(0)}(t)$	1.78×10^{-4}	3.59×10^{-17}

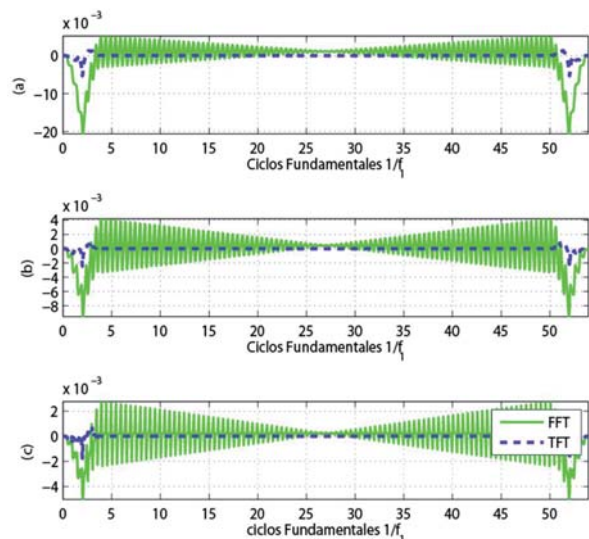


Fig. 6. Error de estimación de los coeficientes de orden cero obtenidos con la FT y TFT: (a) c_1 , (b) c_3 , y (c) c_5 .

donde \mathcal{P} es el conjunto de los estimados almacenados en memoria. La tabla I muestra el NRMSE de los coeficientes de Fourier estimados con ambos estimadores. Los errores de estimación de ambos métodos se ilustran en la figura 6.

De esta evidencia, se concluye que la TFT ofrece un mejor estimador que la FFT debido a su mejor separabilidad armónica, que a su vez es consecuencia de su mayor reserva espacial para armónicas dinámicas. Claro que, bajo condiciones de estado estable, cuando esa amplitud espacial agregada para variaciones dinámicas no se utiliza, producen los mismos resultados.

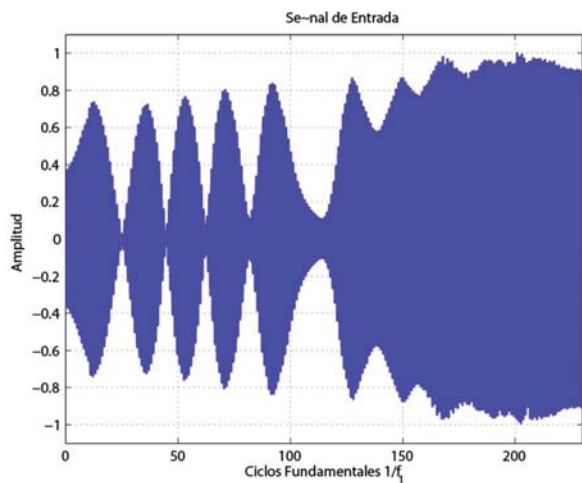


Fig. 7. Señal de entrada a los estimadores comparados.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

También se comparan los rendimientos de la TFT y FT usando una señal capturada en un sistema de potencia europeo ($f_1 = 50$ Hz) a veinte muestras por ciclo. Esta señal se ilustra en la figura 7.

Para una comparación equitativa, ambos estimadores TFT y FT usarán una ventana rectangular de observación con la longitud mínima estipulada por (14), la cual corresponde a cuatro ciclos. Para la TFT, se escogió $K = 3$. Las estimaciones armónicas (coeficientes Taylor de cero orden) obtenidas con ambos métodos se muestran en la figura 8, mientras que la figura 9 ilustra las primeras tres derivadas estimadas obtenidas con la TFT. Note que la TFT ofrece más estimaciones. Comparando los estimados armónicos de la FT y TFT de la figura 8, es palpable en la mitad derecha de 8 (a) que las estimaciones de la primera armónica de la FT son más ruidosas que las de la TFT en la figura

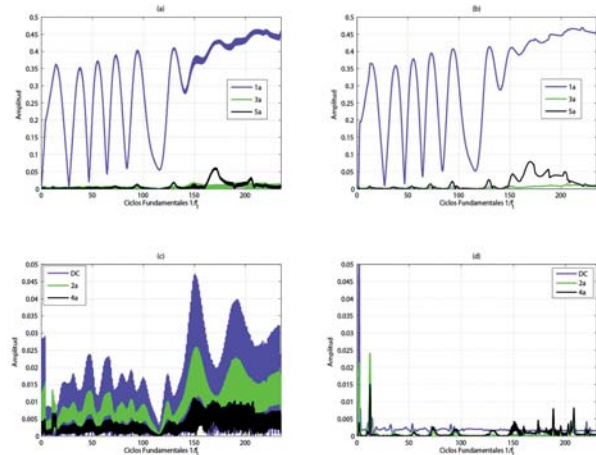


Fig. 8. Magnitud de las estimaciones armónicas obtenidas con la FT y TFT de cuatro ciclos: Estimados (a) FT impares, (b) TFT impares, (c) FT pares, y (d) TFT pares.

