

Nuevo método de aproximaciones sucesivas para obtención de raíces de polinomios

Roberto Elizondo Villarreal^A, Virgilio A. González^{A,B},
Ramón Cantú Cuéllar^A

^A FIME-UANL

^B CIIDIT-UANL

roelizon@hotmail.com, virgonzal@gmail.com, ramon_cantu@yahoo.fr

RESUMEN

En este artículo reportamos un nuevo método de aproximaciones sucesivas aplicándolo a la determinación de raíces de polinomios de grado arbitrario. El método está fundamentado en que para determinar cualquier raíz, el valor absoluto de la suma de los miembros positivos y negativos de una función deben ser iguales. Este método tiene como ventajas respecto a los métodos conocidos que a) tiene un solo valor inicial supuesto (x_0), b) éste no tiene que ser cercano al valor de la raíz y c) no se ve afectado por los cambios de pendiente. Adicionalmente puede ser de convergencia rápida.

PALABRAS CLAVE

Aproximaciones sucesivas, polinomios, raíces.

ABSTRACT

We are reporting in this article a new successive approximations method for determining the roots of polynomial functions of arbitrary order. The method is based on that for determining any root, the absolute values of the sumatory of the positive and negative terms of any function must be equal. The method advantages in reference to the well-known methods is that: a) it is necessary only one initial supposed value (x_0), b) it is not necessary that this value is close to the root, and c) the convergence is not affected by slope changes. In addition it can be of rapid convergence.

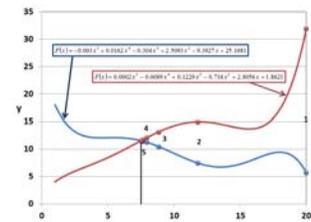
KEYWORDS

Successive approximations, polynomius, roots.

INTRODUCCION

En la actualidad, los métodos numéricos son una herramienta indispensable en prácticamente todos los campos de las ciencias exactas e ingenierías.¹⁻⁴ Aquellos métodos utilizados para encontrar las raíces de un polinomio de grado n tienen además aplicaciones que van desde encontrar los puntos de intersección de funciones complejas, hasta la resolución de ecuaciones diferenciales.

Entre los métodos de aproximaciones sucesivas más utilizados para la solución de problemas científicos e ingenieriles se pueden enumerar: 1. Método de bisecciones sucesivas, 2. Punto fijo (iteración simple), 3. Método Newton-



Raphson, 4. Método de la secante, 5. Método de Horner (división sintética), 6. Método Birge-Vieta y 7. Método de Lin-Bairstow. Sobre el desarrollo de estos métodos, basta decir que el más conocido y utilizado es el método de Newton- Raphson, que data de finales del siglo XV e inicio del XVI.⁵

Todos estos métodos tienen ventajas y desventajas, dependiendo de las características de la función a la que se le quiere determinar las raíces, por ejemplo los métodos de Newton-Raphson y el de la secante fallan ante cambios abruptos o de signo de la pendiente de las funciones, los métodos de bisecciones sucesivas y de iteración simple requieren iniciar los métodos con dos valores de la variable independiente de los que se sepa que representan un intervalo que incluye la raíz buscada.

En este artículo, presentamos un nuevo método de aproximaciones sucesivas robusto en el sentido de que no es afectado por cambios abruptos de pendiente ni es necesario que el único valor inicial supuesto de la raíz (x_0) sea cercano a la raíz verdadera (r).

Además, como se muestra en la figura del encabezado de este artículo, el método puede aplicarse, entre otras cosas, para la determinación de la intersección entre dos funciones polinomiales, esta aplicación será sujeto de un artículo futuro.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

