

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**TESIS**

**ESTIMACIÓN PARÁMETROS MEDIANTE MÉTODOS DE  
CONTROL ÓPTIMO**

**POR**

**LUIS FERNANDO SÁNCHEZ GÓMEZ**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA**

**OCTUBRE, 2015**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**TESIS**

**ESTIMACIÓN FASORIAL MEDIANTE MÉTODOS DE  
CONTROL ÓPTIMO**

**POR**

**LUIS FERNANDO SÁNCHEZ GÓMEZ**

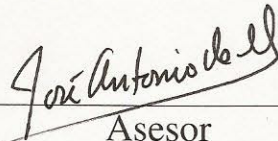
**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA**

**OCTUBRE, 2015**

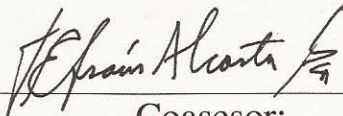
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Estimación Fasorial Mediante Métodos de Control Óptimo**” realizada por el alumno **M.C. Luis Fernando Sánchez Gómez**, matrícula número 1572372 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Doctor** en Ingeniería Eléctrica.

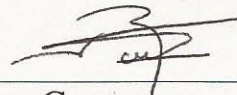
El Comité de Tesis



Asesor  
Dr. José Antonio de la O Serna



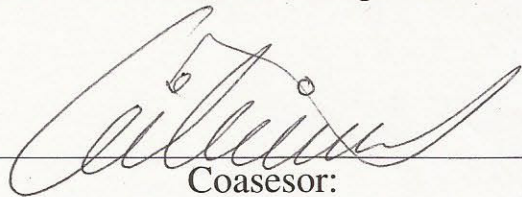
Coasesor:  
Dr. Efraín Alcorta García



Coasesor:  
Dr. José Ramón Rodríguez Cruz



Coasesor:  
Dr. Gerardo Maximiliano Méndez



Coasesor:  
Dr. Graciano Dieck Assad



Vo. Bo.  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirección de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a octubre del 2015

*A mi familia, quienes siempre pusieron lo "extra" a lo "ordinario" y  
me enseñaron como debería de ser...*

# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mi estimado asesor de tesis, Dr. José Antonio de la O Serna por haberme compartido sus conocimientos científicos, sus consejos de suma relevancia, su apoyo y entusiasmo en la búsqueda del saber; pero sobre todo por haberme tenido paciencia para guiarme durante todo el desarrollo del proyecto de tesis.

Agradezco también a los doctores, Dr. Efraín Alcorta García, Dr. José Ramón Rodríguez Cruz, Dr. Gerardo Maximiliano Méndez y Dr. Graciano Dieck Assad por sus valiosos comentarios y sugerencias con el objetivo de mejorar este trabajo de investigación.

También quiero extender un gran reconocimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo otorgado con el cual fue posible continuar y alcanzar el objetivo profesional planteado. A los doctores del Doctorado en Ingeniería Eléctrica por su tiempo y dedicación e igualmente quiero agradecer a mis amigos y compañeros por su entusiasmo y apoyo que nunca dejaron de demostrarme.

Pero principalmente quiero corresponder y dedicarle este esfuerzo a mi familia: Catalina, Fernando y David. Quiero darles las gracias por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, por creer en mí y cubrirme con su luz. Sin lugar a dudas, gracias por hacer de mí una mejor persona y formar parte de ese impulso que me hace levantarme todos los días y sonreír.

Luis Fernando Sánchez Gómez

Octubre 2015

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Luis Fernando Sánchez Gómez, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2015

**Profesor Asesor: José Antonio de la O Serna**

El análisis de los sistemas de distribución de energía o cualquier otro sistema cuyo comportamiento dependa de señales senoidales, se simplifica enormemente con la medición de **fasores**. El fasor no es más que la representación de una onda senoidal en el sistema de coordenadas polares. Esto permite reducir las necesidades de sistemas electrónicos y capacidad de cómputo, ya que no es necesario trabajar con largas expresiones como  $A \sin(\omega t + \varphi)$ . La mayoría de los algoritmos diseñados para determinar los fasores consideran una señal senoidal con amplitud y fase constantes por lo que llegan a presentar desventajas ya que el estado de los sistemas cambia de manera rápida debido a condiciones transitorias, contaminación por ruido, etc. Sin embargo, en la actualidad se desarrollan algoritmos enfocados en la estimación de fasores dinámicos, es decir, fasores determinados a partir de señales senoidales con amplitud y fase variantes en el tiempo. Las funciones variantes en el tiempo de amplitud y fase que complementan al fasor pueden ser aproximadas mediante polinomios de  $K$ -ésimo orden de Taylor, los cuales proporcionan no solo estimaciones de dicho fasor sino también de sus primeras  $K$  derivadas. Esto conduce a una pluralidad de representaciones del modelo aproximado de la señal pasabanda de una oscilación de potencia.

Mediante estos modelos truncados de señal, distintos algoritmos pueden ser aplicados a sus bases

vectoriales con el fin de encontrar observadores capaces de estimar los parámetros deseados, es decir, el fasor oscilatorio y sus primeras derivadas.

Cada uno de los algoritmos desarrollados presenta distintas características, lo que enriquece el campo teórico de la estimación de fasores. Es fundamental estudiar sus similitudes y disimilitudes con la finalidad de obtener criterios de diseño que optimicen los procesos de estimación logrando con esto una operación eficiente dentro de los márgenes teóricos, eléctricos, regulatorios y económicos existentes.

En primera instancia, el presente trabajo muestra la propuesta de una nueva técnica para la estimación de fasores dinámicos usando la fórmula de Ackermann para la asignación de un conjunto de eigenvalores en observadores de estado; así los nuevos algoritmos se implementan como filtros calculados mediante el vector de ganancias resultante de la fórmula de Ackermann. El método permite diseñar estimadores rápidos bajo condiciones transitorias, es decir, los estimados de las oscilaciones de la señal, obtenidos mediante esta técnica, convergen al valor en estado estacionario con un tiempo de asentamiento muy corto. Por otra parte, también proveen de estimaciones instantáneas (sin retardo) del fasor y sus  $K$  derivadas, además de estimados de la frecuencia instantánea y su razón de cambio (ROCOF), lo que preserva la sincronía con la señal, útil en aplicaciones de protecciones y control. El vector de estimados de los parámetros fasoriales es adquirido empleando dos tipos de observadores fuertemente ligados, el observador predictor y el observador actual. Estos son evaluados, dando más importancia al observador actual cuyos estimados son comparados directamente con los estimados del filtro de Kalman.

En segunda instancia, el trabajo de investigación expone el uso del algoritmo de Kalman para diseñar filtros con respuesta impulsional finita (FIR). Los filtros alternantes de Kalman surgen a partir de las similitudes entre las ecuaciones del algoritmo del filtro de Kalman y la de mínimos cuadrados recursivos (RLMS). La sinergia resultante de la yuxtaposición de ambos métodos provee de nuevas implementaciones para ambos algoritmos. El algoritmo alternante es factible para implementarse con factores de peso no solo de manera progresiva sino en ambos sentidos. Para resolver las disimilitudes, los métodos pueden emularse el uno al otro, por ejemplo, la respuesta en frecuencia de los filtros de Kalman alternante se mejora mediante la inclusión de la observación del ruido variante, cuya varianza cambia inversamente proporcional a una ventana bilateral usada como factor de peso en el algoritmo de los RLMS. Por otro lado, los RLMS alternantes pueden emular los estimados instantáneos del filtro de Kalman mediante la evaluación de su modelo de señal en el instante de tiempo deseado. Aunado a esto, es posible aplicar nuevos criterios de paro para el filtro progresivo de Kalman (tradicional) obtenidos de esta comparación. Dichas emulaciones son posibles cuando la matriz de transiciones es conocida. Esta metodología puede ser fácilmente extendida para diseñar los filtros Taylor-Fourier, o incluso la transformada digital Taylor-Fourier.



# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Índice General</b>	<b>viii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>xvii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del Problema . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	5
1.3 Metodología . . . . .	6
1.4 Descripción de la Tesis . . . . .	7
<b>2 Antecedentes</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción . . . . .	9
2.2 Fasor Dinámico . . . . .	9
2.3 Transformada Digital Taylor-Fourier . . . . .	11
2.4 Filtro Taylor <sup>K</sup> -Kalman-Fourier . . . . .	13
2.5 Filtro de Kalman y Control Lineal-Cuadrático . . . . .	14

<b>3</b>	<b>Estimadores Fasoriales Diseñados Mediante Fórmula de Ackermann</b>	<b>18</b>
3.1	Introducción . . . . .	18
3.2	Observador de Estado aplicado al Parámetro Fasorial . . . . .	19
3.2.1	Modelo de la Señal Pasabanda . . . . .	22
3.2.2	Criterio de Selección de Polos . . . . .	24
3.3	Diseño del Observador mediante Fórmula de Ackermann . . . . .	24
3.3.1	Modelo de Orden Cero . . . . .	25
3.3.2	Modelo de Segundo Orden . . . . .	29
3.4	Respuesta en Frecuencia . . . . .	33
3.4.1	Modelo de Orden Cero . . . . .	34
3.4.2	Modelo de Orden Dos . . . . .	35
3.5	Señal de Análisis . . . . .	37
3.5.1	Señal Oscilatoria . . . . .	37
3.6	Respuesta Dinámica . . . . .	40
3.7	Discusión . . . . .	45
3.8	Conclusiones . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Estimadores con Modelo de Señal Extendido</b>	<b>47</b>
4.1	Introducción . . . . .	47
4.2	Conjunto completo de armónicos . . . . .	48
4.2.1	Señal de análisis . . . . .	49
4.3	Filtro extendido diseñado mediante la fórmula de Ackermann . . . . .	49
4.4	Implementación de Ackermann para el diseño de emuladores . . . . .	52
4.4.1	Diseño del emulador como filtro progresivo de Kalman . . . . .	52
4.4.2	Diseño del emulador como filtro alternante de Kalman . . . . .	56
4.5	Discusión . . . . .	58
4.6	Conclusiones . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Filtro Alternante de Kalman y Mínimos Cuadrados Recursivos</b>	<b>60</b>
5.1	Introducción . . . . .	60
5.2	LMS Recursivos . . . . .	61
5.3	Filtrado de Kalman . . . . .	63

5.4	Similitudes entre el Filtrado de Kalman y LMS Recursivos . . . . .	65
5.5	Matriz Pseudoinversa: Algoritmo Progresivo y Alternante . . . . .	67
5.5.1	Pseudoinversa, Filtro Progresivo de Kalman . . . . .	67
5.5.2	Pseudoinversa, Filtro Alternante de Kalman . . . . .	68
5.6	Resultados Numéricos . . . . .	69
5.6.1	Algoritmos RLMS Alternante . . . . .	69
5.6.2	Algoritmo del Filtro Alternante de Kalman . . . . .	75
5.7	Discusión . . . . .	80
5.8	Conclusiones . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>82</b>
6.1	Introducción . . . . .	82
6.2	Conclusiones . . . . .	82
6.3	Publicaciones . . . . .	84
6.4	Aportaciones . . . . .	84
6.5	Trabajos Futuros . . . . .	85
<b>A</b>	<b>Modelo Analítico de la Señal</b>	<b>86</b>
A.1	Introducción . . . . .	86
A.2	Modelo Alternativo . . . . .	86
<b>B</b>	<b>Datos Numéricos</b>	<b>89</b>
B.1	Tiempos de Asentamiento: Filtro de Kalman y Estimador de Filtrado ó Actual . . . . .	89
B.2	Eigenvalores del Estimador Actual Extendido . . . . .	92
<b>C</b>	<b>Herramientas Matemáticas</b>	<b>93</b>
C.1	Introducción . . . . .	93
C.2	Teorema de Taylor . . . . .	93
C.3	Teorema de Cayley-Hamilton . . . . .	94
C.4	Mínimos Cuadrados . . . . .	95
C.5	Teorema del valor medio . . . . .	96
C.6	Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	97

**Bibliografía**

# Índice de Tablas

3.1	Tiempos de asentamiento $t_s$ del observador $T^0-A_C$ , con banda de tolerancia del 5%. . .	29
3.2	Tiempos de asentamiento $t_s$ con banda de tolerancia del 5%, para diferentes $\omega_s$ . . . .	29
B.1	Identificación del tiempo de asentamiento cuando la señal de entrada es muestreada a 16, 32 y 64 muestras por ciclo. . . . .	90
B.2	Identificación del tiempo de asentamiento cuando la señal de entrada es muestreada a 128 y 256 muestras por ciclo. . . . .	91
B.3	Eigenvalores del estimador Ackermann <sub>c</sub> extendido. . . . .	92

# Índice de Figuras

1.1	Simplificación de la curva senoidal mediante cambio de coordenadas. . . . .	3
1.2	Fasor estático y dinámico (fluctuaciones en amplitud y fase). . . . .	4
2.1	Respuesta en frecuencia de la Transforma Digital Taylor-Fourier . . . . .	13
2.2	Diagrama de bloques del controlador lineal-cuadrático guassiano (conexión de un estimador lineal cuadrático y un regulador lineal cuadrático). . . . .	15
2.3	Respuesta en frecuencia del banco de filtros proporcionados por el controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (Taylor <sup>2</sup> -LQG-Fourier). . . . .	17
3.1	Diagrama de bloques del estimador en lazo cerrado . . . . .	21
3.2	Lugar de las raíces de la dinámica del sistema. . . . .	26
3.3	Lugar de las raíces para el diseño del observador predictivo $\Phi_0$ . . . . .	26
3.4	Polos y ceros del observador predictor, filtro de Kalman y observador actual (K=0). . . . .	27
3.5	Repuesta impulsional del filtro de Kalman y el observador actual (K=0). . . . .	28
3.6	Repuesta impulsional del observador actual cuya asignación de polos se hace mediante la solución de Ackermann. Modelo de orden cero (K=0). . . . .	28
3.7	Tiempos de asentamiento $t_s$ correspondientes a la tabla 3.2. . . . .	30
3.8	Lugar de las raíces para el observador predictivo $\Phi_2$ . . . . .	31
3.9	Lugar de las raíces para el observador actual $\Phi_2$ . . . . .	31
3.10	Polos y ceros de los observadores de segundo orden en el plano- $z$ . . . . .	32
3.11	Repuesta impulsional del filtro de Kalman y el observador actual (K=2). . . . .	32
3.12	Repuesta impulsional del filtro de Kalman y el observador actual (K=2) para diferentes frecuencias de muestreo. . . . .	33
3.13	Respuesta en frecuencia de los observadores de orden cero. . . . .	34

3.14	Respuesta en frecuencia del filtro de Kalman y el observador actual diseñado mediante fórmula de Ackermann. Modelo de segundo orden de la señal pasabanda. . . . .	35
3.15	Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador del modelo de segundo orden. . . . .	36
3.16	Respuesta en frecuencia del $T^K-A_C$ con $K=2$ para diferentes muestras por ciclo. . . . .	36
3.17	Estimación de señal y error de estimación del observador predictor $\Phi_0$ . . . . .	38
3.18	Estimación de señal y error de estimación del observador actual $\Phi_0$ . . . . .	38
3.19	Estimación de señal y error de estimación del observador predictor $\Phi_2$ . . . . .	39
3.20	Estimación de señal y error de estimación del observador actual $\Phi_2$ . . . . .	39
3.21	Estimados de amplitud y fase obtenidos mediante el estimador actual de segundo orden $\Phi_2$ . Estimador propuesto Taylor <sup>K</sup> -Ackermann <sub>C</sub> . . . . .	40
3.22	Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos mediante el estimador actual de segundo orden $\Phi_2$ . Estimador propuesto Taylor <sup>K</sup> -Ackermann <sub>C</sub> . . . . .	41
3.23	Respuesta transitoria de los observadores del modelo de orden cero, bajo las condiciones establecidas por el standard de la IEEE C37.118.1-2011. . . . .	41
3.24	Respuesta transitoria en magnitud de observador actual de orden cero para varias $\omega_s$ . . . . .	42
3.25	Respuesta transitoria en fase del observador actual de orden cero para varias $\omega_s$ . . . . .	42
3.26	Respuesta transitoria de los observadores del modelo de orden dos, bajo las condiciones establecidas por el standard de IEEE C37.118.1-2011. . . . .	43
3.27	Trayectorias complejas de los estimados del fasor con el modelo de orden dos. . . . .	44
3.28	Estimados del primer derivador de amplitud y fase (velocidad de oscilación de amplitud y frecuencia) mediante los observadores de segundo orden del filtro de Kalman y el observador actual. . . . .	44
4.1	Lugar geométrico de las raíces para el observador actual de Luenberger con el conjunto completo de armónicos incluidos en el modelo de señal. . . . .	50
4.2	Ubicación de polos y ceros mediante fórmula de Ackermann para el observador de Luenberger de tipo actual con $\Phi_0$ . . . . .	51
4.3	Respuesta en frecuencia del estimador Taylor-Ackermann <sub>c</sub> -Fourier. . . . .	51
4.4	Ubicación de polos y ceros del filtro de Kalman y el estimador de tipo actual con $\Phi_0$ . . . . .	53
4.5	Reconstrucción de la señal y error de reconstrucción del filtro de Kalman y el estimador actual utilizando un modelo $\Phi_0$ . . . . .	53

4.6	Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del estimador Ackermann <sub>c</sub> emulando al filtro Taylor <sup>0</sup> -Kalman-Fourier. . . . .	54
4.7	Ubicación de polos y ceros del filtro de Kalman y el estimador tipo actual con $\Phi_2$ . . .	54
4.8	Gráficos superiores: reconstrucción de la señal y estimados de posición. Gráficos inferiores: estimados de velocidad y aceleración . . . . .	55
4.9	Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del estimador Luenberger de tipo actual (Ackermann <sub>c</sub> ), emulando al filtro Taylor <sup>2</sup> -Kalman-Fourier. . . . .	55
4.10	Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador del estimador Luenberger de tipo actual (Ackermann <sub>c</sub> ), emulando al filtro Taylor <sup>2</sup> -Kalman-Fourier. . . . .	56
4.11	Ubicación de polos y ceros del filtro alternante de Kalman y el estimador Ackermann <sub>c</sub> . Donde los polos externos al círculo unitario no inestabilizan el sistema. . . . .	56
4.12	Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del estimador Luenberger de tipo actual (Ackermann <sub>c</sub> ) emulando al filtro alternante de Kalman utilizando un modelo $\Phi_2$ . . . .	57
4.13	Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador del estimador Ackermann <sub>c</sub> emulando al filtro alternante de Kalman. . . . .	57
5.1	Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de posición de 1 a 4~. Se usa una ventana rectangular. . . . .	70
5.2	Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de posición. Se puede apreciar como su longitud crece. . . . .	70
5.3	Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de posición de 1 a 4~. Ventana cónica de Tukey de $\pm 0.5$ a $\pm 2$ . . . . .	71
5.4	Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de posición. Adicionalmente a la contracción espectral, los niveles de los lóbulos laterales disminuyen conforme su longitud crece. . . . .	72
5.5	Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de velocidad de 1 a 4~. Ventana cónica de Tukey de $\pm 0.5$ a $\pm 2$ . . . . .	73
5.6	Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de velocidad de 1 a 4~. Ventana cónica de Tukey de $\pm 0.5$ a $\pm 2$ . . . . .	73
5.7	Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de aceleración de 1 a 4~. Ventana cónica de Tukey de $\pm 0.5$ a $\pm 2$ . . . . .	74



5.8	Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de aceleración de 1 a 4~. Ventana cónica de Tukey de $\pm 0.5$ a $\pm 2$ . . . . .	74
5.9	Respuestas al impulso de los filtros RLMS bilaterales de 4~ obtenidas con el filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ) . . .	76
5.10	Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS bilaterales de 4~ obtenidas con el al- goritmo del filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ). . . . .	77
5.11	Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS bilaterales con longitud de 4~ obtenidas con el algoritmo del filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ). . . . .	77
5.12	Respuestas al impulso de los filtros RLMS bilaterales de 4~ obtenidas con el filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ) . . .	78
5.13	Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS ponderados y Kalman bilaterales de 4~ con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ), con factor de peso de ventana de Tukey. . . . .	78
5.14	Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS ponderados y Kalman bilaterales de 4~ con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ), con factor de peso de ventana de Tukey. . . . .	79
5.15	Respuestas impulsionales de la implementación progresiva de los RLMS y filtro de Kalman, con longitud de 4~ y ruido de observación muy pequeño ( $\sigma_w^2 = 10^{-10}$ ) . . .	79
5.16	Respuestas en frecuencia de la implementación progresiva de los RLMS y filtro de Kalman, con longitud de 4~ y ruido de observación muy pequeño ( $\sigma_w^2 = 10^{-10}$ ) . . .	80
B.1	Tiempos de asentamiento $t_s$ correspondientes a la tabla 3.1. . . . .	89

# Acrónimos

DFT	Transformada Digital de Fourier.
DTFT	Transformada Digital Taylor-Fourier.
FFT	Transformada Rápida de Fourier.
FIR	Respuesta Finita al Impulso.
IIR	Respuesta Infinita al Impulso.
FT	Transformada de Fourier.
LGR	Lugar Geométrico de las Raíces.
LQ	Control Óptimo Lineal Cuadrático.
LQG	Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano.
LS	Mínimos Cuadrados.
rms	Media Cuadrática.
SNR	Relación Señal/Ruido.
TVE	Total Vector de Error.
WLS	Mínimos Cuadrados Ponderados.
RLMS	Mínimos Cuadrados Recursivos.
Ackermann <sub>P</sub>	Observador Predictivo diseñado mediante Fórmula de Ackermann.
Ackermann <sub>C</sub>	Observador Actual diseñado mediante Fórmula de Ackermann.
TFT	Transformada Taylor <sup>K</sup> -Fourier.
T <sup>K</sup> -A <sub>P</sub>	Estimador Taylor <sup>K</sup> -Ackermann <sub>P</sub> .
T <sup>K</sup> -A <sub>C</sub>	Estimador Taylor <sup>K</sup> -Ackermann <sub>C</sub> .
T <sup>K</sup> -A <sub>P</sub> -F	Estimador Taylor <sup>K</sup> -Ackermann <sub>P</sub> -Fourier.
T <sup>K</sup> -A <sub>C</sub> -F	Estimador Taylor <sup>K</sup> -Ackermann <sub>C</sub> -Fourier.
T <sup>K</sup> -K	Filtro Taylor <sup>K</sup> -Kalman.
T <sup>K</sup> -K-F	Filtro Taylor <sup>K</sup> -Kalman-Fourier.
T <sup>K</sup> -LQG	Filtro Taylor <sup>K</sup> -LQG.
T <sup>K</sup> -LQG-F	Filtro Taylor <sup>K</sup> -LQG-Fourier.

IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers.
SISO	Única Entrada, Única Salida (Single Input, Single Output).
MIMO	Multiples Entradas, Multiples Salidas (Multiple Inputs, Multiple Outputs).
LTI	Sistemas Invariantes en el Tiempo.
LTV	Sistemas Variantes en el Tiempo.
WGN	Ruido Blanco Gaussiano.
Cv	Covarianza.

# Nomenclatura

$n$	Instante de Tiempo.
$N_{ss}$	Instante de Tiempo $n$ en estado estable.
$a_0$	Amplitud constante.
$-$	Conjugado Complejo.
dB	Decibeles.
$x, q$	Estado.
$\hat{x}, \hat{q}$	Estimado $x$ y $q$ .
$x^-$	$x$ A priori.
$\xi$	Parámetro Fasorial (Posición).
$\hat{\xi}$	Estimado $\xi$ .
$\xi^-$	$\xi$ A Priori.
$\tilde{\xi}$	Dinámica del Error.
$\xi'$	Primer Derivada de $\xi$ (Velocidad).
$\xi''$	Segunda Derivada de $\xi$ (Aceleración).
	Magnitud.
$\angle$	Ángulo (Fase).
!	Factorial.
$\varphi_0$	Fase constante.
$\varphi_3$	Fase del Tercer armónico.
$\varphi_5$	Fase del Quinto armónico.
$f_a$	Frecuencia de la Función de Amplitud.
$f_\varphi$	Frecuencia de la Función de Fase.
$\omega_s$	Frecuencia de Muestreo.
$f_0$	Frecuencia de señal senoidal con amplitud y fase constantes.
$H$	Hermitiana.
Hz	Hertz.

$I$	Matriz Identidad.
$\Phi_0$	Matriz de Transiciones de Orden Cero.
$\Phi_2$	Matriz de Transiciones de Orden Dos.
$\Delta_2$	Matriz Alternante de Orden Dos.
$\omega_n$	Frecuencia Natural no Amortiguada.
$\omega_d$	Frecuencia Natural Amortiguada.
$\zeta$	Factor de Amortiguamiento.
$t_s$	Tiempo de Asentamiento.
$\tau$	Periodo de Muestreo.
$N$	Número de muestras.
$Re$	Número Real.
$\phi$	Polinomio Característico.
rads	Radianes.
$\varepsilon_n$	Componentes de Ruido WGN.
$\sigma_v^2$	Varianza del Ruido de Entrada.
$\sigma_w^2$	Varianza de Medición de Ruido.
$z$	Transformada Z (variable z).
$\lambda$	Polos Deseados.
$T$	Transpuesta.
pu	Unidades Fasoriales.
$j, i$	Unidad Imaginaria.
$\dagger$	Pseudoinversa.
$\Xi_P$	Función de Transferencia Pulso del Observador Predictor.
$\Xi_C$	Función de Transferencia Pulso del Observador Actual.
$\sim$	Ciclo.
$s/\sim$	Muestras por Ciclo.

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo principal de la teoría de estimación es lograr una aproximación lo más precisa al valor real del fasor (Capítulo 2), bajo diversas condiciones tales como: señal contaminada por ruido, interferencia armónica o dinámicas transitorias, etc. El gran impacto que toma la matemática de estimación fasorial se comprende, considerando que la estimación es requerida en diferentes áreas como telecomunicaciones, procesamiento digital de señales, óptica, sistemas de potencia y control, e incluso en sistemas biomédicos, entre muchas otras; siempre y cuando las características del sistema analizado sean de carácter senoidal. Las diferentes aplicaciones que surjan de dicha teoría según las necesidades requeridas por el área en cuestión, deberán de basar su rendimiento en algoritmos suficientemente aptos para brindar resultados cada vez más satisfactorios. En el pasado, la construcción y aplicación de una teoría de estimación se tornaba muy complicada debido a la falta de capacidad de procesamiento y a las grandes dificultades propias del tratamiento de los datos del sistema. Pero las nuevas tecnologías e investigaciones han facilitado el análisis de los sistemas, simplificando las matemáticas con largas expresiones como  $A \sin(\omega t + \varphi)$ , típicas de las ondas senoidales de la corriente alterna y variables en el tiempo. La simplificación ha supuesto pasar las ecuaciones referidas al eje temporal usual a otro sistema de coordenadas, de esta manera el uso de la notación de fasores no solo trae consigo una importante simplificación matemática; también reduce las necesidades de sistemas electrónicos y de capacidad de computo. La mayoría de las técnicas usadas para obtener las mediciones del fasor, se

basan en el modelo clásico de una señal senoidal, es decir, el viejo modelo estático del fasor, además de requerir de una gran cantidad de muestras para otorgar buenas estimaciones, como es el caso de la transformada rápida de Fourier y mínimos cuadrados. Esto representa una oportunidad de mejora, ya que los algoritmos planteados a lo largo de este desarrollo rompen con el esquema estático y basan su comportamiento directamente en un esquema dinámico.

## 1.1 Planteamiento del Problema

El crecimiento de los sistemas de potencia y su dinamismo se convierte en un reto día con día para que el operador de red pueda brindar una operación segura y confiable del sistema. Tratar de supervisar *-en tiempo real-* los ángulos relativos de fase de todas las tensiones y corrientes de la red en el pasado no era posible debido a la falta de capacidad de procesamiento y a las grandes dificultades propias de la adquisición, coordinación y sincronización de los datos de dicha red. Este es uno de los motivos principales por lo cuales cobra importancia el diseñar algoritmos de estimación fasorial que nos permitan visualizar y controlar el estado de los sistemas con velocidades altas y datos precisos. Sin embargo la importancia general converge en el hecho, que en actualidad no solo es requerido dar alcance a las nuevas tecnologías de sistemas de potencia y sistemas de control, sino también, explorar campos mas allá de dichas disciplinas, como podemos ver en aplicaciones desarrolladas en [1], o las interesantes aplicaciones biomédicas expuestas en [2].

Las investigaciones anteriormente citadas basan sus resultados en la estimación de fasores dinámicos, concepto presentado por Stankovic en [3]-[4]. En su caso la dinamicidad se refiere al cambio de intervalo a intervalo del estimador tradicional de Fourier. Por otro lado, en este trabajo los estimados del fasor dinámico son entendidos como los estimados del fasor mediante un modelo de la señal con amplitud y fase como funciones variantes en el tiempo limitadas en banda, lo que los hace más flexibles y adecuados ante fluctuaciones en la señal. El radio del diagrama circular visualizado en la

Fig.1.1, gira como un vector con frecuencia  $\omega$  describiendo un círculo. La longitud del radio representa la amplitud y la componente vertical tiene el valor  $A \text{sen}(\omega t + \varphi)$  en la curva senoidal, este radio giratorio es el denominado *fasor*. Tanto  $A$  como  $\varphi$  no cambian durante la duración de la curva. La Fig.1.2 muestra en su extremo izquierdo el fasor estático con amplitud  $a_0$  y fase  $\varphi_0$ , siendo ambas constantes, mientras que en el extremo derecho de la figura se muestra el fasor con flexibilidad en amplitud y fase, siendo  $a(t)$  y  $\varphi(t)$ .

