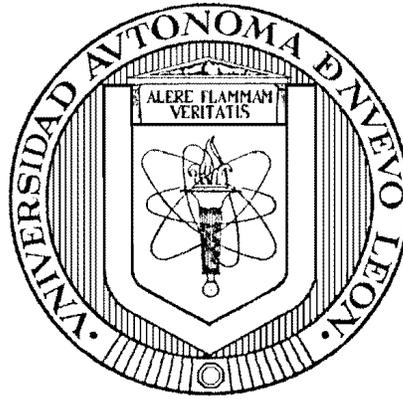


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO



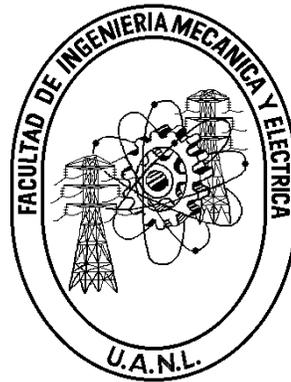
GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS Y EVALUACIÓN DE DESEMPEÑO DE
ROBOTS MANIPULADORES

POR
MANUEL ORTIZ SALAZAR

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

NOVIEMBRE 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO



GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS Y EVALUACIÓN DE DESEMPEÑO DE
ROBOTS MANIPULADORES

POR
MANUEL ORTIZ SALAZAR

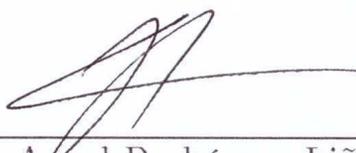
COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

NOVIEMBRE 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Generación de trayectorias y evaluación de desempeño de robots manipuladores**” realizada por el estudiante **Manuel Ortiz Salazar**, con matrícula 1696269, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

COMITÉ DE TESIS



Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán
Asesor



Dr. Luis Martín Torres Treviño
Revisor

Dr. Ismael López Juárez
Revisor

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Posgrado

Agradezco a Dios por brindarme la oportunidad de nacer y de estar a mi lado en cada día. Por ponerme delante a mis padres, familiares, amigos, compañeros, maestros, de las cuales he aprendido valiosas lecciones. Por darme la fuerza, coraje, salud y sabiduría para realizar todo lo que me he propuesto como meta, para nunca rendirme en los momentos difíciles e inoportunos, así como también para haberme permitido concluir mi actual grado de estudios.

A mis padres, que siempre han estado a mi lado y al pendiente de mi, aun a pesar de la distancia. Por su confianza y apoyo en cada decisión que tomado. Por guiarme y aconsejarme en todo momento.

Pero sobre todo, el cariño y calidez incondicional que me han brindado, que en conjunto con lo anterior me han permitido crecer y formarme como persona y profesionalista.

A mi tíos Gregorio, Socorro, Antonio, María Elena, María Guadalupe, por apoyarme y aconsejarme cuando más lo necesite.

A mi asesor por su amabilidad, comprensión, consejos, por su tiempo, esfuerzo y dedicación que invirtió en este trabajo para que concluyera de manera exitosa.

Manuel Ortiz Salazar

Agradecimientos

Agradezco a CONACYT su confianza y el apoyo económico, así como también a la Universidad Autónoma de Nuevo León y a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por la oportunidad brindada, sin los cuales no hubiera sido posible realizar y concluir mi estudios de posgrado.

A cada uno de los profesores del programa Doctoral por compartir sus conocimientos, pero en especial a mis profesores del área de mecatrónica: Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán, Dr. Luis Martín Torres Treviño, Dr. Miguel Ángel Platas Garza, Dra. Griselda Quiroz Compeán, que con sus comentarios, observaciones y consejos enriquecieron el contenido de mi tesis.

A mis compañeros del programa: Juan Efraín González, Ángel Omar Mata, Mario Aguilar, Luis Antonio Mercado, Esmeralda Jazmín Rivera, Edgar Cortez, Melany Ibarra, María del Carmen Carmona, Juan Carlos Ruíz, Alejandro Liscano, Liliana Pacheco, Hector Miguel Carvajal, Hector Esponda y Arturo Villarreal, con los cuales conviví, generé valiosos recuerdos y que siempre recordaré.

Resumen

Actualmente, en los procesos de fabricación industrial los robots manipuladores son componentes esenciales, esto se debe a las diversas tareas que son capaces de realizar, tales como: ensamble, soldadura, manipulación de objetos, dispensación, entre otras. Sin embargo, dichas aplicaciones son para escenarios geométricos limitados y simplificados, además la programación es compleja, por lo que se consume mucho tiempo en la programación. Entonces, cuando el volumen de producción es bajo o está en continuo cambio, sigue siendo necesaria la intervención de humanos expertos para realizar estas tareas.

De acuerdo a lo anterior, en esta tesis se propone una metodología basada en sensores de unidad de medición inercial, en inglés Inertial Measurement Units (IMU), y fusión de sensores para la adquisición de las trayectorias realizadas por un humano, estimación de orientación en dos dimensiones y estimación de posición en 3 dimensiones. Además, se involucra el modelado de robots manipuladores, generación de trayectorias, control cinemático empleado en la programación del robot, y por último una evaluación de desempeño del movimiento del robot basado en índices de desempeño. Los resultados experimentales obtenidos muestran que la metodología aplicada es capaz de estimar la trayectoria (en posición y orientación) a partir de los datos adquiridos de la trayectoria realizada por un humano sin el uso de Sistemas de Visión Computacional (SVC).

El propósito principal de esta investigación es el desarrollo de una metodología, en la cual los datos coordinados de las trayectorias realizadas por humanos expertos puedan ser emuladas lo más preciso posible por robots manipuladores, sin consumir demasiado tiempo en la programación manual de posición y movimiento del robot en cada punto de la trayectoria deseada.

Símbolos y notación

\dot{x}, \dot{y}	El punto es utilizado para denotar la derivada con respecto del tiempo, ejemplo $\dot{x} = x^{(1)} = dx/dt$.
\ddot{x}, \ddot{y}	El doble punto es utilizado para denotar la doble derivada con respecto del tiempo.
\hat{x}, \hat{z}	El circunflejo es utilizado para denotar la estimación de una variable.
x^*, y^*	El asterisco es utilizado para denotar el conjugado de una variable.
\otimes	Producto de cuaterniones.
A^T, x^T	Transpuesta de la matriz A y el vector x .
\mathbb{R}	El conjunto de los números reales.
\in	Es miembro de.
\approx	Aproximadamente igual.
\equiv	Idéntico.
Σ	Sumatoria.
$\ x\ $	Norma de x .
A^{-1}	Inversa de A .
A^+	Pseudoinversa de A .
j	Unidad de los números imaginarios, $j = \sqrt{-1}$.
$\partial F/\partial x$	Derivada parcial de la función F con respecto a la variable x .
Cx	Equivale a $\cos(x)$.
Sx	Equivale a $\sin(x)$.

Índice General

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Símbolos y notación	VII
Índice General	VIII
Índice de Tablas	X
Índice de Figuras	XI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Hipótesis	4
1.4. Objetivos	4
1.4.1. Objetivos particulares	4
1.5. Metodología	5
1.6. Organización y alcances del trabajo	6
2. Análisis de manipuladores	9
2.1. Introducción	9
2.2. Cinemática de manipuladores	9
2.2.1. Modelo cinemático directo de posición	11
2.2.2. Modelo cinemático inverso de posición	15
2.2.3. Modelo cinemático directo de velocidad	24
2.2.4. Modelo cinemático inverso de velocidad	25
2.3. Dinámica de manipuladores	26
2.3.1. Metodología Newton-Euler	28
2.4. Generación de trayectorias	30
2.4.1. Tipos de trayectorias	32
2.4.2. Interpolación de trayectorias	32
2.5. Índices de desempeño	35
2.5.1. Homogeneización de la matriz Jacobiana	36
2.5.2. Índices de desempeño cinetostático	38

	IX
2.5.3. Índices de desempeño dinámico	43
3. Estimación de la orientación y posición	46
3.1. Introducción	46
3.2. Sensores IMU	47
3.2.1. Calibración y conversión de unidades	48
3.3. Estimación de la orientación	48
3.3.1. Acelerómetro	49
3.3.2. Giroscopio	50
3.3.3. Filtro Kalman	52
3.3.4. Filtro complementario	55
3.3.5. Filtro complementario explícito	56
3.3.6. Comparación de métodos	60
3.4. Estimación de la posición	61
3.4.1. Calibración y conversión de unidades	62
3.4.2. Fusión de sensores	62
3.4.3. Detección de movimiento	63
3.4.4. Proyección de las aceleraciones en los ejes globales y remoción de gravedad	64
3.4.5. Filtrado de ruido de alta frecuencia	66
3.4.6. Estimación de la velocidad y posición	66
4. Casos de estudio	68
4.1. Introducción	68
4.2. Casos de estimación de posición y orientación	69
4.2.1. Movimiento en un sólo eje	69
4.2.2. Movimiento en dos ejes	85
4.2.3. Comparación con experimento de escritura	90
4.3. Caso de generación de trayectoria para un manipulador predeterminado	93
5. Conclusiones y Trabajo futuro	107
Bibliografía	110
A. Método de Denavit-Hartenberg	114
A.1. Método de Denavit-Hartenberg	114
B. Cuaterniones	116
B.1. Representación en cuaterniones	116
C. Modelado del manipulador KUKA KR 16	118
C.1. Modelo cinemático directo de posición	118
C.2. Matriz Jacobiana de velocidad	119

Índice de tablas

1.2.1.Estado del arte en estimación de orientación y/o posición de trayectorias.	3
2.2.1.Parámetros de DH del manipulador IRB2400.	17
4.2.1.RECM para movimientos en un solo eje	84
4.2.2.RECM para movimientos en dos ejes	89
4.3.3.Parámetros de DH del manipulador KUKA KR 16.	96

Índice de figuras

1.1. Metodología.	6
2.1. Relación del efector final y el sistema de referencia de un robot manipulador . .	10
2.2. Modelo cinemático de posición.	11
2.3. Parámetros de DH para un eslabón giratorio [1].	14
2.4. Cinemática del manipulador IRB2400 [1].	17
2.5. Modelo cinemático de velocidad.	24
2.6. Modelo dinámico.	27
2.7. Generación de trayectorias.	31
2.8. Ejemplo de la interpolación de posiciones articulares [1].	31
3.1. Representación de los ángulos de Tait-Bryan.	48
3.2. Ángulos de inclinación del acelerómetro.	49
3.3. Representación de un giroscopio.	50
3.4. Diagrama de bloques del <i>FC</i>	55
3.5. Diagrama de bloques del <i>FCE</i>	57
3.6. Rotación sobre el eje Y (<i>pitch</i>) es de ± 90 grados.	60
3.7. Pasos para la estimación de posición.	62
3.8. Detección de movimiento.	63
3.9. Ejemplo de la detección de movimiento.	64
3.10. Trama de referencia de la tierra y del sensor.	65
3.11. Comparación entre aceleraciones estimadas filtradas y sin filtrar.	66
4.1. Sensor IMU y tarjeta de adquisición de datos	69
4.2. Orientación estimada para el movimiento en el eje +X.	70
4.4. Posición estimada para el movimiento en el eje +X.	70
4.3. Velocidad estimada para el movimiento en el eje +X.	71
4.5. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje +X.	71
4.6. Orientación estimada para el movimiento en el eje -X.	72
4.7. Velocidad estimada para el movimiento en el eje -X.	72
4.8. Posición estimada para el movimiento en el eje -X.	73
4.9. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje -X.	73
4.10. Orientación estimada para el movimiento en el eje +Y.	74
4.11. Velocidad estimada para el movimiento en el eje +Y.	74
4.12. Posición estimada para el movimiento en el eje +Y.	75
4.13. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje +Y.	75

4.14. Orientación estimada para el movimiento en el eje -Y.	76
4.15. Velocidad estimada para el movimiento en el eje -Y.	76
4.16. Posición estimada para el movimiento en el eje -Y.	77
4.17. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje -Y.	77
4.18. Orientación estimada para el movimiento en el eje +Z.	78
4.19. Velocidad estimada para el movimiento en el eje +Z.	78
4.20. Posición estimada para el movimiento en el eje +Z.	79
4.21. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje +Z.	79
4.22. Orientación estimada para el movimiento en el eje -Z.	80
4.23. Velocidad estimada para el movimiento en el eje -Z.	80
4.24. Posición estimada para el movimiento en el eje -Z.	81
4.25. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje -Z.	81
4.26. Orientación estimada para el movimiento ida y vuelta en el eje X.	82
4.27. Velocidad estimada para el movimiento ida y vuelta en el eje X.	82
4.28. Posición estimada para el movimiento ida y vuelta en el eje X.	83
4.29. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. ida y vuelta en el eje X.	83
4.30. Orientación estimada para el mov. individual en dos ejes.	85
4.31. Velocidad estimada para el mov. individual en dos ejes.	86
4.32. Posición estimada para el mov. individual en dos ejes.	86
4.33. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. individual en dos ejes.	87
4.34. Orientación estimada para el mov. simultáneo en dos ejes.	87
4.35. Velocidad estimada para el mov. simultáneo en dos ejes.	88
4.36. Posición estimada para el mov. simultáneo en dos ejes.	88
4.37. Posición estimada vs. posición deseada para el mov. simultáneo en dos ejes.	89
4.38. Experimento de escritura [2].	90
4.39. Trayectoria de la prueba de escritura.	90
4.40. Orientación estimada de la Figura 4.39.	91
4.41. Velocidad estimada de la Figura 4.39.	91
4.42. Posición estimada de la Figura 4.39.	92
4.43. Posición estimada vs. posición deseada de la Figura 4.39.	92
4.44. Trayectoria propuesta para un manipulador predeterminado.	93
4.45. Orientación estimada de la Figura 4.44.	93
4.46. Velocidad estimada de la Figura 4.44.	94
4.47. Posición estimada de la Figura 4.44.	94
4.48. Posición estimada vs. posición deseada de la Figura 4.44.	95
4.49. Manipulador KUKA KR 16. 4.44.	96
4.50. Análisis geométrico de robot KUKA KR 16 para la posición \mathbf{p}_m	99
4.51. Variables articulares para KUKA KR 16.	100
4.52. Posiciones articulares para KUKA KR 16.	101
4.53. Velocidades articulares para KUKA KR 16.	101
4.54. Trayectoria deseada vs. estimada vs manipulador	102
4.55. Variables articulares para KUKA KR 16 obtenidas con el interpolador cúbico.	102
4.56. Posiciones articulares interpoladas para KUKA KR 16.	103
4.57. Velocidades articulares interpoladas para KUKA KR 16.	103

	XIII
4.58. Trayectoria deseada vs. estimada vs interpolada	104
4.59. Número de condición del manipulador KUKA KR 16.	105
4.60. Manipulabilidad cinemática del manipulador KUKA KR 16.	105
4.61. Manipulabilidad de fuerza del manipulador KUKA KR 16.	106
4.62. Mínimo valor singular del manipulador KUKA KR 16.	106
5.1. Metodología implementada.	108
B.1. Orientación de la trama B respecto a la trama A [3]	116

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

En los procesos de fabricación industrial los robots manipuladores son componentes esenciales, esto se debe a las diversas tareas que son capaces de realizar, tales como: ensamble, soldadura, manipulación de objetos, dispensación, etc. Sin embargo, se instalan sin estudios espaciales, geométricos, dinámicos, o desempeño del robot en las tareas y son programados “a mano” por técnicos e ingenieros.

Actualmente las aplicaciones actualmente son para escenarios geométricos limitados y simplificados, debido a que la programación de los mismos es una tarea compleja. En casos en que el volumen de producción es bajo o el tipo de tarea está en continuo cambio, el uso del manipulador resulta ser poco viable debido al costo por unidad y la inversión en tiempo. Debido a estas razones sigue siendo necesaria la intervención de humanos expertos para llevar a cabo estas tareas.

De acuerdo a lo anterior, se presenta una metodología aplicable a sensores de unidad de medición inercial, en inglés Inertial Measurement Unit (IMU), mediante los cuales se adquirirán los datos coordinados de orientación y posición de las trayectorias realizadas por un humano experto para su posterior procesamiento y dar información útil y viable para la programación de

manipuladores, además de evaluar en base a índices de desempeño que configuración articular es la más adecuada para una tarea en específico.

El objetivo principal es la generación de una metodología en la cual se incorporen técnicas de adquisición de datos coordinados de las trayectorias, análisis cinemático, análisis dinámico, evaluación de desempeño y la generación de trayectorias para manipuladores, para así lograr que los robots manipuladores emulen lo más preciso posible las trayectorias realizadas por humanos expertos, sin consumir demasiado tiempo en la programación manual de posición y movimiento del robot en cada punto de la trayectoria deseada.

1.2. Antecedentes

Los robots manipuladores han llegado a ser componentes esenciales en la industria, debido a la automatización de los procesos de fabricación y a su amplio desarrollo tecnológico, además de la gran variedad de tareas que son capaces de realizar; siendo la industria automotriz mundial la que mayor demanda tiene de las aplicaciones de manipuladores robóticos [4].

Actualmente las trayectorias realizadas por robots manipuladores para aplicaciones industriales son en escenarios geométricos limitados y simplificados, esto se debe en parte a la compleja programación de los robots, siendo en la mayoría de los casos programados “a mano” por técnicos e ingenieros.

Existen diversos trabajos que adquieren y procesan las trayectorias deseadas, empleando análisis de archivos CAD que contienen información de la trayectoria a generar, interfaces para asistencia por computadora, Sistemas de Visión Computacional (SVC) y sensores IMU los cuales permiten la estimación de la orientación y/o posición de las trayectorias realizadas, los cuales se muestran en la Tabla 1.2.1.

Referencia	Área(s)	Sensor	Técnicas(s)	Posición	Orientación	Aplicación
Foxlin et al. (2005) [5]	Sistemas embebidos	Unidad de medición GPS, IMU y magnetómetro	FK, ZVU y EFix	2D	Pitch, Roll y Yaw	Marcha humana
Yun et al. (2007) [6]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FK y ZVU	3D	×	Marcha humana
Tsang et al. (2007) [2]	Sistemas embebidos	IMU y resonancia electromagnética	FK y ZVU	2D	×	Escritura humana
Mahony et al. (2008) [7]	Sistemas embebidos	IMU	FCE	×	Pitch y Roll	Vehículo aéreo no tripulado
Won et al. (2009) [8]	Sistemas embebidos y visión computacional	IMU y cámara	FK, ZVU, EFix y lógica difusa	2D	Pitch y Roll	Obtener trayectoria más precisa
Won et al. (2009) [9]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FK, ZVU y EFix	3D	Pitch, Roll y Yaw	Obtener trayectoria más precisa
Wongwirat et al. (2010) [10]	Sistemas embebidos	IMU	FK, ZVU y EFix	2D	Pitch, Roll y Yaw	Robot móvil
Madgwick (2011) [3]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FGD	×	Pitch, Roll y Yaw	Obtener orientación más precisa
Sabatelli et al. (2012) [11]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FK	×	Pitch, Roll y Yaw	Varias
Wang et al. (2012) [12]	Asistencia por computadora	Ninguno	Análisis geométrico del archivo	3D	×	Generación de trayectorias continuas
Dinham et al. (2012) [13]	Visión computacional	Cámara	Procesamiento de imágenes	2D	×	Soldadura por arco
Hatwig et al. (2012) [14]	Visión computacional	Escáner láser	Procesamiento de imágenes	2D	×	Soldadura y corte por rayo láser
Yin et al. (2012) [15]	Asistencia por computadora	Ninguno	Análisis geométrico del archivo	2D	×	Soldadura en reparación y remanufactura
Erdoş et al. (2013) [16]	Visión computacional	Escáner láser	Análisis geométrico del archivo	3D	Pitch, Roll y Yaw	Soldadura
Fourati et al. (2013) [17]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FC, ZVU y EFix	3D	Pitch, Roll y Yaw	Marcha humana
Alam et al. (2014) [18]	Sistemas embebidos	IMU	FCE y FGD	×	Pitch y Roll	Comparación
Cavallol et al. (2014) [19]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FK, FGD y FCE	×	Pitch, Roll y Yaw	Comparación
Quoc et al. (2015) [20]	Sistemas embebidos	IMU	FGD y FCE	×	Pitch y Roll	Comparación
Abyarjoo et al. (2015) [21]	Sistemas embebidos	IMU y magnetómetro	FK	×	Pitch, Roll y Yaw	Comparación

Tabla 1.2.1: Estado del arte en estimación de orientación y/o posición de trayectorias.

Si bien los SVC presentan buenos resultados en un ambiente interior y controlado, presentan limitaciones como sombras, interrupciones de luz, limitaciones de distancia e interferencias. Debido a esto, existen trabajos que presentan un enfoque alternativo, en el que se proponen la

estimación de orientación y posición en 2 o 3 ejes para diversos tipos de aplicaciones empleando sensores IMU, algunas de las técnicas que se emplean son: Filtro de Kalman (FK), Filtro Complementario (FC), Filtro Complementario Explícito (FCE), Filtro de Gradiente Descendiente (FGD), actualización de velocidad cero, en inglés Zero Velocity Update (ZVU), cambio del marco de referencia del objeto, en inglés Earth Fixed frame (EFix), entre otras.

A pesar de la estimación de posición y/o orientación, la mayoría de los trabajos mostrados en la Tabla 1.2.1 no facilitan la tarea de programación del robot (modelado, control cinemático, etc.) ni evalúan el desempeño de las trayectorias realizadas.

1.3. Hipótesis

Un procedimiento de generación de trayectoria y programación del robot basado en adquisición de posición y orientación de herramientas por medio de IMU y su procesamiento, modelado cinemático y dinámico, e índices de desempeño permitirá simplificar su programación y mejorar la emulación de tareas tal como humanos expertos y evaluar sus configuraciones mecánicas.

1.4. Objetivos

Proponer e implementar un procedimiento para la adquisición de posición y orientación de la herramienta, modelado, generación de trayectorias, y evaluación de desempeño en tareas emuladas por expertos.

1.4.1. Objetivos particulares

- Establecer el estado del arte en modelado y evaluación de desempeño, así como la planeación y generación de trayectorias para robots manipuladores.
- Desarrollar e implementar un sistema de adquisición de trayectorias.

- Comprender, implementar y mejorar algoritmos para modelado cinemático y dinámico, así como la evaluación de desempeño.
- Unificación de algoritmos para establecer el procedimiento completo de adquisición, modelado, evaluación, selección y despliegue de resultados.

1.5. Metodología

La metodología implementada se muestra a continuación:

1. Adquisición de los datos coordinados de la trayectoria realizada por el humano experto mediante sensores IMU.
2. Procesamiento de los datos coordinados y estimación de orientación, velocidad y posición.
3. Modelado cinemático directo de posición.
4. Modelado cinemático directo de velocidad.
5. Modelado dinámico inverso.
6. Modelado cinemático inverso para obtener las variables articulares del robot.
7. Generación de trayectorias, para obtener las variables articulares en su forma continua.
8. Programación del robot manipulador.
9. Ejecución del movimiento del robot
10. Evaluación de desempeño del movimiento del robot, en base a las variables articulares medidas, la matriz Jacobiana resultante del modelo cinemático directo de velocidad y la matriz de inercias del modelo dinámico inverso.

La metodología se ilustra mediante el diagrama de bloques de la Figura 1.1.

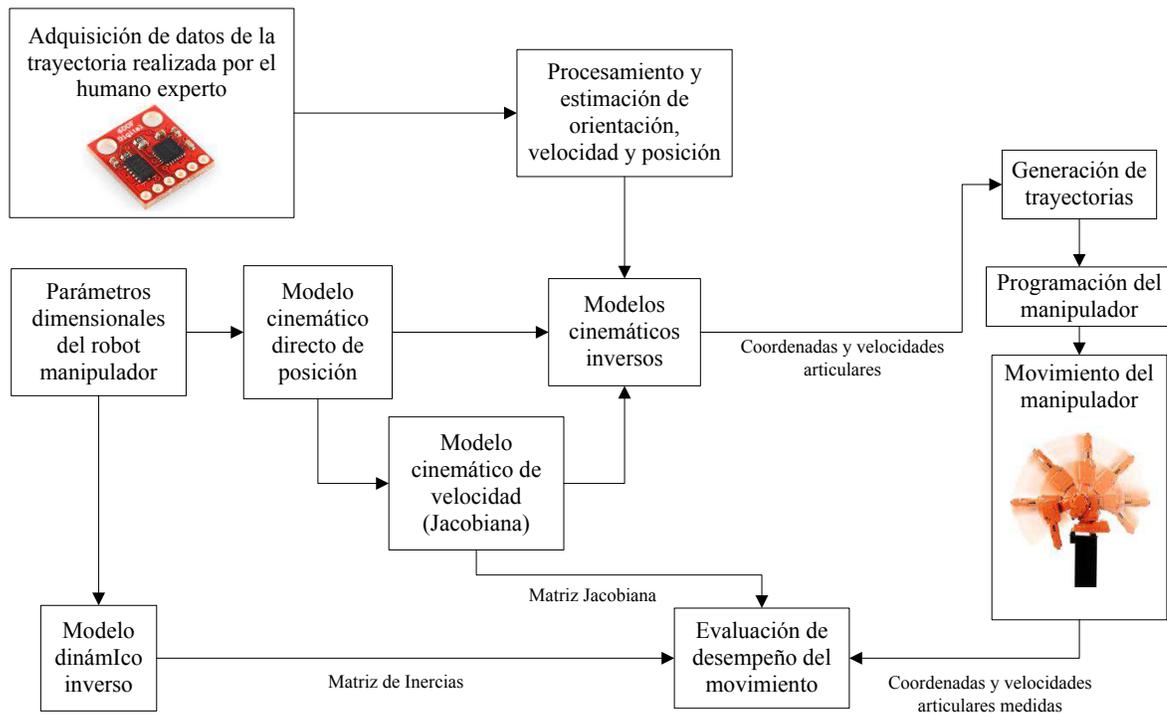


Figura 1.1: Metodología.

1.6. Organización y alcances del trabajo

El resto del documento está organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 2 se introduce el análisis cinemático y dinámico para manipuladores robóticos, generación de trayectorias, así como también una breve reseña de los índices de desempeño.

En el Capítulo 3 se describen los sensores empleados, así como a su vez se presentan y describen las técnicas referentes a la estimación de la orientación y posición de las trayectorias.

Posteriormente, en el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos mediante casos de estudio para trayectorias y manipuladores seleccionados.

Por último, se dan las conclusiones y trabajos futuros.

Los alcances de la metodología propuesta en la Sección 1.5 son los siguientes:

- En base a la adquisición de los datos coordenados de la trayectoria realizada mediante sensores IMU, se estima la orientación en dos de los ejes de trabajo, mientras que la estimación de aceleración, velocidad y posición, se realiza para los tres ejes de trabajo. La estimación en orientación no se realiza de manera completa, es decir, para los tres ejes de trabajo, debido a que con los datos adquiridos de los sensores IMU, no son suficientes para realizar dicha estimación.
- Las diferentes técnicas estimación de orientación, poseen ciertos parámetros que pueden modificarse para obtener un mejor resultado, por lo que existen distintas formas de modificar dichos parámetros, pero esto se encuentran fuera del aspecto de este trabajo.
- Las técnicas de estimación de posición y orientación emplean la integración numérica por el método de Euler (Sección 1.2).
- La estimación de orientación, aceleración, velocidad y aceleración, se realiza fuera de línea.
- El modelado cinemático inverso para obtener las variables articulares del robot, se puede realizar tanto con métodos geométricos como con algoritmos evolutivos, una descripción de ambos métodos se presenta en la Sección 2.2.2.
- El modelado dinámico depende de la disponibilidad de los parámetros dinámicos del robot manipulador, por lo que no contar con estos datos, requerirá la estimación de valores precisos de dichos parámetros a partir de medidas experimentales del movimiento del robot, pero dichas pruebas se encuentran fuera del aspecto de este trabajo.
- El modelo dinámico inverso no toma en cuenta fricciones y perturbaciones.
- La generación de trayectorias se realiza en base a funciones polinómicas, para obtener las variables articulares en su forma continua, considerando las condiciones de posición-tiempo y restricciones en la velocidad y/o aceleración, de tal forma que se asegure la suavidad de la trayectorias y se limiten las velocidades y/o aceleraciones máximas.

- Existen diversos tipos de índices de desempeño, pero para este trabajo sólo se toman en cuenta aquellos en base a la cinemática y dinámica del manipulador.
- La evaluación de desempeño del manipulador, se realiza en base a los índices de desempeño obtenidos al procesar: Los datos coordinados de la trayectoria realizada por el manipulador, el modelo cinemático y dinámico del manipulador; debido a esto, sino se cuenta con el modelo dinámico, no se toman en cuenta aquellos índices de desempeño en base a la dinámica del manipulador.

Capítulo 2

Análisis de manipuladores

2.1. Introducción

El análisis en este capítulo consiste en modelar de manera cinemática y dinámica los movimientos ejecutados por los manipuladores. Además, se incluye en este capítulo métodos para calcular (generar) una trayectoria que describa el movimiento deseado de un manipulador en el espacio de trabajo articular, es decir, que realice el movimiento de manera continua, así como también una reseña de los índices de desempeño empleados, mediante los cuales se evalúa el desempeño del manipulador para una tarea en específico.

2.2. Cinemática de manipuladores

La cinemática de manipuladores se encarga de caracterizar el movimiento del manipulador con respecto a un sistema o marco de referencia, sin tomar en cuenta las fuerzas/pares que originen dichos movimientos, refiriéndose únicamente a la descripción analítica del movimiento espacial del manipulador como una función de tiempo, permitiendo establecer una relación entre la posición y orientación del efector final y el sistema de referencia con los valores que tomen sus coordenadas articulares, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.1.

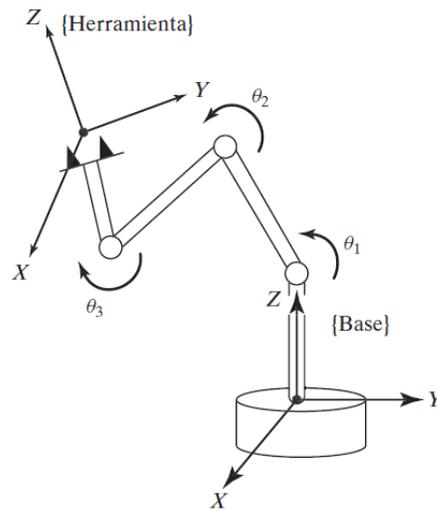


Figura 2.1: Relación entre la posición y orientación del efector final y el sistema de referencia de un robot manipulador [22].

Existen dos relaciones (modelos) diferentes para la cinemática de un manipulador:

1. Modelo cinemático directo: Se determinan las variables del efector final del manipulador en base a los valores conocidos de cada una de las variables articulares y parámetros geométricos del manipulador.
2. Modelo cinemático inverso: Se determinan las variables articulares del manipulador en base a los valores conocidos de las variables efector final del manipulador y sus parámetros geométricos.

Estas dos relaciones pueden obtenerse tanto para variables de posición como de velocidad:

a) Modelo cinemático de posición.

- Modelo Cinemático Directo de Posición (MCDP).
- Modelo Cinemático Inverso de Posición (MCIP).

b) Modelo cinemático de velocidad.

- Modelo Cinemático Directo de Velocidad (MCDV).
- Modelo Cinemático Inverso de Velocidad (MCIV).

2.2.1. Modelo cinemático directo de posición

El Modelo Cinemático Directo de Posición (MCDP) consiste en encontrar la relación en coordenadas o posiciones articulares del manipulador con la posición y orientación el efector final del manipulador, tal y como se muestra en la Figura 2.2



Figura 2.2: Modelo cinemático de posición.

La mayoría de los manipuladores pueden describirse de manera cinemática como una cadena de formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, por lo que es posible establecer un sistema de referencia en la base del manipulador y describir la localización de cada eslabón respecto a dicho sistema de referencia. Entonces la resolución del problema cinemático directo consiste en encontrar dichas relaciones.

Estas relaciones pueden describirse a través de transformaciones homogéneas \mathbf{T} , pero no son la única forma de las relaciones o mapeos cinemáticos. Mediante estas matrices se representan el mapeo de una matriz de posición \mathbf{P} y una matriz de rotación \mathbf{R} , de un sistema coordinado a otro.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{f} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Como se puede observar en la matriz \mathbf{T} esta compuesta por cuatro submatrices de diferente tamaño, donde las submatrices \mathbf{P} y \mathbf{R} están dadas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}, \text{ respectivamente}$$

La submatriz \mathbf{f} representa una transformación de perspectiva y la submatriz \mathbf{w} representa un escalado global [1], generalmente en robótica se utilizan como:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = [1], \text{ respectivamente}$$

Metodología Denavit-Hartenberg

Sean las coordenadas cartesianas los elementos de la matriz \mathbf{P} y los ángulos RPY (*roll-pitch-yaw*) de Tait-Bryan $[\phi \ \rho \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ la representación de posición y orientación del efector final, respectivamente, de un manipulador de n grados de libertad, cuyos valores son en función de las coordenadas articulares $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$, entonces la solución al problema cinemático directo esta dada por el conjunto de las Ecuaciones 2.2.1, las cuales se relacionan a la Figura 2.2.

$$\begin{aligned} P_x &= f_{P_x}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_y &= f_{P_y}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_z &= f_{P_z}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \phi &= f_{\phi}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \rho &= f_{\rho}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \psi &= f_{\psi}(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Por lo general, un robot manipulador está formado por una serie de n elementos estructurales sólidos o eslabones, los cuales están unidos mediante n articulaciones que permiten un movimiento relativo entre cada dos eslabones consecutivos, de tal forma que se tienen n grados de libertad. A cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia, y mediante las matrices de transformaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen al manipulador. La matriz de transformación homogénea ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ representa la posición y rotación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del manipulador.

Aunque para describir la relación que existe entre dos elementos contiguos se puede hacer uso de cualquier sistema de referencia ligado a cada elemento, la forma habitual de representar la relación entre tramas o sistemas coordenados utiliza la metodología de Denavit-Hartenberg (DH) [1].

De acuerdo a la metodología de DH, si se escogen adecuadamente los sistemas de referencia asociados a cada eslabón, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento i con el sistema del elemento $i - 1$, además, dichas transformaciones dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón y del tipo de articulación una al anterior y al siguiente eslabón.

De acuerdo a [1], estas 4 transformaciones son:

1. Rotación sobre el eje z_{i-1} un ángulo θ_i .
2. Traslación a lo largo de z_{i-1} una distancia d_i .
3. Traslación a lo largo de x_i una distancia a_i .
4. Rotación sobre el eje x_i un ángulo α_i .

donde θ_i , d_i , a_i y α_i son los parámetros de DH del eslabón i , como se ilustra en la Figura 2.3.

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se han de realizar en el orden indicado.

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \mathbf{T}(z, \theta_i) \mathbf{T}(0, 0, d_i) \mathbf{T}(a_i, 0, 0) \mathbf{T}(x, \alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

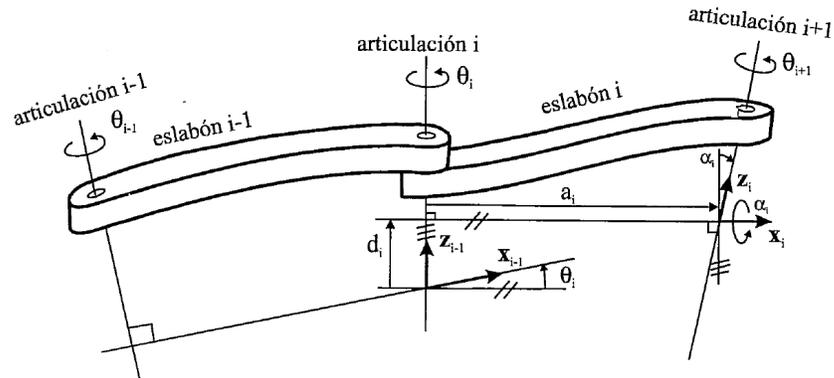


Figura 2.3: Parámetros de DH para un eslabón giratorio [1].

Para que la matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ relacione los sistemas $\{S_i\}$ y $\{S_{i-1}\}$, es necesario que los sistemas se hayan escogido de acuerdo a unas determinadas normas. Estas junto con los 4 parámetros de DH, conforman el siguiente método para la resolución de la cinemática directa el cual se puede ver en el Apéndice A.1.

