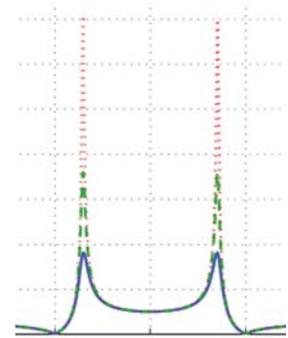


Estimación fasorial instantánea en armónicas oscilantes usando el filtro Taylor-Kalman-Fourier

José Antonio De la O Serna, Johnny Rodríguez Maldonado
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL
jdelao@ieee.org

RESUMEN

Recientemente se propuso el filtro Taylor^k-Kalman para estimaciones instantáneas de fasores oscilantes pues reducía abruptamente el nivel de error de estimación por un factor de diez a partir del modelo de segundo orden. En este artículo, se demuestra que para órdenes superiores o iguales a dos, los filtros adquieren respuestas de fase nula y plana alrededor de la frecuencia de operación, lo que garantiza estimaciones instantáneas. El método de respuesta en frecuencia nos condujo al diseño de un filtro más robusto, referido como filtro Taylor^k-Kalman-Fourier, debido a su modelo de señal multiarmónico. Resulta que el banco de filtros peine logrado con $K=0$ es equivalente al de la transformada discreta de Fourier (DFT); y el de filtros valla obtenido con $K=2$ es similar a la transformada Taylor²-Fourier, pero con la ventaja de proveer estimaciones sin retardo, y con un costo computacional inferior al de la transformada rápida de Fourier (FFT). Debido a su característica instantánea, y simplicidad computacional, estos filtros son muy útiles para el análisis y control de oscilaciones armónicas en tiempo real en sistemas de potencia.



PALABRAS CLAVE

Sincrofasor, estimación fasorial, filtro de Kalman, oscilaciones de potencia.

ABSTRACT

Recently Taylor^k-Kalman filter was proposed for estimating instantaneous oscillating phasors reducing the estimation error by a 10 factor from the second order model. It was discovered that since $K=2$ the filters are able to form a zero-flat phase response around the fundamental frequency, and to produce instantaneous oscillating phasor estimates. In this paper, the frequency response of the zeroth and second order filters are established and illustrated. Their high sensitivity to noise lead us to design more robust filters referred to as Taylor^k-Kalman-Fourier, because of its harmonic signal model. The bank of comb filters achieved with $K=0$ is equivalent to that of the Discrete Fourier Transform (DFT), and the bank of fence filters achieved with $K=2$ is similar to that of the Taylor²-Fourier transform, except that their oscillating harmonic estimates are instantaneous (without delay). In addition, because their lower computational complexity, compared with the Fast Fourier Transform (FFT), they are very useful for analysis and control applications in power system.

KEYWORDS

Synchrophasors, phasor estimates, Kalman filter, power oscillations.

INTRODUCCIÓN

La estimación fasorial bajo condiciones dinámicas es una área de investigación interesante hoy en día debido a la proliferación de aplicaciones del sincrofasor en redes de área amplia (WANs). Es motivada no sólo por la necesidad de medir los sincrofasores durante oscilaciones, o severos disturbios en el sistema, sino también la frecuencia del sistemas de potencia y su velocidad de cambio en dichas condiciones. La relevancia del tema se ha incrementado debido a la reciente revisión del estándar de sincrofasores, con la sustitución del modelo estático de señal, [referencia¹, Secc. 4.1] por uno dinámico; y puesto que el proyecto en revisión [referencia² B.2] deja al diseñador la elección de la asignación del mejor tiempo de estimación, de acuerdo a un error tolerado. Pero cada método de estimación tiene su propia regla de asignación de tiempo, y por tanto no puede ser arbitraria. Así la norma permite diferentes equipos con diferentes retardos, mientras el error vectorial (fasorial) total (TVE) se encuentre bajo el umbral tolerado. El algoritmo propuesto en este artículo resuelve la ambigüedad de retraso de fase antes mencionado, proporcionando estimaciones inmediatas con nulo retardo de grupo.

Las estimaciones fasoriales bajo condiciones dinámicas han sido exploradas en referencias³⁻⁴. El uso del método de mínimos cuadrados ponderados (Weighted Least Square, WLS) condujo a la Transformada Taylor^k-Fourier, mejor adaptada a las condiciones dinámicas que la tradicional transformada discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT), la cual es apropiada únicamente para señales periódicas con coeficientes constantes. Sin embargo las estimaciones de ambos métodos contienen un retardo sistemático. Con la finalidad de resolver este problema, se propuso el filtro de Kalman en referencias⁵⁻⁶ para estimar fasores oscilantes con estimaciones instantáneas. Pero en estos trabajos sólo se consideró el tiempo de respuesta de los llamados filtros Taylor^k-Kalman (T^kK). El propósito de este artículo, cuya versión en Inglés puede encontrarse en referencia⁷, es mostrar cómo el método de respuesta en frecuencia ayuda a entender el comportamiento de la estimaciones fasoriales cuando la señal de entrada contiene ruido, o componentes armónicas no contempladas en el modelo de señal anterior.

Esta interpretación nos guió a una extensión del filtro, el filtro Taylor^k-Kalman-Fourier, que es capaz de realizar la transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT), y la transformada Taylor^k-Fourier (T^kFT) con menor costo computacional, y ofreciendo estimaciones inmediatas.

En las aplicaciones de medición fasorial el filtro de Kalman ha sido utilizado con un modelo de señal estático, i.e. suponiendo que la frecuencia, amplitud y fase son todas constantes durante la ventana temporal de observación. Su respuesta en frecuencia se ha obtenido por separado para cada estado en referencia⁸, o por su parte imaginaria y real en referencia⁹. Su interpretación en ambos casos es difícil debido a que, en el primer caso, es necesario pensar en términos de dos filtros, y produce complicaciones cuando el número de estados aumenta; y en el segundo, se obtienen dos respuestas en frecuencia, una para el filtro real y otra para el imaginario. De tal forma que es difícil tener una idea de la respuesta en frecuencia del filtro complejo. Por otro lado, el problema en referencia¹⁰ es que la respuesta en frecuencia ilustrada es obtenida sin congelar las ganancias de Kalman, por lo que es difícil entender lo que significa una respuesta en frecuencia en el caso de un filtro adaptativo. Otros artículos referentes a la respuesta en frecuencia del filtro de Kalman son los siguientes: en referencia¹¹ se realiza una combinación del KF operando en el dominio temporal y el filtro de Wiener en el dominio frecuencial;¹² usa sus características de tiempo-frecuencia para seguimiento de sistemas con múltiples entradas y una salida (Multiple-Input Single-Output, MISO) en aplicaciones de multiplexado por división de frecuencia ortogonal (OFDM);¹³ suaviza con el filtro de Kalman el espectro obtenido directamente con la FFT; y finalmente en referencia¹⁴ se describe el diseño de un sistema de navegación con múltiples sensores usando el KF en tiempo continuo y técnicas clásicas de respuesta en frecuencia, como lo son los diagramas de Bode. Así que comparando la abundantes referencias del filtro de Kalman, los artículos que tratan la respuesta en frecuencia son relativamente pocos y para aplicaciones muy concretas.

El filtro T^kK propuesto en referencia⁶ está basado en un modelo de señal en un espacio de estados que incorpora las derivadas de la envolvente compleja de oscilación. Con la ventaja de que puede estimar no

sólo el fasor sino también sus derivadas. Se encontró que el TVE se reduce a un décimo a partir de $K=2$.

En este artículo se demuestra que dicha reducción se debe a la habilidad del filtro T^kK para alcanzar una respuesta de fase nula alrededor de la frecuencia fundamental, ofreciendo estimaciones instantáneas. El error de estimación fasorial se reduce entonces evitando el retraso. Además de la respuesta en frecuencia de los filtros, nos ayuda a evaluar el comportamiento de estas estimaciones cuando la señal de entrada tiene componentes no considerados en el modelo de señal. El comportamiento de sus frecuencias distintas a la fundamental puede mejorarse al incorporarlas en el modelo de señal. Finalmente, se demuestra que es posible estimar la DFT o la TFT con el filtro T^kKF , eliminando el retraso implícito de los filtros de respuesta impulsional finita (FIR).