8 (b). Esto se debe a la infiltración de la primera derivada de la tercera y quinta armónica en las estimaciones de la FT. También en el caso FFT, la derivada de la primer armónica (fundamental) se infiltra todo el tiempo a las armónicas vecinas, produciendo estimaciones armónicas fantasma (dc, segunda, tercera, etc.), como puede apreciarse en las estimaciones de Fourier pares de la figura 8 (c). Note que las estimaciones fantasma más grandes se producen bajo las zonas de más alta velocidad de la oscilación, y las más pequeñas, bajo las zonas de velocidad nula. La infiltración interarmónica en la FT se explicó mejor en la sección anterior. Por otra parte, note que la TFT ofrece estimados más limpios sin distorsión o interferencia interarmónica debido a sus ganancias pasabanda más lisas y a su mejor rechazo

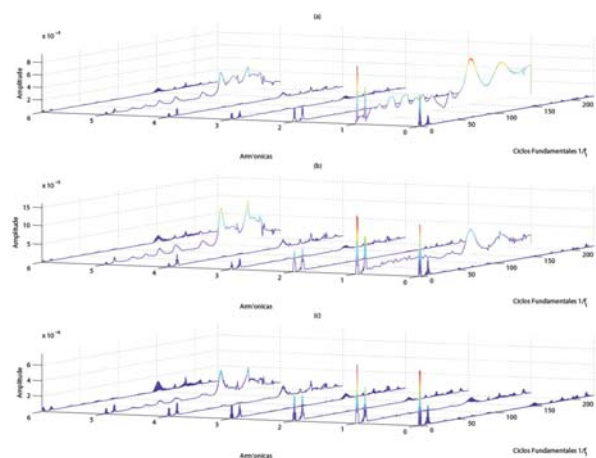


Fig. 9. Magnitud de las primeras tres derivadas obtenidas con la TFT: (a) primero, (b) segundo, y (c) tercer coeficiente de Taylor.

interarmónico. Como en cualquier transformación biortogonal, la aproximación sucesiva no cumple, de manera que los coeficientes de orden cero (coeficientes de Fourier) se mejoran agregando más y más componentes de Taylor, dado que la TFT extrae la interferencia de los cambios dinámicos debidos a esos nuevos términos de Taylor incluidos.

Las figuras 9 (a)-(c) ilustran las magnitudes de los nuevos coeficientes de Taylor. Estos coeficientes complejos portan la información de las derivadas instantáneas (a la mitad de la ventana de observación) de amplitud y fase de cada armónica. Las derivadas de amplitud dan la posición, velocidad y aceleración de cada envolvente armónico. Podrían utilizarse para detectar el estado estable, cambios repentinos, o transitorios. Pero más importante, las derivadas de la fase, indican la desviación frecuencial y sus derivadas. Estos dos estimados serán extremadamente importantes para evaluar la estabilidad del sistema de potencia, así como el nivel de flujos de potencia intercambiados entre dos WANS adyacentes.

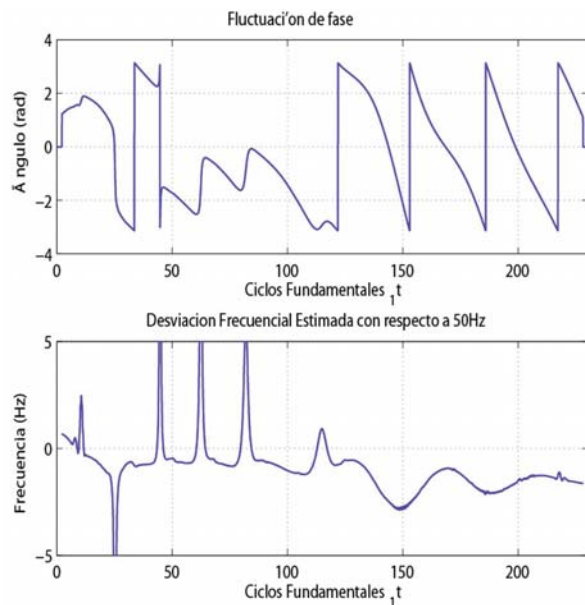


Fig. 10. Fluctuaciones de fase y frecuencia fundamental.