Mediante el método de DH se obtiene la matriz de transformación \mathbf{T} que relaciona el sistema de referencia con el del efector final del robot manipulador en función de las n coordenadas articulares.

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$$

La matriz \mathbf{T} se expresa como:

$${}^0\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n & {}^0\mathbf{P}_n \\ \mathbf{f} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde podemos observar que con la obtención de la matriz ${}^0\mathbf{T}_n$, se obtienen también las submatrices de posición ${}^0\mathbf{P}_n$ y de rotación ${}^0\mathbf{R}_n$. En base a la submatriz de rotación se calcula la orientación del efector final del robot manipulador:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{o_z C \rho}{a_z C \rho} \right), \quad \rho = \tan^{-1} \left(\frac{-n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \right), \quad \psi = \tan^{-1} \left(\frac{n_y C \rho}{n_x C \rho} \right)$$

2.2.2. Modelo cinemático inverso de posición

El Modelo Cinemático Inverso de Posición (*MCIP*) tiene como objetivo encontrar el valor de las coordenadas articulares del manipulador $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$, cuando sólo se conoce la posición y orientación del efector final del robot manipulador (Figura 2.2).

Son diferentes los métodos que solucionan el problema cinemático inverso para posición, entre ellos:

- Métodos geométricos.
- Solución a partir de la matriz de transformación homogénea.
- Desacoplo cinemático.
- Métodos numéricos.
- Algoritmos evolutivos.

Mediante el desacoplo cinemático se puede dividir el problema inverso en dos partes, uno para posición y otro para orientación. En el caso de este trabajo, para la solución del problema de posición se emplearon tanto métodos geométricos como algoritmos evolutivos.

Los métodos geométricos dependen directamente de las características geométricas (parámetros dimensionales) del manipulador, por lo tanto para cada estructura o arquitectura diferente

de manipulador la solución al problema inverso será diferente. Su ventaja es que al tener ecuaciones concretas (cerradas) el tiempo de ejecución es menor al de métodos numéricos y algoritmos evolutivos.

Los algoritmos evolutivos tienen la capacidad de poder encontrar múltiples soluciones al problema inverso además de que son completamente estructurables al grado de que se puede programar completamente. Su principal ventaja es que pueden encontrar la mejor solución posible para casi cualquier tipo de arquitectura de manipuladores, donde un análisis geométrico puede resultar demasiado complejo o no tener solución, pero esto resulta en un mayor costo computacional. El algoritmo evolutivo utilizado es EvoNorm [23, 24].

Desacoplo cinemático

El método de desacoplo cinemático busca dividir el problema cinemático en dos partes, uno para posición y otro para orientación, para así posicionar y orientar el efector final del manipulador de una manera determinada (o deseada).

Dada una orientación y posición deseadas, se establecen las coordenadas del punto de intersección de los 3 últimos ejes articulares (muñeca del manipulador), calculándose los valores de las tres primeras variables articulares (q_1, q_2, q_3) que consiguen posicionar este punto. Después, a partir de los datos de orientación y de los ya calculados (q_1, q_2, q_3) se obtienen los valores del resto de las variables articulares.

En la Figura 2.4 se presenta un manipulador cuya cinemática puede desacoplarse, en base a lo mencionando anteriormente. Su parámetros de DH se pueden observar en la Tabla 2.2.1.

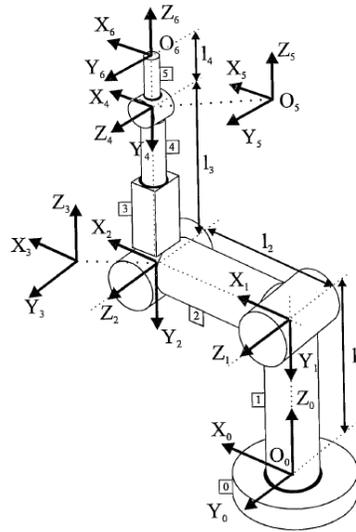


Figura 2.4: Cinemática del manipulador IRB2400 [1].

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	$-\pi/2$
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	0	$\pi/2$
4	q_4	l_3	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$\pi/2$
6	q_6	l_4	0	0

Tabla 2.2.1: Parámetros de DH del manipulador IRB2400.

El punto central de la muñeca del manipulador (\mathbf{p}_m) corresponde al origen del sistema $\{S_5\}$: O_5 , y el punto final del manipulador (\mathbf{p}_r) será el origen del sistema $\{S_6\}$: O_6 . Los vectores asociados a \mathbf{p}_m y \mathbf{p}_r van desde el sistema base del manipulador sistema $\{S_0\}$, es decir:

$$\mathbf{p}_m = \overline{O_0 O_5}$$

$$\mathbf{p}_r = \overline{O_0 O_6}$$

Puesto que la dirección del eje \mathbf{z}_6 debe coincidir con la de \mathbf{z}_5 y la distancia entre O_5 y O_6 medida a lo largo de \mathbf{z}_5 es precisamente $d_4 = l_4$, se tendrá que:

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_r - l_4 \mathbf{z}_6$$

donde \mathbf{p}_r son las coordenadas del punto donde se desea que se posicione el manipulador, por lo tanto:

$$\mathbf{p}_r = {}^0 \mathbf{P}_6 = [P_x, P_y, P_z]^T$$

además, la longitud l_4 es un parámetro asociado al manipulador, y el vector \mathbf{z}_6 es el vector \mathbf{a} correspondiente a la orientación ($\mathbf{z}_6 = [a_x, a_y, a_z]^T$) de la matriz de rotación ${}^0 \mathbf{R}_6$, el cual es un valor numérico conocido, pues se calcula en base los ángulos de Tait-Bryan (ϕ, ρ, ψ) de la orientación deseada, como se muestra a continuación:

$${}^0 \mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\rho & 0 & S\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\rho & 0 & C\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Mediante las variables articulares q_1, q_2 y q_3 será posible posicionar \mathbf{p}_m , por lo que se debe calcular los valores correspondientes a cada uno. Los métodos geométricos son adecuados para cuando se cuentan con pocos grados de libertad o para cuando se considere sólo posicionar el efector final del manipulador [1], en este caso \mathbf{p}_m (debido al desacoplo). Otra alternativa para encontrar estas primeras tres variables es mediante EvoNorm [23, 24], el cual será descrito más adelante.

Los valores de q_4, q_5 y q_6 se encargarán de orientar el efector final de manipulador de la forma deseada. Para ello, denominando ${}^0 \mathbf{R}_6$ a la submatriz de rotación de la matriz ${}^0 \mathbf{T}_6$, se tendrá:

$${}^0 \mathbf{R}_6 = {}^0 \mathbf{R}_3 {}^3 \mathbf{R}_6$$

donde la matriz ${}^0 \mathbf{R}_3$ se define como:

$${}^0 \mathbf{R}_3 = {}^0 \mathbf{A}_1 {}^1 \mathbf{A}_2 {}^2 \mathbf{A}_3$$

cuyo valor es obtenido al calcular q_1 , q_2 y q_3 . Por lo tanto:

$${}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^T {}^0\mathbf{R}_6$$

tendrá sus componentes numéricas conocidas.

Por otra parte, ${}^3\mathbf{R}_6$ corresponde con las submatriz de rotación de la matriz de transformación homogénea ${}^3\mathbf{T}_6$ que relaciona el sistema $\{S_3\}$ con el $\{S_6\}$. Por lo tanto:

$${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6$$

donde cada submatriz de acuerdo a la metodología *DH* [1]:

$${}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & S_4C_5S_6 + C_4C_6 & -S_4C_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

De la matriz anterior se pueden obtener los valores de los parámetros articulares faltantes:

$$q_4 = \tan^{-1} \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right), \quad q_5 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - r_{33}^2}}{r_{33}} \right), \quad q_6 = \tan^{-1} \left(\frac{r_{32}}{r_{31}} \right)$$

Estas expresiones, junto con las obtenidas por el método geométrico o por Evonorm, constituyen la solución completa del problema cinemático inverso de posición.

EvoNorm

EvoNorm [23, 24] es un algoritmo evolutivo que utiliza variables aleatorias con distribución normal, con las cuales se describen muchos de los fenómenos que ocurren en la vida diaria, para generar una población de las posibles soluciones a partir de una función de evaluación dada.

El algoritmo al ser puesto en ejecución, emplea dos criterios estadísticos: La media μ , la cual representa la medida numérica de la tendencia central en la que ocurre una variable, y la

desviación estándar σ , la cual mide la dispersión con la que ocurre una variable de acuerdo a su media. La variable a considerar en este caso es la población de las posibles soluciones para el problema cinemático inverso.

La distribución normal N se emplea para representar el conjunto de posibles valores a evaluar en las variables de una ecuación, para este caso.

$$N(\mu, \sigma) = \mu + \sigma \sum_i U$$

donde U es el valor aleatorio generado por una distribución uniforme.

EvoNorm consta de tres mecanismos principales: Generación, Evaluación y Reproducción. Los cuales se describirán a continuación.

Generación

A cada uno de los segmentos del conjunto de parámetros generados con los cuales se evaluará o generará un manipulador se le llama individuo, los cuales son considerados cada uno como una solución candidata, recordando que para modelar un manipulador se necesitan sus parámetros de DH así como los valores de masa y centros de masa, en el algoritmo cada parámetro generado para el individuo representa un valor de la matriz de DH, así como los valores de masa del manipulador.

A todo el conjunto de individuos se le llama población la cual es todo el conjunto de posibles soluciones, de cantidad finita y acotada de individuos. Los individuos de la población inicial, se generan por la función aleatoria uniformemente distribuida U , considerando cotas máximas y mínimas definidas. Después de este proceso se efectúa la generación de la tabla de DH y las distancias al centro de masa y sus respectivas masas, con los valores generados.

El avance de una generación es el proceso de evaluar los individuos de una generación y generar una nueva población, el total de generaciones es un valor asignado n .

Para generar la nueva población, el algoritmo necesita los siguientes datos:

- Tipo de articulación (Rotación o traslación).
- Cotas máximas y mínimas de las dimensiones y masas del eslabón.
- Tamaño de la población, es decir el Número Total de Individuos N_{TI} .
- Generaciones totales a realizar N_{TG} .

El sembrado es un proceso que se agrega al algoritmo, que este consiste en asignar las dimensiones y pesos de un individuo conocido previamente como una buena solución y con esto el algoritmo evolutivo rápidamente distinguiría si este individuo es uno adecuado para la tarea y empezará a evolucionar a partir de los valores de este manipulador, para optimizarlos.

Evaluación

La Función de Evaluación f_e se encarga de medir o calificar el desempeño para cada individuo. La f_e se calculará en base a la raíz del error cuadrático de posición del efector final del manipulador.

$$f_e = \sqrt{(P_x - X)^2 + (P_y - Y)^2 + (P_z - Z)^2}$$

donde P_x , P_y y P_z son las coordenadas de la posición deseada de la matriz de traslación \mathbf{P} , y X , Y y Z son los valores de las coordenadas de posición articular q obtenidas a partir de los individuos propuestos y la matriz de transformación homogénea ${}^0\mathbf{T}_n$ resultante del *MCD* del robot manipulador determinado.

Reproducción

El proceso de reproducción del algoritmo se divide en cuatro etapas:

- Selección de los mejores individuos,

- Obtención de la media μ y desviación estándar σ de los mejores individuos,
- Búsqueda del mejor individuo de la población I_{best} ,
- Generación de nuevos individuos.

La selección de los mejores individuos consiste en comparar los valores de la función de evaluación de cada individuo de la población y en seleccionar los mejores de la población. La cantidad a seleccionar es un porcentaje asignado, por lo que solo se considerarán el 25% de la población, que estará conformada por los mejores individuos. La cantidad de los individuos seleccionados la denominaremos n_S .

La media y desviación estándar se calculan a partir del conjunto valores que contiene cada individuo, para este trabajo los valores son las posiciones articulares q para el problema cinemático inverso, tal y como se muestra en las Ecuaciones 2.2.3 y 2.2.4.

$$\mu(pr) = \sum_i^{n_S} \frac{PS(pr, i)}{n_S} \quad (2.2.3)$$

$$\sigma(pr) = \sqrt{\sum_i^{n_S} (PS(pr, i) - \mu(pr))^2} \quad (2.2.4)$$

donde pr representa las posiciones articulares a ser consideradas (variables de decisión), PS representa la matriz de los individuos seleccionados, la cual es del tamaño de número total de parámetros de DH (N_{TPr}) por n_S ($N_{TPr} \times n_S$).

Al mejor individuo (I_{best}) se le dará mas prioridad para la generación de nuevos individuos, esto no quiere decir que todos los individuos van a ser generados en base al mejor individuo, ya que también se utilizarán a los demás del 25% de los mejores individuos, sólo que se le dará más prioridad al mejor individuo.

En caso que se generara toda la población en base a este mejor individuo, el algoritmo muy probablemente obtenga una convergencia prematura, es decir que obtenga un mínimo local, lo

cual no se desea, sino que se busca el mínimo global, o en otras palabras que se obtengan el valor de las posiciones articulares q que solucionen el problema cinemático inverso para un robot manipulador determinado.

La generación de una nueva población se realiza generando un valor aleatorio U entre 0 y 1 (distribución uniforme); y seleccionando a un individuo del 25 % de la población de mejores si U es mayor que 0.5, o al mejor si U es menor o igual que 0.5, como si de una moneda virtual se tratara. Cada individuo generado se crea a partir de la distribución normal N de cada parámetro y con esto se generan los individuos "hijos" de los mejores, como se muestra en la Ecuación 2.2.5.

$$P_i = \begin{cases} N(\mu_{n_S}, \sigma_{n_S}) & U > 0.5 \\ N(\mu_{best}, \sigma_{best}) & U \leq 0.5 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Una vez descritos los mecanismos principales del algoritmo, se presenta un pseudocódigo para su implementación:

1. Se define el Número Total de Generaciones (N_{TG}) y la posición cartesiana deseada \mathbf{P} ,
2. Se inicializa $N_{TG} = 1$,
3. Generación aleatoria de la población, es decir del número total de individuos (N_{TI}),
4. Evaluación del N_{TI} en base a una Función de evaluación (f_e),
5. Selección de los mejores individuos (n_S),
6. Calculo de μ y σ para individuo seleccionados,
7. Selección del mejor individuo (I_{best}) del conjunto n_S ,
8. Generación de una nueva población en base a I_{best} y n_S , generando así un nuevo N_{TI} ,
9. Verificar si el N_{TG} ha sido alcanzado, de no ser así, volver a paso 4.

Deberá tomarse en cuenta que el algoritmo e Evonorm deberá ser ejecutado por cada posición cartesiana deseada.

2.2.3. Modelo cinemático directo de velocidad

El modelado cinemático de posición de un manipulador establece la relación de las coordenadas o posiciones articulares con la posición y orientación del efector final del manipulador, sin embargo, también se requiere conocer la relación entre las velocidades articulares $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$ con las velocidades de posición y orientación del efector final del manipulador $V = [\dot{P}_x \ \dot{P}_y \ \dot{P}_z \ \dot{\phi} \ \dot{\rho} \ \dot{\psi}]^T$. Dicha relación se denomina modelo cinemático diferencial o de velocidad, la cual se obtiene mediante el cálculo de una matriz Jacobiana \mathbf{J} , tal y como se ilustra en la Figura 2.5 [1].

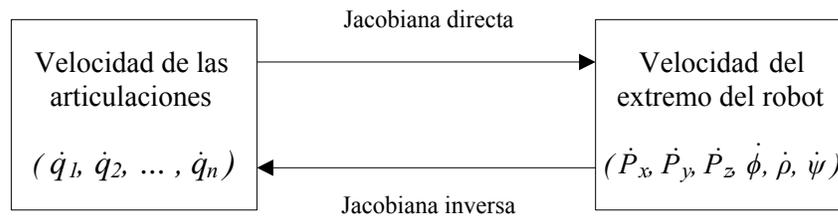


Figura 2.5: Modelo cinemático de velocidad.

La matriz Jacobiana directa permite conocer las velocidades V del efector final del manipulador a partir de las velocidades articulares \dot{q} , resultando en el Modelo Cinemático Directo de Velocidad (*MCDV*). Por su parte, la matriz Jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades articulares necesarias \dot{q} para obtener las velocidades V determinadas en el efector final del manipulador, resultando en el Modelo cinemático Inverso de Velocidad (*MCIV*).

El método más directo para obtener la relación entre velocidades articulares y del efector final del manipulador consiste en derivar respecto al tiempo las Ecuaciones 2.2.1, que corresponden al modelo cinemático directo [1], con lo que se tiene el conjunto de Ecuaciones 2.2.6.

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{P_x}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{P}_y &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{P_y}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{P}_z &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{P_z}}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\phi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\phi}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\rho} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\rho}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\psi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\psi}}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Expresando 2.2.6 en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

$$V = \mathbf{J} \dot{q}$$

donde:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{P_x}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{P_x}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{P_x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_{P_y}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{P_y}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{P_y}}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\psi}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\psi}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\psi}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

En la Ecuación 2.2.8, se tiene la matriz Jacobiana \mathbf{J} , en la cual, el valor numérico de cada uno de sus elementos dependerá de los valores instantáneos de las coordenadas articulares q_i , entonces, el valor de \mathbf{J} será diferente en cada uno de los puntos del espacio articular.

2.2.4. Modelo cinemático inverso de velocidad

La relación inversa (*MCIV*) permite calcular las velocidades articulares \dot{q} partiendo de las velocidades V del efector final del manipulador, como se ilustra en la Figura 2.2, esto debido a la relación que tiene unas con las otras. La Ecuación 2.2.9 muestra la relación inversa entre \dot{q} y

V.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$\dot{q} = \mathbf{J}^{-1} V$$

Para la obtención de la relación inversa se pueden emplear diferentes maneras:

1. Invertir simbólicamente \mathbf{J} . La desventaja de esta alternativa es que se vuelve un procedimiento inviable debido a la gran complejidad de obtener la inversión simbólica.
2. Evaluar numéricamente \mathbf{J} para un postura concreta e invertir numéricamente, para así encontrar la relación inversa válida para esa configuración.
3. Repetir el procedimiento seguido para la obtención de \mathbf{J} , pero ahora partiendo del modelo cinemático inverso, la desventaja es que este procedimiento es algebraicamente complicado debido a que se cuenta con funciones trigonométricas.
4. Si \mathbf{J} no es cuadrada, en general se calcula la pseudoinversa, la desventaja es que no se puede percatar si el manipulador se encuentre en una configuración singular, perdiendo así la capacidad de generar movimiento en ciertas direcciones.

2.3. Dinámica de manipuladores

La dinámica de manipuladores busca establecer la relación entre el movimiento (posición, velocidad y aceleración) del manipulador y las fuerzas y pares que provocan dichos movimientos, en este caso articulares, tal y como se muestra en la Figura 2.6.

Con el modelado dinámico se busca relacionar matemáticamente:

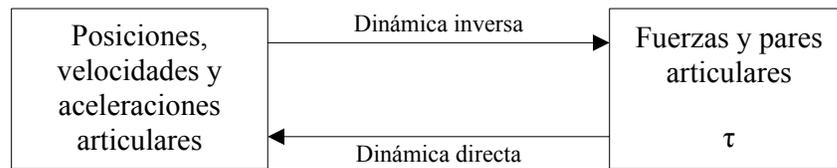


Figura 2.6: Modelo dinámico.

1. La localización del manipulador definida por sus variables articulares o por las coordenadas de localización de su efector final, y sus derivadas (velocidad y aceleración).
2. Las fuerzas y pares aplicados para cada articulación (o en el efector final del manipulador).
3. Los parámetros dimensionales del manipulador, como longitud, masas e inercias de sus elementos.

Dichas relaciones se pueden obtener a partir de leyes físicas conocidas, tales como mecánica newtoniana y lagrangiana, para así obtener ecuaciones de movimiento dinámico para las diversas articulaciones del manipulador que dependen de los parámetros dimensionales del mismo. Las ecuaciones resultantes son de utilidad para la simulación en computadora del movimiento del manipulador, diseño y evaluación de la estructura mecánica del manipulador, dimensionamiento de los actuadores, diseño y evaluación del control dinámico del manipulador, etcétera.

Entre los métodos convencionales para obtener las ecuaciones que describan el comportamiento dinámico de un manipulador tenemos las formulaciones de Euler-Lagrange y Newton-Euler.

El modelo que se utiliza es limitado, ya que no se toma en cuenta fricción, incertidumbres paramétricas y actuadores.

La metodología Euler-Lagrange es simple y sistemática, pero requiere de una relativa cantidad de operaciones aritméticas, lo que conduce a un algoritmo de costo computacional de $O(n^4)$, mientras que la metodología Newton-Euler que emplea una formulación compacta mediante matrices y vectores tiene un costo computacional de $O(n)$. Para el presente trabajo se empleará

la metodología Newton-Euler, dado que cuenta con una mejor eficiencia computacional [1].

2.3.1. Metodología Newton-Euler

Solo mediante la metodología Newton-Euler se puede obtener el modelo dinámico de un manipulador basado en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o su equivalente para movimientos de rotación, la denominada ley de Euler, las cuales se pueden observar en las Ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2.

$$\sum \mathbf{F} = m\dot{v} \quad (2.3.1)$$

$$\sum \mathbf{T} = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega) \quad (2.3.2)$$

Un adecuado desarrollo de las Ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2, conduce a una formulación recursiva en la que se obtienen la posición, velocidad y aceleración del eslabón i referidos a la base del robot a partir de los correspondientes del eslabón $i - 1$ y del movimiento relativo de la articulación i . Este algoritmo se describe a continuación.

Algoritmo para el modelado dinámico por Newton-Euler [1]

1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo con las reglas de *DH*.
2. Obtener las matrices de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas ${}^i\mathbf{R}_{i-1}$, siendo:

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix}$$

$${}^i\mathbf{R}_{i-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^T$$

3. Establecer para el sistema base $\{S_0\}$:

Velocidad angular: ${}^0\omega_0 = [0, 0, 0]^T$

Aceleración angular: ${}^0\dot{\omega}_0 = [0, 0, 0]^T$

Velocidad lineal: ${}^0v_0 = [0, 0, 0]^T$

Aceleración lineal: ${}^0\dot{v}_0 = [g_x, g_y, g_z]^T$

${}^0\omega_0$, ${}^0\dot{\omega}_0$ y 0v_0 son típicamente nulos salvo que la base del robot esté en movimiento. Para el efector final del robot se conocerá la fuerza y el par ejercidos externamente ${}^{n+1}\mathbf{f}_{n+1}$ y ${}^{n+1}\mathbf{n}_{n+1}$

$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$

Coordenadas del origen del sistema: ${}^i\mathbf{p}_i = \{S_i\}$ respecto a $\{S_{i-1}\} = [a_i, d_i S_i, d_i C_i]$

Coordenadas del centro de masas del eslabón i respecto del sistema $\{S_i\}$: ${}^i\mathbf{s}_i$

Matriz de inercia del eslabón i respecto de su centro de masas expresado en $\{S_i\}$: ${}^i\mathbf{I}_i$

Para $i = 1, \dots, n$ realizar los pasos 4 a 7:

4. Obtener la velocidad angular del sistema $\{S_i\}$:

$${}^i\omega_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\omega_{i-1} + \mathbf{z}_0\dot{q}_i), & \text{eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}{}^{i-1}\omega_{i-1}, & \text{eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

5. Obtener la aceleración angular del sistema $\{S_i\}$:

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0\ddot{q}_i), & \text{eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1}, & \text{eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

6. Obtener la aceleración lineal del sistema i :

$${}^i\dot{v}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_i) + {}^i\mathbf{R}_{i-1}{}^i\dot{v}_i, & \text{eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}(\mathbf{z}_0\ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{v}_{i-1}) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + 2{}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0\dot{q}_i + & \text{eslabón } i \text{ es de traslación} \\ + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_i), & \end{cases}$$

7. Obtener la aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón i :

$${}^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i) + {}^i\dot{v}_i$$

Para $i = n \dots 1$ realizar los pasos 8 a 10.

8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón i :

$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1}{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i{}^i\mathbf{a}_i$$

9. Obtener el par ejercido sobre el eslabón i :

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} [{}^{i+1}\mathbf{n}_i + ({}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_i) \times {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}] + ({}^i\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{s}_i) \times m_i {}^i\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{I}_i \dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\mathbf{I}_i {}^i\omega_i)$$

10. Obtener el par o la fuerza aplicada a la articulación i :

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{n}_i^T {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0, & \text{eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{f}_i^T {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0, & \text{eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

donde τ es el par o fuerza efectivo (par motor menos pares de rozamiento o perturbación).

Una vez obtenidas las ecuaciones referentes a los pares o fuerzas aplicadas para cada articulación, se establece el modelo dinámico inverso, el cual se puede reescribir en su forma compacta dada por:

$$\tau = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)$$

donde $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercias, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y coriolis y $G(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de efectos por gravedad.

2.4. Generación de trayectorias

En un robot manipulador, una trayectoria describe el comportamiento de la posición, velocidad y aceleración para cada grado de libertad.

La generación de la trayectoria consiste en establecer las trayectorias que debe seguir cada articulación del manipulador a lo largo del tiempo, para lograr esto se debe especificar la secuencia de posiciones articulares a lo largo del tiempo, los cuales serán llamados puntos ruta, el tipo de trayectoria, el tipo de interpolador a utilizar y el tiempo a invertir entre cada punto.

Los puntos ruta contienen el punto inicial, el punto final y todos los puntos vía (puntos intermedios entre el inicial y el final).

Es conveniente que el movimiento del manipulador sea uniforme (continuo en posición y velocidad, y de preferencia que también sea continuo en aceleración), de lo contrario se provocará un mayor desgaste en el mecanismo y vibraciones indeseadas debido a los movimientos bruscos y torpes [22]. Entonces las trayectorias generadas deberán contar con restricciones espaciales y temporales, además de criterios de calidad para las trayectorias, como suavidad y precisión [1].

En la Figura 2.7 se muestra el funcionamiento de la generación de trayectorias.

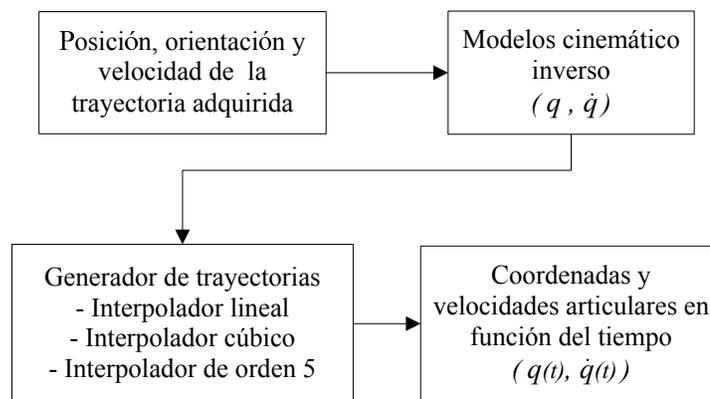


Figura 2.7: Generación de trayectorias.

De manera general se interpolan las posiciones articulares q_1, q_2, \dots, q_n para generar para cada una de éstas una expresión en función del tiempo $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ que pase o se aproxime a las posiciones articulares deseadas, como se muestra en la Figura 2.8.

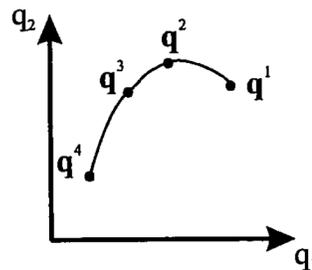


Figura 2.8: Ejemplo de la interpolación de posiciones articulares [1].

El propósito principal de la generación de trayectorias es utilizar las variables articulares en función del tiempo en la programación del robot manipulador.

2.4.1. Tipos de trayectorias

Existen diferentes tipos de trayectorias que se pueden considerar [1], tales como:

- Trayectorias punto a punto,
- Trayectorias coordinadas o isócronas,
- Trayectorias continuas,

Las trayectorias continuas tienen posibles cambios de dirección y velocidad y sin ninguna coordinación del resto de las articulaciones. Dado que se conoce la trayectoria que seguirá el efector final del manipulador (obtenida por técnicas de adquisición de datos que se verán en el capítulo 3), es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares, por lo que este tipo de trayectoria es la adecuada para llevar a cabo la generación de la trayectoria.

2.4.2. Interpolación de trayectorias

Como se mencionó anteriormente, para unir los puntos ruta por lo que se quiere que pasen las articulaciones del manipulador en un instante de tiempo determinado, además de considerar las condiciones de posición-tiempo, es conveniente añadir restricciones en la velocidad y/o aceleración de paso por los puntos, de manera que se asegure la suavidad de la trayectorias y se limiten las velocidades y/o aceleraciones máximas [1].

Por ello, debe seleccionarse algún tipo de función (frecuentemente polinómica) cuyos parámetros o coeficientes se ajusten para pasar por los puntos deseados (con velocidades y/o aceleraciones aceptables).

Interpolación lineal

La expresión del interpolador lineal es:

$$q(t) = a_0 + a_1 t$$

La condición es mantener constante la velocidad entre cada dos valores sucesivos de la articulación, por lo que se establecen dos condiciones:

$$q^{i-1} = a_0 + a_1 t^{i-1}$$

$$q^i = a_0 + a_1 t^i$$

despejando a_0 y a_1 se obtiene:

$$q(t) = (q^i - q^{i-1}) \frac{t - t^{i-1}}{T} + q^{i-1}$$

donde T se define como:

$$T = t^i - t^{i-1}$$

Si bien el interpolador lineal mantiene las posiciones articulares continuas, su primera y segunda derivada no son continuas, es decir, la velocidad tiene cambios bruscos y la aceleración es infinita.

Interpolación cúbica

El interpolador cúbico se emplea para asegurar la continuidad en posición y velocidad, y en el cual es necesario establecer cuatro condiciones: Posición y velocidad en los puntos inicial y final [22].

Estableciendo un polinomio cúbico general:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

de manera que la velocidad y la aceleración de la articulación a lo largo de esta ruta son:

$$\dot{q}(t) = a_1 t + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

y combinando las ecuaciones con las cuatro restricciones deseadas:

$$q_0 = a_0$$

$$q_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3$$

$$\dot{q}_0 = a_1$$

$$\dot{q}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2$$

Al resolver estas ecuaciones, se obtiene que los coeficientes son:

$$a_0 = q_0$$

$$a_1 = \dot{q}_0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2} (q_f - q_0) - \frac{2}{t_f} \dot{q}_0 - \frac{1}{t_f} \dot{q}_f$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (q_f - q_0) + \frac{1}{t_f^2} (\dot{q}_f - \dot{q}_0)$$

Interpolación de quinto orden

Si además se desea tener continuidad en la aceleración, es necesario incrementar el orden de la función polinómica a 5, de tal manera que se tendrán seis condiciones: Posición, velocidad y aceleración en los puntos inicial y final [22]. Incrementar mas allá de este orden es redundante ya que sería emplear 8 o más condiciones para el interpolador.

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

la velocidad y la aceleración para esta función son:

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

en donde las condiciones se dan así:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= a_0 \\
 q_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\
 \dot{q}_0 &= a_1 \\
 \dot{q}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\
 \ddot{q}_0 &= 2a_2 \\
 \ddot{q}_f &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3
 \end{aligned}$$

estas condiciones especifican un conjunto lineal de seis ecuaciones con seis variables desconocidas cuya solución es:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= q_0 \\
 a_1 &= \dot{q}_0 \\
 a_2 &= \frac{\ddot{q}_0}{2} \\
 a_3 &= \frac{20q_f - 20q_0 - (8\dot{q}_f + 12\dot{q}_0) t_f - (3\ddot{q}_0 - \ddot{q}_f) t_f^2}{2t_f^3} \\
 a_4 &= \frac{30q_0 - 30q_f + (14\dot{q}_f + 16\dot{q}_0) t_f + (3\ddot{q}_0 - 2\ddot{q}_f) t_f^2}{2t_f^4} \\
 a_5 &= \frac{12q_f - 12q_0 - (6\dot{q}_f + 6\dot{q}_0) t_f - (\ddot{q}_0 - \ddot{q}_f) t_f^2}{2t_f^5}
 \end{aligned}$$

Si bien existen otro tipos de interpoladores para la unión de los puntos ruta con funciones continuas, diferenciable en orden 2 y computacionalmente manejables [1], como interpolador por tramos, el cual requiere agregar puntos pseudo-vías, e interpoladores senoidales, los interpoladores mas convenientes a utilizar son el interpolador cúbico y el de orden 5.

2.5. Índices de desempeño

Un índice de desempeño de un manipulador es una herramienta que permite evaluar o calificar el funcionamiento del mismo a partir de un criterio definido, siendo así de utilidad para la

planificación de movimientos y el diseño de manipuladores robóticos.

En la planificación de movimientos se emplean índices dependientes de la postura, mediante los cuales se permitirá optimizar la operación del manipulador, mientras que para el enfoque de diseño se emplean índices independientes de la postura, con los cuales se permite orientar el proceso de cálculo de los parámetros dimensionales que definen la arquitectura del manipulador.

Se han propuesto varios índices de desempeño debido a la necesidad de criterios o herramientas para evaluar el diseño de robots manipuladores, una tarea que anteriormente era exclusiva de diseñadores expertos y el uso de herramientas CAD [25].

Los índices de desempeño se pueden catalogar en cuatro tipos diferentes [25], los cuales son:

- Índices de desempeño cinetostático (Número de condición, manipulabilidad, mínimo valor singular).
- Índices de desempeño dinámico (Matriz de inercia generalizada, manipulabilidad dinámica, maximización del volumen y uniformidad del hiperparalelepípedo de aceleración, condicionamiento dinámico).
- Índices de límites articulares (Límite de la articulación, disponibilidad de movilidad articular, evitación de límites articulares), índices definidos sobre el espacio de trabajo.
- Índices de espacio de trabajo (Tipos de espacios de trabajo, global de condicionamiento, global de manipulabilidad, radio de aceleración).

2.5.1. Homogeneización de la matriz Jacobiana

Varios de los índices de desempeño están definidos en función de la matriz Jacobiana del manipulador, pero, cuando los manipuladores a evaluar son de más de tres grados de libertad, como es el caso de robots que controlan posición y orientación, o sus articulaciones no son del mismo tipo, los elementos de la matriz Jacobiana resultante no serán homogéneos, lo cual

dificultará la implementación de dichos índices. Diferentes estrategias para homogeneizar la matriz Jacobiana se discuten en [25]. Entre algunas de las alternativas para la solución de problema de homogeneización, es el calculo y aplicación de la longitud característica a la matriz Jacobiana.

La longitud característica L tiene como función resolver la inconsistencia de las longitudes de las matriz Jacobiana, realizando un adimensionamiento de sus valores y a su vez normalizar la matriz Jacobiana dado un índice de desempeño específico, además, este valor genera un valor más isotrópico (o uno muy cercano) en la matriz Jacobiana. Entonces se puede definir como la longitud de normalización que hace que el número de condición de la matriz Jacobiana un mínimo [26].

Los elementos de la Jacobiana que tiene unidades de longitud se dividirán por la longitud característica, para así generar una nueva matriz Jacobiana \mathbf{J}_H cuyos elementos serán homogéneos [26].

$$\mathbf{J}_H = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{P_x}}{\partial q_1} \frac{1}{L} & \dots & \frac{\partial f_{P_x}}{\partial q_n} \frac{1}{L} \\ \frac{\partial f_{P_y}}{\partial q_1} \frac{1}{L} & \dots & \frac{\partial f_{P_y}}{\partial q_n} \frac{1}{L} \\ \frac{\partial f_{P_z}}{\partial q_1} \frac{1}{L} & \dots & \frac{\partial f_{P_z}}{\partial q_n} \frac{1}{L} \\ \frac{\partial f_\phi}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_\rho}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\rho}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

Entre los diferentes métodos para obtener el valor de la longitud característica se encuentran:

- Obtención de forma simbólica de la longitud característica.

- Evaluación numérica de la matriz Jacobiana.
- Algoritmos numéricos de minimización.
- Algoritmos evolutivos.

Los algoritmos evolutivos funcionan de manera similar a los algoritmos numéricos de minimización, además de que ambos son adecuados para manipuladores de varios grados de libertad, pero lo que destaca a los algoritmos evolutivos es que tienen una baja probabilidad de encontrar mínimos locales de algunas funciones y normalmente encuentran un valor muy cercano al mínimo real.