La fundamentación del método considera que si tenemos la función:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 x^0 \quad (1)$$

es decir:

$$f(x) = \sum_0^n a_i x^i$$

la cual es continua para toda $x \in R$, entonces para que se cumpla $f(x)=0$, la suma de todos los términos con signo positivo debe ser igual al valor absoluto de la suma de todos los términos con signo negativo, por lo tanto si definimos dos funciones, a saber:

$$g(x) = \sum_0^n a_i x^i \frac{(1 + a_i x^i / |a_i x^i|)}{2} \quad (2)$$

$$h(x) = \sum_0^n |a_i x^i| \frac{(1 - a_i x^i / |a_i x^i|)}{2} \quad (3)$$

donde $g(x)$ será la sumatoria de todos los términos

de $f(x)$ cuyas evaluaciones puntuales en x sean positivos, es decir:

$$g(x) = \sum (a_i x^i \Leftrightarrow a_i x^i > 0) \quad (4)$$

Mientras que $h(x)$ será la sumatoria de los valores absolutos de los términos de $f(x)$ que cumplan con ser negativos al ser evaluados en x .

$$h(x) = \left| \sum (a_i x^i \Leftrightarrow a_i x^i < 0) \right| \quad (5)$$

Entonces cuando $f(x)=0$, es decir en cualquier raíz, podemos escribir

$$g(x) = h(x) \quad (6)$$

o bien:
$$\frac{g(x)}{h(x)} = 1 \quad (7)$$

Así, para determinado valor de $x(x_0)$, la desviación de $g(x)/h(x)$ respecto a uno nos indica lo alejado que nos encontramos de la raíz de $f(x)$, por lo que puede ser el parámetro para modificar x_0 con el fin de acercarnos a la raíz de $f(x)$, definiendo así la nueva $x(x_1)$ como:

$$x_1 = x_0 \frac{g(x_0)}{h(x_0)} \quad (8)$$

Sin embargo, $g(x_0)/h(x_0)$ puede tomar valores mayores o menores a 1, por lo que en realidad la Ec. 8 puede alejar o acercar la magnitud de x de la raíz, según la situaciones mostradas en la tabla I.

Tabla I. Tendencia de convergencia o divergencia a la raíz "r" durante iteraciones de la ecuación 9, como función de: la posición de la abscisa supuesta (x_0) respecto a "r" y la razón $g(x_0)/h(x_0)$

Posición de x_0	$g(x)/h(x)$	
	> 1	< 1
$< r$	Converge	Diverge
$> r$	Diverge	Converge

Para aumentar la rapidez de convergencia hacia la raíz "r", y controlar la dirección, agregamos a la formula recursiva el parámetro E

$$x_1 = x_0 \left(\frac{g(x_0)}{h(x_0)} \right)^E \quad (9)$$

donde E puede tomar cualquier valor dentro de los números reales, excepto cero, el signo direcciona la recursividad hacia la raíz y la magnitud de E, la rapidez de convergencia.

Con el signo negativo del exponente "E", la tabla anterior es la inversa, es decir cuando las iteraciones para $E > 0$ hacen que haya divergencia,

entonces cuando $E < 0$ producen la convergencia de las iteraciones.

Una referencia relacionada estrechamente a este método es el reportado por Elizondo,⁶ al que llamó “descomposición de signo”, aplicado fundamentalmente a problemas de control, sin embargo al observar esta descomposición como la que se hace en el ejemplo 4.1 de la página 44 de dicha referencia, observamos que la función ejemplo (Ec. 10) la descompone en las funciones mostradas en las ecuaciones 11 y 12.

$$f(q) = 4 + q_1 - q_2 + 8q_1^2 q_2 - 9q_1 q_2^2 \quad (10)$$

$$f_p(q) = 4 + q_1 + 8q_1^2 q_2 \quad (11)$$

$$f_n(q) = q_2 + 9q_1 q_2^2 \quad (12)$$

Las ecuaciones correspondientes al método aquí propuesto serían completamente diferentes, a saber: en primer lugar la función $f(q)$ se expresa en forma más general según la expresión 13.

$$f(q) = a + bq_1 + cq_2 + dq_1^2 q_2 + eq_1 q_2^2 \quad (13)$$

Donde los valores de los coeficientes son: $a=4$, $b=1$, $c=-1$, $d=8$ y $e=-9$ entonces la función $g(q)$ queda como:

$$g(q) = a \frac{(1+a/|a|)}{2} + bq_1 \frac{(1+bq_1/|bq_1|)}{2} + cq_2 \left[\frac{1+cq_2/|cq_2|}{2} \right] + dq_1^2 q_2 \left[\frac{1+dq_1^2 q_2/|dq_1^2 q_2|}{2} \right] + eq_1 q_2^2 \left[\frac{1+eq_1 q_2^2/|eq_1 q_2^2|}{2} \right] \quad (14)$$