Nuestra investigación fue motivada por la existencia en la literatura de varias soluciones óptimas, como son WLS, Kalman, Shanks, etc. Nuestra pregunta básica fue: ¿Cuál es el método optimum optimorum? y nuestra respuesta hasta ahora es que la optimalidad depende básicamente del subespacio de señal adoptado por cada método. Por ejemplo, el subespacio de la solución WLS para el T^kFT es generado por vectores que contienen segmentos centrados de los términos de Taylor. Así estos producen filtros simétricos FIR bilaterales que producen sistemáticamente estimaciones retrasadas. En el caso de Shanks, el subespacio es formado por vectores causales autoregresivos de promedio móvil (ARMA). El subespacio de los filtros T^kK es generado por el subespacio del modelo de señal, que es además causal. En los dos últimos casos, la respuesta no está implícitamente retrasada como en el primero.

Este trabajo se basa en el algoritmo clásico del filtro de Kalman. La principal contribución es proveer la respuesta en frecuencia usando la matriz de transición de estados, y mostrar que ésta es capaz de lograr filtros de fase nula sobre su frecuencia de operación, y cómo éstos pueden extenderse al conjunto completo de armónicas a través de un modelo de señal multi-armónicas, conduciendo los filtros T^kKF . Se discute cómo hacer el análisis espectral con estos nuevos filtros, con un costo computacional menor. En la última sección, el

desempeño en la estimación fasorial y sus derivadas es evaluada y comparada con las estimaciones fasoriales obtenidas con la FFT y con la TFT de cuatro ciclos. Note que la FFT corresponde exactamente a la T^kFT . Muchos libros de texto inducen a creer que las estimaciones de la DFT son exactas, pero esto es sólo cierto cuando la señal de entrada está en el subespacio de Fourier, que solamente puede contener señales periódicas (con coeficientes de Fourier constantes: ver el teorema de Parseval). Para señales oscilantes, la DFT produce errores significativos como cualquier proyección, especialmente cuando se tienen armónicas oscilantes que salen del subespacio de Fourier, como se verá en los resultados numéricos. La principal contribución es que los filtros T^kKF producen estimaciones inmediatas del fasor y sus derivadas, que pueden ser obtenidas de la última muestra de señal disponible y con un menor costo computacional que el de otros métodos conocidos.

El artículo es organizado como sigue: en la sección 2, se establece el modelo de señal en espacio de estados con su matriz de transición y se establecen las ecuaciones del filtro de Kalman. En la sección 3 se establece e ilustra la respuesta en frecuencia de los filtros T^kK . Su extensión al conjunto completo de armónicas permite obtener el filtro T^kKF en la sección 4, en donde su respuesta en frecuencia y su desempeño numérico se compara con el de la FFT y T^kFT . Finalmente, la estimación fasorial en oscilaciones teóricas y reales se discute en la sección 5, proporcionando los resultados numéricos previstos por nuestras principales aserciones.

MODELO DE SEÑAL Y FILTRO DE KALMAN

El modelo de señal del filtro T^kK viene de la aproximación de Taylor al modelo de señal pasabanda propuesto en referencia¹⁵ para un sistema de potencia oscilante. Su implementación en el filtro de Kalman fue desarrollada en referencia⁶. En esta sección se reescriben las principales ecuaciones para establecer la notación tal como será implementado en nuestros algoritmos y para facilitar su lectura.

Modelo de señal

Se utiliza el siguiente modelo de señal:

$$s(t) = a(t)\cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \quad (1)$$

en el que, $\alpha(t)$ es la amplitud y $\varphi(t)$ la fase de la señal $s(t)$. La cual se supone pasa banda, i.e. de banda estrecha alrededor de la frecuencia fundamental f_1 . En términos de la función exponencial compleja, el modelo de señal puede simplificarse como sigue

$$s(t) = \text{Re}\{p(t)e^{j2\pi f_1 t}\}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (2)$$

en el que $p(t) = \alpha(t)e^{j\varphi(t)}$ es el fasor dinámico.

La función compleja $p(t)$ puede ser aproximada por el K -ésimo polinomio de Taylor centrado en t_0 :

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)(t-t_0) + \dots + p^{(K)}(t_0) \frac{(t-t_0)^K}{K!}, \quad (3)$$

Definiendo el vector de estados con hasta la K -ésima derivada de la aproximación de Taylor, su correspondiente matriz de transición de estados puede encontrarse fácilmente de (3) como sigue:

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)\tau + \ddot{p}(t_0)\frac{\tau^2}{2!} + \dots + p^{(K)}(t_0)\frac{\tau^K}{K!}$$

$$\dot{p}_K(t) = \dot{p}(t_0) + \ddot{p}(t_0)\tau + \dots + p^{(K)}(t_0)\frac{\tau^{K-1}}{(K-1)!} \quad (4)$$

⋮

$$p_K^{(K)}(t) = p^{(K)}(t_0)$$

o en su forma matricial:

$$\mathbf{p}_K(t) = \Phi_K(\tau)\mathbf{p}_K(t_0). \quad (5)$$

donde $\tau = t - t_0$, y $\mathbf{p}_K(t)$ es el vector de estados, y

$$\Phi_K(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \dots & \frac{\tau^K}{K!} \\ & 1 & \tau & \dots & \frac{\tau^{K-1}}{(K-1)!} \\ & & 1 & \dots & \frac{\tau^{K-2}}{(K-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

la matriz de transición.

El modelo de señal truncado se obtiene por:

$$s_K(t) = \text{Re}\{\mathbf{h}^T \mathbf{p}_K(t)e^{j2\pi f_1 t}\} = \text{Re}\{\mathbf{h}^T \mathbf{r}_K(t)\} \quad (7)$$

donde $\mathbf{r}(t)$ es el fasor rotado, y \mathbf{h}^T extrae sus primeros componentes, i.e. es el vector $\mathbf{h}^T = [10\dots 0]$, con un 1 en su primer elemento, seguido de K ceros.

En términos del vector, la Eq. (5) se convierte en

$$\mathbf{r}_K(t) = \Phi_K(\tau)e^{j2\pi f_1 \tau} \mathbf{r}_K(t_0). \quad (8)$$

Asumiendo $t_0 = (n-1)T_s$ y $t = nT_s$, donde T_s es el periodo de muestreo ($T_s = 1/N_1 f_1$), se tiene la siguiente transición de estados rotados:

$$\mathbf{r}_K(n) = \Phi_K(T_s)\psi_1 \mathbf{r}_K(n-1) \quad (9)$$

donde ψ_1 es el factor de fase $\psi_1 = e^{j\theta_1}$, correspondiente a la frecuencia fundamental en radianes

$$(\theta_1 = 2\pi f_1 T_s = 2\pi / N_1).$$

Finalmente, se tiene la ecuación de transición de estados completa como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_K(n) \\ \bar{\mathbf{r}}_K(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \Phi_K(T_s) & 0 \\ 0 & \bar{\psi}_1 \Phi_K(T_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_K(n-1) \\ \bar{\mathbf{r}}_K(n-1) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

y el modelo truncado de señal:

$$s_K(n) = \frac{1}{2} (\mathbf{h}^T \mathbf{h}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_K(n) \\ \bar{\mathbf{r}}_K(n) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

en donde $\bar{\psi}_1$ es el complejo conjugado de ψ_1 , y $\bar{\mathbf{r}}_K(n)$ contiene el complejo conjugado de los elementos en $\mathbf{r}_K(n)$

Algoritmo del filtro de Kalman

En esta sección se desarrolla el filtro de Kalman [referencia¹⁶, pp. 381-384] tal como se implementó en nuestros algoritmos. Otras referencias al algoritmo se pueden encontrar en referencia¹⁷⁻¹⁹.

El modelo del vector de estados es

$$\mathbf{x}(n) = \Phi \mathbf{x}(n-1) + \Gamma v(n), \quad (12)$$

el cuál, en nuestro caso, corresponde a la (10) con la entrada de un ruido blanco gaussiano (WGN) $v(n)$, asumiendo que afecta solamente a las componentes del fasor rotado, y no a sus derivadas, por lo que $\Gamma^T = (\mathbf{h}^T \mathbf{h}^T)$.