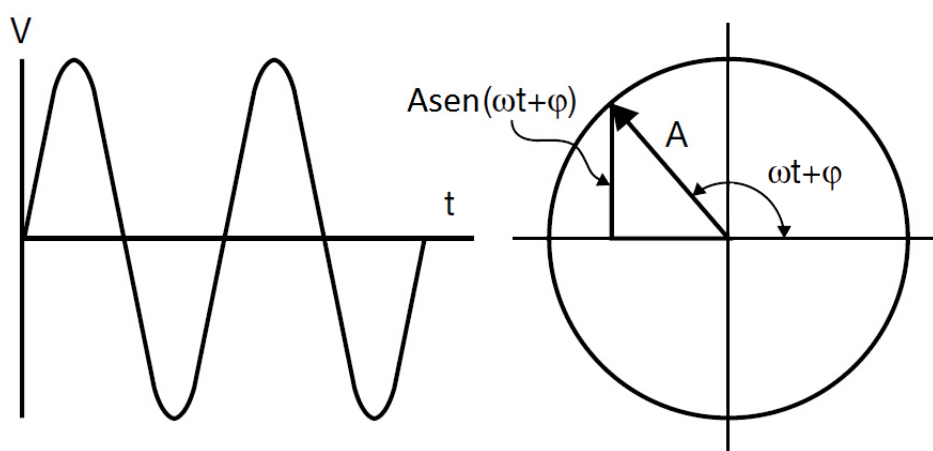


Figura 1.1: Simplificación de la curva senoidal mediante cambio de coordenadas.

Mediante los polinomios de Taylor es posible aproximar dicho modelo variante en el tiempo de la señal, ya que los polinomios y sus derivadas nos permiten construir una matriz de transiciones y por ende el parámetro de transición fasorial. Con esta técnica no solo se obtienen mejores estimaciones del fasor, sino también sus derivadas. Además los estimados obtenidos mediante esta aproximación polinomial logran llegar al estado estacionario ante condiciones transitorias, más rápido que aquellos obtenidos mediante el modelo estático, ofreciendo posibilidades reales de supervisión, protección, análisis y control. Cada uno de los algoritmos desarrollados bajo este enfoque otorgan estimaciones con diferentes características, enriqueciendo el campo teórico y práctico de la estimación fasorial. Sin embargo, la lógica de su estructura matemática fundamental es muy similar, lo que representa



un objeto importante de estudio, el determinar sus semejanzas más importantes con el fin de complementar la teoría de estimación fasorial. Los resultados de estos análisis nos permitirán obtener criterios de diseño que optimicen los procesos de estimación, por ejemplo, tiempos de respuesta mas cortos ante ciertas condiciones, disminución del error de estimación y la posibilidad de bajar el costo computacional.

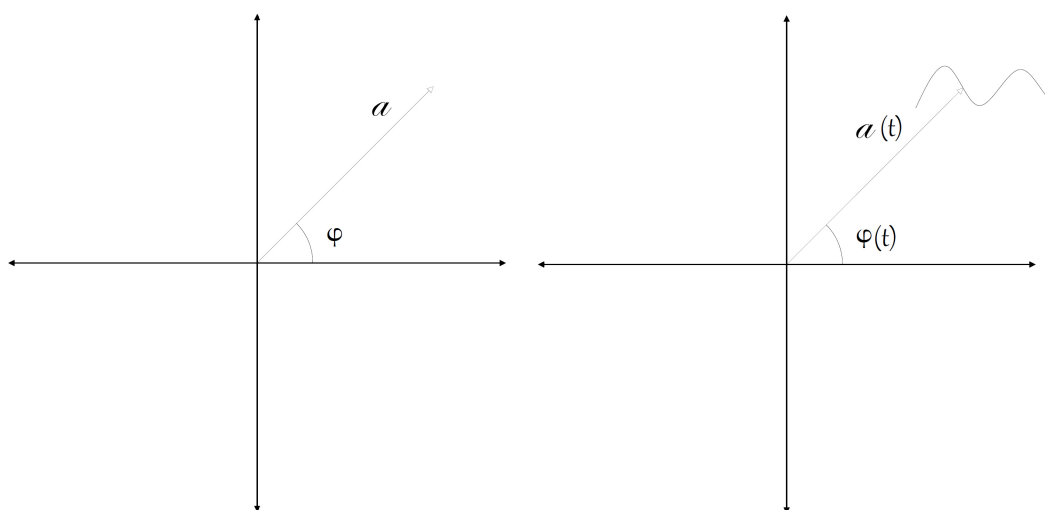


Figura 1.2: Fasor estático y dinámico (fluctuaciones en amplitud y fase).

Finalmente, se pretende realizar un análisis de estabilidad y desempeño tanto de los algoritmos presentados en [5] como de aquellos que sean diseñados bajo la inclusión de nuevas metodologías como puede ser mínimos cuadrados recursivos ó propiedades de simetría de los polinomios de Taylor. La aplicación de estos algoritmos en la estimación fasorial y armónica implica el cálculo de la envolvente compleja así como el de sus derivadas en cada una de las frecuencias armónicas incluidas dentro del modelo de las señales, otorgando estimaciones más precisas. El análisis más detallado sobre los algoritmos especializados basados en las metodologías del filtro de Kalman, asignación de eigenvalores mediante la fórmula de Ackermann, y los mencionados mínimos cuadrados recursivos, no solo nos brindará la oportunidad de obtener una comprensión más amplia en el campo teórico, sino

también en la aplicación de la estructura lógica de cada uno de ellos, ya que en el caso de los RLMS se aplicarán factores de olvido con mejores resultados. En el filtro de Kalman se podrá manejar su recursividad como unidireccional y bidireccional, mientras que la formula de Ackermann será aplicada en el terreno del procesamiento digital de señales.

## 1.2 Objetivos

El **Objetivo General** que se pretende alcanzar, es obtener nuevas alternativas para diferentes algoritmos de estimación fasorial así como implementar otras metodologías bajo criterios establecidos de control automático. Para alcanzar dicho objetivo, el problema se dividió en puntos específicos. Dichos puntos son los siguientes:

- Complementar el estudio sobre los algoritmos de estimación propuestos en [5], es decir, el filtro Taylor<sup>K</sup>-LQG y filtro Taylor<sup>K</sup>-LQG-Fourier.
- Retomar el estudio sobre los algoritmos de estimación diseñados a partir del observador de Luenberger y la formula de Ackermann, llamados Taylor<sup>K</sup>-Ackermann, así como expandir dicho estimador incorporando el conjunto completo de armónicos, lo que nos conducirá el estimador Taylor<sup>K</sup>-Ackermann-Fourier
- Estudiar la metodología de *Mínimos Cuadrados Recursivos (RLMS)*, sobre las cual podamos diseñar nuevos algoritmos de estimación fasorial.
- Analizar un modelo alternativo de la matriz de transiciones ( $\Phi$ ) aplicada en los filtros de estimación Taylor<sup>K</sup>-Kalman y Taylor<sup>K</sup>-Kalman-Fourier que incorpore las derivadas del fasor, propio de la función pasabanda desde el punto de vista de los esquemas de control.
- Analizar y reportar los paralelismos entre RLMS y el filtro de Kalman.

- Realizar una comparación de los algoritmos de estimación fasorial usando los criterios de estabilidad o la mejor figura de desempeño.
- Uniendo estas características, incorporar nuevas posibilidades de estimación obtenidas al emplear criterios de control.

### 1.3 Metodología

- Se llevará a cabo una revisión de la bibliografía referente al análisis de Fourier, procesamiento digital de señales y técnicas de estimación fasorial existentes.
- Se complementara la teoría referente al filtro Taylor<sup>K</sup>-LQG y Taylor<sup>K</sup>-LQG-Fourier, se implementará y se expondrán sus beneficios al igual que sus deficiencias. Finalmente se introducirán cada uno de estos aspectos con el fin de publicar lo observado.
- Se analizara el Filtro Alternante de Kalman y sus implicaciones [2]. Esto con el fin de aplicar el razonamiento teórico establecido en dicho filtro en otros algoritmos.
- Se diseñara e implementará un nuevo algoritmo de estimación bajo el principio de RLMS.
- Se implementará en MATLAB el estimador Taylor<sup>K</sup>-Ackermann. Incorporando el conjunto completo de armónicos dentro del modelo nos conducirá al estimador Taylor<sup>K</sup>-Ackermann-Fourier.
- Se implementarán modelos alternos para la matriz de transiciones  $\Phi$  necesaria en el filtro Taylor<sup>K</sup>-Kalman-Fourier
- Se implementará un programa en MATLAB que lleve a cabo el análisis de estabilidad de los nuevos algoritmos diseñados así como los existentes y consecuentemente se implementarán en la evaluación de señales.

- Se analizarán señales bajo oscilaciones suaves y contaminadas por ruido, mediante las diversas técnicas de estimación fasorial utilizando el software de MATLAB.
- Se analizarán y detallarán las ecuaciones que conforman la arquitectura de los algoritmos.
- Se compararán los algoritmos para determinar fortalezas en las soluciones propuestas.

## 1.4 Descripción de la Tesis

La estructura que comprende el documento de Tesis desarrollado, se organiza de la siguiente manera:

**Capítulo 2, Antecedentes.** En este capítulo se explica de manera breve el concepto de fasor dinámico abordando las características fundamentales que lo diferencian del concepto clásico de fasor. Por otro lado, el capítulo también presenta algunos de los algoritmos desarrollados para la estimación de fasores considerando modelos dinámicos de la señal. Se entiende los alcances y debilidades de dichos algoritmos.

**Capítulo 3, Estimadores Fasoriales Diseñados Mediante Fórmula de Ackermann.** En este capítulo se profundiza en la Fórmula de Ackermann para la asignación de conjuntos de eigenvalores deseados a observadores de estado, que nos permitan obtener estimaciones del fasor dinámico de la señal y las primeras derivadas de éste. El objetivo del capítulo es mostrar la eficiencia del método, ya que permite diseñar estimadores instantáneos y rápidos bajo condiciones transitorias para aplicaciones de protecciones y control. Para cumplir con dicho objetivo se lleva a cabo un análisis comparativo entre los observadores predictor y actual, cuyos resultados también son comparados directamente con el filtro Taylor-Kalman.

**Capítulo 4, Estimadores con Modelo de Señal Extendido.** El Objetivo de este capítulo es presentar una extensión al estimador Taylor<sup>K</sup>-Ackermann, es decir, se incorpora el conjunto completo de armónicas en el modelo dinámico de señal, con lo que se obtiene el estimador Taylor<sup>K</sup>-Ackermann-Fourier.

El estimador además es capaz de emular cualquier filtro debido a su característica de asignación de polos, por lo que resulta una posibilidad optima en la programación de diversos filtros.

**Capítulo 5, Filtro Alternante de Kalman y Mínimos Cuadrados Recursivos.** En este capítulo se presenta el uso del algoritmo de Kalman para diseñar filtros con respuesta impulsional finita (FIR). Los filtros Kalman Alternante surgen de las similitudes entre las ecuaciones del algoritmo de Kalman y las ecuaciones de Mínimos Cuadrados Recursivos (RLMS). El objetivo del capítulo es analizar la sinergia resultante de la yuxtaposición de ambos métodos, lo cual proveerá de nuevas maneras para su implementación.

**Capítulo 6, Conclusiones y Recomendaciones.** Se exponen las conclusiones generadas a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis obtenidas mediante los resultados analizados, lo que nos lleva a presentar sugerencias para trabajos futuros.

**Apéndices,** en este trabajo se incorporan tres apéndices de los cuales, los dos primeros contienen ligeras explicaciones y desarrollos de metodologías aplicadas en los algoritmos presentados mas adelante. Dichos apéndices están nombrados de la siguiente manera: *Modelo Analítico de la Señal y Datos Numéricos*. Mientras que en el ultimo apéndice se presentan *herramientas matemáticas* necesarias a lo largo de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1 Introducción

El concepto de *fasor oscilatorio* fue propuesto en [6] para encontrar las dinámicas de las desviaciones del comportamiento periódico de las señales de voltaje y corriente en sistemas de potencia, sin embargo, esto fue definido como la estimación sucesiva del primer coeficiente de Fourier en un periodo corto de la Transformada de Fourier de  $1\sim$ , la cual usa el mismo modelo estático de señal (amplitud, fase y frecuencia constantes) como el filtro propuesto en [7]. Actualmente se desarrollan técnicas de estimación que ofrecen estimados con características más sobresalientes que los basados en el modelo estático [8].

### 2.2 Fasor Dinámico

Las técnicas de estimación fasorial asumen una señal sinusoidal con amplitud y fase constante (con suposiciones de estado estacionario)

$$s(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_o) \quad (2.2.1)$$

Sin embargo, en sistemas de potencia las oscilaciones de amplitud y fase pueden ser modeladas completamente por una señal pasabanda de la forma:

$$s(t) = a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = a(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \quad (2.2.2)$$

Siendo  $a(t)$  y  $\varphi(t)$  la amplitud y fase de la señal  $s(t)$ , respectivamente. Estos parámetros son ahora señales variantes en el tiempo.

El contenido frecuencial de una señal pasabanda se encuentra confinado dentro de una banda estrecha alrededor de la frecuencia fundamental  $f_1$ . En términos de funciones exponenciales complejas, se obtiene:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} (a(t)e^{j(\omega t + \varphi(t))} + a(t)e^{-j(\omega t + \varphi(t))}) \\ &= \frac{1}{2} (a(t)e^{j\omega t} e^{j\varphi(t)} + a(t)e^{-j\omega t} e^{-j\varphi(t)}) \\ &= \frac{1}{2} (p(t)e^{j\omega t} + \bar{p}(t)e^{-j\omega t}) \\ &= \text{Re} \{ p(t)e^{j\omega t} \}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

donde  $p(t) = a(t)e^{-j\varphi(t)}$  es la envolvente compleja de la señal pasabanda  $s(t)$ , conocido como *fasor dinámico* de la señal ó *fasor oscilatorio de la oscilación* [3]; mientras que  $p^-(t)$  es su conjugado complejo. Dicho fasor es representado por una función compleja expresada en forma polar, en la cual  $a(t)$  y  $\varphi(t)$  son modulaciones de amplitud y fase de  $s(t)$ .

La función compleja del fasor oscilatorio  $p(t)$ , puede ser aproximada por un  $K$ -ésimo polinomio de Taylor centrado en  $t_0$ :

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)(t - t_0) + \dots + p^K(t_0) \frac{(t - t_0)^K}{K!}, \quad t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{T}{2} \quad (2.2.4)$$

a partir de las derivadas de sus curvas del polinomio de Taylor, es posible obtener una matriz que

describa el comportamiento del sistema. Para  $\tau = t - t_0$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 p_K(t) &= p(t_0) + \dot{p}(t_0)\tau + \ddot{p}(t_0)\frac{\tau^2}{2!} + \cdots + p^{(K)}(t_0)\frac{(\tau)^K}{K!} \\
 \dot{p}_K(t) &= \dot{p}(t_0) + \ddot{p}(t_0)\tau + \cdots + p^{(K)}(t_0)\frac{(\tau)^{K-1}}{(K-1)!} \\
 &\vdots \\
 p_K^K(t) &= p^K(t_0)
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Note que la versión discretizada del sistema (con un periodo de muestreo de  $\tau$ ) puede ser representada mediante la ecuación:

$$p_K(t) = \Phi_K(\tau)p_K(t_0) \tag{2.2.6}$$

donde  $p_K(t)$  es el parámetro fasorial. En su forma matricial se compone como lo expresa la ecuación (2.2.7) [9], y a la que llamaremos **matriz de transiciones**.

$$\Phi_K(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \cdots & \frac{\tau^K}{K!} \\ & 1 & \tau & \cdots & \frac{\tau^{(K-1)}}{(K-1)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{\tau^{(K-2)}}{(K-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

Establecido el grado del polinomio de Taylor, esta aproximación es más exacta cuando  $t \rightarrow t_0$  si  $p(t)$  es una función suave o función continuamente diferenciable. El modelo truncado puede ser aplicado en cualquier instante de tiempo  $t_0$  con precisión suficiente, siempre que el intervalo de tiempo  $\tau$  sea corto. Esta condición se logra entre dos muestras de la señal ya que generalmente los muestreadores se aplican con periodos de muestreo muy cortos con respecto al periodo fundamental  $T_1 = \frac{1}{f_1}$ .

## 2.3 Transformada Digital Taylor-Fourier

La técnica referida como *Transformada Taylor-Fourier* [1], utiliza la aproximación mediante mínimos cuadrados ponderados (WLS). Esta transformada provee un banco de filtros **FIR** mejorado para la



estimación de armónicas oscilatorias que proveen de ganancias lisas de diferenciación más amplias (eliminando distorsión de amplitud y fase) y rechazan la interferencia interarmónica, con ganancias lisas nulas junto a las armónicas restantes, lo que asegura su rechazo. Esto se puede apreciar en el banco de filtros mostrado en la Fig.2.1. Además de estimar los coeficientes de Fourier, la nueva transformación proporciona estimados de los coeficientes de Taylor, correspondientes a las primeras derivadas de las envolventes complejas de cada armónica. La *Transformada Digital Taylor-Fourier* expande la base de la FFT con una matriz extendida  $\mathbf{B}$

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{4N} & T_{4N} & T_{4N}^2 & T_{4N}^3 \end{pmatrix} F_N \quad (2.3.1)$$

Donde la k-ésima submatriz está dada por:

$$B_k = T_N^k F_N \quad (2.3.2)$$

donde la matriz rectangular  $F_N$  contiene  $M$  matrices de Fourier de  $4N \times N$

$$F_N = \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

La matriz  $\mathbf{T}$  contiene las muestras del m-ésimo término de Taylor, la composición de la señal queda de la siguiente forma:

$$B\hat{X} = \begin{pmatrix} I_N & \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} & T_N \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} & T_N^2 \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} & \dots & T_N^M \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_N \\ \hat{X}_N \\ \hat{X}_N \\ \vdots \\ \hat{X}_N^{M-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

Aplicando la solución de mínimos cuadrados se obtiene

$$\hat{X}_N = (B^H B)^{-1} B^H x = B^\dagger x \quad (2.3.5)$$

donde la matriz  $B^\dagger$  es conocida como la *pseudoinversa*. La composición de la señal está dada por

$$\hat{x} = B\hat{X} \quad (2.3.6)$$

De esta forma, la DFT se ha extendido agregando los términos de Taylor-Fourier, ya que a más componentes agregados mayor es el subespacio. Estos componentes dan cabida a fluctuaciones con posición, velocidad, aceleración, etc. Debido al agregado de dichos términos la reconstrucción de la TFT es más precisa que la de Fourier para el tipo de fasores oscilatorios, por lo que la FT nunca tendrá errores de reconstrucción menores a los de la TFT, debido a que el subespacio de la TFT contiene al subespacio de la FT [10].

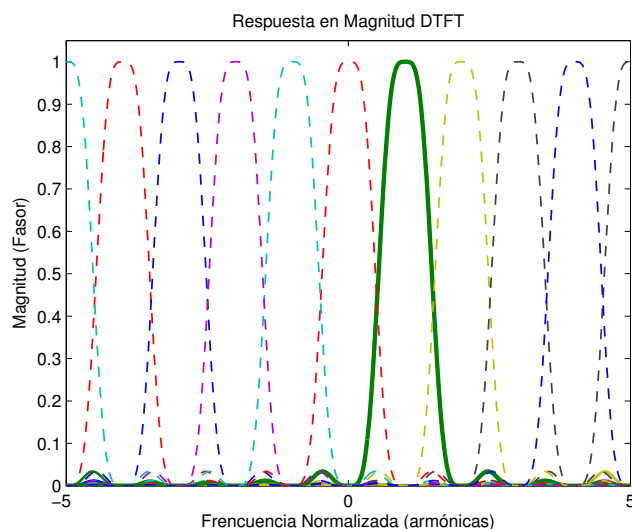


Figura 2.1: Respuesta en frecuencia de la Transforma Digital Taylor-Fourier

## 2.4 Filtro Taylor<sup>K</sup>-Kalman-Fourier

El filtro de Kalman proporciona estimados muy cercanos a la señal si el modelo sobre el que trabaja se ajusta lo más posible a la entrada. El modelo es obtenido de las derivadas del polinomio de k-ésimo orden de Taylor modelado sobre la oscilación, mientras que la señal paso banda se adquiere mediante

un proceso de modulación de la rotación de la frecuencia fundamental sobre el plano complejo.

La matriz de transiciones del modelo de señal senoidal presentando anteriormente por (2.2.7) es la principal contribución del filtro desarrollado en [11]. El proceso recursivo resultante del filtro de Kalman se define por los conjuntos (2.4.1) y (2.4.2).

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}(n) &= \hat{q}^-(n) + G(n) (s(n) - H\hat{q}^-(n)) \\ \hat{q}^-(n+1) &= \Phi\hat{q}(n) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

donde  $\hat{q}(n)$  es la predicción del estado estimado en el instante  $n$ , y  $\hat{q}^-(n)$  es el estado estimado actual. La matriz de  $G(n)$  es la matriz de ganancias de Kalman, y las ecuaciones de covarianza son calculadas mediante:

$$\left. \begin{aligned} G(n) &= M(n)H^T (HM(n)H^T + \sigma_w^2)^{-1} \\ P(n) &= M(n) - G(n)CM(n) \\ M(n+1) &= \Phi P(n)\Phi^T + \Gamma\sigma_v^2\Gamma^T \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

donde  $M(n)$  es la covarianza de los errores de predicción [12].

El filtro propuesto en [11] alcanza ganancias óptimas solo alrededor de la frecuencia fundamental, así que para obtener ganancias alrededor de cada armónica se emplea el filtro Taylor<sup>K</sup>-Kalman-Fourier [13]. La principal contribución del filtro, es proporcionar su respuesta en frecuencia usando la matriz de transiciones, y mostrar como puede ser extendido para todo el conjunto de armónicos. Esto se describe como el análisis espectral, incluyendo sus derivadas, con el filtro de Kalman, con un esfuerzo computacional mucho menor que la tradicional FFT.

## 2.5 Filtro de Kalman y Control Lineal-Cuadrático

Recientemente en [14] se propone el diseño de nuevos algoritmos de estimación mediante el principio de optimalidad, el cual se aplicó para obtener un vector de ganancias capaz de mejorar los estimados del fasor dinámico. Según los resultados observados se propone una alternativa de diseño con el fin de

resaltar la utilidad de este principio en la estimación, por lo que se usó una variante del Controlador Lineal-Cuadrático Gaussiano (LQG), que no es más que la interconexión del filtro de Kalman con la ley de retroalimentación de estados del controlador lineal-cuadrático (LQ), cuya recursividad es expresada mediante las siguientes ecuaciones [12]:

$$\left. \begin{aligned} u(n) &= -K(n)x(n) \\ K_Q(n) &= (\Gamma^T P(n+1)\Gamma + R)^{-1} \Gamma^T P(n+1)\Phi \\ P(n) &= \Phi^T P(n+1) (\Phi - \Gamma K(n)) + Q \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1)$$

Con  $P(n) = Q$  y  $K_Q(n) = 0$ . Dicha interconexión es representada por el diagrama de bloques de la Fig. 2.2. Esta modificación propuesta implica un acoplamiento mediante solo una de las ecuaciones de Riccati lo que elimina la necesidad de una matriz de ponderación como en el caso del LQ.

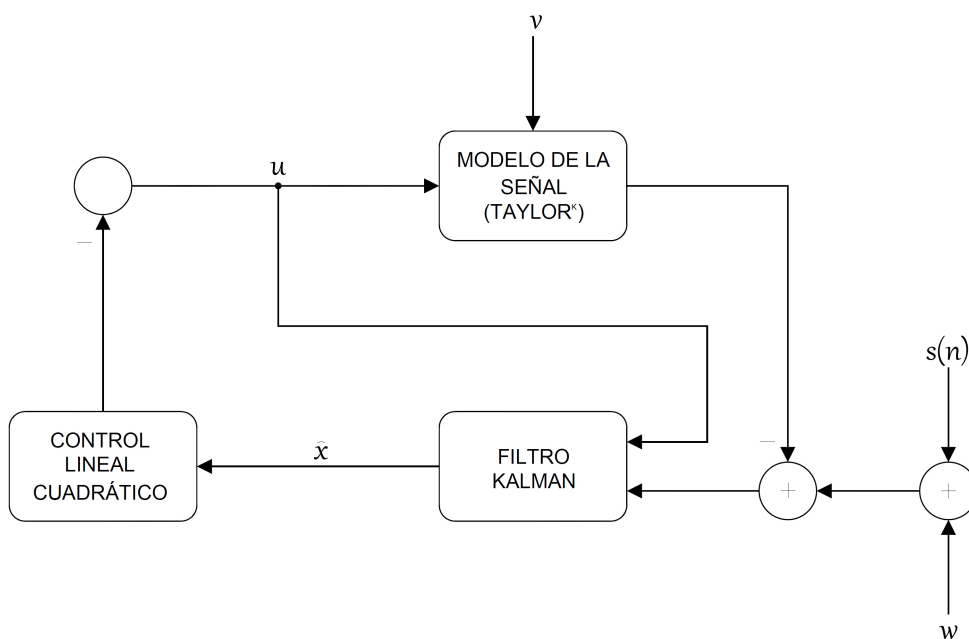


Figura 2.2: Diagrama de bloques del controlador lineal-cuadrático gaussiano (conexión de un estimador lineal cuadrático y un regulador lineal cuadrático).

El nuevo algoritmo llamado filtro Taylor<sup>K</sup>-LQG, proporciona tanto los estimados del fasor como

de las primeras  $K$  derivadas de éste pero a diferencia del filtro Taylor<sup>K</sup>-Kalman, los estimados son cuasi-instantáneos. Sin embargo el filtro reduce la resonancia alrededor de la frecuencia nula, mientras que el filtro extendido, es decir, el filtro Taylor<sup>K</sup>-LQG-Fourier reduce las ganancias interarmónicas del filtro de Kalman y sus frecuencias de resonancia junto a la frecuencia fundamental, lo que es fácilmente apreciable en la Fig.2.3. Esta modalidad reduce también notablemente la complejidad computacional si se le compara con la DFT. El algoritmo recursivo LQG es formado básicamente de dos principales secuencias:

La primera (I) calcula el vector de ganancias hasta que las ganancias del filtro de Kalman se encuentran en estado estacionario, mientras que la segunda (II) filtra la señal mediante la aplicación de las ganancias en estado estacionario.

<b>I] Para <math>n</math> de 1 hasta <math>N_{ss}</math></b>		
<b>A.-</b>	<b>Actualización del Estado</b>	1) Predicción del Edo: $\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1)$ 2) Error de Covarianza: $P^-(n) = \Phi P(n-1)\Phi^H + \Gamma\Gamma^T\sigma_w^2$
<b>B.-</b>	<b>Actualización de la Medición</b>	1) Ganancia de Kalman: $G(n) = P^-(n)H^T (HP^-(n)H^T + \sigma_w^2)^{-1}$ 2) Corrección del Edo: $\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + G(n)(s(n) - H\hat{x}^-(n))$ 3) Error de Cv a Posteriori: $P(n) = (I - G(n)H)P^-(n)$ 4) Ganancia LQ: $K_Q(n) = (\Gamma^T P(n)\Gamma + r)^{-1} \Gamma^T P(n)\Phi$

Donde  $r = 1$  se refiere al peso de control para un sistema de entrada singular y salida singular; si  $r$  es muy grande, cancela el efecto de retroalimentación de  $K_Q$ . Una vez que las ganancias de Kalman se encuentran en  $\bar{G} = G(N_{ss})$ , siendo  $N_{ss}$  el instante  $n$  en donde las ganancias del filtro de Kalman son estacionarias, la ley de control LQ es aplicada mediante la siguiente secuencia recursiva:

<b>II] Para <math>n</math> de <math>n &gt; N_{ss}</math> hasta <math>N_{end}</math></b>		
<b>C.-</b>	<b>Retroalimentación del Estado</b>	1) Predicción del Edo: $\hat{x}^-(n) = \Phi \hat{x}(n-1) - (\Gamma \bar{K}_Q)^T \hat{x}(n-1)$ 2) Actualización del Edo: $\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + \bar{G}(s(n) - H \hat{x}^-(n))$

Una vez que las ganancias estables son estacionarias del filtro de Kalman son obtenidas como en [11], la matriz de transiciones propuesta en la etapa **C** del controlador óptimo LQ es la siguiente:

$$\tilde{\Phi} = [\Phi - (\Gamma \bar{K}_Q)^T] \quad (2.5.2)$$

Esto se debe a que a la matriz retroalimentada convencional, es decir,  $(\Phi - \Gamma \bar{K}_Q)$  resulta ser inestable, por lo que la matriz propuesta asegura la estabilidad del filtro.

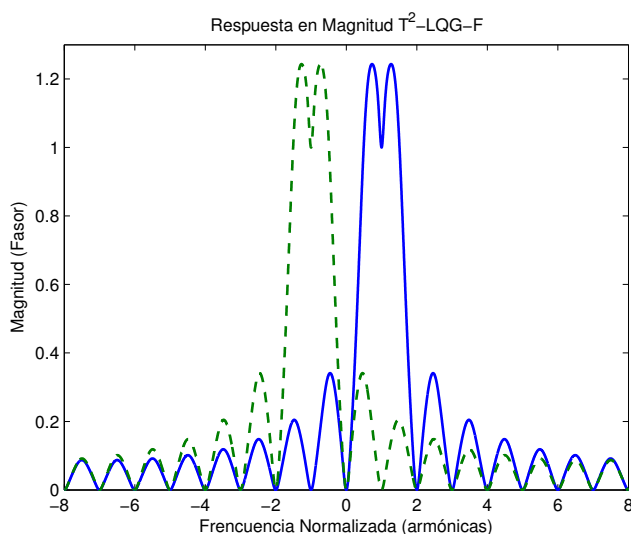


Figura 2.3: Respuesta en frecuencia del banco de filtros proporcionados por el controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (Taylor<sup>2</sup>-LQG-Fourier).