2.5.2. Índices de desempeño cinetostático

Los índices de desempeño cinetostático permiten evaluar la capacidad del manipulador para transformar las velocidades o fuerzas en los actuadores, en velocidades o fuerzas en el efector final. La mayoría de estos índices están definidos en función de la matriz Jacobiana del manipulador, la cual establece la relación entre ambas partes.

Los índices de desempeño cinetostático que se emplearán para este trabajo son:

- Elipsoide de velocidad.
- Número de condición.
- Manipulabilidad cinemática.
- Mínimo valor singular.

Dichos índices son dependientes de la postura, por lo que tal y como se mencionó anteriormente pueden ser utilizados para la planificación de trayectorias, de tal manera que el manipulador admita configuraciones que optimicen su capacidad para generar velocidades y fuerzas ó en el desempeño del control.

Elipsoide de velocidad

El Elipsoide de Velocidad (E_V) fue propuesto inicialmente para ayudar en la definición del índice de la manipulabilidad, pero también es de utilidad para definir otros índices de desempeño cinemático [25].

Partiendo de la relación establecida en la Ecuación 2.2.7:

$$V = \mathbf{J} \dot{q}$$

el E_V esta dado por el conjunto de todas la velocidades del efector final V que son realizables para las velocidades articulares \dot{q} que satisfacen $\|\dot{q}\| \leq 1$.

Dado que:

$$\|\dot{q}\|^2 = \dot{q}^T \dot{q} = \dot{V}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \dot{V}$$

entonces se tiene que las velocidades que forman parte del E_V son aquellas que satisfacen:

$$\dot{V}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \dot{V} \leq 1$$

Entre mayor sea el volumen del elipsoide del manipulador, este tendrá mayor capacidad de moverse a mayor velocidad. Para que las velocidades articulares cumplan con la condición establecida anteriormente, las mayores velocidades que el efector final puede alcanzar, se obtienen sobre el semieje mayor del elipsoide. Por el contrario, el efector final del manipulador se moverá con a baja velocidad en dirección del semieje menor del elipsoide. Por otro lado, si la forma del elipsoide se aproxima a la esfera, entonces el efector final se puede mover uniformemente en todas direcciones.

El resto de los índices de desempeño cinetostático presentados pueden calcularse directa o indirectamente a partir de los valores singulares de la matriz Jacobiana.

Número de condición

Se denomina como número de condición, en inglés Condition Number (C_N) de una matriz no singular Jacobiana relativo a la norma $\|\cdot\|$ al número:

$$C_N = k(\mathbf{J}) = \|\mathbf{J}\| \times \|\mathbf{J}^{-1}\| \quad (2.5.2)$$

La norma de \mathbf{J} puede ser cualquiera, como la norma de Frobenius:

$$\|\mathbf{J}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{J}_{ij}|^2}$$

donde n es la cantidad de filas y m la cantidad de columnas de la matriz \mathbf{J} .

Cuando C_N alcanza su mínimo valor (la unidad), se dice que la matriz Jacobiana es isotrópica. En este caso el elipsoide de velocidad se vuelve una esfera. Por otra parte, si el número de condición se vuelve infinito si la matriz Jacobiana es singular.

Mediante la implementación del C_N es posible:

- Medir la precisión del control del manipulador.
- Encontrar la cercanía puntos singulares o puntos isotrópicos, lo que conlleva a una mejor selección del modo de trabajo del manipulador.
- Optimizar el diseño y comparar arquitecturas de manipuladores.
- Determinar el área de trabajo útil de un manipulador.

Manipulabilidad cinemática

El índice de manipulabilidad cinemática, en inglés Kinematic Manipulability (K_M) tiene como propósito medir la capacidad de un robot, en cierta configuración, para generar velocidades en el efector final. Este índice de desempeño es proporcional al volumen del elipsoide de velocidad.

Para el caso general (incluyendo robots redundantes) la manipulabilidad esta definida de la siguiente manera:

$$K_M = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (2.5.3)$$

La matriz Jacobiana se puede descomponer en valores singulares, es decir:

$$\mathbf{J} = U_k \Sigma_k V_k^T$$

entonces, obteniendo los valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ de la matriz Σ_k , es posible obtener otra expresión para calcular K_M :

$$K_M = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m \quad (2.5.4)$$

Mientras mayor sea el valor de K_M representa una mayor capacidad de realizar movimientos en el efector final, pero en caso de que su valor sea igual a cero, esto significará que el manipulador se encuentra en una configuración singular.

Otro concepto de manipulabilidad que se trata es la manipulabilidad de fuerza, en inglés Force Manipulability (F_M) [25], el cual se encarga de medir la capacidad del robot, en una configuración dada, para ejercer fuerzas sobre un objeto en reposo a través de su efector final.

Para determinar K_M , se debe establecer un elipsoide de fuerza utilizando la relación que existe entre el vector de fuerzas en los actuadores $\boldsymbol{\tau}$ y el vector de fuerzas generadas en el efector final \mathbf{f} .

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}$$

Entonces, se tiene que las fuerzas del efector final que forman parte del elipsoide de fuerza son aquellas que satisfacen la siguiente condición:

$$\mathbf{f}^T \mathbf{J}\mathbf{J}^T \mathbf{f} \leq 1$$

El volumen del elipsoide de fuerza es inversamente proporcional a la manipulabilidad cinemática K_M , por lo tanto la manipulabilidad de fuerza es:

$$F_M = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}} = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m} \quad (2.5.5)$$

Esto significa que la dirección en la que el efector final puede ejercer mayor fuerza, es aquella en donde se puede generar menos velocidad.

Mínimo valor singular

Mediante la descomposición singular de valores de la matriz Jacobiana se puede demostrar que los valores singulares $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ corresponden a las magnitudes de los ejes principales del E_V . Dichos valores corresponden también a las raíces cuadradas de los valores propios de la matriz $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$.

Si el resultado de la matriz Jacobiana es singular, esto quiere decir que el manipulador ha alcanzado una configuración singular y al menos uno de los valores singulares es igual a cero, debido a esto se pierde al menos un grado de libertad, por lo cual, dichas configuraciones deben evitarse.

El índice de mínimo valor singular M_{VS} mide la cercanía de la configuración del manipulador a una configuración singular, debido a que indica de manera directa si la magnitud de alguno de los ejes principales del elipsoide esta a punto de anularse. Mientras mayor sea el valor del M_{VS} , mayor será el volumen del elipsoide de velocidad.

El identificar configuraciones singulares mediante C_N y K_M en algunos casos puede ser impreciso, dado que dependen de otros valores singulares y la disminución en un valor singular puede ser compensada por un incremento o decremento en otro valor singular.

2.5.3. Índices de desempeño dinámico

Cuando un manipulador robótico se encuentra en movimiento, éste estará sujeto a fuerzas inerciales, fuerzas centrífugas y de coriolis, y las fuerzas de la gravedad, dichas fuerzas son de carácter no lineal. Dado que la dinámica del manipulador establece la relación entre el movimiento del manipulador y estas fuerzas, los índices de desempeño dinámico tienen la función de evaluar la capacidad de efectuar fuerzas de un manipulador, el cual se encuentra en movimiento.

Los índices de desempeño dinámico que se emplearán para este trabajo son:

- Manipulabilidad dinámica.
- Índice de condicionamiento dinámico.

Manipulabilidad dinámica

El índice de manipulabilidad dinámica W_d mide la capacidad del manipulador para generar movimientos en el efector final tomando en cuenta la dinámica del mismo, es decir, las fuerzas y pares en los actuadores que originan dichos movimientos.

Si la relación de las velocidades articulares q y las velocidades de posición y orientación del efector final V esta dada por:

$$V = \mathbf{J}\dot{q}$$

entonces la derivada respecto al tiempo es:

$$\dot{V} = \mathbf{J}\ddot{q} + \dot{\mathbf{J}}\dot{q}$$

y agregando los vectores auxiliares de fuerza:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{M} = \tau - \mathbf{C} - \mathbf{G}$$

mediante operaciones algebraicas se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\dot{V} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\tilde{\tau}$$

Este índice trata de medir la capacidad de generar aceleraciones \dot{V} bajo la restricción en el vector de fuerzas $\tilde{\tau}$ mediante la siguiente desigualdad $\|\tilde{\tau}\| \leq 1$. La manipulabilidad dinámica esta definida de la siguiente manera:

$$W_d = \sqrt{\det \mathbf{J}(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{J}^T} \quad (2.5.6)$$

Otra manera de obtener W_d es mediante la descomposición en valores singulares, considerando:

$$\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} = U_d \Sigma_d V_d^T$$

obteniendo los valores singulares de Σ_d los cuales son dados por el vector valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ con los cuales se obtiene el valor del índice:

$$W_d = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m \quad (2.5.7)$$

Este índice mide la capacidad para producir aceleraciones arbitrarias para un dado conjunto de fuerzas en los actuadores.

Índice de condicionamiento dinámico

El propósito del índice de condicionamiento dinámico Wi es servir como medida de la distancia que existe entre la matriz de inercia del manipulador y una matriz de inercia isotropica, es decir, qué tan lejos se encuentra cierta posición del manipulador de una posición isotropica.

Este índice está definido de la siguiente manera:

$$Wi = \frac{1}{2} e_w^T \mathbf{W} e_w \quad (2.5.8)$$

donde e_w está definido como un vector compuesto de la matriz triangular superior de la matriz de error E_w dada por:

$$E_w = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{M} - \sigma \mathbf{I})$$

además, σ es un factor de escala definido de tal forma que la norma de la matriz de error E_w es mínima para un valor fijo de q , la cual esta dada por:

$$\sigma = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}^2)}{\text{tr}(\mathbf{M})}$$

En este índice, cuando los resultados son cercanos a cero quiere decir que se tienen las mejores configuraciones.

Capítulo 3

Estimación de la orientación y posición

3.1. Introducción

Para la estimación de la orientación y posición de un objeto existen una gran variedad métodos, algunos de estos emplean sistemas de visión computacional (SVC) y sistemas de posicionamiento global, en inglés Global Positioning System (GPS), los SVC son eficientes, pero por lo regular son sistemas demasiados costosos, tienen limitaciones de iluminación y requieren de infraestructuras especiales, el GPS presenta la gran desventaja de no poder ser empleado en interiores. Por otro lado, existen métodos que incluyen sensores de unidad de medición inercial (IMU) como sensor principal, estos representan una buena alternativa dado que son de bajo costo, fáciles de implementar en exteriores e interiores, no requieren una infraestructura especial y son adecuados para ser montados en el cuerpo humano o en alguna herramienta de trabajo.

La estimación de la orientación consiste identificar que tanto ha rotado o girado un objeto respecto una trama de referencia conocida, gracias a las mediciones de velocidad angular proporcionadas por sensores o transductores. Existen diferentes técnicas para dicha estimación, en el presente trabajo se realizará una comparación en algunas de estas técnicas.

Por otro lado, la estimación de la posición consiste en identificar cuanto ha cambiado o

desplazado un objeto, respecto a la trama de referencia de la Tierra (*Earth-Fixed frame - EFix*), de su posición inicial a una posición final, en base a las mediciones de aceleración proporcionadas por sensores.

3.2. Sensores IMU

Los sensores IMU (*Inertial Measurement Unit*) se encuentran compuestos por acelerómetros y giroscopios, por lo que son capaces de medir algunas magnitudes físicas para 2 o 3 ejes del espacio de trabajo, sin importar referencias externas como interferencias de iluminación o fricción. El movimiento que detectan los sensores IMU esta directamente relacionado al objeto en que están montados.

Los IMU son empleados para diferentes tipos de aplicaciones, algunas de ellas son: sistema de captura en tiempo real, análisis de la marcha para propósitos de rehabilitación, aplicaciones biomédicas, aplicaciones para vehículos aéreos no tripulados, etcétera.

Acelerómetro

Es un dispositivo que mide la vibración o la aceleración del movimiento de una estructura mostrando sus lecturas en m/s^2 o en fuerzas “ G ”. Son capaces de medir la aceleración estática (gravedad) y dinámica (inicio y fin de movimiento). Una de sus mayores aplicaciones es la detección de inclinación.

Giroscopio

Es un dispositivo que mide la velocidad angular de un objeto alrededor de un eje. La lectura se muestra en unidades de Revolución Por Minuto (RPM) o grados sobre segundo ($^{\circ}/s$).

3.2.1. Calibración y conversión de unidades

Todo sensor tiene como característica la presencia de una desviación de cero u *offset* (d_o) en sus mediciones (l_{med}), este valor debe ser removido para obtener mediciones confiables (l_{cal}), o de lo contrario el manejo de estos datos causará errores en el procesamiento de sus datos, esta operación recibe el nombre de calibración. Esto es:

$$l_{cal} = l_{med} - d_o \quad (3.2.1)$$

Las ecuaciones 3.2.2 y 3.2.3 representarán las lecturas del acelerómetro y giroscopio con calibración y conversión de unidades respectivamente.

$${}^f a_t = [{}^f a_{x_t} \quad {}^f a_{y_t} \quad {}^f a_{z_t}] \quad (3.2.2)$$

$${}^f \omega_t = [{}^f \omega_{x_t} \quad {}^f \omega_{y_t} \quad {}^f \omega_{z_t}] \quad (3.2.3)$$

3.3. Estimación de la orientación

La orientación o inclinación en tres dimensiones de un objeto, puede representarse mediante los ángulos de Tait-Bryan: *roll* (ϕ), *pitch* (ρ) y *yaw* (ψ) (Figura 3.1), los cuales representan un giro sobre el eje x , y y z respectivamente.

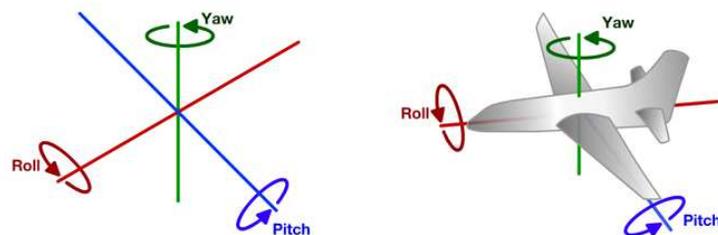


Figura 3.1: Representación de los ángulos de Tait-Bryan.

Estos tres ángulos se pueden estimar mediante los datos procesados de los sensores que componen al IMU, a continuación se describen algunas de estas técnicas de estimación de orientación.

3.3.1. Acelerómetro

La aplicación del acelerómetro como sensor de inclinación, se debe que al momento de inclinarlo, la aceleración de gravedad (g) se reparte entre los ejes x , y y z , generando así componentes de aceleración en cada eje, los cuales se llamarán $^f a_x$, $^f a_y$ y $^f a_z$ respectivamente, mediante las cuales es posible estimar los ángulos de inclinación que tiene el sensor con respecto a g (3.3.2 y 3.3.1).

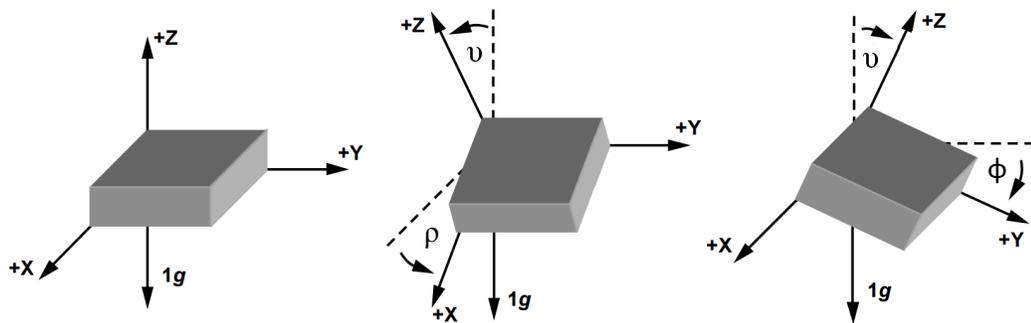


Figura 3.2: Ángulos de inclinación del acelerómetro.

En la Figura 3.2, se pueden observar los ángulos ρ y ϕ , los cuales se calculan con las Ecuaciones 3.3.1 y 3.3.2, respectivamente. El ángulo v no deberá confundirse con el ángulo ψ , ya que no representa giro respecto al eje z , sino el ángulo entre g y el eje z .

$$\rho = \arctan \left(\frac{-^f a_x}{\sqrt{{^f a_y}^2 + {^f a_z}^2}} \right) \quad (3.3.1)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{^f a_y}{\sqrt{{^f a_x}^2 + {^f a_z}^2}} \right) \quad (3.3.2)$$

A continuación se describen las ventajas y desventajas de usar el acelerómetro para estimar orientación.

❖ Ventajas:

- Mientras se encuentre estático, los cálculos de los ángulos son precisos.

❖ Desventajas:

- La respuesta de las mediciones es lenta, por lo que al ocurrir un cambio brusco, el calculo no será el esperado.
- Es susceptible al ruido (vibración) debido a su sensibilidad.
- No se puede calcular el ángulo *yaw* (ψ).

3.3.2. Giroscopio

Con un giroscopio, dado que este sensor mide la velocidad angular (ω) en $^{\circ}/s$ de cada eje, mediante la integración de sus lecturas, es posible estimar los tres ángulos de orientación (3.3.3).

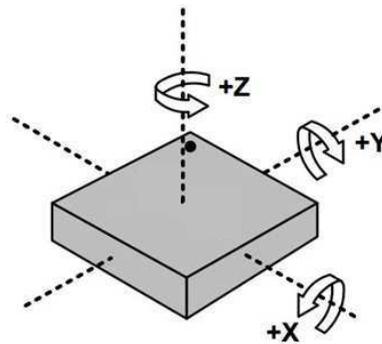


Figura 3.3: Representación de un giroscopio.

$$\phi_t = \phi_{t-1} + \int \omega_{x_t} \cdot dt, \quad \rho_t = \rho_{t-1} + \int \omega_{y_t} \cdot dt, \quad \psi_t = \psi_{t-1} + \int \omega_{z_t} \cdot dt \quad (3.3.3)$$

A continuación se describen las ventajas y desventajas de usar el giroscopio para estimar orientación.

❖ Ventajas:

- Su respuesta es rápida, por lo que es ideal para movimientos bruscos.
- Es posible estimar los tres ángulos de orientación.

❖ Desventajas:

- La respuesta de las mediciones es lenta, por lo que al ocurrir un cambio brusco, el calculo no será el esperado.
- Dado que la respuesta es muestreada, la integración no es continua sino discreta, por lo que el resultado de la integración no es preciso, además el error de integración se acumula si este se encuentra estático (comúnmente denominado como derrape).

Lo acelerómetros y giroscopios por sí solos, no son confiables para la estimación de orientación, esto se debe que el giroscopio es confiable a corto plazo (cambios rápidos), mientras que el acelerómetro lo es a largo plazo (cambios lentos).

Entonces, para aprovechar cada una de las ventajas que los sensores tienen individualmente, se emplean técnicas de fusión de sensores con la finalidad de mejorar los resultados. Existen varias alternativas entre las cuales destacan el uso de:

- Filtro de Kalman (FK).
- Filtro Complementario (FC).
- Filtro Complementario Explícito (FCE).

3.3.3. Filtro Kalman

El *FK* es un algoritmo recursivo que se encarga de tratar de estimar el estado del sistema, basado en los estados actuales y anteriores mediante una etapa de predicción y otra de corrección. Para hacer esto es necesario conocer el ruido de las mediciones así como el ruido del sistema o proceso (propiedades físicas del sistema) [2, 5, 6, 8–11, 19, 21].

Las entradas del *FK* son los ángulos estimados a partir del acelerómetro y la velocidad angular medida por el giroscopio, con los cuales se podrán estimar los ángulos ϕ y ρ . El filtro es aplicado para cada ángulo a estimar.

Las siguiente fórmulas describen el *FK* discreto:

Predicción

El estado estimado \hat{x}_k esta compuesto por:

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}_k \quad (3.3.4)$$

donde θ es ángulo obtenido por el *FK* (dependiendo del que se este estimando), mientras que $\dot{\theta}_b$ es el sesgo calculado por las mediciones del acelerómetro y giroscopio.

Se estima el estado actual \hat{x}_{ak} en base al estado estimado previo y las lecturas del giroscopio, es decir:

$$\hat{x}_{ak} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (3.3.5)$$

$$\hat{x}_{ak} = \begin{bmatrix} \theta_g \\ \dot{\theta}_{gb} \end{bmatrix}_k$$

$$u = {}^f \omega_k \quad (3.3.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

donde \hat{x}_{k-1} es el estado estimado anterior, u_k es la entrada del filtro en este caso velocidad angular medida por el giroscopio ${}^f\omega_k$ (3.3.6), A es el modelo de transición de estados (3.3.7), B es la matriz de entradas (3.3.8), dt es el tiempo de muestreo y θ_g y $\dot{\theta}_{gb}$ son el ángulo y el sesgo estimados a partir del giroscopio.

Lo siguiente es estimar la matriz de covarianza del error P_k :

$$P_k = AP_{k-1}A^T + Q_k \quad (3.3.9)$$

donde P_{k-1} es la matriz de covarianza del error anterior y Q_k es la matriz de covarianza del ruido del proceso y esta dada por 3.3.10.

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_\theta & 0 \\ 0 & Q_{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

Q_θ es la varianza del acelerómetro, mientras que $Q_{\dot{\theta}_b}$ es la varianza del sesgo. En el caso de que el ángulo estimado comience a "derrapar" (acumular error), se deberá aumentar el valor de $Q_{\dot{\theta}_b}$, pero si el ángulo estimado es de respuesta lenta, se deberá disminuir el valor de Q_θ .

Corrección

Se calcula la diferencia entre estado actual observado x_k y el estado actual estimado \hat{x}_{ak} , es decir, la diferencia entre los ángulos estimados por el acelerómetro (θ_a) y el giroscopio (θ_g). A esta diferencia también se le conoce como innovación (3.3.11).

$$y_k = (Hx_k + V_k) - H\hat{x}_{ak} \quad (3.3.11)$$

$$x_k = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \dot{\theta}_{ab} \end{bmatrix}_k \quad (3.3.12)$$

donde H es el modelo de observación o sensibilidad de la medición, el cual es usado para mapear el estado actual estimado en el estado actual de la medición del acelerómetro y esta dado por (3.3.13), por lo tanto no es un matriz, V_k es el ruido de la medición del acelerómetro.

$$H = [1 \quad 0] \quad (3.3.13)$$

El siguiente paso es calcular la matriz de covarianza de la innovación S_k :

$$S_k = HP_kH^T + R_k \quad (3.3.14)$$

donde R_k es la de varianza del ruido de la medición V_k , por lo tanto no es una matriz, si este valor es muy alto, el filtro responderá de manera lenta, pero si el valor es muy pequeño, se presentará ruido en la salida. Existen diferentes maneras de encontrar una relación entre los valores R_k , Q_θ y $Q_{\dot{\theta}_b}$, pero están fuera del aspecto de este trabajo.

Ahora se calcula la ganancia de Kalman K_k :

$$K_k = S_kH^T S_k^{-1} \quad (3.3.15)$$

Dicha ganancia es usada para indicar que tanto se confía en la innovación.

Después se procede a actualizar (o corregir) el estado estimado \hat{x}_k , el cual tendrá el nuevo ángulo estimado θ , de acuerdo a 3.3.4.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ak} + K_k y_k \quad (3.3.16)$$

Por último se actualiza la matriz P_k para el siguiente ciclo.

$$P_k = (I - K_kH) P_k \quad (3.3.17)$$

Algoritmo del filtro Kalman

1. Inicializar en ceros las matrices \hat{x}_{k-1} y P_{k-1} .
2. Se estima el estado actual \hat{x}_{ak} .
3. Se estima la matriz de covarianza del error P_k .
4. Se calcula la ganancia de Kalman K_k .

5. Se compensa la diferencia entre la medición y la predicción \hat{x}_k .
6. Se calcula la matriz de covarianza del error P_k .
7. Volver al paso 2.

3.3.4. Filtro complementario

El *FC* es una de la opciones más populares al estimar ángulos de orientación debido a que su complejidad computacional es menor y por lo mismo es capaz de procesar mejor los datos en línea, además, la diferencia de resultados respecto al *FK* es mínima y aceptable [17], pero, su resultado no es tan aproximado como con *FK*.

El *FC* consta de dos filtros, tal y como se muestra en la Figura 3.4, ambos filtros son de primer orden y las entradas son los datos de cada sensor, mientras que las salidas son los ángulos estimados con ambos sensores.

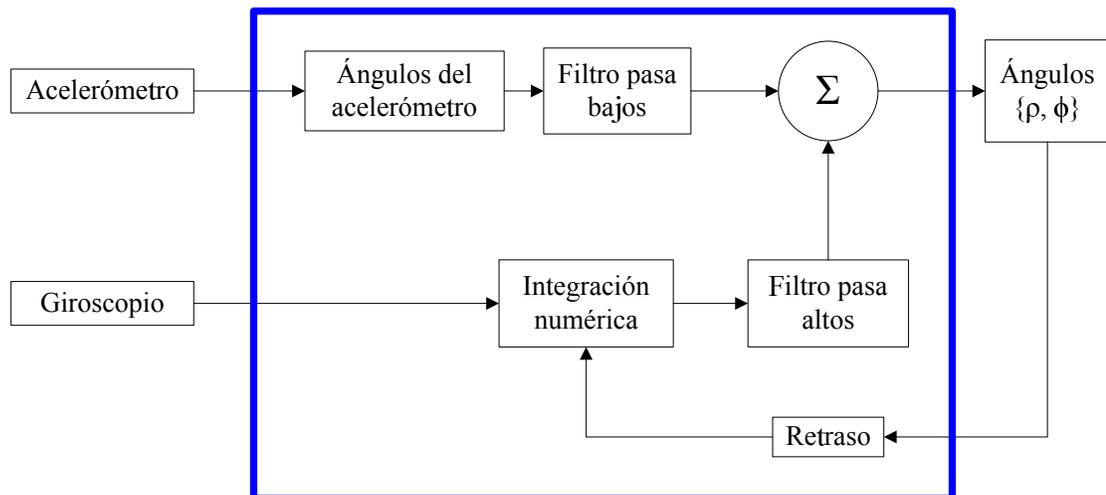


Figura 3.4: Diagrama de bloques del *FC*.

El Filtro Pasa Bajos (*FPB*) mantiene las lecturas de variación lenta o casi nula del acelerómetro, mientras que el Filtro Pasa Altas (*FPA*) mantiene la lecturas de variación rápida del

giroscopio. La ecuación que representa al FC es la siguiente:

$$\theta_e = [\alpha (\theta_{e-1} + \int \omega_t \cdot dt)] + (1 - \alpha) \theta_a \quad (3.3.18)$$

Donde θ_e es el ángulo estimado por el FC , θ_{e-1} es el ángulo estimado anterior, $\alpha \in (0, 1)$ es coeficiente del FC , $\int \omega_k$ es la velocidad angular medida por el giroscopio, dt es tiempo de muestreo y θ_a es el ángulo estimado a partir de las lecturas del acelerómetro.

El valor de α se selecciona en base a una constante de tiempo ζ , el cual define la confianza entre los valores del acelerómetro y el giroscopio.

$$\zeta = \frac{\alpha \cdot dt}{1 - \alpha} \quad (3.3.19)$$

$$\alpha = \frac{\zeta}{\zeta \cdot dt} \quad (3.3.20)$$

Un valor alto de α integra lectura del giroscopio por más tiempo, mientras que un valor mas pequeño fusiona la señal del acelerómetro con mayor rapidez.

3.3.5. Filtro complementario explícito

El FCE es una versión modificada del FC , entre sus características principales están el uso de la representación en cuaterniones para estimación de los ángulos de ρ y ϕ , además de incorporar dinámicas modeladas que perturben al sistema, debido a esto, este filtro también es conocido como filtro complementario no lineal [7, 18–20]. En la Figura 3.5 se muestra la implementación del FCE .

Una breve reseña de lo que es la representación en cuaterniones se muestra en el Apéndice B.1.

En base al Apéndice B.1, definiremos al cuaternión que describe la orientación de la trama global o de la Tierra E a la trama del sensor f como: ${}^f_E \hat{q}_{est,t}$, y el cual está representado en la

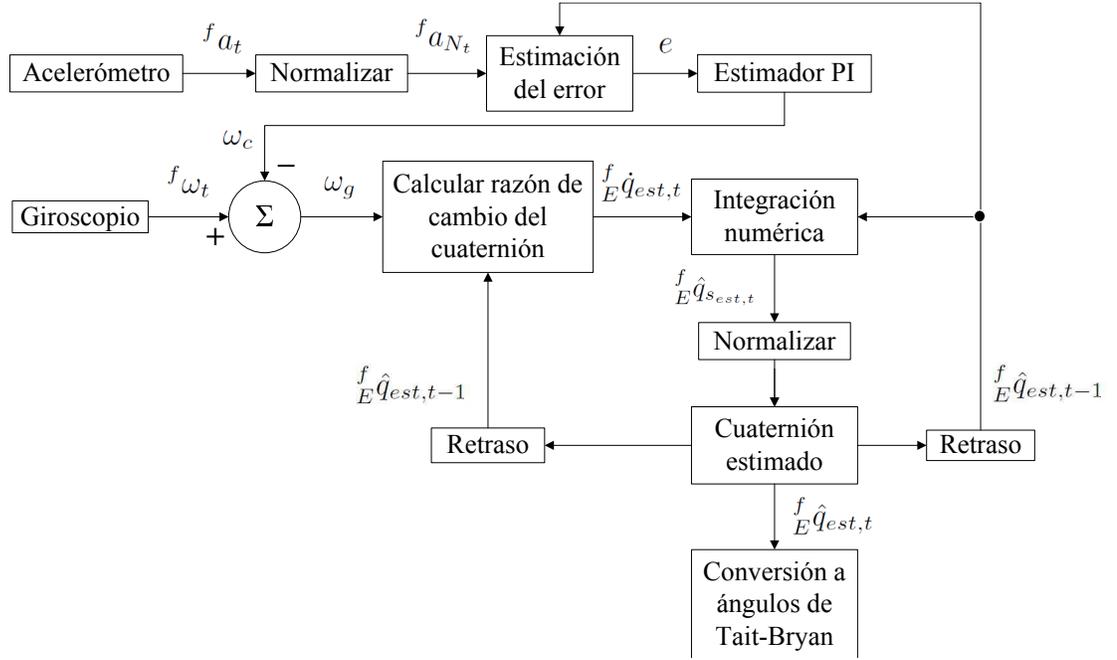


Figura 3.5: Diagrama de bloques del *FCE*.

Ecuación 3.3.21, y a la matriz de cosenos directores (*DCM*) de la trama E a la trama f , como: ${}^f_E R$, la cual esta representada en la Ecuación 3.3.22.

$${}^f_E \hat{q}_{est,t} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]_t \quad (3.3.21)$$

$${}^f_E R = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 + q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.22)$$

Las diferentes etapas que componen al *FCE* se describen a continuación.

Estimación del error

La estimación del error e_t que se menciona en la Figura 3.5, se realiza entre la dirección de gravedad estimada \mathbf{v} y gravedad la actual normalizada ${}^f a_{N_t}$ medida por el acelerómetro, es decir:

$$e_t = \mathbf{v}_{t-1} \times {}^f a_{N_t} = \mathbf{v}_{t-1} \times \frac{{}^f a_t^T}{\|{}^f a_t^T\|} \quad (3.3.23)$$

donde ${}^f a_t$ esta dada por las lecturas del acelerómetro en unidades “G” de cada eje (3.2.2) y \mathbf{v} esta dado por la multiplicación de ${}^f_E R$ y el vector de gravedad de la Tierra g_T (3.3.24).

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = {}^f_E R \cdot g_T &= \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 + q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ 2(q_3q_4 + q_1q_2) \\ q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Estimador PI - Término de retroalimentación

Una vez se ha calculado el error e_t , este pasará por un estimador PI, en el cual su salida esta dada por la Ecuación 3.3.25.

$$\omega_c = K_p \cdot e_t + K_i [e_{t-1} + e_{t.dt}] \quad (3.3.25)$$

donde ω_c es el término de retroalimentación que se aplica a las lecturas del giroscopio de cada eje ${}^f \omega_t$ (3.2.3), para obtener ω_g (3.3.26) el cual es el vector de las lecturas del giroscopio corregidas (3.3.27).

$$\omega_g = {}^f \omega_t - \omega_c \quad (3.3.26)$$

$$\omega_g = [\omega_{x_g} \quad \omega_{y_g} \quad \omega_{z_g}] \quad (3.3.27)$$

La ganancia proporcional K_p y la ganancia integral K_i son los parámetros ajustables de este filtro y son los encargados de eliminar los errores de sesgo de las lecturas del giroscopio, una elección inapropiada de estos valores conducirán a que el filtro se vuelva críticamente estable o inestable. La selección de estos valores se realiza en base al sesgo o la medición del máximo error de las lecturas del giroscopio por cada eje ω_b , una revisión mas detallada de la selección de dichos parámetros se puede consultar en [7].

Razón de cambio del cuaternión

La razón de cambio del cuaternión, se obtiene mediante las siguientes formulas:

$$\begin{aligned}
 {}^f_E\dot{q}_{est,t} &= \frac{1}{2} {}^f_E\hat{q}_{est,t-1} \otimes \omega_G = \frac{1}{2} {}^f_E\hat{q}_{est,t-1} \otimes [0 \ \omega_g] \\
 {}^f_E\dot{q}_{est,t} &= \frac{1}{2} {}^f_E\hat{q}_{est,t-1} \otimes [0 \ \omega_g] \\
 &= \frac{1}{2} [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]_{t-1} \otimes [0 \ \omega_{x_g} \ \omega_{y_g} \ \omega_{z_g}]
 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Estimación del cuaternión

Con el nuevo valor de ${}^f_E\dot{q}_{est,t}$, solo resta calcular la nueva estimación del cuaternión ${}^f_E\hat{q}_{s_{est,t}}$ (Ecuación 3.3.29).

$${}^f_E\hat{q}_{s_{est,t}} = {}^f_E\hat{q}_{est,t-1} + {}^f_E\dot{q}_{est,t} \cdot dt \tag{3.3.29}$$

Por último se normaliza el valor de ${}^f_E\hat{q}_{s_{est,t}}$.

$${}^f_E\hat{q}_{est,t} = \frac{{}^f_E\hat{q}_{s_{est,t}}}{\left\| {}^f_E\hat{q}_{s_{est,t}} \right\|} \tag{3.3.30}$$

Algoritmo del filtro complementario explícito

El algoritmo se puede resumir de la siguiente manera:

1. Se definen Kp y Ki y se inicializa ${}^f_E\hat{q}_{est,t-1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$.
2. Se normalizan los datos del acelerómetro.
3. Se estima la dirección de la gravedad v .
4. Se calcula el error e .
5. Se corrigen las mediciones del giroscopio, para así obtener ω_g

6. Se calcula la razón de cambio del cuaternión ${}^f_E\dot{q}_{est,t}$.
7. Se integra ${}^f_E\dot{q}_{est,t}$ para obtener ${}^f_E\hat{q}_{s_{est},t}$.
8. Se normaliza ${}^f_E\hat{q}_{s_{est},t}$.
9. Volver al paso 2.

3.3.6. Comparación de métodos

Con el fin de verificar cada uno de los métodos de estimación de orientación descritos anteriormente, se efectuó un prueba la cual consistió en rotar ± 90 grados solo uno de los ejes del sensor IMU montado sobre un objeto, para posteriormente con los datos adquiridos realizar una comparación.

En la Figura 3.6, se muestran los resultados obtenidos al procesar dichos datos con cada uno de los métodos de estimación de orientación.

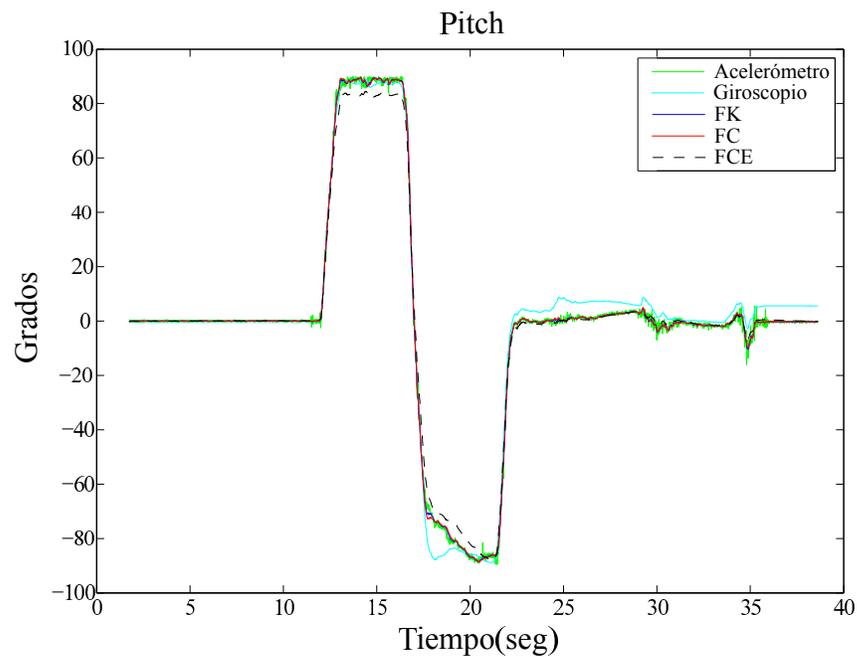


Figura 3.6: Rotación sobre el eje Y (*pitch*) es de ± 90 grados.