Por otro lado, el modelo de observación (o medición) es

$$s(n) = \mathbf{H} \mathbf{x}(n) + w(n) \quad (13)$$

el cual corresponde a la (11), asumiendo ahora que la señal es afectada por un ruido aditivo WGN $w(n)$.

Finalmente para ambos modelos tenemos $\mathbf{H} = (\mathbf{h}^T \mathbf{h}^T)$.

El proceso recursivo puede definirse por la siguiente secuencia para el n -ésimo ciclo.

1. Predicción:

(a) Predicción del Estado

$$\hat{\mathbf{x}}^-(n) = \Phi \hat{\mathbf{x}}(n-1) \quad (14)$$

(b) Error de covarianza a priori

$$\mathbf{P}^-(n) = \Phi\mathbf{P}(n-1)\Phi^H + \Gamma\Gamma^T\sigma_v^2 \quad (15)$$

2. Medición

(a) Ganancia de Kalman:

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}^-(n)\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}^-(n)\mathbf{H}^T + \sigma_w^2)^{-1} \quad (16)$$

(b) Estimación de estados

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \hat{\mathbf{x}}^-(n) + \mathbf{K}(n)(s(n) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^-(n)) \quad (17)$$

(c) Error de covarianza a posteriori

$$\mathbf{P}(n) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{H})\mathbf{P}^-(n) \quad (18)$$

Donde σ_v^2 y σ_w^2 son la varianza del ruido en la entrada y en la medición, respectivamente. El proceso comienza con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$, y $\mathbf{P}(0)=10^9\mathbf{I}$ para el estado inicial desconocido de la matriz de covarianza del error.

Note que una vez que se han establecido las ganancias óptimas de Kalman, la carga computacional del proceso del filtrado es reducido sólo a las ecuaciones (14), (17), y la antirotación.

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS TAYLOR-KALMAN

La respuesta en frecuencia de los filtros T^kK puede obtenerse directamente de la transformada z a su ecuación de estados.

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \Phi\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)(s(n) - \mathbf{H}\Phi\hat{\mathbf{x}}(n-1)) \quad (19)$$

con la ganancia de Kalman \mathbf{K} en estado estable. La transformada z de (19) es

$$\hat{\mathbf{x}}(z) = \Phi z^{-1}\hat{\mathbf{x}}(z) + \mathbf{K}(s(z) - \mathbf{H}\Phi z^{-1}\hat{\mathbf{x}}(z)), \quad (20)$$

y resolviendo para $\hat{\mathbf{x}}(z)$ tenemos

$$[\mathbf{I} - \Phi z^{-1} + \mathbf{K}\mathbf{H}\Phi z^{-1}]\hat{\mathbf{x}}(z) = \mathbf{K}s(z) \quad (21)$$

Así la función de transferencia entre los estados del modelo de señal y la señal de entrada está dada por

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{I} + (\mathbf{K}\mathbf{H} - \mathbf{I})\Phi z^{-1}]^{-1} \mathbf{K}, \quad (22)$$

y las respuestas en frecuencia de los estados del filtro se obtienen evaluando la función de transferencia en $\mathbf{G}(z)$ a $z = e^{j\theta}$, para $-\pi < \theta \leq \pi$.

Señal de prueba

Para obtener el estado estable de las ganancias de los filtros de Kalman, la señal de prueba es de la forma (1) y construida con las siguientes funciones de amplitud y fase:

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t) \quad (23)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t) \quad (24)$$

con los siguientes parámetros de amplitud: $a_0=1$, $a_1=0.1$, y $f_a=5$ Hz; y de fase $\varphi_0=1$, $\varphi_1=0.1$, $f_\varphi=5$ Hz. Además se utilizaron los siguientes parámetros para el filtro de Kalman: $\sigma_v^2 = 0.01$ y $\sigma_w^2 = 10^{-4}$, que corresponden a una relación señal a ruido (SNR) de 37 dB. Los parámetros representan el peor caso de operación del filtro. Las ganancias del filtro de Kalman se congelan llegando a su primer estado estable, de lo contrario la respuesta en frecuencia de los filtros es pobre.

Respuesta en frecuencia del filtro Taylor⁰-Kalman

En la figura 1 se muestra la respuesta en frecuencia del filtro T^0K a diferentes frecuencias de muestreo. Note que éstas son asimétricas, indicando que se trata de un filtro complejo. Es fácil ver que cuando la señal de entrada corresponde a la nominal en estado estable, funciona correctamente con una ganancia igual a dos en la frecuencia fundamental positiva, y cero en la negativa. Presenta una resonancia en la frecuencia nula, indicando la presencia de un polo cercano a $z=1$ en la función de transferencia. El polo se acerca más y más a la unidad conforme la frecuencia de muestreo crece. Es bien sabido que el filtro de Kalman no trabaja apropiadamente cuando la señal de entrada no corresponde a su modelo de señal. En este caso, el modelo de señal utilizado

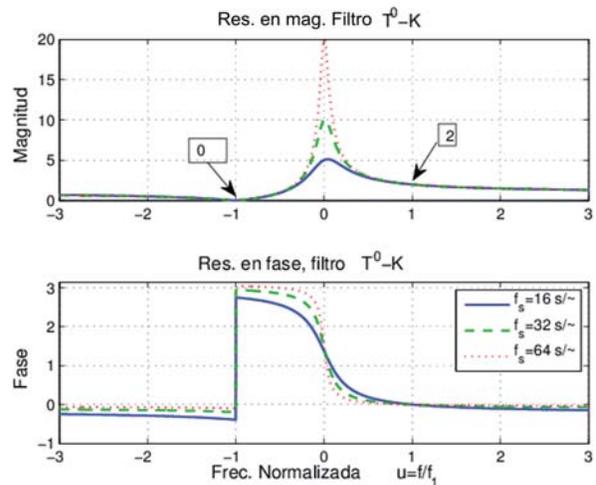


Fig. 1. Respuesta en frecuencia del filtro T^0K a diferentes frecuencias de muestreo.

corresponde a una señal con dos componentes, una rotando a la frecuencia fundamental y la otra girando en sentido contrario. Debido a la naturaleza no rotatoria de una señal constante, el filtro falla cuando trata de extraer de ella un fasor. Finalmente, note que la respuesta en fase no es planamente nula en la frecuencia fundamental, lo que indica un pequeño retraso en sus estimaciones.

La respuesta en magnitud del filtro ilustrada en la figura 1 es similar a la analizada [en referencia⁸, p. 103], como se puede ver en la figura 2, donde usando los parámetros de ese artículo, reproducimos la respuesta en magnitud en su parte real e imaginaria en la gráfica superior, mientras que la respuesta en magnitud de la ganancia compleja se muestra en la gráfica inferior. Note que ésta corresponde al filtro T^kK como se muestra en la figura 1, pero con su resonancia inclinada a la derecha debido a la diferencia de parámetros del ejemplo. Además este tipo de respuesta en frecuencia corresponde al desarrollo del filtro de Kalman [en referencia¹⁹, p. 102]. En esta publicación, se demuestra que ante condiciones iniciales desconocidas, y covarianza de error constante, las estimaciones del filtro de Kalman corresponden exactamente a las del filtro de Fourier de medio ciclo. Desde entonces, el filtro de Kalman fue desplazado en el área de medición fasorial por el de Fourier. Sin embargo, note lo diferente que es la respuesta en frecuencia del filtro de Kalman a la del filtro de Fourier, con forma de seno cardinal.

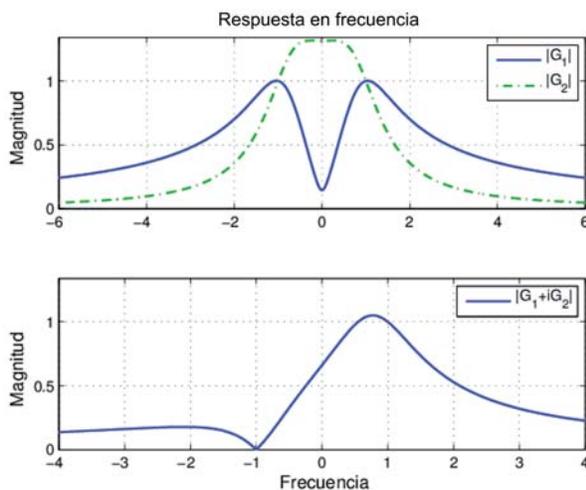


Fig. 2. En la parte superior, respuesta en magnitud de la parte real e imaginaria del filtro de Kalman como se ilustra en ⁸, y en la parte inferior la respuesta en magnitud de la ganancia compleja.