## Capítulo 3

# Estimadores Fasoriales Diseñados Mediante Fórmula de Ackermann

### 3.1 Introducción

Generalmente en la literatura de control automático, la fórmula de Ackermann es usada para cambiar las dinámicas del sistema mediante retroalimentación de estado, desplazando los eigenvalores originales obteniendo valores en un nuevo conjunto, seleccionados de acuerdo a las dinámicas deseadas; por lo que el nuevo conjunto de eigenvalores proporcionan una ley de control para el sistema. El cambio en la dinámica puede ser usado para asegurar la estabilidad del sistema o para ajustar otras características, tales como su tiempo de asentamiento ( $t_s$ ), factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ), sobrepaso ( $M_p$ ), etc. A través de la solución al problema dual (controlador/observador), la fórmula de Ackermann puede ser aplicada para diseñar observadores que estimen los estados deseados del sistema [15]. Convencionalmente, dicho método puede ser empleado, tanto en sistemas LTI, así como en sistemas LTV, para sistemas SISO y MIMO [16]-[17]. En esta sección, la fórmula de Ackermann es explorada de manera mas extensa que en [5], para solucionar el problema de estimación fasorial usando el modelo dinámico de la señal, el cual asume fluctuaciones de amplitud y fase para proveer de mejores estimados del fasor bajo condiciones dinámicas. Los estimados instantáneos del fasor y sus primeras derivadas son incluidas dentro del modelo. A través de esta técnica de asignación de eigenvalores, la

ganancia puede ser seleccionada de manera que la respuesta del observador converja a cero tan rápidamente como sea posible. Sin embargo, la localización de los eigenvalores no puede ser arbitraria, los valores de la ganancia deben de ser evaluados para poder implementarse.

Para evitar este problema intrínseco al método, se exploran las posibilidades dinámicas de los observadores y el lugar geométrico de sus raíces, entonces se ubica el eigenvalor dentro de las regiones establecidas.

### 3.2 Observador de Estado aplicado al Parámetro Fasorial

El estimador de estado de orden completo para la señal cuyas muestras son generadas por la combinación lineal de los estados

$$s_n = H\xi_n \quad (3.2.1)$$

de un sistema dinámico lineal con la siguiente ecuación de estado

$$\xi_{n+1} = \Phi\xi_n + \Gamma v_n \quad (3.2.2)$$

donde  $v_n$  es el ruido blanco aditivo (WGN), puede ser obtenido por la excitación de la ecuación de estado del sistema en lazo abierto con la misma entrada y un término de corrección en la diferencia entre la entrada y la señal observada (inovaciones):

$$\hat{\xi}_{n+1} = \Phi\hat{\xi}_n + \Gamma v_n + L_p(s_n - \hat{s}_n) \quad (3.2.3)$$

Por definición el error del vector de estado se escribe como:

$$\tilde{\xi}_{n+1} = \xi_{n+1} - \hat{\xi}_{n+1} \quad (3.2.4)$$

Se obtiene el siguiente modelo para el error

$$\tilde{\xi}_{n+1} = (\Phi - L_p H)\tilde{\xi}_n \quad (3.2.5)$$



Note que el error de estimación no depende de las entradas de control [18]. En general  $\tilde{\xi}_0 \neq 0$ ,  $L$  puede ser diseñada cada que  $\tilde{\xi}_n \rightarrow 0$  como  $n \rightarrow \infty$  para cualquier  $\tilde{\xi}_0$ . Si este es el caso, entonces  $\hat{\xi}_n \rightarrow \xi_n$ . Obteniendo un observador de estado.

De acuerdo con el teorema de Cayley-Hamilton, existe una matriz  $L$  de tal manera que

$$\det(zI - [\Phi - LH]) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i) = \alpha_c(z) \quad (3.2.6)$$

donde  $\alpha_c(z)$ 's corresponden al polinomio característico deseado para el observador de estado, y  $\{\lambda_i\}_{i=1,1,\dots,m}$  son los eigenvalores deseados de  $\Psi = (\Phi - LH)$ . En nuestro caso,  $s(n)$  tiene una salida singular, y  $H$  es un vector fila, por lo que la matriz de ganancias  $L$  puede ser determinada a partir de los polos deseados del observador mediante la solución dual de la matriz de retroalimentación de Ackermann para la asignación de polos:

$$L_p = \alpha_c(\Phi) \begin{pmatrix} H \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^{m-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

donde  $\alpha_c(\Phi)$  es el polinomio característico asociado al observador de estado

$$\alpha_c(\Phi) = \Phi^m + \alpha_1\Phi^{m-1} + \alpha_2\Phi^{m-2} + \dots + \alpha_m I. \quad (3.2.8)$$

Si la señal de entrada contiene componentes de ruido WGN adicionadas, entonces:

$$s_n = H\xi_n + \varepsilon_n \quad (3.2.9)$$

La secuencia de la ecuación anterior, de  $n = 0$  hasta  $n$ , puede describirse como la siguiente forma matricial (3.2.10). El modelo de señal para los observadores de tipo predictor y actual es formado por la suma de un vector determinístico y dos estocásticos. El vector determinístico es adquirido del subespacio generado básicamente por la matriz de transiciones, y son definidos mediante el sistema

dinámico; mientras que el vector estocástico es formado por la combinación lineal de los procesos de observación de los ruidos.

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \Phi \xi_{-1} + \Gamma v_0 \\ \Phi \xi_0 + \Gamma v_1 \\ \Phi \xi_1 + \Gamma v_2 \\ \vdots \\ \Phi \xi_{n-2} + \Gamma v_{n-1} \\ \Phi \xi_{n-1} + \Gamma v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

Entonces, las dinámicas del error en (3.2.5) serán accionadas por tal error, como se puede ver en la Fig. 3.1. Una consideración de cuidado que se debe mencionar acerca de la solución de Ackermann, es el hecho de que dinámicas rápidas de error requieren de una ganancia  $L$  grande, lo que implica una alta amplificación de la señal de ruido y dinámicas no modeladas. Por lo tanto, siempre es necesario comprobar la factibilidad de las ganancias de cualquier respuesta rápida.

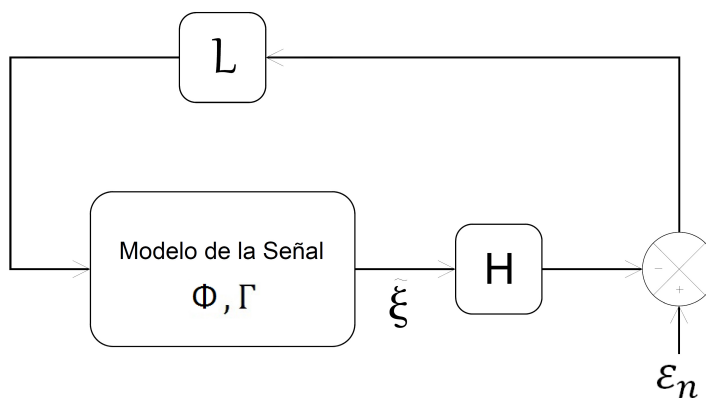


Figura 3.1: Diagrama de bloques del estimador en lazo cerrado

El estimador en (3.2.3) representa un *observador predictor*, llamado así debido a que una medición en el instante  $n$  da lugar a un estimado del vector de estado que es válido en el instante  $n + 1$ .

Alternativamente, un *observador de filtrado* u *observador actual* estima el vector de estado, basado en la salida actual (asumiendo el tiempo de cálculo despreciable), usando la expresión:

$$\widehat{\xi}_{n+1} = \Phi \widehat{\xi}_n + \Gamma v_n + L_c (s_{n+1} - \widehat{s}_{n+1}) \quad (3.2.11)$$

El vector de las dinámicas de error es ahora:

$$\tilde{\xi}_{n+1} = (\Phi - L_c H \Phi) \tilde{\xi}_n \quad (3.2.12)$$

Mientras que la ganancia es dada por

$$L_c = \alpha_c(\Phi) \begin{pmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^{m-1} \\ H\Phi^m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.13)$$

Respecto al filtro de Kalman, con el cual se compararán los estimados de la metodología propuesta, se puede decir que también es un observador que minimiza la varianza de vector de estado [18]. La ganancia del filtro de Kalman es obtenida mediante la solución de la ecuación algebraica de Riccati. La presencia de ruido en las mediciones demanda ganancias moderadas, mientras que la presencia de ruido en la planta, el cual distorsiona los estados alejándolos de su valor real, requiere de una acción de filtrado. Esta segunda característica es importante ya que brinda el nombre a este observador.

### 3.2.1 Modelo de la Señal Pasabanda

Tal y como se analizó en 2.2, la técnica propuesta para la estimación del fasor es basada en el siguiente modelo de una señal pasabanda:

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) = \text{Re}\{a(t)e^{j\varphi(t)}e^{j2\pi f_c t}\} \quad (3.2.14)$$

y particularmente en su envolvente compleja, la cual se refiere como *fasor dinámico* expresado como:

$$\rho(t) = a(t)e^{j\varphi(t)} \quad (3.2.15)$$

Como puede verse, el modelo de la señal es una simple modulación cosenoidal del fasor dinámico. La función compleja pues ser aproximada por un polinomio de Taylor de  $K$ -ésimo orden, y sus derivadas en el vector  $\rho_K(t)$  en el instante de tiempo  $t$ , cercanas a la aproximación del centro  $t_0$ , son dadas por la siguiente ecuación de transición para los parametros fasoriales [11]:

$$\rho_K(t) = \Phi_K(\tau)\rho_K(t_0) \quad (3.2.16)$$

donde  $\tau = t - t_0$  y como se explico anteriormente, la matriz de transiciones se expresa de la forma:

$$\Phi_K(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \cdots & \frac{\tau^K}{K!} \\ & 1 & \tau & \cdots & \frac{\tau^{K-1}}{(K-1)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{\tau^{K-2}}{(K-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

La señal coseno modulada puede ser obtenida mediante la *señal analítica*, o *pre-envolvente* [19], como una modulación de la exponencial compleja (o rotación) de la envolvente compleja, entonces los estados necesarios para el modelo de la señal pueden ser definidos simplemente por las muestras de los fasores rotados en el vector  $\xi_K$ , con la siguiente ecuación de transición:

$$\xi_K(t) = \Phi_K(\tau)e^{j2\pi f_c \tau} \xi_K(t_0) \quad (3.2.18)$$

Tomando  $N$  muestras por ciclo de la frecuencia fundamental, obtenemos el factor de fase  $\psi_c = e^{j\theta_c}$ , donde  $\theta_c = 2\pi f_c \tau = 2\pi/N$ . La ecuación de transición necesaria para la modulación se convierte

$$\begin{pmatrix} \xi_K(n+1) \\ \bar{\xi}_K(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_c \Phi_K(\tau) & 0 \\ 0 & \bar{\psi}_c \Phi_K(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_K(n) \\ \bar{\xi}_K(n) \end{pmatrix} \quad (3.2.19)$$

donde  $\bar{\cdot}$  representa el operador para el complejo conjugado. Entonces, la señal coseno modulada es aproximada por el modelo de Taylor de la señal, finalmente dado por

$$s_K(n) = \frac{1}{2}(h^T h^T) \begin{pmatrix} \xi_K(n) \\ \bar{\xi}_K(n) \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

donde  $h^T$  extrae su primera componente del subvector de estado, es decir,  $h^T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ , con  $K$  ceros. Note que mientras que la función de transferencia del modelo de orden cero tiene solo dos

polos, el modelo de segundo orden tiene seis. La idea de modular una señal pasabajas es muy familiar en el campo de telecomunicaciones [19]. Un modelo alternativo de la señal puede ser obtenido mediante la transición de las derivadas de la señal analítica (fasor dinámico rotado). Dicho modelo fue desarrollado en [20], y sus ecuaciones fundamentales son dadas por (A.2.5)-(A.2.8) del apéndice A. Sin embargo, los eigenvalores de este modelo no experimentan cambios significativos con respecto al modelo propuesto en (3.2.20), y su costo computacional no se eleva por esas pequeñas variaciones.

### 3.2.2 Criterio de Selección de Polos

Las dinámicas del sistema son definidas por la localización de los eigenvalores en el plano- $s$  para sistemas continuos, y dentro del círculo unitario del plano- $z$  para sistemas discretos. El mapeo entre el plano- $s$  y el plano- $z$  es dado por las siguientes relaciones [21]:

$$s = -\sigma \pm j\omega_d \quad (3.2.21)$$

$$= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.2.22)$$

En términos de magnitud y fase para el sistema discreto

$$|z| = e^{-\tau\zeta\omega_n} \implies \ln |z| = -T\zeta\omega_n = -T\sigma \quad (3.2.23)$$

$$\angle z = \tau\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ rad} = T\omega_d \text{ rad} \quad (3.2.24)$$

donde  $\zeta$  y  $\omega_n$  corresponden al *factor de amortiguamiento relativo* y la *frecuencia natural no amortiguada*, respectivamente. Las líneas de parametros constantes en el círculo unitario son usadas para especificar la ubicación deseada de los polos del sistema en lazo cerrado.

## 3.3 Diseño del Observador mediante Fórmula de Ackermann

Para el desarrollo del diseño de los observadores de cero y segundo orden,  $\Phi_0$  y  $\Phi_2$  respectivamente, se utilizó una  $f_s$  de 16 muestras por ciclo fundamental, es decir, 16 s/ $\sim$ .

### 3.3.1 Modelo de Orden Cero

$$\begin{pmatrix} \xi_0(n+1) \\ \bar{\xi}_0(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_c & 0 \\ 0 & \bar{\psi}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0(n) \\ \bar{\xi}_0(n) \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

El lugar de las raíces de la dinámica del sistema es mostrada en la Fig. 3.2. La gráfica traza la trayectoria de los polos obtenidos en lazo cerrado con una ganancia escalar, y provee información sobre las posibles dinámicas que podemos asignarle a la solución de Ackermann. A partir de esta gráfica, se obtienen los polos deseados para el observador en el plano- $s$ : amortiguamiento  $\zeta = 0.5$ , y frecuencia natural  $\omega_n = 0.3(\omega_s/2)$ , siendo  $\omega_s$  la *frecuencia de muestreo angular*. Ahora bien, para un periodo de muestreo de  $\tau = \frac{T_1}{16}$ , entonces se tiene:

$$s = -\sigma \pm \omega_d j = (-4.52 \pm 7.83j) \times 10^2$$

Lo que corresponde a los siguientes polos en el plano  $z$ :

$$\lambda_{1,2}^z = \exp(\tau s) = \begin{pmatrix} 0.4276 + j0.4548 & 0.4276 - j0.4548 \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

El lugar de las raíces del observador predictor de orden cero es mostrado en la Fig. 3.3. Se puede ver que la ubicación comienza en las raíces deseadas para el observador. La nueva trayectoria brinda información acerca de las posibles raíces que podemos pedirle al estimador actual, el cual establece una retroalimentación de estado interna. Una región de eigenvalores que conduce a observadores con buenas estimaciones (menor magnitud de error y estimados rápidos ante transitorios) es acotada mediante  $0.5 \leq \zeta < 0.6$  y  $0.3(\omega_s/2) \leq \omega_n \leq 0.4(\omega_s/2)$ . El lugar geométrico de las raíces, es empleado (como se mencionó anteriormente) para obtener conjuntos de eigenvalores aplicables, definiendo observadores estables con ganancias factibles en  $L$ . Dentro de este conjunto de puntos, se obtienen dinámicas estables con errores de estimación de magnitud pequeña, sin embargo, esto no significa que las singularidades fuera de estas trayectorias no proveen de observadores alcanzables, sin embargo, el lugar de las raíces nos otorga mejores posibilidades de obtener observadores factibles.

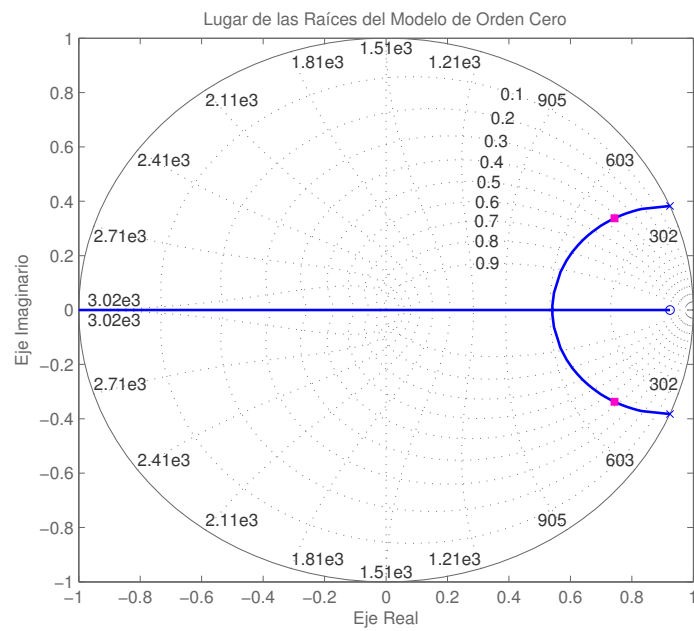


Figura 3.2: Lugar de las raíces de la dinámica del sistema.

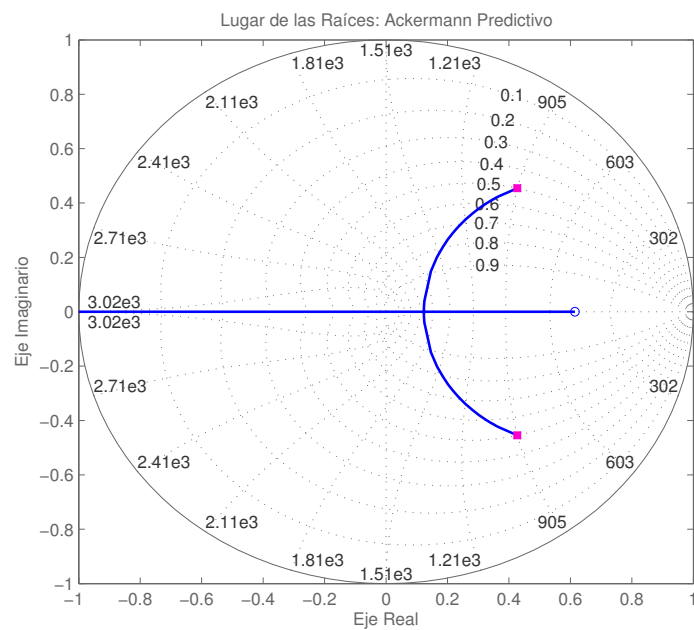


Figura 3.3: Lugar de las raíces para el diseño del observador predictivo  $\Phi_0$ .

Finalmente los polos y ceros de las funciones de transferencia pulso del filtro de Kalman y de los observadores predictor y actual diseñados mediante la fórmula de Ackermann ( $Ackermann_P$  y  $Ackermann_C$ , respectivamente) son mostrados en la Fig. 3.4. Como puede apreciarse, el filtro de Kalman, el cual es adoptado como el diseñado en [11], es muy similar al observador presentado de  $Ackermann_C$ . Sin embargo, sus respuestas al impulso son diferentes como se aprecia en la Fig. 3.5.

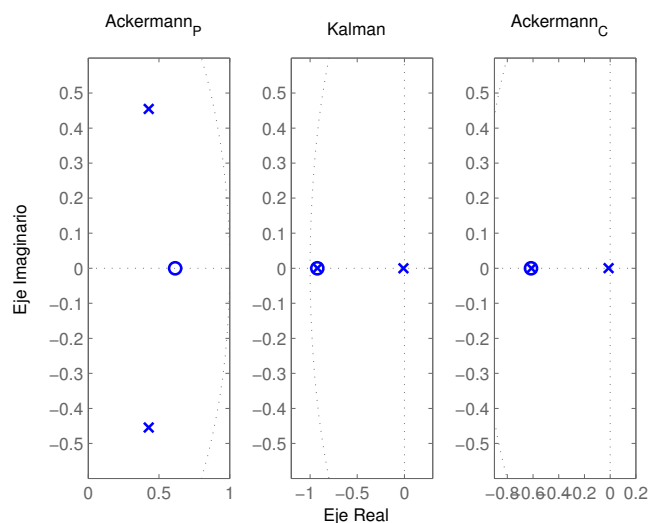


Figura 3.4: Polos y ceros del observador predictor, filtro de Kalman y observador actual ( $K=0$ ).

Para  $\zeta = 0.5$  y  $\omega_n = 0.3(\omega_s/2)$ , el tiempo de asentamiento ( $t_s$ ) de  $Ackermann_C$  es mas corto que el mostrado por el filtro de Kalman, ya que el presentado por éste es cercano a los  $4\sim$ , mientras que el observador de  $Ackermann_C$  es aproximadamente de  $\frac{1}{2}\sim$  con una banda de tolerancia del 2% y de  $\frac{1}{3}\sim$ , si un criterio del 5% es usado [15].  $t_s$  consistentes se encuentran para:

$$\zeta = 0.5 \quad \text{y} \quad \omega_n = \left( \begin{matrix} 0.3 & 0.35 & 0.4 \end{matrix} \right) (\omega_s/2)$$

tal y como se ve en la Fig.3.6. Finalmente, la tabla 3.1 muestra los tiempos de asentamiento de los observadores de  $Ackermann_C$ . Ciertas aplicaciones (aplicación para protecciones) necesitan respuestas transitorias rápidas y amortiguadas.



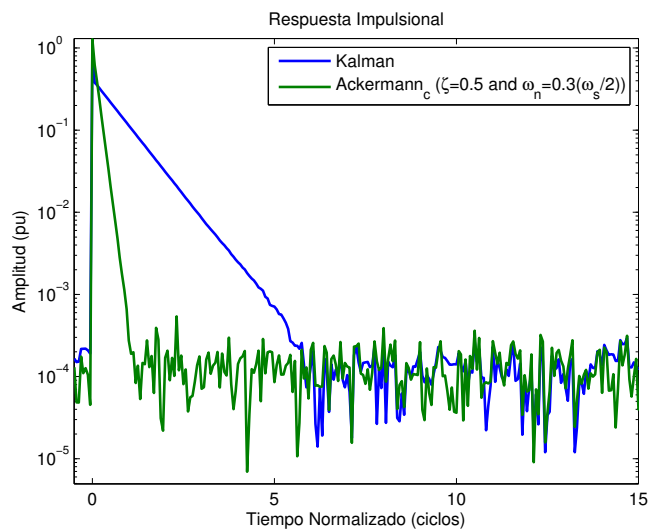


Figura 3.5: Repuesta impulsional del filtro de Kalman y el observador actual ( $K=0$ ).

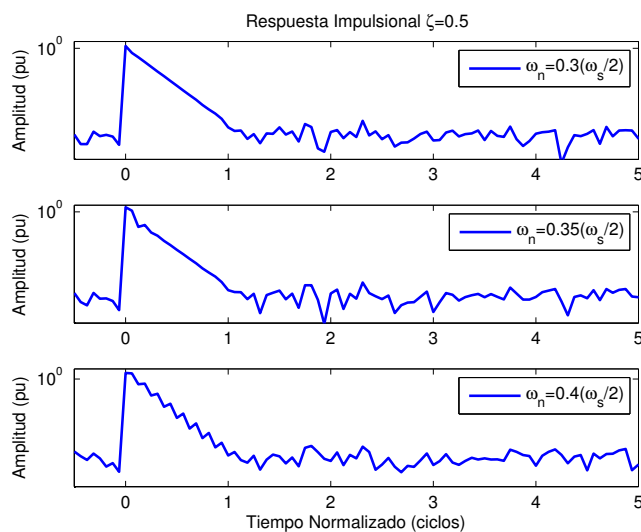


Figura 3.6: Repuesta impulsional del observador actual cuya asignación de polos se hace mediante la solución de Ackermann. Modelo de orden cero ( $K=0$ ).

Por lo tanto, los observadores actuales cuya ganancia depende de  $\phi$  asignado a la fórmula de Ackermann, pueden proporcionar mejores estimados que los otorgados por el filtro de Kalman, bajo

estas condiciones. En la tabla 3.2, podemos analizar los  $t_s$ , tanto del estimador  $T^0-A_C$  como el del filtro  $T^0-K$ , para diferentes  $\omega_s$ , sin embargo, la Fig.3.7 deja apreciar de manera mas clara la diferencia entre los  $t_s$  de los filtros.

Tabla 3.1: Tiempos de asentamiento  $t_s$  del observador  $T^0-A_C$ , con banda de tolerancia del 5%.

	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.7$
$\omega_n = 0.3(\omega_s/2)$	0.4375	0.3750	0.5000
$\omega_n = 0.35(\omega_s/2)$	0.4375	0.4375	0.5000
$\omega_n = 0.4(\omega_s/2)$	0.5000	0.5000	0.5000

Tabla 3.2: Tiempos de asentamiento  $t_s$  con banda de tolerancia del 5%, para diferentes  $\omega_s$ .

	16 s/ $\sim$	32 s/ $\sim$	64 s/ $\sim$	128 s/ $\sim$	256 s/ $\sim$
$T^0-A_C$	0.4375	0.2188	0.1250	0.0703	0.0391
$T^0-K$	1.6875	2.1875	2.1563	0.0078	0.0039

### 3.3.2 Modelo de Segundo Orden

Empleando el modelo de segundo orden  $\Phi_2$ , ocurren en el sistema cambios significativos tanto en la respuesta frecuencial del filtro así como en sus estimados de estado, ya que, al elevar el grado del polinomio de Taylor hasta una potencia de dos, los estimados obtenidos mejoran considerablemente. Esto se debe a que se incorporan mayor número de componentes al modelo de señal teniendo de esta manera un modelo mas completo que disminuye los errores de estimación, como se explica en [11] y [14]. Los eigenvalores asignados para el observador de estado deseado son:

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.4 & 0.33 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \omega_n = \begin{pmatrix} 0.18 & 0.13 & 0.2 \end{pmatrix} (\omega_s/2)$$

los cuales generan las siguientes singularidades en el plano- $z$ ,  $\Lambda^z = (\lambda \ \bar{\lambda})$ , donde:

$$\lambda = \left( 0.6739 + j0.4543 \quad 0.6785 + j0.3751 \quad 0.7905 + j0.3105 \right) \quad (3.3.3)$$

siendo  $\bar{\lambda}$  el conjugado complejo de  $\lambda$ .

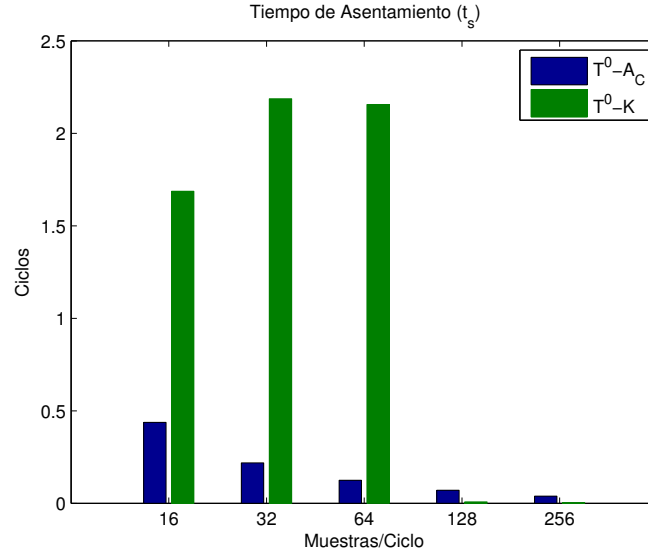


Figura 3.7: Tiempos de asentamiento  $t_s$  correspondientes a la tabla 3.2.

$$\Psi_P(z) = \frac{1.257z^5 - 5.154z^4 + 8.851z^3 - 7.918z^2 + 3.685z - 0.713}{z^6 - 4.286z^5 + 8.089z^4 - 8.544z^3 + 5.325z^2 - 1.859z + 0.286} \quad (3.3.4)$$

$$\Psi_K(z) = \frac{0.996z^5 + 3.569z^4 + 5.395z^3 + 4.273z^2 + 1.766z + 0.303}{z^6 + 3.587z^5 + 5.437z^4 + 4.329z^3 + 1.809z^2 + 0.321z + 0.003} \quad (3.3.5)$$

$$\Psi_C(z) = \frac{1.257z^5 + 5.154z^4 + 8.851z^3 + 7.918z^2 + 3.685z + 0.713}{z^6 + 3.727z^5 + 5.443z^4 + 3.441z^3 + 0.276z^2 - 0.713z - 0.257} \quad (3.3.6)$$

Estos parametros son elegidos basándose en el lugar de las raíces para el Ackermann<sub>P</sub> mostrado en la Fig. 3.8, y Ackermann<sub>C</sub> visto en la Fig. 3.9. Finalmente los polos y ceros de las funciones de transferencia pulso de los observadores descritas por (3.3.4)-(3.3.6), son mostrados en la Fig. 3.10.