De los resultados de la Figura 3.6, se observa que:

- El resultado a partir del acelerómetro presenta demasiado ruido.
- El resultado a partir del giroscopio tiende a acumular error con el transcurso del tiempo.
- Los resultados del *FK* y el *FC* son similares.
- El resultado del *FCE* se parece al del giroscopio, pero sin la acumulación de error, además de presentar menos ruido que el *FK* y el *FC*

3.4. Estimación de la posición

Dado que el acelerómetro mide la acción de la gravedad (aceleración) en cada eje, entonces mediante una doble integración numérica de sus lecturas se puede estimar el desplazamiento en el espacio del sensor alrededor del tiempo.

Definiendo a a_k como la aceleración discreta y a dt como el tiempo de muestreo, entonces la velocidad discreta V_k obtenida a partir del método de integración de Euler es:

$$V_k = V_{k-1} + a_k dt$$

Ahora la posición discreta P_k se obtiene a partir de V_k , esto es:

$$P_k = P_{k-1} + V_k dt$$

Pero, debido a que las lecturas obtenidas con el acelerómetro cuentan con ruido y componentes gravitacionales añadidas, esto resultará en un error demasiado grande a la salida de la doble integración.

En la Figura 3.7 se muestran los pasos del algoritmo para la estimación de la posición.

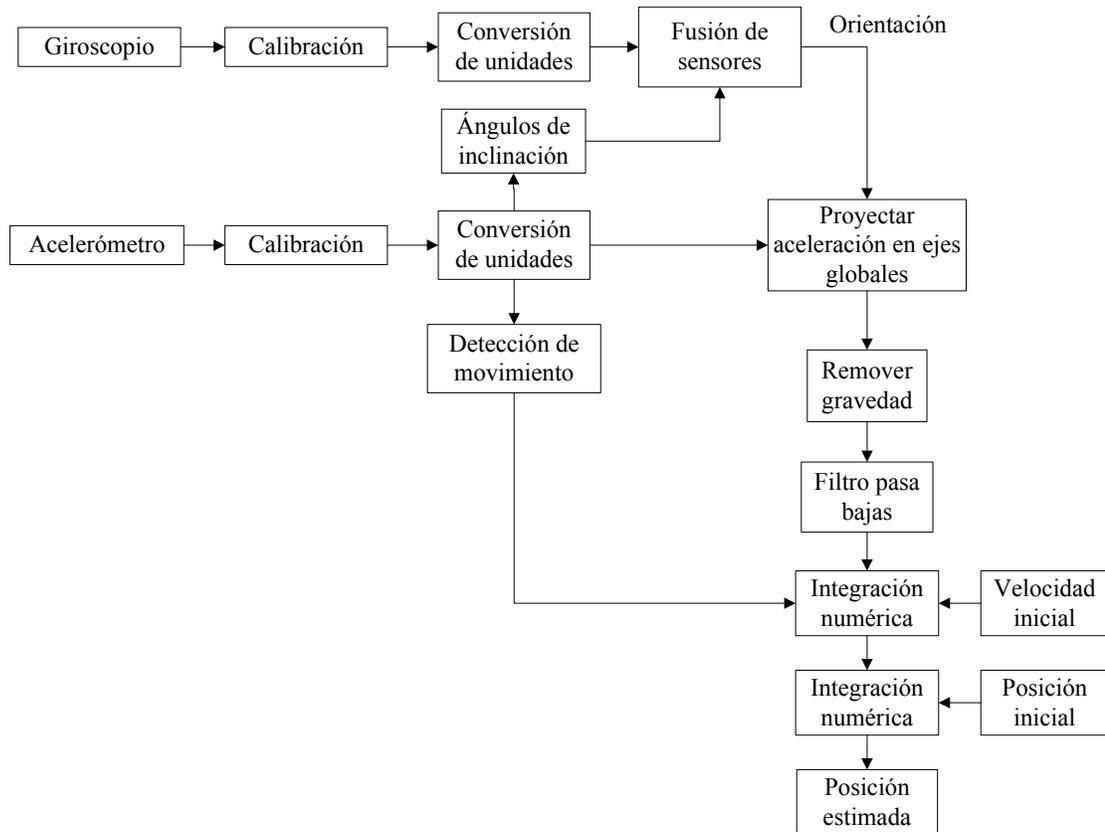


Figura 3.7: Pasos para la estimación de posición.

3.4.1. Calibración y conversión de unidades

La calibración y conversión de unidades es de vital importancia, dado que los datos medidos del sensor, también llamados datos “crudos”, aun no se encuentran listos para su procesamiento.

3.4.2. Fusión de sensores

Mediante la fusión de sensores se puede obtener una mejor de estimación de los ángulos de orientación. Para el algoritmo de estimación de la posición se emplea el *FCE* descrito en la Sección 3.3.5, debido a que nos facilita una representación en cuaterniones que se emplea en la Sección 3.4.4.

3.4.3. Detección de movimiento

Esta etapa se encarga de detectar cuando hay suficiente aceleración en el IMU para ser considerada un movimiento en el mismo [3, 27, 28]. El funcionamiento es descrito en la Figura 3.8.

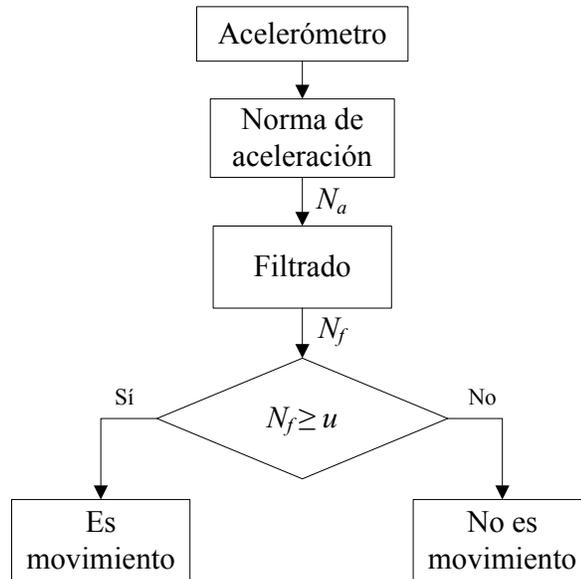


Figura 3.8: Detección de movimiento.

En cada muestra que se tome, se deberá calcular la norma de aceleración N_a , el cual se obtiene mediante la suma de los cuadrados de las aceleraciones leídas de cada eje.

$$N_a = \sqrt{f a_x^2 + f a_y^2 + f a_z^2} \quad (3.4.1)$$

Después N_a pasará por una etapa de filtrado, que consisten en dos filtros Butterworth, un *FPA* para eliminar constantes de directa y un *FPB* para eliminar altas frecuencias, para así obtener una norma filtrada N_f .

Por último si N_f supera un valor constante de umbral u , el algoritmo dará como resultado un 0 para indicar que existe movimiento, de lo contrario resultará en un 1 para indicar que no

hay movimiento alguno.

$$m_d = \begin{cases} 0, & N_f \geq u \\ 1, & N_f < u \end{cases} \quad (3.4.2)$$

El valor de umbral u es seleccionado a partir de los valores de N_f donde se considere que no exista movimiento. En la Figura 3.9 se muestra un ejemplo de la detección de movimiento, donde primero se muestra la norma de aceleración calculada, en la segunda gráfica se muestra la norma de aceleración filtrada y el valor de umbral que se aplicó para este ejemplo, y en la tercera gráfica se observa la detección de movimiento obtenida a partir de la segunda gráfica.

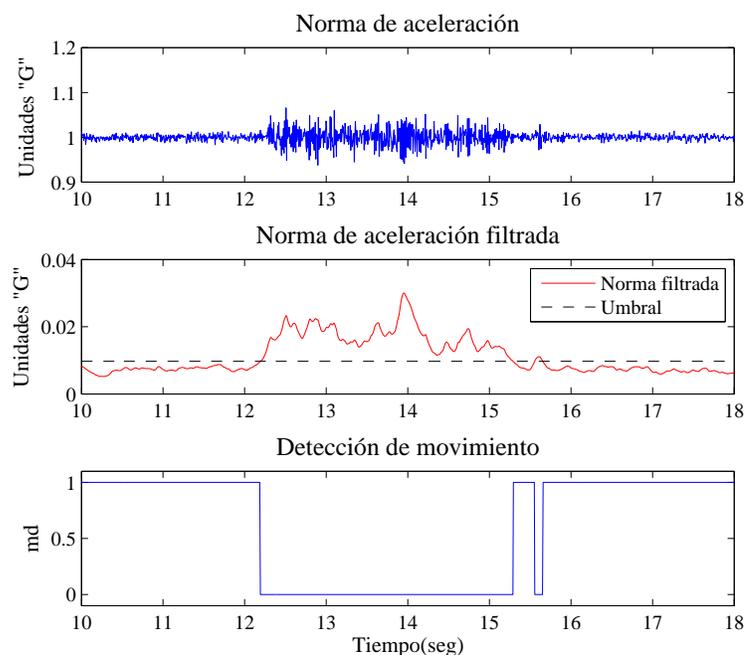


Figura 3.9: Ejemplo de la detección de movimiento.

3.4.4. Proyección de las aceleraciones en los ejes globales y remoción de gravedad

Las aceleraciones medidas en cada eje por el IMU ${}^f a_t$ (3.2.2) esta en la trama de referencia del sensor f , por lo que si continuáramos manejando estas lecturas, obtendremos un error considerable en la estimación de la velocidad \hat{v}_t y la posición \hat{r}_t . Los resultados que buscamos no

se encuentran en la trama f , se encuentran en la trama de referencia global E (Figura 3.10). Entonces las aceleraciones medidas deberán ser rotadas de la trama f a la trama E para su procesamiento.

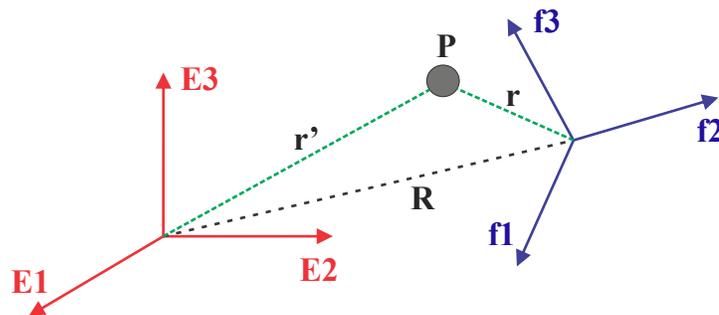


Figura 3.10: Trama de referencia de la tierra y del sensor.

Para pasar de la trama f a la trama E (${}^E A_t$), se emplea la Ecuación 3.4.4.

$${}^f A_t = [0 \quad {}^f a_t] \quad (3.4.3)$$

$${}^E A_t = {}^f_E \hat{q}_{est,t} \otimes {}^f A_t \otimes {}^f_E \hat{q}_{est,t}^* \quad (3.4.4)$$

$${}^E A_t = [0 \quad {}^E a_t] \quad (3.4.5)$$

$${}^E a_t = [{}^E a_{x_t} \quad {}^E a_{y_t} \quad {}^E a_{z_t}] \quad (3.4.6)$$

donde ${}^f_E \hat{q}_{est,t}$ es la orientación del objeto representada en cuaterniones y ${}^f_E \hat{q}_{est,t}^*$ su conjugado.

Una vez obtenido ${}^E a_t$, se le restará el vector de efectos gravitacionales de la trama E g_T para obtener la aceleración estimada \hat{a}_t .

$$\hat{a}_t = {}^E a_t - g_T$$

$$\hat{a}_t = [{}^E a_{x_t} \quad {}^E a_{y_t} \quad {}^E a_{z_t}] - [0 \quad 0 \quad 1] \quad (3.4.7)$$

$$\hat{a}_t = [\hat{a}_{x_t} \quad \hat{a}_{y_t} \quad \hat{a}_{z_t}]$$

3.4.5. Filtrado de ruido de alta frecuencia

Los datos de \hat{a}_t deberán pasar por un *FPB* Butterworth, con el fin de eliminar los ruidos en altas frecuencias, las aceleraciones filtradas serán llamadas \hat{a}_{f_t} .

En la Figura 3.11 se presentan tres gráficas, donde en cada una se realiza una comparación entre los datos de aceleración filtrados y sin filtrar para cada uno de los ejes.

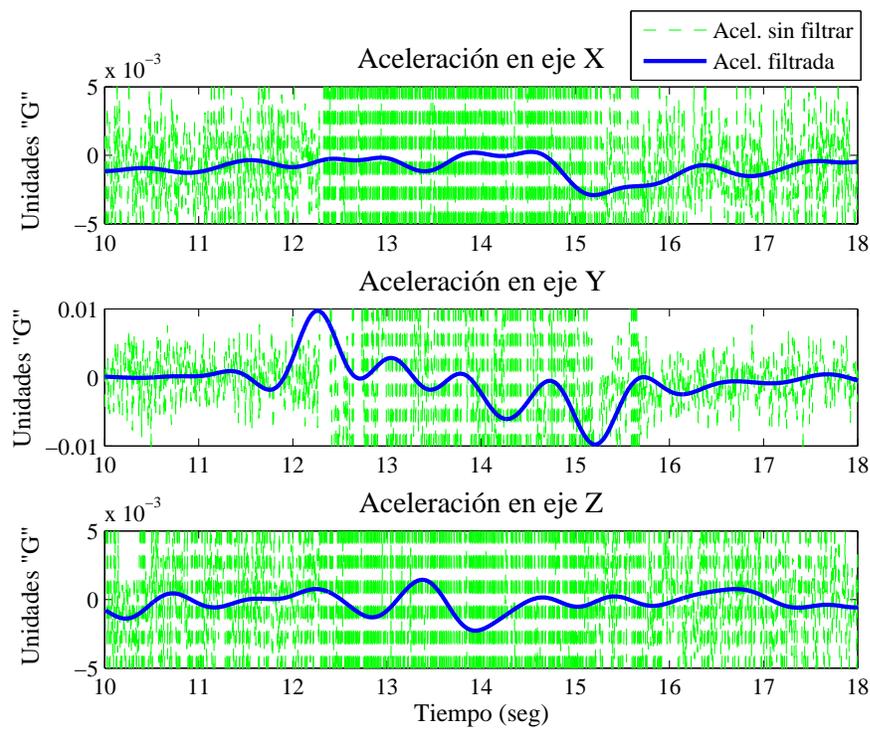


Figura 3.11: Comparación entre aceleraciones estimadas filtradas y sin filtrar.

3.4.6. Estimación de la velocidad y posición

Para la estimación de la velocidad, se integra numéricamente, por el método de Euler, la aceleración estimada filtrada \hat{a}_{f_t} .

$$v_{e_t} = v_{e_{t-1}} + \hat{a}_{f_t} \cdot dt \quad (3.4.8)$$

A la Ecuación 3.4.8, durante cada iteración se le añadió la condición de detección de movimiento descrita en la Sección 3.4.3, la cual quedará de la siguiente forma:

$$v_{et} = \begin{cases} 0, & m_d = 1 \\ v_{et}, & m_d = 0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Además, mediante la condición de detección de movimiento se puede calcular un valor de corrección de velocidad v_{ct} , el cual consiste en el error de integración acumulado por la velocidad promedio, el cual se obtiene con la Ecuación 3.4.10 [27, 28].

$$v_{ct} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=m_o}^{m_f} v_{e(i)_t}}{(m_o - m_f)}, & m_d = 0 \\ 0, & m_d = 1 \end{cases} \quad (3.4.10)$$

donde m_o es el índice del vector m_d que indica el inicio de un movimiento y m_f es el índice del vector m_d que indica el fin de un movimiento [27].

Entonces la velocidad estimada \hat{V}_t esta dada por la Ecuación 3.4.11.

$$\hat{V}_t = v_{et} - v_{ct} \quad (3.4.11)$$

donde:

$$\hat{V}_t = [\hat{V}_{x_t} \quad \hat{V}_{y_t} \quad \hat{V}_{z_t}]$$

Finalmente, para la estimación de la posición \hat{P}_t , se integra numéricamente, por el método de Euler, la velocidad estimada \hat{V}_t , como se observa en la Ecuación 3.4.12.

$$\hat{P}_t = \hat{P}_{t-1} + \hat{V}_t \cdot dt \quad (3.4.12)$$

donde:

$$\hat{P}_t = [\hat{P}_{x_t} \quad \hat{P}_{y_t} \quad \hat{P}_{z_t}]$$

Capítulo 4

Casos de estudio

4.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados experimentales obtenidos de los casos de estudio propuestos para la validación de la metodología propuesta en la Sección 1.5. A continuación se presentan los casos de estudio planteados:

1. Casos de estimación de posición y orientación.
2. Caso de generación de trayectoria para un manipulador predeterminado.

Para cada uno de los casos de estudio, se empleó la técnica de orientación del filtro complementario explícito, dado que se obtuvieron mejores resultados al momento de estimar velocidad y posición.

Además, el sensor IMU junto con su tarjeta de adquisición de datos, fueron montados en una caja de plástico para facilitar su desplazamiento sobre la mesa de trabajo, tal y como se muestra en la Figura 4.1. A dicha caja se le marcaron guías de referencia, con el fin de asegurar que al realizar el desplazamiento se respetará la o las líneas guía de la trayectoria a seguir.

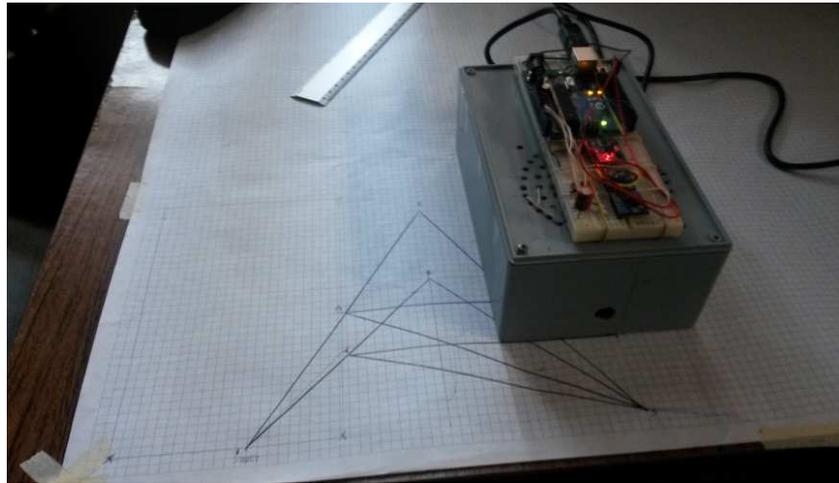


Figura 4.1: Sensor IMU y tarjeta de adquisición de datos

4.2. Casos de estimación de posición y orientación

En los siguientes casos se realizaron diferentes trayectorias, las cuales se componen de movimientos individuales o simultáneos en los ejes del espacio de trabajo, con el fin de validar el algoritmo de procesamiento y estimación de orientación, velocidad y posición de acuerdo a la metodología propuesta en 1.5 y la cual es descrita en la Sección 3. Los únicos datos de entrada que requiere el algoritmo son los datos sin procesar adquiridos por el acelerómetro y giroscopio, además del tiempo de muestreo medido por la tarjeta de adquisición de datos empleada.

4.2.1. Movimiento en un sólo eje

Los movimientos realizados de manera individual para cada uno de los ejes trabajo son en línea recta de 10 cm y con orientación constante normal a la mesa de trabajo. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

Movimiento en eje X

La estimación en orientación para el movimiento de 10 cm sobre el eje X se puede observar en la Figura 4.2, en el cual, de acuerdo a las técnicas de fusión de sensores, los resultados obtenidos

para los ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ , correspondientes al movimiento angular sobre los ejes X y Y respectivamente, muestran valores muy cercanos a cero, por otro lado, en las Figuras 4.3 y 4.4 se pueden observar las estimaciones de velocidad y posición. En la Figura 4.5 se realiza una comparación entra la posición estimada por el algoritmo y la posición deseada. El resultado de la posición final es de 7.879 cm, por lo que se tiene un error de 2.121 cm.

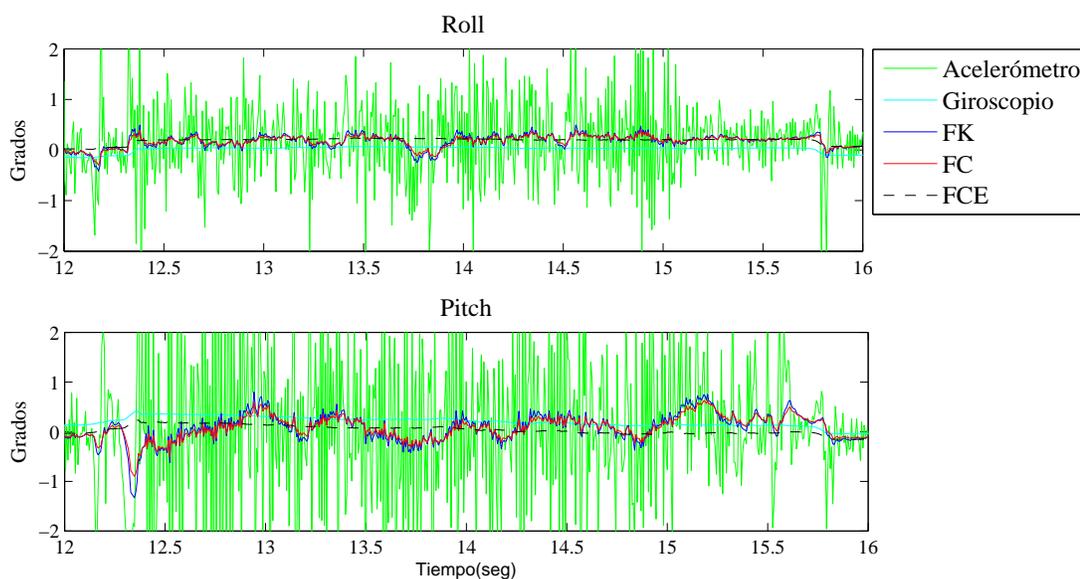


Figura 4.2: Orientación estimada para el movimiento en el eje +X.

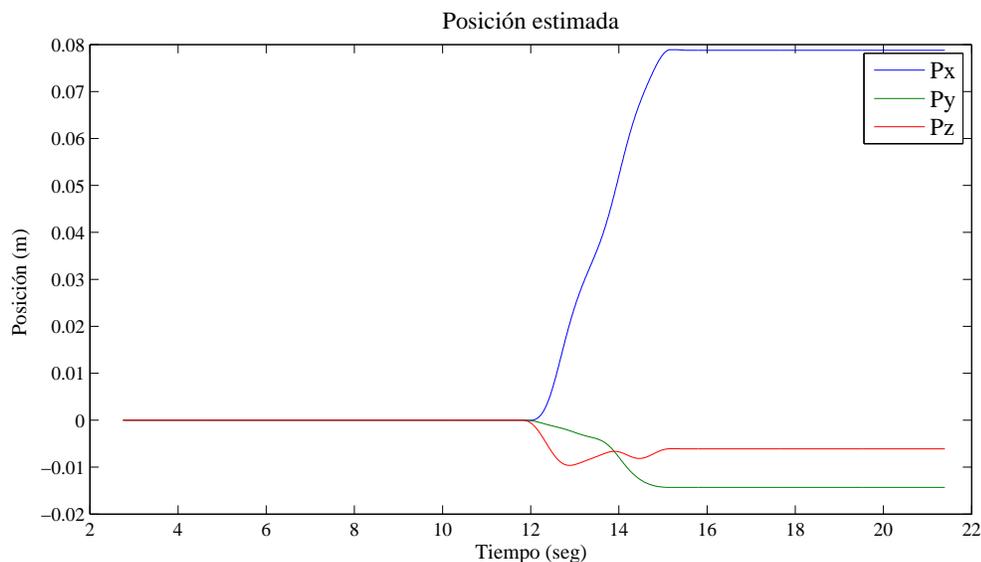


Figura 4.4: Posición estimada para el movimiento en el eje +X.

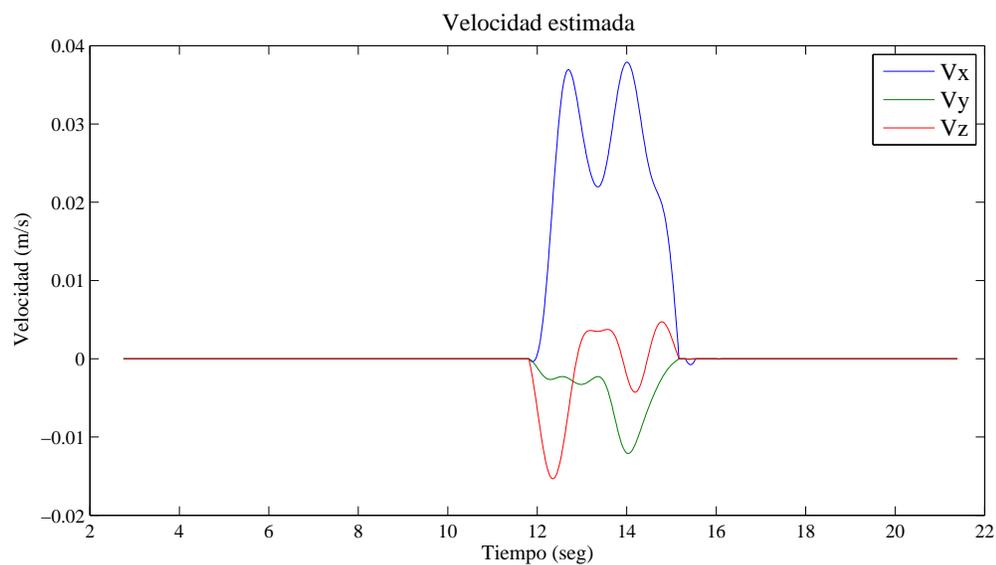


Figura 4.3: Velocidad estimada para el movimiento en el eje +X.

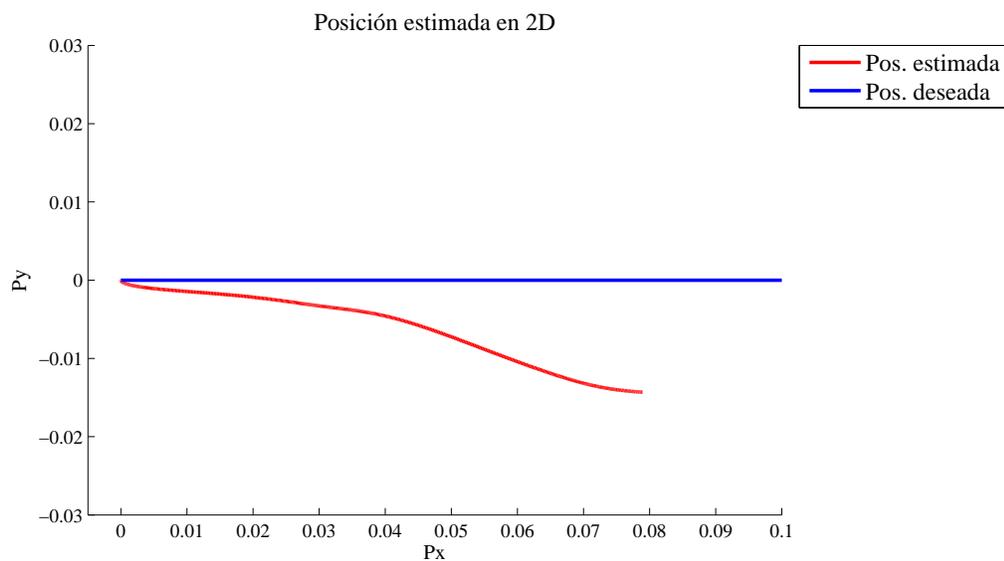


Figura 4.5: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje +X.

También se realizó un desplazamiento negativo sobre el eje X (de acuerdo a la trama de referencia global), para el cual los resultados obtenidos de las estimaciones se pueden observar: Orientación (ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ) Figura 4.6, velocidad Figura 4.7, y posición Figura 4.8.

En la Figura 4.9 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición deseada. El resultado de la posición final es de -8.553 cm, por lo que se tiene un error de 1.447 cm.

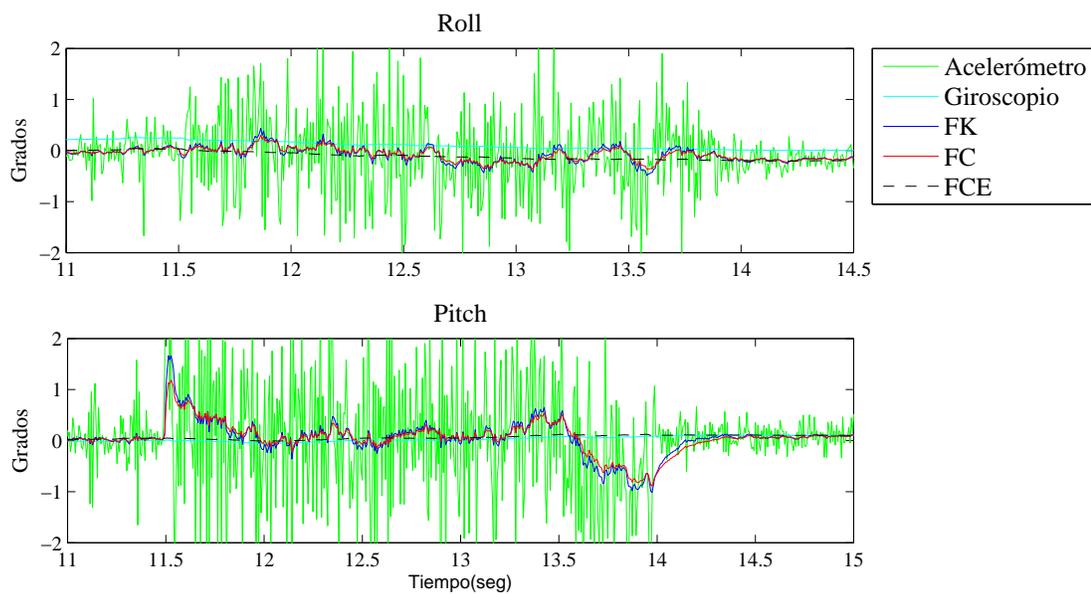


Figura 4.6: Orientación estimada para el movimiento en el eje -X.

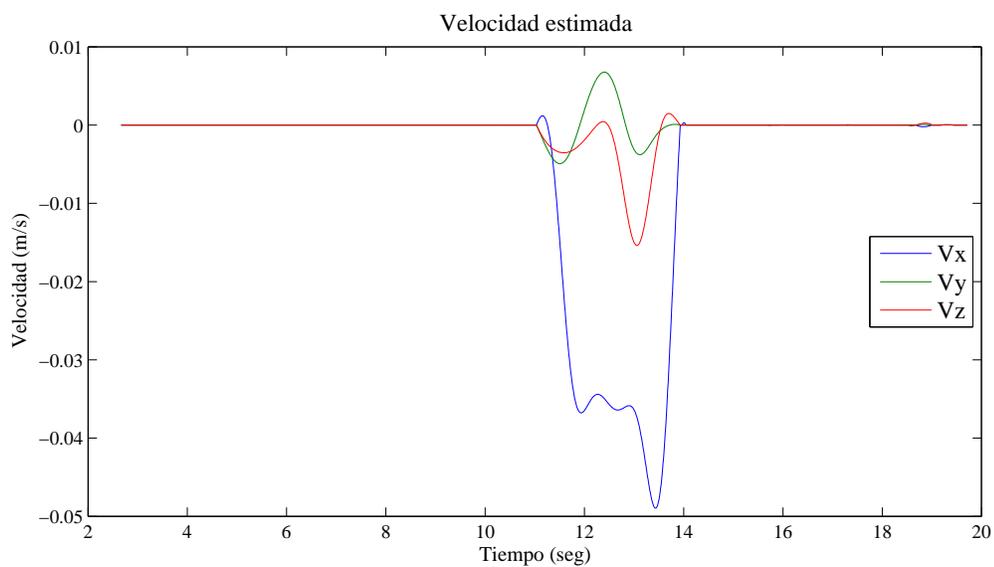


Figura 4.7: Velocidad estimada para el movimiento en el eje -X.

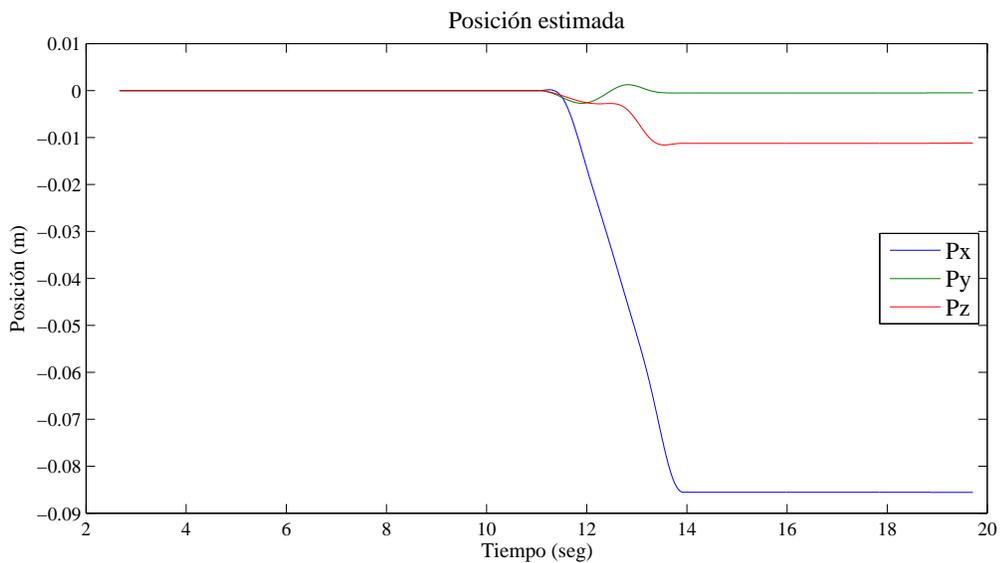


Figura 4.8: Posición estimada para el movimiento en el eje -X.

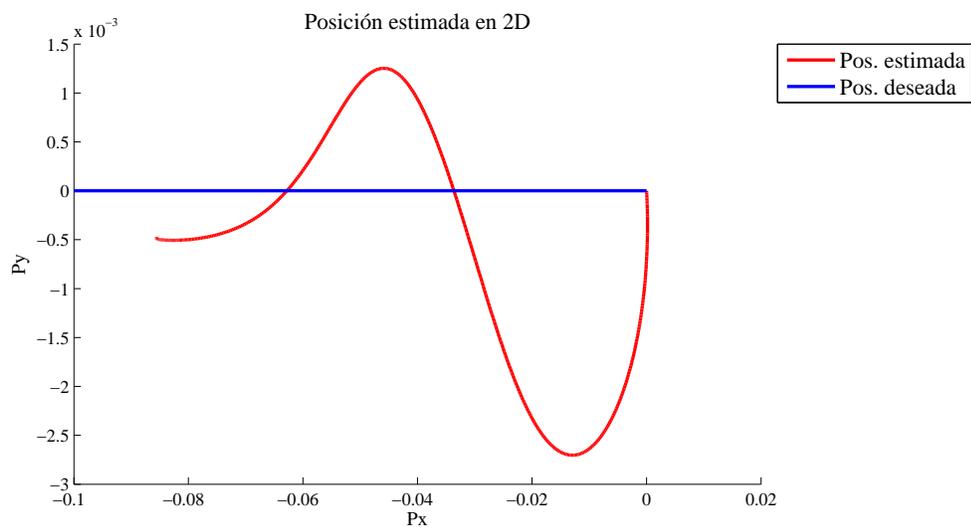


Figura 4.9: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje -X.