Ambas coinciden solamente en las ganancias dos y cero correspondientes a la frecuencia fundamental positiva y negativa, respectivamente.

La resonancia en la frecuencia nula puede ser resuelta agregando un cero en $z=1$. Esto se logra incluyendo la componente de dc al modelo de señal rotado:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Note en figura 3 que su respuesta en magnitud ahora tiene un cero en la ganancia en la frecuencia nula.

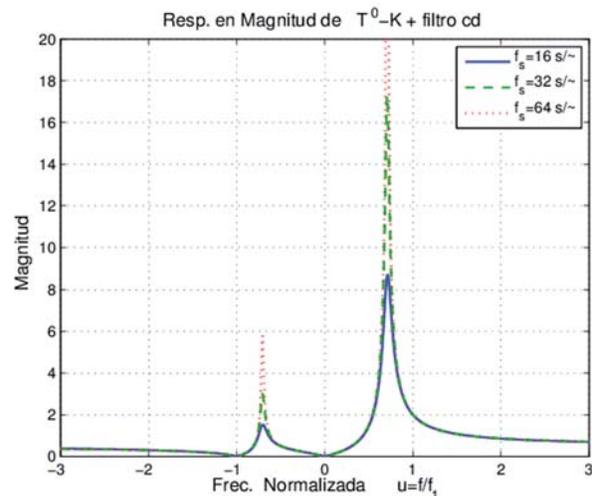


Fig. 3. Respuesta en magnitud del filtro T⁰K-dc a diferentes frecuencias de muestreo.

Además un filtro pasa bajas se obtiene de la variable (dc) del primer estado, la figura 4 ilustra su respuesta en magnitud. Note que este es un buen filtro pasa

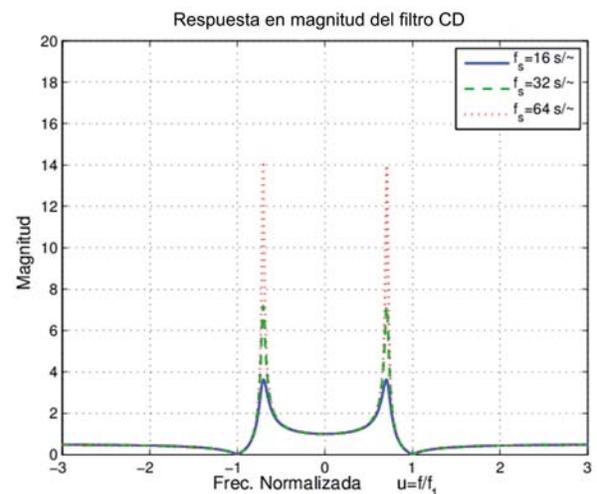


Fig. 4. Respuesta en magnitud del filtro de dc para diferentes frecuencias de muestreo.

bajas debido a su ganancia plana en la frecuencia fundamental (positiva y negativa). Debido a sus picos resonantes, este tipo de filtros son utilizados en telecomunicaciones para detectar cuando la frecuencia de la señal se sale de un intervalo.

Respuesta en frecuencia del filtro Taylor²Kalman

El filtro T²K no solamente provee estimaciones del fasor sino también de sus primeras derivadas. La figura 5 muestra las respuestas de magnitud y fase del filtro. Note que las ganancias son planas alrededor de la frecuencia fundamental (positiva y negativa). El filtro exhibe nuevamente frecuencias resonantes cerca de la frecuencia nula y tiene ganancias superiores a uno en las armónicas. Así, el filtro trabaja bien solamente cuando el espectro de la señal está confinado en el intervalo de ganancias planas. La principal característica de este filtro está en su respuesta en fase. Note que la fase es planamente nula alrededor de la frecuencia fundamental. Esto significa que la estimación fasorial de este filtro es instantánea, i.e. sin algún retardo cuando el espectro de la oscilación corresponde a la señal pasa banda del modelo de señal. Los cambios abruptos en fase en la frecuencia fundamental negativa son insignificantes debido a la ganancia nula en ese intervalo.

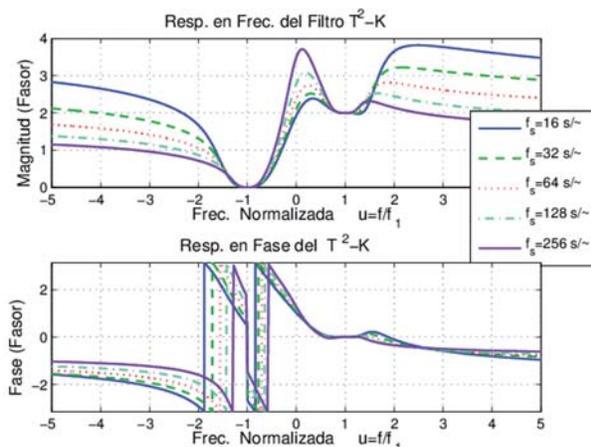


Fig. 5. Respuesta en frecuencia del filtro T²K a diferentes frecuencias de muestreo.

Por otro lado, la figura 6 muestra la respuesta en magnitud del primer (gráfica superior) y segundo (gráfica inferior) diferenciador. Como se puede constatar, el filtro T²K garantiza una ganancia lineal y otra parabólica junto a la frecuencia fundamental.

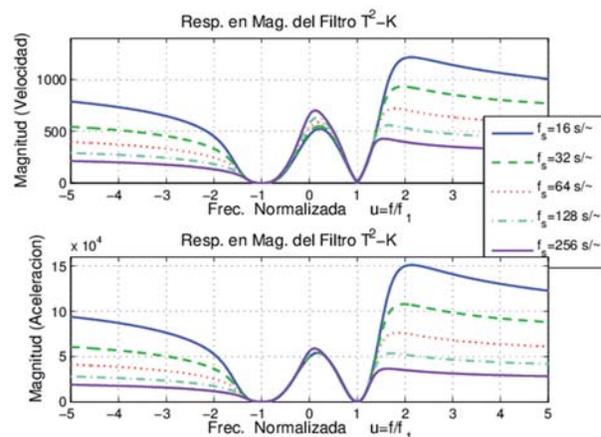


Fig. 6. Respuesta en magnitud del a) primer y b) segundo filtro diferenciador T²K.

Estas formas corresponden a las ganancias ideales de dichos diferenciadores. Además ambos filtros tienen ganancias planas nulas en la frecuencia fundamental negativa, lo que asegura su pleno rechazo en sus estimaciones correspondientes.

FILTRO T^KKF

El filtro T²K anterior logra diferenciadores ideales sólo alrededor de la frecuencia fundamental. Para obtener ganancias ideales en cada una de las frecuencias armónicas, es necesario extender la matriz de transición del modelo de señal a las armónicas de interés. Por ejemplo, si la señal es muestreada a $N = 2^\ell$ muestras por periodo, y todas sus armónicas son incluidas, entonces la matriz de transición es extendida de la siguiente manera

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_K(\tau)\psi^0 & & & & \\ & \Phi_K(\tau)\psi^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Phi_K(\tau)\psi^{N-1} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Contiene a lo largo de la diagonal N submatrices $\Phi_K(\tau)$ cuadradas de $(K + 1) \times (K + 1)$ escaladas por potencias consecutivas de la N -ésima raíz unitaria, y el resto de los elementos iguales a cero.

Note que para $K=0$, y $\Phi_0(\tau)$, la matriz de transición extendida en (26) es una matriz diagonal con potencias consecutivas del factor de fase ψ , y corresponde a los elementos del algoritmo de Goertzel's implementado en la DFT recursiva en referencia²⁰⁻²¹. Sin embargo, el enfoque de T⁰KF difiere de esta

implementación recursiva debido a que las ganancias de Kalman construyen un sistema de lazo cerrado (un observador) que sigue estrechamente al sistema de lazo abierto del algoritmo de Goertzel. Por otro lado, el T⁰KF es incomparable con la implementación de la DFT recursiva en relevadores numéricos,²² ya que este algoritmo sólo realiza estimaciones del fasor en su frecuencia fundamental. Su nombre DFT es inapropiado ya que en realidad se trata de la estimación con el filtro de Fourier de un ciclo, simplemente tomando cada nueva muestra de señal y rechazando la última de ellas al avanzar la ventana temporal, asumiendo que la señal es periódica durante el ciclo de señal observada. Sin embargo, esta última técnica puede compararse equitativamente con el filtro T⁰KF operando en la frecuencia fundamental, que implícitamente asume una periodicidad de un ciclo. Ellos son igualmente rápidos y tienen la misma respuesta en frecuencia ilustrada en la figura 7. Así, ambos trabajan correctamente mientras haya periodicidad durante un ciclo, pero ambos fallan ante oscilaciones como puede verse en la figura 11.