La figura 10 ilustra la fase y frecuencia fundamental del evento analizado en nuestro caso particular. Note que los picos de frecuencia son debidos a los cambios abruptos de fase que ocurren a baja amplitud. Note también que los estimados frecuenciales de la TFT no son tan ruidosos como los estimados con ecuaciones de diferencia finitas

de los estimados de fase utilizados en los equipos comerciales actuales.

Los errores NRMSE de la TFT y FT para este caso son los siguientes:

$$NRMSE_{FT} = 1.62 \times 10^{-2} \quad (30)$$

$$NRMSE_{TFT} = 7.07 \times 10^{-3} \quad (31)$$

El NRMSE se reduce casi a la mitad. Por lo que una mejor aproximación es obtenida con la solución TFT, en el sentido de mínimos cuadrados.

Finalmente, para reducir el error de aproximación, se puede utilizar la aproximación ponderada WLS usando una ventana como ponderación (ver Apéndice). El uso de una ventana reduce el nivel de lóbulos laterales en la respuesta en frecuencia, conduciendo a errores inferiores en ambas FFT y

Tabla II. Función de costo NRMSETFT, para diferentes órdenes de polinomio de Taylor K y ventanas kaiser α .

	$\alpha=0$	$\alpha=4$	$\alpha=8$	$\alpha=12$
$K=0$	1.62×10^{-2}	7.66×10^{-3}	4.04×10^{-3}	2.02×10^{-3}
$K=1$	1.62×10^{-2}	7.66×10^{-3}	4.04×10^{-3}	2.02×10^{-3}
$K=2$	7.07×10^{-3}	2.91×10^{-3}	3.62×10^{-5}	2.38×10^{-8}
$K=3$	7.07×10^{-3}	2.91×10^{-3}	3.62×10^{-5}	2.38×10^{-8}

TFT. En la tabla II se muestra la reducción del error de aproximación obtenido con ventanas de Kaiser. Note que separadamente, ninguno de estos parámetros produce una reducción significativa del error, pero combinados producen un cambio significativo, alcanzando una reducción de 10^{-5} con respecto al de la FT (con $K = 2, \alpha = 12$). Esto se debe a las excelentes respuestas en frecuencia de los estimadores. Note que un incremento de un orden par a uno impar no produce cambio alguno en la función de costo, esto es verdad si la ventana de observación se desplaza muestra por muestra, y únicamente la muestra central es tomada en cuenta en la reconstrucción, ya que todos los términos de Taylor de orden no nulo valen cero en la muestra del centro.

DISCUSIÓN

Los libros de texto hacen truco en la presentación de la DFT. No se presenta como la aproximación de mínimos cuadrados de un modelo de señal periódico a una señal dada. Al no usar el tradicional sombrero en los coeficientes de Fourier estimados, hacen creer que las estimaciones son exactas, o a olvidar la condición de periodicidad para su exactitud.

Pero el hecho es que el modelo de señal de la DFT no tiene cabida para las fluctuaciones dinámicas de amplitud y de fase, y en sus estimaciones se infiltra las derivadas de estas fluctuaciones. En la demostración del Teorema de Parseval, se hace el truco de sustituir el modelo de señal en la señal de entrada, lo cual equivale a decir que si la señal de entrada está en el subespacio del modelo, el error es nulo. ¡Qué astucia!

Los filtros TFT reducen la interferencia interarmónica y ofrecen estimaciones que pueden usarse en monitoreo, detección de transitorios, compresión de señal o aplicaciones de control automático. Además, las estimaciones de frecuencia de la TFT son más suaves que las obtenidas con ecuaciones de diferencias finitas de los estimados de fase de la FFT. Y todos los $(K+1)(2H+1)$ estimados se calculan de golpe, de manera que son instantáneos con un retraso constante, pero pueden sincronizarse con una estampa de tiempo a la mitad de la ventana de observación.

Los artículos citados provienen de vibraciones mecánicas o de eléctrica pero existen muchas aplicaciones potenciales para la TFT: el amplio campo de las señales cuasiperiódicas tales como la voz, las señales sismográficas, el análisis de fluctuaciones, o en sistemas de transmisión digital, en la cual cada canal se comporta como una dinámica armónica independiente.