Movimiento en eje Y

La estimación de orientación para el movimiento de 10 cm sobre el eje Y se puede observar en la Figura 4.10, en la cual se muestran dos gráficas correspondientes a los ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ , por otro lado, en la Figuras 4.11 y 4.12 se puede observar la estimación de velocidad

y posición para este movimiento, respectivamente. En la Figura 4.13 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición deseada. El resultado de la posición final es de 10.11 cm, por lo que se tiene un error de 0.11 cm.

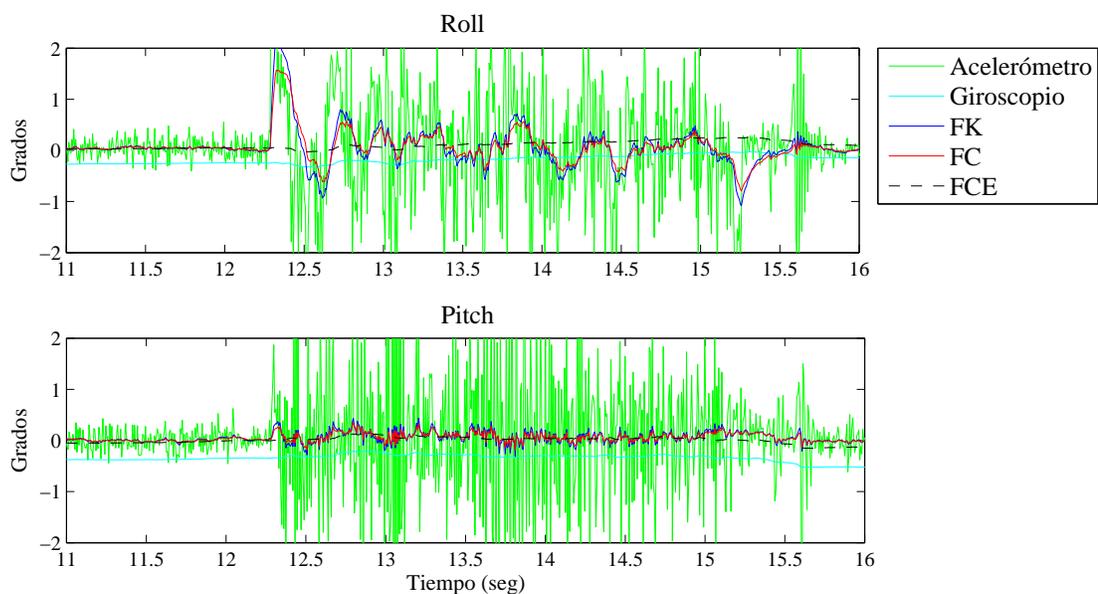


Figura 4.10: Orientación estimada para el movimiento en el eje +Y.

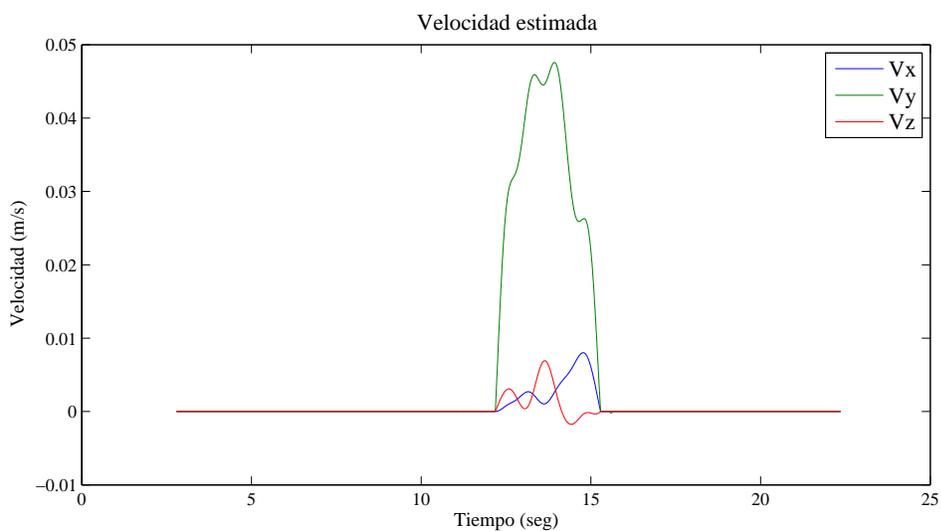


Figura 4.11: Velocidad estimada para el movimiento en el eje +Y.

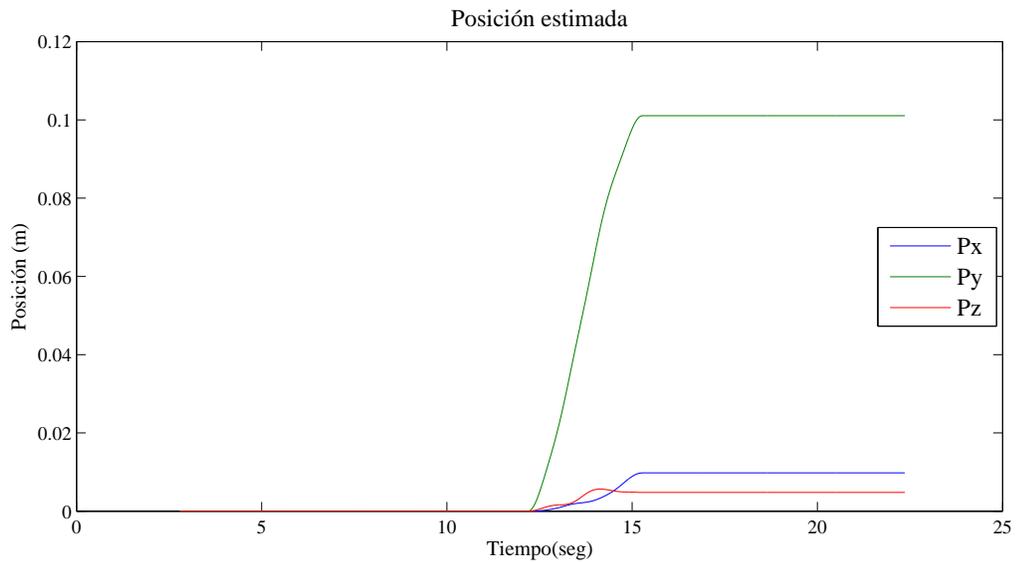


Figura 4.12: Posición estimada para el movimiento en el eje +Y.

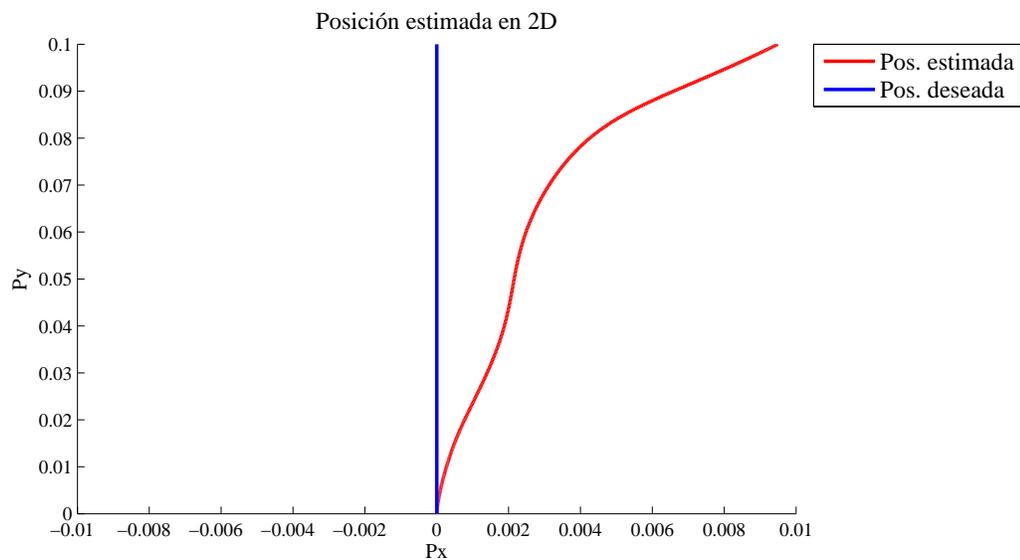


Figura 4.13: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje +Y.

Para el desplazamiento negativo sobre el eje Y se pueden observar los resultados de estimación en: Orientación (ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ) Figura 4.14, velocidad Figura 4.15, y posición Figura 4.16. En la Figura 4.17 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición

deseada. El resultado de la posición final es de -7.874 cm, por lo que se tiene un error de 2.126 cm.

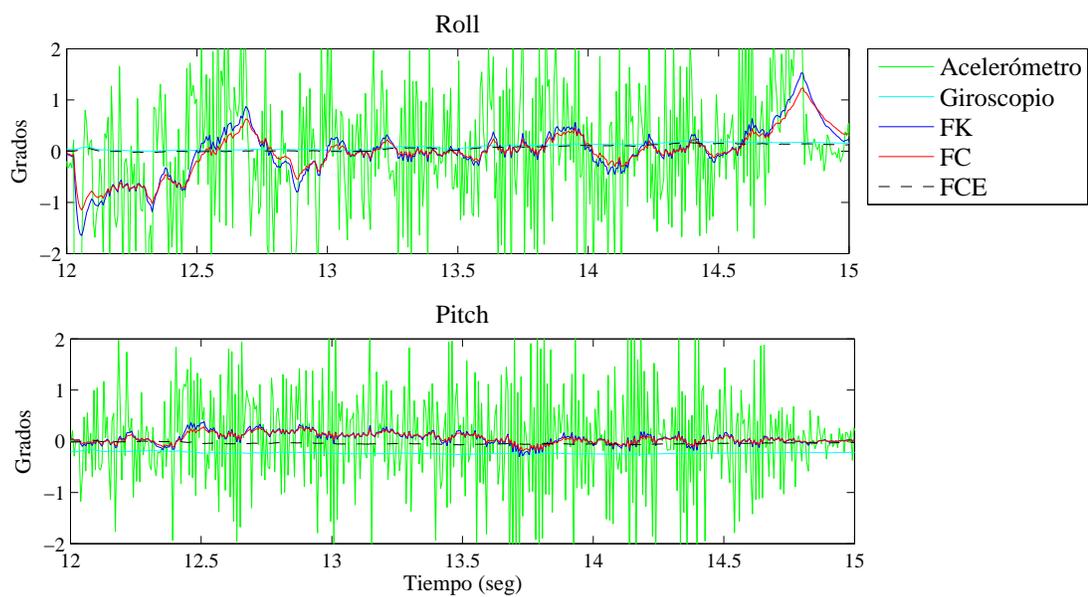


Figura 4.14: Orientación estimada para el movimiento en el eje -Y.

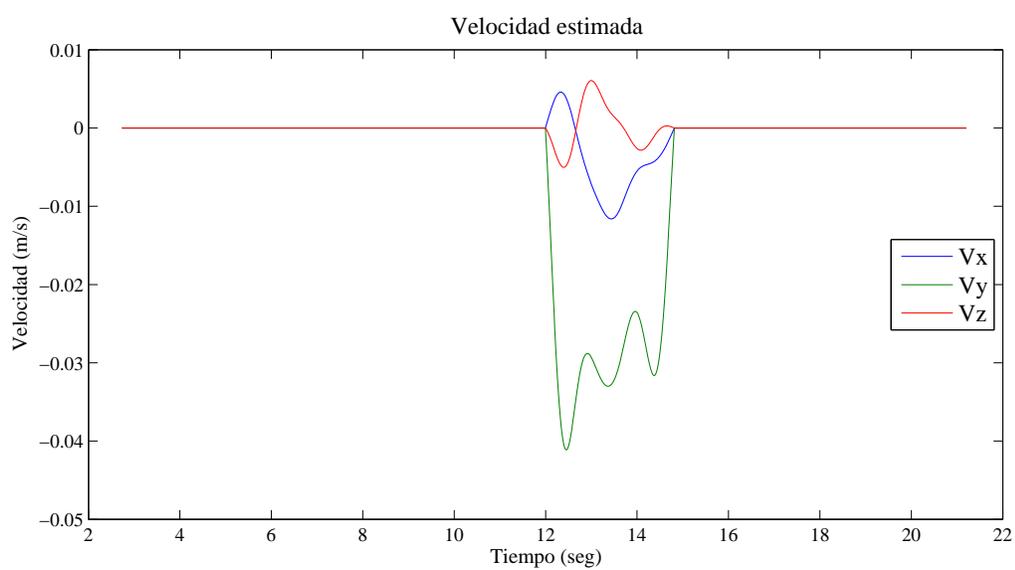


Figura 4.15: Velocidad estimada para el movimiento en el eje -Y.

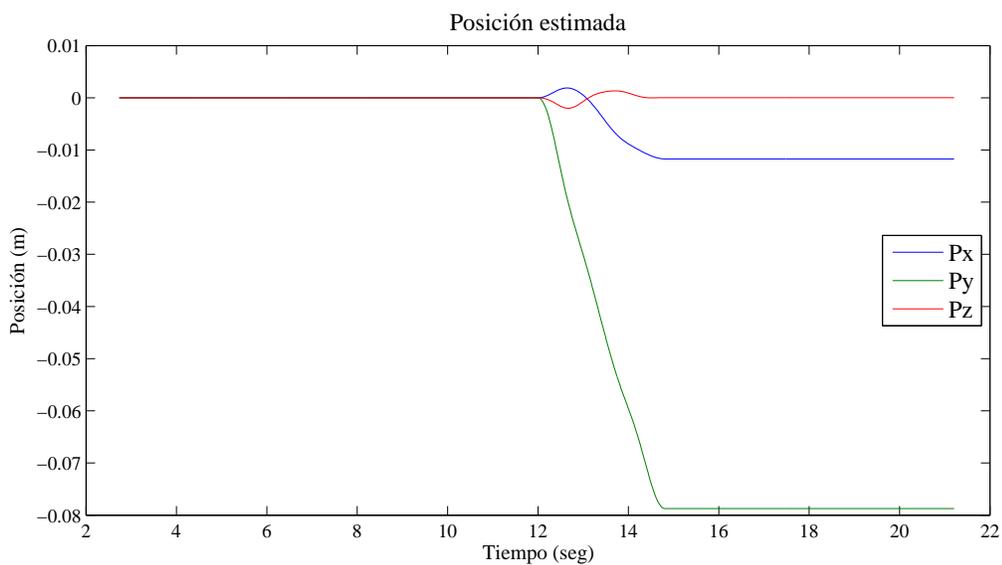


Figura 4.16: Posición estimada para el movimiento en el eje -Y.

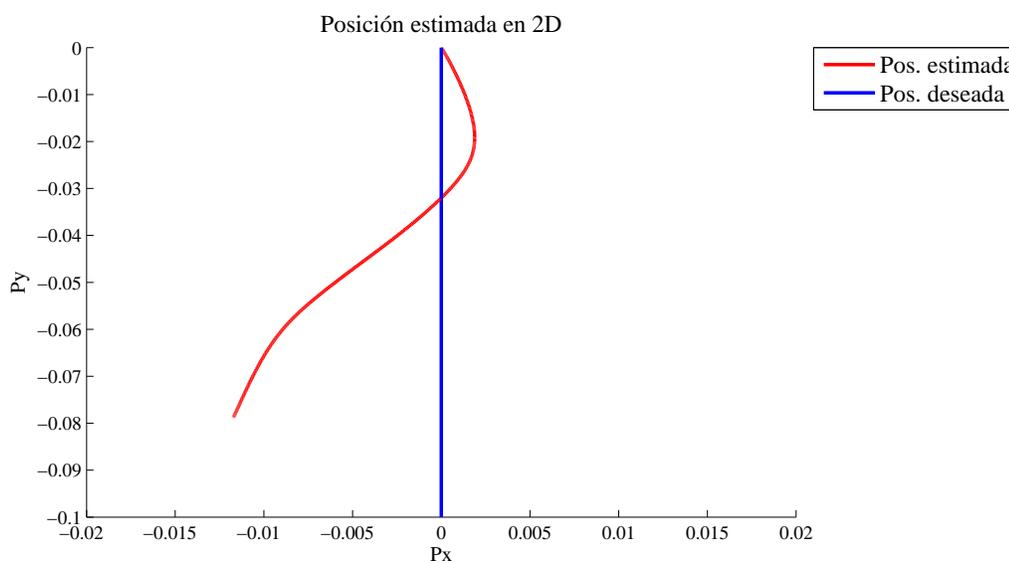


Figura 4.17: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje -Y.

Movimiento en eje Z

Para el movimiento de 10 cm sobre el eje Z, la estimación en orientación se pueden observar en la Figura 4.18, en la cual se muestran dos gráficas correspondientes a los ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ , la gráfica correspondiente a la velocidad se muestra en la Figura 4.19, y mientras que

la gráfica de posición en la Figura 4.20. En la Figura 4.21 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición deseada. El resultado de posición fue aproximadamente de 12.06 cm, por lo que se tiene un error de 2.06 cm.

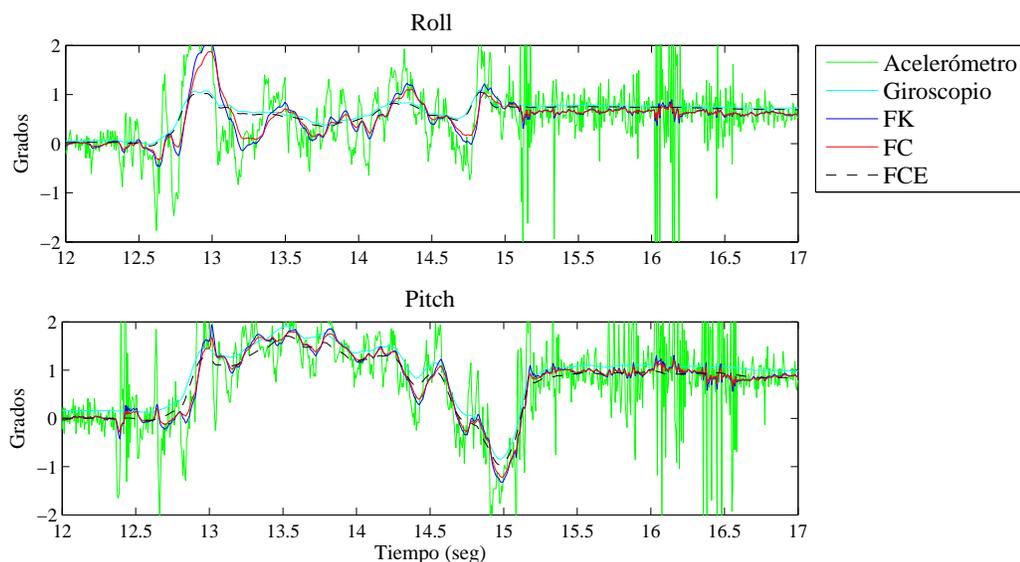


Figura 4.18: Orientación estimada para el movimiento en el eje +Z.

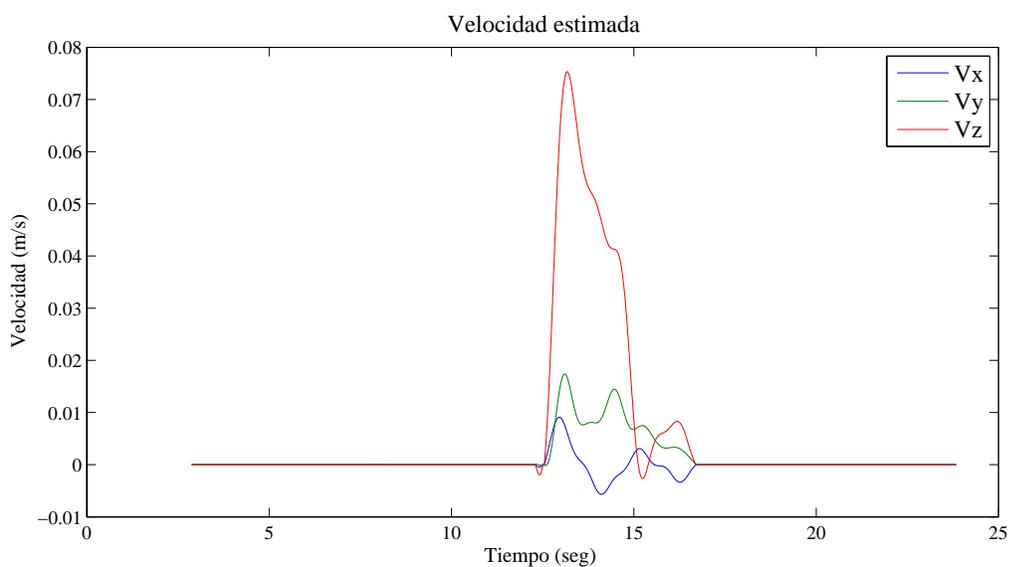


Figura 4.19: Velocidad estimada para el movimiento en el eje +Z.

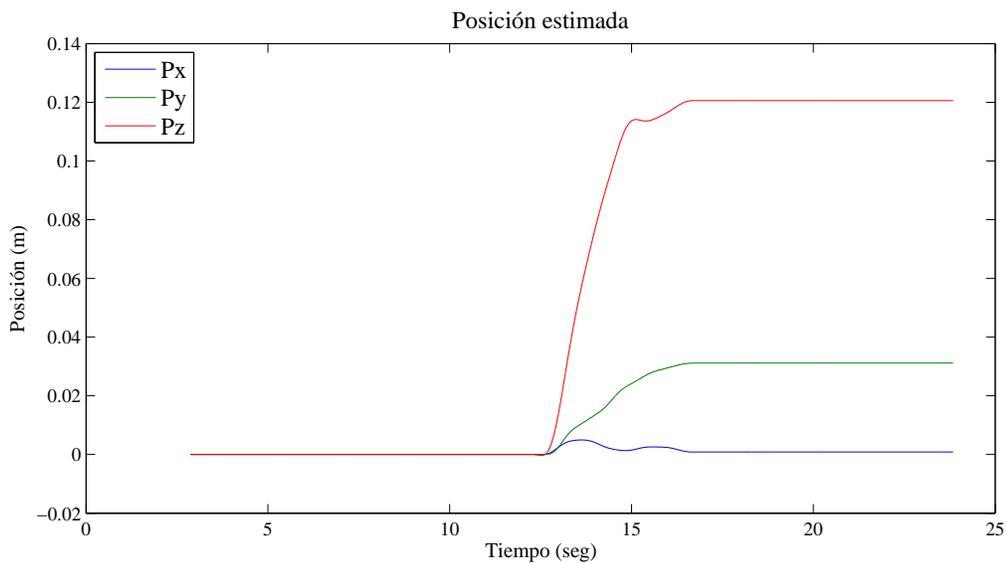


Figura 4.20: Posición estimada para el movimiento en el eje +Z.

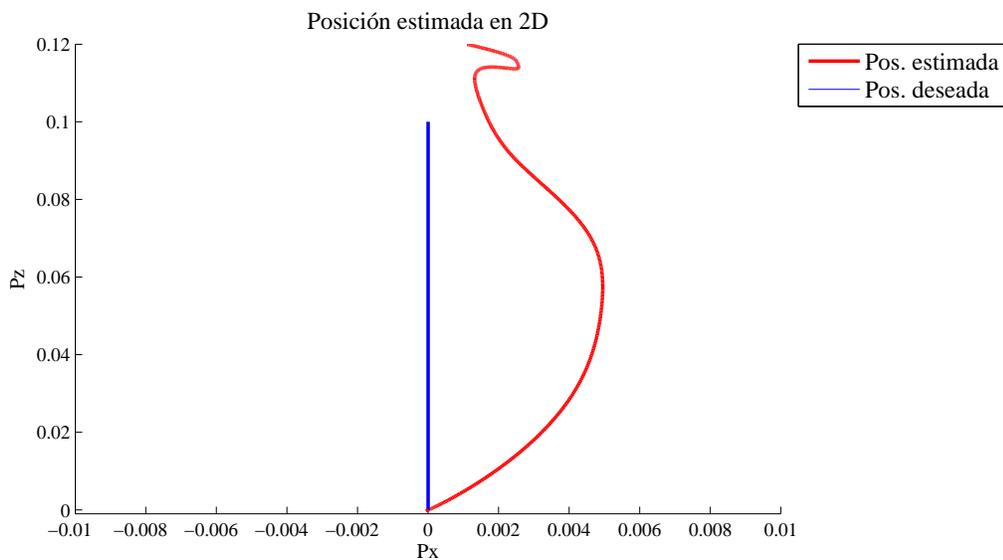


Figura 4.21: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje +Z.

Para el desplazamiento negativo sobre el eje Z se observan los resultados en estimación de: Orientación (ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ) Figura 4.22, velocidad Figura 4.23 y de posición en la Figura 4.24. En la Figura 4.25 se realiza una comparación entre la posición estimada y la

posición deseada. El resultado de posición fue aproximadamente de -11.8 cm, por lo que se tiene un error de 1.8 cm.

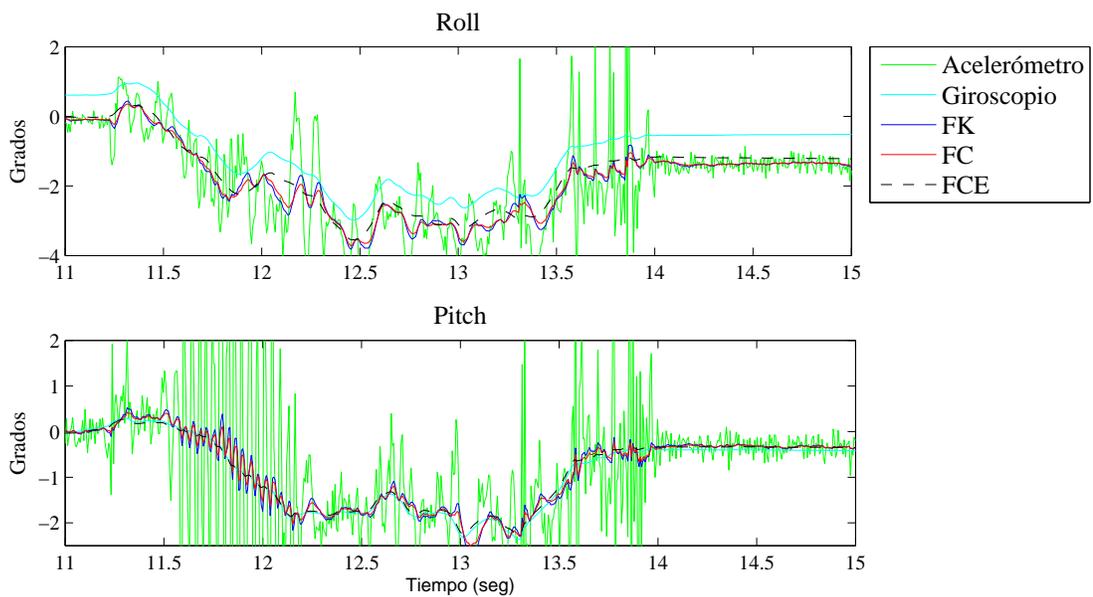


Figura 4.22: Orientación estimada para el movimiento en el eje $-Z$.

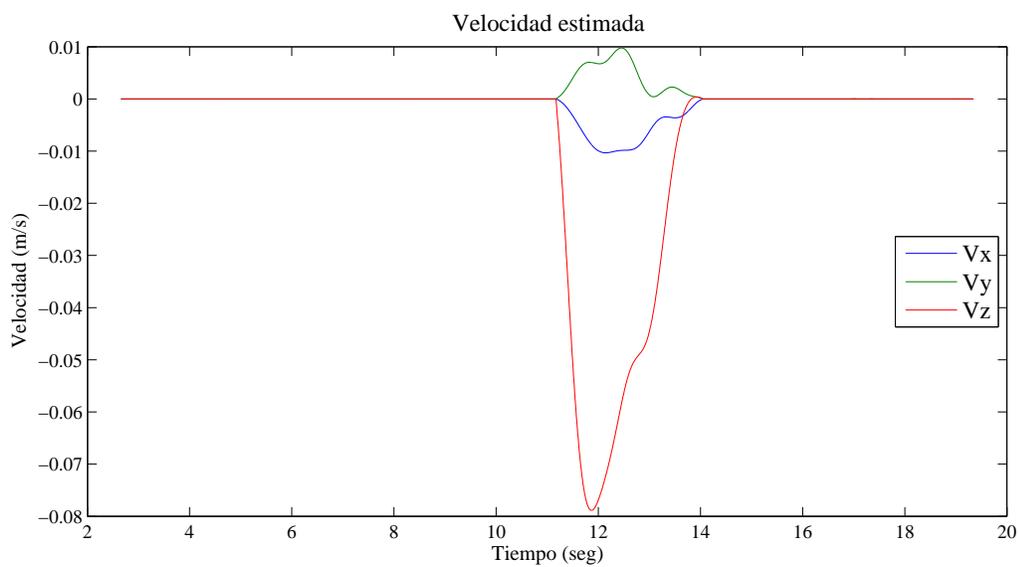


Figura 4.23: Velocidad estimada para el movimiento en el eje $-Z$.

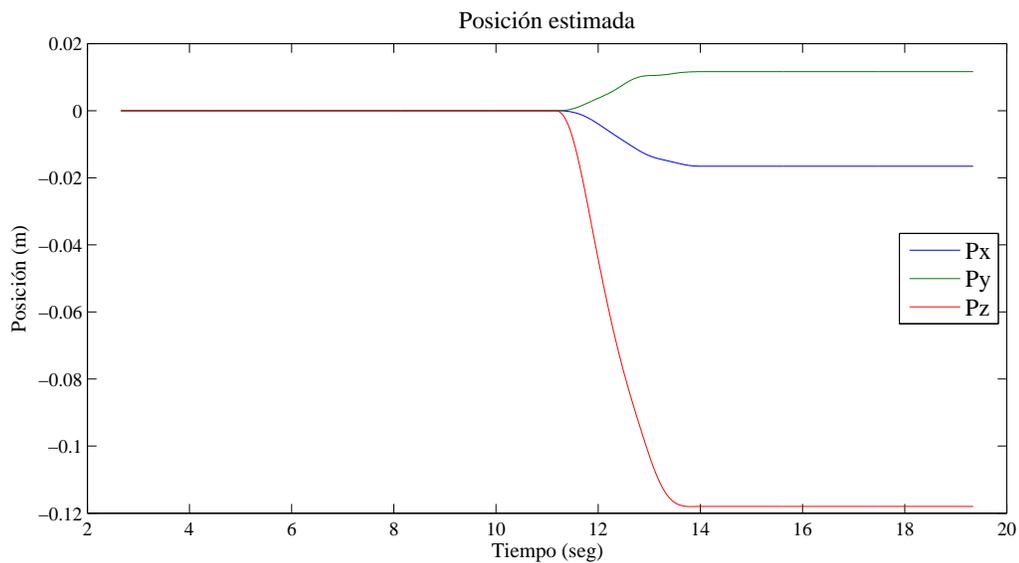


Figura 4.24: Posición estimada para el movimiento en el eje -Z.

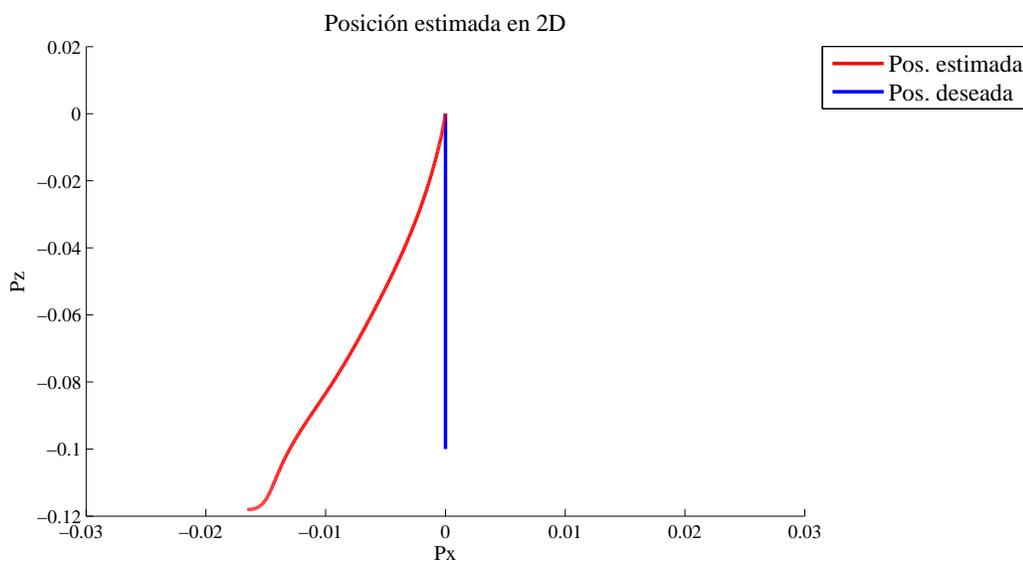


Figura 4.25: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. en el eje -Z.

Movimiento ida y vuelta

Se realizó un movimiento de ida y vuelta sobre el eje X de 10 cm. Los resultados obtenidos de la estimación de orientación se puede observar en la Figura 4.26, en la cual se muestran dos

gráficas correspondientes a los ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ , mientras que en las Figuras 4.27 y 4.28 se puede observar la estimación de velocidad y posición respectivamente. En la Figura 4.29 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición deseada.

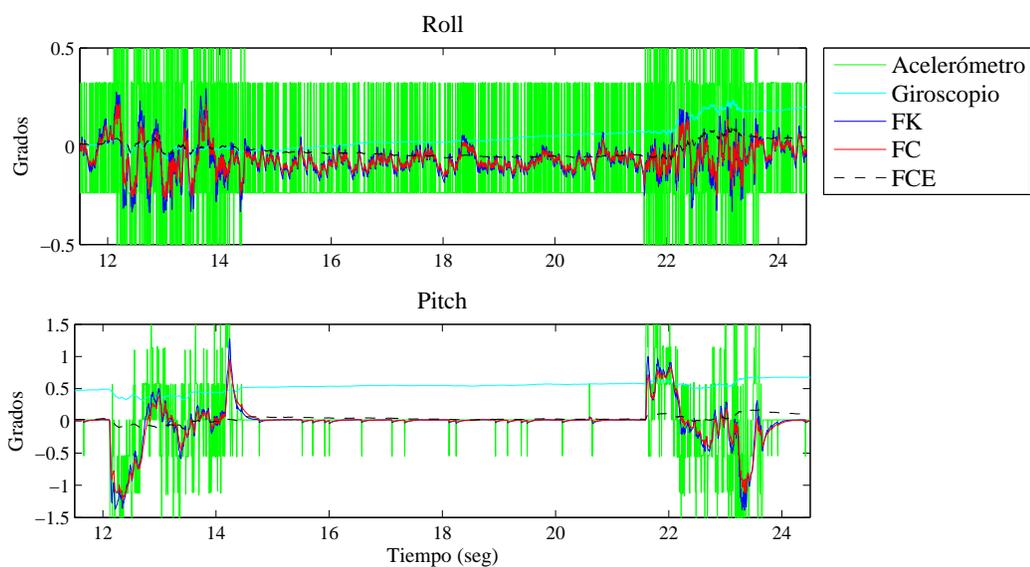


Figura 4.26: Orientación estimada para el movimiento ida y vuelta en el eje X.

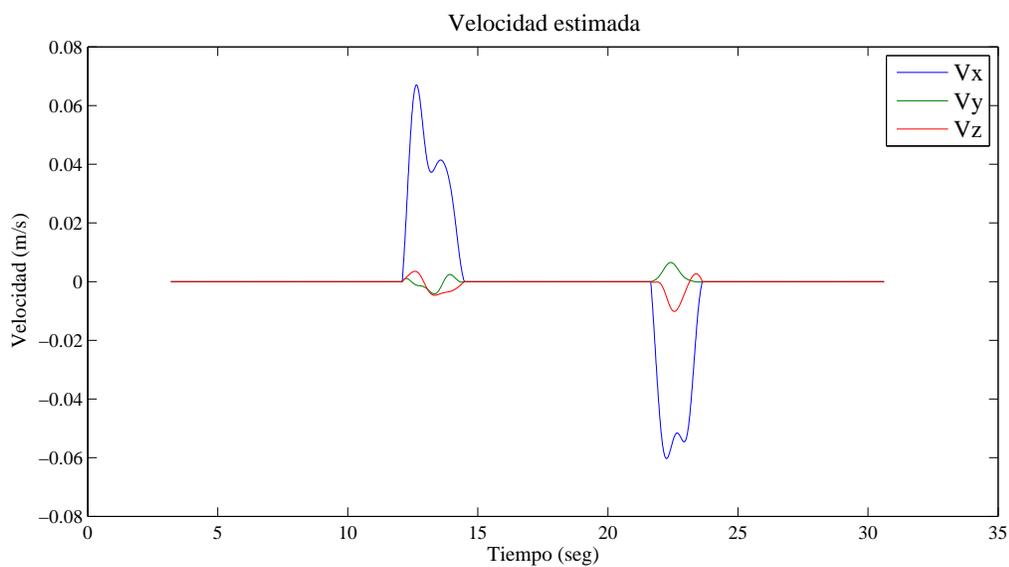


Figura 4.27: Velocidad estimada para el movimiento ida y vuelta en el eje X.

