

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

**USO DEL MÉTODO DE LOS CENTROS EN LA SOLUCIÓN  
DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA**

PRESENTA

**BALDOMERO BARRÓN OYERVIDES**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA CON  
ESPECIALIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

MAYO 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TESIS

**USO DEL MÉTODO DE LOS CENTROS EN LA SOLUCIÓN  
DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA**

PRESENTA

**BALDOMERO BARRÓN OYERVIDES**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA CON  
ESPECIALIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN,

MAYO, 2011

## Uso del Método de los Centros en la Solución del Problema de Flujos de Potencia

Los miembros del Comité aprueban la Tesis  
de Maestría de Baldomero Barrón Oyervides

Oscar L. Chacón Mondragón

Asesor

---

Ernesto Vázquez Martínez

---

Arturo Conde Enríquez

---

*Con Amor, Gratitud y Respeto:*

A la mujer a quien le debo la vida, educación y lo que soy, por su esfuerzo día a día, por su ejemplo, sus enseñanzas y por buscar siempre lo mejor para sus hijos.

**MI MADRE: AMALIA OYERVIDES GONZALEZ**

*Con Respeto y Admiración :*

Por su ejemplo, honradez y valentía, por esas duras jornadas en las cuales tuvo que salir a trabajar para que no nos faltara nada

**MI PADRE: BALDOMERO BARRON NAVARRO**

A mis hermanos: **Mario, Sanjuana, Andrés, Laura y Martha**, quienes siempre me han mostrado su apoyo incondicional

*Y con especial cariño y amor:*

A quien me brindó su amistad, su amor y su comprensión

**Maria del Roble Cadena Alcala**

## AGRADECIMIENTOS

- Al Dr. *Oscar L. Chacón Mondragón* por la excelente asesoría en la realización de este trabajo
  
- Al Dr. *Ernesto Vázquez Martínez* por su apoyo día a día, su amistad y asesoría
  
- Al Dr. *Salvador Acha Daza* por brindarme la oportunidad de ingresar al programa de Postgrado en Ingeniería Eléctrica de la UANL
  
- A todos y a cada uno de mis compañeros del Programa de Postgrado en Ingeniería Eléctrica por su amistad y apoyo, especialmente a los M.C. *Alberto Solís Ortiz, Guillermo Francis Medina, Ismael Díaz Verduzco, Ramiro Patiño Bedolla, Rubén Salas Cabrera, Israel Barrientos, Alberto Avalos, Carlos Pérez.*
  
- A la Universidad Autónoma de Nuevo León
  
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

## **RESUMEN**

### **Uso del Método de los Centros en la Solución del Problema de Flujos de Potencia**

Publicación No. \_\_\_\_\_

Baldomero Barrón Oyervides M.C. en Ingeniería Eléctrica  
Universidad Autónoma de Nuevo León, 2011

Profesor Asesor: Dr. Oscar L. Chacón Mondragón

Se presenta el problema de flujos de potencia. El modelo matemático resultante es un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales simultáneas, cuya solución se obtiene empleando técnicas numéricas. Los métodos que se presentan parten de una linealización de los balances de potencia activa y reactiva para todos los nodos excepto el nodo compensador, dando lugar a un sistema de ecuaciones lineales.

Se hace una revisión de técnicas convencionales como el método Newton-Raphson, el método Desacoplado, y el método Desacoplado Rápido, estableciéndose las ventajas y desventajas de su implementación computacional.

También se hace una revisión de técnicas no convencionales como el método simplex acotado de programación lineal y el método de redes neuronales; se presenta su formulación para su aplicación al problema de flujos de potencia.

Como objetivo principal de la tesis se presenta la formulación del método de los centros. Se analiza su aplicación al problema de flujos de potencia clásico, así como al control

de voltaje de un nodo remoto. La validación del método se presenta utilizando sistemas de prueba, y comparando resultados con respecto a los obtenidos por técnicas convencionales.

## INDICE

<i>Agradecimientos</i> .....	<i>iv</i>
<i>Resumen</i> .....	<i>v</i>
<i>Indice de Figuras</i> .....	<i>ix</i>

### **Capítulo 1 INTRODUCCION**

1.1 Introducción .....	1
1.2 Estructura de la Tesis .....	5

### **Capítulo 2 EL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA**

2.1 Introducción .....	7
2.2 Formulación matemática .....	8
2.3 Métodos de solución convencionales .....	11
2.3.1 Método Newton Raphson .....	11
2.3.2 Método desacoplado .....	17
2.3.3 Método desacoplado rápido .....	19
2.4 Métodos de solución no convencionales .....	21
2.4.1 Método simplex acotado .....	21
2.4.2 Método de redes neuronales .....	30
2.4.3 Método de los centros analíticos .....	36
2.5 Flujos y pérdidas en las líneas; determinación de potencia en el nodo compensador	37
2.6 Análisis de límites de reactivos .....	38
2.7 Análisis de problemas mal condicionados .....	40

### **Capítulo 3 METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS**

3.1 Introducción .....	42
3.2 Concepto de centro analítico de un conjunto de desigualdades lineales .....	43



3.3	Descripción del método de los centros analíticos .....	45
3.3.1	Método barrera (método de transformación) .....	45
3.3.2	Método de los centros analíticos .....	47
3.4	Aplicación del método de los centros al problema de programación lineal .....	53
3.5	Aplicación del método de los centros al problema de flujos de potencia .....	55
3.6	Aplicación del método de los centros al control de voltaje en estado estable de un nodo remoto .....	57

#### **Capítulo 4 APLICACION DEL METODO DE LOS CENTROS AL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA**

4.1	Introducción .....	62
4.2	Sistema de prueba de 4 nodos .....	63
4.3	Sistema de prueba de 5 nodos .....	65
4.4	Sistema de prueba de 9 nodos .....	68
4.5	Sistema de prueba de 14 nodos .....	71
4.6	Análisis de resultados .....	74

#### **Capítulo 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

5.1	Introducción .....	75
5.2	Conclusiones .....	75
5.3	Aportaciones .....	78
5.4	Recomendaciones para trabajos futuros .....	79

#### **BIBLIOGRAFIA**

## INDICE DE FIGURAS

<i>No. de Figura</i>	<i>Descripción</i>	<i>Página</i>
2.1	<i>Sistema de prueba de 3 nodos</i>	27
2.2	<i>Dinámica del sistema gradiente</i>	32
2.3	<i>Modelo PI de la línea de transmisión</i>	37
2.4	<i>Sistema eléctrico elemental</i>	39
3.1	<i>Centro analítico de desigualdades lineales</i>	44
3.2	<i>Región convexa de factibilidad</i>	49
3.3	<i>Región de factibilidad formada por la inclusión de una nueva cota</i>	50
3.4	<i>Centro analítico de la región convexa</i>	51
4.1	<i>Sistema de prueba de 4 nodos</i>	63
4.2	<i>Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR</i>	64
4.3	<i>Sistema de prueba de 5 nodos</i>	65
4.4	<i>Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR</i>	67
4.5	<i>Sistema de prueba de 9 nodos</i>	68
4.6	<i>Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR</i>	70
4.7	<i>Sistema de prueba de 14 nodos</i>	71
4.8	<i>Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR</i>	73
4.9	<i>Localización de las Soluciones del MC y NR en G</i>	74

## **CAPITULO UNO**

### **INTRODUCCION**

#### **1.1 INTRODUCCION**

La solución del problema de flujos de potencia es básico para los diversos análisis que se llevan a cabo en los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP), por lo que ha sido objeto de un sinnúmero de investigaciones [1,2]. La mayoría de ellas han sido dedicadas a obtener soluciones en un menor tiempo de cómputo así como un menor costo de memoria computacional.

La metodología de solución de problemas de flujos de potencia está relacionada con el desarrollo tecnológico de la computadora digital, tanto en equipo como en técnicas de programación. Antes de la aparición de esta, los estudios se llevaban a cabo en analizadores de redes. A partir de 1956, cuando se propuso el primer método para la solución del problema de flujos orientado a la computadora digital, éstas fueron puestas a disposición de un mayor número de ingenieros, de tal forma que los estudios digitales se fueron sistematizando.

Mediante modelos matemáticos adecuados se obtuvieron soluciones similares a las que se venían realizando para los estudios de flujo de potencia, mediante analizadores de redes.

El modelo matemático del problema parte de la consideración de una red trifásica balanceada de tal manera que el SEP puede representarse únicamente por la red de secuencia positiva, excluyendo el efecto de los transformadores defasadores, con el objetivo de preservar la simetría de la matriz de admitancias ( $Y_{bus}$ ) [3]. El modelo es apropiado para la obtención de los voltajes y flujos de potencia en estado estable; sin embargo, al estar definida la potencia como el producto del voltaje por la corriente, la formulación del problema es no lineal. Es decir, las ecuaciones representativas del modelo son ecuaciones algebraicas no lineales [4], cuya solución se obtiene empleando métodos numéricos [14].

De los métodos numéricos para la solución del problema no lineal se han empleado una gran variedad de métodos, siendo los más utilizados el Gauss-Seidel (GS), el método de Newton-Raphson (NR) en sus versiones rectangular o polar, y el Desacoplado Rápido (DR) [5, 6, 7]. Sin embargo, resulta difícil definir cuál es el mejor método de solución, ya que su comportamiento puede verse influenciado por las características del problema, por las facilidades computacionales que se dispongan y por el grado de detalle requerido para los modelos matemáticos de los componentes del sistema eléctrico. La selección final del método es resultado del compromiso existente entre estos criterios.

Los métodos antes mencionados presentan alguna de las siguientes características: (a) Converge a una solución representativa del estado físico del SEP, (b) Converge a una solución no representativa del mismo, (c) Diverge. La posibilidad de divergencia ha conducido a investigar nuevos métodos de solución, cuya característica principal es la de controlar la convergencia del proceso iterativo, siendo estos métodos en teoría no divergentes [8], y que pertenecen al conjunto de métodos de optimización. En el análisis de operación, los SEP presentan límites en las variables nodales (i.e. magnitudes de voltajes, potencias de

generación), lo que ocasiona que se tomen acciones de corrección para la siguiente iteración al utilizar un método numérico convencional; sin embargo, utilizando métodos basados en técnicas de optimización, tales como la programación lineal, es posible evitar lo anterior incorporando, por ejemplo, cotas a los voltajes en los nodos de carga y a los reactivos en los nodos de generación.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es la de presentar otras alternativas a la solución del problema de flujos de potencia. Entre las técnicas a presentar en este trabajo se encuentran, redes neuronales [10] y el método de los centros analíticos (MC) [11].

En el presente trabajo se discute brevemente el Método Simplex Acotado como técnica de programación lineal [9]; el aplicarlo al problema de flujos implica la linealización de los balances de potencia activa y reactiva para todos los nodos excepto el nodo compensador, dando lugar a un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve como un problema de programación lineal.

Además, existen métodos que transforman un problema de programación lineal con restricciones lineales a uno no lineal y sin restricciones de tal manera que su solución puede obtenerse con menor dificultad; en el presente trabajo se abordan técnicas de Redes Neuronales y el método de los Centros Analíticos.

Las técnicas de redes neuronales son aquellas que emplean redes de neuronas artificiales tipo gradiente con retroalimentación, donde, en base a una interpretación geométrica de las condiciones de Kuhn-Tucker [26], se define una función de energía en la cual se aplica la técnica del gradiente para su minimización. Su aplicación al problema de flujos es similar al del método simplex, es decir, se parte de los balances de potencia tanto

activa como reactiva y a partir del sistema de ecuaciones lineales resultantes se plantea la función de energía para su minimización mediante el empleo de la técnica del gradiente, generándose un sistema de ecuaciones diferenciales cuyo punto de equilibrio corresponde al punto óptimo de la función de energía, que representa la solución al problema de flujos.

En el método de los centros, el problema se plantea como un sistema de desigualdades lineales cuya intersección forma una región convexa  $G$ , transformando el sistema de desigualdades a un problema de programación no lineal. El centro analítico representa un punto interior de  $G$ , el cual se calcula mediante la minimización de una función objetivo no lineal generada por la función objetivo y las restricciones. Con el centro analítico calculado se actualiza el parámetro de la función objetivo, generando una nueva región convexa de factibilidad y repitiéndose el proceso anterior hasta que se cumpla con una cierta tolerancia en el criterio seleccionado (basado en la actualización de estos parámetros) para la terminación del algoritmo. Su aplicación al problema de flujos implica una linealización de los balances de potencia activa y reactiva para cada uno de los nodos excepto el nodo compensador, dando lugar a un sistema de ecuaciones lineales. Reescribiendo el sistema de igualdades como dos sistemas de desigualdades y transformando este sistema de desigualdades a un problema de programación no lineal, la solución (centro analítico) del sistema, se obtiene empleando cualquier técnica de programación no lineal sin restricciones.