Mientras que la función $h_1(x)$ es como la representada en la expresión [15]

$$h(q) = a \frac{(1-a/|a|)}{2} + bq_1 \frac{(1-bq_1/|bq_1|)}{2} + cq_2 \left[\frac{1-cq_2/|cq_2|}{2} \right] + dq_1^2 q_2 \left[\frac{1-dq_1^2 q_2/|dq_1^2 q_2|}{2} \right] + eq_1 q_2^2 \left[\frac{1-eq_1 q_2^2/|eq_1 q_2^2|}{2} \right] \quad (15)$$

Así que, al evaluar el valor de las funciones $f_p(q)$ y $f_n(q)$ de acuerdo a lo reportado en la referencia 6 (Ec. 11 y 12), para cuando los valores de los términos independientes valen $q_1=1$ y $q_2=-1$, resulta:

$$f_p(q) = -3 \text{ y } f_n(q) = 8 \quad (16)$$

Ya que podría haber confusión al querer equiparar

las Ecs. 11 y 12 (reportadas en la referencia 44) con las ecuaciones 14 y 15 aquí propuestas, observamos que al resolver las ecuaciones 14 y 15 usando los mismos valores de q_1 y q_2 resultan en los valores de las ecuaciones 17.

$$g(q) = 6 \text{ y } h(q) = 17 \quad (17)$$

Como se puede apreciar, las funciones 14 y 15, representadas también por las expresadas en las ecuaciones 4 y 5, son completamente diferentes a las propuestas por el método llamado descomposición de signo propuesto por otros autores.⁶ El planteamiento en la referencia ⁶ y el del presente artículo llevan a resultados completamente diferentes

APLICACIÓN DEL MÉTODO

EJEMPLO 1: polinomio de quinto grado

Como ejemplo establecemos el siguiente polinomio de 5º grado

$$f(x) = -0.00031x^5 + 0.016x^4 - 0.3x^3 + 2.5x^2 - 9.4x + 15 \quad (18)$$

Como vemos en la gráfica de la figura 1, $f(x)$ tiene 3 raíces reales (r_1 , r_2 y r_3)

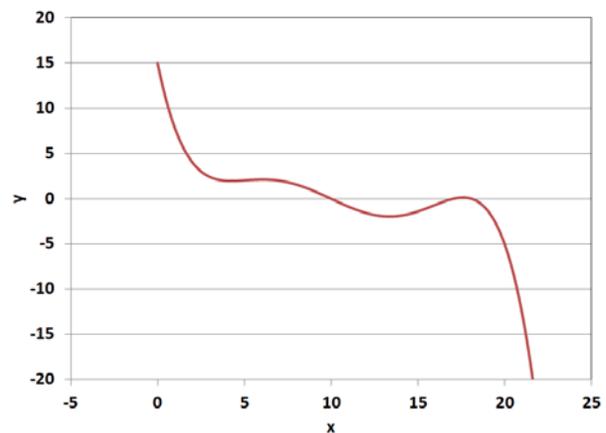


Fig.1. Gráfica del polinomio representado en la función (13).

Para encontrar la primera raíz (r_1), lo haremos con dos valores iniciales de x_0 , primero suponemos un valor de inicial que es menor a r_1 ($x_0=1 < r_1$) y segundo con un valor mayor a r_1 , ($x_0=14.5 > r_1$). En la figura 2, se muestra una ampliación de la sección de la gráfica donde se encuentra r_1 , y se han añadido las gráficas de las aproximaciones de x a la raíz para ambos x_0 , habiendo utilizado $E=1$.