Aun cuando el subespacio de la TFT reserve espacio para pequeñas desviaciones en frecuencia en la primera derivada de la fase, fugas son posibles para grandes variaciones frecuenciales. Sin embargo, dado que se dispone de estimados frecuenciales, los filtros podrían adaptar su frecuencia central a la frecuencia instantánea. Además, hay importantes limitaciones que deben tenerse en cuenta: la solución se hace mal condicionada cuando K aumenta, la ventana de ponderación puede aumentar la infiltración del ruido a través del lóbulo principal, y en caso de presencia de componentes subarmónicas, éstas pueden infiltrarse.

Finalmente, la nueva herramienta digital tiene una bella estructura con propiedades de simetría y periodicidad, de tal manera que el algoritmo de la FFT puede acelerar su cómputo en aplicaciones de tiempo real.

CONCLUSIONES

Se presentó el estimador TFT como extensión Tayloriana de la FT. Puede interpretarse como un banco de filtros formado por un conjunto de filtros máximamente lisos con menos distorsión y menos interferencia interarmónica que los basados en la FT. El conjunto de filtros asignado a cada frecuencia armónica posee las ganancias de diferenciadores ideales junto a dicha frecuencia, y ganancias nulas planas junto al resto de las frecuencias armónicas, lo que asegura un excelente rechazo interarmónico. Cuando las densidades espectrales de las armónicas dinámicas están confinadas en intervalos bajo las bandas frecuenciales de diferenciación ideal, los coeficientes de la TFT ofrecen mediciones de las primeras derivadas de su envolvente compleja. Estas señales con armónicas de pasabanda angosta se encuentran en el subespacio de la TFT y en ellas el error de aproximación es nulo. El estimador ofrece un vector de estados muy útil no sólo para la compresión de señales, sino también para el monitoreo y control del sistema eléctrico de potencia. Su rendimiento fue evaluado a través de dos ejemplos, reduciendo el error medio cuadrático de la reconstrucción por un factor de 10^{-5} . La mejor aproximación se obtiene cuando el espectro dinámico queda confinado bajo las ganancias de diferenciación ideal.

La reconstrucción con la TFT es más precisa que la de Fourier para este tipo de señales. En general, la FT nunca tendrá errores de reconstrucción inferiores a los de la TFT, debido a que el subespacio de la TFT contiene al de la FT.

APÉNDICE

Además de la reducción de la interferencia interarmónica de la TFT, la infiltración subarmónica puede reducirse con el uso de ventanas como factores de ponderación del criterio de la solución de mínimos cuadrados ponderados (WLS).²⁹ Esta técnica reduce la ganancia de rechazo de los filtros. Debido a que la respuesta en frecuencia de los filtros estimadores se forman por una combinación lineal del espectro de la ventana y sus derivadas,^{26,27} la ventana con el nivel de lóbulos laterales más bajo produce los diferenciadores con la menor ganancia de rechazo.

La figura A1 ilustra un ejemplo, usando la ventana de Kaiser $\alpha = 0,5, 10$. Note que esta clase de

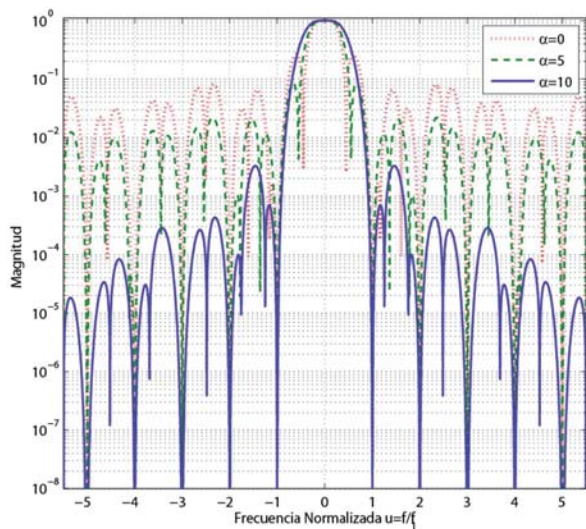


Fig. A1. Reducción del nivel de lóbulos laterales en el estimador dc con diferentes ventanas de Kaiser como ponderaciones de la solución WLS.

eventaneado preserva las ganancias lisas junto a las frecuencias armónicas y reduce el nivel de lóbulos laterales, note también que este método, como el de la técnica clásica de eventaneado, también ensancha el lóbulo principal.