En el presente trabajo se utiliza el método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) llamado también método Cuasi Newton, por su eficiencia ya que realiza una aproximación de la inversa del Hessiano, ahorrándose una cantidad considerable de tiempo y memoria de cómputo.

## **1.2 ESTRUCTURA DE LA TESIS**

El trabajo consta de 5 capítulos, enumerados como se indica:

1. Introducción
2. Problema de flujos de potencia
3. Método de los Centros Analíticos
4. Aplicación del Método de los Centros en Sistemas Eléctricos de Potencia
5. Conclusiones y recomendaciones

El primer capítulo presenta los antecedentes, la situación del problema abordado y el alcance del presente trabajo.

En el segundo capítulo se presenta la modelación matemática del problema de flujos de potencia. Se describen los métodos convencionales y no convencionales para la solución del problema. Se presenta el procedimiento para el cálculo de flujos de potencia y pérdidas en las líneas de transmisión. También se analiza el problema de límites de reactivos así como el mal condicionamiento de algunos sistemas.

En el tercer capítulo se presenta el método de los centros analíticos. Este se ilustra mediante un ejemplo de su aplicación a la solución de problemas de programación lineal. Se presenta en forma detallada la formulación para su aplicación a los problemas de flujos de potencia y control de voltaje de un nodo de carga remoto en SEP.

El cuarto capítulo presenta resultados de la aplicación del método de los centros analíticos ilustrando sus diferencias con respecto al método de Newton-Raphson.

Finalmente en el quinto capítulo se dan las conclusiones, aportaciones de la presente investigación y las recomendaciones para trabajos futuros.



## CAPITULO DOS

### EL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA

#### 2.1 INTRODUCCION

La solución del problema de flujos de carga es básica para los diversos análisis que se llevan a cabo en los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP).

El modelo matemático del problema considera a el SEP como una red trifásica balanceada, por lo que el SEP puede representarse únicamente por la red secuencia positiva, excluyéndose además el efecto de los transformadores defasadores a fin de preservar la simetría de la matriz  $Y_{bus}$  [7]. Las ecuaciones representativas del modelo son ecuaciones algebraicas no lineales, cuya solución se obtiene empleando métodos numéricos. Es difícil definir cuál es el mejor método de solución, ya que el comportamiento se ve fuertemente influenciado por las características del problema, por la facilidad computacional que se disponga así como el grado de detalle en el modelo matemático de los componentes del SEP. La selección final del método es el resultado del compromiso existente entre estos criterios;

por ejemplo, para redes eléctricas de alta tensión, el método Desacoplado Rápido (DR) ha mostrado ser el más eficiente y rápido, mientras que los métodos Gauss-Seidel (GS) y el Newton-Raphson (NR) han mostrado ser eficientes tanto en redes de transmisión como en distribución, con la característica de que el método de NR requiere una cantidad considerable de memoria de computo pero con la ventaja de requerir muy pocas iteraciones para alcanzar la convergencia con respecto al método GS.

## **2.2 FORMULACION MATEMATICA**

La formulación matemática del problema de flujos de potencia se basa en las siguientes consideraciones:

- El sistema eléctrico es un circuito trifásico balanceado; por lo tanto el sistema se puede representar por una red monofásica de secuencia positiva.
- Se asume que la operación del sistema es en estado estable; por lo tanto la frecuencia del sistema es la nominal de operación.
- Se toman las siguientes consideraciones de signos para las potencias:
  - i. Los signos de la potencia activa se toman de la siguiente forma: negativo para los nodos de carga y positivo para los nodos de generación.

- ii. Los signos de la potencia reactiva se toman de la siguiente forma: positivo a los VAR en atraso y negativo a los VAR en adelante.
- A cada nodo se le asignan los siguientes parámetros:
  - i. Potencia real
  - ii. Potencia reactiva
  - iii. Magnitud del voltaje
  - iv. Angulo del voltaje
- Se definen 3 tipos de nodos que son:
  - i. Nodos de carga (PQ) son todos aquellos nodos donde se especifica la potencia compleja inyectada total.
  - ii. Nodos de generación (PV) son todos aquellos nodos donde se especifica la potencia real y la magnitud del voltaje se mantiene en un valor constante por la inyección de potencia reactiva.
  - iii. Nodo compensador ( $V\theta$ ) es aquel nodo donde se especifica la magnitud y ángulo del voltaje y que sirve como referencia.
- Se deben cumplir los balances nodales de potencia [12].

Expresando las consideraciones anteriores en términos matemáticos se derivan las expresiones para la solución del problema de flujos de potencia:

$$f_i = S_i^{\text{esp}} - S_i^{\text{calc}} = 0 \quad (2.1)$$

donde:

$$S_i^{\text{esp}} = S_i^{\text{gen}} - S_i^{\text{dem}}$$

$$S_i^{\text{calc}} = S_i^{\text{perd}}$$

Para el cálculo de los desbalances de potencia se parte de la siguiente expresión

$$S_i^{\text{calc}} = V_i I_i^{*\text{calc}} = P_i^{\text{calc}} + jQ_i^{\text{calc}}$$

con 
$$I_i^{\text{calc}} = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \quad \text{y} \quad Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

por lo tanto

$$S_i^{\text{calc}} = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| \exp(j(\theta_i - \theta_j)) (G_{ij} - jB_{ij})$$

realizando operaciones

$$S_i^{\text{calc}} = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| (G_{ij} - jB_{ij}) [\text{Cos}(\theta_i - \theta_j) + j\text{Sen}(\theta_i - \theta_j)]$$

separando la ecuación anterior en parte real e imaginaria

$$P_i^{\text{calc}} = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| [G_{ij} \text{Cos}\theta_{ij} + B_{ij} \text{Sen}\theta_{ij}] \quad (2.2)$$

$$Q_i^{\text{calc}} = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| [G_{ij} \text{Sen}\theta_{ij} - B_{ij} \text{Cos}\theta_{ij}] \quad (2.3)$$

Manejando la ecuación (2.1) en términos de la potencia activa y reactiva y sustituyendo las ecuaciones (2.2) y (2.3) en ellas se tiene

$$f_i = (P_i^{\text{gen}} - P_i^{\text{dem}}) - \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| [G_{ij} \text{Cos}\theta_{ij} + B_{ij} \text{Sen}\theta_{ij}] = 0 \quad (2.4)$$

$$f_i = (Q_i^{\text{gen}} - Q_i^{\text{dem}}) - \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| [G_{ij} \text{Sen}\theta_{ij} - B_{ij} \text{Cos}\theta_{ij}] = 0 \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) representan el balance nodal de la potencia en el sistema [12], y como puede observarse, dichas ecuaciones son no lineales por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos para su solución.

### 2.3 METODOS DE SOLUCION CONVENCIONALES

Entre los métodos empleados para la solución de (2.4) y (2.5) se encuentran los métodos de Gauss-Seidel (GS), Newton-Raphson (NR), Desacoplado (D), y Desacoplado Rápido (DR). De estas técnicas se tratarán las últimas tres, ya que en el NR resulta sencillo la implementación de técnicas de optimización, mientras que el D y DR presenta grandes ventajas (memoria de cómputo, tiempo de solución, etc.) con respecto al resto de los métodos de solución.

### 2.3.1 METODO NEWTON RAPHSON

El método de NR es un método iterativo el cual aproxima un conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales, a un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales, mediante la expansión en series de Taylor y limitando los términos a su primera derivada [7]. A continuación se presenta la formulación del problema empleando esta técnica numérica.

Sean las variables desconocidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y las cantidades especificadas  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , las cuales se encuentran relacionadas por el conjunto de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Las ecuaciones son linealizadas en el punto inicial  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  usando para ello las series de Taylor

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(\mathbf{x}^0) + \Delta x_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) \Big|_0 + \Delta x_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \Big|_0 + \dots + \Delta x_n \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) \Big|_0 \approx 0 \\
 y_2 &= f_2(\mathbf{x}^0) + \Delta x_1 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \Big|_0 + \Delta x_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \Big|_0 + \dots + \Delta x_n \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right) \Big|_0 \approx 0 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 y_n &= f_n(\mathbf{x}^0) + \Delta x_1 \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right) \Big|_0 + \Delta x_2 \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right) \Big|_0 + \dots + \Delta x_n \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) \Big|_0 \approx 0
 \end{aligned}$$

donde  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  son las correcciones necesarias para obtener una siguiente solución mejorada.

Eliminando los términos de segundo orden y superiores, y expresando la formulación anterior en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} y_1 - f_1(x^0) \\ y_2 - f_2(x^0) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n - f_n(x^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial f_2 / \partial x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

escribiendo (2.7) en forma compacta

$$[y - f(\mathbf{x})] = [J] [\Delta \mathbf{x}]$$

donde

$[y - f(\mathbf{x})]$  = B diferencia entre las cantidades especificadas y las cantidades calculadas.

$[J]$  matriz de primeras derivadas parciales y se le conoce como Jacobiano

$[\Delta \mathbf{x}]$  vector de corrección de las variables (incógnitas)

Una vez solucionado el sistema (2.7), el vector de valores iniciales se actualiza de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \Delta x_1^0 \\ x_2^1 &= x_2^0 + \Delta x_2^0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n^1 &= x_n^0 + \Delta x_n^0 \end{aligned}$$

de tal manera que  $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$  representa la solución mejorada del sistema (2.6); este proceso se repite hasta que el mayor elemento (en magnitud) de B sea menor que cierta

tolerancia , es decir, el valor calculado  $f_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es aproximadamente igual al valor especificado  $y_i$ .

El procedimiento seguido para la obtención de (2.7) puede ser utilizado para la solución de (2.4) y (2.5), de tal manera que si se asume un generador como referencia (nodo compensador), el sistema de ecuaciones linealizadas resulta de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \Delta P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial P_1^{\text{calc}} / \partial \theta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial P_1^{\text{calc}} / \partial \theta_{n-1} & \partial P_1^{\text{calc}} / \partial |V_1| & \cdot & \cdot & \cdot & \partial P_1^{\text{calc}} / \partial |V_{n-1}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial P_{n-1}^{\text{calc}} / \partial \theta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial P_{n-1}^{\text{calc}} / \partial \theta_{n-1} & \partial P_{n-1}^{\text{calc}} / \partial |V_1| & \cdot & \cdot & \cdot & \partial P_{n-1}^{\text{calc}} / \partial |V_{n-1}| \\ \partial Q_1^{\text{calc}} / \partial \theta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial Q_1^{\text{calc}} / \partial \theta_{n-1} & \partial Q_1^{\text{calc}} / \partial |V_1| & \cdot & \cdot & \cdot & \partial Q_1^{\text{calc}} / \partial |V_{n-1}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial Q_{n-1}^{\text{calc}} / \partial \theta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial Q_{n-1}^{\text{calc}} / \partial \theta_{n-1} & \partial Q_{n-1}^{\text{calc}} / \partial |V_1| & \cdot & \cdot & \cdot & \partial Q_{n-1}^{\text{calc}} / \partial |V_{n-1}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \theta_{n-1} \\ \Delta |V_1| \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta |V_{n-1}| \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

El cual se puede escribir en notación matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta |\mathbf{V}| \end{pmatrix}$$

Los elementos del Jacobiano se obtienen derivando parcialmente las expresiones (2.2) y (2.3) en forma correspondiente a (2.8). Para los elementos fuera de la diagonal se diferencian las ecuaciones (2.2) y (2.3) con respecto a  $\theta_j$  de donde se obtienen las siguientes expresiones para  $i \neq$  nodo compensador:

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = |V_i| |V_j| [G_{ij} \text{Sen} \theta_{ij} - B_{ij} \text{Cos} \theta_{ij}] \quad (2.9)$$



$$M_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = -|V_i||V_j|[G_{ij}\text{Cos}\theta_{ij} + B_{ij}\text{Sen}\theta_{ij}] \quad (2.10)$$

