

Estimados del fasor dinámico bajo el principio de optimalidad de Bellman: el filtro Taylor-LQG-Fourier

Luis Fernando Sánchez-Gómez, José Antonio de la O Serna
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL
fersago.00@gmail.com ; jdelao@ieee.org

RESUMEN

Recientemente los filtros Taylor^k-Kalman-Fourier fueron propuestos para la estimación de fasores dinámicos, los cuales proveen de estimados instantáneos y reducen drásticamente el vector de error (TVE) por un factor de diez. Sin embargo, exhiben frecuencias de resonancia alrededor de la banda de paso, y altas ganancias inter-armónicas. En este artículo, el controlador Óptimo Lineal Cuadrático (LQ) es aplicado para diseñar filtros retroalimentados refiriéndose a los filtros Taylor^k-LQG-Fourier. Este método reduce las ganancias inter-armónicas y las frecuencias de resonancia alrededor de la banda de paso del filtro Taylor^k-Kalman-Fourier. Los estimados de la señal obtenidos a través de esta técnica óptima son cuasi-instantáneos, otorgando estimados instantáneos de frecuencia y su tasa de cambio, preservando la sincronía con la señal para aplicaciones de control. La efectividad del algoritmo propuesto es verificada a través de las simulaciones.

PALABRAS CLAVE

Controlador Lineal-Cuadrático, Filtro de Kalman, Controlador Lineal-Cuadrático Gaussiano, Fasor Dinámico, Control Óptimo.

ABSTRACT

Recently Taylor^k-Kalman-Fourier filters were proposed for estimating dynamic phasors to provide instantaneous estimates and drastically reduce the total vector error (TVE) by a factor of ten. However, they exhibit resonant frequencies at the edges of the pass-band, and high inter-harmonic gains. In this paper, the optimal linear quadratic (LQ) control is applied to design feedback filters referred to as Taylor^k-LQG-Fourier filters. This method reduces the inter-harmonic gains and the resonant frequency at the passband edges of the Taylor^k-Kalman-Fourier filter. The estimates from oscillating signals obtained through this optimal technique are quasi-instantaneous, and provide estimates of the instantaneous frequency, and its rate of change, preserving its synchrony with the signal for control applications. The effectiveness of the proposed algorithm is verified through simulations.

KEYWORDS

Linear-quadratic control, Kalman filter, Linear Quadratic-Gaussian Controller, oscillating phasor, optimal control.

INTRODUCCIÓN

El monitoreo y control de sistemas de potencia, o cualquier otro sistema cuyo comportamiento sea sinusoidal, dependen de una estimación precisa e instantánea del fasor, especialmente cuando las señales fluctúan. Mejores estimados del fasor bajo condiciones dinámicas son obtenidos mediante un modelo de señal que asume fluctuaciones de amplitud y fase, en lugar del modelo de señal tradicional con parámetros constantes. Actualmente, el problema de estimación fasorial ha atraído mucho la atención, debido a la proliferación de dispositivos electrónicos diseñados para operar bajo condiciones oscilatorias, tal y como las unidades de medición fasorial (PMUs). Este interés se expresa a través de la norma de sincrofasores recientemente revisada.¹

Estimados del fasor bajo condiciones oscilatorias son recientemente propuestos en varios estudios. El filtro TaylorK-Kalman-Fourier (TK-K-F)² fue desarrollado para resolver el retardo de la Transformada TaylorK-Fourier (TFT).³ La TFT es más apropiada bajo condiciones dinámicas que la Transformada Discreta de Fourier (DFT), sin embargo, ambas presentan un retardo sistemático en los estimados del fasor, mientras que el filtro TaylorK-Kalman-Fourier otorga estimados instantáneos, lo que hace posible su verdadera sincronización para aplicaciones de control. Otra importante ventaja de estos filtros es que otorga estimados no solo del fasor, sino también de sus primeras derivadas. Esto se vuelve importante ya que además de los estimados del fasor durante condiciones oscilatorias o cambios abruptos, también es necesario estimar la frecuencia del sistema, y su tasa de cambio.

El objetivo principal de este artículo es mostrar la acción de control del controlador Lineal-Cuadrático basado en el principio de optimalidad de Bellman^{4,5} usando el filtro TaylorK-Kalman como observador para generar los vectores de estado de las muestras disponibles de la señal. Este método óptimo nos conduce al filtro TaylorK-LQG, y los filtros TaylorK-LQG-Fourier con nuevas ganancias de retroalimentación capaces de modificar la trayectoria de los estimados del fasor obtenidos mediante el filtro de Kalman, y mejorando su respuesta en frecuencia.

Este trabajo fue motivado por la búsqueda del método

optimum optimorum para la estimación fasorial bajo condiciones dinámicas. Se pretende saber cuál entre mínimos cuadrados ponderados (LMS), filtro de Kalman, o el algoritmo lineal cuadrático es la mejor opción para este propósito. Todos ellos claman de ser el óptimo, pero en esta implementación emergen dificultades como se muestra en este artículo: El algoritmo del LQ no puede operar sobre las muestras disponibles de la señal, esta implementación requiere de un observador para generar los estados de la señal. En este artículo usamos el algoritmo de Kalman para cumplir con este propósito, de esta manera un método híbrido es encontrado. Por supuesto, muchas otras estrategias son posibles, es por eso que mostramos los resultados de este trabajo para estimular la investigación en este campo interesante.

La principal contribución de este artículo es proveer una nueva clase de filtros, desarrollados a partir de la modificación el algoritmo clásico del LQG, y demostrar que estos filtros son capaces de mejorar la respuesta de magnitud de los filtros TK-K y TK-K-F, reduciendo sus altas frecuencias de resonancia en las bandas subarmónicas. El método LQG con un modelo flexible de la señal estima fasores de las señales de oscilación con la suficiente precisión y proporciona estimaciones fasoriales cuasi-instantáneas.

Modelo de la Señal Pasabanda

El filtro TK-K presentado por de la O Serna y Rodriguez-Maldonado⁶ está basado en un modelo de señal con amplitud y fase como funciones variantes en el tiempo que definen las dinámicas de oscilación de la envolvente compleja. Una breve síntesis de este desarrollo se presenta con el fin de hacer de este documento más completo. En sistemas de potencia las oscilaciones de amplitud y fase pueden ser modeladas completamente por una señal pasabanda de la forma:

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \quad (1)$$

siendo $a(t)$ la amplitud de la señal $s(t)$ y $\varphi(t)$ su fase relativa a su frecuencia fundamental f_1 (la derivada $\varphi'(t)$ corresponde a la desviación de frecuencia instantánea). También se supone en este artículo que $s(t)$ es de banda estrecha, es decir, su espectro se encuentra confinado dentro de una banda estrecha alrededor de la frecuencia fundamental f_1 . En términos de funciones exponenciales complejas, el

modelo de la señal puede ser simplificado como:

$$s(t) = \frac{1}{2} [p(t)e^{j2\pi f_1 t} + \bar{p}(t)e^{-j2\pi f_1 t}] \quad (2)$$

$$= \text{Re}\{p(t)e^{j2\pi f_1 t}\}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

Donde $p(t)=a(t)e^{j\varphi(t)}$ es la envolvente compleja de la señal pasabanda $s(t)$, mejor conocida como fasor oscilatorio de la oscilación. Dicho fasor es representado por una función compleja expresada en forma polar, en la cual $a(t)$ y $\varphi(t)$ son modulaciones de amplitud y fase de $s(t)$, respectivamente. La función compleja del fasor oscilatorio $p(t)$, puede ser aproximada por un K -ésimo polinomio de Taylor centrado en t_0 :

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)(t - t_0) + \dots + p^{(K)}(t_0) \frac{(t - t_0)^K}{K!}$$

$$t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} + t_0 \quad (3)$$

a partir de las derivadas de sus curvas del polinomio de Taylor, es posible obtener la matriz de transición de estados. Para $\tau=t-t_0$ se tiene:

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)\tau + \ddot{p}(t_0)\frac{\tau^2}{2} + \dots + p^{(K)}(t_0)\frac{\tau^K}{K!}$$

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)\tau + \ddot{p}(t_0)\frac{\tau^2}{2!} + \dots + p^{(K)}(t_0)\frac{\tau^K}{K!} \quad (4)$$

$$\dot{p}_K(t) = \dot{p}(t_0) + \ddot{p}(t_0)\tau + \dots + p^{(K)}(t_0)\frac{\tau^{K-1}}{(K-1)!}$$

Note que la transición de estados está dada por:

$$\vec{p}_K(t) = \Phi_K(\tau)\vec{p}_K(t_0) \quad (5)$$

donde $p_K(t)$ es el vector de estado, y la matriz de transición de estados se compone de la siguiente forma:

$$\Phi_K(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \dots & \frac{\tau^K}{K!} \\ & 1 & \tau & \dots & \frac{\tau^{K-1}}{(K-1)!} \\ & & 1 & \dots & \frac{\tau^{K-2}}{(K-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Para un determinado grado del polinomio de Taylor, esta aproximación es más exacta cuando $t \rightarrow t_0$ si $p(t)$ es una función suave. El modelo truncado puede ser aplicado en cualquier instante de tiempo t_0 con precisión suficiente, siempre que el intervalo de tiempo τ sea corto.