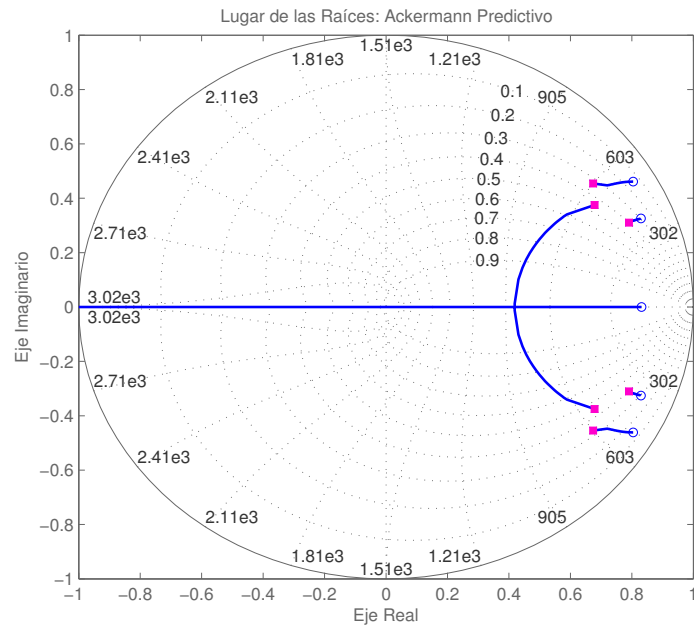


Figura 3.8: Lugar de las raíces para el observador predictivo  $\Phi_2$ .

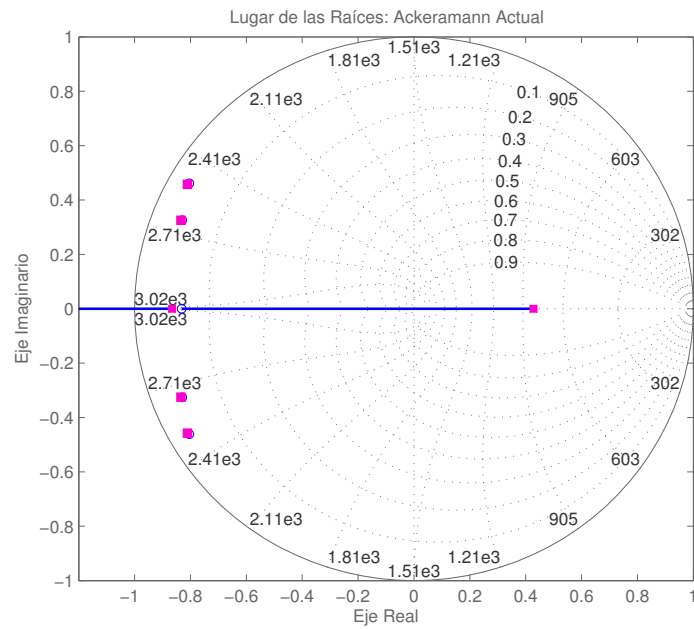


Figura 3.9: Lugar de las raíces para el observador actual  $\Phi_2$ .

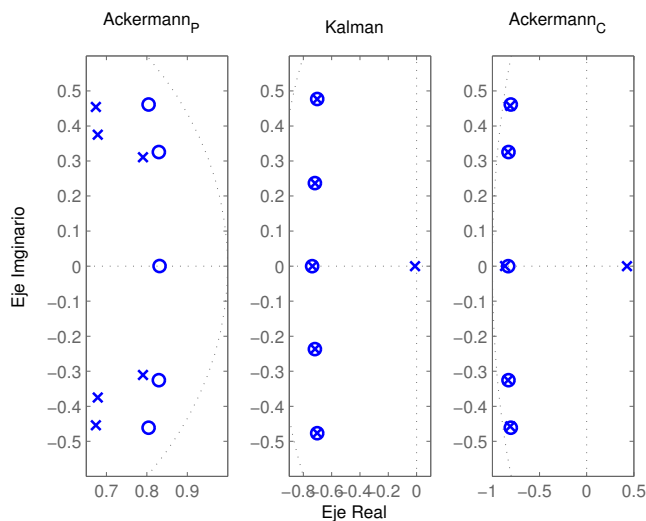


Figura 3.10: Polos y ceros de los observadores de segundo orden en el plano- $z$ .

Se puede ver que, la mayoría de los polos del estimador Ackermann<sub>c</sub> al extremo izquierdo de la circunferencia unidad y un polo dominante cercano a  $z = 1$ , de modo que será más lento que los polos dominantes del estimador de Kalman, para el caso de  $16 \text{ s}/\sim$  [22].

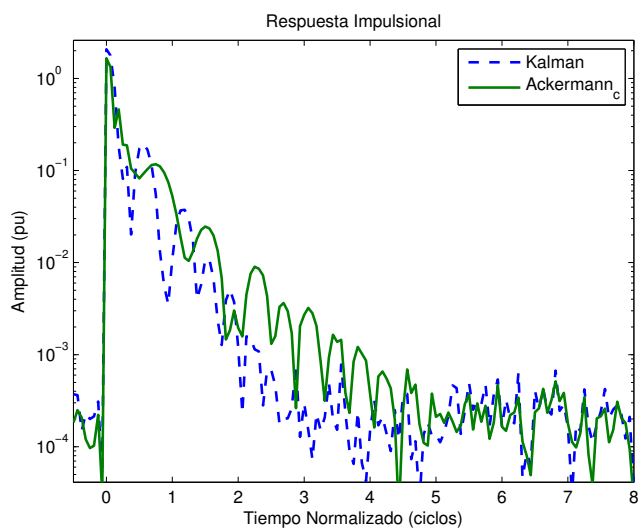


Figura 3.11: Respuesta impulsional del filtro de Kalman y el observador actual ( $K=2$ ).

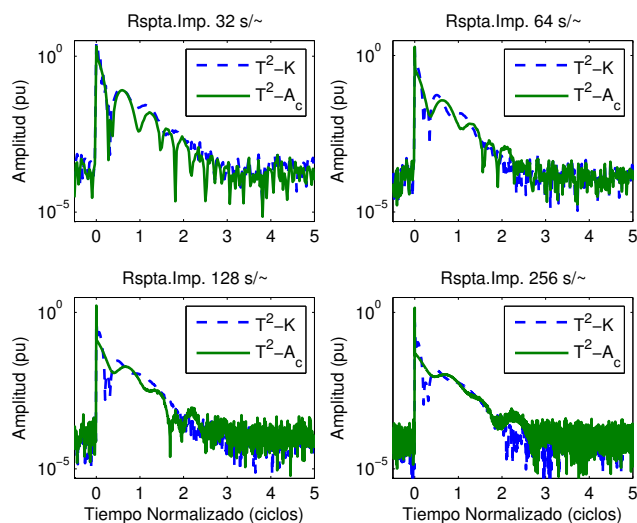


Figura 3.12: Repuesta impulsional del filtro de Kalman y el observador actual ( $K=2$ ) para diferentes frecuencias de muestreo.

Sin embargo, al incrementar la frecuencia de muestreo ( $f_s$ ) sucede lo opuesto, es decir, el estimador propuesto Ackermann<sub>c</sub> es mas rápido que el filtro de Kalman. La Fig. 3.11 muestra la dinámica mas lenta del estimador Ackermann<sub>c</sub> comparada con la dinámica del filtro de Kalman. Pero, como ya se menciona, elevando la tasa de muestreo, los estimados proporcionados por Ackermann<sub>c</sub> son mejores que los del filtro de Kalman, esto se muestra en la Fig. 3.12.

### 3.4 Respuesta en Frecuencia

La respuesta en frecuencia del estimador de Taylor-Ackermann es obtenida tal y como se muestra en [11] y [14] a partir de las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.11) que representan las dinámicas de error de los observadores *predictor* y *actual*, respectivamente. Finalmente resolviendo para  $\hat{\xi}_n$ , se obtiene las funciones de transferencia pulso entre los parámetros fasoriales del modelo de señal y la señal de

entrada, las cuales se expresan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\Xi_P(z) = \frac{L_p z}{zI + (L_p H - \Phi)} = \frac{L}{I + (\Upsilon_p) z^{-1}} \quad (3.4.1)$$

$$\Xi_c(z) = \frac{L_c z}{zI + (L_c H - I) \Phi} = \frac{L}{I + (\Upsilon_c) z^{-1}} \quad (3.4.2)$$

Siendo (3.4.1) la respuesta en frecuencia de Taylor-Ackermann<sub>P</sub> y (3.4.2) la correspondiente a Taylor-Ackermann<sub>C</sub>. Evaluadas en  $z = e^{j\theta}$ , para  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Las respuestas frecuenciales a continuación presentadas son obtenidas bajo una tasa de muestreo de 64 s/∼.

### 3.4.1 Modelo de Orden Cero

La Fig. 3.13 ilustra la respuesta en frecuencia de los observadores de orden cero. Note que los observadores predictor y actual tienen respuestas frecuenciales lineales, debido a la ubicación de sus polos en la función de transferencia, y no exhiben resonancia en la frecuencia nula como el filtro de Kalman de orden cero, cuya función de transferencia tiene un polo cercano a  $z = 1$ , cada vez más cerca de uno a medida que aumenta la frecuencia de muestreo [13].

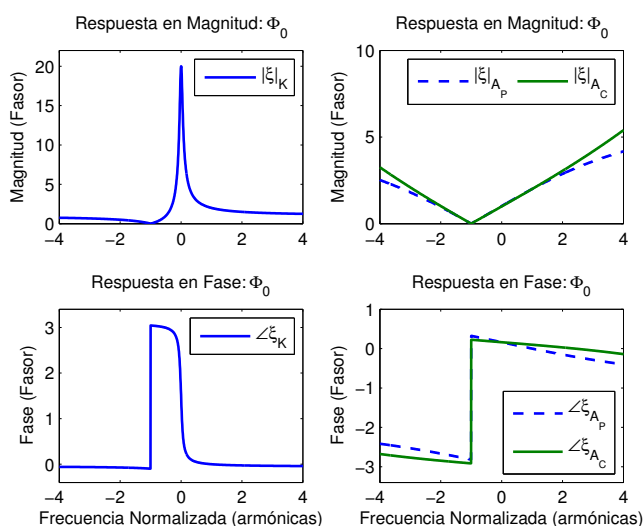


Figura 3.13: Respuesta en frecuencia de los observadores de orden cero.

### 3.4.2 Modelo de Orden Dos

La Fig. 3.14 muestra la respuesta en frecuencia obtenida por el modelo de segundo orden. Claramente puede verse que las respuestas emulan ciertas características de la respuesta frecuencial del filtro de Kalman, es decir, el comportamiento dinámico muestra una frecuencia de resonancia cercana a la frecuencia nula y altas ganancias en las armónicas, sin embargo, todos los observadores alcanzan ganancias máximamente lisas alrededor de la frecuencia fundamental positiva y negativa. Esto significa que los observadores proveen derivadas de los estimados centrándose sobre las oscilaciones de la frecuencia fundamental, para coincidir con las oscilaciones particulares; cabe mencionar, que su desempeño fuera de estas bandas es deficiente. Por otro lado, la Fig. 3.15 muestra la respuesta de magnitud de la primera (gráfico superior) y la segunda (gráfico inferior) derivadas estimadas. Ambos filtros tienen ganancias nulas en la frecuencia fundamental negativa, lo que significa que rechazan la componente que provoca la corrugación en los estimados del modelo de orden cero ( $\Phi_0$ ) de la señal; por otro lado, los filtros siguen exhibiendo altas ganancias en los armónicos lo que quiere decir que son muy sensibles al ruido.

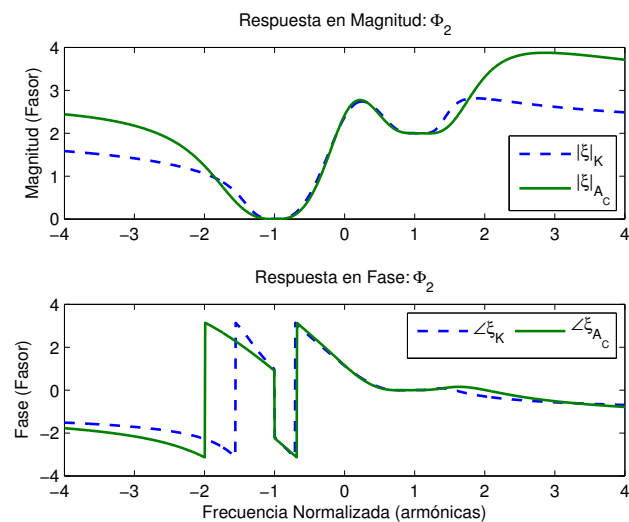


Figura 3.14: Respuesta en frecuencia del filtro de Kalman y el observador actual diseñado mediante fórmula de Ackermann. Modelo de segundo orden de la señal pasabanda.



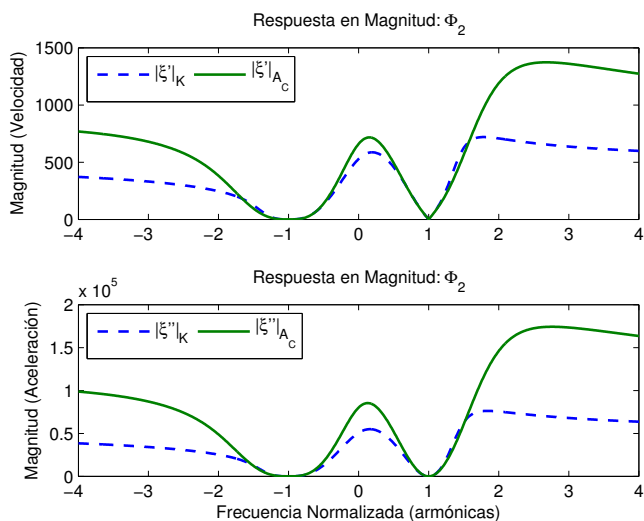


Figura 3.15: Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador del modelo de segundo orden.

La Fig.3.16 muestra el comportamiento de los estimados para las diferentes tasas de muestreo, excepto el caso de  $64 \text{ s}/\sim$  que es mostrado en las figuras anteriores es decir, 3.14 y 3.15.

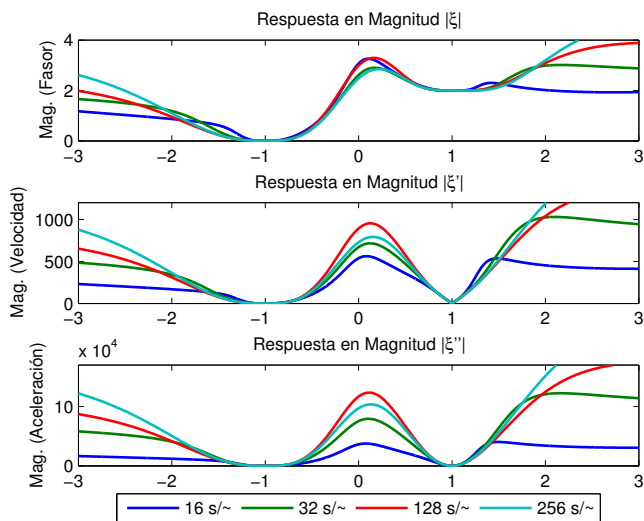


Figura 3.16: Respuesta en frecuencia del  $T^K-A_C$  con  $K=2$  para diferentes muestras por ciclo.

## 3.5 Señal de Análisis

Para analizar el comportamiento de los estimados, es considerada la señal de norma de la IEEE para sincro-fasores [23].

### 3.5.1 Señal Oscilatoria

Considerando la señal pasabanda:

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \\ &= a(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

donde las funciones de amplitud y fase se definen como:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t) \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t) \end{aligned}$$

con  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0.1$ , and  $f_a = 5Hz$ ; y  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0.1$ , y  $f_\varphi = 5Hz$ . Los resultados obtenidos asumen  $\sigma_v^2 = 0.01$  y  $\sigma_w^2 = 10^{-4}$ , siendo la varianza de entrada y medición de ruido, respectivamente.

Las Figs. 3.17 y 3.18 muestran los comportamientos de reconstrucción de la señal pasabanda del estimador  $T^0-A_P$  y el estimador  $T^0-A_C$ , respectivamente. Las figuras nos permiten observar con claridad que el estimador actual provee de buenos estimados de la señal de prueba, con un error de estimación en el orden de  $10^{-5}$ . Estos resultados claramente muestran la principal diferencia entre el estimador predictor y el estimador actual. Aparentemente las estimaciones proporcionadas por el observador predictor son una versión retrasada de la señal de entrada, mientras que el observador actual provee de estimaciones sincronizadas. Los estimados remitidos del estimador actual son obtenidos mediante la compensación del retardo del estimador predictor, alcanzados a través de un cambio de posición de ceros y polos de lado derecho del círculo unitario al lado izquierdo del mismo, tal y como

se puede apreciar en la comparación del primer y tercer gráfico de la Fig.3.10. Por otro lado, las Figs.3.19 y 3.20 muestran los estimados obtenidos con el modelo de señal de segundo orden,  $\Phi_2$ .

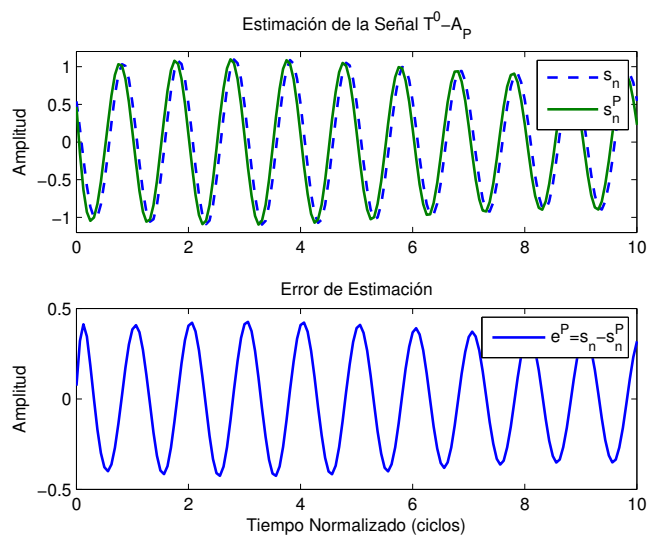


Figura 3.17: Estimación de señal y error de estimación del observador predictor  $\Phi_0$ .

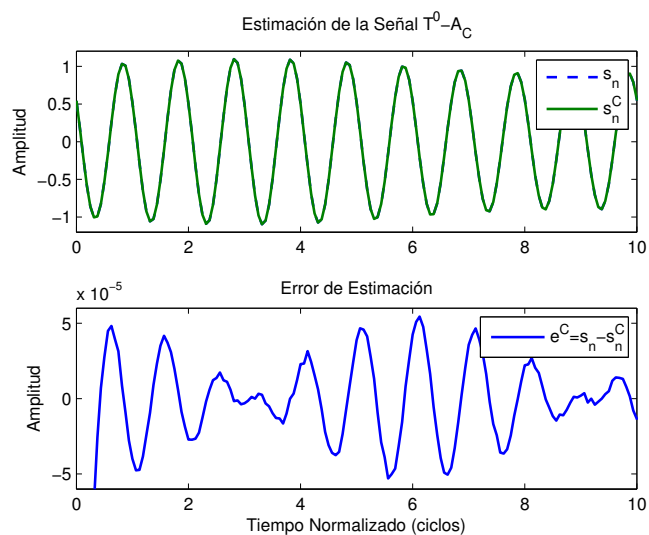


Figura 3.18: Estimación de señal y error de estimación del observador actual  $\Phi_0$ .

Analizando las reconstrucciones de la señal, el estimador actual produce un error mas grande que en el caso de modelo de orden cero; dicho error se debe principalmente a las condiciones transitorias iniciales de los estimados, lo que se puede apreciar en los estimados de amplitud y fase de la Fig.3.21.

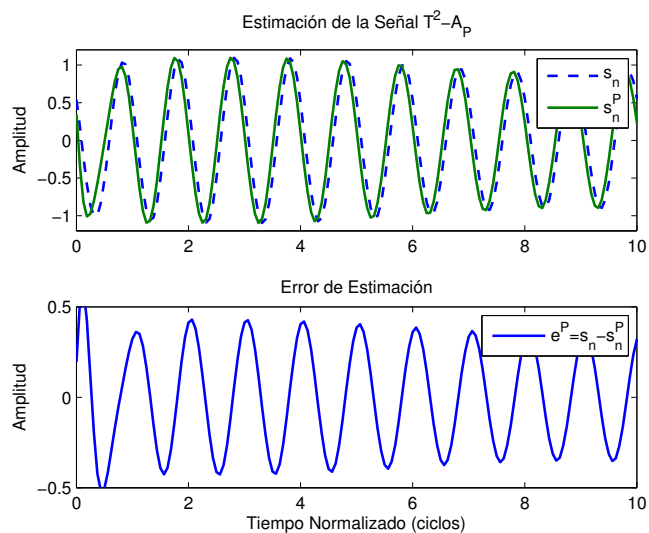


Figura 3.19: Estimación de señal y error de estimación del observador predictor  $\Phi_2$ .

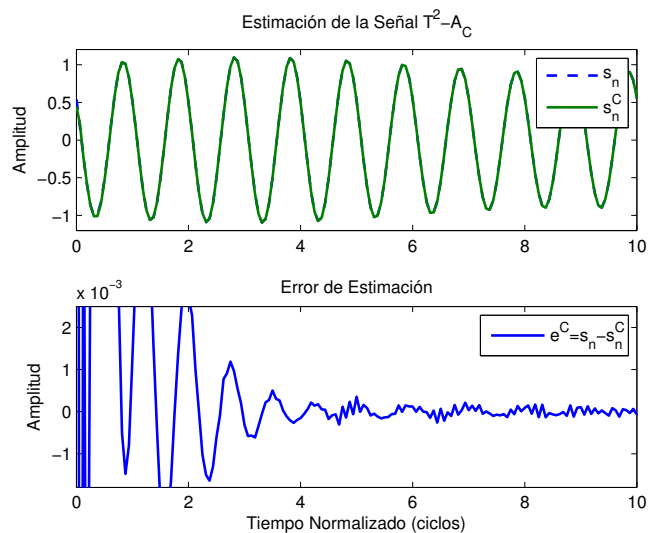


Figura 3.20: Estimación de señal y error de estimación del observador actual  $\Phi_2$ .

La ventaja de este estimador es que además de los estimados de posición, también entrega las derivadas del fasor, dentro de los cuales se encuentran los estimados de frecuencia y ROCOF. El comportamiento de las derivadas puede ser apreciado en la Fig.3.22 y representan de los estimados de la velocidad de oscilación de la amplitud y la frecuencia.

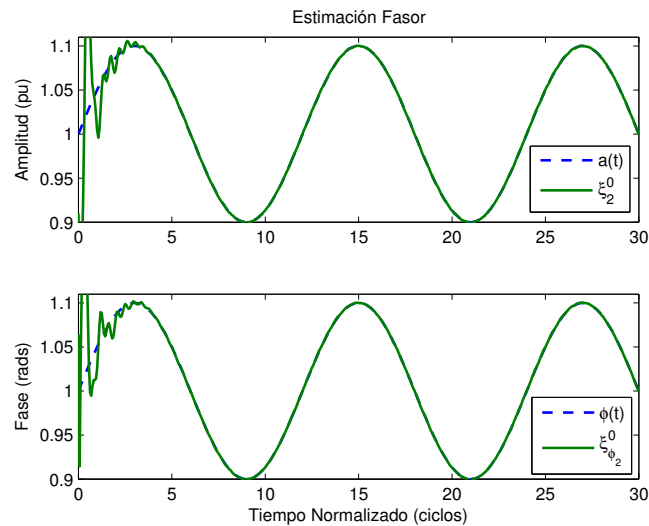


Figura 3.21: Estimados de amplitud y fase obtenidos mediante el estimador actual de segundo orden  $\Phi_2$ . Estimador propuesto Taylor<sup>K</sup>-Akermann<sub>C</sub>.

### 3.6 Respuesta Dinámica

En esta sección, se analizan los estimados de la señal de prueba propuesta en la *IEEE Synchrophasor Standard* [23], para evaluación de la respuesta dinámica de los estimados. Esta señal exhibe un paso de 1 a  $(1.1)e^{j\frac{\pi}{18}}$ . La Fig.3.23 exhibe los transitorios de magnitud y fase de la señal, obtenidos con el modelo de orden cero. En el caso del estimador actual, se aprecia que presenta un pico de sobrepaso de magnitud durante un periodo muy corto de tiempo; este transitorio tiene una duración de aproximadamente  $\frac{1}{10} \sim$ , mientras que el estimador de Kalman presenta un transitorio mucho mas largo, cercano a  $12 \sim$ . Este comportamiento del filtro de Kalman es analizado de manera mas completa

en [11]. Cabe destacar que en estas pruebas, la señal es muestreada a  $64\text{s}/\sim$ , para poder compararse con los datos presentados en [13].

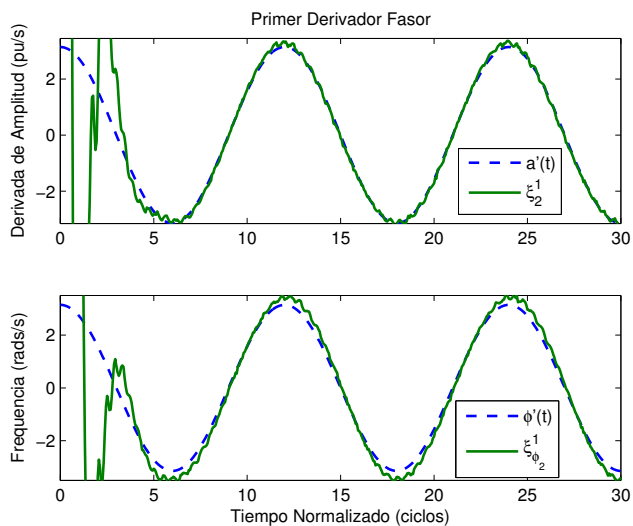


Figura 3.22: Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos mediante el estimador actual de segundo orden  $\Phi_2$ . Estimador propuesto Taylor<sup>K</sup>-Ackermann<sub>C</sub>.

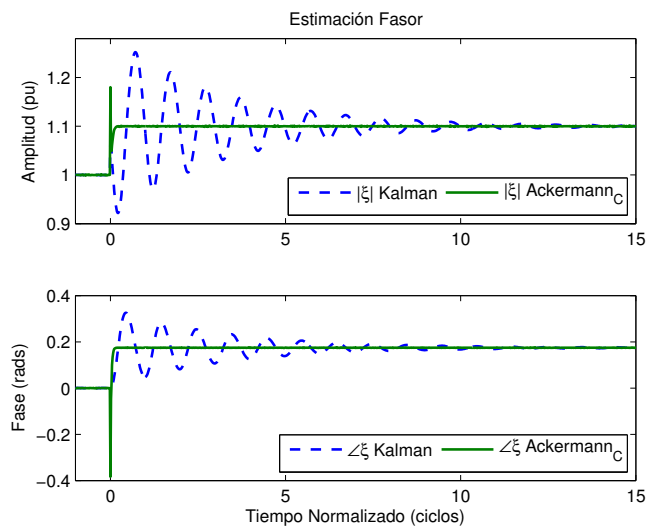


Figura 3.23: Respuesta transitoria de los observadores del modelo de orden cero, bajo las condiciones establecidas por el standard de la IEEE C37.118.1-2011.

Debido a que las características del estimador cambian según la cantidad de muestras por ciclo, las Figs.3.24 y 3.25 nos permiten visualizar la respuesta al escalón en magnitud y fase, respectivamente, del observador Ackermann<sub>C</sub> con  $\Phi_0$  para diferentes  $\omega_s$ .

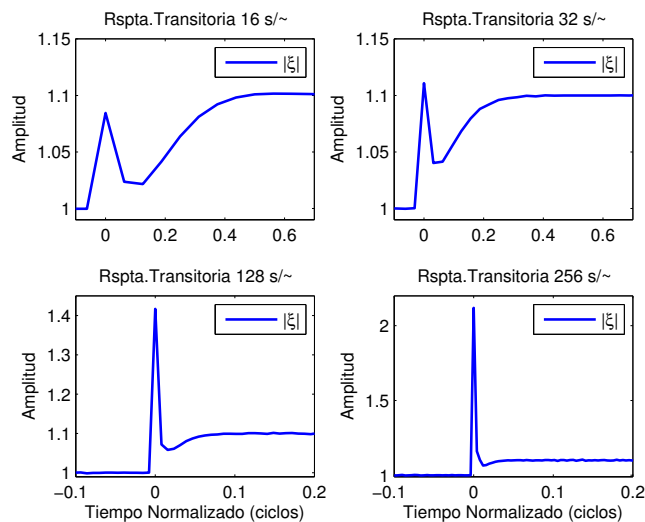


Figura 3.24: Respuesta transitoria en magnitud de observador actual de orden cero para varias  $\omega_s$ .

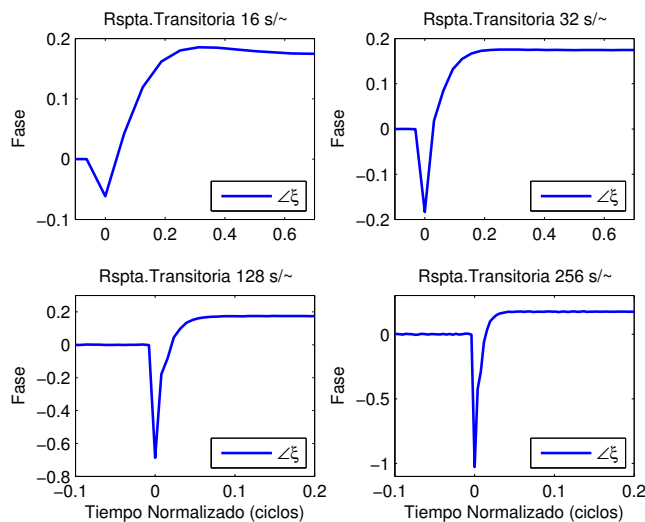


Figura 3.25: Respuesta transitoria en fase del observador actual de orden cero para varias  $\omega_s$ .