Haciendo lo mismo ahora con respecto a  $|V_j|$  y multiplicando a ambas ecuaciones resultantes por  $|V_j|$ , se obtiene las siguientes expresiones:

$$N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial |V_j|}|V_j| = |V_i||V_j|[G_{ij}\text{Cos}\theta_{ij} + B_{ij}\text{Sen}\theta_{ij}] \quad (2.11)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial |V_j|}|V_j| = |V_i||V_j|[G_{ij}\text{Sen}\theta_{ij} - B_{ij}\text{Cos}\theta_{ij}] \quad (2.12)$$

con lo cual resulta

$$H_{ij} = L_{ij}$$

$$M_{ij} = -N_{ij}$$

Para los elementos de las diagonales de cada submatriz, estos se obtienen tomando el termino  $j = i$  de la sumatoria de las expresiones (2.2) y (2.3), y derivando posteriormente estas expresiones respecto a sus respectivas variables, obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \\ M_{ii} &= \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = P_i - |V_i|^2 G_{ii} \\ N_{ii} &= \frac{\partial P_i}{\partial |V_i|}|V_i| = P_i + |V_i|^2 G_{ii} \\ L_{ii} &= \frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|}|V_i| = Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como el método de NR es un método iterativo, el sistema linealizado (2.8) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{pmatrix}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{pmatrix}^{(i)} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta |\mathbf{V}|/|\mathbf{V}| \end{pmatrix}^{(i)} \quad (2.14)$$

el cual resuelve las corrientes  $\Delta \theta$  y  $\Delta |\mathbf{V}|/|\mathbf{V}|$ ; de modo que

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i$$

$$|\mathbf{V}|^{i+1} = |\mathbf{V}|^i + \Delta |\mathbf{V}|^i / |\mathbf{V}|$$

El criterio normal para la convergencia de un estudio de flujos es que los desbalances de potencia nodales deben ser pequeños [5], i.e.  $\Delta Q_i$  y/o  $\Delta P_i$ , dependiendo del tipo de nodo, tal como se muestra a continuación.

$$|\Delta P_i| \leq \varepsilon_1 \text{ Para todos los nodos PV y PQ}$$

$$|\Delta Q_i| \leq \varepsilon_2 \text{ Para todos los nodos PQ}$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son pequeñas constantes empíricas, y usualmente  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . El valor usado de  $\varepsilon$  en la práctica varía dependiendo del sistema y tipo de estudio. En un sistema de gran tamaño, un valor de  $\varepsilon = 1$  MW/MVAR proporciona una exactitud razonable para la mayoría de los propósitos. No obstante, para una mayor exactitud, tal como una corrida de flujos previa a un estudio de estabilidad transitoria, un valor de  $\varepsilon = 0.1$  MW/MVAR sería necesario; inclusive en casos especiales el valor de  $\varepsilon$  puede ser reducido en mayor medida. Para un estudio de flujos

aproximados, el valor de  $\epsilon$  puede ser incrementado, con posibilidad de obtener soluciones erróneas si el valor es demasiado grande.

Del método NR se concluye lo siguiente: con una buena estimación inicial el método presenta una convergencia cuadrática, independientemente del tamaño del sistema a solucionar, alcanzándose la solución entre 3 y 6 iteraciones. En este método la mayor parte del tiempo consumido para la obtención de la solución se debe a la evaluación e inversión del Jacobiano, por lo que es posible lograr un ahorro en el tiempo (número de iteraciones) usando el Jacobiano en forma constante o actualizándolo cada cierto número de iteraciones. Para sistemas de gran tamaño es posible emplear técnicas de dispersidad y ordenamiento, incrementando la eficiencia del método. El método permite además la aplicación de técnicas de optimización de tal manera que es posible controlar su convergencia.

### **2.3.2 METODO DESACOPLADO**

Este método D es una simplificación del NR [7], que se basa en la propiedad que presentan los SEP al estar operando en estado estable y que consiste básicamente en lo siguiente:

- a) Interdependencia entre los flujos de potencia real y los ángulos de fase ( $P-\theta$ ).
- b) Interdependencia entre los flujos de potencia reactiva y las magnitudes de los voltajes ( $Q-|V|$ ).

De lo anterior se deduce que la relación que guardan en el Jacobiano los flujos de potencia real con la magnitud del voltaje, y los flujos de potencia reactiva con los ángulos de fase es relativamente pequeña.

Eliminando por tanto las submatrices M y N del sistema (2.13) resulta las siguientes ecuaciones lineales.

$$[\Delta \mathbf{P}] = [\mathbf{H}] [\Delta \boldsymbol{\theta}] \quad (2.15)$$

$$[\Delta \mathbf{Q}] = [\mathbf{L}] [\Delta |\mathbf{V}|/|\mathbf{V}|] \quad (2.16)$$

donde para  $p \neq q$

$$H_{pq} = L_{pq} = |V_p| |V_q| (G_{pq} \text{Sen} \theta_{pq} - B_{pq} \text{Cos} \theta_{pq}) \quad (2.16a)$$

y para  $p = q$ ,

$$H_{pp} = -Q_p - |V_p|^2 B_{pp} \quad (2.16b)$$

$$L_{pp} = Q_p - |V_p|^2 B_{pp}$$

Hay dos formas posibles para solucionar (2.15) y (2.16)

- a) Resolver para  $\Delta \theta$  y  $\Delta |\mathbf{V}|/|\mathbf{V}|$  en forma simultánea.
- b) Resolver primeramente para  $\Delta \theta$  y usar el valor actualizado de  $\theta$  en (2.15) para resolver  $\Delta |\mathbf{V}|/|\mathbf{V}|$ .

Al no considerar las submatrices [M] y [L], el método D presenta una reducción en la cantidad de operaciones y por tanto ahorro de memoria de la computadora. Sin embargo se pierde la característica de convergencia cuadrática debido al desacoplamiento de las submatrices [N] y [M] del Jacobiano y el número de iteraciones aumenta.

### 2.3.3 METODO DESACOPLADO RAPIDO

El método de NR en su versión desacoplada puede aún simplificarse [7], tomándose algunas otras consideraciones físicas sin pérdida de mucha exactitud en la solución. Entre las consideraciones a tomar están las siguientes: En líneas de transmisión de alto voltaje, la relación reactancia / resistencia es grande, lo cual indica que la conductancia es mucho menor que la susceptancia. Además, la magnitud de los voltajes nodales es aproximadamente igual al nominal en todos los nodos y la diferencia angular en una línea de transmisión, usualmente es pequeña.

Expresando las consideraciones anteriores matemáticamente se tiene

$$\cos \theta_{pq} \approx 1; \quad G_{pq} \sin \theta_{pq} \ll B_{pq}; \quad Q_p \ll B_{pp} |V_p|^2$$

con estas suposiciones las expresiones (2.16a), (2.16b) resultan

para  $p \neq q$

$$H_{pq} = L_{pq} = -|V_p||V_q|B_{pq}$$

para  $p=q$

$$H_{pp} = L_{pp} = -B_{pp}|V_p|^2$$

Las matrices H y L son matrices cuadradas con dimensión  $(n_1+n_2)$  y  $n_1$  respectivamente, donde  $n_1$  es el número de nodos PQ y  $n_2$  es el número de nodos PV del SEP.

De tal manera, las expresiones (2.15) y (2.16) quedan de la siguiente forma:

$$[\Delta \mathbf{P}] = [|\mathbf{V}_p|][|\mathbf{V}_q|][\mathbf{B}'_{pq}][\Delta \boldsymbol{\theta}] \quad (2.17)$$

$$[\Delta \mathbf{Q}] = [|\mathbf{V}_p|][|\mathbf{V}_q|][\mathbf{B}''_{pq}][\Delta |\mathbf{V}|/|\mathbf{V}|] \quad (2.18)$$

donde  $[B'_{pq}]$  y  $[B''_{pq}]$  son elementos de la matriz  $[-B]$ . El algoritmo final se completa por las siguientes consideraciones:

- a) Se omiten de  $[B']$  aquellos elementos del SEP que afectan predominantemente los flujos de potencia reactiva, como por ejemplo reactancias shunt y transformadores con tap fuera del nominal.
- b) Se omiten de  $[B'']$  los elementos del SEP que afectan los flujos de potencia activa, como los transformadores defasadores.
- c) Dividiendo de (2.17) y (2.18) por  $|V_p|$  y haciendo  $|V_q| = 1$  p. u. en las ecuaciones.
- d) Despreciando la resistencia serie en el cálculo de los elementos de  $[B']$ .

con estas modificaciones el algoritmo final queda representado por (2.19) y (2.20)

$$[\Delta P/|V|] = [B'][\Delta \theta] \quad (2.19)$$

$$[\Delta Q/|V|] = [B''][\Delta |V|] \quad (2.20)$$

tanto  $[B']$  como  $[B'']$  son reales y dispersas y tiene las mismas estructuras de las matrices  $[H]$  y  $[L]$  respectivamente; al ser constantes, solo es necesario evaluarlas una vez al principio del estudio. Además el no incluir los transformadores defasadores permite que  $[B']$  y  $[B'']$  sean simétricas.

## 2.4 METODOS DE SOLUCION NO CONVENCIONALES

En un SEP real existen límites en las variables nodales tales como magnitudes de voltajes y potencias reactivas de generadores, que en un estudio de flujos normal deben comprobarse después de cada iteración para decidir si se incorporan o no acciones correctivas para la siguiente iteración. Para solucionar lo anterior se plantea el problema de flujos como un problema de programación lineal con restricciones de voltaje en los nodos de carga y de reactivos en los nodos de generación a fin de dar solución al problema real; con este planteamiento es posible aplicar diferentes técnicas numéricas para su solución. En esta sección se tratarán como técnicas numéricas el método simplex acotado y las técnicas de redes neuronales.

### 2.4.1 METODO SIMPLEX ACOTADO

La solución del sistema (2.8) se puede encontrar resolviendo un problema de programación lineal [9] si se escribe de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{j=1}^n X_{aj} \tag{2.21}$$

Sujeto a:

$$J\Delta X + X_a = b$$

$$\Delta X \geq 0$$

$$X_a \geq 0$$

donde  $X_a$  representa un vector de variables artificiales que permiten transformar el sistema de desigualdades a uno de igualdades. La solución de (2.21) corresponde la solución de (2.8).

El sistema (2.21) puede expresarse de la siguiente forma

$$Ax = b \quad (2.22)$$

donde la matriz A puede representarse mediante  $2(n-1)$  vectores columna linealmente independientes, a los cuales se les llamara *base* o *matriz básica*  $B=[a_{B1}a_{B2}\dots]$  y  $2(n-1)$  vectores columna linealmente dependientes, a los cuales se les llamara *matriz no básica* N; por lo tanto  $A=[B \ N]$

El método Simplex [13] parte de una solución básica factible, y procede a determinar otras soluciones factibles hasta encontrar la óptima. Con objeto de no tener que calcular todas las soluciones básicas factibles, es indispensable disponer de un criterio que permita definir cuál es el vector  $X_j$  que en cada iteración debe pasar a formar parte de la base y cual vector debe abandonarla.

Para seleccionar el vector que debe entrar a la base se selecciona aquel vector  $X_j$  que suministre con su entrada, el mayor decremento para la función objetivo. Así mismo para identificar el vector que deje la base, se selecciona aquel que implique el cociente mínimo con objeto de no alterar el signo de las que ya se encuentran en la base, y lograr que la nueva solución básica sea también factible.

El método establece como condición que las variables sean solo positivas, por lo tanto es necesario sustituir las variables  $\Delta X$  como la diferencia de dos variables positivas; es decir

$$\Delta X = \Delta X^+ - \Delta X^-$$

donde:

$\Delta X^+$  representa incrementos positivos de las variables

$\Delta X^-$  representa incrementos negativos de las variables



y considerar además límites superiores en las variables  $(\Delta X^+)^u$  y  $(\Delta X^-)^u$ .

El método simplex llega a un estado de operación óptima factible cuando no se encuentra ninguna variable artificial  $X_{aj}$  en la base.

El sistema (2.21) modificado para la solución del estudio de flujos se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= \sum_{j=1}^n X_{aj} \\ \text{Sujeto a:} & \\ & J\Delta X^+ - J\Delta X^- + X_a = b \\ & 0 \leq \Delta X^+ \leq (\Delta X^+)^u \\ & 0 \leq (\Delta X^-)^u \\ & Q_{Gmin} \leq Q_G \leq Q_{Gmax} \\ & 0 \leq X_a \end{aligned} \tag{2.23}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} A &= [J \quad -J \quad I \quad \beta] \\ \mathbf{x} &= [\Delta X^+ \quad \Delta X^- \quad X_a \quad Q_{Gj}]^t \\ \mathbf{b} &= [\Delta P \quad \Delta Q]^t \end{aligned}$$

donde  $\beta = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^t$  es la posición del elemento que corresponde al número de nodo generador con restricciones de reactivos y  $Q_{Gj}$  representa los reactivos del nodo  $j$ ; por lo tanto las restricciones de igualdad (balances de potencia linealizadas) del sistema (2.8) puede representarse de la forma (2.22), por lo que el problema de minimización se formula ahora como la solución del sistema de ecuaciones

$$BX_B + NX_N = b \quad (2.24)$$

$$Z - C_B^t X_B - C_N^t X_N = 0 \quad (2.25)$$

donde  $C_B$  y  $C_N$  representan los “costos” asociados a las variables básicas  $X_B$  y  $X_N$  respectivamente.