Complejidad computacional

Una vez que se establecen las ganancias de Kalman, el algoritmo de filtrado se realiza usando la ecuación de predicción de estados en (14), y la ecuación de actualización de estados en (17). La matriz extendida en (26) es $(K+1)N \times (K+1)N$; pero debido a su naturaleza diagonal, y a la forma superior triangular de la submatriz Φ_k en (10), que sólo requiere $(K+1)(K+2)/2$ productos, el costo computacional de la transición de estados no es de $[(K+1)N]^2$, sino de $(K+1)(K+2)N/4$ productos, dada la simetría entre la mitad de los factores de fase con los de la otra mitad. Por otro lado, el costo computacional de la actualización de estados requiere de N productos de la multiplicación del estimado de error con las ganancias de Kalman. Por último, la estimación de la señal en la ecuación de salida (13), no requiere de productos debido a que \mathbf{H} sólo tiene N elementos unitarios y el producto escalar se resuelve con una suma; así el costo computacional de todo el algoritmo de filtrado es de $((K+1)(K+2)/4+1)N$ productos (las adiciones no se toman en cuenta).

Por otro lado, la FFT de una señal con $N=2^L$ muestras, tiene L etapas con $\frac{N}{2}$ productos, por lo

que el costo computacional de una FFT de $N \times N$ es de $(\frac{\log_2(N)}{2}N)$ productos. En la siguiente sección veremos cómo el banco de filtros de la T⁰KF es equivalente al del algoritmo de la FFT. En este caso ($K=0$), su costo computacional es de $\frac{3}{2}N$ productos, que es menor que el de la FFT para secuencias menores de $N>8$ muestras. Finalmente, el costo computacional del filtro T²KF es de $4N$ productos. Así el costo computacional del algoritmo es muy bajo (4 productos por armónica), teniendo en cuenta que el T²KF estima tres coeficientes en cada armónica: el fasor y sus dos primeras derivadas, por lo que la cantidad de productos por cada estimado es de $4/3$.

En la siguiente subsección, demostraremos que cuando son incluidas todas las armónicas en el modelo, la respuesta en frecuencia del T⁰KF es la misma que la de la DFT, y que la del filtro T²KF, tiene las mismas ganancias planas que la transformada T²F alrededor de las frecuencias armónicas.

Filtro T⁰KF

Nuestro primer ejemplo es el filtro T⁰KF para una frecuencia de muestreo de $N=16$ muestras por ciclo. Su matriz de transición es una matriz diagonal con el factor de rotación de fase $\{\psi^k, k=0,1,\dots,15\}$ descendiendo sobre la diagonal. Su respuesta en magnitud se ilustra en la gráfica superior de la figura 7, junto con la respuesta en magnitud del filtro de Fourier de un ciclo. Note que son idénticas, indicando que el T⁰KF calcula la DFT con el algoritmo de Kalman. Además note en sus respuestas en fase, en la gráfica inferior, que las estimaciones del T⁰KF

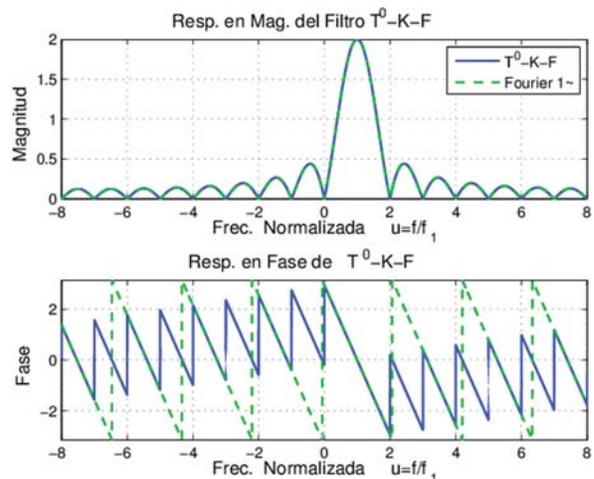


Fig. 7. Respuesta en frecuencia del filtro T⁰KF.

tendrán exactamente el mismo retardo como los de los filtros de Fourier de un ciclo, que en aplicaciones en tiempo real es de medio ciclo, por lo que la mejor asignación de tiempo a su estimación es a la mitad de su ventana.

Filtro T²KF

El segundo ejemplo es el filtro T²KF. Ahora su matriz de transición tiene en su diagonal matrices Φ_2 multiplicadas por los factores de rotación de fase $\{\psi^k, k=0,1,\dots,15\}$ de manera descendente. La figura 8 muestra la respuesta en magnitud y fase del filtro T²KF en la primera armónica. La magnitud aparece junto con la respuesta del filtro de Fourier de un ciclo para apreciar la transformación cuando el orden del polinomio de Taylor cambia de cero a dos. El filtro peine se transforma en un filtro valla, i. e. un filtro que rechaza una banda de frecuencia junto a cada armónica, en vez de una sola frecuencia como el filtro peine. Hay que tener en cuenta que a pesar de la ampliación del lóbulo principal y la elevación de los niveles de los lóbulos laterales, que hace a los filtros más sensibles al ruido, las ganancias junto a las frecuencias armónicas mejoran bastante su planitud. Lo que mejora el filtrado, evitando la distorsión de magnitud y la de fase en la armónica de interés, y con un mejor rechazo del resto de las armónicas, cuando el espectro de señal de entrada se concentra en dichas bandas frecuenciales. Note en la respuesta en fase, que la fase en la banda de paso es cero y plana, indicando que no hay retardo en los estimados fasoriales (posición, velocidad, y aceleración). Significa que las estimaciones

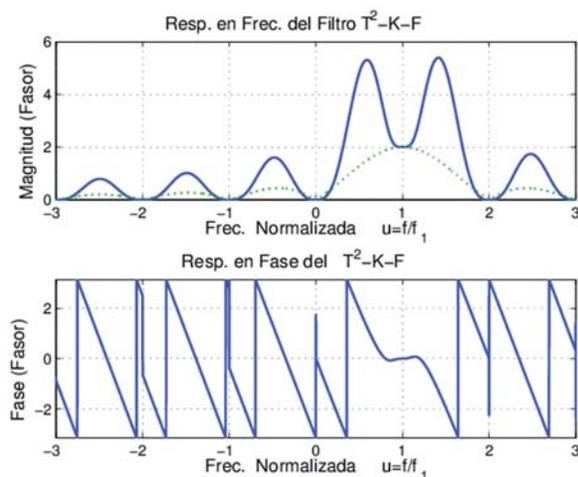


Fig. 8. Respuesta en frecuencia del filtro T²KF.

fasoriales pueden realmente sincronizarse en tiempo real. Una gran ventaja de estas estimaciones, es que son muy útiles para aplicaciones de control, en donde el retraso puede provocar una inestabilidad en el lazo de control. En la siguiente sección se demuestra este hecho con ejemplos numéricos.

Con el modelo de señal de segundo orden es posible además obtener estimaciones de la primera y segunda derivadas de la oscilación en cada frecuencia armónica. La figura 9, muestra la respuesta en magnitud de la primera y segunda derivada respectivamente. Note que cerca de la frecuencia fundamental la respuesta en magnitud muestra las ganancias de diferenciadores ideales (lineal y parabólica, respectivamente).