Esta condición se logra entre dos muestras de la señal ya que generalmente los muestreadores se aplican con periodos de muestreo muy cortos con respecto al periodo fundamental $T_1=1/f_1$. En este artículo se supone que la señal es muestreada a $N_1=16$ muestras por ciclo, entonces $\tau=T_1/16$.

El modelo de la señal truncado es dado por:

$$s_K(t) = \text{Re}\{h^T \vec{p}_K(t)e^{j2\pi f_1 t}\} = \text{Re}\{h^T r_K(t)\} \quad (7)$$

donde $r_{K(t)}$ es el fasor rotado, y h^T extrae su primera componente, por ejemplo el vector $h^T=(1 \ 0 \ \dots \ 1)$, con K ceros. Suponiendo $t_0=(n-1)\tau$ y $t=n\tau$ se tiene la transición de estados rotados discretos:

$$r_K(n) = \Phi_K(\tau)\psi_1 r_K(n-1) \quad (8)$$

Donde ψ_1 es el factor de fase $\psi_1=e^{j\theta_1}$, correspondiente a la frecuencia fundamental en radianes ($\theta_1=j2\pi f_1 \tau=j2\pi/N$).

Finalmente, se obtiene la ecuación del estado de transición discreto como:

$$\begin{pmatrix} r_K(n) \\ \bar{r}_K(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \Phi_K(\tau) & 0 \\ 0 & \bar{\psi}_1 \Phi_K(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_K(n-1) \\ \bar{r}_K(n-1) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Y el modelo truncado de la señal:

$$s_K(n) = \frac{1}{2} (h^T h^T) \begin{pmatrix} r_K(n) \\ \bar{r}_K(n) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Esta ecuación muestra la dependencia instantánea del modelo de señal en el fasor dinámico. El filtro Taylor-Kalman es un seguidor de señal que opera como un desintegrador instantáneo de señal, lo que ocurrirá cuando la señal de entrada esté contenida en el subespacio generado por el modelo de señal en lazo cerrado. Para el subespacio de segundo orden ($K=2$), es precisamente el caso de oscilaciones suaves numéricas, en donde se alcanzan errores de estimación de señal de millonésimas.

La matriz de transición de estados en (9) es compleja $2(K+1) \times 2(K+1)$ y trabaja con los fasores rotados, así que para obtener los estimados del fasor dinámico, deben anti-rotarse. Note que el modelo de espacio de estados en (9) contiene la información genética del desarrollo de la trayectoria compleja de una muestra a la siguiente. El modelo en estado estable de la señal ($K=0$) obligaría al fasor a moverse en círculos de una muestra a la siguiente. Con la matriz de transición de estados de Taylor (6), se permite a

los estimados del fasor moverse en trayectorias más flexibles, acotadas por el termino de Taylor de mayor orden en el polinomio. A continuación se muestra cómo es que los modelos truncados de la señal se incorporan dentro del controlador Lineal-Cuadrático. Este filtro con base en el controlador, descompone la señal de entrada en las componentes de un vector de estados. La descomposición del LQG y sus estimaciones son cuasi-instantáneas, es decir, contienen un retardo muy pequeño que es imperceptible para la estimación del fasor.

Controlador Lineal-Cuadrático Gaussiano

Como se acaba de mostrar, el espacio de estados del modelo dinámico de la señal incorpora las derivadas de la envolvente compleja. En lugar de utilizar solo el algoritmo de Kalman, ⁶ en este artículo la incorporación del controlador LQ conduce a la implementación del LQG, el cual aplica la ley de control del algoritmo del LQ como retroalimentación del vector de estado proporcionado por el filtro óptimo de Kalman.

El control LQG puede ser aplicado tanto en sistemas invariantes en el tiempo así como en sistemas variantes en el tiempo. ⁷ Esta última característica permite diseñar controladores de retroalimentación lineal para sistemas de no lineales inciertos. El controlador LQG es resuelto mediante el siguiente par de ecuaciones de Riccati:

$$S\Phi + \Phi^H S + Q - S\Gamma r^{-1}\Gamma^T S = 0 \quad (11)$$

$$\Phi P + P\Phi^H + \Gamma\sigma_v^2\Gamma^T - PH^T r_w^{-1}HP = 0 \quad (12)$$

En estas ecuaciones, Φ es la matriz de transición de estados, S es la solución positiva de la ecuación (11), la cual provee las ganancias óptimas del controlador LQ, y P es la solución positiva y simétrica de (12) que resuelve el problema de estimación lineal-cuadrática, necesaria en el diseño del filtro de Kalman. ⁸ Las ecuaciones algebraicas discretas de Riccati, (11) y (12) son las siguientes. ⁹

$$S(n) = \Phi^H S(n+1)\Phi + Q - \Phi^H S(n+1)\Gamma(\Gamma^T S(n+1)\Gamma + r)^{-1}\Gamma S(n+1)\Phi \quad (13)$$

$$P(n+1) = \Phi P(n)\Phi^H + \Gamma\sigma_v^2\Gamma^T - \Phi P(n)H^T(HP(n)H^T + r_w)^{-1}HP(n)\Phi^H \quad (14)$$

La ecuación (13) tiene la particularidad que es resuelta hacia atrás. ⁴ Observando ambas ecuaciones,

se nota la similitud entre ellas, lo que se conoce como dualidad.¹¹ Se trata de dos esquemas que juntos resuelven el problema de control LQG. Cada esquema puede ser separado y resuelto de manera independiente mediante el principio de separación. ¹¹

En contraste con este principio y la solución clásica del LQG,¹² este trabajo propone una alternativa del controlador LQG, la cual consiste en resolver ambos esquemas a través de la ecuación en diferencias de Riccati (12), substrayendo la ecuación (11). Los observadores obtenidos mediante este algoritmo son capaces de mejorar las estimaciones fasoriales en condiciones oscilatorias. El espacio de estados del modelo de señal usado en el algoritmo del LQG es obtenido de las derivadas del polinomio de K-ésimo orden de Taylor, correspondiente a una aproximación de Taylor del modelo de la señal pasabanda dada una señal de entrada.

Controlador LQ y Filtro de Kalman

El algoritmo del controlador LQG se presenta a continuación. El diagrama esquemático se ilustra en la figura 1. Está basado en la siguiente ecuación de estado:

$$x(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma u(n-1) + \Gamma v(n) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (15)$$

donde $x(n)$ y Φ son el vector de estado y la matriz de transición de estados definida en (9), Γ es el vector de entrada con $2(K+1)$ unos, para retroalimentar igualmente a los estados del sistema, mientras $u(n)$ es la entrada proporcionada por la retroalimentación del LQG, y $v(n)$ es ruido blanco gaussiano (WGN).