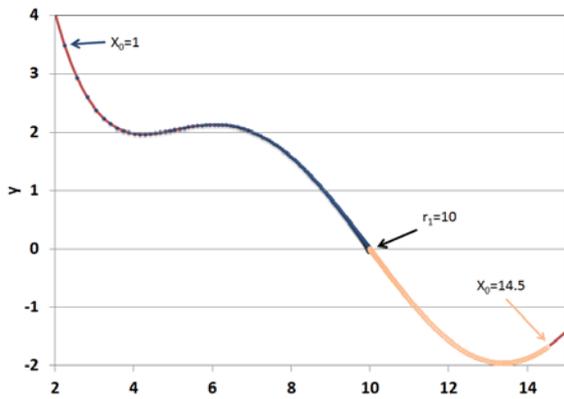


Fig. 2. Sección de la gráfica de la función (18) donde se muestra la convergencia a $r=10$ de valores iniciales (x_0) tanto menores como mayores de r .

Como se puede apreciar en la figura 2, independientemente del valor de x_0 elegido, el método converge a la raíz ($r_1=10$), con la característica de que no importan los cambios de pendiente de la función en el intervalo de convergencia, estos cambios de pendiente pueden ser un inconveniente en métodos como los de Newton–Raphson.

En el ejemplo descrito, un inconveniente es la rapidez de convergencia, en la figura 3 se muestran las gráficas de convergencia a $r_1=10$ iniciando de $x_0=16$ y $x_0=4$. Encontramos que para que $f(x)$ alcance un valor igual o menor a 10^{-5} , son necesarias 596 y 814 iteraciones respectivamente.

Al observar la expresión 9 se aprecia que el exponente E puede tomar cualquier número real y no se altera el hecho de que la razón $[g(x_0)/h(x_0)]^E$ debería ser igual a uno cuando $f(x)=0$, es decir cuando $x=r$, esto fundamenta la posibilidad de disminuir sustancialmente el número de iteraciones

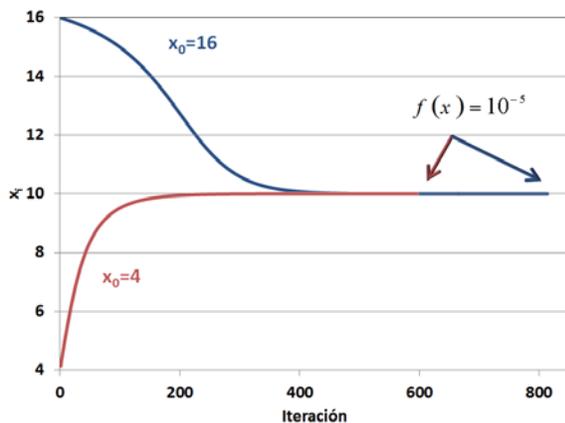


Fig. 3. Rapidez de aproximación a la raíz $r=10$, utilizando como valores de partida $x_0=4$ y $x_0=16$.

necesarias para alcanzar una convergencia con un error aceptable.

En las figuras 4 y 5 se analiza el número de iteraciones necesarias para converger desde un valor de $x_0=16$, hasta la raíz con una exactitud de $\pm 10^{-5}$, ($x_i f(x)$: $10,0 \pm 10^{-5}$), en función del valor del exponente E .

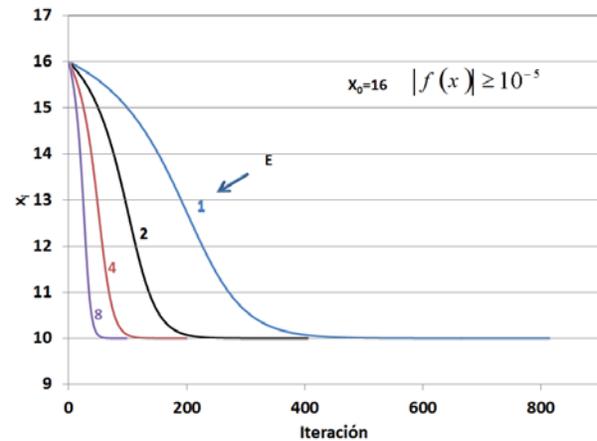


Fig. 4. Valores de x_i en función del número de iteraciones para alcanzar $f(x)=\pm 10^{-5}$ para diferentes valores de E (1,2,4 y 8) en la determinación de la raíz $r=10$ del polinomio de la ecuación 18.