Antes de ir a los resultados numéricos, dedicamos unas palabras al subespacio de los filtros. El desarrollo del filtro T^kKF al incluir uno por uno los elementos del conjunto total de armónicos, muestra

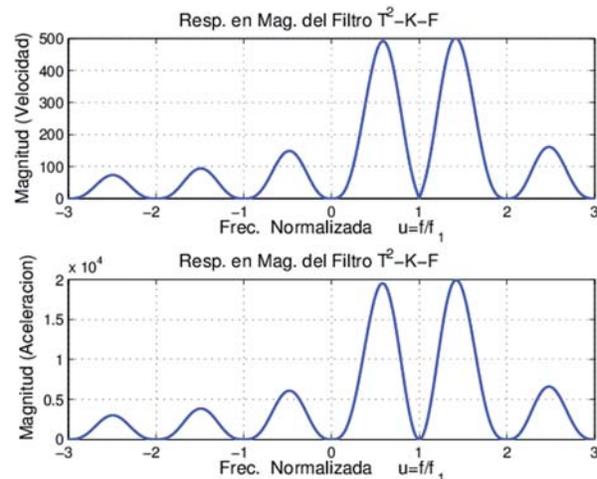


Fig. 9. Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador asociados al filtro T²KF.

que el subespacio del filtro T⁰K, cuya respuesta en frecuencia se ilustra en la figura 1, evoluciona poco a poco hasta alcanzar al subespacio de Fourier, con la respuesta en frecuencia ilustrada en la figura 7; o que el subespacio del filtro T²K en la figura 5 evoluciona al de la figura 8. Es por esto que es posible realizar la DFT con la T⁰KF, y la T²FT con el filtro T²KF, pero sin el retardo de estimación de la transformación de los filtros FIR. De hecho, para $K \geq 2$, los filtros IIR del T^kKF alcanzan respuestas frecuenciales nulas y planas junto a las frecuencias de operación, como se puede ver en $u=1$ en la respuesta de fase de la figura 8, esto garantiza estimaciones fasoriales instantáneas

cuando el espectro de la señal está confinada bajo las respuestas planas.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se probaran los filtros T⁰KF y T²KF con una señal determinista oscilatoria con 3^{ra} y 5^a armónicas oscilatorias superpuestas, que son adheridas en cierto instante de tiempo. Además se considera un caso real de una señal oscilatoria de voltaje tomada de una subestación de un país de Latino América. Se comparan las estimaciones del fasor y de sus primeras derivadas, así como los de las armónicas relevantes (tercera y quinta) contenidos en la señal.

Señal de prueba

La siguiente señal teórica es muestreada a $N=64$ muestras por ciclo fundamental. Se analiza el desempeño de la estimación fasorial de los filtros T^KKF con $N_{\hat{h}}=64$ armónicas.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= a(t)\cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \\
 &+ u(t)\left[\frac{a(t)}{10}\cos(2\pi 3 f_1 t + \varphi_3(t))\right. \\
 &\left. + \frac{a(t)}{20}\cos(2\pi 5 f_1 t + \varphi_5(t))\right]
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

en el que

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{parat } < 15 / f_1 \\ 1, & \text{parat } \geq 15 / f_1 \end{cases}
 \tag{28}$$

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t)
 \tag{29}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t)
 \tag{30}$$

$$\varphi_3(t) = 0.9\varphi(t)
 \tag{31}$$

$$\varphi_5(t) = 0.8\varphi(t)
 \tag{32}$$

y los siguientes parámetros en amplitud: $a_0=1$, $a_1=0.2$, $f_a=5\text{Hz}$; y fase, $\varphi_0=1$, $\varphi_1=0.1$, $f_\varphi=5\text{Hz}$. La varianza del ruido en el filtro de Kalman es: $\sigma_v^2 = 0.01$ y $\sigma_w^2 = 10^{-4}$.

La señal de prueba y sus estimados se ilustran en la figura 10. Note que la inyección de las armónicas comienza en el 15^{avo} ciclo, como se especifica en (28). La estimación de la señal es muy buena con ambos filtros. Es bien sabido que el filtro de Kalman es muy bueno cuando la señal de entrada corresponde a su modelo de señal. Sin embargo, al observar los errores de estimación de la señal, ilustrados en

la gráfica inferior, es evidente que el filtro T⁰KF produce mayores niveles de error que el filtro T²KF. Los errores de estimación con el primer filtro son de millonésimas, los cuales se reducen mil veces con el segundo filtro. Tenga en cuenta también que se produce una importante transición inmediatamente después de la inyección de los armónicos, debido a la alteración del modelo de Taylor en ese instante de tiempo. Pero en nuestra aplicación usamos el filtro de Kalman no para estimar la señal, sino sus componentes fasoriales. La figura 11, ilustra las estimaciones fasoriales obtenidas por ambos filtros. El filtro T⁰KF produce estimaciones con una forma corrugada perceptible, y sistemáticamente retardadas de medio ciclo, mientras que las del filtro T²KF están más cerca del fasor ideal. Se muestra claramente que el modelo del polinomio de Taylor de orden cero es

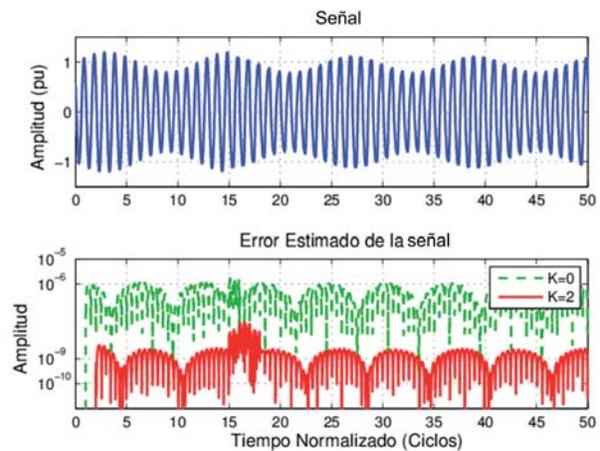


Fig. 10. Señal y error estimado.

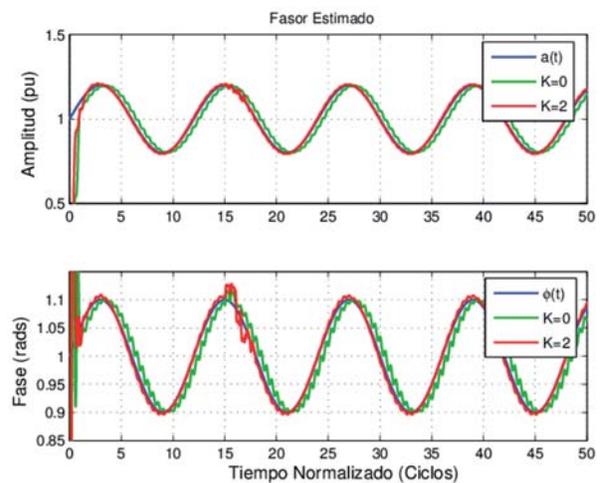


Fig. 11. Estimación de fasor con filtros de T⁰KF y T²KF.

incapaz de suprimir el retraso de las estimaciones mientras que el modelo de segundo orden, junto con el algoritmo del filtro de Kalman, logra estimaciones instantáneas que pueden ser sincronizadas con la marca temporal de la muestra más reciente. El TVE de la estimación es ilustrada en la figura 12 para ambos filtros.

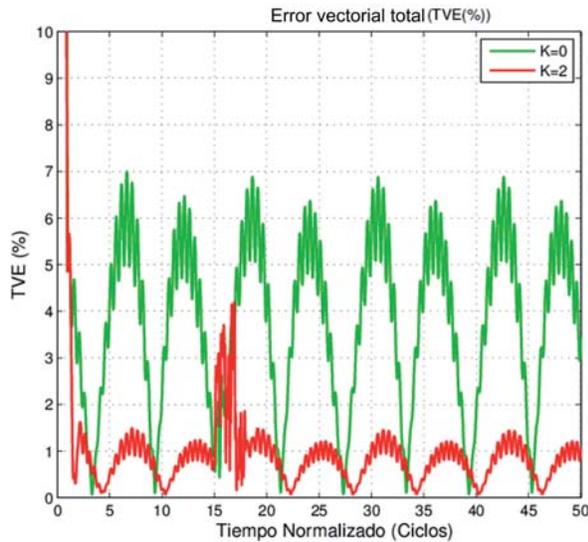


Fig. 12. Error vectorial total (TVE) de las estimaciones con T^0KF y T^2KF .