Resolviendo para  $X_B$  de (2.24)

$$X_B = B^{-1} b - B^{-1} NX_N \quad (2.26)$$

sustituyendo (2.26) en (2.25)

$$Z = C_B^t B^{-1} b - (C_B^t B^{-1} N - C_N^t) X_N \quad (2.27)$$

La solución óptima del simplex es un estado de operación factible del sistema de potencia cuando no se encuentra ninguna variable artificial en la base [15]. Cuando la solución óptima no es una operación factible del SEP, los costos reducidos, así como el estado de las variables no básicas proporcionan información respecto a los pares de variables  $(Q_G, V)$  y  $(P_G, \theta)$  en cada nodo de generación.

El proceso iterativo termina con la solución final del simplex cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- 1) Existen costos reducidos positivos y las variables correspondientes se encuentran en sus cotas superiores.

- 2) Existen costos reducidos negativos y sus variables correspondientes se encuentran en cotas inferiores.

A continuación se presenta el algoritmo para la solución del sistema (2.23) mediante el método simplex acotado.

**PASO 1.** Formar el sistema  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  como (2.23)

Si el sistema no involucra límites de reactivos tanto el vector  $\beta$  en la matriz  $A$  como  $Q_{Gj}$  en el vector  $\mathbf{x}$  no se toman en cuenta.

**PASO 2** Se resuelve el sistema formado en el PASO 1 con ayuda de tableaus, tomando como base las variables artificiales.

		Cota	0	.	.	.	0	
		C						
$C_B$	Base	b	$x_1$	.	.	.	$x_n$	r
	$x_{n-k}$	$b_1$	$A_{11}$	.	.	.	$A_{1n}$	
	.	.	.	.			.	
	.	.	.		.		.	
	.	.	.			.	.	
	$x_{n-1}$	$b_n$	$A_{n1}$	.	.	.	$A_{nn}$	
	$Z_j - C_j$							

El primer renglón del tableau representa las cotas a las que van a estar sujetas las variables, el segundo renglón representa los costos asociados a las variables y el último renglón del tableau representa los costos reducidos; por otra parte la primera columna representa los costos asociados a las variables básicas y la última columna del tableau representa la prueba del cociente.

**PASO 3.** Para la obtención de los costos reducidos  $Z_j - C_j$  se prosigue de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(Z_j - C_j)_{b_i} &= \sum_{i=1}^n (C_{B_i} \cdot b_i) \\
(Z_j - C_j)_{A_{i1}} &= \sum_{i=1}^n [(C_{B_i} \cdot A_{i1}) - C_1] \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
(Z_j - C_j)_{A_{in}} &= \sum_{i=1}^n [(C_{B_i} \cdot A_{in}) - C_n]
\end{aligned}$$

Y la prueba de la razón (r) se obtiene de la siguiente manera:

$$r_i = \frac{b_i}{A_{i\Omega}}$$

donde  $A_{i\Omega}$  representa la columna de la matriz A con mayor costo reducido

**PASO 4.** La variable con un menor  $r_i$  saldrá de la base y entrará la variable que resulte con un mayor costo reducido.

La intersección del renglón de la variable que sale de la base con la columna de la variable que entrará, se toma como pivote.

**PASO 5.** Una vez seleccionado el pivote se realizan las operaciones de tal forma que en la columna queden ceros excepto en la posición donde se encuentra el pivote, que tendrá el valor de uno. Las operaciones para actualizar el tableau se realizan a partir de la siguiente expresión.

$$A_{ij}^{(nuevo)} = A_{ij}^{(viejo)} - \frac{A_{ik}^{(viejo)} A_{kj}^{(viejo)}}{A_{kk}^{(viejo)}}$$

$A_{ij}$  valor a modificar

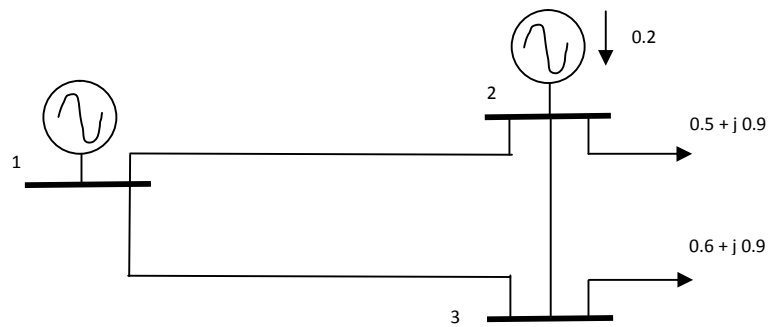
$A_{kk}$  valor del pivote

$A_{ik}$  valor que se encuentra en la intersección de la columna del valor a modificar y el renglón del pivote

Las variables que se encuentran en la nueva base modifican el valor de los costos de estas variables ( $C_B$ ).

**PASO 6.** Si  $(Z_j - C_j) \leq 0$  se cumple la condición de optimalidad y se termina con el proceso del simplex, de lo contrario se continúa en el PASO 3

En la figura 2.1 se presenta un sistema de prueba en el cual se mostrara la aplicación del método simplex para la solución de flujos de potencia. La tabla 2.1 presenta la información pertinente a las impedancias de las líneas.



**Fig. 2.1** Sistema de prueba de 3 nodos

**Tabla 2.1** Datos del sistema de la figura 2.1

Nodos	Z
1 - 2	$0.08 + j 0.3$
1 - 3	$0.02 + j 0.2$
2 - 3	$0.06 + j 0.1$

Tomando el nodo uno como el nodo compensador con un voltaje igual a  $1.05 \angle 0$  rad el sistema de ecuaciones lineales resultante es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 10.6205 & -7.3529 & -4.4117 \\ -7.3529 & 12.5509 & 4.8820 \\ 4.4117 & -4.9315 & 12.0559 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2585 \\ -0.05752 \\ -0.6524 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Para aplicar el método simplex para la solución de (2.21) y por tanto de (2.28) es necesario formar el sistema (2.22) a partir de (2.28); sin embargo es necesario que el vector de requerimientos (lado derecho) sea todo positivo por lo que existe la necesidad de multiplicar (2.28) por -1. El sistema  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  resultante se muestra a continuación

$$\begin{pmatrix} -10.6205 & 7.3529 & 4.4117 & 10.6205 & -7.3529 & -4.4117 & 1 & 0 & 0 \\ 7.3529 & -12.5509 & -4.8820 & -7.3529 & 12.5509 & 4.8820 & 0 & 1 & 0 \\ -4.4117 & 4.9315 & -12.0559 & 4.4117 & -4.9315 & 12.0559 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2585 \\ 0.5752 \\ 0.6524 \end{pmatrix} \quad (2.28a)$$

El proceso se inicia tomando como base inicial las variables artificiales y asignando la cota inferior (cero) al resto de las variables de decisión que constituirán las variables no básicas. Como la solución final establece para la condición de factibilidad el hecho de que no exista ninguna variable artificial en la base, cada proceso iterativo implicará el número de pivoteos necesarios para eliminar las variables artificiales de la base

Tableau inicial primera iteración

		Cota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		C	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
$C_B$	Base	b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$r$
1	$x_7$	0.2585	-10.62	7.352	4.411	10.62	-7.35	-4.41	1	0	0	-
1	$x_8$	0.5752	7.352	-12.55	-4.88	-7.35	12.55	4.882	0	1	0	0.117
1	$x_9$	0.6524	-4.417	4.931	-12.05	4.411	-4.93	<b>12.05</b>	0	0	1	<b>0.054</b>
	$Z_j - C_j$	1.4861	-7.679	-0.266	-12.52	7.679	0.266	<b>12.52</b>	1	1	1	

El proceso de eliminación de la primera variable artificial de la base se inicia con la selección del costo reducido ( $Z_j - C_j$ ) de mayor valor. Del Tableau anterior se observa que el mayor costo reducido es relacionado con la variable  $x_6$  que entrará a la base mientras que la variable a salir de la base se determina con el menor valor del cociente, que en este caso es la variable  $X_9$ .

Con el valor valor del pivote (intersección de la columna de  $X_6$  y el renglón de  $X_9$ ) se procede a formar el nuevo tableau realizando operaciones de pivoteo mediante expresiones del **PASO 5**.

Repitiendo las operaciones hasta que las variables artificiales salgan de la base se finaliza con el proceso del simplex y se procede a actualizar variables nodales y se prueba convergencia del problema de flujos, si no converge se determina el nuevo sistema (2.28) y se procede nuevamente con el simplex, si converge se actualizan variables nodales y se llega a la solución del problema de flujos de potencia.

La solución final se obtuvo en tres iteraciones y se muestran sus valores finales

$$V_1 = 1.0500 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1.0000 \angle -0.1140 \text{ rad}$$

$$V_3 = 0.9440 \angle -0.0938 \text{ rad}$$

## 2.4.2 METODO DE REDES NEURONALES

Utilizando técnicas de redes neuronales es posible dar solución a problemas de programación lineal, como el que se plantea en (2.21). A este tipo de redes neuronales se les conoce redes neuronales tipo gradiente con retroalimentación [16], que son una generalización de las redes de Hopfield en la cual una función de energía (función de Lyapunov) decrece continuamente con el tiempo. Este tipo de redes son ejemplos de sistemas dinámicos no lineales y asintóticamente estables, es decir, convergen a un punto mínimo estable.

La idea de esta técnica para la solución de problemas de optimización es que la función objetivo y las restricciones se mapean a una red de integradores de lazo cerrado, de tal manera que cuando ocurre una violación, la magnitud y dirección de la violación son retroalimentadas para el ajuste de los estados que representan las variables del problema de optimización de las neuronas. De lo anterior se deduce que el problema es dinámico y por tanto es necesario la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales (con coeficientes constantes) para la actualización de la función objetivo.

Se define la función  $g_j^+(\mathbf{x})$  como la magnitud de la violación de la  $i$ -ésima restricción y es dada por la siguiente expresión



$$g_j^+(\mathbf{x}) = \max\{0, g_i(\mathbf{x})\} \quad (2.29)$$

siendo  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}-b$

*Teorema de la función de penalidad:* Sea P el problema de programación lineal para f y  $g_i$  funciones convexas donde  $1 \leq i \leq n$  y sea  $\{S_k\}_1^\infty$  un parámetro no negativo e incremental que tiende a infinito, se define la función

$$L(S, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + S/2 \sum_{i=1}^n (g_i^+(\mathbf{x}))^2 \quad (2.29b)$$

donde  $x_k$  el mínimo de  $L(S_k, \mathbf{x})$ . Entonces cualquier punto límite de la secuencia  $\{x_k\}_1^\infty$  es una solución óptima de P y si  $x_k \rightarrow \bar{x}$  y  $\bar{x}$  es un punto regular, entonces  $S_k g_i^+(x_k) \rightarrow \lambda_i$ , el cual representa el multiplicador de Lagrange asociado con  $g_i$ .

Para una red neuronal la expresión (2.29b) se denomina función de energía o función de Liapunov y se reescribe de la siguiente manera

$$E(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + S/2 \sum_{j=1}^m (g_j^+(\mathbf{x}))^2 \quad (2.30)$$

donde:

$f(\mathbf{x})$  es la función igual a  $C^t \mathbf{x}$

S es un parámetro de penalización

$g_j^+(\mathbf{x})$  es la magnitud de la violación de la i-ésima restricción

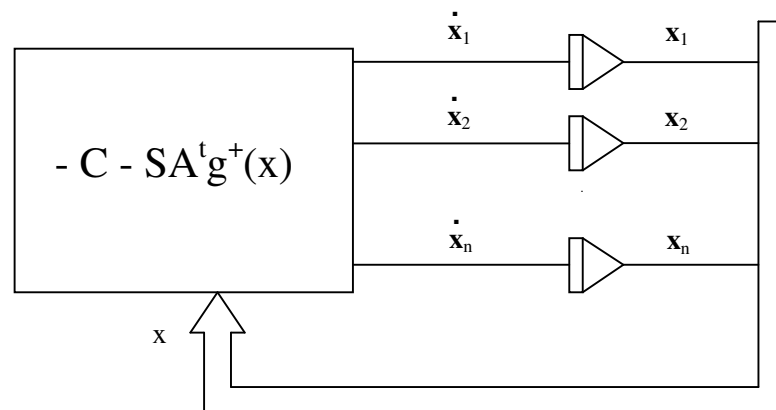
Aplicando la técnica del descenso acelerado para la minimización de la función de energía  $E(\mathbf{x})$ , da como resultado la dinámica del sistema gradiente

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{E}$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{A}^t \mathbf{g}^+(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

el cual implica que el equilibrio del sistema gradiente ( $dx / dt = 0$ ) coincide con un punto de inflexión de la función de energía  $E(\mathbf{x})$ . Puesto que  $\dot{\mathbf{x}}$  y  $\nabla \mathbf{E}$  son vectores opuestos, la evaluación en el tiempo de  $\mathbf{x}$  resulta en una reducción de  $\mathbf{E}$  conforme  $t$  transcurre; por lo tanto, el proceso de búsqueda del equilibrio de sistema gradiente de la función de energía  $\mathbf{E}$ , produce también la minimización de la función objetivo.