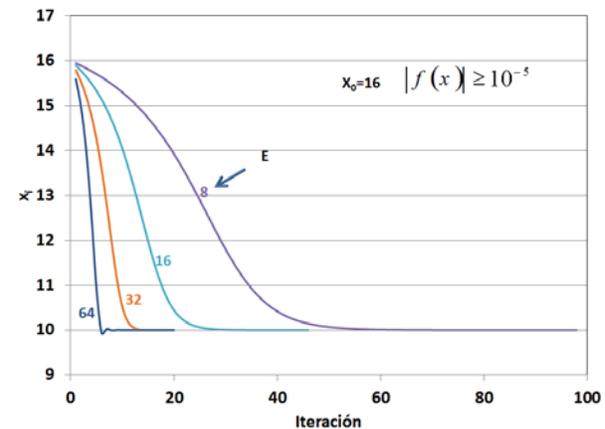


Fig. 5. Valores de x_i en función del número de iteraciones para alcanzar $f(x)=\pm 10^{-5}$ para diferentes valores de E (8, 16, 32 y 64) en la determinación de la raíz $r=10$ del polinomio de la ecuación 8.

En estas gráficas (4 y 5), apreciamos como se acelera considerablemente la rapidez de convergencia del algoritmo, pudiendo el exponente E tomar valores tan grandes como 32 y 64. Pero también observamos que cuando $E = 64$, x_i llega a tomar valores menores que r , resultando en incremento en el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia con el error establecido ($f(x)=0 \pm 10^{-5}$).

Con esta observación se hicieron varias corridas del algoritmo hasta alcanzar un número de 23 experimentos en el intervalo de $1 < x < 70$ graficando los logaritmos del número de iteraciones necesarias para alcanzar el error establecido (10^{-5}) en función del logaritmo del exponente utilizado, resultando la figura 6. El punto de inflexión o mínimo de esta gráfica, corresponde al valor de E que resulta en un cambio del valor de x_i que pasa de ser menor a mayor que la raíz (r). Así, aunque sigue siendo útil un exponente tan elevado como 70, ya exponentes mayores que 47.2 en lugar de disminuir el número de iteraciones para la convergencia, las incrementan.

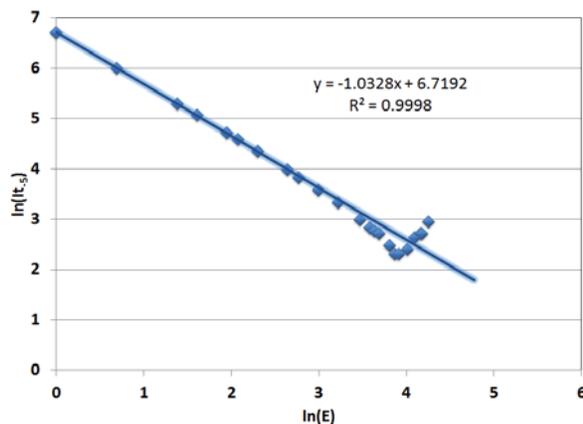


Fig. 6. Gráfica de los logaritmos del número de iteraciones necesarias para alcanzar la raíz con una exactitud de $\pm 10^{-5}$ y la magnitud de E.

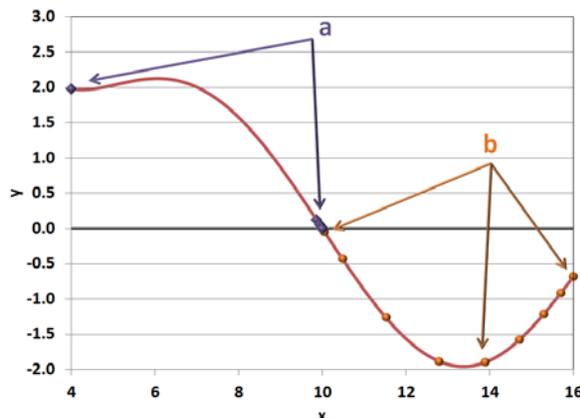


Fig. 7. Etapas de convergencia a la raíz r , del polinomio de la Ec. 18, partiendo a) de $x_0=4$ con $E=26.5$ y b) $x_0=16$ con $E=47.2$

En la figura 7 se muestran los resultados de la aplicación del método para encontrar la raíz ($r=10$), partiendo de $x_0=16$ y $x_0=4$ con los valores de los exponentes óptimos ($E=47.2$ y $E=26.5$). Los resultados numéricos se reportan en las tablas II y III.