Una importante reducción del TVE se logra con el filtro de segundo orden, que reduce el valor medio del TVE de 3.66% a 0.83%. Esta reducción se puede mejorar mediante la reducción de la frecuencia de muestreo, o incluyendo menos armónicas; por ejemplo, para $N_h=8$ armónicas, el máximo valor del TVE con el filtro de segundo orden es menor que 1%, que es el tolerado por la norma de sincrofasores. La señal utilizada en este ejemplo es un caso extremo debido a las altas frecuencias (5 Hz) moduladas no sólo en amplitud sino también en fase de los tres componentes.

Finalmente, la estimación de la primera derivada obtenida con el filtro de Taylor de segundo orden se muestra en la figura 13. Estas estimaciones no son tan buenas como las estimaciones del fasor pero podrían mejorarse usando un modelo de orden superior, o por la reducción de la complejidad del algoritmo (disminuyendo la frecuencia de muestreo y el número de armónicas incluidas).

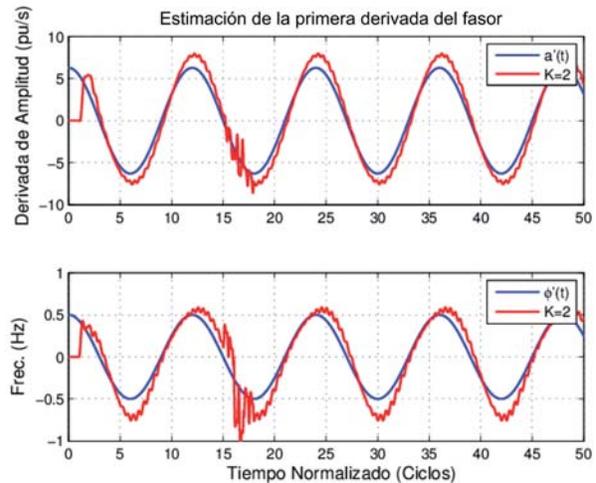


Fig. 13. Estimación de la primera derivada con T^2KF .

Señal de voltaje real

Finalmente, consideramos la estimación de una señal de voltaje oscilatoria tomada de una subestación de un país latinoamericano. Fue muestreada a 16 muestras por ciclo fundamental de un sistema de potencia a 60 Hz. Consideramos, además de las estimaciones de los filtros T^0KF y T^2KF , los obtenidos con la FFT de un ciclo (matriz de Fourier de 16×16), y la T^2FT de cuatro ciclos. Finalmente, comparamos las estimaciones de amplitud de T^2KF y T^2FT para evaluar el tiempo transcurrido entre los dos. Para simplificar, se sigue un paralelismo con la subsección anterior.

La señal de voltaje se muestra en la figura 14. La señal de error del filtro T^0KF se reduce mil veces con

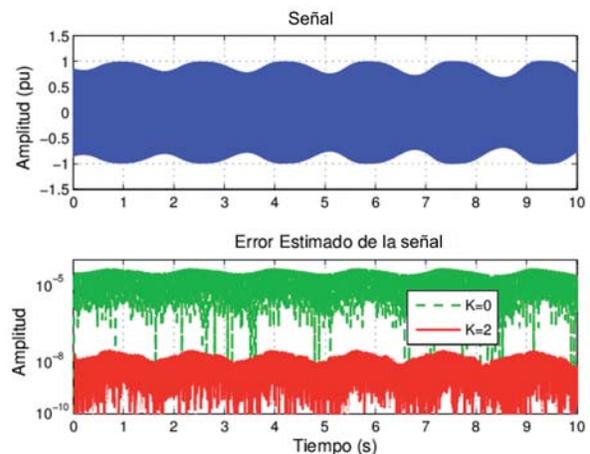


Fig. 14. Señal de voltaje oscilatoria real estimada con T^0KF , T^2KF y error estimado de la señal.

el filtro T^2KF . La estimación de amplitud y fase de ambos filtros se ilustra en la figura 15. Note que sólo se ilustran los últimos cuatro segundos para ver mejor los detalles. Tenga en cuenta que las estimaciones de amplitud cero contienen infiltraciones perceptible de ruido, sin embargo su estimación de fase es muy similar al filtro de segundo orden. La variación lineal persistente en la fase es debido al desenvolvimiento correspondiente a la desviación negativa de la frecuencia del sistema, como se puede verificar en la figura 16, que ilustra las estimaciones de las primeras derivadas del fasor. Se puede constatar una desviación de frecuencia de -2.5 Hz con respecto a la nominal. Por otra parte las estimaciones de las derivadas de amplitud y fase contienen ruido perceptible.

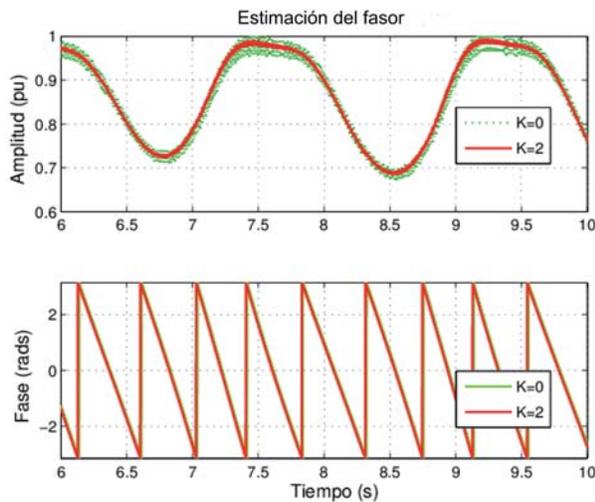


Fig. 15. Estimaciones fasoriales con los filtros T^0KF y T^2KF .

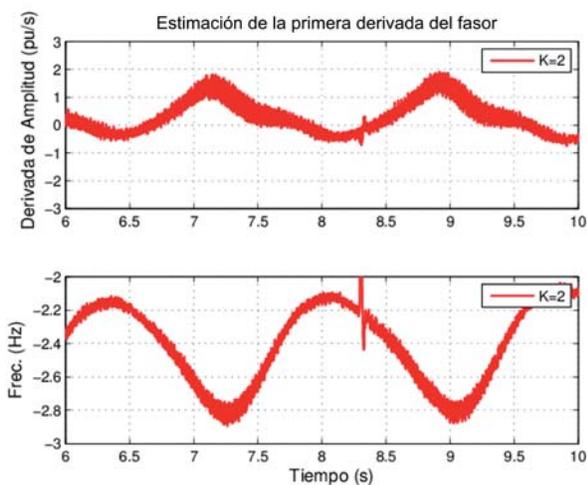


Fig. 16. Estimación de la primera derivada T^2KF .

Además las estimaciones de amplitud y fase obtenidas con la FFT de un ciclo y con el T^2FT de cuatro ciclos en la figura 17, asignando una etiqueta de tiempo en la ultima muestra de señal disponible en la ventana de tiempo. Podemos ver que los resultados son casi similares a los de la figura 15, con una perceptible infiltración de ruido en las estimaciones de la FFT como semejantes a las del T^0KF . Sin embargo en esas figuras el retardo de las estimaciones no se percibe claramente. El retardo entre las estimaciones de T^2KF y T^2FT se ilustra en figura 18, en efecto, corresponde a un retardo de dos ciclos como hemos mantenido a lo largo de todo el documento, prueba que el filtro T^2KF proporciona estimaciones fasoriales inmediatas, tal como se predijo durante el análisis de su respuesta de fase

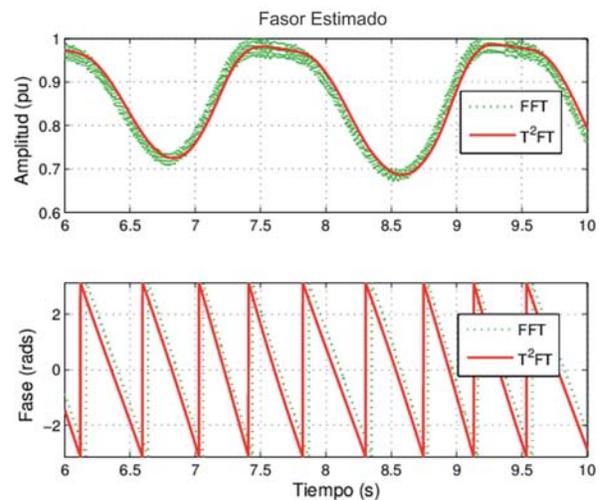


Fig. 17. Amplitud de FFT, T^2FT y fases estimadas.