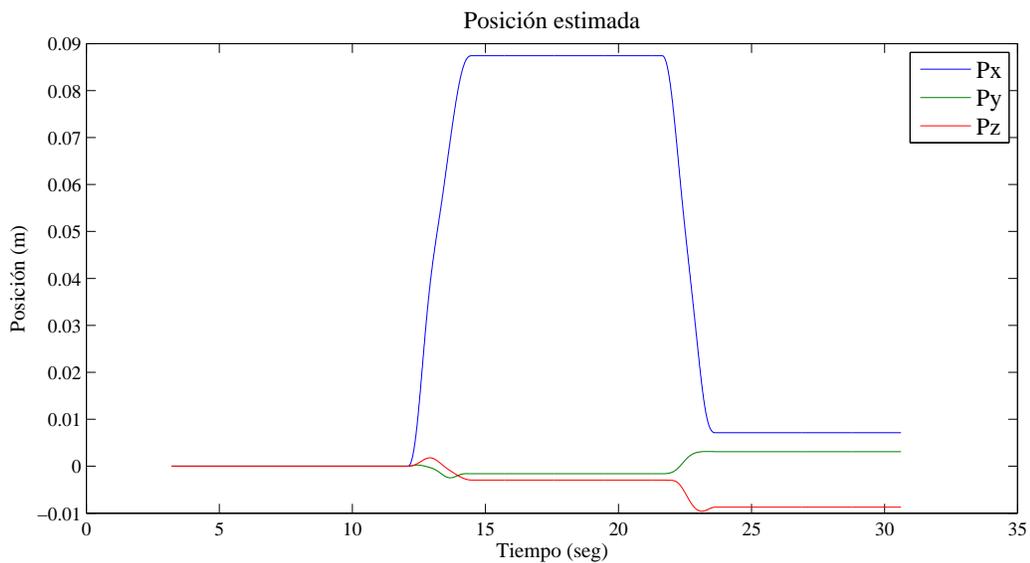


Figura 4.28: Posición estimada para el movimiento ida y vuelta en el eje X.

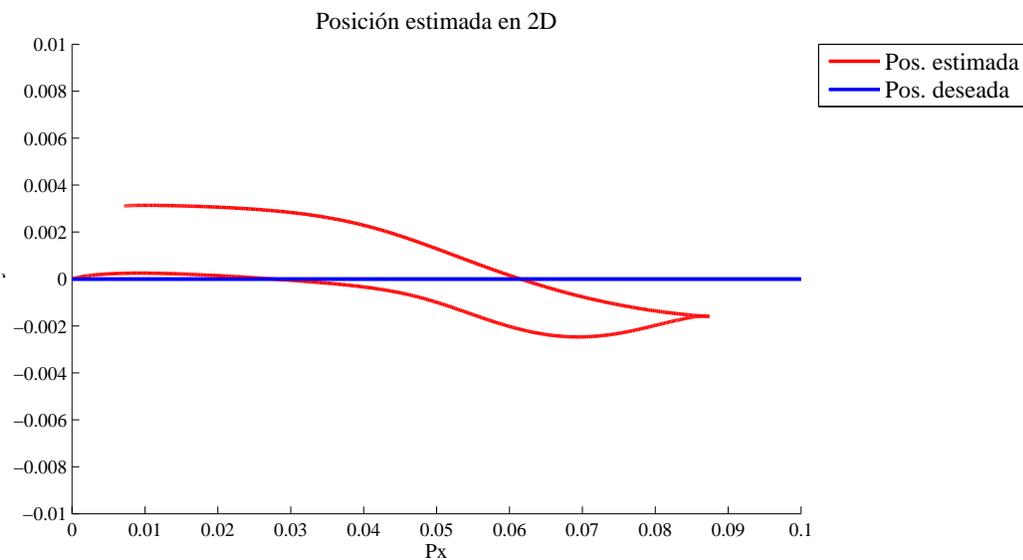


Figura 4.29: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. ida y vuelta en el eje X.

Para cada uno de los movimientos en un sólo eje mostrados anteriormente, se calculó la Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM) entre la posición final ideal y la posición final estimada utilizando la Ecuación 4.2.1, los resultados obtenidos son mostrados en la Tabla 4.2.1, donde las

posiciones se expresan en cm.

$$RECM = \sqrt{\frac{(P_{x_{ideal}} - P_{x_{est}})^2 + (P_{y_{ideal}} - P_{y_{est}})^2 + (P_{z_{ideal}} - P_{z_{est}})^2}{3}} \quad (4.2.1)$$

Movimiento	$P_{x_{ideal}}$	$P_{y_{ideal}}$	$P_{z_{ideal}}$	$P_{x_{est}}$	$P_{y_{est}}$	$P_{z_{est}}$	RECM
+X	10	0	0	7.851	-1.429	-0.6169	1.5319
-X	-10	0	0	-8.553	-0.0493	-0.01123	0.8384
+Y	0	10	0	-0.9778	10.11	0.04792	0.5687
-Y	0	-10	0	-1.172	-7.874	0.0033	1.4016
+Z	0	0	10	0.0828	3.113	12.06	2.1557
-Z	0	0	-10	-1.655	-1.165	-11.8	1.5637
Ida y vuelta	0	0	0	0.714	0.3109	-0.8722	0.6175

Tabla 4.2.1: RECM para movimientos en un sólo eje (las posiciones se expresan en cm.)

4.2.2. Movimiento en dos ejes

Para el movimiento en dos ejes se realizó tanto de manera individual como simultánea. En el primer movimiento se realizó un desplazamiento en el eje Y de -20 cm y un segundo desplazamiento en el eje X de 20 cm, los resultados de la estimación de orientación se muestran en la Figura 4.30, en la cual se muestran dos gráficas correspondientes a los ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ , mientras que los resultados de velocidad y posición se muestran en las Figuras 4.31 y 4.32 respectivamente. En la Figura 4.33 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición deseada.

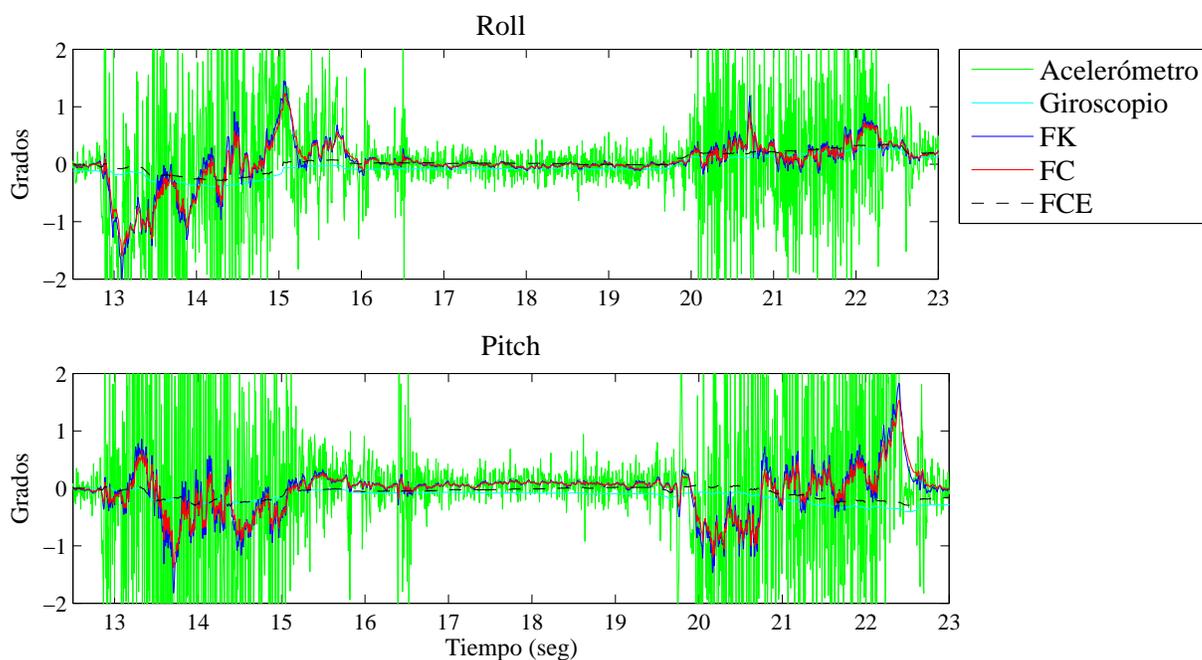


Figura 4.30: Orientación estimada para el mov. individual en dos ejes.

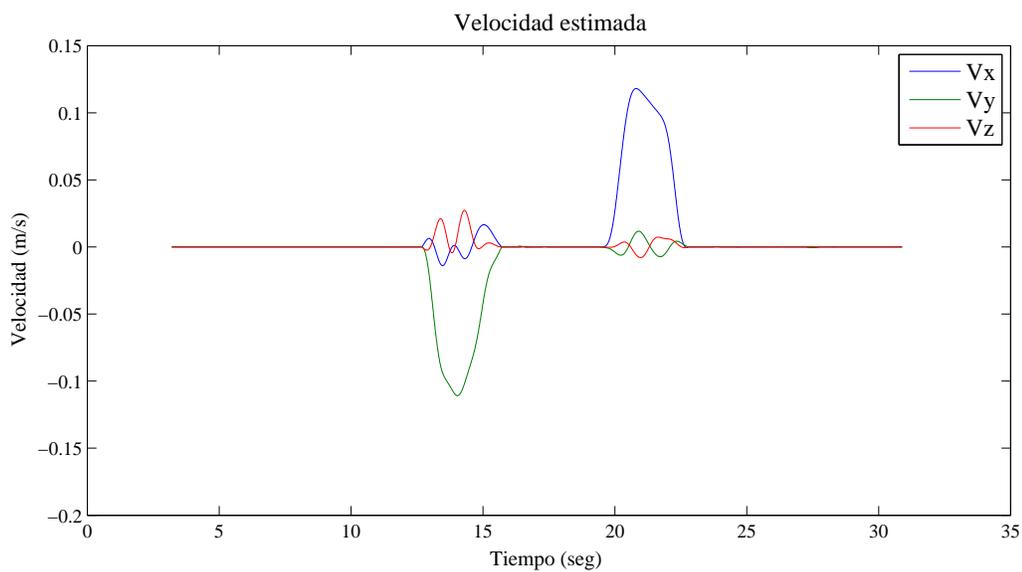


Figura 4.31: Velocidad estimada para el mov. individual en dos ejes.

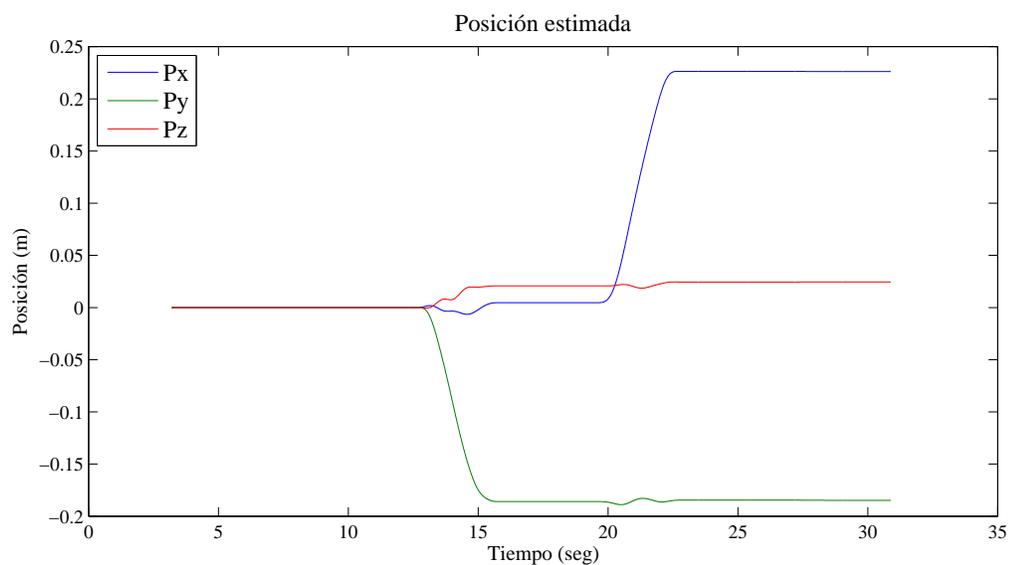


Figura 4.32: Posición estimada para el mov. individual en dos ejes.

Para el movimiento simultáneo, se realizó un desplazamiento en los ejes X y Y de 10 cm, los resultados de la estimación de orientación (ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ) se muestran en la Figura 4.34, mientras que los resultados de velocidad y posición se muestran en las Figuras 4.35 y 4.36

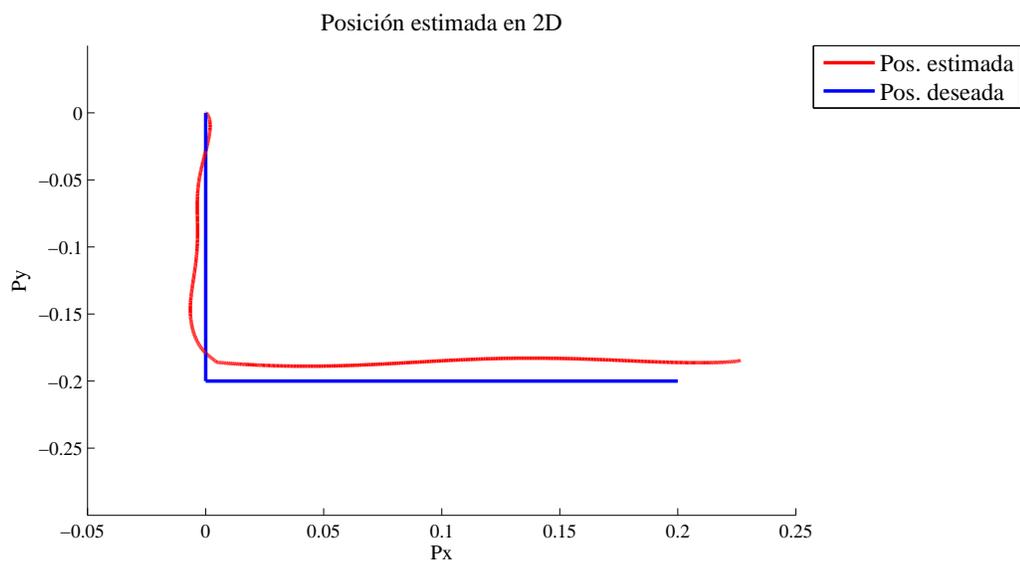


Figura 4.33: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. individual en dos ejes.

respectivamente. En la Figura 4.37 se realiza una comparación entre la posición estimada y la posición deseada.

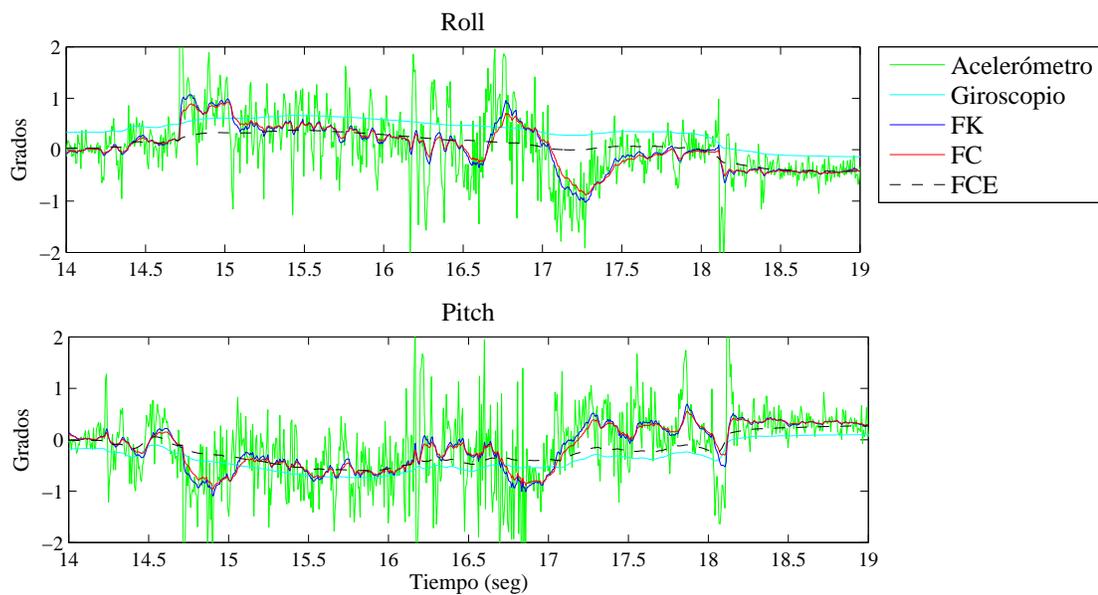


Figura 4.34: Orientación estimada para el mov. simultáneo en dos ejes.

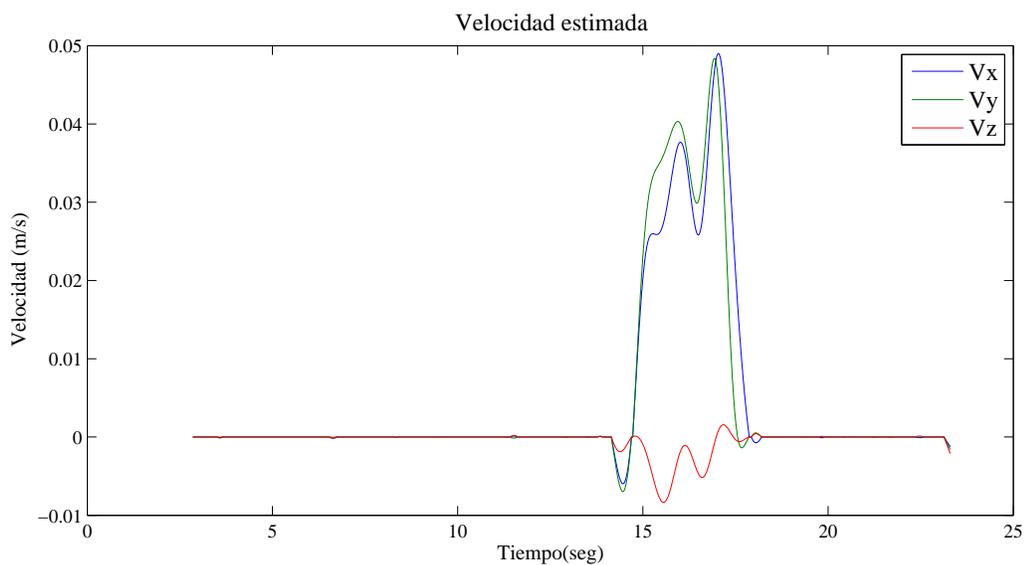


Figura 4.35: Velocidad estimada para el mov. simultáneo en dos ejes.

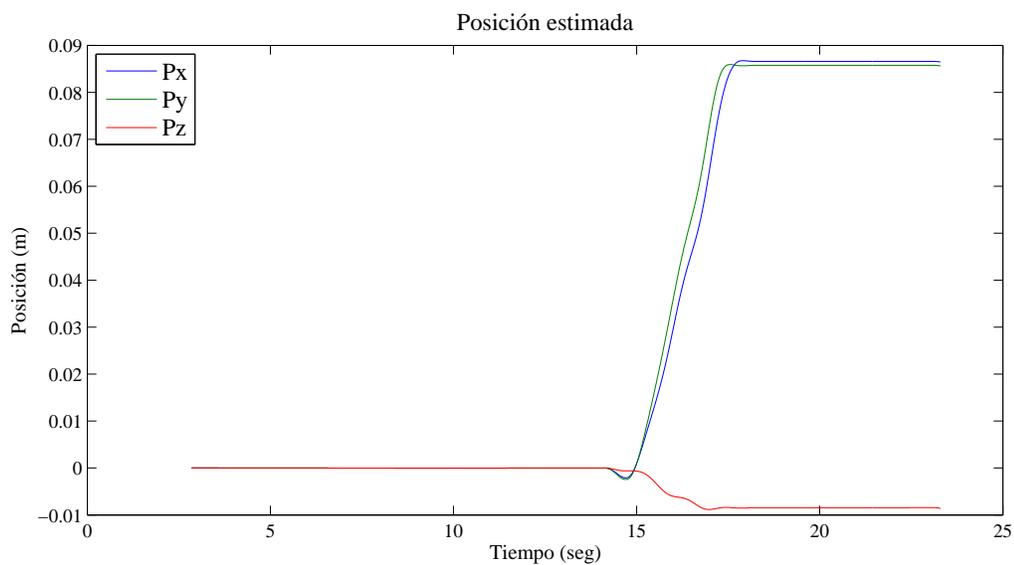


Figura 4.36: Posición estimada para el mov. simultáneo en dos ejes.

En base a los resultados de posición obtenidos para los movimientos en dos ejes mostrados anteriormente, se calcula la RECM entre la posición final ideal y la posición final estimada mediante la Ecuación 4.2.1. Los resultados de la RECM se muestran en la Tabla 4.2.2, donde

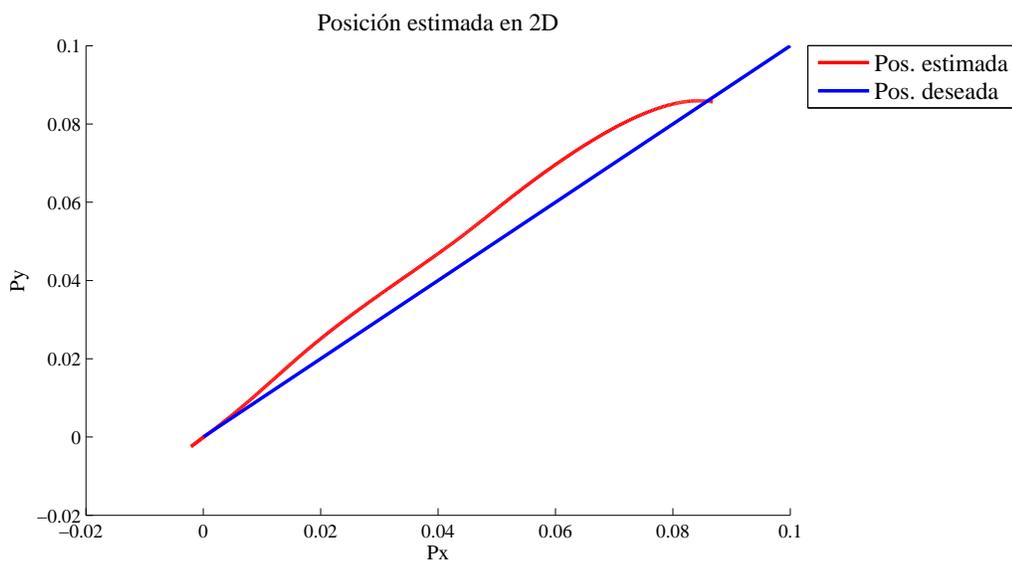


Figura 4.37: Posición estimada vs. posición deseada para el mov. simultáneo en dos ejes.

las posiciones se expresan en cm.

Movimiento	$P_{x_{ideal}}$	$P_{y_{ideal}}$	$P_{z_{ideal}}$	$P_{x_{est}}$	$P_{y_{est}}$	$P_{z_{est}}$	RECM
Individual	20	-20	0	22.62	-18.48	2.45	2.2492
Simultáneo	10	10	0	8.66	8.575	-0.8468	1.2306

Tabla 4.2.2: RECM para movimientos en dos ejes (las posiciones se expresan en cm.)

4.2.3. Comparación con experimento de escritura

En [2] se propone una metodología para estimar la trayectoria de la escritura realizada por un humano, la cual esta basada en sensores IMU y electromagnéticos. La trayectoria que efectuaron para probar su sistema es una letra “A”, así como los resultados que obtuvieron de posición se pueden observar en las Figuras 4.38a y 4.38b respectivamente.

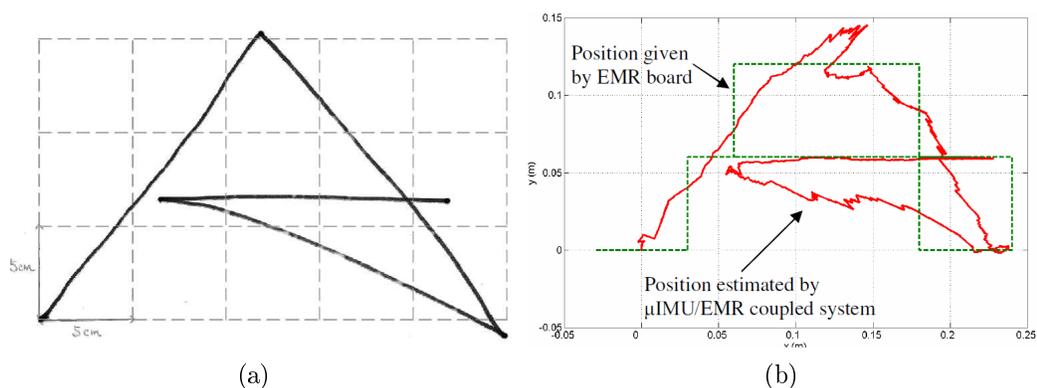


Figura 4.38: Experimento de escritura [2].

Se recrea la trayectoria empleada en la prueba realizada por Tsang et.al. [2], tal y como se muestra en la Figura 4.38a.

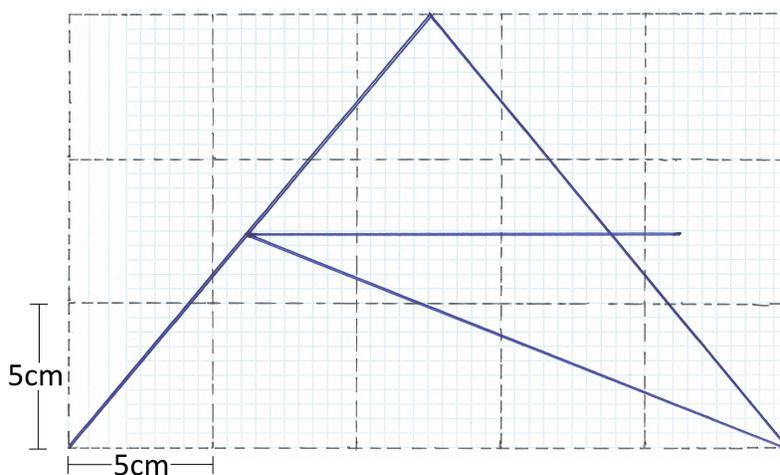


Figura 4.39: Trayectoria de la prueba de escritura.

Los resultados obtenidos con el algoritmo de procesamiento y estimación de orientación, velocidad y posición son los siguientes:

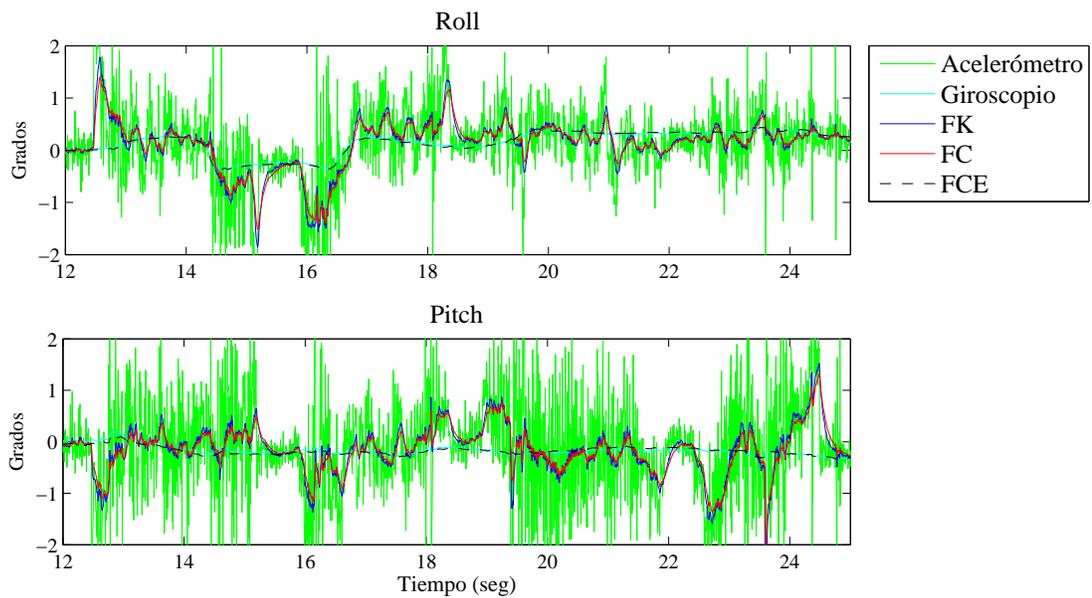


Figura 4.40: Orientación estimada (ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ) de la Figura 4.39.

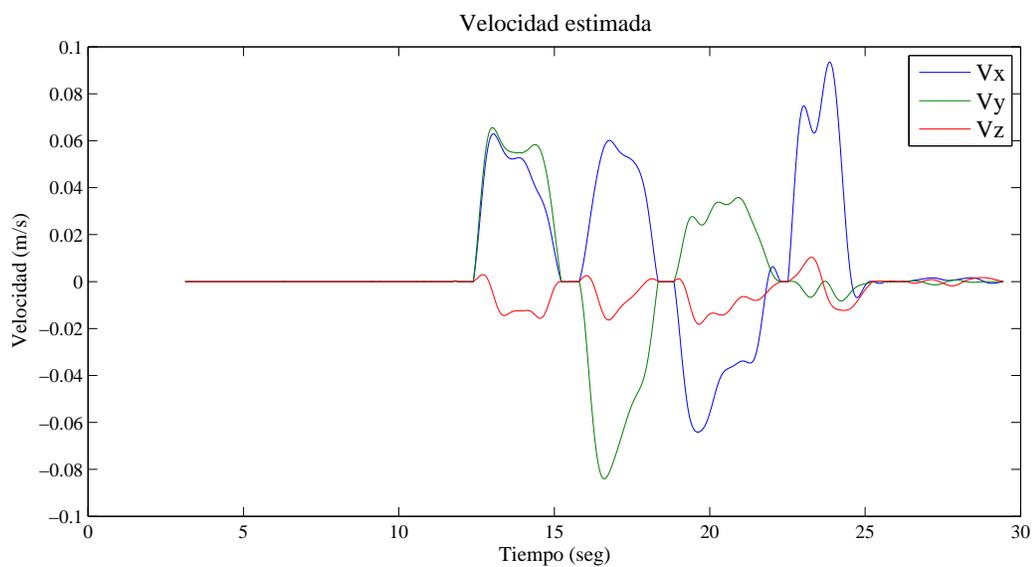


Figura 4.41: Velocidad estimada de la Figura 4.39.

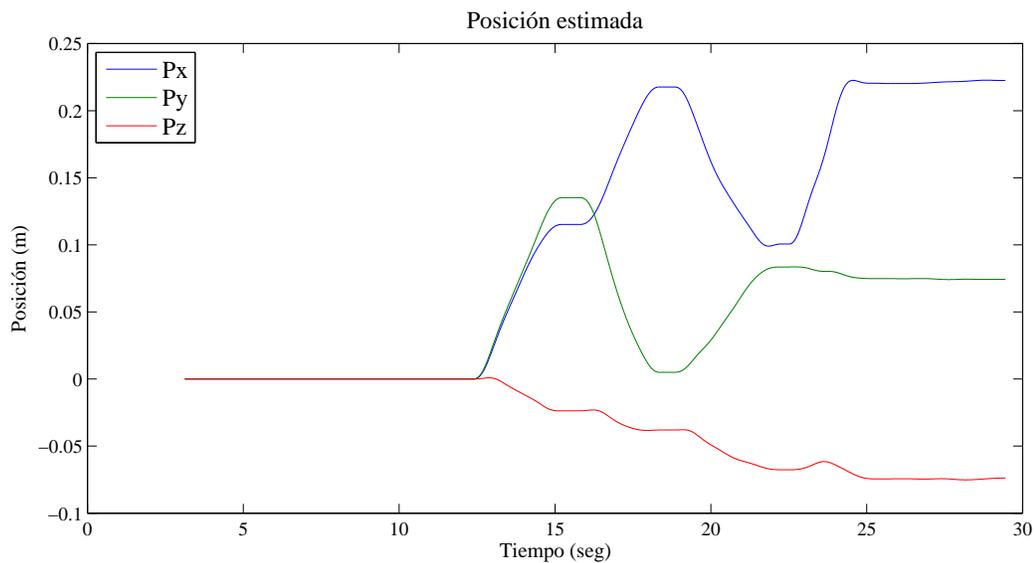


Figura 4.42: Posición estimada de la Figura 4.39.

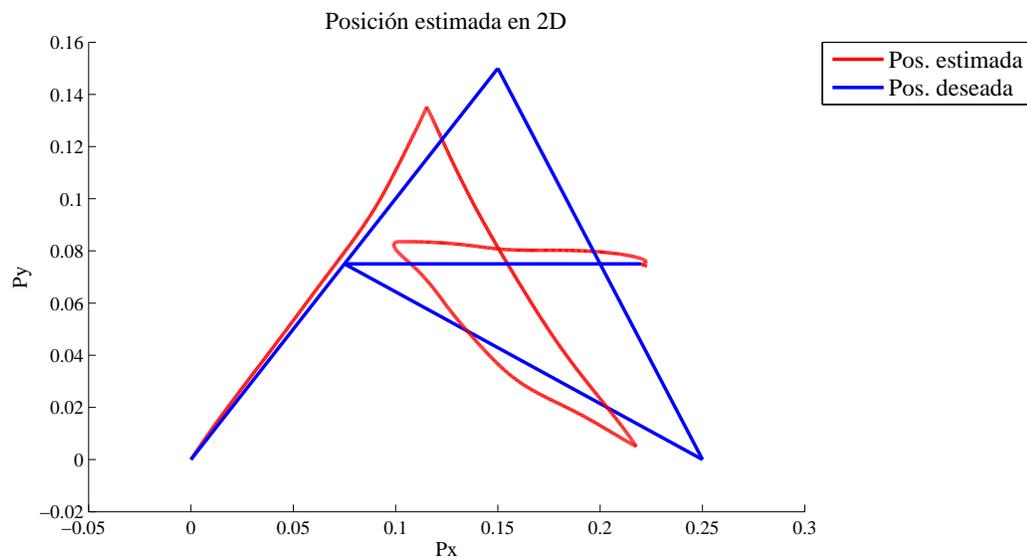


Figura 4.43: Posición estimada vs. posición deseada de la Figura 4.39.

En base a los resultados obtenidos, comparando la posición deseada con la estimada, se prueba que la metodología propuesta sigue el movimiento capturado (adquirido) por los sensores IMU empleados.

4.3. Caso de generación de trayectoria para un manipulador predeterminado

Como siguiente caso de estudio, se empleó la trayectoria de la letra “A” propuesta por Tsang et.al. [2], pero en proporciones menores a las vistas en la Figura 4.39. Las medidas de la trayectoria son las siguientes:

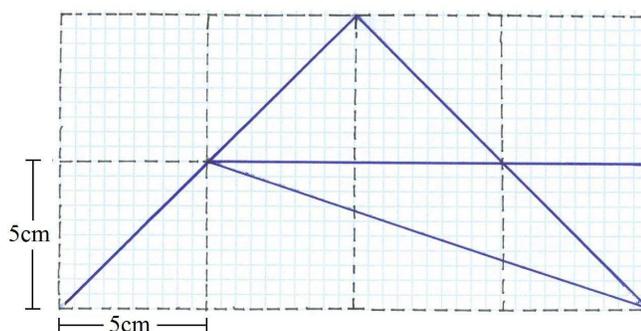


Figura 4.44: Trayectoria propuesta para un manipulador predeterminado.