Tabla II. Resultados de las 11 primeras iteraciones en la determinación de la raíz $r=10$ de la función 18 partiendo de $x_0 = 16$ y con $E = 47.2$

i	x_i	y_i	ζ
1	16	-0.68	-
2	15.7	-0.91	1.90×10^{-2}
3	15.29	-1.22	2.60×10^{-2}
4	14.7	-1.58	3.80×10^{-2}
5	13.88	-1.9	5.60×10^{-2}
6	12.79	-1.88	7.90×10^{-2}
7	11.52	-1.26	9.90×10^{-2}
8	10.48	-0.43	9.00×10^{-2}
9	10.05	-4.50×10^{-2}	4.10×10^{-2}
10	10	-5.20×10^{-4}	4.00×10^{-3}
11	10	-3.10×10^{-7}	5.70×10^{-5}

Tabla III. Resultados de las 12 primeras iteraciones en la determinación de la raíz $r=10$ de la función 18 partiendo de $x_0= 4$ y con $E = 26.5$.

i	x_i	y_i	ζ
1	4	1.98	-
2	9.86	0.12	1.46
3	9.941	0.05	0.008
4	9.97	0.02	3.30×10^{-3}
5	9.99	0.01	1.00×10^{-3}
6	9.995	4.00×10^{-3}	6.20×10^{-4}
7	9.997	1.90×10^{-3}	2.70×10^{-4}
8	9.999	8.30×10^{-4}	1.20×10^{-4}
9	10	3.00×10^{-4}	5.20×10^{-5}
10	10	1.60×10^{-4}	2.30×10^{-5}
11	9.999922	7.03×10^{-5}	1.00×10^{-5}
12	9.999966	3.09×10^{-5}	4.40×10^{-6}

En el segmento de $10 < x < 19$ de la función 18 se encuentran otras dos raíces, (r_1 y r_2), para calcular la más pequeña (en cuanto a valor de x), tenemos dos opciones, la primera es haciendo $x_0=13$ ($r < x_0 < r_1$), con lo cual se obtiene convergencia con una exactitud mayor de $\pm 10^{-5}$ respecto a $f(x)$ en 17 iteraciones Para determinar la segunda raíz (r_1) se puede escoger x_0 con cualquier valor mayor a la primera raíz (r) y menor a la tercera (r_2), en la figura 8 se muestra el segmento de gráfica donde se encuentra r_1 con los datos de dos conjuntos de iteraciones, un con $x_0=12$ ($< r_1$) y $E=-120$ y otro partiendo de $x_0=18$ ($> r_1$) y $E=-190$).

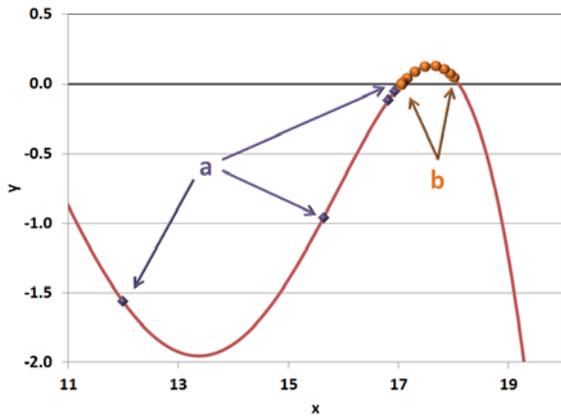


Fig. 8. Etapas de convergencia a la raíz r_1 , del polinomio de la Ec. 18, partiendo a) de $x_0=12$ con $E=-120$ y b) $x_0=18$ con $E=-190$.