**Fig. 2.2** *Dinámica del sistema gradiente*

La Figura 2.2 muestra un diagrama conceptual de bloques del método de minimización de descenso acelerado o la dinámica del sistema gradiente de la función de energía  $E$ . A partir de un punto inicial  $\mathbf{x}$  el bloque de la izquierda produce  $-\partial E / \partial X_i$ ,  $i= 1,2,\dots, n$  los cuales alimentan a un arreglo de integradores (uno para cada variable) cuya salida se alimenta al primer bloque.

La evolución en el tiempo de la figura 2.2 se describe por la ecuación (2.31), por consiguiente el criterio de convergencia será el punto de equilibrio  $\dot{\mathbf{x}}=0$  o en el punto óptimo en la minimización de  $E$ ; los valores óptimos de  $\mathbf{X}$  se sustituyen en la expresión (2.29) para determinar el valor de la función. Como se trata de un método iterativo, el criterio de convergencia que se emplea para el problema linealizado es el siguiente:

*Si el valor de la función de energía en la iteración  $k$  es igual al de la iteración  $k-1$  el proceso iterativo termina con  $\mathbf{x}_k$  como vector solución; en caso contrario, se actualiza el vector de variables  $\mathbf{X}$  y se resuelve el nuevo sistema (2.22) y así sucesivamente hasta que se llega a la convergencia del proceso iterativo.*

A continuación se presenta el algoritmo para la solución del sistema (2.21) mediante redes de neuronas artificiales.

**PASO 1** Formar el sistema  $D\mathbf{x}=\mathbf{u}$  de la siguiente manera:

$$D= J I$$

donde:  $J$  es la matriz Jacobiana de  $(n \times n)$

$I$  es la matriz identidad  $(n \times n)$

$x$  es el vector de incógnitas  $(n \times 1)$ , para la primera iteración ( $k=1$ ) sus elementos se inicializan con valores entre cero y uno

$u$  es el vector  $(n \times 1)$  cuyos elementos representan los desbalances de potencia real y potencia reactiva.

**PASO 2** Se forma el vector  $C$  de  $(1 \times n)$  cuyos elementos son los coeficientes de la función objetivo. Se inicializa el contador de iteraciones con  $k=1$  y se selecciona el parámetro de penalización  $S$  (se recomienda el valor de 1)

**PASO 3** Se determina el vector de restricciones  $g(x) = (Dx - u)$

**PASO 4** Se determina la magnitud de la  $i$ -ésima restricción violada para  $i= 1,2,\dots, n$

**PASO 5** Se forma el vector  $qq= g(i)$  para  $i= 1,2,\dots,n$

**PASO 6** Se calcula la dinámica del sistema  $\dot{x}$

$$\dot{x} = -C - SD^t qq$$

**PASO 7** Se resuelve el sistema obtenido en el paso 6 utilizando una técnica de solución numérica de ecuaciones diferenciales

**PASO 8** Se actualizan los elementos de  $x$

**PASO 9** Se calcula el cuadrado de la suma de todas las restricciones violadas

$$Z = \sum_{i=1}^n (qq(i))^2$$

**PASO 10** Se calcula la función de energía  $E=F(x)+S/2 Z$

**PASO 11** Si  $\dot{x} = 0$  el proceso iterativo termina con  $x$  como vector solución y se va al paso 12. En caso contrario hacer  $k=k+1$  y regresar a el paso 3

**Nota:** El vector  $\mathbf{x}$  obtenido representa el vector de incógnitas del sistema (2.14)

En este momento termina el proceso iterativo concerniente a la red neuronal y a partir de este momento el proceso de solución del proceso de flujos es exactamente igual al método simplex.

**PASO 12** Se actualiza el vector de incógnitas del sistema (2.14) y se hace  $k = k + 1$

**PASO 13** Se calculan los desajustes de potencia real y reactiva

**PASO 14** Se prueba convergencia de la solución: Si  $\max |\Delta E|^k < \text{Tolerancia}$  el proceso iterativo termina, de lo contrario se determinan los elementos de la matriz Jacobiana, con  $k = k + 1$  y se regresa al paso 1.

Se utiliza el sistema de pruebas de la figura 2.1 para mostrar la aplicación de la técnica de redes neuronales para la solución de flujos de potencia [10]. La Tabla 2.1 presenta la información pertinente a las impedancias de las líneas.

El aplicar la técnica de redes neuronales para la solución de (2.21) y por lo tanto de (2.28) es necesario formar el sistema  $D \mathbf{x} = \mathbf{u}$  a partir de (2.28). El sistema resultante se muestra a continuación.

$$\begin{pmatrix} 10.6205 & -7.3529 & -4.4117 & 1 & 0 & 0 \\ -7.3529 & 12.5509 & 4.8820 & 0 & 1 & 0 \\ 4.4117 & -4.9315 & 12.0559 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2585 \\ -0.5752 \\ -0.6524 \end{pmatrix}$$

de acuerdo al algoritmo, se inicializa con un vector  $\mathbf{x}$  como punto de arranque con valores entre uno y cero

$$\mathbf{x} = [0.02 \ 0.01 \ 0.03 \ 0.05 \ 0.04 \ 0.02]^t$$

determinando por tanto el vector de restricciones  $g(\mathbf{x})$

$$g(\mathbf{x}) = [0.2350 \ 0.7401 \ 1.0730]^t$$

la dinámica del sistema es por tanto

$$\dot{\mathbf{x}} = [-18.8791 \ -23.6943 \ -156.1227 \ -3.3503 \ -8.4011 \ -11.7300]^t$$

resolviendo el sistema de ecuaciones mediante el método de integración de Simpson [28] y siguiendo los pasos del algoritmo hasta que se cumpla con el criterio de convergencia, se llega a la siguiente solución en tres iteraciones

$$V_1 = 1.0500 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1.0000 \angle -0.1140 \text{ rad}$$

$$V_3 = 0.9440 \angle -0.0938 \text{ rad}$$

### 2.4.3 METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS

El método de los centros es un método de optimización que transforma un problema de programación lineal con restricciones lineales a uno no lineal sin restricciones. Su aplicación al problema de flujos de potencia parte del sistema de ecuaciones linealizadas, describiéndose éstas como dos sistemas de desigualdades lineales para la formación de una región convexa y determinar por tanto su centro analítico. Este método presenta la ventaja de incluir otro tipo de desigualdades resultantes de la operación de un SEP, como por ejemplo máximas caídas de voltaje, desplazamiento angular, etc. Este método se presenta en detalle en el capítulo 3.

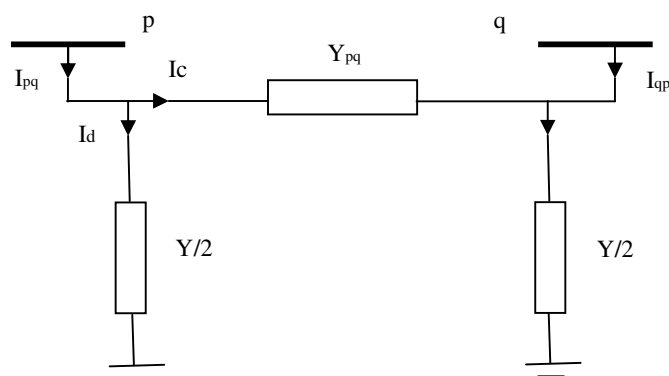
## 2.5 FLUJOS Y PÉRDIDAS EN LAS LINEAS; DETERMINACION DE POTENCIA EN EL NODO COMPENSADOR

Una vez que se han determinado los voltajes nodales en todos los nodos se procede a calcular los flujos de potencia y las pérdidas en las líneas de transmisión así como la potencia suministrada por el compensador [7]. Para esto, se parte del modelo  $\pi$  de la línea de transmisión que se muestra en la Figura 2.3, donde la corriente en la línea  $I_{pq}$  (midiendo en el nodo p y considerando positiva la dirección p-q) se expresa como

$$I_{pq} = I_c + I_d = (V_p - V_q) Y_{pq} + V_p (Y / 2) \quad (2.32)$$

donde

$Y_{pq}$  es la admitancia de la línea p-q  
 $Y/2$  es la admitancia en derivación  
 $V_p (Y / 2)$  es la contribución de corriente en el nodo p debido a la admitancia en derivación de la línea



**Fig. 2.3** Modelo PI de la línea de transmisión

La potencia  $S_{pq}$  en la línea está dada por

$$S_{pq} = V_p I_{pq}^* \quad (2.33)$$

sustituyendo la ecuación (2.32) en la ecuación (2.33)

$$S_{pq} = V_p (V_p^* - V_q^*) Y_{pq}^* + |V_p|^2 (Y/2)^* \quad (2.34)$$

de igual forma para la potencia  $S_{qp}$  mediante el nodo q

$$S_{qp} = V_q (V_q^* - V_p^*) Y_{pq}^* + |V_q|^2 (Y/2)^* \quad (2.35)$$

por lo tanto las pérdidas de potencia en la línea p-q se obtienen restando las ecuaciones (2.34) y (2.35) y la potencia en el nodo compensador se obtiene sumando las flujos en las líneas que se encuentran conectados a él.

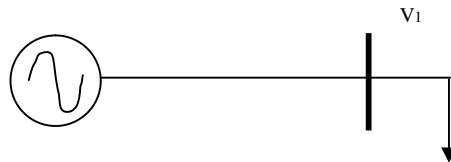
## 2.6 ANALISIS DE LÍMITES DE REACTIVOS

En un SEP los nodos de voltaje controlado (nodos de generación) actúan como compensadores de potencia reactiva, los cuales proporcionarían los reactivos necesarios de acuerdo a las variaciones de carga de tal forma que se mantenga el voltaje especificado [17].

Basándose en la figura 2.4 suponiendo que el sistema está operando normalmente, si la carga aumenta entonces el voltaje  $V_1$  disminuye, por lo tanto el generador tiene que suministrar mayor cantidad de reactivos de tal forma que el voltaje  $V_1$  no se abata; sin embargo el nodo de generación no es fuente inagotable de potencia reactiva (ni de activa) si no



que tiene sus límites (min – max). Un caso que debe evitarse es cuando la carga aumenta a un valor tal que el nodo de generación ya no tiene la capacidad de suministrar los reactivos necesarios para mantener el voltaje  $V_1$  a un valor especificado, es entonces cuando se dice que se pierde el control del voltaje.



**Fig. 2.4** *Sistema eléctrico elemental*

Cuando se está solucionando un problema de flujos mediante técnicas convencionales, un nodo de generación se convierte en un nodo de carga, con el valor de potencia reactiva  $Q$  en el límite de reactivos violado hasta que se recupere el control de voltaje con la inyección de reactivos dentro de los límites del generador de ese nodo.

Los límites de la potencia reactiva están sujetos a los límites impuestos por la curva de capacidad de los generadores, donde resaltan las siguientes consideraciones [18]:

- a) El límite máximo de potencia reactiva  $Q_{\max}$  es determinado por las pérdidas en los devanados del estator y rotor, debido al efecto Joule.
- b) El límite mínimo para la potencia reactiva  $Q_{\min}$  es determinado por el margen de estabilidad del sistema.

## 2.7 ANALISIS DE PROBLEMAS MAL CONDICIONADOS

Las restricciones de operación actuales han originado que el proceso de cálculo diverja u oscile, al resolver ciertos sistemas de potencia empleando algoritmos convencionales; a estos sistemas se les denomina como sistemas de potencia mal condicionados.

Para sistemas de potencia mal condicionados no es posible asegurar sí para las condiciones de operación dadas pueden conducir a una solución factible usando cualquier técnica o si el proceso de cálculo falla en converger aunque exista la solución [19].

Algunas causas de la inestabilidad y divergencia en la solución de flujos de potencia son:

- a) Usos de factores de aceleración.
- b) Existencia de líneas con reactancia negativa.
- c) Mala selección del nodo compensador
- d) Relación  $x/r$  baja en alguna(s) línea(s).
- e) Cierta tipo de sistemas radiales
- f) Inclusión de límites en la potencia reactiva

Los sistemas de potencia que tienen las características antes mencionadas son descritos por un sistema de ecuaciones algebraicas mal condicionadas cuyas soluciones son muy sensibles a pequeños cambios en los parámetros, es decir, un pequeño cambio en un parámetro produce un gran cambio en la solución [20].