REFERENCIAS

1. V. D. A. Corino, L. T. Mainardi, M. Stridh, and L. Sormo, Improved time frequency analysis of atrial fibrillation signals using spectral modeling, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 55, no. 12, pp. 2723–2730, december 2008.
2. F. Zhang and Y. Yan, Selective harmonic elimination pwm control scheme on a three-phase four-leg voltage source inverter, *Power Electronics*, *IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 7, pp. 1682 – 1689, july 2009.
3. A. Kamitani, T. Takayama, and S. Ikuno, Axisymmetric simulation of inductive measurement method for critical current density in bulk hts: Relation between third harmonic voltage and coil current, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, DOI: 10.1109/TASC.2009.2018795.
4. J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. New York: McGraw Hill, 2000.
5. C. Liguori, A. Paolillo, and A. Pignotti, An intelligent fft analyzer with harmonic interference effect correction and uncerainty evaluation,

- IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 53, no. 4, pp. 1125–1131, august 2004.
6. T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, 3rd ed. University Of Chicago Press, Dec. 1996.
7. I. Santamaria-Caballero, C. J. Pantalón-Prieto, J. Ibñez-Días, and E. Gómez-Cosío, Improved procedures for estimating amplitudes and phases of harmonics with application to vibration analysis, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 47, no. 1, pp. 209–214, february 1998.
8. C. Liguori, A. Paolillo, and A. Pignotti, Estimation of signal parameters in the frequency domain in the presence of harmonic interference: A comparative analysis, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 55, no. 2, pp. 562–569, april 2006.
9. L. Salvatore and A. Trotta, Flat-top windows for pwm waveform processing via dft, *IEE Proc. Electric Power Applications*, vol. 135, no. 6, pp. 346–361, 1988.
10. G. Andria, M. Savino, and A. Trotta, Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 88, no. 4, pp. 856–863, august 1989.
11. C. Offelli and D. Petri, Interpolation techniques for real-multifrequency waveform analysis, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 39, no. 1, pp. 106–111, february 1990.
12. O. Solomon, The use of dft windows in signal-to-noise ratio and harmonic distortion computations, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 43, no. 2, pp. 194–199, april 1994.
13. A. Ferrero and R. Ottoboni, High-accuracy fourier analysis based on synchronous sampling techniques, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 41, no. 6, pp. 780–785, december 1992.
14. J. A. de la O, On the use of amplitude shaping pulses as windows for harmonic analysis, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 50, no. 6, pp. 1556–1562, december 2001.
15. D. Gabor, Theory of communication, *Journ. IEE*, pp. 429–457, 1946.
16. M. K. Kiyimika, I. Guler, A. Dizibuyuk, and M. Akin, Comparison of STFT and wavelet transform methods in determining epileptic seizure activity in EEG signals for real-time

- application, *Computers in Biology and Medicine*, vol. 35, no. 7, pp. 603–616, october 2005.
17. I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, in SIAM, 1992.
18. M. Vetterli and J. Kovacevic, *Wavelets and subband coding*. Prentice-Hall PTR, 1995.
19. S. Horowitz, , and A. G. Phadke, *Power system relaying*. New york: Wiley, 1992.
20. J.-Z. Yang, C.-S. Yu, and C.-W. Liu, A new method for power system signal harmonic analysis, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 20, no. 2, pp. 1235–1239, april 2005.
21. J. J. Tomic, M. D. Kusljevic, and V. V. Vukicic, A new power system digital harmonic analyzer, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 22, pp. 772–780, 2007.
22. M. A. Platas and J. A. de la O Serna, Dynamic harmonic analysis through taylor-fourier transform, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, (2011), doi 10.1109/TIM.2010.2064690.
23. S. Samadi, O. Ahmad, and M. Swamy, Complete characterization of systems for simultaneous lagrangian upsampling and fractional-sample delaying, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 52, no. 3, pp. 656–667, Mar 2005, p. 658.
24. M. Vetterli, J. Kovacevic, and V. K. Goyal, *The World of Fourier and Wavelets: Theory, Algorithms and Applications*. Downloadable from <http://www.fourierandwavelets.org>, 2009.
25. A. Papoulis, *Signal Analysis*. New York: McGraw Hill, 1977, p 62.
26. M. A. Platas-Garza and J. A. de la O Serna, Dynamic phasor estimates through maximally flat differentiators, in *Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century*, 2008 IEEE, 2008, pp. 1–8.
27. J. A. de la O Serna and M. A. Platas-Garza, Maximally flat differentiators through wls taylor decomposition, *Elsevier Digital Signal Process.*, *Digital Signal Process*, Vol. 21, No. 2, March 2011, pp.183-194.
28. J. A. de la O, Dynamic phasor estimates for power system oscillations, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 56, no. 5, pp. 1648–1657, october 2007.
29. M. A. Platas-Garza and J. A. de la O, Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 59, no. 7, pp. 1803–1811, july 2010.