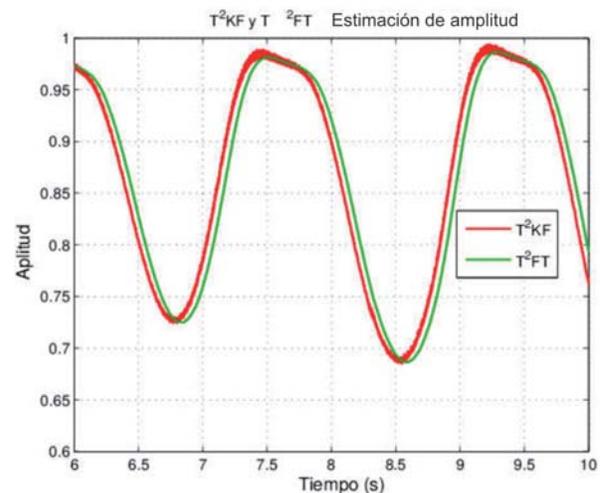


Fig. 18. Retardo entre las estimaciones fasoriales obtenidas con T^2KF y T^2FT .

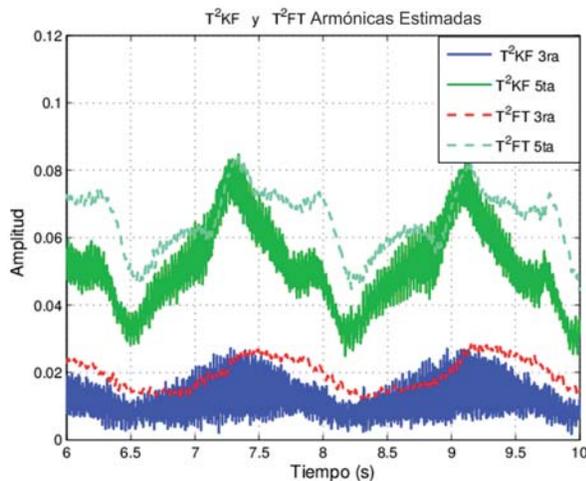


Fig. 19. Estimaciones de amplitud de la tercera y quinta armónicas con T^2KF y T^2FT . Nuevamente, el retardo es aparente entre las estimaciones de ambos métodos.

planamente nula. Finalmente, la figura 19 muestra las estimaciones de amplitud de las armónicas relevantes (tercera y quinta) en la señal de tensión, con el T^2KF y T^2FT . Una vez más el retardo entre las estimaciones tomadas con diferentes métodos es evidente. El T^2KF produce ruido en las estimaciones, pero instantáneas. Las estimaciones de la FFT no se muestran debido a que son muy pobres debido a la significativa infiltración en ellas de la componente fundamental negativa.

CONCLUSIONES

La extensión del modelo de señal del filtro tradicional de Kalman con polinomios de Taylor de hasta orden K conduce a la formación de filtros de respuestas en magnitud y fase planas a partir del segundo orden. Dichos filtros ofrecen estimaciones fasoriales sin distorsión en magnitud o fase. Por lo que sus estimaciones instantáneas pueden verdaderamente sincronizarse para aplicaciones de tiempo real como las de control.

Los filtros T^KKF son capaces de estimar armónicas dinámicas con estimaciones fasoriales libres de infiltraciones armónicas. Los filtros de orden cero tienen el mismo rendimiento en el análisis armónico de la DFT, y sólo necesitan uno y medio productos por armónica. Su complejidad computacional es inferior a la del algoritmo de la FFT, cuando más de 8 frecuencias armónicas son incluidas en la banda de observación frecuencial. Por otro lado, el banco

de filtros de segundo orden es capaz de realizar la T^2FT en tiempo real, con un tiempo computacional de sólo cuatro productos por armónica estimada, pero más importante aún, proporcionando estimaciones de derivadas armónicas carentes de retardo.

Teniendo en cuenta su carácter instantáneo, y su bajo costo computacional, las estimaciones con este nuevo enfoque son muy útiles para análisis armónico en tiempo real y aplicaciones de control en sistemas de potencia.

REFERENCIAS

1. Standard for synchrophasors for power systems, IEEE Std. C37.118-2005.
2. Draft standard for synchrophasor measurements for power systems, IEEE PPC37.118.1/D4.2 1, May 2011.
3. M. A. Platas and J. A. de la O Serna, Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 59, no. 7, pp. 1803--1811, July 2010.
4. -----, 'Dynamic harmonic analysis through Taylor-Fourier transform, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 60, no. 3, pp. 804--813, March 2011.
5. J. A. de la O Serna and J. Rodriguez, Instantaneous dynamic phasor estimates with Kalman filter, in *IEEE PES General Meeting*, 2010.
6. -----, Instantaneous oscillating phasor estimates with Taylor-Kalman filters, *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 26, no. 4, pp. 2336 -- 2344, November 2011.
7. -----, Taylor-Kalman-Fourier filters for instantaneous oscillating phasor and harmonic estimates, *Instrumentation and Measurement, IEEE transactions on*, vol.61, no.4, pp. 941-951, April 2012.
8. L. Wang, Frequency responses of phasor-based microprocessor relaying algorithms, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 14, no. 1, pp. 98 -- 109, January 1999.
9. P. Dash, R. Jena, G. Panda, and A. Routray, An extended complex Kalman filter for frequency measurement of distorted signals, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 49, no. 4, pp. 746 -- 753, August 2000.

10. G. Benmouyal, Frequency-domain characterization of kalman filters as applied to power system protection, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 3, pp. 1129--1138, 1992.
11. R. Haeb-Umbach and M. Bevermeier, OFDM channel estimation based on combined estimation in time and frequency domain, in *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007. IEEE International Conference on*, vol. 3, 2007, pp. 277--280.
12. Z. Cheng and D. Dahlhaus, Time versus frequency domain channel tracking using kalman filters for OFDM systems with antenna arrays, in *Vehicular Technology Conference, 2003. VTC 2003-Spring. The 57th IEEE Semiannual*, vol. 1, 2003, pp. 651--655.
13. F. Cornett, Kalman estimation of frequency-domain interference reduction coefficients for angle-modulated signals, in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '84.*, vol. 9, 1984, pp. 290--293.
14. S. Cooper and H. Durrant-Whyte, A frequency response method for multi-sensor high-speed navigation systems, in *Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, 1994. IEEE International Conference on MFI '94.*, 1994, pp. 1--8.
15. J. A. de la O, Dynamic phasor estimates for power system oscillations, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 56, no. 5, pp. 1648--1657, october 2007.
16. D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*. 1em plus 0.5em minus 0.4em Artech House Publishers, Apr. 2005.
17. D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. 1em plus 0.5em minus 0.4em Wiley-Interscience, Jun. 2006.
18. P. Zarchan, H. Musoff, and F. K. Lu, *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*, 3rd ed. 1em plus 0.5em minus 0.4em AIAA (American Institute of Aeronautics & Ast, Sep. 2009.
19. A. G. Phadke and J. S. Thorp, *Computer Relaying for Power Systems*, 1st ed. 1em plus 0.5em minus 0.4em Research Studies Press LTD, Sep. 1988.
20. S. Lai, S. Lei, C. Chang, C. Lin, and C. Luo, Low computational complexity, low power, and low area design for the implementation of recursive DFT and IDFT algorithms, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 56, no. 12, pp. 921--925, Dec. 2009.
21. S. Lai, S. Lei, W. Juang, and C. Luo, A Low-Cost, Low-Complexity, and Memory-Free architecture of novel recursive DFT and IDFT algorithms for DTMF application, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 57, no. 9, pp. 711--715, Sep. 2010.
22. H. A. Darwish and M. Fikri, Practical considerations for recursive DFT implementation in numerical relays, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 22, no. 1, pp. 42--49, Jan. 2007.

Anúnciese en:

Ingenierías

INFORMES:

Tel: (52) (81) 83294020 Ext. 5854 Fax: (52) (81) 83320904

E-mail: revistaingenierias@gmail.mx

Internet: <http://ingenierias.uanl.mx>