Un proceso iterativo es definido como mal condicionado si los valores a ser calculados son muy sensibles a pequeñas variaciones en los datos [21]. Una matriz puede tener eigenvalores muy sensibles a pequeñas variaciones en sus elementos mientras otros son

comparativamente insensibles. Por tanto, es conveniente tener algún factor que defina la condición de una matriz (por ejemplo el Jacobiano). Este factor es llamado *número condición* y es definido como:

$$k = |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}| \quad (2.36)$$

donde  $|\lambda_{\max}|$  y  $|\lambda_{\min}|$  son los valores absolutos máximo y mínimo respectivamente de los eigenvalores de la matriz Jacobiana.

Con respecto a la expresión (2.36), idealmente el valor de k debe ser 1 para sistemas bien condicionados. Un valor muy grande de k indica que el sistema está mal condicionado.

Por el contrario, si k excede de  $(10)^a$ , donde a es una constante de precisión de la computadora digital usada, entonces no es posible obtener una solución [20].

### METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS

#### 3.1 INTRODUCCION

El método Simplex aun se considera el método más adecuado para la solución de problemas de programación lineal; sin embargo, desde su desarrollo en 1947 por George B. Dantzig, se ha investigado técnicas de solución con mayor eficiencia de cómputo.

Las técnicas de solución producto de las investigaciones, se derivan en dos categorías:

- Métodos derivados del algoritmo del simplex [22]
- Métodos de puntos interiores [23]

En el presente trabajo se estudia el Método de los Centros Analíticos que es un caso particular de los métodos de puntos interiores, donde la ventaja al utilizar esta metodología radica en la sencillez de la solución en los problemas de optimización sin restricciones; sin embargo, se tiene la desventaja en el aumento de la cantidad de operaciones requeridas para la obtención de la solución.

### 3.2 CONCEPTO DE CENTRO ANALITICO DE UN CONJUNTO DE DESIGUALDADES LINEALES

En un espacio n-dimensional, para la región G (región convexa) definida como la intersección de m semiespacios lineales abiertos,

$$G = \{x | g_i = a_i^t x < b_i; i = 1, \dots, m\} \quad (3.1)$$

su centro analítico  $x_c^*$  se define de la siguiente manera [24]

$$x_c^* = \arg \min_x [\Phi(x)] \quad (3.2)$$

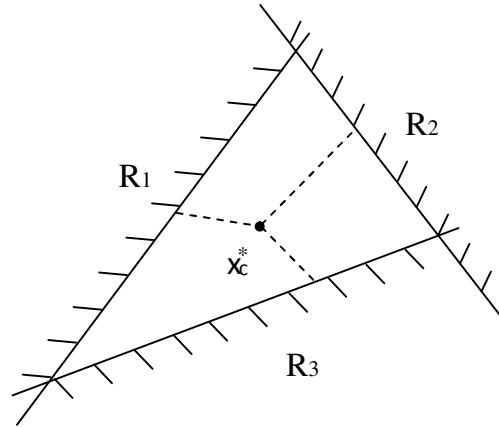
donde  $\Phi(x)$  es una función barrera para la región G, la cual garantiza puntos interiores de la región G, y se define de la siguiente manera.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \text{Log} \prod_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i^t x} & \text{si } x \text{ es factible} \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3.3)$$

por lo tanto, el problema a solucionar para la determinación del centro analítico de G es el siguiente

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \left[ \Phi(x) = \text{Log} \prod_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i^t x} \right] \quad (3.4a)$$

La interpretación geométrica es como se muestra en la Figura 3.1



R1, R2, R3: Restricciones

**Fig. 3.1** Centro analítico de desigualdades lineales

Si se representa por  $d_i$  la distancia del punto  $x$  al plano  $b_i - a_i^t x = 0$ , entonces

$$d_i = \frac{|b_i - a_i^t x|}{\|a_i\|_2}$$

por lo tanto se puede representar el plano  $b_i - a_i^t x = 0$  en función de la distancia  $d_i$  de la forma siguiente

$$(b_i - a_i^t x) = \|a_i\|_2 \cdot d_i$$

Sustituyendo esta expresión en (3.4a) y reorganizando se tiene que el centro analítico  $x_c^*$  se obtiene al resolver el siguiente problema

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \left[ \Phi(x) = \left( -\sum_{i=1}^m \text{Log} \|a_i\|_2 \right) - \sum_{i=1}^m \text{Log}(d_i) \right] \quad (3.4b)$$

de tal forma que  $x_c^*$  maximiza el producto de las distancias  $d_i$  a los planos de restricción  $g_i = b_i - a_i^T x$

De la expresión (3.4b) tenemos que

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}[\Phi(x)] = \underset{x}{\text{Minimizar}} \left[ - \sum_{i=1}^m \text{Log}(d_i) \right]$$

esto es;

$$\underset{x}{\text{Minimizar}}[\Phi(x)] = \underset{x}{\text{Minimizar}} \left[ - \text{Log} \prod_{i=1}^m (\text{distancia de } x, \text{ al } i - \text{ésimo plano de restricción}) \right]$$

como se muestra gráficamente en la figura 3.1, de tal manera que  $x_c^*$  maximiza el producto de las distancias a los planos de restricción.

### 3.3 DESCRIPCION DEL METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS

El método de los centros analíticos es un caso particular de los métodos barrera o métodos de puntos interiores, por lo que se presentan algunos conceptos básicos de éste para posteriormente abordar el método de los centros.

#### 3.3.1 METODO BARRERA (Método de transformación)

La idea del método de la función barrera es la de crear una secuencia de funciones modificadas diferenciables cuyo mínimo converja en el limite al mínimo local  $x^*$  [25]. El mínimo de la función objetivo sin restricciones  $F(x)$  generalmente se localiza fuera de la región de factibilidad por lo que la función objetivo modificada debe incluir términos que

eviten puntos infactibles en la secuencia de búsqueda del óptimo [26]. Para lograr lo anterior se crea una barrera agregando a la función objetivo una suma ponderada de funciones continuas (funciones de restricciones) con singularidades positivas en la frontera de la región factible. El mínimo de la función objetivo creada (sin restricciones) debe estar estrictamente dentro de la región factible. Las transformaciones a funciones barrera se usan en las restricciones de desigualdad en la cual la región factible generada por el conjunto de ellas no es vacío. Las funciones barrera aplicadas a las restricciones de desigualdad producen los elementos del proceso iterativo en la búsqueda del mínimo, dentro de la región de factibilidad generada por las restricciones.

Dado el problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } F(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \\ &\text{Sujeto a: } \quad g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.5}$$

se define una transformación de (3.5) como

$$T(\mathbf{x}, \rho) = F(\mathbf{x}) + \Phi(g(\mathbf{x}), \rho) \tag{3.6}$$

donde  $\rho \in \mathbf{R}$  en general, es un escalar positivo de control de parámetros y  $\Phi$  es una función real cuya acción es imponer una “penalidad”, la cual es controlada por  $\rho$ .

La transformación  $T(\mathbf{x}, \rho)$ , es definida de tal manera que se construya una barrera en la frontera de la región de factibilidad  $G = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$  y la solución,  $\mathbf{x}^*$ , se



aproxima desde el interior de  $G$  en base a la modificación de la barrera usando el parámetro controlador  $\rho$ .

Definiendo

$$\Phi(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \rho) = \rho \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{g}_i(\mathbf{x})) = \rho \sum_{i=1}^m -\text{Log}(\mathbf{g}_i(\mathbf{x})) \quad (3.7)$$

donde  $\phi(t)$  está definido continuamente sobre el intervalo  $t > 0$ . Por lo tanto la expresión  $T(\mathbf{x}, \rho)$  resultante está dada por (3.8)

$$T(\mathbf{x}, \rho) = F(\mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^m -\text{Log}(\mathbf{g}_i(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}) - \rho \text{Log} \prod_{i=1}^m (\mathbf{g}_i(\mathbf{x})) \quad \rho > 0 \quad (3.8)$$

donde  $T(\mathbf{x}, \rho)$  está definida sobre  $G$  y además  $T(\mathbf{x}, \rho) \rightarrow \infty$  cuando  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  para toda  $i$ .

Se puede interpretar el comportamiento de (3.8) de la siguiente manera: asumiendo que  $\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}^*) = 0$  para algún  $\alpha$ , si  $\rho$  es reducida,  $\phi_\alpha(\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}))$  puede entonces incrementarse sin incrementarse  $T(\mathbf{x}, \rho)$ . Esto implica que  $\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x})$  puede reducirse de tal manera que,  $\mathbf{x}(\rho)$  el mínimo (si existe) de  $T(\mathbf{x}, \rho)$ , se aproxime a  $\mathbf{x}^*$  el mínimo de  $F(\mathbf{x})$ .

### 3.3.2 METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS

A continuación se establece el método de los centros [23]. Sea  $F$  una función barrera para  $G \in \mathbf{R}^n$  y sea  $f(x)$  una función cuadrática convexa sobre  $\mathbf{R}^n$ ; se selecciona además una constante  $\zeta \geq 1$  y se define

$$t^* = \min \{ f(x) \mid x \in G \}$$

tal que  $t^*$  es un extremo del intervalo abierto  $\Delta = (t^*, \infty)$ . Sea también

$$Q_t = \{x \in G \mid f(x) < t, t \in \Delta\}$$

el conjunto sobre el cual, la función

$$F_t(\mathbf{x}) = \zeta \text{Log} \left( \frac{1}{t - f(\mathbf{x})} \right) - \sum_{i=1}^m \text{Log}(b_i - a_i^t \mathbf{x})$$

mapea sus elementos al espacio de los números reales; esto es

$$F_t(x) : Q_t \rightarrow \mathbf{R}, t \in \Delta$$

La solución de  $x$  para el problema  $\text{Min } F_t(x)$  representa el centro analítico de la región  $Q_t$ .

El centro analítico posee algunas propiedades importantes las cuales se enuncian a continuación [24]:

- El concepto de centro analítico se puede proyectar hacia la solución del problema de optimización del tipo

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(x) \\ &x \in G \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde

$$G = \bigcap_{i=1} g_i^{(x)} \leq b_i$$

$x_c^*$  es fácilmente calculada por el método de Newton; sin embargo, es posible emplear otras técnicas de programación no lineal tales como los métodos de métrica variable.

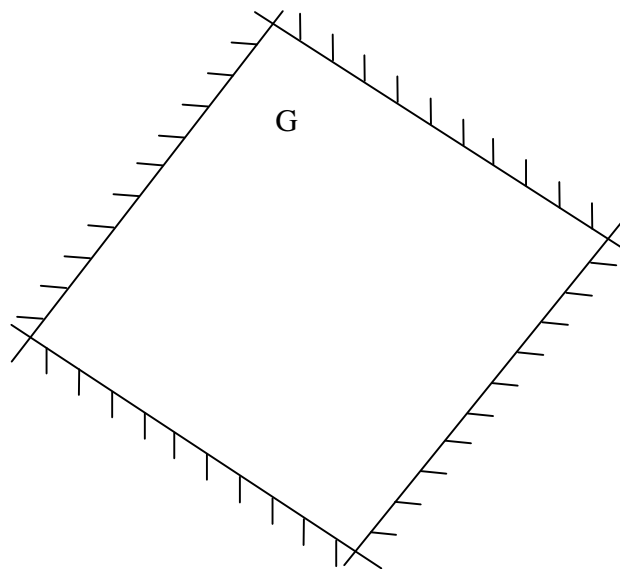
Se puede considerar que existe un intervalo  $\Delta = (t^*, +\infty)$ , de los valores de la función objetivo, en la cual la solución óptima  $t^* = f(x^*)$  y  $x^* \in G$  se encuentra en uno de sus extremos. Por tanto existe un punto  $x_{t_0} \in \text{int } G$  donde

$$f(x_{t_0}) \leq t_0, t_0 \in \Delta \quad (3.10)$$

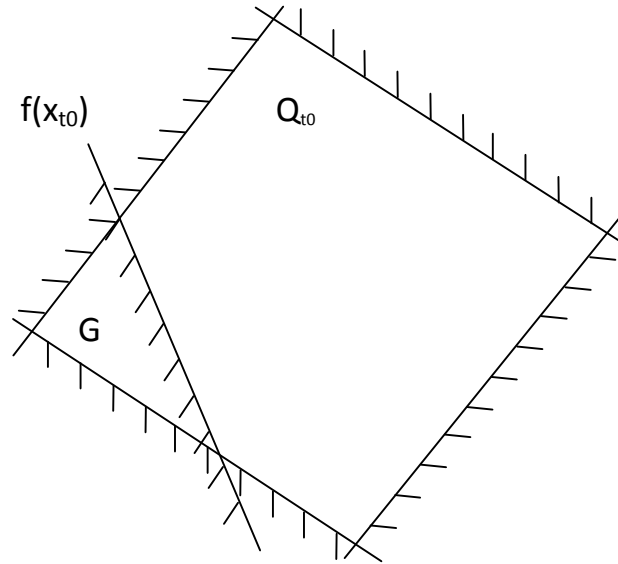
Incorporando la desigualdad (3.10) a  $g_i \leq b_i$  se forma una nueva región convexa  $Q_{t_0}$  definida como

$$Q_{t_0} = G \cap (f(x_{t_0}) \leq t_0) \quad (3.11)$$

de tal forma que la figura 3.2 se ve modificada geoméricamente, resultando la figura 3.3.