Por otro lado, el modelo de observación es:

$$s(n) = Hx(n) + \omega(n) \quad (16)$$

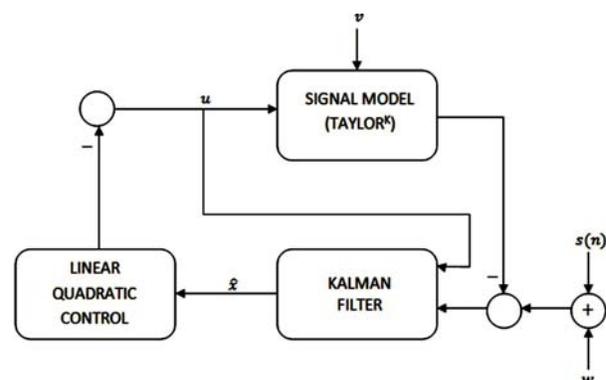


Fig. 1. Diagrama General del Sistema.

el cual corresponde al modelo de señal en (10), pero afectado por WGN aditivo $\omega(n)$.

Finalmente, el algoritmo recursivo LQG es formado básicamente de dos principales secuencias: la primera (I) calcula el vector de ganancias hasta que las ganancias de Kalman se encuentran en estado estable, mientras que la segunda (II) filtra la señal mediante la aplicación de las ganancias en estado estable. Los pasos para ambas secuencias para el n -ésimo ciclo aparece a continuación:

I. Para n de 1 hasta N_{ss}

A. Actualización del estado

1) Predicción del estado

$$\hat{x}^-(n) = \Phi \hat{x}(n-1) \quad (17)$$

2) Error de Covarianza a Priori

$$P^-(n) = \Phi P(n-1) \Phi^H + \Gamma \Gamma^T \sigma_v^2 \quad (18)$$

B. Actualización de la Medición

1) Ganancia de Kalman

$$K(n) = P^-(n) H^T (H P^-(n) H^T + \sigma_w^2)^{-1} \quad (19)$$

2) Corrección del Estado

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)(s(n) - H \hat{x}^-(n)) \quad (20)$$

3) Error de Covarianza a Posteriori

$$P(n) = (I - K(n)H)P^-(n) \quad (21)$$

4) Ganancia LQ

$$L(n) = (\Gamma^T P(n) \Gamma + r)^{-1} \Gamma^T P(n) \Phi \quad (22)$$

donde σ_v^2 y σ_w^2 son las varianzas de entrada y la medición de ruido, respectivamente. $r=1$ se refiere al peso de control para un sistema de entrada singular y salida singular; si r es muy grande, cancela el efecto de retroalimentación de L . El proceso comienza con $x(0)=0$, y $P(0)=I \times 10^9$ para la matriz de error de covarianza inicial desconocida del estado.

Una vez que las ganancias de Kalman se encuentran en $K=K(N_{ss})$, la ley de control LQ es aplicada mediante la siguiente secuencia:

II. Para n de $n > N_{ss}$ hasta N_{end}

C. Estado de retroalimentación

1) Predicción del estado

$$\hat{x}^-(n) = \Phi \hat{x}(n-1) - (\Gamma \bar{L})^{-1} \hat{x}(n-1) \quad (23)$$

2) Actualización del estado

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + \bar{K}(s(n) - H \hat{x}^-(n)) \quad (24)$$

Note que la predicción del estado en (23) contiene la ley de control del algoritmo LQG propuesto, el

cual difiere de la clásica ($u(n) = -L \bar{x}(n-1)$). Esta peculiaridad es explicada en el siguiente párrafo. Vale la pena señalar también que la carga computacional del proceso de filtrado LQG se reduce sólo a (23), (24) y la antirotación. El algoritmo propuesto es entonces una estrategia sofisticada del LQG basada en la solución del LQ y el algoritmo del filtro de Kalman mediante (24). Para más implementaciones alternativas, conocidas como estrategias sofisticadas.¹³ El sistema LQG es resuelto por (14) en lugar del par de ecuaciones de Riccati, porque en esta aplicación solo disponemos de las muestras de señal. Esta ecuación contiene en su estructura fundamental, el vector H el cual extrae el fador y conjugado complejo que sintetiza la componente de señal, proporcionando la matriz P de la cual $K(n)$ y $L(n)$ son calculadas. Note que el factor inverso en el último término en (14) es escalar, por lo tanto puede definir la matriz $Q = H^T H$, la cual pondera $P(n)$, de tal modo que los elementos de P que tienen que ver con el primer estado y su complejo conjugado permanezcan, anulando los elementos relacionados con los otros estados. El mismo principio puede ser usado cuando el factor inverso es matricial. En este caso el lema de inversión de matrices puede ser usado. Esta es la razón por la cual solo se implementa (14).

Una vez que las ganancias estables de Kalman son obtenidas como en la referencia ⁶, la matriz de transición de estados propuesta en (23) del controlador óptimo LQ es la siguiente:

$$\bar{\Phi} = (\Phi - (\Gamma \bar{L})^T) \quad (25)$$

Esta matriz de transición es propuesta en lugar de la clásica $(\Phi - \Gamma L^-)$ porque es inestable, con dos muy lejos raíces fuera del círculo unitario. Este inconveniente fue resuelto transponiendo la matriz ΓL^- como se indica en (25) para asegurar estabilidad. De hecho la matriz transpuesta tiene en cada una de sus filas, cada una de las ganancias de L correspondientes; de esta manera, el mismo valor constante es sustraído de cada fila de Φ , asegurando la estabilidad en nuestro caso. Esta opción es posible porque la ley de control no tiene restricciones de diseño, y la transpuesta conserva el rango de la matriz.^{14, 15} Por otro lado, esta solución puede ejecutarse junto con el algoritmo de Kalman, formando un sistema híbrido de control. Las ganancias LQ del sistema son fijadas junto con las ganancias de Kalman, es decir, $L^- = L(N_{ss})$.

En este artículo, las ganancias de Kalman son fijadas cuando se alcanza el primer estado estable, como en la referencia ⁶. Otro criterio de paro para las ganancias de Kalman puede ser consultado en la referencia¹⁶. La aproximación propuesta LQG en (22) está basada en la idea de que la ecuación solución para Kalman (14) provee mejor estabilidad ya que toma en cuenta las matrices Γ y H . Pero, incluso si no se tiene una justificación teórica para explicar por qué el estimador propuesto funciona correctamente, la eficiencia del algoritmo propuesto se verifica a través de las simulaciones y los resultados experimentales de la siguiente sección.

Resultados Numéricos

Esta sección ilustra los estimados del fasor y sus primeras derivadas de la señal oscilatoria, al igual que las señales de prueba del estándar ¹ con un paso en amplitud y fase, y una rampa en frecuencia.

A. Señal Oscilatoria

De acuerdo con la señal pasabanda (1), se diseña una señal de prueba mediante las siguientes funciones de amplitud y fase para una portadora a $f_1=60$ Hz:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t) \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t) \end{aligned} \quad (26)$$

cuyos parámetros son: $a_0=1$, $a_1=0.1$, y $f_a = 5$ Hz, para la amplitud y $\varphi_0=1$, $\varphi_1=0.1$, y $f_\varphi = 5$ Hz, para la fase. Otras características de la señal son $\sigma_v^2=0.01$ y $\sigma_\omega^2=10^{-4}$, en otras palabras las varianzas de entrada y la medición de ruido, respectivamente. Esto corresponde a una relación señal-ruido de 37 dB, equivalente a la producida por un convertidor analógico-digital de 6 bits.

1) *Modelo de Orden Cero*: El algoritmo LQG con el modelo de orden cero Φ_0 , el cual corresponde al modelo tradicional con amplitud y fase constante, no mejora los resultados del filtro TaylorK-Kalman visto en la referencia ⁶ como se puede ver en la figura 2. Se puede ver el mismo efecto corrugado y el retardo en los estimados, lo que demuestra que el supuesto contante excluye la información necesaria para estimar las fluctuaciones.