De la trayectoria vista 4.44, los resultados del algoritmo de procesamiento y estimación de orientación, velocidad y posición se muestran en las Figuras 4.45, 4.46, 4.47 y 4.48, respectivamente.

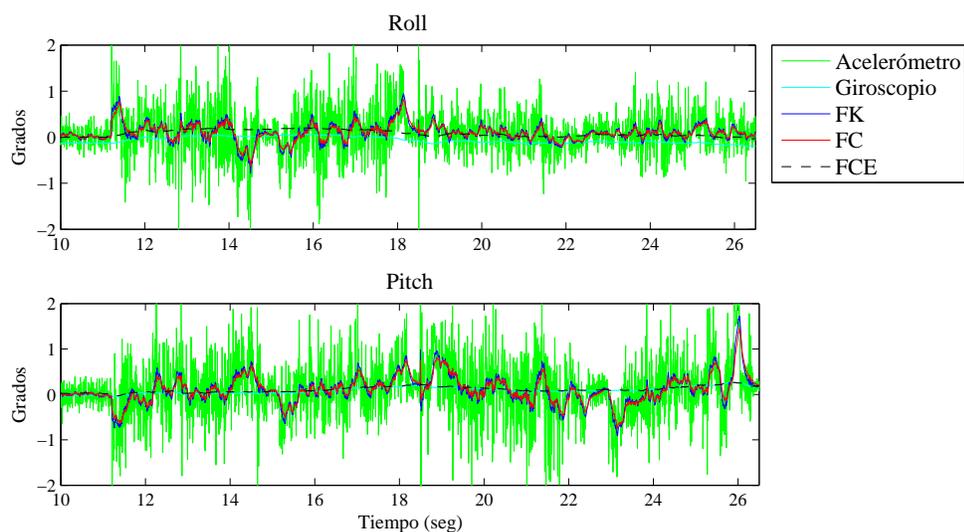


Figura 4.45: Orientación estimada (ángulos *roll* - ϕ y *pitch* - ρ) de la Figura 4.44.

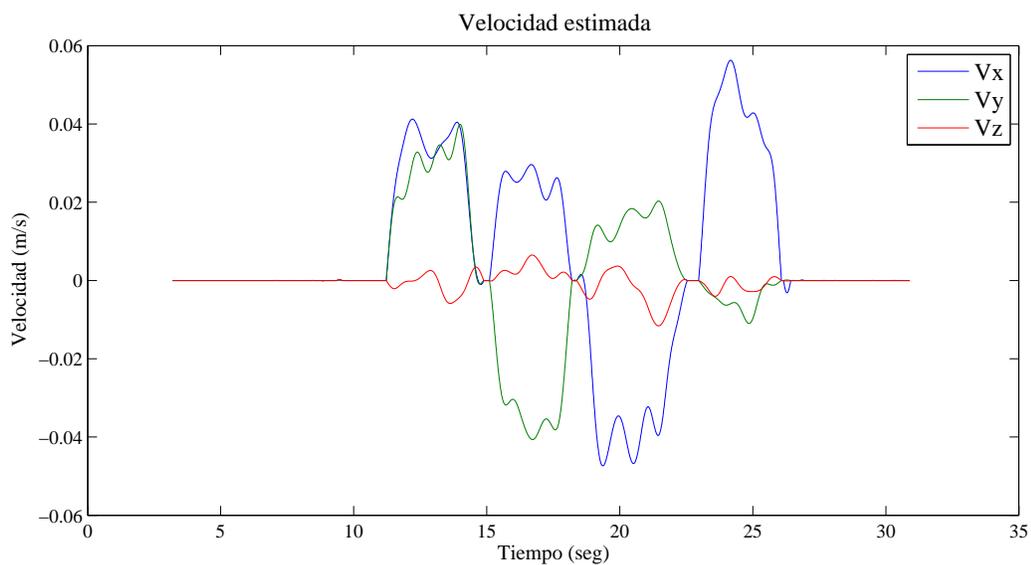


Figura 4.46: Velocidad estimada de la Figura 4.44.

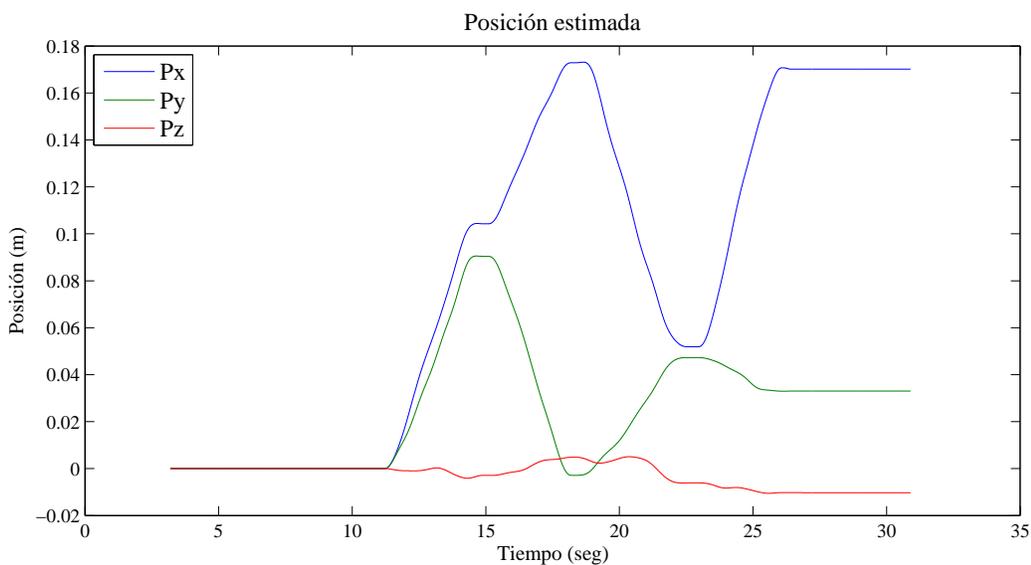


Figura 4.47: Posición estimada de la Figura 4.44.

El manipulador a modelar es el robot KUKA KR 16, el cual se muestra en la Figura 4.49, este manipulador es de 6 grados de libertad y configuración angular. Los parámetros cinemáticos del manipulador se pueden observar en la Tabla 4.3.3. Para este caso de estudio en específico no

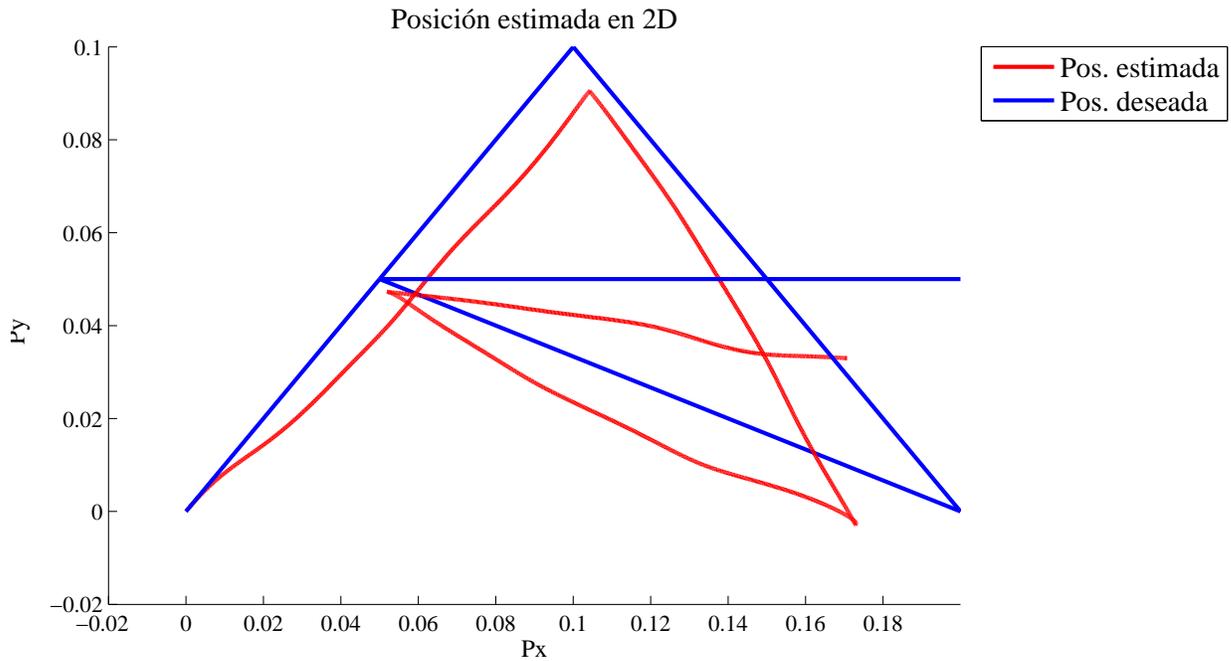


Figura 4.48: Posición estimada vs. posición deseada de la Figura 4.44.

se cuentan con los valores de las masas ni las ubicaciones de los centros de masa para el robot KUKA KR 16, por lo que no se realizan las evaluaciones de los índices de desempeño dinámicos.

Posteriormente, en base a los parámetros dimensionales del robot manipulador predeterminado, los cuales son los datos de entrada del algoritmo de modelado, se obtienen: MCDP, y matriz Jacobiana de velocidad. Dichos modelos se emplean en una simulación donde el efector final siguió los puntos deseados de la trayectoria estimada (Figura 4.48) a partir del algoritmo de procesamiento y estimación de orientación, velocidad y posición.



Figura 4.49: Manipulador KUKA KR 16. 4.44.

Articulación	θ_i (rad)	d_i (m)	a_i (m)	α_i (rad)
1	q_1	0.675	0.260	$-\pi/2$
2	q_2	0	0.680	0
3	$q_3 + \pi/2$	0	0.035	$\pi/2$
4	q_4	0.670	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$\pi/2$
6	q_6	0.158	0	0

Tabla 4.3.3: Parámetros de DH del manipulador KUKA KR 16.

Las matrices de transformación homogéneas en base a los parámetros de DH son:

$$\begin{aligned}
{}^0A_1 &= \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & -Sq_1 & 0.26 Cq_1 \\ Sq_1 & 0 & Cq_1 & 0.26 Sq_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0.675 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^1A_2 &= \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 & 0.68 Cq_1 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 & 0.68 Sq_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^2A_3 &= \begin{bmatrix} C(q_3 + \frac{\pi}{2}) & 0 & S(q_3 + \frac{\pi}{2}) & 0.035 C(q_3 + \frac{\pi}{2}) \\ S(q_3 + \frac{\pi}{2}) & 0 & -C(q_3 + \frac{\pi}{2}) & 0.035 S(q_3 + \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3A_4 &= \begin{bmatrix} Cq_4 & 0 & -Sq_4 & 0 \\ Sq_4 & 0 & Cq_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^4A_5 &= \begin{bmatrix} Cq_5 & 0 & Sq_5 & 0 \\ Sq_5 & 0 & -Cq_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^5A_6 &= \begin{bmatrix} Cq_6 & -Sq_6 & 0 & 0 \\ Sq_6 & Cq_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.158 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Multiplicando las matrices de transformación homogéneas se llega a la expresión:

$${}^0\mathbf{T}_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz ${}^0\mathbf{T}_6$, se obtienen la submatriz de traslación (${}^0\mathbf{P}_6$) y la submatriz de rotación (${}^0\mathbf{R}_6$), conforme lo descrito en la Sección 2.2.1. En base a ${}^0\mathbf{R}_6$ se obtiene la orientación del extremo del manipulador:

$$\phi = \text{atan2}\left(\frac{o_z C\rho}{a_z C\rho}\right), \quad \rho = \text{atan2}\left(\frac{-n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}\right), \quad \psi = \text{atan2}\left(\frac{n_y C\rho}{n_x C\rho}\right)$$

Las ecuaciones correspondientes a la posición y orientación del MCDP se pueden consultar en el Apéndice C.1. De igual forma, las ecuaciones correspondientes a la matriz Jacobiana de velocidad (calculada a partir del modelado cinemático de posición) se encuentran en el Apéndice C.2.

El modelo cinemático inverso de posición se obtiene de manera numérica mediante el desacople cinemático: El método geométrico resuelve q_1 , q_2 y q_3 , mientras que q_4 , q_5 y q_6 se resuelven mediante matrices de rotación conocidas (Sección 2.2.2). Si bien el algoritmo de modelado cinemático inverso permite calcular q_1 , q_2 y q_3 tanto con métodos geométricos como por EVONORM, se empleó el primero, con el fin de agilizar el tiempo de ejecución del algoritmo, pero en caso de contar con una gran variedad de manipuladores, Evonorm es la opción más viable para resolver el problema del MCIP.

La posición de la muñeca \mathbf{p}_m se establece en base a la posición deseada ${}^0\mathbf{P}_6 = [P_x \ P_y \ P_z]^T$ y la matriz de rotación de la orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_6$ tal y como se describe en la Sección 2.2.2. Entonces:

$$\mathbf{p}_m = {}^0\mathbf{P}_6 - l_4\mathbf{z}_6$$

donde $l_4 = 0.158m$, dado que es la longitud del último eslabón del manipulador, y el vector \mathbf{z}_6 es el vector \mathbf{a} correspondiente a la orientación ($\mathbf{z}_6 = [a_x, a_y, a_z]^T$) de la matriz de rotación ${}^0\mathbf{R}_6$, el cual es un valor numérico conocido, pues se calcula en base los ángulos de Tait-Bryan (ϕ, ρ, ψ) de la orientación deseada, como se muestra a continuación:

$${}^0\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\rho & 0 & S\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\rho & 0 & C\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Para encontrar los valores de q_1 , q_2 y q_3 , se emplean métodos geométricos, donde el manipulador se analizará de acuerdo a la Figura 4.50, donde las longitudes de los eslabones son: $l_1=0.675m$, $l_a=0.26m$, $l_b=0.035m$, $l_2=0.68m$ y $l_3=0.67m$.

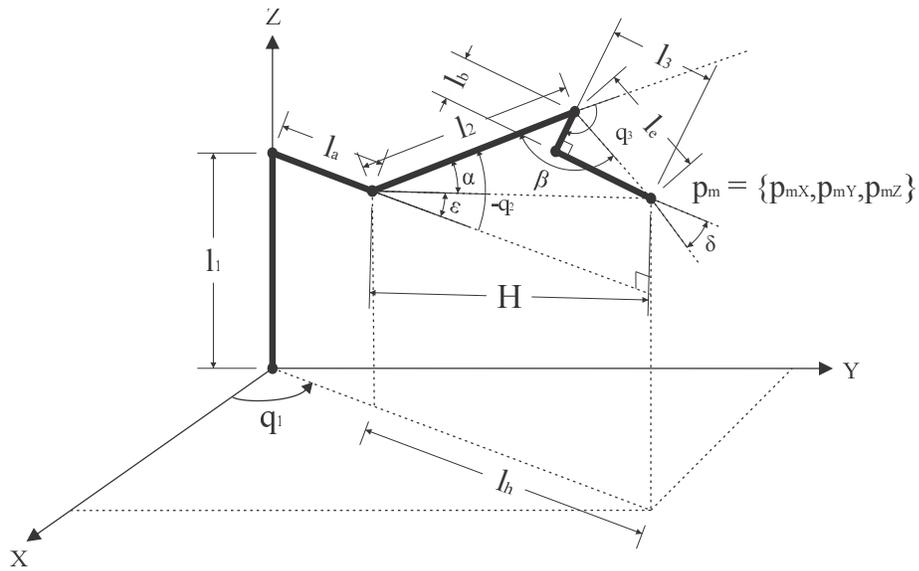


Figura 4.50: Análisis geométrico de robot KUKA KR 16 para la posición \mathbf{p}_m .

Entonces, las posiciones articulares relacionadas a la Figura 4.50 son:

$$q_1 = \tan^{-1} \left(\frac{p_{mY}}{p_{mX}} \right)$$

$$q_2 = -(\alpha + \varepsilon)$$

$$q_3 = \pi - \beta - \delta$$

donde:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{l_2^2 - l_e^2 + H^2}{2 l_2 H} \right)$$

$$H = \sqrt{l_h^2 + (p_{mZ} - l_1)^2}$$

$$l_h = \sqrt{p_{mX}^2 + p_{mY}^2} - l_a$$

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{p_{mZ} - l_1}{l_h} \right)$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin(\alpha) H}{l_e} \right)$$

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{l_b}{l_3} \right)$$

Para el resto de las variables articulares, se emplean las ecuaciones establecidas en la Sección

2.2.2.

$${}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6$$

donde:

$${}^0\mathbf{R}_3 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3$$

entonces:

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & S_4C_5S_6 + C_4C_6 & -S_4C_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \tan^{-1} \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right)$$

$$q_5 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - r_{33}^2}}{r_{33}} \right)$$

$$q_6 = \tan^{-1} \left(\frac{r_{32}}{r_{31}} \right)$$

Las posiciones y velocidades articulares para cada grado de libertad obtenidos con el algoritmo de modelado cinemático inverso se muestran en la Figura 4.51.

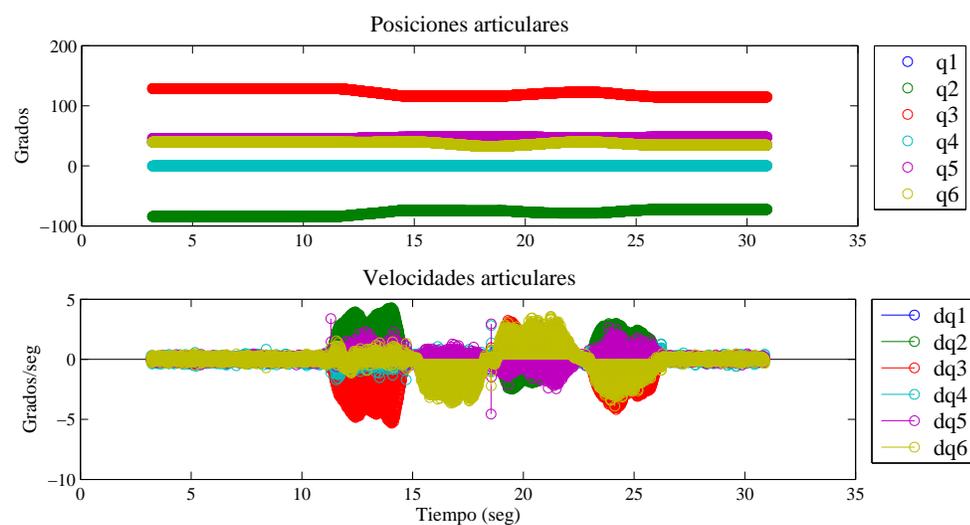


Figura 4.51: Variables articulares para KUKA KR 16.

A continuación, en las Figuras 4.52 y 4.53 se muestran las posiciones y velocidades articulares para cada grado de libertad obtenidos por separado:

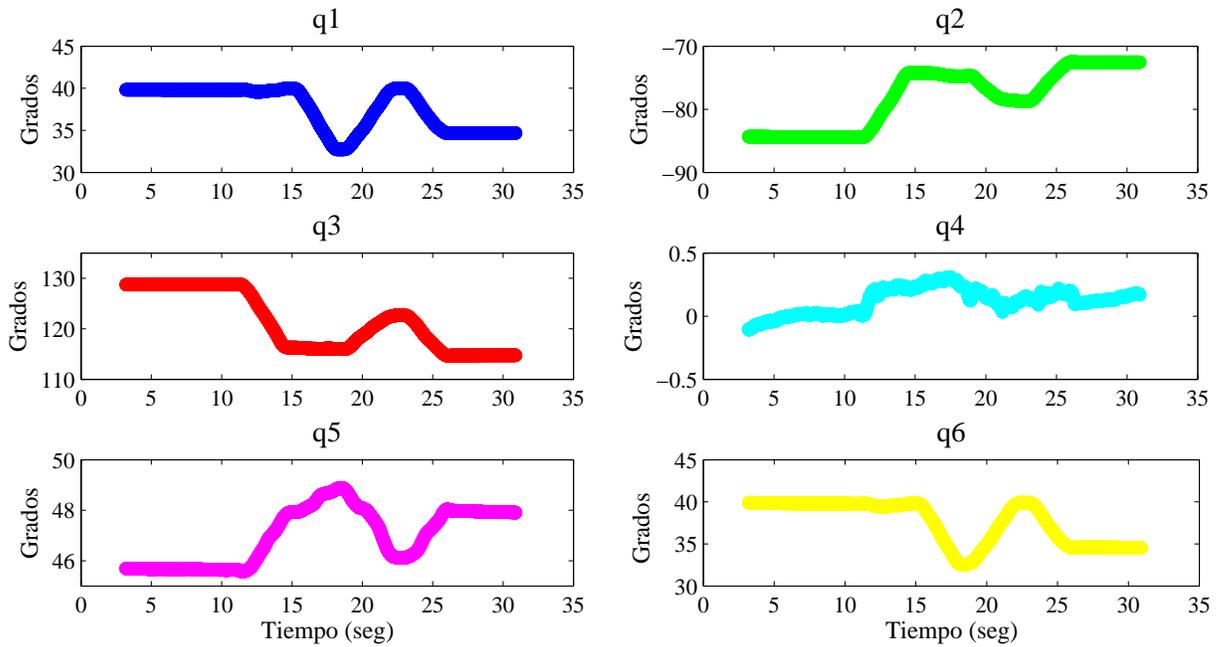


Figura 4.52: Posiciones articulares para KUKA KR 16.

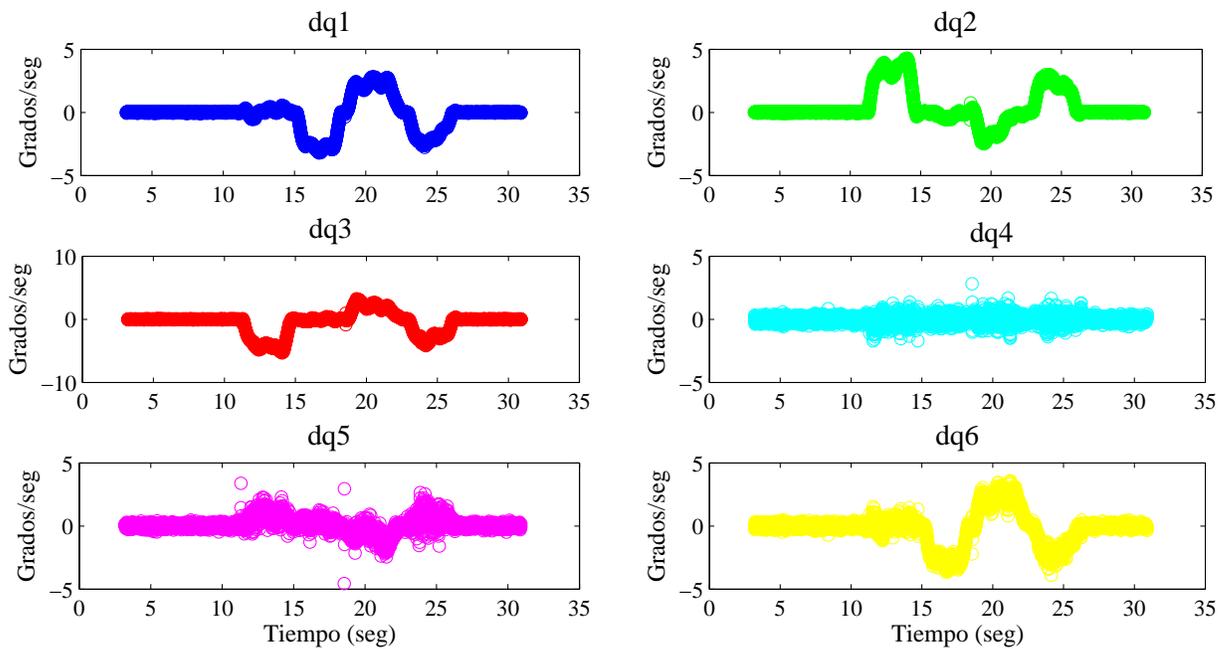


Figura 4.53: Velocidades articulares para KUKA KR 16.

En la Figura 4.54 se muestra una comparación entre la trayectoria deseada, la adquirida por el sensor y la generada por el manipulador KUKA KR 16 en la simulación.

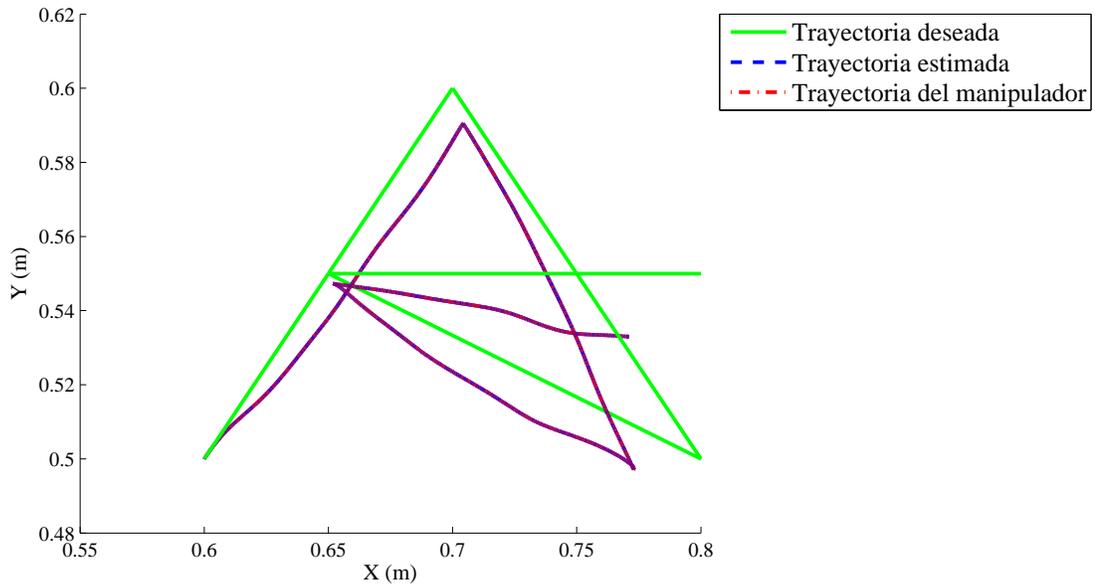


Figura 4.54: Trayectoria deseada vs. trayectoria estimada vs. trayectoria del manipulador KUKA KR 16 vista en 2D.

Para la generación de la trayectoria de las posiciones y velocidades articulares para cada grado de libertad, el algoritmo emplea el interpolador cúbico o el de orden 5, los resultados mostrados en la Figura 4.55 corresponden a las posiciones y velocidades interpoladas obtenidas con el interpolador cúbico.

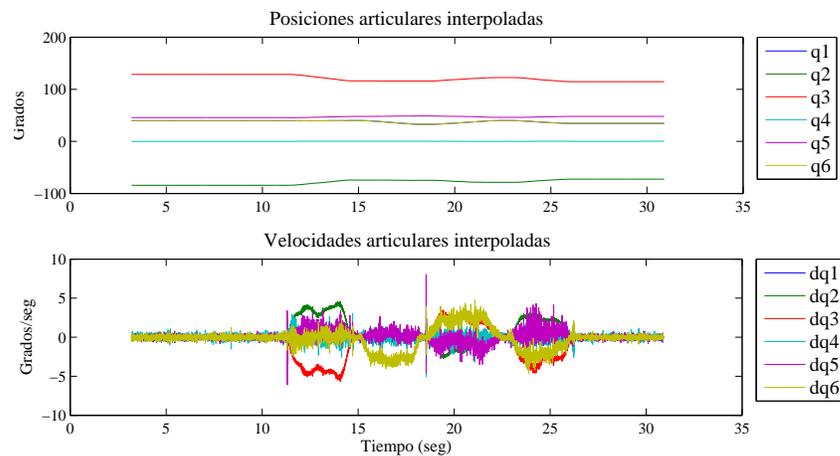


Figura 4.55: Variables articulares para KUKA KR 16 obtenidas con el interpolador cúbico.

A continuación, en las Figuras 4.56 y 4.57 se muestran las posiciones y velocidades articulares interpoladas para cada grado de libertad obtenidos por separado:

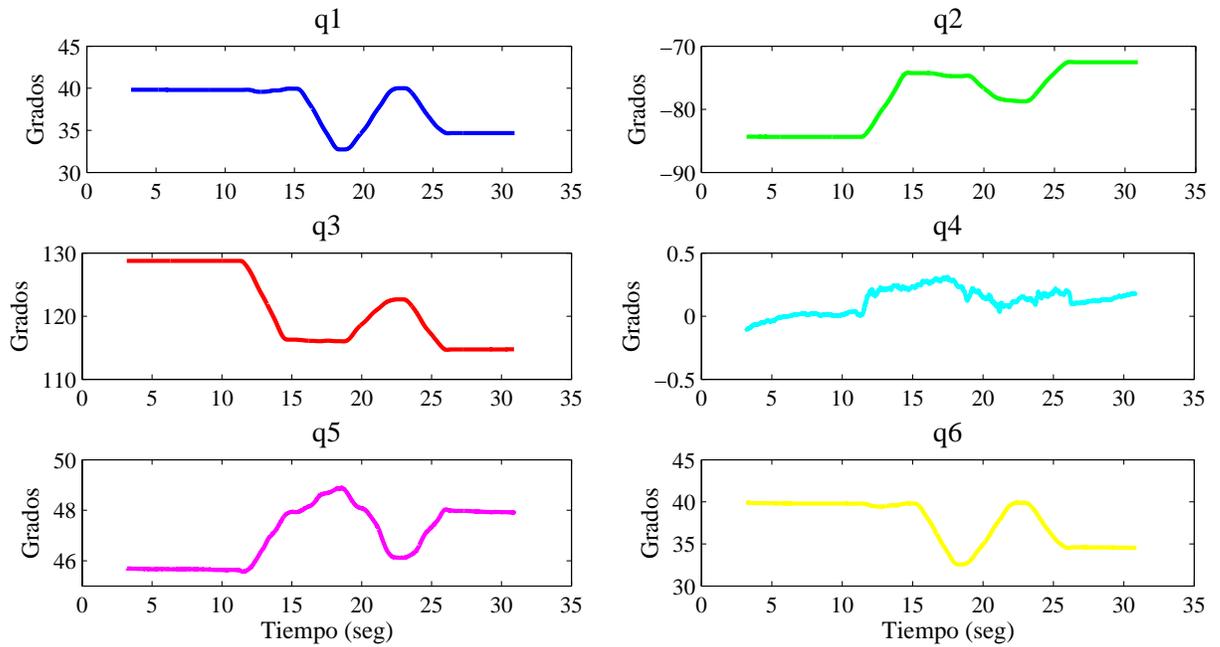


Figura 4.56: Posiciones articulares interpoladas para KUKA KR 16.

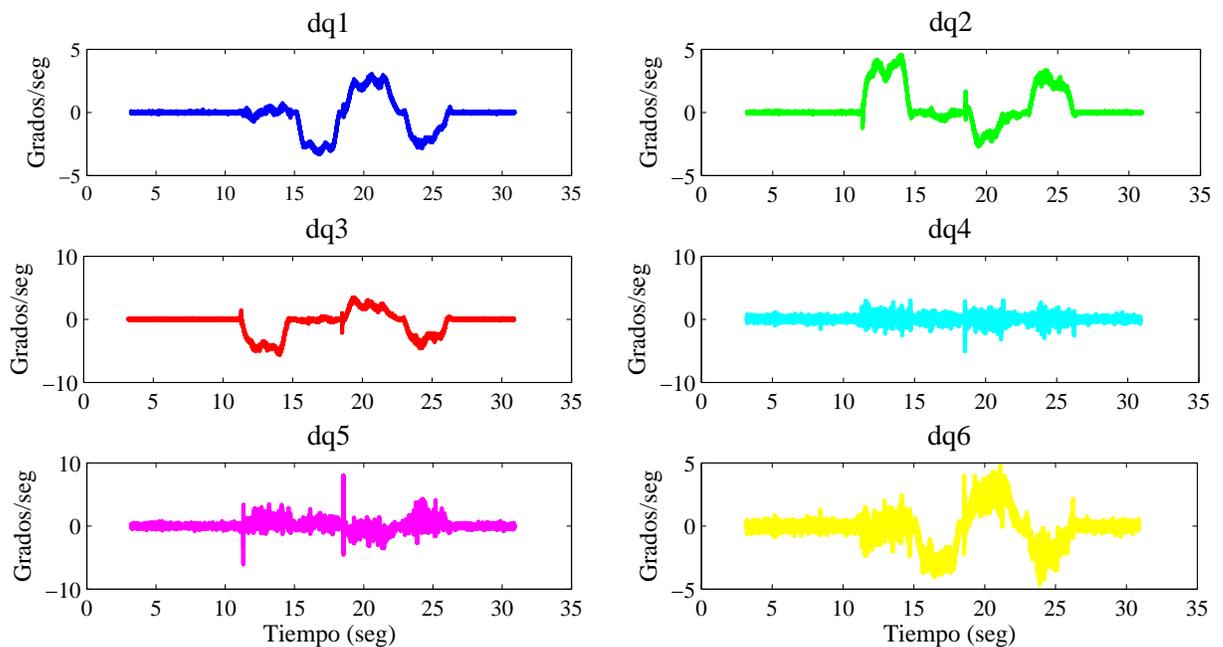


Figura 4.57: Velocidades articulares interpoladas para KUKA KR 16.

En la Figura 4.58 se muestra una comparación entre la trayectoria deseada, la adquirida por el sensor y la generada por el manipulador KUKA KR 16 después de la interpolación cúbica en la simulación.

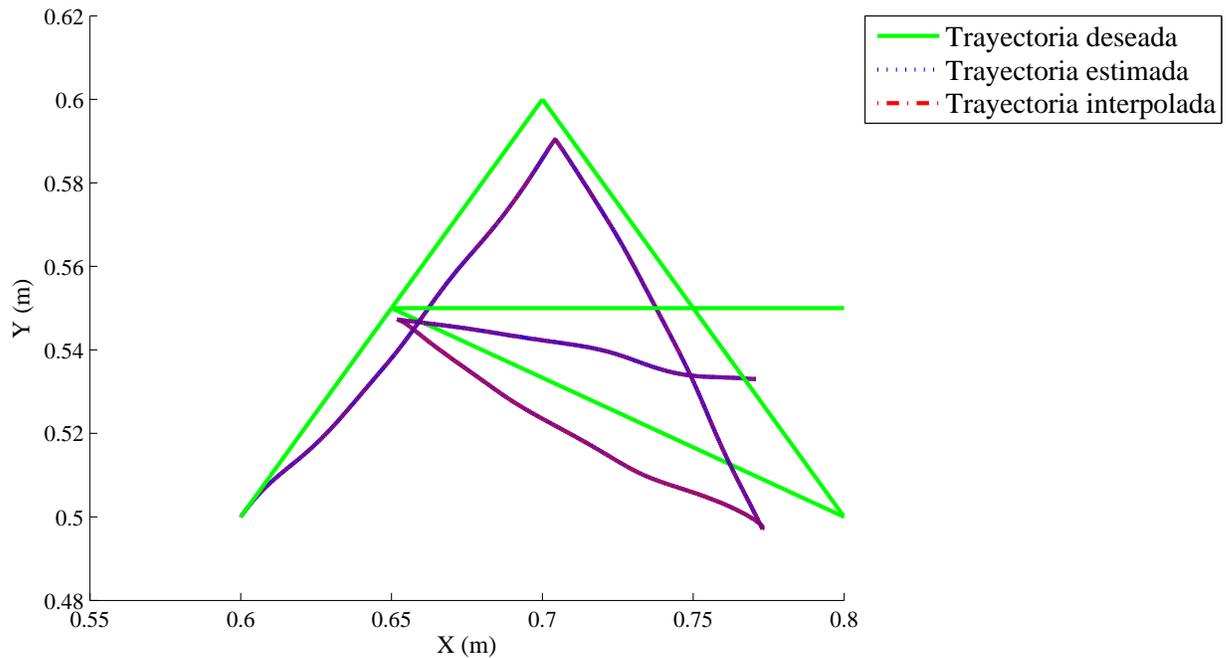


Figura 4.58: Trayectoria deseada vs. trayectoria estimada por el sensor vs. trayectoria del manipulador KUKA KR 16 interpolada vista en 2D.