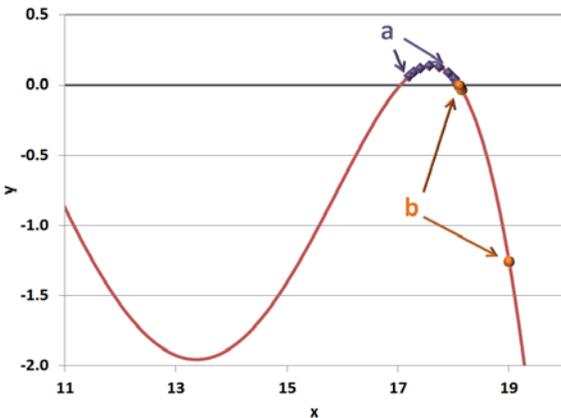


Fig. 9. Etapas de convergencia a la raíz r_2 , del polinomio de la Ec. 18, partiendo a) de $x_0=17.2$ con $E=170$ y b) $x_0=19$ con $E=110$.

Por último, para determinar la tercera raíz, r_2 , se escoge un valor de $x_0 > r_1$, en la figura 9 se muestran las convergencias a r_2 partiendo de $x_0=17.2$ y $E=170$, así como $x_0=19$ y $E=110$.

En la tabla IV se resumen los resultados de los cálculos de las tres raíces.

EJEMPLO 2: Ecuación polinomial de tercer grado con términos xy .

Tabla IV. Variables de entrada, (x_0 y E), y resultados del valor de cada raíz (x), incluyendo el número de iteraciones efectuadas y el error en $f(x)=0$ para la función 18.

Raíz	Variables de entrada		Resultados		
	x_0	E	n	$f(x)$	x
r	16	47.2	11	-3.08×10^{-7}	10.00000
r_1	12	-120	19	-7.11×10^{-6}	17.04256
r_2	19	110	15	-8.18×10^{-6}	18.09424

El método aquí propuesto, también puede ser útil para graficar y obtener las raíces de ecuaciones heterogéneas, esto lo demostraremos mediante el siguiente ejemplo:

Sea la ecuación:

$$y^3 - y^2 + 2y - 4xy + 3x^2y - x^3 + \quad (19)$$

$$3x^2 - 0.5x - 1 = 0$$

Esta ecuación la podemos reagrupar de la siguiente manera:

$$y^3 - y^2 + (2 - 4x + 3x^2)y + \quad (20)$$

$$(-x^3 + 3x^2 - 0.5x - 1) = 0$$

Por lo que, si conocemos x , La Ec 14 la podemos considerar como un polinomio de tercer grado de la forma:

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0 \quad (21)$$

Dónde: $A=1, B=-1, C=(2-4x+3x^2)y \quad (22)$

$$D=-x^3+3x^2-0.5-1$$

En seguida definimos el intervalo de valores de x que queremos graficar, en este caso se consideró el intervalo de $-2 \leq x \leq 4$ en incrementos de 0.1.

Definimos para cada valor de x , las magnitudes A, B, C y D y efectuamos el procedimiento descrito en los párrafos anteriores, ajustando cuando sea necesario la “ y ” inicial (y_0) y el exponente E , en este caso, los parámetros se ajustaron para tener una convergencia con un error menor a $\pm 10^{-14}$ en 15 o menos iteraciones, en la tabla V se muestran los parámetros usados en cada intervalo.

Tabla V. Parámetros utilizados para la convergencia de y a diferentes valores de x . (ver función 19).

Intervalo	y_0	E
$-2 \leq x < -0.4$	-0.8	1
$-0.4 \leq x < -0.1$	0.1	-1
$-0.1 \leq x < 0.8$	0.1	-1.1
$0.8 \leq x < 2.7$	-0.1	1
$2.7 \leq x < 4$	0.1	-1

En la figura 10 se muestra la gráfica obtenida, observando que el cambio de signo tanto del exponente como del valor inicial de las ordenadas (y_0), coincide con el cambio de signo del valor de y , es decir cuando se pasa por alguna raíz de la ecuación.