2) *Modelo de Orden Dos*: Los resultados obtenidos con el modelo de orden dos Φ_2 , son

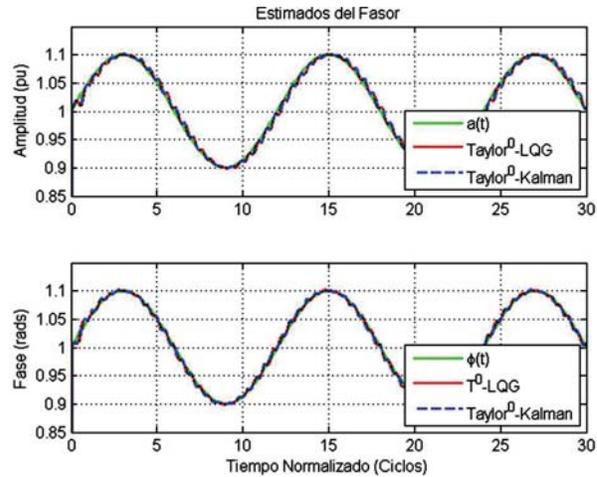


Fig. 2. Estimación de Amplitud y Fase usando el algoritmo LQG con φ_0 .

mostrados a continuación. El incremento en el orden del modelo de señal, los cuales son más cercanos a las funciones ideales amplitud y fase, pueden ser vistos en la figura 3. Los errores de amplitud y fase para $K=0$ y $K=2$ son mostrados en la figura 4. Por otro lado, la figura 5 muestra los estimados de las primeras derivadas de (a) amplitud y (b) fase.

Las derivadas corresponden a la velocidad de la amplitud de la oscilación y a la frecuencia de

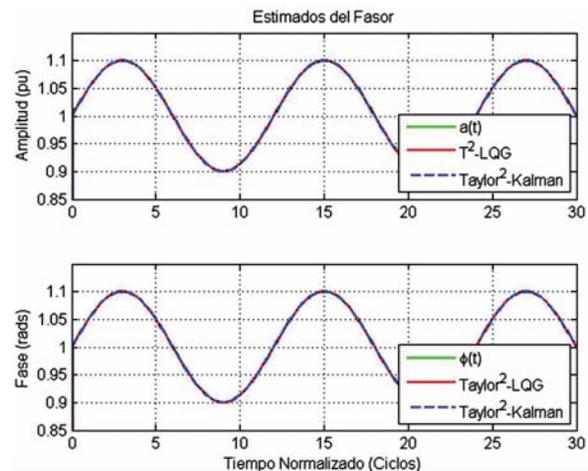


Fig. 3. Estimación de Amplitud y Fase usando el algoritmo LQG con φ_2 .

offset (con respecto a la frecuencia fundamental), respectivamente. Aparentemente dichos estimados no son suaves como los estimados del fasor, debido a su aparente comportamiento ondulatorio.

La calidad de los estimados LQG es baja respecto a los estimados obtenidos con el filtro de Kalman en la referencia ⁶. La figura 6 ilustra el error absoluto

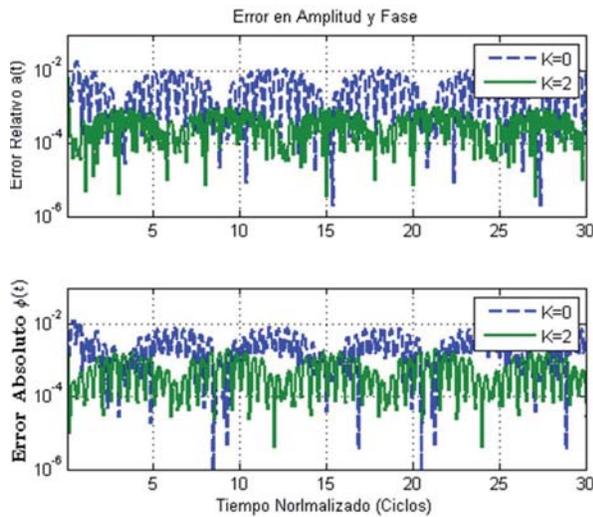


Fig. 4. Error relativo de amplitud y error absoluto de fase.

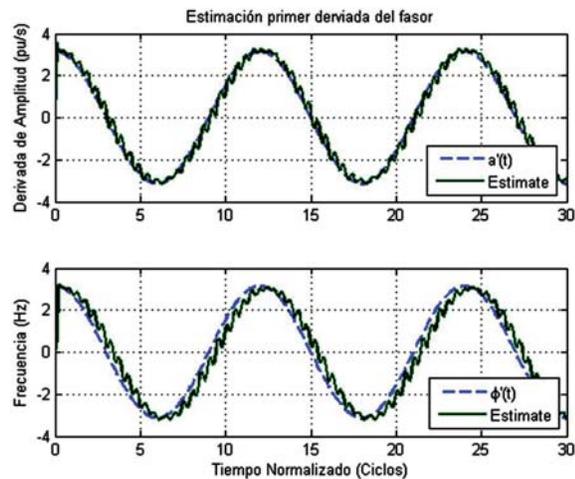


Fig. 5. Estimados de velocidad y frecuencia del LQG con φ_2 .

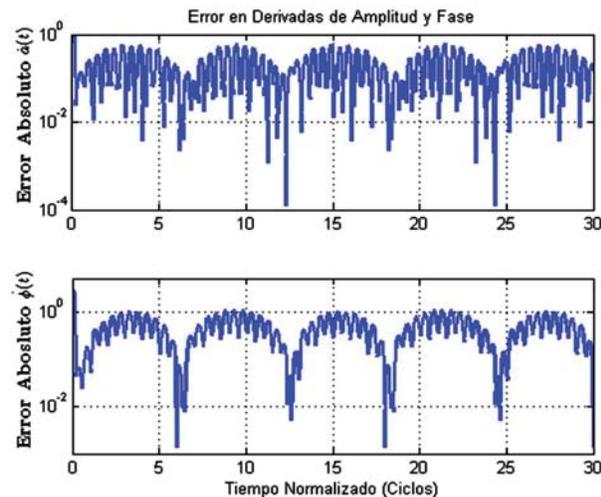


Fig. 6. Error absoluto de velocidad y frecuencia con Φ_2 .

alcanzado. Se puede observar que el error se debe principalmente a un retraso aparente. El vector de ganancias de Kalman de este ejemplo fue tomado de su primer periodo de estado estable ocurrido al final del primer ciclo. Se observa que en el primer ciclo fundamental, el comportamiento de los estimados es similar al mostrado en figuras previas, pero después de ese intervalo de tiempo, las ganancias se degradan adoptando un comportamiento muy similar al del modelo de orden cero.

Entonces el vector de ganancias de Kalman es fijado en su primer periodo de estado estable. La primera mitad del vector de ganancias es el siguiente:

$$\bar{K} = [1 - j2 \quad 121 - j56 \quad -1404 - j61117]$$

Donde la segunda mitad es el conjugado complejo de la primera. Mientras que el vector de ganancias correspondiente del controlador LQ, es fijado en el mismo instante de tiempo que el vector de Kalman, obteniéndose:

$$\bar{L} = [0 - j0 \quad 2.8 - j1.2 \quad 544.4 - j13.3] \times 10^{-2}$$

Una vez que estas se estabilizan, la respuesta en frecuencia del filtro y su comportamiento dinámico son invariantes, como se puede ver a continuación.

B. Señal con Paso en Amplitud y Fase

La figura 7 ilustra los errores de estimación sobre (a) amplitud y (b) fase de la señal con un paso de escalón de 1 a $1.1e^{j\pi/18}$ en $t=0$, como es indicado en la referencia ¹, mientras que en la figura 8 se muestran los estimados de sus derivadas, respectivamente.

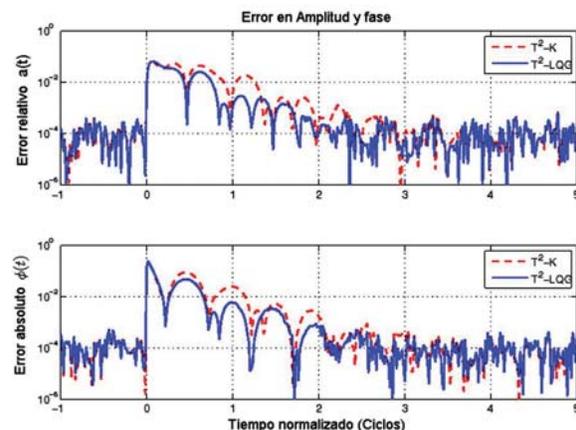


Fig. 7. Errores de estimación en amplitud y fase obtenidos con los filtros T^2-K y T^2-LQG de la señal con un paso en amplitud y fase.