Se puede apreciar que los estimados del fasor son realmente rápidos. En el caso del modelo de segundo orden, el vector  $\Lambda$  de (3.3.3) es ajustado debido a la nueva frecuencia de muestreo, es decir,  $\omega_s = 2\pi(64/T_1)$ , por lo que ahora:

$$\zeta = 0.9 \quad \text{y} \quad \omega_n = \frac{1}{20}(\omega_s/2)$$

Las dinámicas presentadas por los estimados y generadas por los nuevos eigenvalores, pueden ser analizadas en la Fig.3.26. Repitiendo nuevamente la especificación de una banda de tolerancia del 5%, el  $t_s$  expuesto por observador actual es ligeramente mas corto que el del filtro de Kalman. Esta diferencia es cerca de 1~, lo que se puede apreciar mejor en la Fig.3.27. Cabe aclarar, que el  $t_s$  del estimador  $T^2-A_C$  es mayor que el  $t_s$  del  $T^0-A_C$  debido al incremento en el numero de polos de la función de transferencia.

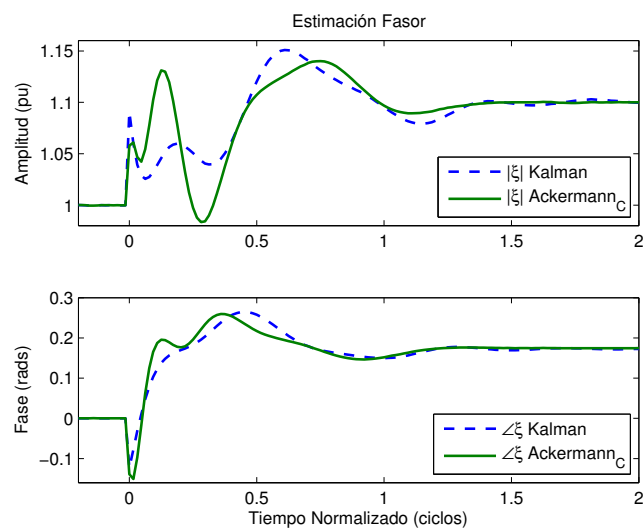


Figura 3.26: Respuesta transitoria de los observadores del modelo de orden dos, bajo las condiciones establecidas por el standard de IEEE C37.118.1-2011.

El comportamiento en magnitud del estimador  $Ackermann_P$  es muy similar al del  $Ackermann_C$ , solo por algunas ligeras diferencias, sin embargo, respecto a la respuesta de fase es donde podemos apreciar la principal diferencia que se trata del retardo característico del observador predictor. Para



el caso de los estimados de frecuencia y velocidad de la oscilación de amplitud, podemos apreciar su respuesta dinámica ante las condiciones de la IEEE en la Fig.3.28, lo que nos permite analizar su respuesta transitoria, la cual presenta un  $t_s$  de  $1.4\sim$ , aproximadamente.

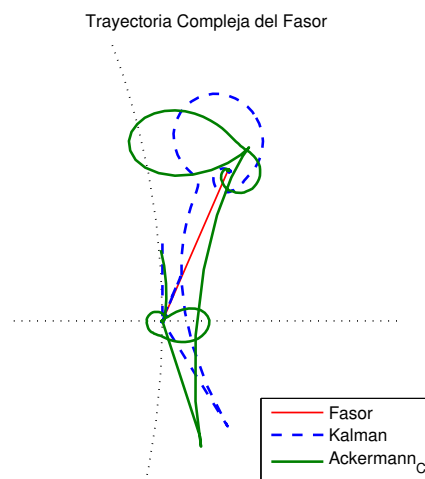


Figura 3.27: Trayectorias complejas de los estimados del fasor con el modelo de orden dos.

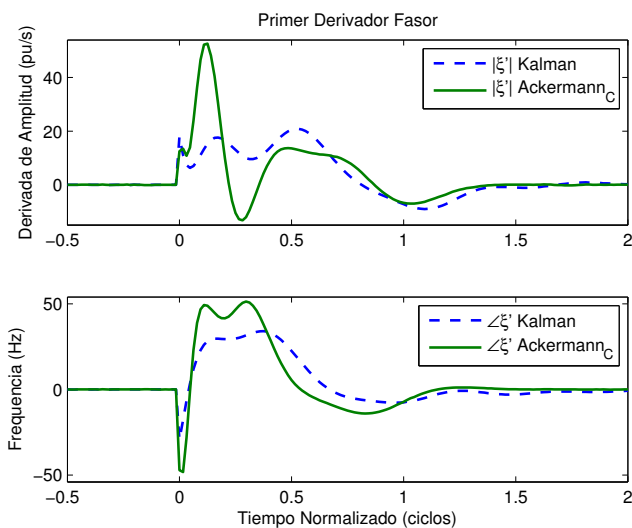


Figura 3.28: Estimados del primer derivador de amplitud y fase (velocidad de oscilación de amplitud y frecuencia) mediante los observadores de segundo orden del filtro de Kalman y el observador actual.

### 3.7 Discusión

Dadas las cercanas regiones entre el conjunto de eigenvalores del filtro de Kalman y el observador de Luenberger de tipo actual, cuya asignación de eigenvalores se realiza mediante la solución de Ackermann, y la inestabilidad observada en las ganancias analizadas en [13] diseñando el filtro de Kalman, es muy probable que las ganancias del filtro de Kalman tomadas en dicho diseño se encontraban en una fase previa, mas cercana a la solución dinámica de Ackermann que a la solución óptima esperada por el algoritmo del filtro de Kalman.

En los anteriores resultados, permanecemos apegados a los procedimientos clásicos de control automático y procesamiento digital de señales, los cuales tienen puntos de vista muy diferentes. Por ejemplo, en aplicaciones de control el diseño de la señal típico es una señal escalón o una rampa, y se pone énfasis en la respuesta dinámica del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, no consideran el sistema en lazo cerrado como un filtro, por lo que no tienen en cuenta su respuesta de frecuencia.

Lo opuesto sucede en el enfoque de procesamiento digital de señales, por lo que el método tratado en esta sección abre una brecha de alternativas inexploradas, donde ambos enfoques permanezcan juntos para mejorar el diseño. De esta forma se obtendrán más criterios de diseño y una visión más completa en el desarrollo de estimadores fasoriales para la gran pluralidad de aplicaciones teóricas y prácticas. Por otro lado, el método puede ser extendido a más frecuencias para extraer rápidamente los componentes armónicos.

### 3.8 Conclusiones

Usando el observador actual con un modelo de señal más flexible a las condiciones reales y la asignación de un conjunto de eigenvalores mediante la fórmula de Ackermann que cumplan con las especificaciones impuestas por el diseñador, se obtienen estimaciones fasoriales rápidas. El estimador,

no solo provee de buenos estimados dinámicos del fasor bajo oscilaciones suaves, sino también otorga estimados de las primeras  $K$  derivadas de amplitud y fase, las cuales son importantes para el análisis de sistemas. La principal ventaja de los estimados Taylor <sup>$K$</sup> -Ackermann <sub>$C$</sub>  es que son instantáneos (no se presenta retardo), preservando la sincronía con la señal requerida para aplicaciones de control y protecciones; aunado a estas características, este estimador presenta tiempos de asentamiento más cortos que los expuestos por los filtros Taylor <sup>$K$</sup> -Kalman y Taylor <sup>$K$</sup> -LQG cuando la señal es afectada por condiciones transitorias. Finalmente estos resultados abren la posibilidad de nuevas alternativas en el desarrollo de estimadores de parámetros dinámicos fasoriales.

# Capítulo 4

## Estimadores con Modelo de Señal Extendido

### 4.1 Introducción

Uno de los elementos más importantes de los modernos sistemas de gestión de energía que actualmente utilizan las compañías eléctricas, es la *estimación del estado* del sistema a partir de las mediciones en tiempo real. El estado de la mayoría de los sistemas de distribución de energía se define como el conjunto de las tensiones o corrientes, obtenidas en un momento dado. Inicialmente la tecnología de estimación de estado aplicada fue desarrollada en los años sesenta y se basaba en mediciones no sincronizadas, lo que daba lugar a ecuaciones no lineales que se debían resolverse *on-line* para estimar el estado de sistema. Debido a las bajas velocidades y cálculos de exploración relativamente lentos, la tecnología tenía que evolucionar para proporcionar información sobre el estado dinámico del sistema; por lo que, las mediciones de fasores dinámicos abren posibilidades certeras para sintetizar el proceso de estimación de estado. La aplicación de esta tecnología elimina en gran parte el retardo inherente a los sistemas actuales de estimación, sin embargo, para tener una estimación lo más cercana al valor del estado real se requiere tener en cuenta la mayoría de las características de las señales dentro del modelo y no solo considerar la frecuencia fundamental como en el caso del capítulo anterior, sino también tensiones o corrientes cuya frecuencia es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental del sistema, es decir, los armónicos del propio sistema. Sin embargo el

enriquecimiento del modelo de señal puede crecer, incorporando también tensiones o corrientes de frecuencia igual a un múltiplo no entero de la frecuencia fundamental, o mejor dicho, interarmónicos.

## 4.2 Conjunto completo de armónicos

Los estimadores Taylor<sup>K</sup>-Ackermann otorgan ganancias ideales solamente en el intervalo de la frecuencia fundamental, sin embargo, se requiere obtener ganancias en los intervalos de cada armónica. Para alcanzar tal especificación, la matriz de transiciones del modelo dinámico de la señal requiere ser extendido, incluyendo el conjunto de armónicas de interés. Es decir, si la señal es muestreada a  $N = 2^l s/\sim$ , y el conjunto deseado de armónicas es incluido, la matriz de transiciones adquiere la siguiente forma:

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_K(\tau)\psi^0 & & & & \\ & \Phi_K(\tau)\psi^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Phi_K(\tau)\psi^{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

La matriz extendida es  $(K + 1)N \times (K + 1)N$ ; sin embargo, el costo computacional ejercida por la transición de un estado no es  $((K + 1)N)^2$  debido a su diagonalidad, y la forma triangular superior de  $\Phi_K$ . Esta reducción es importante porque el algoritmo de Ackermann<sub>c</sub> solo trabaja con las ecuaciones de predicción del estado (3.2.2) y actualización del mismo (3.2.11) y no requiere de esperar el estado estacionario de las ganancias como en el caso del filtro de Kalman o el LQG. El vector  $H$  de la ecuación de salida (3.2.9), para  $K = 2$ , es de la forma:

$$H = \left( \frac{1}{2} \quad \underbrace{0 \quad 0}_K \quad \frac{1}{2} \quad \underbrace{0 \quad 0}_K \quad \cdots \quad \frac{1}{2} \quad \underbrace{0 \quad 0}_K \right) \quad (4.2.2)$$

entonces requieres solo  $N$  productos para estimar la señal del vector de estado. Durante esta sección mostraremos que cuando son incluidas los armónicas de interés dentro del modelo, la respuesta en frecuencia del estimador extendido Taylor<sup>2</sup>-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier es similar a la presentada por el filtro Taylor<sup>2</sup>-Kalman-Fourier

### 4.2.1 Señal de análisis

La evaluación de los filtros  $T^0$ - $A_C$ - $F$  y  $T^2$ - $A_C$ - $F$  se efectuara mediante una señal oscilatoria a la cual se le han agregado una 3<sup>a</sup> y 5<sup>a</sup> armónica en un cierto instante de tiempo. La señal es muestreada a  $N = 16$  muestras por ciclo; entonces el desempeño de los filtros en la estimación del fasor será analizado.

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_1 t + \varphi(t)) + u(t) \left[ \frac{a(t)}{10} \cos(\omega_3 t + \varphi_3(t)) + \frac{a(t)}{20} \cos(\omega_5 t + \varphi_5(t)) \right] \quad (4.2.3)$$

donde  $\omega_1 = 2\pi f_1$ ,  $\omega_3 = 2\pi f_3$  y  $\omega_5 = 2\pi f_5$ ; mientras que las demás funciones que completan la funcional se definen como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < \frac{15}{f_1} \\ 1, & \text{para } t \geq \frac{15}{f_1} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t) \quad (4.2.5)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t) \quad (4.2.6)$$

$$\varphi_3(t) = 0.9\varphi(t) \quad (4.2.7)$$

$$\varphi_5(t) = 0.8\varphi(t) \quad (4.2.8)$$

cuyos parámetros de amplitud son:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0.1$ , y  $f_a = 5Hz$  y  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0.1$ , y  $f_\varphi = 5Hz$ , para la fase. Mientras que la varianza y la medición de ruido de la señal son  $\sigma_v^2 = 0.01$  y  $\sigma_w^2 = 10^{-4}$ , respectivamente.

## 4.3 Filtro extendido diseñado mediante la fórmula de Ackermann

Al igual que en el caso explicado anteriormente para la frecuencia fundamental, la obtención de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  para los eigenvalores deseados del estimador extendido se lleva a cabo mediante el lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 4.1. Esto nos permite valorar las regiones en las cuales el sistema sera estable considerando las transiciones del primer y tercer elemento de la

ecuación (3.2.11). Entonces para un polinomio de Taylor de segundo orden, es decir:

$$\xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 / 2! \quad \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (4.3.1)$$

Y una  $\omega_s = 32\pi f_1$ , la nueva matriz de transiciones es una matriz diagonal cuyos elementos son la submatriz  $\Phi_2$  multiplicada por los factores de fase rotatorios  $\{\psi^k, k = 0, 1, \dots, N - 1\}$ .

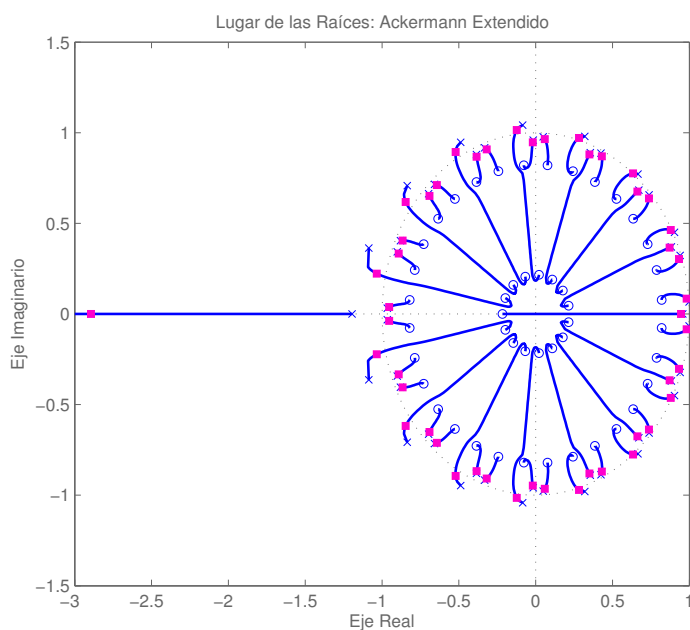


Figura 4.1: Lugar geométrico de las raíces para el observador actual de Luenberger con el conjunto completo de armónicos incluidos en el modelo de señal.

La Fig.4.2 muestra la distribución de las raíces deseadas para el estimador Taylor-Ackermann<sub>c</sub>, teniendo en cuenta la transición del tercer elemento. Ya que la corrección del estado en el observador actual implica un cambio de posición en las raíces de la transición del primer elemento. Al comparar las Figs.4.2 y 4.7, note la marcada diferencia entre los patrones de los polos impuestos por el  $\zeta$  y  $\omega_n$ , sin embargo, observe que los comportamientos frecuenciales del estimador Ackermann<sub>c</sub> y el filtro progresivo de Kalman vistos en 4.3 y 4.9, respectivamente, son muy similares. Dichas figuras muestran la respuesta en magnitud y fase para las primeras armónicas; según su respuesta, los filtros

extraen la armónica oscilante deseada rechazando el resto. Los niveles exhibidos por las resonancias laterales en el lóbulo principal son notorios, sin embargo el estimador presenta intervalos planos en cada armónica.

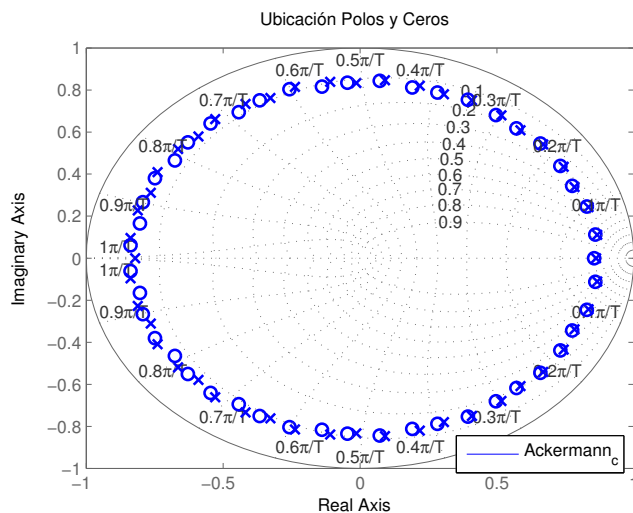


Figura 4.2: Ubicación de polos y ceros mediante fórmula de Ackermann para el observador de Luenberger de tipo actual con  $\Phi_0$ .

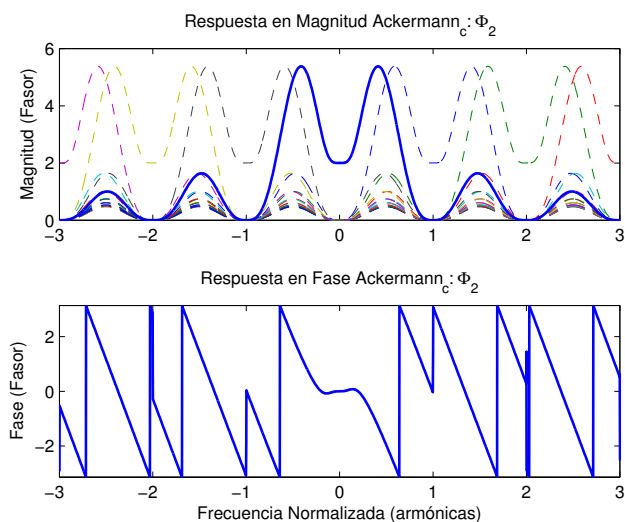


Figura 4.3: Respuesta en frecuencia del estimador Taylor-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier.



Por otro lado note en la respuesta de fase que el comportamiento bajo la banda de paso es plana sobre cero, lo que indica ausencia de retardo en los estimados del fasor, es decir, estimados instantáneos. Una de las ventajas más sobresalientes de estos estimados es que son muy útiles en aplicaciones de control.

## 4.4 Implementación de Ackermann para el diseño de emuladores

Debido a las características expuestas anteriormente sobre la asignación de polos mediante la fórmula de Ackermann en (3.2.13), la metodología puede ser empleada para emular los comportamientos de otros filtros y estimadores, como es el caso del filtro de Kalman y sus variaciones. Esto se hace posible siempre y cuando se asignen los eigenvalores pertinentes, así el estimador emulara casi perfectamente el comportamiento especificado, y se dice esto, ya que siempre existirán ligeras diferencias debido a la obtención de ganancias del método empleado. En este caso el transitorio inicial presentado por los observadores de tipo actual cuya asignación de polos se hace mediante la ganancia computada por la fórmula de Ackermann es el principal factor. La importancia radica en que las ganancias requeridas por el estimador propuesto  $Ackermann_c$  presentan comportamientos constantes a diferencia de las ganancias utilizadas por los filtros de Kalman, que son dinámicas. Además, cabe mencionar que en este caso no se precisa de ningún criterio de paro para la estabilización de dichas ganancias.

### 4.4.1 Diseño del emulador como filtro progresivo de Kalman

Tanto el filtro de Kalman como el observador de Luenberger diseñado mediante la fórmula de Ackermann proveen de una solución al problema de estimación en el contexto de evolución de los parámetros que se estiman de acuerdo con una ecuación de estado (3.3.1), además de basarse en el observador de orden completo modificado, llamado *observador actual* [24], el cual permite una simplificación en las derivaciones y considera los efectos de los ruidos  $v(n)$  y  $\varepsilon(n)$  por separado.

## Emulando Taylor<sup>0</sup>-Kalman-Fourier

La matriz de transiciones es una matriz con factores de fase  $\{\psi^k, k = 0, 1, \dots, N - 1\}$ .

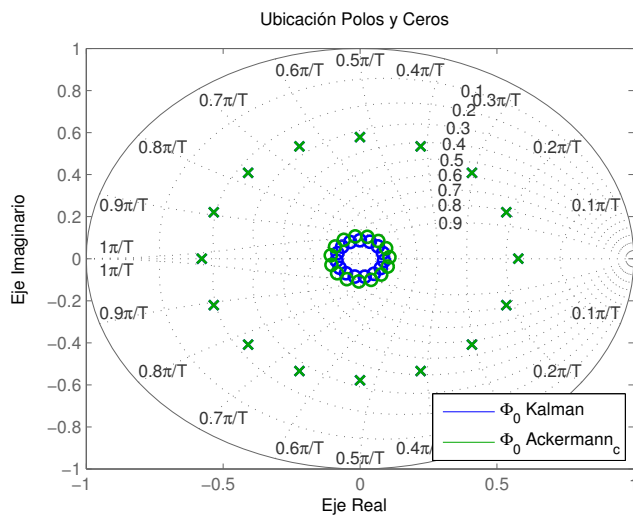


Figura 4.4: Ubicación de polos y ceros del filtro de Kalman y el estimador de tipo actual con  $\Phi_0$ .

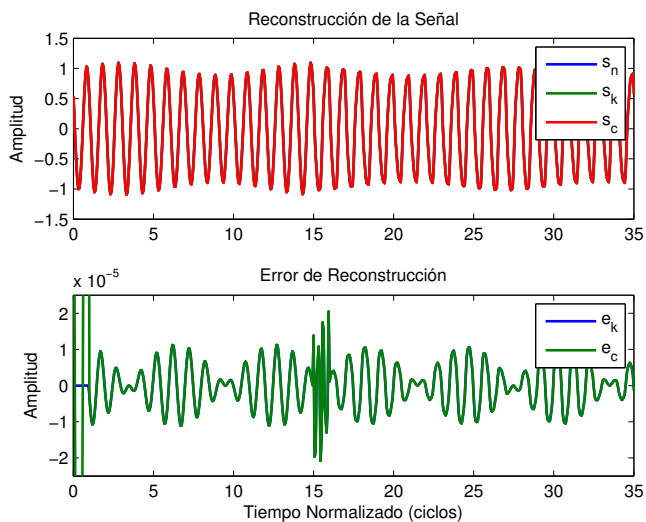


Figura 4.5: Reconstrucción de la señal y error de reconstrucción del filtro de Kalman y el estimador actual utilizando un modelo  $\Phi_0$ .

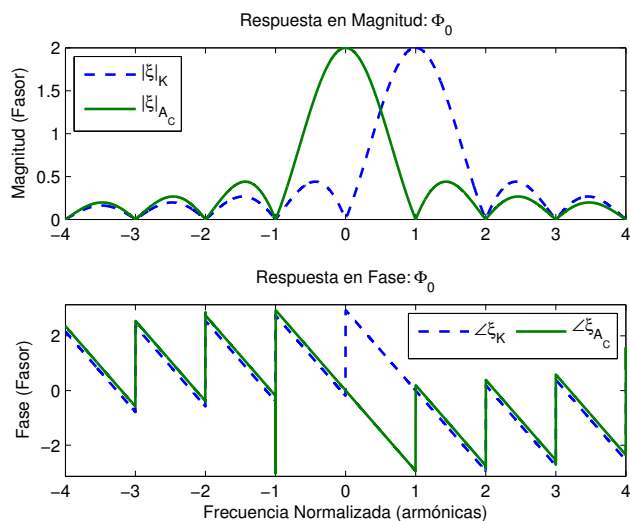


Figura 4.6: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del estimador Ackermann<sub>c</sub> emulando al filtro Taylor<sup>0</sup>-Kalman-Fourier.

### Emulando Taylor<sup>2</sup>-Kalman-Fourier

Anteriormente se analizó el modelo  $\Phi_0$ , ahora veremos los resultados obtenidos con el modelo  $\Phi_2$ .

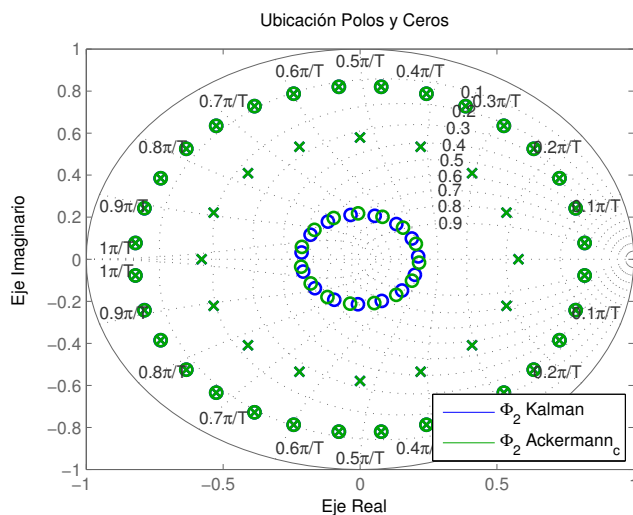


Figura 4.7: Ubicación de polos y ceros del filtro de Kalman y el estimador tipo actual con  $\Phi_2$ .

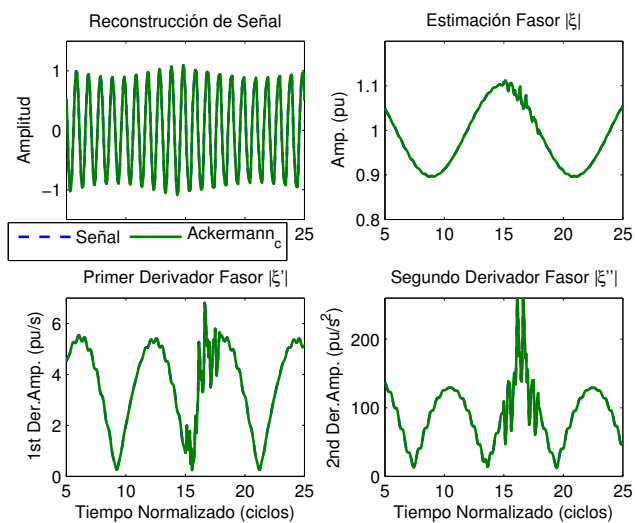


Figura 4.8: Gráficos superiores: reconstrucción de la señal y estimados de posición. Gráficos inferiores: estimados de velocidad y aceleración

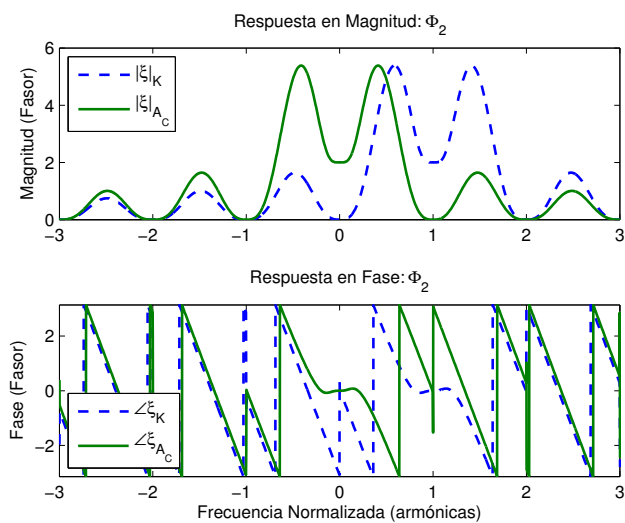


Figura 4.9: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del estimador Luenberger de tipo actual ( $Ackermann_c$ ), emulando al filtro Taylor<sup>2</sup>-Kalman-Fourier.

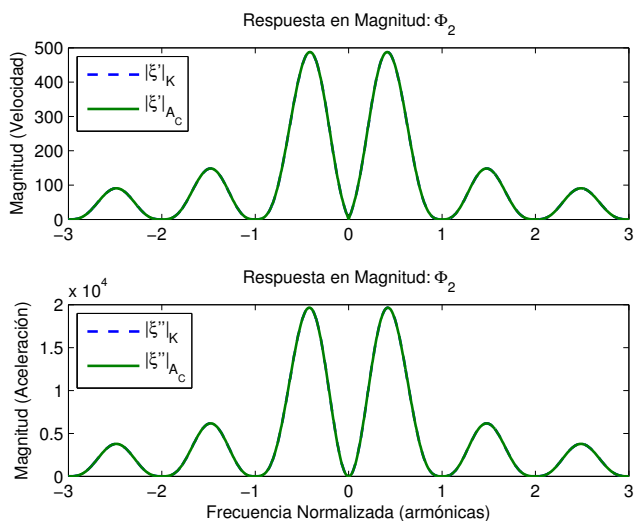


Figura 4.10: Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador del estimador Luenberger de tipo actual (Ackermann<sub>c</sub>), emulando al filtro Taylor<sup>2</sup>-Kalman-Fourier.

#### 4.4.2 Diseño del emulador como filtro alternante de Kalman

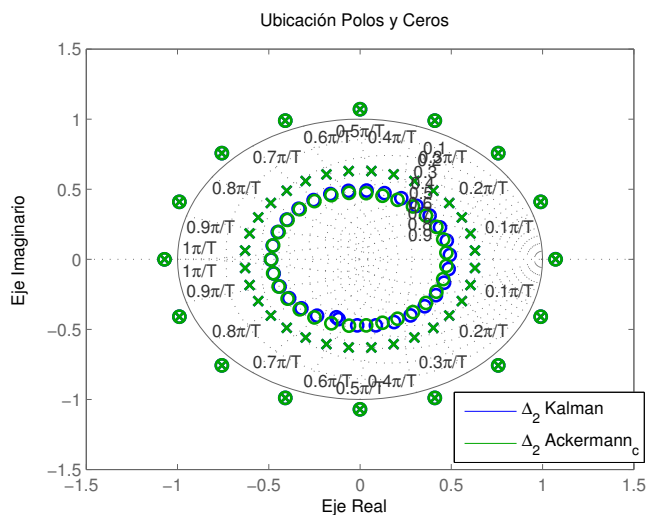


Figura 4.11: Ubicación de polos y ceros del filtro alternante de Kalman y el estimador Ackermann<sub>c</sub>. Donde los polos externos al círculo unitario no inestabilizan el sistema.