**Fig. 3.2** Región convexa de factibilidad



**Fig. 3.3** Región factibilidad formada por la inclusión de una nueva cota

Se determina el centro analítico  $x_{t1}$  de la nueva región de factibilidad formada  $Q_{t0}$ , a partir de la siguiente expresión:

$$x_{t1} = \arg \min [\Phi_t(x_{t0})] \quad (3.12)$$

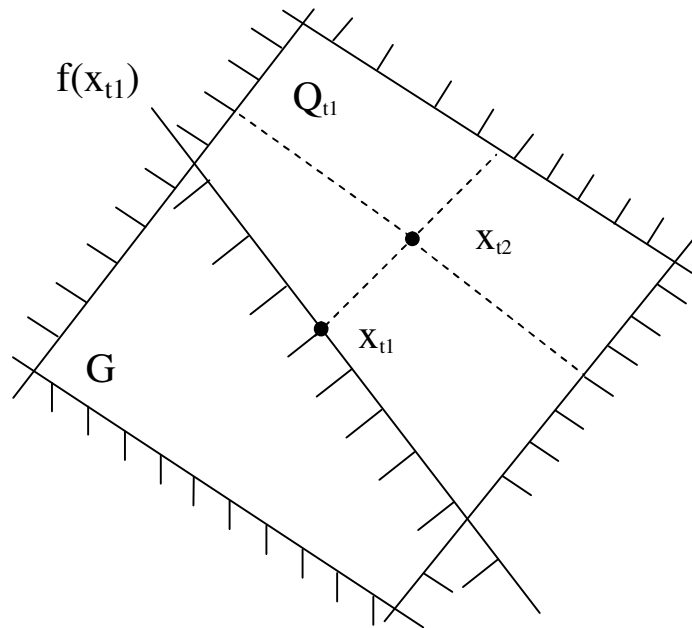
El centro analítico calculado (punto  $x_{t1}$ ) representa un punto interior de  $G$ , de tal manera que se puede utilizar para proponer una nueva cota  $t_1$ , formando así un nuevo semiespacio

$$f(x_{t1}) \leq t_1$$

con lo que se genera una nueva región convexa

$$Q_{t_1} = G \cap (f(x_{t_1}) \leq t_1)$$

para la cual se puede determinar su centro analítico (Figura 3.4)



**Fig. 3.4** Centro Analítico de la región convexa

Este proceso iterativo conlleva a un límite  $x_t \rightarrow x^*$  que es la solución óptima con un valor objetivo  $f(x^*)$ , siendo éste un límite de  $t$  cuando  $t_k \rightarrow t^*$ , y siendo  $t^*$  un extremo del intervalo  $\Delta$ .

En este método el mapeo  $x_{t_i} \rightarrow x_{t_{i+1}}$  se basa en el método de Newton (u otro método de programación no lineal) de minimización.

A continuación se presenta el algoritmo conceptual del método de los centros:

**PASO 1** Hacer  $k=0$

**PASO 2** Seleccionar un punto  $\mathbf{x}_{t_k} \in \text{int } Q_{t_k}$

**PASO 3** Hacer  $t_k > f(\mathbf{x}_{t_0})$ , utilizando una constante pequeña positiva tal  $\beta$  tal que  $t_k = f(\mathbf{x}_{t_k}) + \beta$ . Si  $k=0$ , entonces  $Q_{t_k} = G$

**PASO 4** Se incorpora la restricción anterior a la región  $Q_{t_k}$  para generar una nueva región convexa

$$Q_{t_{k+1}} = Q_{t_k} \cap \{x | f(x_{t_k}) < t_k\}$$

donde  $Q_{t_{k+1}} \subset Q_{t_k}$  (Figura 3.3)

**PASO 5** Determinar el centro analítico  $\mathbf{x}_{t_{k+1}}$  de la región  $Q_{t_{k+1}}$ ; esto es

$$\mathbf{x}_{t_{k+1}} = \text{argmin}[\Phi_t(\mathbf{x}_{t_k})]$$

donde  $\Phi_t(\mathbf{x}_{t_k})$  está definida por la expresión (3.4b)

**PASO 6** Si la diferencia  $f(\mathbf{x}_{t_{k+1}}) - f(\mathbf{x}_{t_k}) \leq \varepsilon$  donde  $\varepsilon$  es una tolerancia numérica establecida, el proceso termina con solución  $\mathbf{x}_{t_{k+1}}$  y un valor de la función objetivo de  $f(\mathbf{x}_{t_{k+1}})$ . De lo contrario, se continua en el PASO 3 con  $k=k+1$ .

### 3.4 APLICACIÓN DEL METODO DE LOS CENTROS AL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

A continuación se presenta los pasos del método de los centros para la solución de problemas de programación lineal mediante su aplicación en un ejemplo sencillo.

$$\text{Minimizar } f(x) = -x_1 - 2x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aplicando los conceptos vistos anteriormente, (3.13) se puede escribir como la intersección de 4 semiespacios, tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} f(x) &\leq t \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reescribiendo (3.14) se tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\leq t \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned} \quad (3.15a)$$

que representa la intersección de 4 semiespacios, los cuales forman una región convexa G. El parámetro t se obtiene de la primera ecuación de (3.15a) como

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\leq t \\ t &= -x_1 - 2x_2 + \beta \end{aligned} \quad (3.15b)$$

donde  $\beta$  es una constante mayor que cero.

Para la solución de (3.15) el problema se replantea como se muestra en (3.16):

$$\text{Min } F = -\zeta \text{Log}(t_k + x_1 + 2x_2) - \text{Log}(3-x_1-x_2) - \text{Log}(-1+x_1) - \text{Log}(-1+x_2) \quad (3.16)$$

Mediante la aplicación del método de Newton a (3.16) se obtiene la secuencia de centros analíticos y la solución, como se muestra en la tabla 3.1 para  $\beta = 0.0005$  y  $\zeta = 5$ .

Tabla 3.1 Resultados de las iteraciones en la solución (3.16)

Centro	$t_k$	$x_1$	$x_2$	F
1	-4.5915	1.1819	1.7018	38.7732
2	-4.8862	1.0550	1.9158	41.0706
3	-4.9666	1.0161	1.9757	43.5027
4	-4.9895	1.0048	1.9928	45.9284
5	-4.9960	1.0015	1.9977	48.2161
6	-4.9978	1.0006	1.9991	50.1182
7	-4.9984	1.0003	1.9995	51.3529
8	-4.9986	1.0002	1.9996	52.1850
9	-4.9986	1.0002	1.9997	52.2668
10	-4.9986	1.0002	1.9997	52.2668

El ejemplo muestra como un problema de programación lineal puede transformarse a un conjunto de desigualdades lineales, formando éstas una región convexa. Aplicando el método de los centros a este conjunto de desigualdades, se forma una función no lineal que al minimizarla con respecto a las variables independientes  $\mathbf{x}$  se obtiene su centro analítico; posteriormente se actualiza el parámetro de penalización  $t$  (3.15b), y se vuelve a calcular el centro analítico de la nueva región convexa. El proceso continua de manera iterativa, hasta que la diferencia entre  $t_k$  (iteración actual) y  $t_{k-1}$  (iteración anterior) es menor que cierta tolerancia, siendo la solución  $x_{(t_k)}$ .



### 3.5 APLICACIÓN DEL METODO DE LOS CENTROS AL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA

El ejemplo presentado en la sección anterior mostró que para la solución de un problema de programación lineal aplicando el método de los centros analíticos es necesario calcular una secuencia  $\{x_{ii}\}$  de centros analíticos. A continuación se aplicara el método de los centros al problema de flujos de potencia [11], con la diferencia de que es necesario determinar un solo centro analítico, ya que el problema se resuelve para restricciones de igualdad, las cuales se sustituyen por su correspondiente para de desigualdades.

El aplicar el método de los centros analíticos al problema de flujos de potencia implica una linealización de los balances de potencia activa, para cada uno de los nodos excepto el nodo compensador, y de potencia reactiva para todos los nodos de carga, dando lugar a un sistema de ecuaciones lineales como el representado en la ecuación (2.14), que en forma compacta se puede reescribir como en (3.17).

$$J \Delta \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (3.17)$$

Sin embargo, para la aplicación del método de los centros se requiere transformar (3.17) en dos sistemas de desigualdades lineales tal y como se muestra en (3.18).

$$\begin{aligned} J \Delta \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ J \Delta \mathbf{X} &\geq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para la solución de (3.18), y por lo tanto de (3.17), el problema a solucionar se plantea como un problema de programación no lineal sin restricciones como lo establecido por el método de los centros.

$$\text{Min } \Phi(\Delta X) = \text{Log} \prod_{i=1}^m (1/(b_i - J_i^t \Delta X_i)(-b_i + J_i^t \Delta X_i)) \quad (3.19)$$

En seguida se presenta un ejemplo para ilustrar lo antes dicho. Se utiliza el sistema de prueba de la Figura 2.1 para mostrar la aplicación del método de los centros para la solución de flujos de potencia.

Tomado el nodo uno como el nodo compensador con un voltaje igual a  $1.05 \angle 0$  rad, el sistema de ecuaciones lineales resultante es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 10.6205 & -7.3529 & -4.4117 \\ -7.3529 & 12.5509 & 4.8820 \\ 4.4117 & -4.9315 & 12.0559 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2585 \\ -0.5752 \\ -0.6524 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

El sistema (3.20) es de la forma expresada en (3.17) y para la aplicación del método de los centros se usan dos sistemas de desigualdades como se muestra en (3.18); posteriormente, transformando el sistema de desigualdades lineales (3.18) a un problema de programación no lineal tipo función barrera, se tiene finalmente la expresión (3.19).

Para iniciar el proceso de minimización con el método de métrica variable BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfard, Shannon) [1] se elige en forma aleatoria un estimado inicial como punto de arranque, procurando que estos sean de valor pequeño para asegurar una rápida convergencia del algoritmo

$$\Delta X = [-0.11 \ -0.12 \ -0.09]^t$$

Al resolver el problema (3.19) a partir de (3.20) da como resultado final

$$\Delta \mathbf{x} = [-0.1121 \ -0.0919 \ -0.0506]^t$$

Actualizando el vector de incógnitas se obtiene la solución del problema de flujos de potencia

$$V_1 = 1.0500 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1.0000 \angle -0.1121 \text{ rad}$$

$$V_3 = 0.9494 \angle -0.0919 \text{ rad}$$

con la potencia reactiva de generación siguiente:

$$Q_{\text{Gen } 1} = 0.7471 \text{ p.u.}$$

$$Q_{\text{Gen } 2} = 1.3205 \text{ p.u.}$$

### **3.6 APLICACIÓN DEL METODO DE LOS CENTROS AL CONTROL DE VOLTAJE EN ESTADO ESTABLE DE UN NODO REMOTO**

En la operación de sistemas eléctricos de potencia resulta de vital importancia el control de voltaje en todos los nodos de carga, con la finalidad de proporcionar calidad en el servicio, considerando por lo general  $\pm 5\%$  como variación máxima del voltaje en cada nodo. En la solución del problema de flujos de potencia se debe determinar la potencia reactiva en el (los) nodo(s) de generación de tal manera que se mantenga la magnitud del voltaje en el (los) nodo(s) de carga dentro de valores aceptables.

Un procedimiento para cumplir lo anterior, empleando el Método de los Centros, es partir de la expresión de balances nodales (3.17); transformando esta igualdad en dos sistemas de desigualdades lineales (3.18), e incluyendo las restricciones de variaciones máximas de voltaje en los nodos de carga, da como resultado

$$\begin{aligned}
 J \Delta \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\
 J \Delta \mathbf{X} &\geq \mathbf{b} \\
 \Delta \mathbf{X}_k &\leq 0.05 \quad k=1,2,\dots, nc \\
 \Delta \mathbf{X}_k &\geq -0.05 \quad k= 1,2,\dots, nc
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde el subíndice k indica incrementos de voltaje en los nodos de carga (nc).