Como se puede observar, tomando en cuenta una banda de tolerancia del 5%,¹⁴ el tiempo de asentamiento es aproximadamente de 2 ciclos, haciendo que el transitorio presentado por el LQG sea mejor que el del filtro de Kalman.

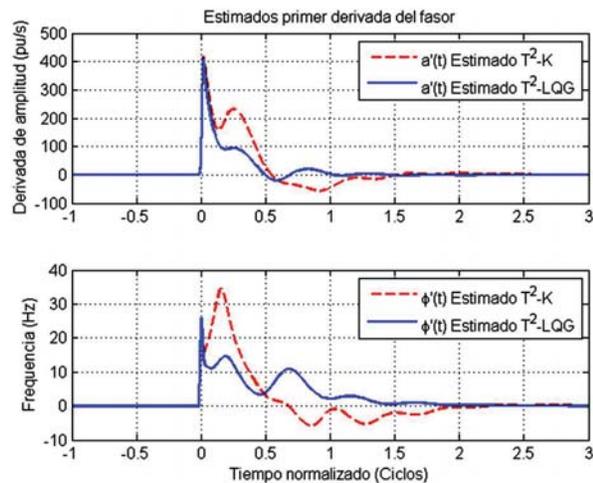


Fig. 8. Estimados de la primera derivada de amplitud y fase obtenidos con los filtros T²-K y T²-LQG de la señal con un paso en amplitud y fase.

C. Análisis de Sensibilidad al Ruido

Otro análisis interesante tiene que ver con la sensibilidad de los estimadores ante WGN aditivo en la señal de estado estable.

La figura 9 muestra el nivel de ruido en la amplitud de salida en dB, así como la cota de Cramer-Rao (CRB), cuando el SNR de la señal de entrada se incrementa. Como podemos ver, ambos filtros tienen

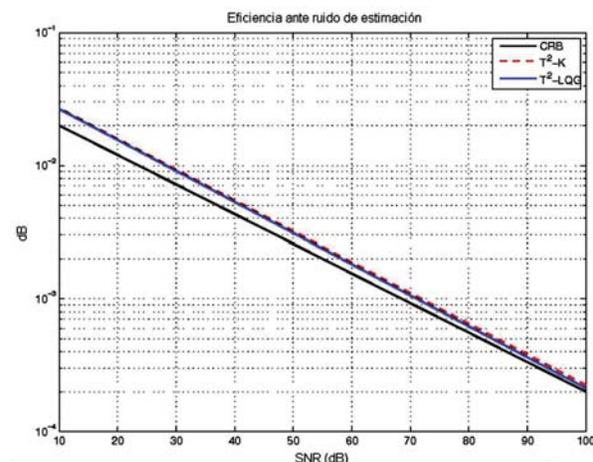


Fig. 9. Nivel de ruido en la amplitud de salida de los filtros T²-K y T²-LQG cuando la entrada es una señal de estado estable con ruido aditivo.

sensibilidad al ruido similar, la cual es 1.25 mayor que la CRB en 10 dB y casi igual a 100 dB de SNR.

D. Señal con rampa en frecuencia

La figura 10 ilustra los estimados de (a) amplitud y (b) fase de la señal con una rampa de frecuencia de 2 Hz/s, mientras que la figura 11 los estimados de sus derivadas, respectivamente. Podemos ver que los estimados de fase son mejores que los de amplitud.

La respuesta en frecuencia del algoritmo LQG tiene una ganancia plana superior más corta que el filtro de Kalman, esto es porque la amplitud de los estimados del algoritmo LQG son más altos que los del filtro de Kalman. Con respecto a los

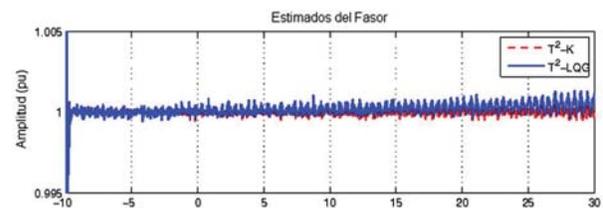


Fig. 10. Estimados de magnitud y fase obtenidos con los filtros T²-K y T²-LQG de la señal con una rampa en frecuencia.

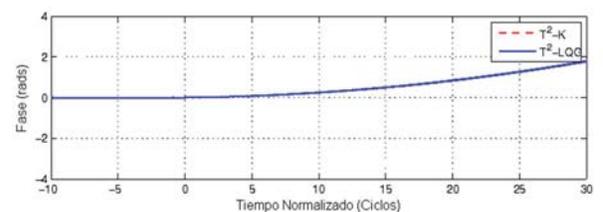


Fig. 11. Señal con rampa de frecuencia.

estimados de las derivadas, podemos ver que los estimados de frecuencia de ambos filtros son bastante bueno, y la rampa en frecuencia es vista como un incremento en amplitud por ambos filtros. Nuevamente, el algoritmo LQG es peor que Kalman.

RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL FILTRO TAYLOR-LQG

La respuesta en frecuencia del filtro Taylor-LQG es obtenida a través de la transformada z de la ecuación de estado

$$\hat{x}(n) = \tilde{\Phi}\hat{x}(n-1) + \bar{K}(s(n) - H\tilde{\Phi}\hat{x}(n-1)) \quad (27)$$

Con la ganancia de Kalman K en estado estable. La transformada z de (27) es

$$\hat{x}(z) = \tilde{\Phi}z^{-1}\hat{x}(z) + \bar{K}(s(n) - H\tilde{\Phi}z^{-1}\hat{x}(z)) \quad (28)$$

y resolviendo para $\hat{x}(z)$, se tiene

$$(I - \tilde{\Phi}z^{-1} + \bar{K}H\tilde{\Phi}z^{-1})\hat{x}(z) = \bar{K}s(z) \quad (29)$$

Entonces la función de transferencia entre los estados del modelo de la señal y la señal de entrada está dada por

$$G(z) = (I - (\bar{K}H - I)\tilde{\Phi}z^{-1})^{-1}\bar{K} \quad (30)$$

Y las respuestas en frecuencia de los estados del filtro se obtienen evaluando la función de transferencia en $G(z)$ a $z=e^{i\theta}$, para $-\pi < \theta \leq \pi$.

A. Respuesta en Frecuencia del Filtro Taylor²-LQG

Los gráficos (a) y (b) en la figura 12 muestran la respuesta de magnitud y fase de los estimados del fasor del filtro. A diferencia de la respuesta de magnitud del filtro de Kalman, vista en la referencia ², la respuesta de magnitud del filtro LQG no exhibe frecuencia de resonancia cercana a la frecuencia nula; sin embargo, continúa presentando ganancias armónicas altas. Por lo tanto el filtro trabaja solamente cuando el espectro de la señal está confinado dentro de los intervalos de las ganancias planas. Una característica importante, es la respuesta de fase que es casi nula alrededor de la frecuencia fundamental. Esto significa que los estimados del fasor proporcionados por el filtro son cuasi-instantáneos. Esto explica por qué las estimaciones fasoriales mostradas en la figura 3 son muy cercanas a la señal dada. El algoritmo del filtro Taylor²-LQG provee también de los estimados de las primeras

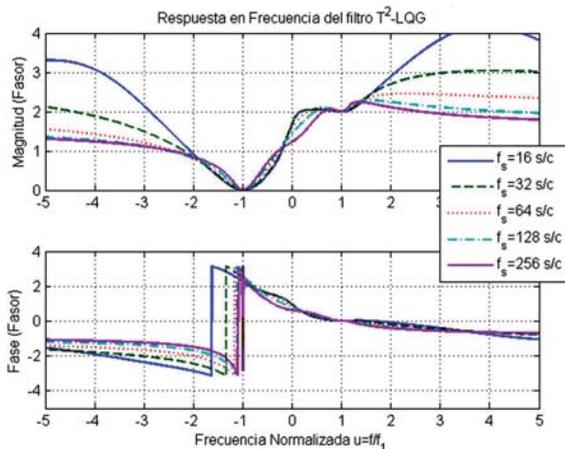


Fig. 12. Respuesta en frecuencia del Filtro Taylor²-LQG para varias frecuencias de muestreo.