Para determinar las raíces simplemente se sustituye por cero los valores de “ y ” en la ecuación 15 (solución trivial), quedando un polinomio de tercer grado (Ec. 23):

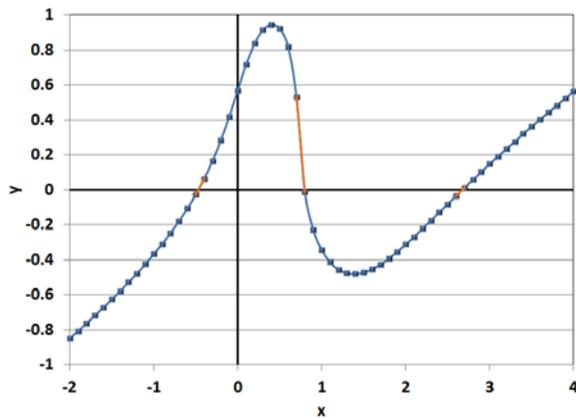


Fig. 10. Gráfica de la ecuación 19, indicando con cruces y cambio de color donde se cambiaron los signos de los parámetros de entrada (y_0 y E) para lograr la convergencia.

$$-x^3 + 3x^2 - 0.5x - 1 = 0 \quad (23)$$

Este polinomio contiene las tres raíces de la ecuación inicial (Ec. 14), las cuales se obtienen con gran exactitud con un número de iteraciones muy pequeño, en la tabla VI se muestran los resultados para la determinación de cada raíz, incluyendo los parámetros de entrada y el número de iteraciones.

Tabla VI. Parámetros de entrada y resultados del cálculo de las raíces de la ecuación 19.

Raíz		r_1	r_2	r_3
Parámetros de entrada	x_0	-1	2	2
	E	-0.5	-1	1.35
No. iteraciones		5	8	5
Resultado	X	-0.46962	0.79663	2.672981
	Y	1.99×10^{-6}	1.06×10^{-7}	1.00×10^{-6}

Como se aprecia en la Ec. 9, las iteraciones nunca cambian el signo de x_0 , por lo que, si hemos supuesto una $x_0 > 0$, solo encontraremos las raíces positivas, si además hay raíces negativas es necesario suponer una x_0 inicial menor que cero como lo muestra este ejemplo.

En la figura 11, se muestran las raíces obtenidas para el polinomio de la ecuación 19.

CONCLUSIONES

Se presenta un nuevo método de aproximaciones sucesivas basado en la ecuación

$$x_{i+1} = x_i \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right)^E$$

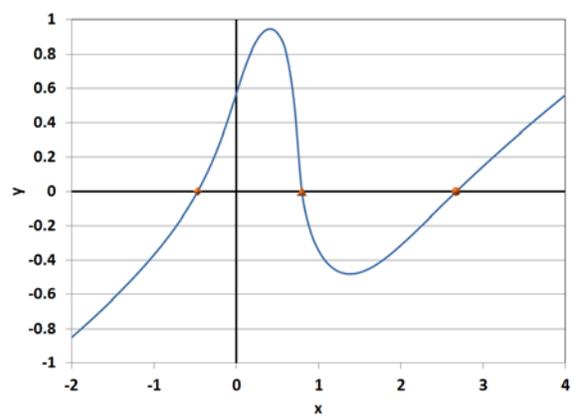


Fig. 11. Gráfica de la Ec. 19 y las raíces calculadas.

como fórmula recursiva, donde $g(x)$ y $f(x)$ son los valores absolutos de las sumatorias de los términos positivos y negativos respectivamente y E es un exponente que puede tomar cualquier valor dentro de los números reales. El método es de rápida convergencia, solo se necesita un valor inicial supuesto de x , no necesariamente cercano a la raíz verdadera y el método no es afectado por cambios de pendiente de la función. El método se puede aplicar para graficar y obtener raíces de polinomios heterogéneos y servirá de base para otras aplicaciones como la determinación de intersecciones de gráficas de funciones.

REFERENCIAS

- Burden R. L. and Faires, J. D., "Numerical Analysis", Ed. Belmont: Brooks & Cool, 9 ed. (2005).
- Leader J., "Numerical Analysis and Scientific Computation", Ed. Addison-Wesley. 1 ed. (2004).
- Kelley T.C., "Solving Nonlinear Equations with Newton's Method". Philadelphia, Ed. Society for Industrial Mathematics. (2003).
- Chapra, S. y Canale, R. "Métodos numéricos para Ingenieros", Ed. Mc Graw-Hill ed 4. (2007).
- Tjalling J., Ypma, "Historical development of the Newton-Raphson method", SIAM Review 37 (4), 531-551, (1999).
- Elizondo Gonzalez C, "Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal", Dr. Tesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, (1999).