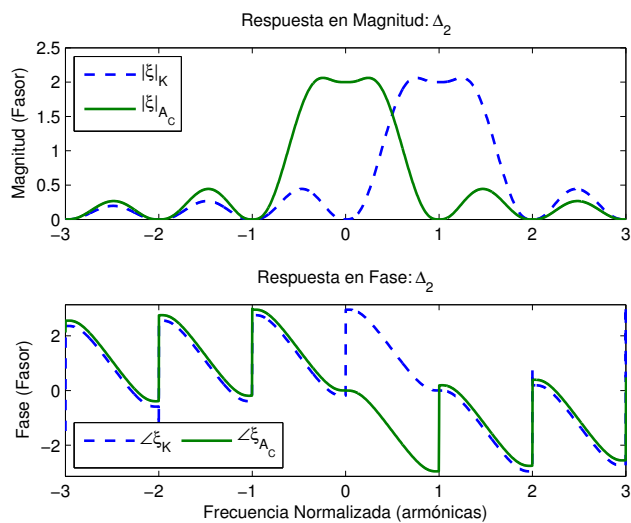


Figura 4.12: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del estimador Luenberger de tipo actual ( $Ackermann_c$ ) emulando al filtro alternante de Kalman utilizando un modelo  $\Phi_2$ .

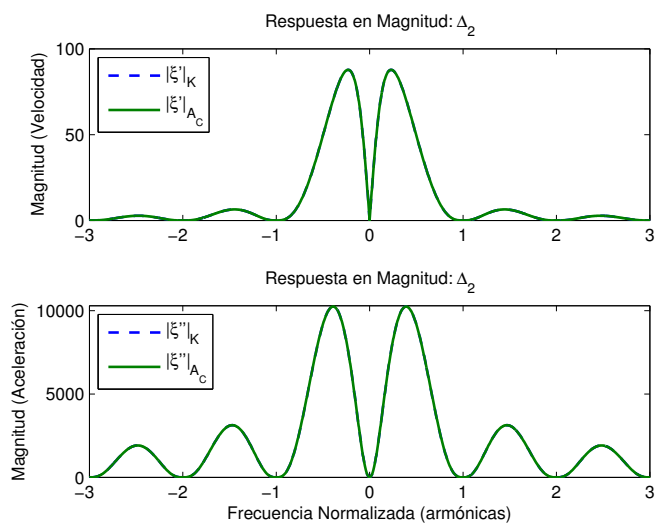


Figura 4.13: Respuesta en magnitud del primer y segundo diferenciador del estimador  $Ackermann_c$  emulando al filtro alternante de Kalman.

El algoritmo recursivo se desarrolla de forma alternante, debido a la simetría de los polinomios

de Taylor. La nueva matriz de transiciones es  $\Delta = \Phi^{\gamma n}$ , siendo  $\gamma = (-1)^n$  el signo alternante y  $n$  el instante de tiempo [2]. Note en la Fig.4.11 que en la distribución de sus raíces, se encuentran polos fuera del círculo unitario lo que indica automáticamente inestabilidad en el sistema, sin embargo, en la misma posición se encuentran ubicados ceros, por lo que el sistema sufre cancelación polo-cero; siendo de esta manera los polos internos los dominantes. Además observe que el patrón de los polos internos para los 3 casos mostrados del filtro de Kalman en las Figs.4.4, 4.7 y 4.11 se mantiene, y básicamente solo varía el  $\zeta$ . La respuesta en frecuencia del filtro alternante de Kalman vista en la Fig.4.12 no presenta las resonancias laterales del lóbulo principal presentes en el filtro progresivo de Kalman que se aprecian en la Fig.4.9, así como también ocurren una disminución importante en los niveles de los lóbulos armónicos. Para ambos casos, el modelo de orden dos  $\Phi_2$  otorga estimados instantáneos a diferencia del modelo de orden cero  $\Phi_0$ , cuya respuesta en frecuencia es similar a la respuesta de Fourier y se puede apreciar en la Fig.4.6.

Finalmente las Figs.4.10 y 4.13, nos permiten observar las respuesta en frecuencia de los derivadores del filtro progresivo (convencional) y alternante de Kalman, respectivamente. Mientras que las Figs.4.5 y 4.8, muestran el comportamiento de estimación de señal y su error de reconstrucción para el caso de  $\Phi_0$  y la estimación de la señal, el fasor y sus dos primeras derivadas para el filtro progresivo de Kalman de orden cero y orden dos, respectivamente.

## 4.5 Discusión

Pese a las dificultades que existen para obtener los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  para el conjunto completo de armónicas del estimador de Luenberger de tipo actual (Ackermann<sub>c</sub>), que otorguen los eigenvalores adecuados para obtener respuestas satisfactoriamente amplias; esto se vuelve más sencillo teniendo conocimiento previo de regiones factibles dentro del círculo unitario con el uso del lugar geométrico de las raíces. Según los resultados obtenidos, al igual que en el capítulo anterior, una vez más se establece la posibilidad que las ganancias del filtro de Kalman se encuentren en una fase temprana,

más cercana a la solución dinámica establecida por solución de Ackermann. Por otra parte, si bien la fórmula de Ackermann es ampliamente conocida y utilizada en el área de control automático, su implementación en procesamiento de señales no es tan común por lo que nos permite aprovechar sus ventajas en el diseño ya sea de filtros con respuestas rápidas o emuladores más sencillos.

## 4.6 Conclusiones

Expandiendo el modelo dinámico en espacio de estados de la señal, mediante la inclusión del conjunto completo de armónicos se puede desarrollar un estimador que extraiga rápidamente los componentes armónicos. Se muestra que el estimador Luenberger de tipo actual usando el modelo de señal extendido (Taylor<sup>K</sup>-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier) tiene un comportamiento parecido en el análisis armónico que el filtro Taylor<sup>K</sup>-Kalman-Fourier. Al modelar dinámicamente la señal con un polinomio de Taylor de segundo orden, el estimador alcanza respuestas planas en magnitud y fase alrededor de cada armónica produciendo armónicas oscilantes en las estimaciones del fasor con una clara disminución en la distorsión de magnitud y fase.

Por otro lado, debido a las características de la obtención del vector de ganancias de la fórmula de Ackermann, el dotarle de un conjunto de raíces deseadas provenientes de otros filtros, conducirá a que el estimador emule la respuesta dinámica de éstos. Al otorgarle al estimador actual los valores propios de los filtros progresivo y alternante de Kalman, éste alcanzará a emular casi perfectamente los comportamientos temporales y frecuenciales de este par de filtros. Por lo que se puede considerar de una base de datos que contenga los valores propios de diferentes filtros y solo llamarlos para que el estimador propuesto nos otorgue el deseado.



# Capítulo 5

## Filtro Alternante de Kalman y Mínimos Cuadrados Recursivos

### 5.1 Introducción

Mucha de la literatura concerniente a la comparación entre el método de mínimos cuadrados recursivos (RLMS) [25] y el algoritmo de Kalman [26]-[7], se enfoca en la convergencia de los estimados. Recientemente el filtro alternante de Kalman fue propuesto para obtener la presión sanguínea de las formas de onda oscilométricas [2]; cuya idea de esta implementación viene de la gran similitud con los RLMS, por lo que en esta sección se profundizara en dichas similitudes y diferencias para tomar ventaja de ambos métodos de estimación. A pesar de lo extenso de la literatura para cada formulación, es muy raro encontrar evaluaciones comparativas de la respuesta en frecuencia de ambos estimadores o para encontrar criterios de paro de otros algoritmos que son utilizados en aplicaciones de control automático. La sinergia resultante al contrarrestar ambos métodos es una interesante fuente de innovadoras ideas y contribuciones en el campo de investigación, proporcionando nuevas formas de implementación de estos muy conocidos métodos de estimación. Básicamente la sección se enfoca en el uso de un factor de peso en el algoritmo del filtro de Kalman para mejorar la respuesta en frecuencia. Esta idea, surge a partir del factor de olvido exponencial tradicionalmente aplicado en el algoritmo RLMS, abriendo el camino para nuevos factores de olvido bilaterales, usando ventanas

clásicas en la implementación del filtro alternante de Kalman.

Esto mejora la banda de rechazo de los filtros, reduciendo los niveles de los lóbulos laterales de su respuesta en frecuencia, y consecuentemente reduciendo la sensibilidad de sus estimados ante ruido armónico. El análisis compara dinámicamente los estimados del filtro de Kalman y de los RLMS, la respuesta impulsional finita (FIR) de los filtros, y su correspondiente respuesta en frecuencia para el caso simple de diferenciadores ideales de banda-base de Taylor, sin embargo, sus resultados pueden ser extendidos para diseñar los filtros Taylor-Fourier [27], así como para implementar la transformada digital Taylor-Fourier [1], [28], extensamente usada en sincro-fasores y estimación espectral. Finalmente los resultados indican que la formulación del filtro de Kalman es mas flexible, debido a su adaptabilidad en modelos dinámicos variantes en el tiempo, con parametros variantes en el tiempo (como un observador).

## 5.2 LMS Recursivos

Comenzamos por definir un nuevo conjunto de señales  $\hat{x}$  como el subespacio de  $\mathbb{R}^N$  generado por la formación de todas las combinaciones lineales

$$\hat{x} = \tilde{B}\hat{\xi} \quad (5.2.1)$$

de las  $K$  columnas en la matriz  $B$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^K$ .

Los estimados de minimos cuadrados ponderados (WLMS) de los componentes  $\hat{\xi}$  de la mejor aproximación del subespacio de  $\hat{x}$  para cualquier señal  $x \in \mathbb{R}^N$  son dados por:

$$\hat{\xi} = \left( B^H W B \right)^{-1} B^H W x = B_w^\dagger x \quad (5.2.2)$$

Las filas de la matriz pseudoinversa  $B_w^\dagger$  son tales que  $B_w^\dagger B = I$ , y forman con los vectores de  $B$  un par de bases biortogonales. Enfocándose en la evolución recursiva de los estimados del vector  $\hat{\xi}$ , cuando se conoce el vector estimado en el instante de tiempo  $N \leq K$ , y una nueva muestra es

incorporada dentro del estimador en  $N + 1$ , esto es el algoritmo de RLMS [24]. Si  $x_N$  es el vector que contiene los datos de la señal con  $N$  muestras, entonces el nuevo vector de datos  $x_{N+1}$  es el vector  $x_N$  concatenado con su nueva muestra. De una manera similar,  $B_{N+1}$  es la concatenación de  $B_N$  con su nueva fila del modelo de señal  $b_{N+1}$ .

$$x_{N+1} = \begin{pmatrix} x_N \\ x(N+1) \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

De manera similar,  $B_{N+1}$  es la concatenación de  $B_N$  con una nueva fila del modelo de señal  $b_{N+1}$ .

$$B_{N+1} = \begin{pmatrix} B_N \\ b_{N+1} \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

La matriz diagonal  $W$  cuenta con un nuevo peso en su diagonal

$$W_{N+1} = \begin{pmatrix} W_N & 0 \\ 0 & w_{N+1} \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

La inversa de la matriz de Gramm es:

$$P_{N+1} = G_{N+1}^{-1} = \left( B_N^H W_N B_N + b_{N+1}^H \omega_{N+1} b_{N+1} \right)^{-1} \quad (5.2.6)$$

donde  $\omega_{N+1} = |v_{N+1}|$ . Aplicando el Lema de inversión de matrices obtenemos la siguiente recursión para la inversa de la matriz de Gramm

$$P_{N+1} = P_N - P_N b_{N+1}^H \left( b_{N+1} P_N b_{N+1}^H + \frac{1}{\omega_{N+1}} \right)^{-1} b_{N+1} P_N \quad (5.2.7)$$

la cual puede ser simplificada como:

$$P_{N+1} = P_N - L_{N+1} b_{N+1} P_N = (I - L_{N+1} b_{N+1}) P_N \quad (5.2.8)$$

con

$$L_{N+1} = P_N b_{N+1}^H \left( b_{N+1} P_N b_{N+1}^H + \frac{1}{\omega_{N+1}} \right)^{-1} \quad (5.2.9)$$

Esto también es posible calculando las respuestas impulsionales de las filas del operador  $\check{B}$ . Por lo que tenemos:

$$\check{B}_{N+1} = \left( (I - L_{N+1} b_{N+1}) \check{B}_N \quad \vdots \quad L_{N+1} \right) \quad (5.2.10)$$

Finalmente la recursión de la proyección de los coeficientes estimados es:

$$\hat{\xi}_{N+1} = \hat{\xi}_N + L_{N+1}(x_{N+1}^s - b_{N+1}\hat{\xi}_N) \quad (5.2.11)$$

donde  $x_{N+1}^s$  es la nueva muestra incorporada de la señal. Note que los RLMS requieren ser inicializados en  $N \geq K$ , ya que la matriz de Gramm es nosingular, solo después de  $K$  muestras es aplicable.

### 5.3 Filtrado de Kalman

El algoritmo de Kalman asume un modelo de observación definido por

$$x_n = H\xi_n + w_n \quad (5.3.1)$$

donde  $x_n$  es la señal observada,  $H$  es la matriz de salida, y  $w_n$  es el error de observación. El vector  $\xi_n$  contiene las variables de estado del sistema dinámico con la matriz de transiciones  $\Phi$  y estimulado por ruido Gaussiano  $v_n$ :

$$\xi_n = \Phi\xi_{n-1} + \Gamma v_n. \quad (5.3.2)$$

El algoritmo de Kalman secuencialmente obtiene el estimado del  $n$ -ésimo vector de estado  $\hat{\xi}_n$  desde su predecesor  $\hat{\xi}_{n-1}$

$$\hat{\xi}_n = \Phi\hat{\xi}_{n-1} + G(x_n - H\Phi\hat{\xi}_{n-1}) \quad (5.3.3)$$

en la cual  $G$  satisface el principio de ortogonalidad [29, Theorem 6.15.28], es decir,  $\mathcal{E}\{\tilde{\xi}_n x_j\}$  para  $j = 1, \dots, n$ , donde  $\tilde{\xi}_n = \hat{\xi}_n - \xi_n$  es el error (filtrado) de estimación.

$$G = R_{\tilde{\xi}_n}^{-1} H^H R_{\tilde{x}_n}^{-1} \quad (5.3.4)$$

donde  $R_{\tilde{x}_n}$  y  $R_{\tilde{\xi}_n}$ , son las matrices de covarianza y el error predictivo de observación

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n^- &= x_n - \hat{x}_n^- \\ &= H\xi_n + w_n - H\hat{\xi}_n^- \\ &= H\tilde{\xi}_n^- + w_n \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

y el error de predicción del estado

$$\tilde{\xi}_n^- = \xi_n - \hat{\xi}_n^- \quad (5.3.6)$$

respectivamente, en el cual  $\hat{\xi}_n^- = \Phi \hat{\xi}_{n-1}^-$  es la predicción de un instante de  $\xi_n$ . De (5.3.5) tenemos:

$$R_{\tilde{x}_n^-} = HR_{\tilde{\xi}_n^-}H^H + R_w \quad (5.3.7)$$

y de (5.3.2)

$$R_{\tilde{\xi}_n^-} = \Phi R_{\tilde{\xi}_{n-1}^-} \Phi^H + \Gamma R_v \Gamma^H \quad (5.3.8)$$

la covarianza del error de predicción (*a priori*). Tomando en cuenta la observación de la covarianza del error de predicción en (5.3.7), (5.3.4) puede ser reescrita como:

$$G = R_{\tilde{\xi}_n^-} H^H (R_w + HR_{\tilde{\xi}_n^-} H^H)^{-1} \quad (5.3.9)$$

Finalmente, encontramos la matriz de covarianzas del error [30]. El error de filtrado es definido como

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_n &= \xi_n - \hat{\xi}_n \\ &= \xi_n - \hat{\xi}_n^- - G(x_n - H\hat{\xi}_n^-) \\ &= \tilde{\xi}_n^- - G\tilde{x}_n^- \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Entonces, la covarianza del error de filtrado es dada por

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\xi}_n} &= R_{\tilde{\xi}_n^-} - GR_{\tilde{x}_n^-}G^H \\ &= R_{\tilde{\xi}_n^-} - GR_{\tilde{x}_n^-}R_{\tilde{x}_n^-}^{-1}HR_{\tilde{\xi}_n^-} \\ &= (I - GH)R_{\tilde{\xi}_n^-} \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Esta ecuación cierra la recursión del algoritmo del filtro de Kalman. Note el contraste con el algoritmo del LMS, que requiere ser inicializado en  $N \geq K$ , el algoritmo del filtro de Kalman puede proveer de estimadas desde  $n = 1$  hacia adelante.

El filtro de Kalman estima paso por paso el estado actual del proceso, basado en las observaciones disponibles. Esto es un filtro digital que automáticamente ajusta su ganancia para proveer del mejor

estimado de su estado instantáneo. EL filtro continua mejorando mediante la actualización de su ganancia comparando la observación actual con la predicha del valor más reciente.

## 5.4 Similitudes entre el Filtrado de Kalman y LMS Recursivos

El paralelismo entre los métodos anteriores se vuelve más claro reescribiendo el algoritmo ordenando las ecuaciones (5.2.8), (5.2.9) y (5.3.11) del RLMS, y (5.3.3), (5.3.9) y (5.3.11) del filtro de Kalman:

$$\left. \begin{aligned} L_{N+1} &= P_N b_{N+1}^H \left( b_{N+1} P_N b_{N+1}^H + \frac{1}{\omega_{N+1}} \right)^{-1} \\ \hat{\xi}_{N+1} &= \hat{\xi}_N + L_{N+1} (x_{N+1}^s - b_{N+1} \hat{\xi}_N) \\ P_{N+1} &= (I - L_{N+1} b_{N+1}) P_N \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= R_{\tilde{\xi}_n} H^H (R_w + H R_{\tilde{\xi}_n} H^H)^{-1} \\ \hat{\xi}_n &= \Phi \hat{\xi}_{n-1} + G (x_n - H \Phi \hat{\xi}_{n-1}) \\ R_{\tilde{\xi}_n} &= (I - GH) R_{\tilde{\xi}_{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2)$$

$$\text{con } R_{\tilde{\xi}_n} = \Phi R_{\tilde{\xi}_{n-1}} \Phi^H + \Gamma R_v \Gamma^H.$$

Note en las primeras ecuaciones del conjunto (5.4.1) y (5.4.2), que la ganancia del filtro de Kalman  $G$  corresponde a la ganancia  $L_{N+1}$  del LMS, si  $P_N$  es sustituida por  $R_{\tilde{\xi}_n}$ ,  $b_{N+1}$  por  $H$ , y  $\frac{1}{\omega_{N+1}}$  por  $R_w$ . y si en la tercera ecuación  $P_{N+1}$  es sustituida por  $R_{\tilde{\xi}_n}$ . La principal diferencia entre el algoritmo del filtro de Kalman y el RLMS operando sobre señales con ruido, es que el primero provee estimados dinámicos del estado, en lugar de los estáticos obtenidos por el RLMS.

Esta diferencia es evidente al comparar la segunda ecuación de los conjuntos (5.4.1) y (5.4.2). Note que la ecuación de estimación del filtro de Kalman, aplica una transición a la anterior estimación de estado en su primer y tercer termino, mientras que el RLMS no lo hace. Esto significa que los RLMS estiman un estado escalar, es decir, los coeficientes de la combinación lineal las bases vectoriales, las cuales son válidas bajo el intervalo de tiempo de observación. En nuestro caso, las

bases son dadas por los términos de Taylor incluidos dentro del modelo de señal, y los estimados son dados en el origen del intervalo de tiempo. Esto es debido a que los LMS proveen estimados estáticos, en contraste a los dinámicos provistos por el algoritmo del filtro de Kalman, que son validos en la transición entre el  $n$ -ésimo instante de tiempo y el  $n + 1$  instante.

Esto es la crucial diferencia implicada cuando  $\xi_{N+1}$  es sustituido por  $\hat{\xi}_n$ , y  $\hat{\xi}_N$  por  $\Phi\hat{\xi}_{n-1}$  en el algoritmo del LMS. Con esta sustitución en el algoritmo de los LMS, se obtiene exactamente el conjunto dado en (5.4.2). Cuando el proceso de ruido es cero, (5.3.2) es reducida a  $\xi_n = \Phi^n\xi_0$ , y (5.3.8) se convierte en  $R_{\hat{\xi}_n} = \Phi R_{\hat{\xi}_n} \Phi^H$ , entonces el modelo de señal se convierte en la siguiente forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HI \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \\ H\Phi^n \end{pmatrix} \xi_0 + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

la cual corresponde a la forma Batch para los LMS, donde la fila  $H\Phi^n$  genera las  $n$ -ésimas componentes de las bases vectoriales. Entonces, si el proceso de ruido es cero, podemos obtener los estimados del algoritmo RLMS de los  $n$ -ésimos estimados del filtro de Kalman  $\hat{\xi}_n$  aplicando la transición inversa en el tiempo de origen:  $\hat{\xi}_{0_n} = \Phi^{-n}\hat{\xi}_n$ , o viceversa ( $\hat{\xi}_n = \Phi^n\hat{\xi}_{0_n}$ ). De igual manera, la recursión puede ser obtenida mediante el caso del filtro alternante de Kalman [2]. Sin embargo, la formulación anterior puede ser utilizada para probar que los LMS pueden aplicarse para proveer los estimados dinámicos del algoritmo del filtro de Kalman, simplemente estimando los estados dinámicos evaluando la combinación lineal en el instante de tiempo  $n$ .

Otra diferencia es que el algoritmo del filtro de Kalman pondera las bases vectoriales mediante la variable de ruido. Anteriormente se menciono que el termino  $\frac{1}{w_{N+1}}$  podia ser sustituido por  $R_w$ ,

esto significa que para de proveer los mismos estimados ponderados del algoritmo del RLMS, la varianza de la observación del ruido en el algoritmo del filtro de Kalman, necesita ser inversamente proporcional a  $w_{N+1}$ .

## 5.5 Matriz Pseudoinversa: Algoritmo Progresivo y Alternante

En la siguiente sección, la pseudoinversa equivalente del algoritmo clásico del filtro de Kalman y el alternante es desarrollada. Esto es requerido para la comparación del método del filtro de Kalman y el RLMS.

### 5.5.1 Pseudoinversa, Filtro Progresivo de Kalman

Comenzando por la formula recursiva de estimación del filtro de Kalman

$$\hat{\xi}_n = \Phi \hat{\xi}_{n-1} + K(x_n - H\Phi \hat{\xi}_{n-1}) \quad (5.5.1)$$

reescribiendo la ecuación anterior en su forma en lazo cerrado

$$\hat{\xi}_n = (I - KH)\Phi \hat{\xi}_{n-1} + Kx_n = \Psi_n \hat{\xi}_{n-1} + K_n x_n \quad (5.5.2)$$

siendo la recursividad expresada como:

$$\hat{\xi}_1 = \Psi_1 \hat{\xi}_0 + K_1 x_1 \quad (5.5.3)$$

$$\hat{\xi}_2 = \Psi_2 \hat{\xi}_1 + K_2 x_2 = \Psi_2 \Psi_1 \hat{\xi}_0 + \Psi_2 K_1 x_1 + K_2 x_2 \quad (5.5.4)$$

$$\hat{\xi}_3 = \Psi_3 \hat{\xi}_2 + K_3 x_3 = \Psi_3 \Psi_2 \Psi_1 \hat{\xi}_0 + \Psi_3 \Psi_2 K_1 x_1 + \Psi_3 K_2 x_2 + K_3 x_3 \quad (5.5.5)$$

Ya que el algoritmo del filtro de Kalman comienza con  $\hat{\xi}_0 = 0$ , se tiene el producto interno

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_n &= \Psi_n \Psi_{n-1} \cdots \Psi_3 \Psi_2 K_1 x_1 + \Psi_n \Psi_{n-1} \cdots \Psi_3 K_2 x_2 + \cdots \\ &+ \Psi_n \Psi_{n-1} K_{n-2} x_{n-2} + \Psi_n K_{n-1} x_{n-1} + K_n x_n \end{aligned} \quad (5.5.6)$$



Por lo tanto, la matriz pseudoinversa del filtro progresivo de Kalman será:

$$P_n = \left( (\prod_{\nu=2}^n \Psi_\nu) K_1 \quad (\prod_{\nu=3}^n \Psi_\nu) K_2 \quad \cdots \quad (\prod_{\nu=n-1}^n \Psi_\nu) K_{n-2} \quad \Psi_n K_{n-1} \quad K_n \right) \quad (5.5.7)$$

## 5.5.2 Pseudoinversa, Filtro Alternante de Kalman

El filtro alternante de Kalman es implementado desde el centro a los extremos: siguiendo la siguiente secuencia de ecuaciones, comenzando con  $\widehat{\xi}_{-1} = 0$ :

$$\widehat{\xi}_0 = \Psi_0 \widehat{\xi}_{-1} + K_0 x_0 \quad (5.5.8)$$

$$\widehat{\xi}_1 = \Psi_1 \widehat{\xi}_0 + K_1 x_1 = \Psi_1 K_0 x_0 + K_1 x_1 \quad (5.5.9)$$

$$\widehat{\xi}_{-1} = \Psi_{-1} \widehat{\xi}_1 + K_{-1} x_{-1} = \Psi_{-1} \Psi_1 K_0 x_0 + \Psi_{-1} K_1 x_1 + K_{-1} x_{-1} \quad (5.5.10)$$

$$\widehat{\xi}_2 = \Psi_2 \widehat{\xi}_{-1} + K_2 x_2 = \Psi_2 \Psi_{-1} \Psi_1 K_0 x_0 + \Psi_2 \Psi_{-1} K_1 x_1 + \Psi_2 K_{-1} x_{-1} + K_2 x_2 \quad (5.5.11)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{-2} = \Psi_{-2} \widehat{\xi}_2 + K_{-2} x_{-2} = & \Psi_{-2} \Psi_2 \Psi_{-1} \Psi_1 K_0 x_0 + \Psi_{-2} \Psi_2 \Psi_{-1} K_1 x_1 \\ & + \Psi_{-2} \Psi_2 K_{-1} x_{-1} + \Psi_{-2} K_2 x_2 + K_{-2} x_{-2} \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

La matriz pseudoinversa de Kalman para el filtro alternante de Kalman es entonces:

$$P_5 = \Phi^2 \left( K_{-2} \quad \Psi_{-2} \Psi_2 K_{-1} \quad \Psi_{-2} \Psi_2 \Psi_{-1} \Psi_1 K_0 \quad \Psi_{-2} \Psi_2 \Psi_{-1} K_1 \quad \Psi_{-2} K_2 \right) \quad (5.5.13)$$

y, en general para  $2N + 1$  datos

$$\begin{aligned} P_{2N+1} = \Phi^N ( & K_{-N} \quad \cdots \quad \Psi_{-N} \Psi_N K_{-1} x_{-1} \quad \Psi_{-N} \Psi_N \cdots \Psi_{-1} \Psi_1 K_0 \\ & \Psi_{-N} \cdots \Psi_2 \Psi_{-1} K_1 \quad \cdots \quad \Psi_{-N} K_N ) \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

donde el factor de la matriz  $\Phi^N$  cambia el ultimo estimado de estado desde  $n = -N$  hasta  $n = 0$ , y la matriz  $\Psi_n$  es definida como sigue:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (I - K_1 H) \Phi^1 \\
\Psi_{-1} &= (I - K_{-1} H) \Phi^{-2} \\
\Psi_2 &= (I - K_2 H) \Phi^3 \\
\Psi_{-2} &= (I - K_{-2} H) \Phi^{-4} \\
&\vdots \\
\Psi_n &= (I - K_n H) \Phi^{\begin{cases} 2n-1 & n > 0 \\ 2n & n < 0 \end{cases}}
\end{aligned} \tag{5.5.15}$$

## 5.6 Resultados Numéricos

En esta sección se obtendrán las respuestas impulsionales y en frecuencia de los filtros desarrollados de la implementación alternante de los algoritmos del RLMS y el filtro de Kalman. Un banco de filtros con ganancias ideales en los diferenciadores de banda-base es considerado como un ejemplo. Las respuestas del RLMS alternante son obtenidas de las filas de la matriz pseudoinversa  $\check{B}$  en (5.2.10) y de su transformación digital de Fourier cuando es implementada en su versión alternante, mientras que para el caso del filtro alternante de Kalman de la matriz pseudoinversa en (5.5.14).

### 5.6.1 Algoritmos RLMS Alternante

Primeramente se consideran los filtros digitales en la matriz pseudoinversa  $B^\dagger$  obtenida para el conjunto de polinomios de Taylor de grado no mayor a 3.

$$x(t) = \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2/2! + \xi_3 t^3/3! \quad \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \tag{5.6.1}$$

Los términos de Taylor son muestreados a  $16s/\sim$ , y organizados en la matriz  $B = [1 \quad t \quad t^2/2 \quad t^3/3!]$ . Este sistema provee un banco de filtros con ganancias ideales en los diferenciadores de banda-base, como se espera de un conjunto estimado de componentes de Taylor. La evolución de las respuestas

impulsionales del filtro, así como la de sus respectivas respuestas en frecuencia son ilustradas en Fig. 5.1 y Fig. 5.2

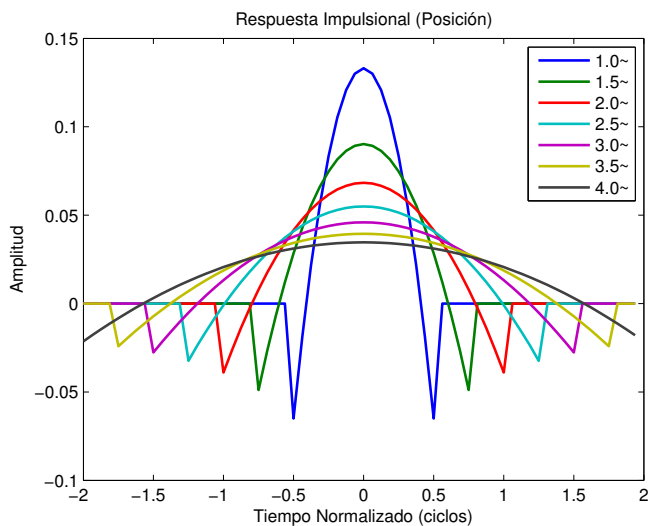


Figura 5.1: Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de posición de 1 a 4~. Se usa una ventana rectangular.