dos derivadas. La figura 13 muestra la respuesta de magnitud del primer (gráfico superior) y segundo (gráfico inferior) derivador estimado. Ambos filtros también tienen ganancia nula alrededor de la

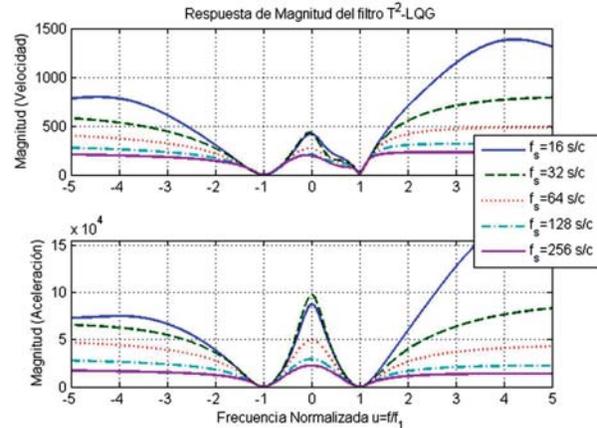


Fig. 13. Respuesta en Magnitud del primer y segundo derivador del filtro Taylor²-LQG

frecuencia fundamental negativa, lo que significa que rechaza esa componente. Estos filtros también exhiben altas ganancias armónicas lo que significa que son muy sensibles al ruido esperado.

B. Efecto de la Ganancia de Retroalimentación

El comportamiento mostrado por el filtro Taylor²-LQG difiere muy poco respecto al comportamiento del filtro Taylor²-Kalman, que a pesar de que las ganancias del controlador LQG son relativamente pequeñas, son suficientes para mover los polos y ceros modificando el comportamiento del filtro, y reduciendo las resonancias mostradas en la referencia ¹².

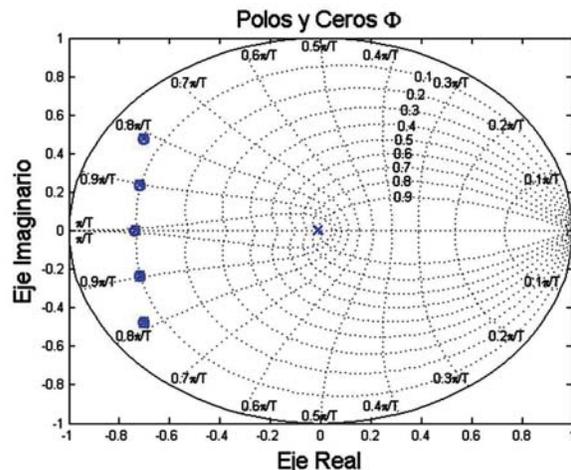


Fig. 14. Polos y Ceros del filtro Taylor²-Kalman en lazo cerrado.

Por lo tanto son capaces de redefinir la trayectoria óptima proporcionada por el filtro de Kalman. Esto es debido a que las ganancias L^- mueven la posiciones de polos y ceros de la figura 14 a los mostrados en la figura 15. El principal cambio consiste en reducir los módulos del par complejo de polos y ceros, los cuales acortan la respuesta al impulso del filtro. Este cambio

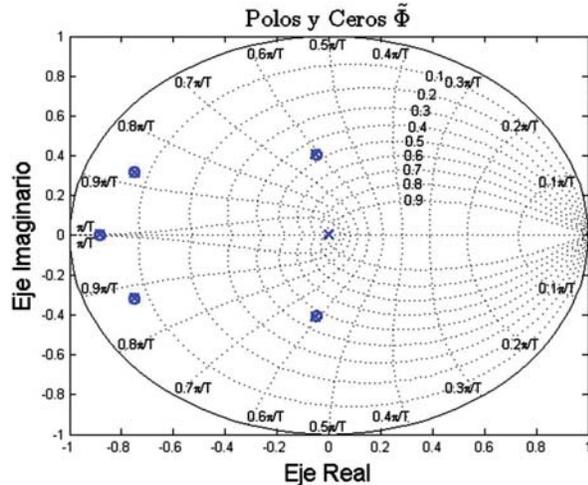


Fig. 15. Polos y Ceros del filtro Taylor²-LQG en lazo cerrado.

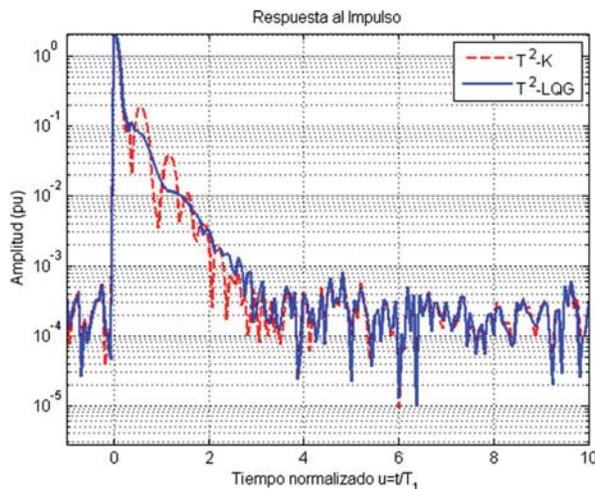


Fig. 16. Respuesta Impulsional de Φ y $\tilde{\Phi}$

puede ser mejor apreciado comparando las respuestas al impulso de ambos filtros en la figura 16. Note una respuesta al impulso con ligeras oscilaciones, con una concentración de energía cerca del origen.

Filtro Taylor^K-LQG-Fourier

El filtro Taylor^K-LQG garantiza ganancias ideales del diferenciador alrededor de la frecuencia fundamental. Para obtener ganancias ideales para

los diferenciadores alrededor de cada armónica, la matriz de transición de estados del modelo de señal necesita ser extendida para todas las armónicas de interés. Por ejemplo, se la señal es muestreada a $N=21$ muestras por periodo, y todas las armónicas son incluidas, entonces la matriz de transición extendida es de la forma:

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_K(\tau)\psi^0 & & \\ & \Phi_K(\tau)\psi^1 & \\ & & \ddots \\ & & & \Phi_K(\tau)\psi^{N-1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Como se puede ver, la matriz de transición Taylor-Fourier es una matriz diagonal cuyos elementos son la submatriz Φ_2 multiplicada por los factores de fase rotatorios $\{\psi^k, k=0,1,\dots,15\}$.

La matriz extendida es $(K+1)N \times (K+1)N$; sin embargo, el costo computacional para calcular la transición de un estado no es $[(K+1)N]^2$, sino $[(K+1)]^2 N/2$ debido a su naturaleza diagonal, y la forma triangular superior de Φ_K . Esta reducción es importante porque una vez que las ganancias de Kalman son estables, el algoritmo del LQG es ejecutado solo con las ecuaciones de predicción del estado. (23) y la actualización del estado (24). El vector H de la ecuación de salida (16), para $K=2$, es de la forma:

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \underbrace{0 \ 0}_K & 1 & \underbrace{0 \ 0}_K & \dots & 1 & \underbrace{0 \ 0}_K \end{pmatrix} \quad (32)$$

Entonces se requieren sólo N productos para estimar la señal del vector de estado.

A. Taylor²-LQG-Fourier

La figura 17 muestra la repuesta en magnitud y fase de las primeras armónicas del filtro Taylor²-LQG-Fourier, junto a la respuesta del filtro Taylor²-Kalman-Fourier. Note que ambos filtros se comportan como un filtro valla, es decir, extrae una armónica oscilante, rechazando el resto. Además, las altas ganancias interarmónicas son mitigadas considerablemente, y las ganancias planas nulas son preservadas, aunque sus intervalos sean más estrechos. Por otro lado, la respuesta de fase bajo la banda de paso ideal sigue siendo nula plana, indicando un retraso insignificante en los estimados del fasor. Una gran ventaja de estos estimados, es que son de gran utilidad para aplicaciones de control.