Los resultados obtenidos con el algoritmo de evaluación de desempeño para el robot KUKA KR16 y la trayectoria propuesta se muestran en las siguientes gráficas:

Mediante el algoritmo de evaluación de desempeño se evalúan los índices de desempeño para algunos de los puntos de la trayectoria articular. Este algoritmo requiere como entrada la matriz Jacobiana de velocidad, la matriz de inercias del MDI y las posiciones articulares de los puntos a evaluar. Dado que no se cuenta para este caso con el MDI, sólo se efectuó una evaluación de desempeño de los índices de desempeño cinetostáticos (Sección 2.5.2), los cuales se muestran a continuación:

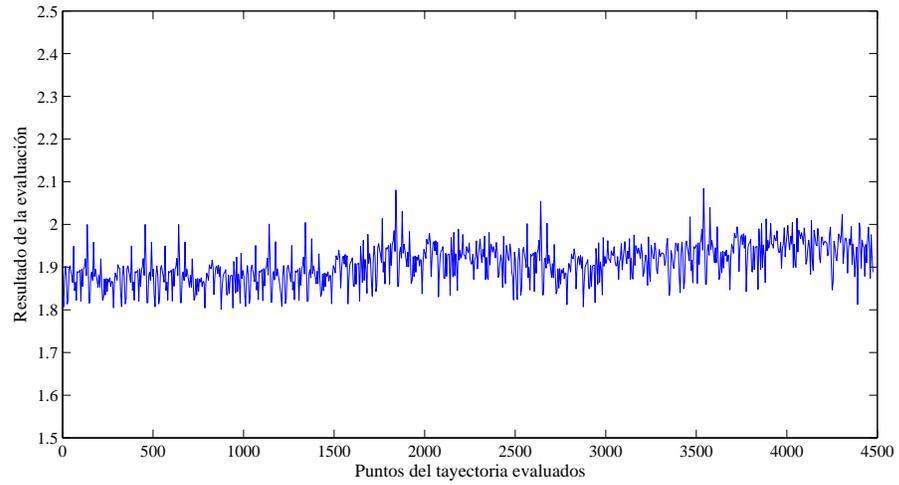


Figura 4.59: Número de condición del manipulador KUKA KR 16.

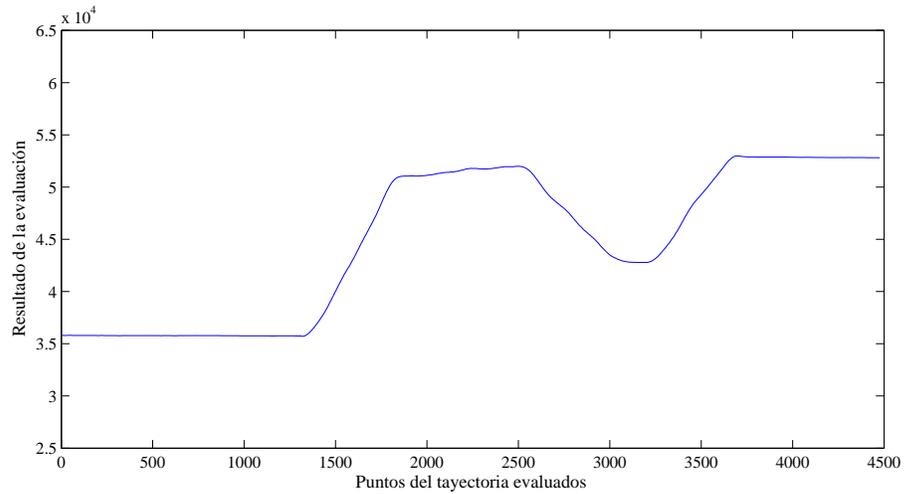


Figura 4.60: Manipulabilidad cinemática del manipulador KUKA KR 16.

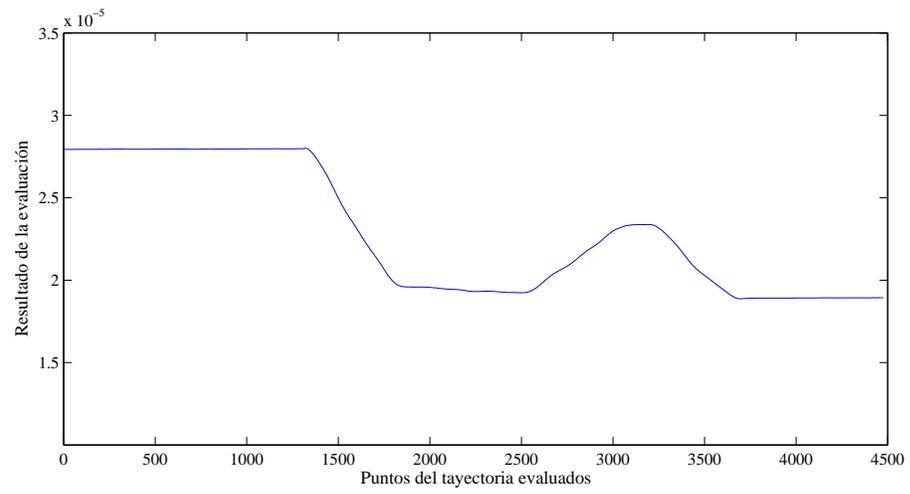


Figura 4.61: Manipulabilidad de fuerza del manipulador KUKA KR 16.

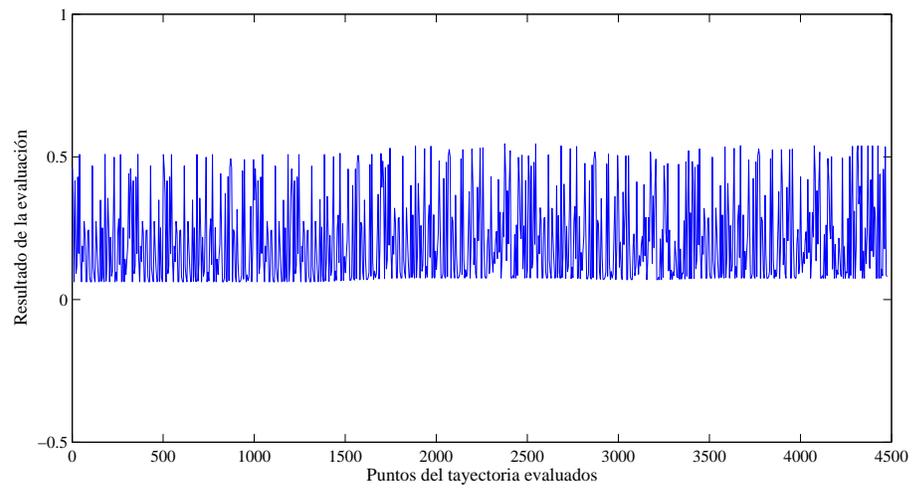


Figura 4.62: Mínimo valor singular del manipulador KUKA KR 16.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo futuro

En el presente trabajo de investigación, se ha propuesto un esquema de adquisición y procesamiento de la trayectoria generada por un humano experto, la cual posteriormente sera emulada por un manipulador robótico mediante técnicas de modelado, generación de trayectorias y una evaluación del desempeño del manipulador en base a la tarea realizada, como se muestra en la Figura 5.1.

Son diversas las ventajas del esquema propuesto que se muestra en la Figura 5.1, en el cual se emplean acelerómetros y giroscopios como sensores principales, en vez de emplear *SVC*: Reducción de costos, dado que no se requiere una estructura especial y sofisticado *SVC*, no esta delimitado a un área de trabajo en específico, y no es susceptible a interferencias de iluminación.

El algoritmo en base a la Figura 5.1 genera la siguiente información:

- Estimación de orientación para los ángulos ρ y ϕ (dos ejes de trabajo).
- Estimación de aceleración a en los tres ejes de trabajo.
- Estimación de velocidad V , en los tres ejes de trabajo.
- Estimación de posición \mathbf{P} , en los tres ejes de trabajo.
- Modelado cinemático de directo de posición del manipulador (simbólico).

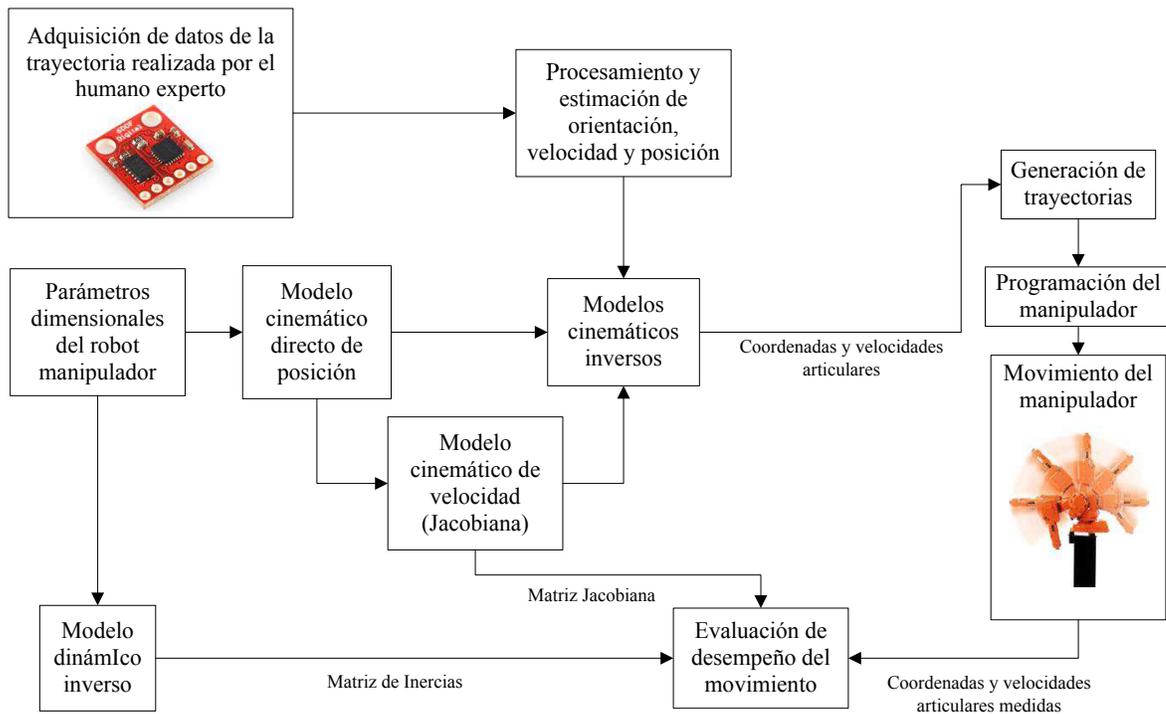


Figura 5.1: Metodología implementada.

- Modelado cinemático de inverso de posición del manipulador (numérico).
- Modelado cinemático de velocidad del manipulador (simbólico).
- Modelado dinámico del manipulador (simbólico).
- Posiciones articulares del manipulador en función del tiempo (numérico).
- Velocidades articulares del manipulador función del tiempo (numérico).
- Evaluaciones del desempeño cinemático y dinámico del manipulador (numérico).

La metodología y algoritmo propuestos en este trabajo, pueden usarse o modificarse para otros tipos de tareas de manipuladores tales como: ensamble, dispensado, pintura, soldadura, etc. Además puede emplearse como base para un algoritmo de diseño iterativo de manipuladores.

Aun así, tanto el hardware como el software que se emplearon para los casos de estudio, tienen

la limitación de no detectar movimientos muy lentos, lo cual provoca errores de atenuación y pérdidas de información, así que en base a esto y lo descrito en la los alcances del trabajo (Sección 1.6), será conveniente estudiar los siguientes casos no resueltos en este trabajo:

- Implementar sensores de mejor calidad, para obtener menos perturbaciones externas.
- Implementar módulos de adquisición de datos que permitan contar con una mayor tasa de muestreo.
- Estimación del ángulo de orientación *yaw* (ψ), para obtener una estimación en orientación completa y mejorar los resultados en estimación posición.
- Implementar diferentes métodos de integración numérica.
- Implementar un análisis del error acumulado a través del tiempo.
- Optimizar del código, para realizar una mejora en el tiempo de ejecución.
- Simplificar el código para permitir procesado en línea.
- Incorporar fricciones y perturbaciones al modelo dinámico.
- Incluir más índices de desempeño para realizar una evaluación más completa.
- Incluir los efectos del controlador en el análisis presentado.

Bibliografía

- [1] A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer, and R. Aracil, *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill/ Interamericana de España, 1997.
- [2] C. C. Tsang, P. H. W. Leong, G. Zhang, C. F. Chung, Z. Dong, G. Shi, and W. J. Li, “Handwriting tracking based on coupled μ imu/electromagnetic resonance motion detection,” in *Robotics and Biomimetics, 2007. ROBIO 2007. IEEE International Conference on*, pp. 377–381, IEEE, 2007.
- [3] S. O. Madgwick, “An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays,” *Report x-io and University of Bristol (UK)*, 2010.
- [4] “World robotics industrial robots 2014,” June 2014. IFR Statistical Department.
- [5] E. Foxlin, “Pedestrian tracking with shoe-mounted inertial sensors,” *Computer Graphics and Applications, IEEE*, vol. 25, pp. 38–46, Nov 2005.
- [6] X. Yun, E. Bachmann, H. Moore, and J. Calusdian, “Self-contained position tracking of human movement using small inertial/magnetic sensor modules,” in *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*, pp. 2526–2533, April 2007.
- [7] M. Euston, P. Coote, R. Mahony, J. Kim, and T. Hamel, “A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing uav,” in *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pp. 340–345, IEEE, 2008.
- [8] S.-h. Won, W. Melek, and F. Golnaraghi, “A fastened bolt tracking system for a hand-held tool using an inertial measurement unit and a triaxial magnetometer,” in *Industrial Electronics, 2009. IECON '09. 35th Annual Conference of IEEE*, pp. 2703–2708, Nov 2009.
- [9] S.-h. Won, F. Golnaraghi, and W. Melek, “A fastening tool tracking system using an imu and a position sensor with kalman filters and a fuzzy expert system,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 56, pp. 1782–1792, May 2009.
- [10] O. Wongwirat and C. Chaiyarat, “A position tracking experiment of mobile robot with inertial measurement unit (imu),” in *Control Automation and Systems (ICCAS), 2010 International Conference on*, pp. 304–308, Oct 2010.
- [11] S. Sabatelli, M. Galgani, L. Fanucci, and A. Rocchi, “A double stage kalman filter for sensor fusion and orientation tracking in 9d imu,” in *Sensors Applications Symposium (SAS), 2012 IEEE*, pp. 1–5, Feb 2012.

- [12] X. Wang, D. Liu, Y. Tao, and Y. Cui, "An optimized path planning method for off-line programming of a industrial robot," in *Computer Science and Electronics Engineering (ICC-SEE), 2012 International Conference on*, vol. 3, pp. 57–60, March 2012.
- [13] M. Dinham and G. Fang, "Weld seam detection using computer vision for robotic arc welding," in *Automation Science and Engineering (CASE), 2012 IEEE International Conference on*, pp. 771–776, Aug 2012.
- [14] J. Hatwig, P. Minnerup, M. Zaeh, and G. Reinhart, "An automated path planning system for a robot with a laser scanner for remote laser cutting and welding," in *Mechatronics and Automation (ICMA), 2012 International Conference on*, pp. 1323–1328, Aug 2012.
- [15] Z. Yin, X. Yuan, G. Zhang, and L. Wu, "Automated generation of robot mag surfacing path for remanufacturing system," in *Mechatronics and Automation (ICMA), 2012 International Conference on*, pp. 1347–1351, Aug 2012.
- [16] G. Erdős, Z. Kemény, A. Kovács, and J. Vánca, "Planning of remote laser welding processes," *Procedia {CIRP}*, vol. 7, no. 0, pp. 222 – 227, 2013. Forty Sixth {CIRP} Conference on Manufacturing Systems 2013.
- [17] H. Fourati, N. Manamanni, L. Afilal, and Y. Handrich, "Position estimation approach by complementary filter-aided imu for indoor environment," in *Control Conference (ECC), 2013 European*, pp. 4208–4213, July 2013.
- [18] F. Alam, Z. ZhaiHe, and H. JiaJia, "A comparative analysis of orientation estimation filters using mems based imu," in *2nd International Conference on Research in Science, Engineering and Technology (ICRSET 2014)*, pp. 86–91, Mar 2014.
- [19] A. Cavallo, A. Cirillo, P. Cirillo, G. De Maria, P. Falco, C. Natale, and S. Pirozzi, "Experimental comparison of sensor fusion algorithms for attitude estimation," *Proc. IEEE IFAC*, pp. 7585–7591, 2014.
- [20] D. D. Quoc, J. Sun, V. N. Le, and N. N. Tan, "Sensor fusion based on complementary algorithms using mems imu," *International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition*, vol. 8, no. 2, pp. 313–324, 2015.
- [21] F. Abyarjoo, A. Barreto, J. Cofino, and F. R. Ortega, "Implementing a sensor fusion algorithm for 3d orientation detection with inertial/magnetic sensors," in *Innovations and Advances in Computing, Informatics, Systems Sciences, Networking and Engineering*, pp. 305–310, Springer, 2015.
- [22] J. J. Craig, *Robótica*. Pearson/Prentice, 3 ed., 2006.
- [23] L. Torres-Treviño, "Evonorm: Easy and effective implementation of estimation of distribution algorithms," *Special Issue: Advances in Computer Science and Engineering*, p. 75, 2006.
- [24] L. Torres-Treviño, "Evonorm, a new evolutionary algorithm to continuous optimization," in *Workshop on Optimization by Building and Using Probabilistic Models (OBUPM 2006). Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2006) CD Proceeding Tutorials and Workshops, Seattle, 2006*.

- [25] H. A. Moreno, R. Saltaren, I. Carrera, L. Puglisi, and R. Aracil, "Índices de desempeño de robots manipuladores: una revisión del estado del arte," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 9, no. 2, pp. 111–122, 2012.
- [26] J. Angeles and J. Angeles, *Fundamentals of robotic mechanical systems*, vol. 2. Springer, 2002.
- [27] K. Abdulrahim, "Understanding the performance of zero velocity updates in mems-based pedestrian navigation," *International Journal of Advancements in Technology*, vol. 5, no. 1, pp. 53–60, 2014.
- [28] I. Skog, P. Handel, J.-O. Nilsson, and J. Rantakokko, "Zero-velocity detection - an algorithm evaluation," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 11, pp. 2657–2666, 2010.
- [29] P. Kim, S. Rhee, and C. H. Lee, "Automatic teaching of welding robot for free-formed seam using laser vision sensor," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 31, no. 3, pp. 173 – 182, 1999.
- [30] A. Ames, E. Hinman-Sweeney, and J. Sizemore, "Automated generation of weld path trajectories," in *Assembly and Task Planning: From Nano to Macro Assembly and Manufacturing, 2005. (ISATP 2005). The 6th IEEE International Symposium on*, pp. 182–187, July 2005.
- [31] D.-S. Wang, X.-G. Liu, and X.-H. Xu, "Calibration of the arc-welding robot by neural network," in *Machine Learning and Cybernetics, 2005. Proceedings of 2005 International Conference on*, vol. 7, pp. 4064–4069 Vol. 7, Aug 2005.
- [32] L. He-xi, S. Yong-hua, W. Guo-rong, and Z. Xiao-xi, "Automatic teaching of welding robot for 3-dimensional seam based on ant colony optimization algorithm," in *Intelligent Computation Technology and Automation, 2009. ICICTA '09. Second International Conference on*, vol. 3, pp. 398–402, Oct 2009.
- [33] H. Ma, S. Wei, Z. Sheng, T. Lin, and S. Chen, "Robot welding seam tracking method based on passive vision for thin plate closed-gap butt welding," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 48, no. 9-12, pp. 945–953, 2010.
- [34] C. Hai-chu, Z. Rui-hua, L. Jinghua, and L. Xiaopeng, "Application research of fuzzy control methods used in welding robot," in *Mechanical and Electronics Engineering (ICMEE), 2010 2nd International Conference on*, vol. 2, pp. V2–261–V2–264, Aug 2010.
- [35] X. Liao, W. Wang, Y. Lin, and C. Gong, "Time-optimal trajectory planning for a 6r jointed welding robot using adaptive genetic algorithms," in *Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering (CMCE), 2010 International Conference on*, vol. 2, pp. 600–603, Aug 2010.
- [36] C. Cheng and W. Baoqiang, "A trajectory tracking method for welding manipulator based on fuzzy gauss function neural network," *Procedia Engineering*, vol. 29, no. 0, pp. 189 – 193, 2012. 2012 International Workshop on Information and Electronics Engineering.

- [37] Y. Yueqiang and T. Zhiwei, "The study of path planning of welding manipulator based on improved qpso," in *Measuring Technology and Mechatronics Automation (ICMTMA), 2014 Sixth International Conference on*, pp. 774–777, Jan 2014.
- [38] M. Cheguini and F. Ruiz, "Real-time attitude estimation based on gradient descent algorithm," in *Circuits and Systems (CWCAS), 2012 IEEE 4th Colombian Workshop on*, pp. 1–6, Nov 2012.
- [39] S. Madgwick, A. Harrison, and R. Vaidyanathan, "Estimation of imu and marg orientation using a gradient descent algorithm," in *Rehabilitation Robotics (ICORR), 2011 IEEE International Conference on*, pp. 1–7, June 2011.
- [40] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot modeling and control*, vol. 3. Wiley New York, 2006.

Apéndice A

Método de Denavit-Hartenberg

A.1. Método de Denavit-Hartenberg

De acuerdo a [1], los pasos del método de Denavit-Hartenberg son:

1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se enumerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
2. Numerar cada articulación comenzando por 2 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n .
3. Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
4. Para i de 0 a $n - 1$ situar el z_i sobre el eje de la articulación $i + 1$.
5. Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0 .
6. Para i de 1 a $n - 1$, situar el sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i . Si ambos ejes se cortase se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación $i + 1$.
7. Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i .
8. Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i .
9. Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del manipulador de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .
10. Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos, de acuerdo a la regla de la mano derecha.
11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1} , que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_{i-1} y x_i quedasen alineados.

12. Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.
13. Obtener α_i como el ángulo que habría que girar entorno a x_i (que ahora coincidiría con x_i), para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$, de acuerdo a la regla de la mano derecha.
14. Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$.
15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del manipulador $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$.
16. La matriz \mathbf{T} define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo de referido a la base en función de las n coordenadas articulares.

Apéndice B

Cuaterniones

B.1. Representación en cuaterniones

Un cuaternión es un número complejo de cuatro dimensiones que es usado para representar la orientación de un cuerpo rígido o trama de referencia en el espacio tridimensional local. Una orientación arbitraria de la trama B respecto a la trama A puede lograrse a través de una rotación de ángulo θ de alrededor de un eje ${}^A\hat{r}$ definida en la trama A , tal y como se muestra en la Figura B.1 [3].

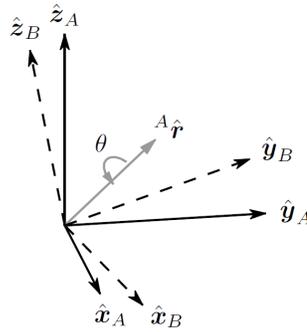


Figura B.1: Orientación de la trama B respecto a la trama A [3]

donde los vectores unitarios \hat{x}_A , \hat{y}_A y \hat{z}_A son mutuamente ortogonales, y \hat{x}_B , \hat{y}_B y \hat{z}_B definen el eje principal de las tramas coordenadas A y B respectivamente.

El cuaternión que describe la orientación de la Figura B.1, ${}^A_B\hat{q}$, está definido en la Ecuación B.1.1, donde r_x , r_y y r_z son las componentes del vector unitario ${}^A\hat{r}$ en los ejes x , y y z de la

trama A respectivamente.

$${}^A_B \hat{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] = \left[\cos \frac{\theta}{2} \quad -r_x \sin \frac{\theta}{2} \quad -r_y \sin \frac{\theta}{2} \quad -r_z \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{B.1.1})$$

Donde q_1, q_2, q_3 y q_4 son los componentes del cuaternión, y deben satisfacer la Ecuación B.1.2.

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (\text{B.1.2})$$

El conjugado de un cuaternión puede ser usado para cambiar las tramas relacionadas descritos por una orientación. Por ejemplo ${}^B_A \hat{q}$ es el conjugado de ${}^A_B \hat{q}$ y describe la orientación de la trama A respecto a B .

$${}^A_B \hat{q}^* = {}^B_A \hat{q} = [q_1 \quad -q_2 \quad -q_3 \quad -q_4] \quad (\text{B.1.3})$$

El producto de cuaterniones, denotado por \otimes , puede ser usado para definir las orientaciones compuestas. Por ejemplo, para dos orientaciones descritas por ${}^A_B \hat{q}$ y ${}^B_C \hat{q}$, la orientación compuesta ${}^A_C \hat{q}$ esta definida la Ecuación B.1.4.

$${}^A_C \hat{q} = {}^B_C \hat{q} \otimes {}^A_B \hat{q} \quad (\text{B.1.4})$$

Para dos cuaterniones, a y b , el producto de cuaterniones puede ser calculado usando la regla de Hamilton, la cual esta definida en la Ecuación B.1.5. Un producto de cuaterniones no es conmutativo; esto es, $a \otimes b \neq b \otimes a$.

$$\begin{aligned} a \otimes b &= [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4] \otimes [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4] \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3 \\ a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2 \\ a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

Un vector de tres dimensiones puede ser rotado por un cuaternión usando la relación descrita en la Ecuación B.1.6. ${}^A v$ y ${}^B v$ son el mismo vector descrito en la trama A y la trama B respectivamente, donde cada vector contiene un cero insertado en su primer elemento para convertirlo en un vector de cuatro elementos.

$${}^B v = {}^A_B \hat{q} \otimes {}^A v \otimes {}^A_B \hat{q}^* \quad (\text{B.1.6})$$

Con la representación en cuaterniones se obtiene una matriz de cosenos directores (DCM) con solo una rotación respecto a un eje, de acuerdo a la formula Euler-Rodrigues. La DCM de la trama A a la trama B puede ser representado por la Ecuación B.1.7.

$$\begin{aligned} {}^A_B R &= \begin{bmatrix} cX_x & cY_x & cZ_x \\ cX_y & cY_y & cZ_y \\ cX_z & cY_z & cZ_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) \\ 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3 q_4 + q_1 q_2) \\ 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) & 2(q_3 q_4 + q_1 q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

Apéndice C

Modelado del manipulador KUKA KR 16

C.1. Modelo cinemático directo de posición

Las ecuaciones correspondientes a la posición y orientación del efector final del MCDP son:

$$P_x = (13 C(q_1))/50 + (17 C(q_1) C(q_2))/25 - (79 S(q_5) (S(q_1) S(q_4) + C(q_4) (C(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3) - C(q_1) C(q_2) C(\pi/2 + q_3)))))/500 + (79 C(q_5) (C(q_1) C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(q_1) C(\pi/2 + q_3) S(q_2)))/500 - (7 C(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3))/200 + (7 C(q_1) C(q_2) C(\pi/2 + q_3))/200 + (67 C(q_1) C(q_2) S(\pi/2 + q_3))/100 + (67 C(q_1) C(\pi/2 + q_3) S(q_2))/100$$

$$P_y = (13 S(q_1))/50 + (17 C(q_2) S(q_1))/25 + (79 S(q_5) (C(q_1) S(q_4) - C(q_4) (S(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3) - C(q_2) C(\pi/2 + q_3) S(q_1)))))/500 + (79 C(q_5) (C(q_2) S(q_1) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_1) S(q_2)))/500 + (67 C(q_2) S(q_1) S(\pi/2 + q_3))/100 + (67 C(\pi/2 + q_3) S(q_1) S(q_2))/100 - (7 S(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3))/200 + (7 C(q_2) C(\pi/2 + q_3) S(q_1))/200$$

$$P_z = (67 C(q_2) C(\pi/2 + q_3))/100 - (17 S(q_2))/25 - (7 C(q_2) S(\pi/2 + q_3))/200 - (7 C(\pi/2 + q_3) S(q_2))/200 - (67 S(q_2) S(\pi/2 + q_3))/100 + (79 C(q_5) (C(q_2) C(\pi/2 + q_3) - S(q_2) S(\pi/2 + q_3)))/500 - (79 C(q_4) S(q_5) (C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_2)))/500 + 27/40$$

$$\phi = \text{atan}((S(q_6) (S(q_5) (C(q_2) C(\pi/2 + q_3) - S(q_2) S(\pi/2 + q_3)) + C(q_4) C(q_5) (C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_2))) + C(q_6) S(q_4) (C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_2)))/(C(q_5) (C(q_2) C(\pi/2 + q_3) - S(q_2) S(\pi/2 + q_3)) - C(q_4) S(q_5) (C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_2))))$$

$$\rho = \text{atan}((C(q_6) (S(q_5) (C(q_2) C(\pi/2 + q_3) - S(q_2) S(\pi/2 + q_3)) + C(q_4) C(q_5) (C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_2))) - S(q_4) S(q_6) (C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) S(q_2)))/(S(q_6) (C(q_4) S(q_1) - S(q_4) (C(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3) - C(q_1) C(q_2) C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6) (C(q_5) (S(q_1) S(q_4) + C(q_4) (C(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3) - C(q_1) C(q_2) C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5) (C(q_1) C(q_2) S(\pi/2 + q_3) + C(q_1) C(\pi/2 + q_3) S(q_2))))^2 + (S(q_6) (C(q_1) C(q_4) + S(q_4) (S(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3) - C(q_2) C(\pi/2 + q_3) S(q_1))) + C(q_6) (C(q_5) (C(q_1) S(q_4) - C(q_4) (S(q_1) S(q_2) S(\pi/2 + q_3) - C(q_2) C(\pi/2 + q_3) S(q_1))))$$

$$+ q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1))) - S(q5) (C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3) + C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2))))^2)^{1/2}$$

$$\psi = -\text{atan}((S(q6) (C(q1) C(q4) + S(q4) (S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1))) + C(q6) (C(q5) (C(q1) S(q4) - C(q4) (S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1))) - S(q5) (C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3) + C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2)))))) / (S(q6) (C(q4) S(q1) - S(q4) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3))) + C(q6) (C(q5) (S(q1) S(q4) + C(q4) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)))) + S(q5) (C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3) + C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2))))))$$

C.2. Matriz Jacobiana de velocidad

Las ecuaciones correspondientes a los elementos de la matriz Jacobiana de velocidad son:

$$\mathbf{J}(1, 1) = (7 S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3)) / 200 - (17 C(q2) S(q1)) / 25 - (79 S(q5) (C(q1) S(q4) - C(q4) (S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1)))) / 500 - (79 C(q5) (C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3) + C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2))) / 500 - (67 C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3)) / 100 - (67 C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2)) / 100 - (13 S(q1)) / 50 - (7 C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1)) / 200$$

$$\mathbf{J}(1, 2) = (67 C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)) / 100 - (79 C(q5) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3))) / 500 - (67 C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3)) / 100 - (79 C(q4) S(q5) (C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3) + C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2))) / 500 - (17 C(q1) S(q2)) / 25 - (7 C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3)) / 200 - (7 C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2)) / 200$$

$$\mathbf{J}(1, 3) = (67 C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)) / 100 - (67 C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3)) / 100 - (79 C(q4) S(q5) (C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3) + C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2))) / 500 - (79 C(q5) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3))) / 500 - (7 C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3)) / 200 - (7 C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2)) / 200$$

$$\mathbf{J}(1, 4) = -(79 S(q5) (C(q4) S(q1) - S(q4) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)))) / 500$$

$$\mathbf{J}(1, 5) = -(79 C(q5) (S(q1) S(q4) + C(q4) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)))) / 500 - (79 S(q5) (C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3) + C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2))) / 500$$

$$\mathbf{J}(1, 6) = 0$$

$$\mathbf{J}(2, 1) = (13 C(q1)) / 50 + (17 C(q1) C(q2)) / 25 - (79 S(q5) (S(q1) S(q4) + C(q4) (C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)))) / 500 + (79 C(q5) (C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3) + C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2))) / 500 - (7 C(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3)) / 200 + (7 C(q1) C(q2) C(\pi/2 + q3)) / 200 + (67 C(q1) C(q2) S(\pi/2 + q3)) / 100 + (67 C(q1) C(\pi/2 + q3) S(q2)) / 100$$

$$\mathbf{J}(2, 2) = (67 C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1)) / 100 - (79 C(q5) (S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1))) / 500 - (7 C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3)) / 200 - (7 C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2)) / 200 - (67 S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3)) / 100 - (79 C(q4) S(q5) (C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3) + C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2))) / 500 - (17 S(q1) S(q2)) / 25$$

$$\mathbf{J}(2, 3) = (67 C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1)) / 100 - (7 C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3)) / 200 - (7 C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2)) / 200 - (67 S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3)) / 100 - (79 C(q4) S(q5) (C(q2) S(q1) S(\pi/2 + q3) + C(\pi/2 + q3) S(q1) S(q2))) / 500 - (79 C(q5) (S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1))) / 500$$

$$\mathbf{J}(2, 4) = (79 S(q5) (C(q1) C(q4) + S(q4) (S(q1) S(q2) S(\pi/2 + q3) - C(q2) C(\pi/2 + q3) S(q1)))) / 500$$

$$\begin{aligned} & (S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) - C(q_5)C(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4) \\ & (C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3)))))/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - \\ & C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + \\ & q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))^2)/((S(q_6)(C(q_1)C(q_4) + S(q_4)(S(q_1)S(q_2) \\ & S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) + C(q_6)(C(q_5)(C(q_1)S(q_4) - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2) \\ & C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) - S(q_5)(C(q_2)S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3)S(q_1)S(q_2))))^2)/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - \\ & S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2) \\ & S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(6, 5) = & ((C(q_6)(S(q_5)(C(q_1)S(q_4) - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) + C(q_5)(C(q_2) \\ & S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3)S(q_1)S(q_2)))))/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1) \\ & C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) \\ & + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2)))) - (C(q_6)(S(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1) \\ & S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) - C(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))) \\ & (S(q_6)(C(q_1)C(q_4) + S(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) + C(q_6)(C(q_5)(C(q_1)S(q_4) \\ & - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) - S(q_5)(C(q_2)S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3) \\ & S(q_1)S(q_2)))))/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6) \\ & (C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 \\ & + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))^2)/((S(q_6)(C(q_1)C(q_4) + S(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + \\ & q_3)S(q_1))) + C(q_6)(C(q_5)(C(q_1)S(q_4) - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) - S(q_5) \\ & (C(q_2)S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3)S(q_1)S(q_2))))^2)/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - \\ & C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 \\ & + q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(6, 6) = & ((C(q_6)(C(q_1)C(q_4) + S(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) - S(q_6)(C(q_5)(C(q_1) \\ & S(q_4) - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) - S(q_5)(C(q_2)S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 \\ & + q_3)S(q_1)S(q_2)))))/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6) \\ & (C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + \\ & q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2)))) - ((C(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + \\ & q_3))) - S(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5)(C(q_1) \\ & C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))(S(q_6)(C(q_1)C(q_4) + S(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2) \\ & C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) + C(q_6)(C(q_5)(C(q_1)S(q_4) - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) \\ & - S(q_5)(C(q_2)S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3)S(q_1)S(q_2)))))/(S(q_6)(C(q_4)S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 \\ & + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2) \\ & C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))^2)/((S(q_6)(C(q_1)C(q_4) + S(q_4) \\ & (S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) + C(q_6)(C(q_5)(C(q_1)S(q_4) - C(q_4)(S(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + \\ & q_3) - C(q_2)C(\pi/2 + q_3)S(q_1))) - S(q_5)(C(q_2)S(q_1)S(\pi/2 + q_3) + C(\pi/2 + q_3)S(q_1)S(q_2))))^2)/(S(q_6)(C(q_4) \\ & S(q_1) - S(q_4)(C(q_1)S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + C(q_6)(C(q_5)(S(q_1)S(q_4) + C(q_4)(C(q_1) \\ & S(q_2)S(\pi/2 + q_3) - C(q_1)C(q_2)C(\pi/2 + q_3))) + S(q_5)(C(q_1)C(q_2)S(\pi/2 + q_3) + C(q_1)C(\pi/2 + q_3)S(q_2))))^2 \\ & + 1) \end{aligned}$$