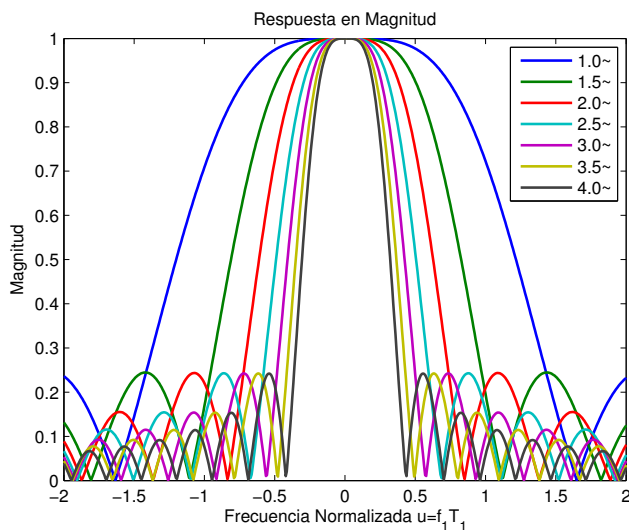


Figura 5.2: Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de posición. Se puede apreciar como su longitud crece.

Las respuestas son obtenidas por la prolongación bilateral de 1 a 4 ciclos. La Fig. 5.2 muestra las respuestas en frecuencia correspondientes; como se puede ver, son versiones espectrales contractadas de la más amplia, correspondiente al filtro mas corto de 1 ciclo. La contracción preserva los niveles de los lóbulos laterales, como se espera para una ventana rectangular prolongada.

Para observar el peso de la ponderación, se generan respuestas impulsionales de los filtros en la matriz pseudoinversa  $\tilde{B}$  con una ventana de Tukey en la matriz  $V$ , la cual estrecha la punta de los términos de Taylor de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$  en  $B$ . La Fig. 5.3 y Fig. 5.4 muestran las respuestas impulsionales y en frecuencia, respectivamente, de los vectores para las bases vectoriales.

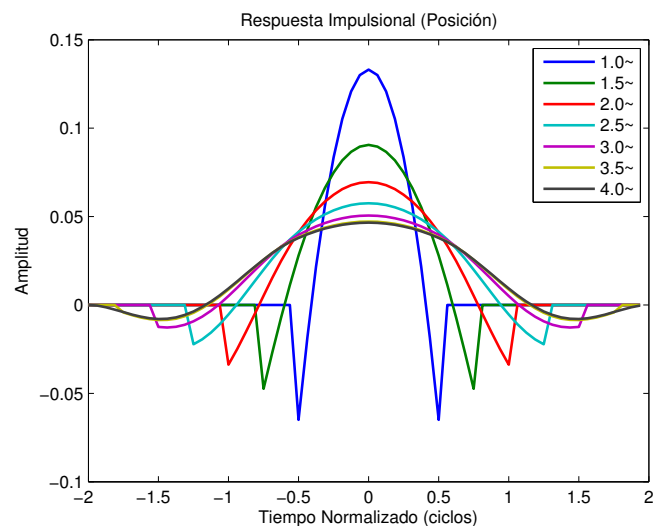


Figura 5.3: Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de posición de 1 a 4~. Ventana cónica de Tukey de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$ .

Comparando las figuras 5.3 y 5.1, se puede apreciar que las aparentes discontinuidades de la ventana rectangular son atenuadas en las puntas, mientras que preserva las formas de los términos Taylor, incluso en el centro. Y comparando las Figs 5.4 y 5.2, se puede observar los efectos típicos de la ventana: lóbulo principal ensanchado y lóbulos laterales reducidos.

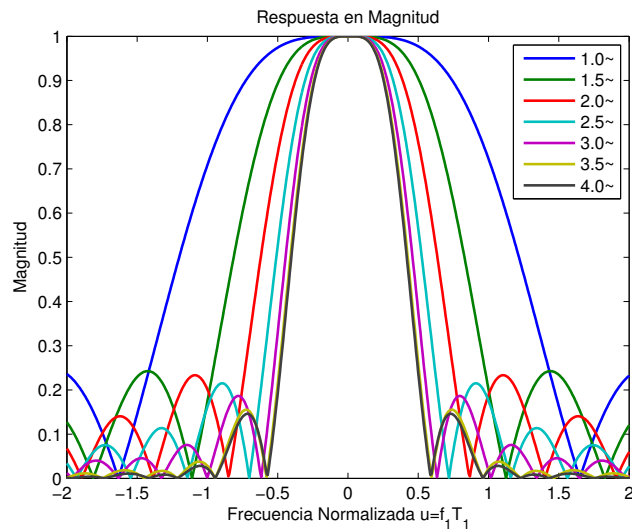


Figura 5.4: Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de posición. Adicionalmente a la contracción espectral, los niveles de los lóbulos laterales disminuyen conforme su longitud crece.

### Primer y Segundo Diferenciador

Por otro lado, las figuras 5.5 y 5.6 muestran las respuestas impulsionales y en frecuencia, respectivamente, de los filtros para los estimados de velocidad, cuando se usa la ventana de Tukey para atenuar las discontinuidades de sus extremos. Se puede observar que las respuestas impulsionales del primer diferenciador son una combinación lineal del primer y tercer término de Taylor debido a su simetría impar, mientras que la respuesta en frecuencia de los diferenciadores ideales es garantizada en todos ellos sobre la banda-base. Cabe destacar que el intervalo frecuencial de la ganancia ideal máximamente lisa es reducido conforme la longitud de los filtros aumenta. Lo mismo sucede con la respuesta en frecuencia del segundo diferenciador o estimados de aceleración mostrados en las figuras 5.7 y 5.8. Note que la respuesta impulsional es otra vez, una combinación lineal del cero y segundo termino de Taylor, pero ahora como una función convexa, en lugar de una función cóncava en los estimados de posición en las figuras 5.1 y 5.3

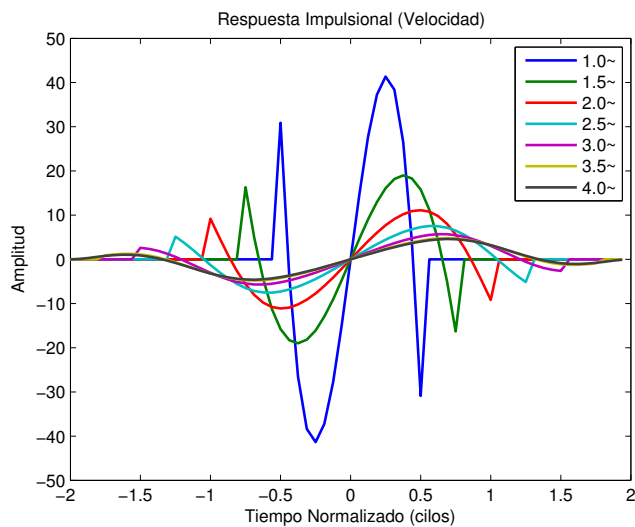


Figura 5.5: Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de velocidad de 1 a 4. Ventana cónica de Tukey de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$ .

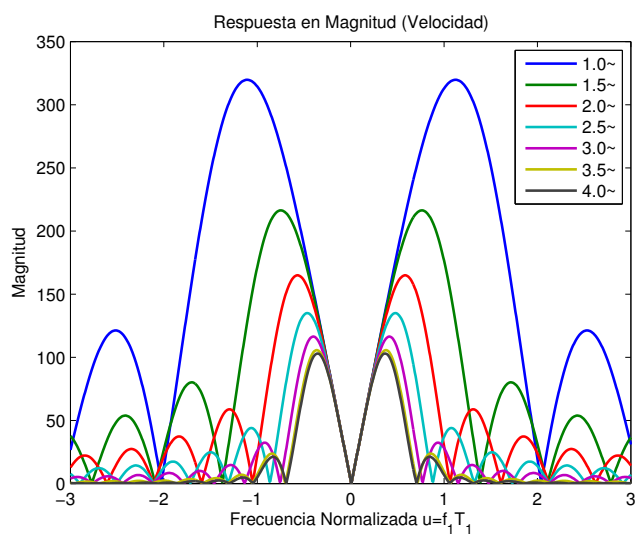


Figura 5.6: Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de velocidad de 1 a 4. Ventana cónica de Tukey de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$ .

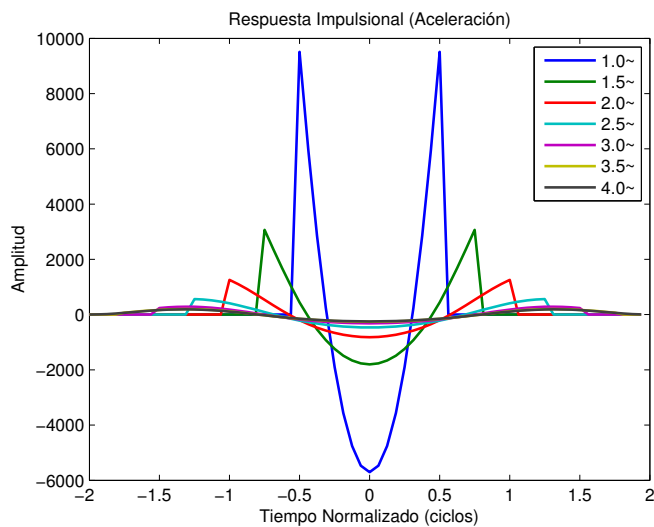


Figura 5.7: Respuesta impulsional de los filtros para el estimado de aceleración de 1 a 4. Ventana cónica de Tukey de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$ .

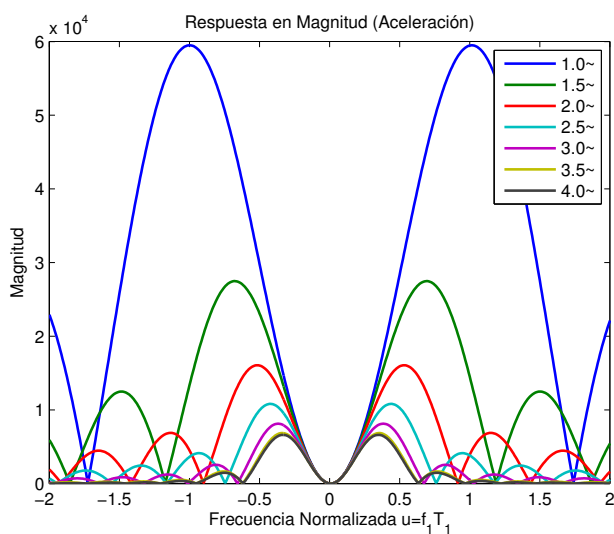


Figura 5.8: Respuesta en frecuencia de los filtros para el estimado de aceleración de 1 a 4. Ventana cónica de Tukey de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$ .

Los resultados explican un resultado extensamente conocido usado en la ley de grandes numeros:

la varianza de una media es reducida cuando el numero de muestras tomadas en cuenta crece. En este caso, la longitud de la ventana rectangular se incrementa, y su respuesta en frecuencia se encoge, tal y como se puede apreciar en la Fig. 5.2. Con esta contracción, el espectro de ruido, que ocasiona la varianza, es reducido como el inverso de la raíz cuadrada del numero de muestras  $N$

### 5.6.2 Algoritmo del Filtro Alternante de Kalman

En esta sección obtendremos la respuesta en frecuencia de los diferenciadores ideales de banda-base usando el filtro alternante de Kalman en lugar del algoritmo del RLMS y polinomios de Taylor de orden 3. El filtrado Kalman es implementado con la matriz de transiciones (3.2.17) para generar las bases vectoriales de los polinomios de Taylor en la subsección precedente. Con  $K = 3$ , y  $\tau$  siendo el periodo de muestreo de  $16 \text{ s}/\sim$ . Un sistema dinámico con  $H = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $R_v = 0$ , y una varianza del ruido de observación muy pequeña ( $R_w = 10^{-10}$ ) es implementado en el algoritmo para tener una digna comparación con el RLMS. El efecto de ponderación será alcanzado mediante la sustitución del anterior ruido constante por un ruido variable con una varianza cambiante siguiendo la inversa de la ventana Tukey. Se muestran las respuestas en frecuencia de los filtros tanto para una ventana rectangular de 4 ciclos, así como para una ventana de Tukey de 4 ciclos cuyas puntas se estrechan de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$ . Recordemos que la ventana de Tukey conserva los términos de Taylor en el centro, y las discontinuidades (de la ventana rectangular) de los extremos. Las respuestas en frecuencia obtenidas con los parametros anteriores de las filas de la matriz pseudoinversa en (5.5.14). Por supuesto, en esta comparación los estimados del filtro de Kalman son llevados de vuelta al centro del intervalo de tiempo para que coincidan con los del algoritmo RLMS.

#### Filtro Alternante de Kalman con Ventana Rectangular

La respuesta impulsional y la respuesta en frecuencia de los filtros obtenidas con los algoritmos de RLMS alternante o filtro alternante de Kalman (idénticas para ambos algoritmos) usando una ventana



rectangular se muestran en las Figs. 5.9 y 5.10-5.11, respectivamente. Se aprecia que las ganancias ideales de los diferenciadores son máximamente lisas bajo un intervalo amplio de frecuencia de banda-base. Sin embargo, los lóbulos laterales de la banda de rechazo son muy altos, tal y como se espera de una ventana rectangular.

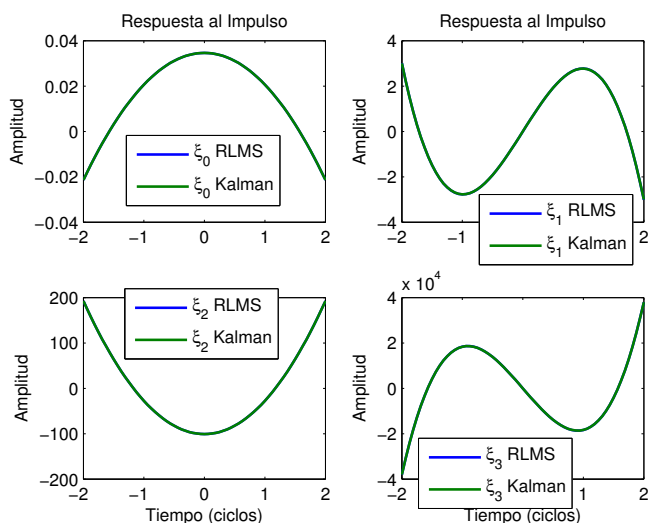


Figura 5.9: Respuestas al impulso de los filtros RLMS bilaterales de 4 $\sim$  obtenidas con el filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ )

### Filtro Alternante de Kalman ponderado con Ruido de Tukey

Ponderando la varianza constante del ruido de observación con la función inversa de la ventana de Tukey, se reducen los altos lóbulos laterales de la ventana rectangular. Las Figs. 5.13-5.14 muestran las respuestas en frecuencia obtenidas con este método de contracción, usando los RLMS y filtro de Kalman. Los niveles de los lóbulos laterales es mucho menor a los previstos por la varianza constante. Estos resultados demuestran que el filtro de Kalman es capaz de emular a los RLMS ponderados cuando la varianza del ruido de observación es muy pequeña, proporcionando la misma matriz pseudoinversa.

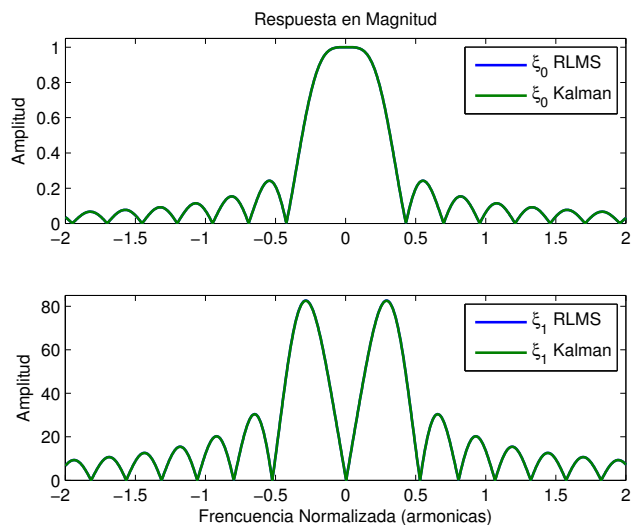


Figura 5.10: Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS bilaterales de  $4\sim$  obtenidas con el algoritmo del filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ).

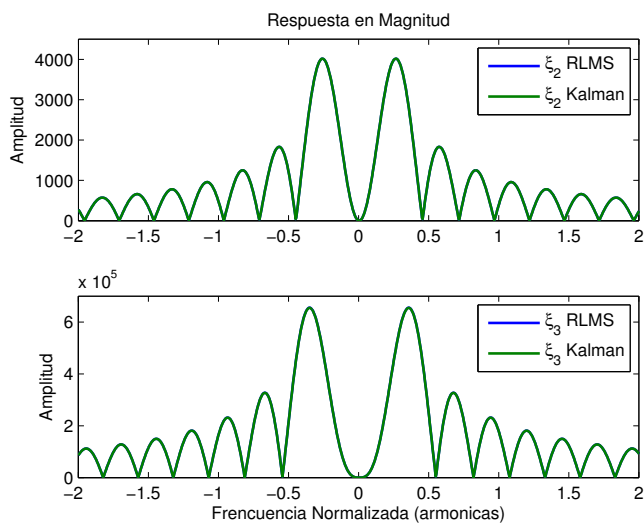


Figura 5.11: Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS bilaterales con longitud de  $4\sim$  obtenidas con el algoritmo del filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ).

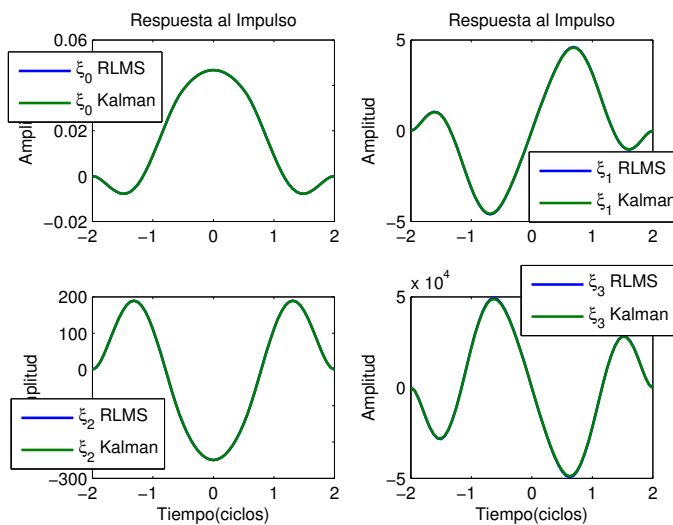


Figura 5.12: Respuestas al impulso de los filtros RLMS bilaterales de  $4\sim$  obtenidas con el filtro alternante de Kalman con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ )

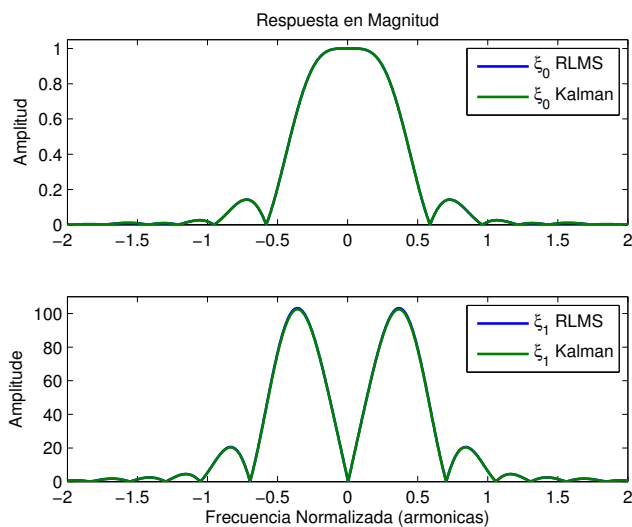


Figura 5.13: Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS ponderados y Kalman bilaterales de  $4\sim$  con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ), con factor de peso de ventana de Tukey.

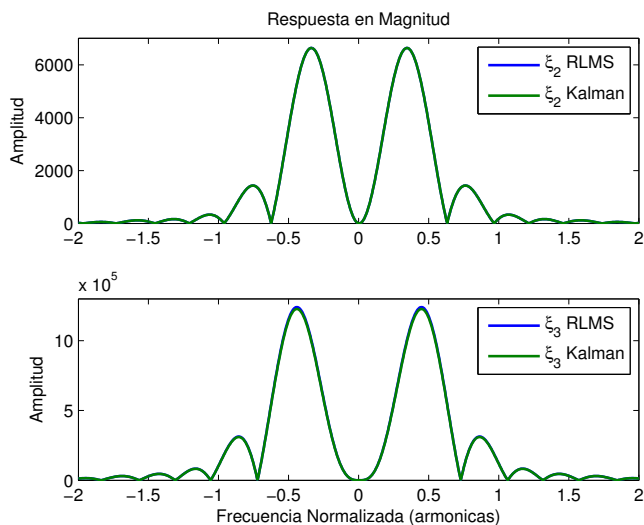


Figura 5.14: Respuestas en frecuencia de los filtros RLMS ponderados y Kalman bilaterales de  $4\sim$  con una observación muy pequeña de ruido ( $R_w = 10^{-10}$ ), con factor de peso de ventana de Tukey.

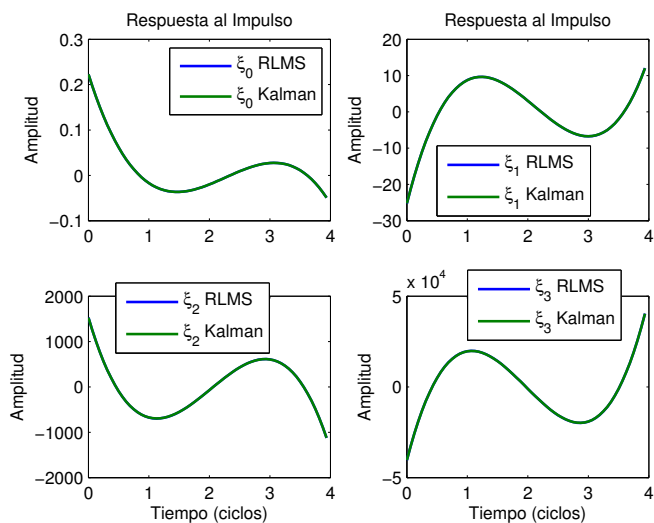


Figura 5.15: Respuestas impulsionales de la implementación progresiva de los RLMS y filtro de Kalman, con longitud de  $4\sim$  y ruido de observación muy pequeño ( $\sigma_w^2 = 10^{-10}$ )

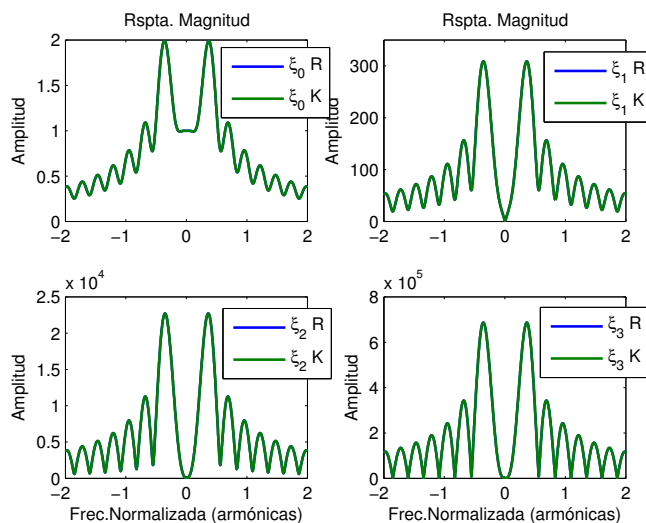


Figura 5.16: Respuestas en frecuencia de la implementación progresiva de los RLMS y filtro de Kalman, con longitud de  $4\sim$  y ruido de observación muy pequeño ( $\sigma_w^2 = 10^{-10}$ )

## 5.7 Discusión

La respuesta en frecuencia FIR del algoritmo alternante difiere del algoritmo RLMS progresivo (clásico) (5.2.10), y el algoritmo del filtro de Kalman en (5.5.7). La Fig. 5.15 ilustra los polinomios de Taylor obtenidos a través de (5.5.7) hasta  $4\sim$  tomando en cuenta una ventana rectangular. La implementación progresiva se logra en un solo sentido con ventanas causales, pero no en ambos sentidos. Nuevamente, las implementaciones de RLMS y el filtro de Kalman coinciden perfectamente, ahora bien, como la implementación es casual, ahora la respuesta al impulso es asimétrica. Cuando el ruido de observación incrementa, los polinomios de Taylor provistos por los filtros de Kalman tienden a ser constantes, indicando que los estimados de estado operan como simples operadores promedio. La Fig. 5.16 muestra la respuesta en frecuencia de los filtros, lo que nos permite observar que operan como diferenciadores ideales en la banda-base, sin embargo, presentan mayores frecuencias de resonancia que las realizaciones alternantes. En el caso del estimado de posición, la respuesta en frecuencia tiene

una banda de paso plana, pero con dos lóbulos resonantes en los bordes. Las diferencias entre las respuestas en frecuencia expuestas en las Figs. 5.16 y 5.10-5.11 son evidentes.

La respuesta en frecuencia de los filtros de respuesta al impulso finita (FIR) implementada con los algoritmos alternantes en la sección precedente, también muestra diferencias muy notorias con respecto a los filtros de respuesta al impulso infinita (IIR) obtenidos con los valores constantes de la ganancia de Kalman una vez que converge, tradicionalmente aplicado en aplicaciones clásicas de control automático. La respuesta en frecuencia de los filtros IIR son encontradas mediante la función de transferencia de la ecuación recursiva del filtro de Kalman

$$M_K(z) = [I + (\bar{G}H - I)\Phi z^{-1}] \bar{G} \quad (5.7.1)$$

con una ganancia de Kalman fija  $\bar{G}$ , y evaluada en  $z = e^{j\theta}$ , tal y como se observa en (3.4.2).

## 5.8 Conclusiones

Incluso si el filtro alternante de Kalman y los RLMS pueden emularse el uno al otro, la formulación de la implementación del filtro de Kalman provee estimados dinámicos y puede soportar modelos de señales variantes en el tiempo, tolerando procesos de ruido, y minimizando el ruido a la salida. Mientras que la implementación de los RLMS produce estimados estáticos (o escalares) y su formulación admite solo modelos de señales invariantes en el tiempo sin fenómenos de ruido. Ambas implementaciones filtran por ortogonalización las componentes no incluidas dentro del modelo de señal, pero mientras que los RLMS utilizan el producto interno geométrico, el algoritmo del filtro de Kalman aplica el estadístico. Por lo tanto, la elección entre ambos depende de las condiciones de la aplicación

# Capítulo 6

## Conclusiones y Recomendaciones

### 6.1 Introducción

En este trabajo de investigación se han descrito características de diversos algoritmos de estimación, enfocados en la estimación de fasores y los cuales trabajan sobre un modelo dinámico de señal, lo que representa un comportamiento mas cercano a lo que realmente ocurre en las oscilaciones de señales reales.

### 6.2 Conclusiones

- La aproximación de Taylor para el fasor oscilatorio provee de una matriz de transiciones para modelar con mejor precisión una oscilación de potencia.
- La ventaja del modelo dinámico de señal es que se puede emplear con la mayoría de las herramientas de control. Esto nos permite emplear el modelo junto a la fórmula de Ackermann, la cuál actúa en conjunto con los observadores predictor y actual, siendo éste ultimo el de mas relevancia. La fórmula de Ackermann que se basa en la técnica de asignación de polos es usada

para calcular un vector de ganancias para ponderar los términos de innovación  $((s_n - \hat{s}_n))$ .

- La principal ventaja de los estimados Taylor<sup>K</sup>-Ackermann y sus derivadas es que son instantáneos (sin retardo), preservando su sincronía con la señal. Además presentan un periodo de tiempo más corto que los filtros Taylor<sup>K</sup>-Kalman y los filtros Taylor<sup>K</sup>-LQG en alcanzar el estado estacionario cuando la señal es afectada por una transición. También presentan un error despreciable cuando la señal es contaminada con oscilaciones suaves y WGN.
- El modelo dinámico de la señal puede ser extendido incorporando el conjunto completo de armónicos. El estimador Luenberger de tipo actual extendido Taylor-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier presenta comportamientos muy similares al filtro Taylor<sup>K</sup>-Kalman-Fourier.
- Es muy probable que las ganancias del filtro de Kalman tomadas en [11] y [13] se encontraban en una fase previa, más cercana a la solución dinámica de Ackermann que a la solución óptima esperada por el algoritmo del filtro de Kalman
- El estimador extendido diseñado mediante el observador actual y la asignación de eigenvalores mediante la fórmula de Ackermann emula el comportamiento dinámico de otros filtros, siempre y cuando los eigenvalores otorgados sean los adecuados. Esto brinda la posibilidad de tener varios filtros en uno con la correcta base de datos. El estimador actual no requiere de ningún criterio de estabilización de ganancias.
- La implementación del filtro de Kalman provee estimados dinámicos y puede trabajar sobre modelos dinámicos de señal, mientras que la implementación de los RLMS otorga estimados estáticos y su formulación solo admite trabajar sobre modelos de señales invariantes en el tiempo.
- Tanto la implementación del filtro de Kalman y los RLMS filtran por ortogonalización de sus componentes no incluidas en el modelo de señal. Los RLMS utilizan el producto interno geométrico y el filtro de Kalman el estadístico.