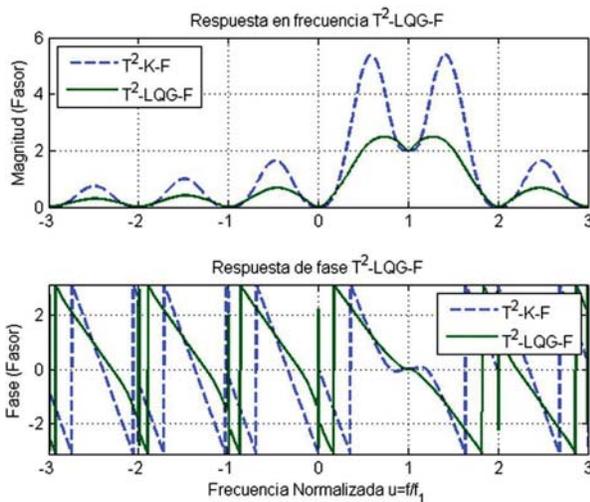


Fig. 17. Respuesta en Frecuencia del Filtro T²-LQG-F.

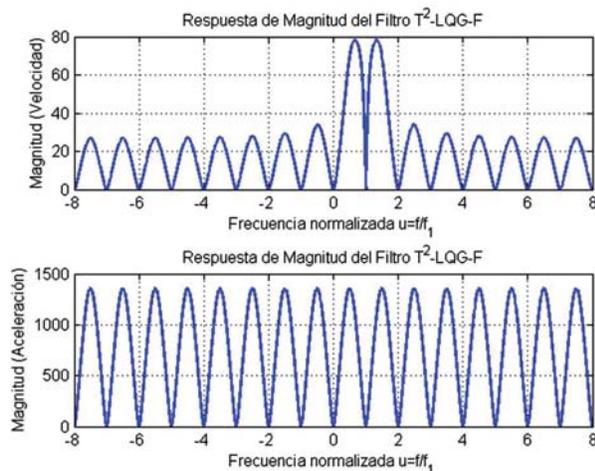


Fig. 18. Respuesta de Magnitud del primer y segundo diferenciador asociados al Filtro T²-LQG-F.

La figura 18 muestra la respuesta de magnitud para el (a) primer y (b) segundo diferenciador del fasor. Note que cercanos a la frecuencia fundamental la respuesta de magnitud exhibe ganancias del diferenciador ideales. Sin embargo, ambos diferenciadores pierden sus ganancias nulas planas alrededor del resto de los armónicos. En lugar de ello, exhiben ganancias parabólicas alrededor de estas frecuencias. Esto significa que cada estimado de los derivados armónicos contendrá la infiltración de los segundos derivados del resto de los armónicos. Entonces, el algoritmo LQG mejora los estimados del fasor del filtro de Kalman pero empeora los estimados de sus derivados. Este inconveniente puede ser resuelto tomando del LQG los estimados

del fasor, junto a los estimados de los derivados del filtro de Kalman, ya que ambos son aplicados simultáneamente en el algoritmo propuesto. De esta manera, en la siguiente sección ilustraremos los resultados obtenidos con ambas técnicas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se analizan los estimados fasoriales de las señales de (a) voltaje y (b) corriente mostradas en la figura 19. Dichas señales fueron muestreadas a una tasa

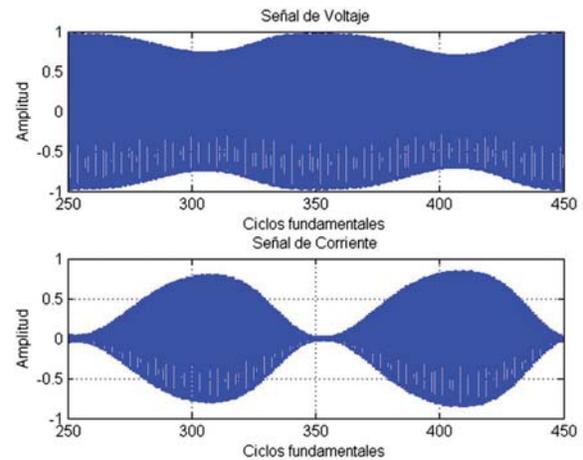


Fig. 19. Señales de voltaje y corriente.

de 16 muestras por ciclo de un sistema de potencia de Sudamérica.

A. Señal de Voltaje

Los módulos de los estimados fasoriales de la señal de voltaje son mostrados en la figura 20 (a), con el error de estimación de la reconstrucción de

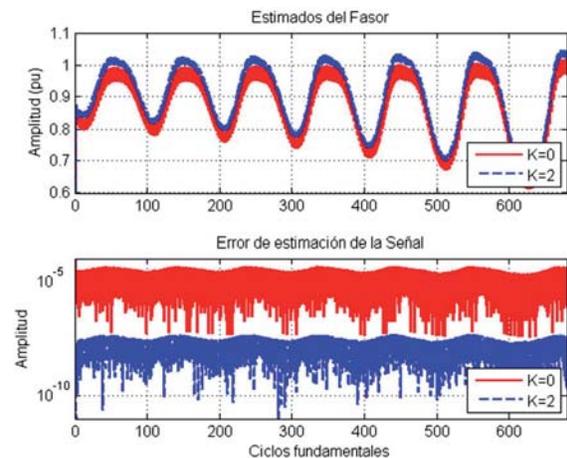


Fig. 20. Estimados de Amplitud de la señal de voltaje (a) y error de reconstrucción de señal (b).

la señal en el gráfico (b). Dado que no contamos con una envolvente teórica, no podemos estimar el error fasorial, como en el caso de la señal teórica. Estos resultados son obtenidos con el filtro LQG con $K=0$ y $K=2$. Es evidente que las fluctuaciones de voltaje crecen con el tiempo, con valles más profundos. También es notorio que el error de estimación de la señal disminuye cuando el grado de los polinomios de Taylor aumenta. Note que el nivel del error de estimación de la señal es muy bajo, indicando un muy buen estimador de señal. Sin embargo, nuestro problema no es estimar la señal, sino los parámetros del fasor. De modo que, los bajos niveles de los errores de la señal se obtienen con las estimaciones de la amplitud del fasor contaminado por ruido proporcionados por el modelo de segundo orden. El gráfico (a) en la figura 21 muestra los

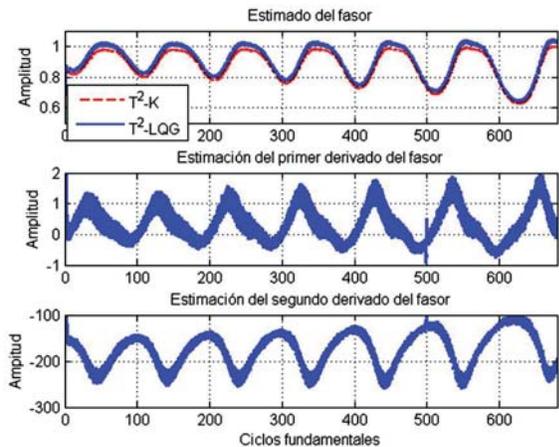


Fig. 21. Estimados de Amplitud de la señal de voltaje (a) y su primer y segunda derivada en (b) y (c).

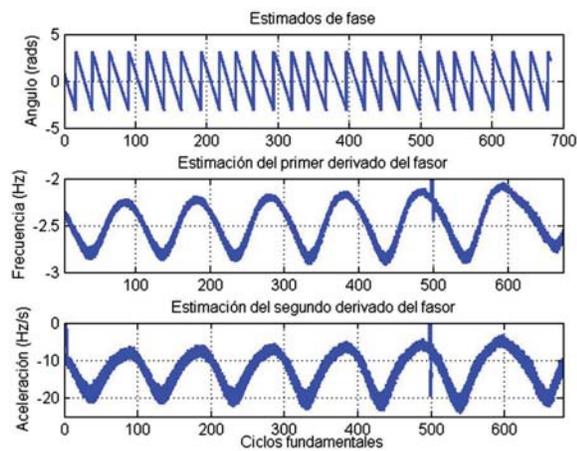


Fig. 22. Estimados de fase de voltaje (a) y primer y segunda derivada en (b) y (c).

estimados de amplitud del LQG y Kalman, con los primeros y segundos derivados de Kalman en los gráficos (b) y (c), respectivamente. Es claramente visible que las estimaciones de amplitud de la señal de voltaje difieren un poco. Podemos ver que los estimados de sus derivados, incluso si son ruidosos, se pueden utilizar para detectar los puntos críticos de la señal de amplitud. La misma conclusión se puede sacar de las estimaciones de fase en la figura 22, que corresponden a las estimaciones de fase del LQG, y Kalman de la fluctuación de la frecuencia fundamental y su tasa de cambio, respectivamente.