### 6.3 Publicaciones

- J. A. de la O Serna y L.F. Sanchez-Gomez, *Dynamic Phasor Estimates Under the Bellman's Principle of Optimality: The Taylor-LQG-Fourier Filters*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 62 (2013), no.12
- J. A. de la O Serna y L.F. Sanchez-Gomez, *Quick Dynamic Phasor Estimators through the Ackermann's Formula*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, In Review.
- J. A. de la O, L. F. Sanchez-Gomez, *Alternating Kalman filters for Instrumentation Applications*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, In Review.
- *Estimados del Fasor Dinámico bajo el principio de Optimalidad de Bellman: El filtro Taylor-LQG-Fourier*. J. A. de la O Serna y L.F. Sanchez-Gomez, Revista Ingenierías No.63, Año XVII (Abril-Junio 2014), página. (31-44)

### 6.4 Aportaciones

- Estimadores diseñados mediante observadores de filtrado (observador actual) de Luenberger y la asignación de eigenvalores mediante la fórmula de Ackermann, cuya respuesta es rápida frente a condiciones transitorias.
- Estimador actual extendido diseñado mediante fórmula de Ackermann, el cual incorpora conjuntos completos de armónicos. El estimador tiene la propiedad de emular a otros filtros bajo la apropiada asignación de polos.
- Factor de ponderación y factor de olvido son implementados mediante ventanas de Tukey para los filtros de Kalman y los RLMS respectivamente. Se obtienen mejores respuestas en el dominio de la frecuencia y se consideran mejores criterios para las condiciones de paro para la

dinámica de ganancias mediante el análisis comparativo entre estos dos algoritmos recursivos.

## 6.5 Trabajos Futuros

- Desarrollar un estudio mas sobresaliente de los estimadores extendidos diseñados mediante la fórmula de Ackermann, basando el vector de estimación mediante el observador actual.
- Diseñar un método más apropiado de selección de polos para el estimador Taylor-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier considerando factores de amortiguamiento para los estimados del fasor así como para el de sus primeras  $K$  derivadas.
- Ponderar los errores iniciales presentados por los estimadores diseñado mediante la asignación de polos de la fórmula de Ackermann.
- Emplear los conocimientos adquiridos mediante los análisis comparativos entre los algoritmos del filtro de Kalman y RLMS para la mejora de dichos algoritmos. Además aplicar un análisis comparativo igual de detallado con los estimadores Taylor-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier.

# Apéndice A

## Modelo Analítico de la Señal

### A.1 Introducción

El modelo dinámico en espacio de estados de la señal pasabanda, puede extenderse considerando las primeras  $K$  derivadas de la señal  $s(t)$ . Esta es una forma alternativa al modelo utilizado a lo largo del trabajo de investigación mostrado en los capítulos anteriores.

### A.2 Modelo Alternativo

De acuerdo a lo obtenido en la sección 2.2 del capítulo 2,  $p(t) = a(t)e^{-j\varphi(t)}$  es definido como *fasor dinámico* de la señal (2.2.2) y  $p^-(t)$  su conjugado complejo. A partir de (2.2.3) tenemos que:

$$s(t) = p(t)e^{j\omega t} \tag{A.2.1}$$

$$\dot{s}(t) = \dot{p}(t)e^{j\omega t} + j\omega p(t)e^{j\omega t} \tag{A.2.2}$$

$$\ddot{s}(t) = \ddot{p}(t)e^{j\omega t} + 2j\omega \dot{p}(t)e^{j\omega t} - \omega^2 p(t)e^{j\omega t} \tag{A.2.3}$$

cuya forma matricial se define como:

$$\begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \\ \ddot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ jw & 1 & 0 \\ -w^2 & 2jw & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ \ddot{p}(t) \end{pmatrix} e^{jwt} \quad (\text{A.2.4})$$

Como sabemos, la función compleja  $p(t)$  puede ser aproximada por el  $K$ th polinomio de Taylor centrado en  $t_0$  y derivando las curvas del polinomio de Taylor, obtenemos la matriz de transiciones. Esto se describe en las ecuaciones (2.2.4), (2.2.5) y (2.2.7), respectivamente.

Finalmente la transición de parametros fasoriales es dada por (3.2.16), mientras que la matriz de transiciones se expresa en (3.2.17). Entonces el modelo analítico de la señal es:

$$\begin{pmatrix} \chi_{n+1} \\ \bar{\chi}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi e^{j\theta_c} & 0 \\ 0 & \Psi e^{-j\theta_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_n \\ \bar{\chi}_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

con  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Upsilon}\Phi\tilde{\Upsilon}^{-1}$ ,  $\theta_1 = 2\pi f_1\tau = \omega\tau$ , se desarrolla:

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ jw & 1 & 0 \\ -w^2 & 2jw & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ jw & 1 & 0 \\ -w^2 & 2jw & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{A.2.6})$$

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ jw & 1 & 0 \\ -w^2 & 2jw & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -jw & 1 & 0 \\ -w^2 & -2jw & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.7})$$

Reduciendo en función de  $\theta_c$  y  $\Theta = \left(1 - \frac{\theta_c^2}{2}\right)$ , se obtiene:

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \Theta - j\theta_c & \tau(1 - j\theta_c) & \frac{\tau^2}{2} \\ -j\frac{\theta_c^2 w}{2} & (1 + \theta_c^2 w) - j\theta_c & \tau(1 + j\frac{\theta_c}{2}) \\ \theta_c w^2 (\frac{\theta_c}{2} - j) & \theta_c w (3 + j\theta_c) & \Theta + j2\theta_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.8})$$

De acuerdo con la señal pasabanda 3.5.1 y sus parametros, tenemos que:

$$\tilde{\Phi}(\tau) = \begin{pmatrix} 0.9239 + 0.3827i & 0.0010 + 0.0004i & 0.0000 + 0.0000i \\ 0 & 0.9239 + 0.3827i & 0.0010 + 0.0004i \\ 0 & 0 & 0.9239 + 0.3827i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}(\tau) = \begin{pmatrix} 0.9240 + 0.3823i & 0.0010 + 0.0004i & 0.0000 + 0.0000i \\ 0.0000 - 0.0000i & 0.9240 + 0.3823i & 0.0010 + 0.0004i \\ 0.0000 - 0.0001i & 0.0004 + 0.0002i & 0.9236 + 0.3834i \end{pmatrix}$$

donde los eigenvalores quedan definidos de la siguiente manera:

$$\phi_{\Phi}(\tau) = \left( 0.9239 + 0.3827i \quad 0.9239 + 0.3827i \quad 0.9239 + 0.3827i \right)$$

$$\phi_{\tilde{\Psi}}(\tau) = \left( 0.9239 + 0.3827i \quad 0.9239 + 0.3827i \quad 0.9239 + 0.3827i \right)$$

# Apéndice B

## Datos Numéricos

Los datos aquí presentados, detallan registros numéricos tanto de los  $t_s$  como el de las  $\lambda$ 's evaluados por los algoritmos expuestos en los capítulos 3 y 4, respectivamente.

### B.1 Tiempos de Asentamiento: Filtro de Kalman y Estimador de Filtrado ó Actual

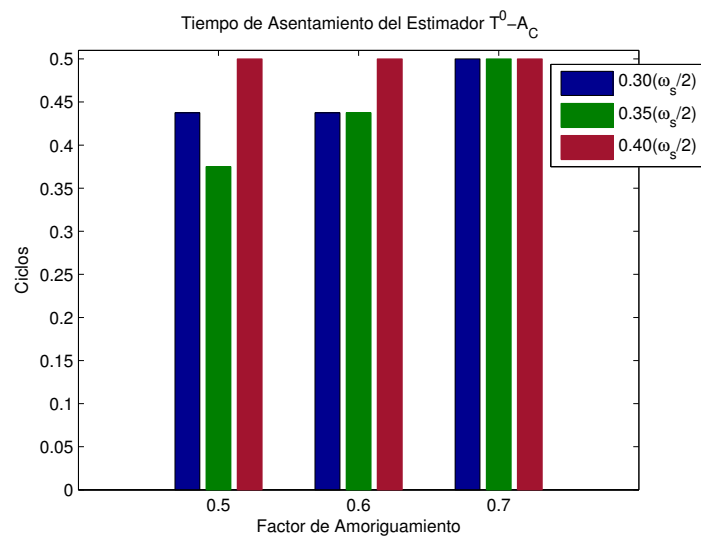


Figura B.1: Tiempos de asentamiento  $t_s$  correspondientes a la tabla 3.1.

Tabla B.1: Identificación del tiempo de asentamiento cuando la señal de entrada es muestreada a 16, 32 y 64 muestras por ciclo.

16 s/~			32 s/~			64 s/~		
n	Ackermann <sub>c</sub>	Kalman	n	Ackermann <sub>c</sub>	Kalman	n	Ackermann <sub>c</sub>	Kalman
253	-0.2500	-0.2500	510	-0.0938	-0.0938	1022	-0.0469	-0.0469
254	-0.1250	-0.1250	511	-0.0625	-0.0625	1023	-0.0313	-0.0313
255	-0.0625	-0.0625	512	-0.0313	-0.0313	1024	-0.0156	-0.0156
256	0.0000	0.0000	513	0.0000	0.0000	1025	0.0000	0.0000
257	0.0000	0.0000	514	0.0000	0.0000	1026	0.0000	0.0000
258	0.0000	0.0000	515	0.0000	0.0000	1027	0.0000	0.0000
259	0.0000	0.0000	516	0.0000	0.0000	1028	0.0000	0.0000
260	0.0000	0.0000	517	0.0000	0.0000	1029	0.0000	0.0000
261	0.0000	0.0000	518	0.0000	0.0000	1030	0.0000	0.0000
262	0.0000	0.0000	519	0.0000	0.0000	1031	0.0000	0.0000
263	0.0000	0.0000	520	<b>0.2188</b>	0.0000	1032	<b>0.1250</b>	0.0000
264	<b>0.4375</b>	0.0000	521	0.2500	0.0000	1033	0.1406	0.0000
265	0.0500	0.0000	522	0.2813	0.0000	1034	0.1563	0.0000
266	0.5625	0.0000	523	0.3125	0.0000	1035	0.1719	0.0000
267	0.6250	0.0000	524	0.3438	0.0000	1036	0.1875	0.0000
268	0.6875	0.0000	525	0.3750	0.0000	1037	0.2031	0.0000
269	0.7500	0.0000	526	0.4063	0.0000	1038	0.2188	0.0000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
273	1.0000	0.0000	576	1.9688	0.0000	1156	2.0469	0.0000
274	1.0625	0.0000	577	2.0000	0.0000	1157	2.0625	0.0000
275	1.1250	0.0000	578	2.0313	0.0000	1158	2.0781	0.0000
276	1.1875	0.0000	579	2.0625	0.0000	1159	2.0938	0.0000
277	1.2500	0.0000	580	2.0938	0.0000	1160	2.1094	0.0000
278	1.3125	0.0000	581	2.1250	0.0000	1161	2.1250	0.0000
279	1.4375	0.0000	582	2.1563	0.0000	1162	2.1406	0.0000
280	1.5000	0.0000	583	2.1875	<b>2.1875</b>	1163	2.1563	<b>2.1563</b>
281	1.5625	0.0000	584	2.2188	2.2188	1164	2.1719	2.1719
282	1.6250	0.0000	585	2.2500	2.2500	1165	2.1875	2.1875
283	1.6875	<b>1.6875</b>	586	2.2813	2.2813	1166	2.2031	2.2031
284	1.7500	1.7500	587	2.3125	2.3125	1167	2.2188	2.2188
285	1.8125	1.8125	588	2.3438	2.3438	1168	2.2344	2.2344
286	1.8750	1.8750	589	2.3750	2.3750	1169	2.2500	2.2500

Tabla B.2: Identificación del tiempo de asentamiento cuando la señal de entrada es muestreada a 128 y 256 muestras por ciclo.

128 s/~			256 s/~		
n	Ackermann <sub>c</sub>	Kalman	n	Ackermann <sub>c</sub>	Kalman
2046	-0.0234	-0.0234	4094	-0.0117	-0.0117
2047	-0.0156	-0.0156	4095	-0.0078	-0.0078
2048	-0.0078	-0.0078	4096	-0.0039	-0.0039
2049	0.0000	0.0000	4097	0.0000	0.0000
2050	0.0000	<b>0.0078</b>	4098	0.0000	<b>0.0039</b>
2051	0.0000	0.0156	4099	0.0000	0.0078
2052	0.0000	0.0234	4100	0.0000	0.0117
2053	0.0000	0.0313	4101	0.0000	0.0156
2054	0.0000	0.0391	4102	0.0000	0.0195
2055	0.0000	0.0469	4103	0.0000	0.0234
2056	0.0000	0.0547	4104	0.0000	0.0273
2057	0.0000	0.0625	4105	0.0000	0.0313
2058	<b>0.0703</b>	0.0703	4106	0.0000	0.0352
2059	0.0781	0.0781	4107	<b>0.0391</b>	0.0391
2060	0.0859	0.0859	4108	0.0430	0.0430
2061	0.0938	0.0938	4109	0.0469	0.0469
2062	0.1016	0.1016	4110	0.0508	0.0508
2063	0.1094	0.1094	4111	0.0547	0.0547
2064	0.1172	0.1172	4112	0.0586	0.0586
2065	0.1250	0.1250	4113	0.0625	0.0625

Las tablas B.1 y B.2 muestran los vectores de tiempo, identificando el  $t_s$  que cumpla con la banda de tolerancia del 5% ante una condición transitoria. En las tablas,  $n$  simplemente se refiere a un índice vectorial en el cual se registra las posiciones del valor numérico de tiempo. Por otro lado, la Fig. B.1, la comparativa de los  $t_s$ , variando el valor de  $\omega_n$  y  $\zeta$ , según el lugar geométrico de la raíces.



## B.2 Eigenvalores del Estimador Actual Extendido

Finalmente, la tabla B.3 muestra los eigenvalores pertenecientes al estimador Taylor<sup>2</sup>-Ackermann<sub>c</sub>-Fourier para la transición en su primer y tercer termino.

Tabla B.3: Eigenvalores del estimador Ackermann<sub>c</sub> extendido.

Primera Transición	Segunda Transición	Primera Transición	Segunda Transición
0.9032 + 0.4505i	-0.8120 - 0.2273i	0.9405 - 0.3229i	0.5163 + 0.6796i
0.9405 + 0.3229i	-0.7397 - 0.4095i	0.8829 - 0.3700i	0.5860 + 0.6084i
0.8829 + 0.3700i	-0.7642 - 0.3113i	0.9990 - 0.0660i	0.6691 + 0.5412i
0.9990 + 0.0660i	-0.8381 - 0.0961i	0.7382 - 0.6573i	-0.4182 - 0.7334i
0.7382 + 0.6573i	-0.8215 - 0.0000i	0.6654 - 0.7716i	-0.3275 - 0.7622i
0.6654 + 0.7716i	-0.8381 + 0.0961i	0.6716 - 0.6828i	-0.2377 - 0.8149i
0.6716 + 0.6828i	-0.8120 + 0.2273i	0.4247 - 0.8869i	0.7436 + 0.4350i
0.4247 + 0.8869i	-0.7642 + 0.3113i	0.3196 - 0.9799i	0.7836 + 0.3388i
0.3196 + 0.9799i	-0.7397 + 0.4095i	0.3557 - 0.8900i	0.8346 + 0.2432i
0.3557 + 0.8900i	-0.6649 + 0.5193i	-0.0843 - 1.0423i	-0.1088 - 0.8388i
-0.0843 + 1.0423i	-0.5903 + 0.5792i	0.0487 - 0.9777i	-0.0135 - 0.8331i
0.0487 + 0.9777i	-0.5289 + 0.6614i	-0.0160 - 0.9592i	0.0910 - 0.8465i
-0.0160 + 0.9592i	-0.4182 + 0.7334i	-0.4882 - 0.9475i	0.8660 + 0.1113i
-0.4882 + 0.9475i	-0.3275 + 0.7622i	-0.3316 - 0.9169i	0.2183 - 0.8201i
-0.3316 + 0.9169i	-0.2377 + 0.8149i	-0.3860 - 0.8796i	0.3065 - 0.7801i
-0.3860 + 0.8796i	-0.1088 + 0.8388i	-0.8360 - 0.7079i	0.4087 - 0.7511i
-0.8360 + 0.7079i	-0.0135 + 0.8331i	-0.6580 - 0.7150i	0.8618 - 0.0000i
-0.6580 + 0.7150i	0.0910 + 0.8465i	-0.6971 - 0.6631i	0.8660 - 0.1113i
-0.6971 + 0.6631i	0.2183 + 0.8201i	-1.0861 - 0.3632i	0.5163 - 0.6796i
-1.0861 + 0.3632i	0.3065 + 0.7801i	-0.8805 - 0.4039i	0.5860 - 0.6084i
-0.8805 + 0.4039i	0.4087 + 0.7511i	-0.9010 - 0.3428i	0.6691 - 0.5412i
-0.9010 + 0.3428i	-0.6649 - 0.5193i	-0.9656 - 0.0321i	0.8346 - 0.2432i
-0.9656 + 0.0321i	-0.5903 - 0.5792i	0.9572 + 0.0000i	0.7436 - 0.4350i
0.9032 - 0.4505i	-0.5289 - 0.6614i	-1.1947 + 0.0058i	0.7836 - 0.3388i

# Apéndice C

## Herramientas Matemáticas

### C.1 Introducción

A lo largo de este apéndice se describirán diversas aplicaciones matemáticas que fueron empleadas en el diseño de los algoritmos presentados en los capítulos. Con esto se pretende ayudar al lector a tener un mejor entendimiento del trabajo de tesis realizado.

### C.2 Teorema de Taylor

**Teorema C.2.1.** *Supóngase que  $f$  es una función real sobre  $[a, b]$ ,  $n$  es un entero real positivo,  $f^{(n-1)}$  es continua sobre  $[a, b]$  y  $f^n$  existe  $\forall t \in (a, b)$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  puntos distintos de  $(a, b)$ , y sea  $P(t)$  definida por*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k \quad (\text{C.2.1})$$

Entonces existe un punto  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  tal que:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n \quad (\text{C.2.2})$$

*Demostración.* Sea  $M$  el número definido por

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n \quad (\text{C.2.3})$$

La prueba consiste en demostrar que  $n!M = f^{(n)}(x)$  para un punto  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ , para esto se crea la función

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad a \leq t \leq b \quad (\text{C.2.4})$$

donde, dado que  $P^{(k)}(t) = 0$  para  $k \geq n$ , la  $n$ -ésima derivada de  $g(t)$  esta dada por

$$g^n(t) = f^n(t) - n!M \quad a \leq t \leq b \quad (\text{C.2.5})$$

Ahora, el mostrar que  $n!M = f^{(n)}(x)$  para algún  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  es equivalente a mostrar que  $g^{(n)}(x) = 0$  para algún  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ , esto se realiza a través del teorema del valor medio.

Primero observe que  $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  entonces de (C.2.4) se tiene que

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad (\text{C.2.6})$$

Ahora observe que de C.2.4 que  $g(\beta) = 0$  entonces por el teorema del valor medio, existe un punto  $x_1$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  en el cual  $g'(x_1) = 0$ , y ya que  $g'(\alpha) = 0$  existe en un punto  $x_2$  entre  $x_1$  y  $\alpha$  en el cual  $g'(x_2) = 0$ , al seguir recursivamente se llega a la conclusión de que  $g^{(n)}(x_n) = 0$  donde  $x_n$  es un punto entre  $x_{(n-1)}$  y  $\alpha$  el cual a su vez esta incluido entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

### C.3 Teorema de Cayley-Hamilton

**Teorema C.3.1.** *Sea una matriz  $A$  de  $n \times n$ , anula a un polinomio  $p(x)$  si el valor de  $p(x)$  en  $A$  es la matriz nula  $n \times n$ :*

$$A \text{ anula a } p(x) \text{ si } p(A) = 0 \quad (\text{C.3.1})$$

Consideramos una matriz  $A$  de  $n \times n$  y su ecuación característica:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (\text{C.3.2})$$

El Teorema de Cayley-Hamilton establece que la matriz  $A$  satisface su propia ecuación característica, es decir:

$$A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0 \quad (\text{C.3.3})$$

Para probar este teorema, note que  $\text{adj}(\lambda I - A)$  es un polinomio en  $\lambda$  de grado  $n - 1$ . Esto es,

$$\text{adj}(\lambda I - A) = B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n \quad (\text{C.3.4})$$

donde  $B_1 = I$ . Desde

$$(\lambda I - A)\text{adj}(\lambda I - A) = [\text{adj}(\lambda I - A)](\lambda I - A) = |\lambda I - A|I \quad (\text{C.3.5})$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} |\lambda I - A|I &= I\lambda^n + a_1I\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}I\lambda + a_nI \\ &= (\lambda I - A)(B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n) \\ &= (B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n)(\lambda I - A) \end{aligned} \quad (\text{C.3.6})$$

De esta ecuación, se aprecia que  $A$  y  $B_i (i = 1, 2, \dots, n)$  conmutan. Por lo tanto, el producto de  $(\lambda I - A)$  y  $\text{adj}(\lambda I - A)$  se convierten en cero si cualquiera de éstas es cero. Si  $A$  es sustituida por  $\lambda$  en esta ecuación, entonces claramente  $\lambda I - A$  se convierte en cero. Por lo que, se obtiene

$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI = 0 \quad (\text{C.3.7})$$

## C.4 Mínimos Cuadrados

**Teorema C.4.1.** Sean  $f(t)$  una señal real perteneciente a  $(-\infty, \infty)$ , y  $\hat{f}(t)$  la aproximación a  $f(t)$  dada por:

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \quad (\text{C.4.1})$$

la cuales esta construida por una combinación lineal de  $n$  señales  $y_k(t)$  las cuales son linealmente independientes.

Los coeficientes óptimos  $\hat{a}_k$  que minimizan el criterio

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right|^2 \quad (\text{C.4.2})$$

son tal que el error es ortogonal a las señales  $y_k(t)$ :

$$\langle f - \hat{f}, y_i \rangle = 0 \quad \text{para: } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.4.3})$$

### Prueba

El criterio es mínimo si:

$$\frac{dJ}{da_i} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right] y_i(t) dt = 0 \quad \text{para: } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.4.4})$$

## C.5 Teorema del valor medio

**Teorema C.5.1.** Si  $f$  es una función continua real sobre  $[a, b]$  la cual es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe un punto  $x \in (a, b)$  en el cual

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x) \quad (\text{C.5.1})$$

### Demostración

Se construye la función

$$h(t) = [f(b) - f(a)]t - (b - a)f(t) \quad (\text{C.5.2})$$

La cual es continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ . Observe de (C.5.2) que  $h(a) = af(b) - bf(a) = h(b)$ . Se obtiene la primera derivada de  $h(t)$

$$h'(t) = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(t) \quad (\text{C.5.3})$$

Para probar el teorema es necesario demostrar que  $h'(x) = 0$  para algún  $x \in (a, b)$ .

Si  $h$  es constante esto se cumple para toda  $x$  en  $(a, b)$ , si  $h(t) > h(a)$  para algún  $t \in (a, b)$  entonces existe un punto  $x$  en el cual la función  $h$  alcanza su máximo y en este punto  $h'(x) = 0$ . La misma conclusión aplica para el caso en que  $h(t) < h(a)$ , solo que en este caso la función alcanza un mínimo.

## C.6 Controlabilidad y Observabilidad

Para diseñar controladores en espacio de estado, primero hay que averiguar si el sistema es observable y controlable. La *controlabilidad* se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. La *observabilidad* se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de periodos de muestreo.

### Controlabilidad

Se dice que el sistema es *controlable* si existe una entrada  $u$  capaz de variar el estado inicial  $x_0$  a cualquier otro estado deseado  $x_t$  en un tiempo finito. Matemáticamente, un sistema es controlable si su *matriz de controlabilidad*  $P_c$  no es singular. La matriz de controlabilidad se define como

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{C.6.1})$$

y el sistema es controlable si y sólo si el  $\det(P_c) \neq 0$ . Un sistema controlable es siempre *estabilizable*.

### Observabilidad

Se dice que un sistema es *observable* si cualquier estado  $x_0$  puede ser determinado mediante la salida del sistema y durante un tiempo finito. Matemáticamente, un sistema es observable si su *matriz de observabilidad*  $P_o$  no es singular. La matriz de observabilidad se define como

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6.2})$$

y el sistema es observable si y sólo si el  $\det(P_o) \neq 0$ .

# Bibliografía

- [1] M. Platas-Garza and J. de la O Serna, “Dynamic harmonic analysis through taylor-fourier transform,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 60, pp. 804–813, March 2011.
- [2] J. A. de la O Serna, W. Van Moer, and K. Barbe, “Using alternating kalman filtering to analyze oscillometric blood pressure waveforms,” vol. DOI 10.1109/TIM.2013.2258765, no. 99, pp. 1–1, 2013.
- [3] A. Stankovic, H. Lev-Ari, and M. Perisic, “Analysis and implementation of model-based linear estimation of dynamic phasors,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 19, pp. 1903–1910, Nov 2004.
- [4] A. Stankovic and T. Aydin, “Analysis of asymmetrical faults in power systems using dynamic phasors,” in *Power Engineering Society Summer Meeting, 2000. IEEE*, vol. 3, pp. 1957 vol. 3–, 2000.
- [5] L. F. Sánchez Gómez, *Estimación fasorial subcíclica y lineal cuadrática*. masters, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2012.
- [6] P. Mattavelli, A. Stankovic, and G. C. Verghese, “Ssr analysis with dynamic phasor model of thyristor-controlled series capacitor,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 14, pp. 200–208, Feb 1999.
- [7] A. G. Phadke and J. S. Thorp, *Computer Relaying for Power Systems*. John Wiley & Sons, July 2009.
- [8] P. Castello, M. Lixia, C. Muscas, and P. Pegoraro, “Impact of the model on the accuracy of synchrophasor measurement,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 61, pp. 2179–2188, Aug 2012.
- [9] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, June 2006.
- [10] D. García Almazán, *Generación de alarma ante oscilaciones mediante la transformada digital Taylor-Fourier*. masters, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2011.

- [11] J. A. de la O Serna and J. Rodriguez-Maldonado, "Instantaneous oscillating phasor estimates with Taylor<sup>k</sup>-Kalman filters," vol. 26, pp. 2336–2344, nov. 2011.
- [12] C. L. Phillips and H. T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*. Prentice Hall, 3 ed., Nov. 1994.
- [13] J. A. de la O Serna and J. Rodriguez-Maldonado, "Taylor-kalman-fourier filters for instantaneous oscillating phasor and harmonic estimates," vol. 61, pp. 941–951, april 2012.
- [14] L. Sanchez-Gomez and J. A. de la O Serna, "Dynamic phasor estimates under the bellman's principle of optimality: The taylor-lqg-fourier filters," *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 62, pp. 3137–3147, Dec 2013.
- [15] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 2002.
- [16] H. Lee and J. Choi, "Ackermann-like eigenvalue assignment formulae for linear time-varying systems," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, vol. 152, pp. 427–434, July 2005.
- [17] M. Valasek and N. Olgac, "Generalization of ackermann's formula for linear mimo time invariant and time varying systems," in *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, pp. 827–832 vol.1, Dec 1993.
- [18] E. Frazzoli and M. A. Dahleh, *Dynamic Systems and Control, Spring 2011. (MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology)*, ch. 29. <http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-241j-dynamic-systems-and-control-spring-2011> (Accessed 23 May, 2014). License: Creative Commons BY-NC-SA.
- [19] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*. Boston: McGraw-Hill, 5th ed. ed., 2007.
- [20] J. Liu, F. Ni, P. Pegoraro, F. Ponci, A. Monti, and C. Muscas, "Fundamental and harmonic synchrophasors estimation using modified taylor-kaiman filter," in *Applied Measurements for Power Systems (AMPS), 2012 IEEE International Workshop on*, pp. 1–6, Sept 2012.
- [21] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*. Prentice-Hall, 1987.
- [22] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital signal processing*. Upper Saddle River, N. J.: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [23] "IEEE standard for synchrophasor measurements for power systems," *IEEE Std C37.118.1-2011 (Revision of IEEE Std C37.118-2005)*, pp. 1–61, 12 2011.
- [24] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital control of dynamic systems*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley, 1998.
- [25] "Identification, Estimation, and Learning."
- [26] P. C. Young, *Recursive Estimation and Time-Series Analysis: An Introduction for the Student and Practitioner*. Springer Science & Business Media, Aug. 2011.



- [27] J. de la Serna, “Dynamic phasor estimates for power system oscillations,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 56, pp. 1648–1657, Oct 2007.
- [28] J. A. de la O Serna and M. A. Platas-Garza, “Maximally flat differentiators through {WLS} taylor decomposition,” *Digital Signal Processing*, vol. 21, no. 2, pp. 183 – 194, 2011.
- [29] A. N. Michel and C. J. Herget, *Applied algebra and functional analysis*. Dover Publications, 1993.
- [30] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, *Statistical and adaptive signal processing spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering, and array processing*. Artech House, 2005.