B. Señal de Corriente

Los estimados de la señal de corriente se muestran en las figuras 23-25, conteniendo parámetros equivalentes de la señal de voltaje en las figuras 20-22. Podemos ver en el gráfico (a) de la figura 23, que las estimaciones de amplitud son bastantes similares, además de que la señal de corriente está creciendo, indicando inestabilidad en el sistema de potencia. El nivel de error alcanzado por las estimaciones de señal de corriente es similar a la de la señal de voltaje. Por otro lado, las estimaciones de los derivados de amplitud y fase que se ilustran en las figuras 24 y 25, tienen las mismas propiedades que se encuentran en las estimaciones de la señal de voltaje. Del análisis de la señal de voltaje y corriente se puede concluir que el sistema está en un estado de pesado estrés. Sin embargo, las estimaciones son bastante buenas, y se pueden utilizar en aplicaciones de control a causa de su retardo insignificante.

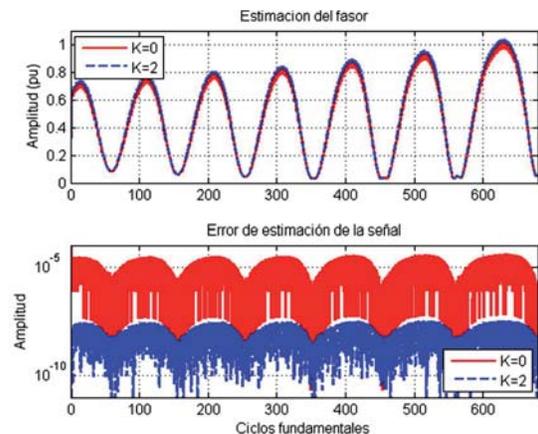


Fig. 23. Estimados de amplitud de la señal de corriente (a) y error de reconstrucción de señal.

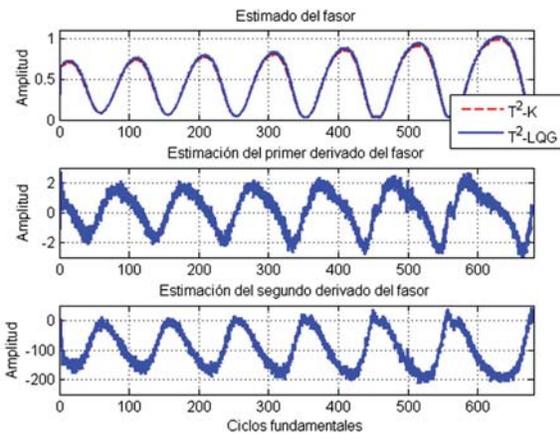


Fig. 24. Estimados de amplitud de corriente (a) y primer y segunda derivada en (b) y (c).

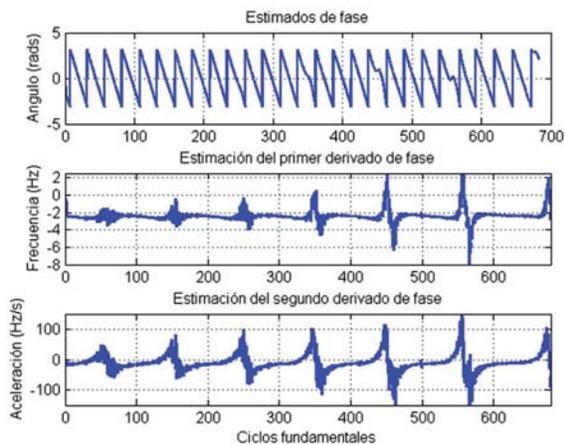


Fig. 25. Estimados de fase de corriente (a) y primer y segunda derivada en (b) y (c).

La aplicación del principio de Optimalidad de Bellman en el lazo de control LQ de un sistema modelado es un algoritmo óptimo clásico. Sin embargo, como en nuestro problema de estimación del fasor solo tenemos la señal disponible, el algoritmo de Kalman es usado para proveer de los estimados de estado requeridos por el algoritmo LQ. Además la solución LQR produjo estimaciones fasoriales muy pobres, independientemente del orden de Taylor utilizado en el modelo de señal. Finalmente, la ley de control clásica rindió soluciones inestables.

La solución propuesta resuelve estos inconvenientes. Esta solución es sugerida como un punto de partida en un proceso iterativo de selección.¹⁷⁻¹⁹ En este primer intento, se utilizaron los criterios descritos en el documento para abrir el camino a la aplicación del principio de la

Bellman en el problema de estimación fasorial, pero más trabajo de investigación se debe hacer para encontrar mejores soluciones alternativas. Por ejemplo, para implicar a los derivados de señal en el error con mayores ganancias en el vector de entrada, o mediante la propuesta de una matriz de entrada en lugar de un vector.

CONCLUSIÓN

Es posible aplicar la acción de control LQ en los filtros T^k-K y T^k-K-F para mejorar los estimados del fasor. La principal ventaja de los filtros LQG es que mejoran la respuesta en magnitud reduciendo las frecuencias resonantes cercanas a la frecuencia fundamental, así como las ganancias de interarmónicas el filtro de Kalman. Sin embargo, el control LQ degrada los estimados de las derivadas del filtro de Kalman. Por lo tanto, el esquema propuesto en este trabajo consiste en tomar las estimaciones del fasor del filtro LQG, y las estimaciones de sus derivadas del filtro de Kalman.

REFERENCIAS

1. IEEE Standard for Synchrophasor Measurements for Power Systems, IEEE Standard C37.118.1-2011 (Revision of IEEE Standard C37.118-2005), pp. 1–61, Dec. 2011.
2. J. A. de la O Serna and J. Rodriguez-Maldonado, Taylor–Kalman–Fourier filters for instantaneous oscillating phasor and harmonic estimates, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 4, pp. 941–951, Apr. 2012.
3. M. A. Platas-Garza and J. A. de la O Serna, Dynamic harmonic analysis through Taylor–Fourier transform, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 60, no. 3, pp. 804–813, Mar. 2011.
4. C. L. Phillips and H. T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, Nov. 1994.
5. D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*. Mineola, NY, USA: Dover, 2004.
6. J. A. de la O Serna and J. Rodriguez-Maldonado, Instantaneous oscillating phasor estimates with Taylor k –Kalman filters, *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 26, no. 4, pp. 2336–2344, Nov. 2011.

7. M. Athans, The role and use of the stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control system design, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 16, no. 6, pp. 529–552, Dec. 1971.
8. P. d. Larminat, *Contrôle d'état Standard*. Hermás Science publications, 2000.
9. B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, and S. Sastry, An LQG optimal linear controller for control systems with packet losses, in *Proc. 44th IEEE Conf. CDC-ECC*, Dec. 2005, pp. 458–463.
10. P. A. Blackmore and R. R. Bitmead, Duality between the discrete-time Kalman filter and LQ control law, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 40, no. 8, pp. 1442–1444, Aug. 1995.
11. J. P. Hespanha, *Linear Systems Theory*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, Aug. 2009.
12. Y. Keyou and X. Lihua, LQG control with quantized innovation Kalman filter, in *Proc. 27th Chinese CCC*, Jul. 2008, pp. 447–451.
13. S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 2nd ed. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, Nov. 2005.
14. K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.
15. K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1996.
16. J. A. de la O Serna, W. Van Moer, and K. Barbe, Using alternating Kalman filtering to analyze oscillometric blood pressure waveforms, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. DOI 10.1109/TIM.2013.2258765, no. 99, pp. 1, May 2013.
17. B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Mineola, NY, USA: Dover, Feb. 2007.
18. D. S. Naidu, *Optimal Control Systems*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2003.
19. Z. Wang and B. W. Surgenor, A problem with the lq control of overhead cranes, *J. Dynamic Syst., Meas., Control*, vol. 128, no. 2, p. 436, 2006. [Online] Available: <http://link.aip.org/link/JDSMAA/v128/i2/p436/s1Agg=doi>