La solución del sistema de ecuaciones (3.21) mediante el método de los centros se plantea como un problema de programación no lineal de la forma

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \Phi(\Delta \mathbf{X}) &= -\text{Log} \prod_{i=1}^m \left[ (b_i - \sum_{j=1}^m J_{ij} \Delta X_j) (-b_i + \sum_{j=1}^m J_{ij} \Delta X_j) \right] \\
 &\quad - \text{Log} \prod_{r=1}^{nc} [(0.05 + \Delta X_r)(0.05 - \Delta X_r)]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

En sección 3.5 se solucionó el problema de flujos de potencia empleando el método de los centros analíticos obteniendo la misma solución que el método de Newton – Raphson; sin embargo y debido a las condiciones de carga existentes, el perfil del voltaje nodal en el nodo 3 está en defecto, por lo que es necesario controlar su voltaje dentro de límites operativos para el SEP.

Al solucionar el sistema de la Figura 2.1, se desea mantener el voltaje en el nodo 3 dentro de los valores aceptables para proporcionar un factor de calidad en el servicio. Ya que

se tienen los mismos datos nodales, solamente se reescribe el sistema (3.20) como dos sistemas de desigualdades (3.18), resultando en (3.23).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} \Delta \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\
 \mathbf{J} \Delta \mathbf{X} &\geq \mathbf{b} \\
 \Delta \mathbf{X}_3 &\leq 0.05 \\
 \Delta \mathbf{X}_3 &\geq -0.05
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Transformando este sistema de desigualdades lineales a un problema de programación no lineal mediante el método de los centros se tiene

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \Phi(\Delta \mathbf{X}) &= -\text{Log} \prod_{i=1}^3 \left[ (b_i - \sum_{j=1}^3 J_{ij} \Delta X_j)(-b_i + \sum_{j=1}^3 J_{ij} \Delta X_j) \right] \\
 &\quad - \text{Log}[(0.05 + \Delta X_3)(0.05 - \Delta X_3)]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Aplicando el método BFGS como técnica numérica para la solución de (3.24), y usando como punto de arranque del método

$$\Delta \mathbf{X} = [-0.15 \quad -0.1 \quad -0.8]^t$$

se llega al resultado siguiente

$$\Delta \mathbf{X} = [-0.1088 \quad -0.0911 \quad -0.499]^t$$

Actualizando el vector de variables se obtiene la solución al problema de flujos para el control de voltaje en el nodo 3.

$$V_1 = 1.0500 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1.0000 \angle -0.1121 \text{ rad}$$

$$V_3 = 0.9501 \angle -0.0911 \text{ rad}$$

con la potencia de generación siguiente:

$$Q_{\text{Gen } 1} = 0.7418 \text{ p.u.}$$

$$Q_{\text{Gen } 2} = 1.3189 \text{ p.u.}$$

Como puede apreciarse en el presente ejemplo, la magnitud del voltaje en el nodo de carga 3, se encuentra dentro de la tolerancia previamente establecida, produciéndose una redistribución de los flujos de potencia reactiva así como una disminución de pérdidas de potencia reactiva en las líneas con respecto al caso presentado en la sección 3.5, razón por la cual los valores de generación de potencia reactiva son ligeramente menores. De aquí se puede observar la importancia que representa el método de los centros para la solución de problemas que requieran mantener variables dentro de ciertos límites de actuación.

Como se puede observar mediante los ejemplos presentados en las secciones 3.5 y 3.6 los voltajes de generación (magnitud y ángulo) se mantuvieron constantes; esto fue con el fin de obtener las potencias reactivas de generación para determinados niveles de carga en el sistema y con valores resultantes de voltaje dentro de cierta tolerancia en estos nodos de carga.

Es importante mencionar que es posible incluir otro tipo de restricciones en la formulación del problema, tales como potencia reactiva de generación máxima y mínima, o restricciones de ángulo de fase del voltaje máximo y mínimo; de lo anterior se deduce que es posible realizar estudios de cargabilidad de enlaces de transmisión mediante el método de los centros, con la inclusión en la formulación de restricciones de máxima diferencia angular entre las fuentes de voltaje equivalentes así como de máxima caída de tensión entre los nodos de envío y recepción.

# **CAPITULO CUATRO**

## **APLICACIÓN DEL METODO DE LOS CENTROS AL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA**

### **4.1 INTRODUCCION**

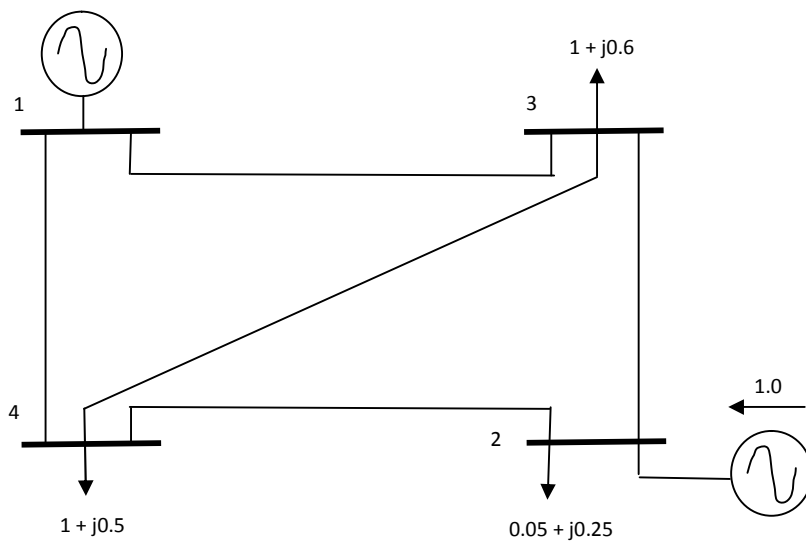
En el capítulo anterior se presento la formulación para la solución del problema de flujos de potencia mediante el método de los centros analíticos. Entre las ventajas que presenta este método es que solamente se necesita evaluar el sistema de ecuaciones lineales una sola vez, además de que la solución de dicho sistema se puede plantear como un problema de programación no lineal sin restricciones.

Así mismo, se estableció que mediante una adecuada formulación de éste, es posible mantener la magnitud del voltaje en los nodos de carga dentro de ciertos valores. En el presente capítulo se presentan algunos sistemas de prueba con el fin de validar el método de los centros; así mismo se hará una comparación de dicho método con respecto al método Newton – Raphson descrito en el capítulo 2.

Si en la solución de los sistemas de prueba que se presentan los voltajes en los nodos de carga se encuentran en defecto el sistema, se solucionara de nueva cuenta, pero ahora incluyendo el control del voltaje en los nodos de carga.

## 4.2 SISTEMA DE PRUEBA DE 4 NODOS

En la Figura 4.1 se muestra el sistema de prueba de 4 nodos para la solución de flujos. Los datos nodales muestran en la misma figura y los datos de las impedancias se muestran en la Tabla 4.1 dados en p.u. Se toma el nodo 1 como el nodo compensador, con un voltaje igual a  $1.02 \angle 0$  rad.



**Fig. 4.1** Sistema de prueba de 4 nodos



Tabla 4.1 Datos del sistema de prueba de la Figura 4.1

NODOS	R	X	B/2
1 - 3	0.0000	j 0.05	0.0000
1 - 4	0.0000	j 0.05	0.0000
2 - 3	0.0000	j 0.05	0.0000
2 - 4	0.0000	j 0.05	0.0000
3 - 4	0.0000	j 0.01	0.0000

la solución del sistema empleando el método de los centros se muestra a continuación

$$V_1 = 1.0200 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1.0000 \angle -0.0156 \text{ rad}$$

$$V_3 = 0.9959 \angle -0.0325 \text{ rad}$$

$$V_4 = 1.9973 \angle -0.0201 \text{ rad}$$

mientras que la solución del sistema empleando en método NR fue la siguiente

$$V_1 = 1.0200 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1.0000 \angle -0.0019 \text{ rad}$$

$$V_3 = 0.9950 \angle -0.0258 \text{ rad}$$

$$V_4 = 0.9967 \angle -0.0258 \text{ rad}$$

Como puede apreciarse, la magnitud de los voltajes nodales se encuentra dentro de la tolerancia requerida para proporcionar calidad en el servicio.

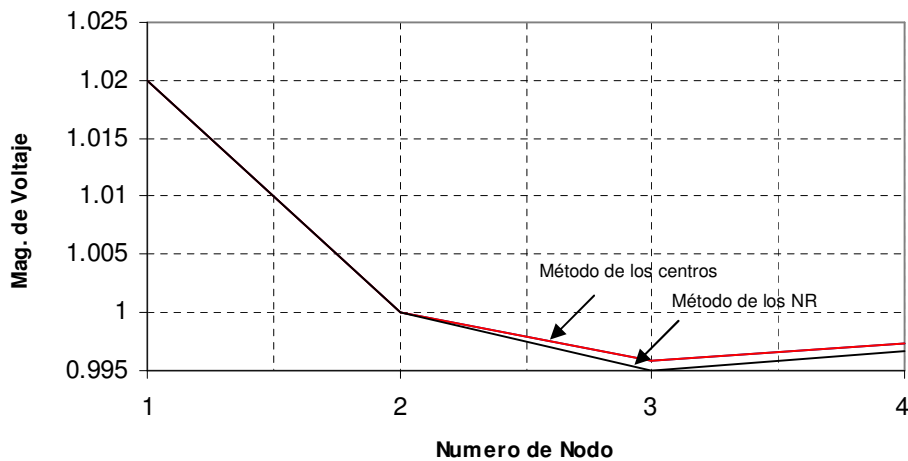
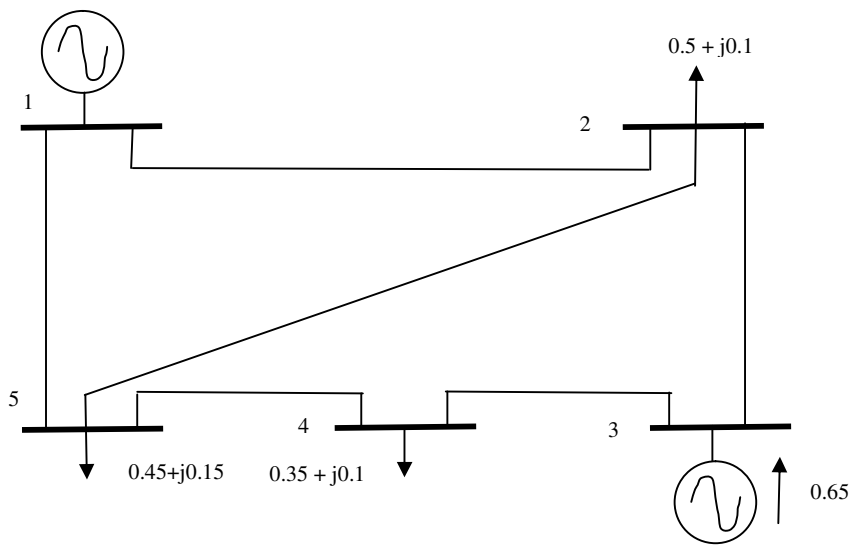


Fig. 4.2 Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR

En la figura 4.2 se gráfica la magnitud del voltaje con respecto al número de nodo tanto para el resultado presentado por el método de los centros como por el método de Newton – Raphson.

### 4.3 SISTEMA DE PRUEBA DE 5 NODOS

En la figura 4.3 se muestra el sistema de prueba de 5 nodos para la solución de flujos; los datos nodales se muestran en la misma figura y los datos de las impedancias se muestran en la Tabla 4.2 y están dadas en p.u. Se toma el nodo 1 como el nodo compensador, con un voltaje igual a  $1.10 \angle 0$  rad.



**FIG. 4.3** Sistema de prueba de 5 nodos

Tabla 4.2 Datos del sistema de prueba de la Figura 4.3

NODOS	R	X	B/2
1 – 5	0.1500	0.5500	0.0000
1 – 2	0.0900	0.3800	0.0000
2 – 5	0.0970	0.4100	0.0000
2 – 3	0.3000	0.7500	0.0000
3 - 4	0.1200	0.5100	0.0000
4 - 5	0.1000	0.4500	0.0000

la solución del sistema empleando el método de los centros se muestra a continuación

$$V_1 = 1.1000 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 0.9692 \angle -0.1175 \text{ rad}$$

$$V_3 = 1.0000 \angle -0.0456 \text{ rad}$$

$$V_4 = 0.9097 \angle -0.1436 \text{ rad}$$

$$V_5 = 0.9389 \angle -0.1470 \text{ rad}$$

con la potencia reactiva de generación siguiente:

$$Q_{\text{Gen } 1} = 0.7569 \text{ p.u.}$$

$$Q_{\text{Gen } 2} = 0.1376 \text{ p.u.}$$

Por otra parte la solución del mismo sistema empleando el método NR genero los siguientes resultados

$$V_1 = 1.1000 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

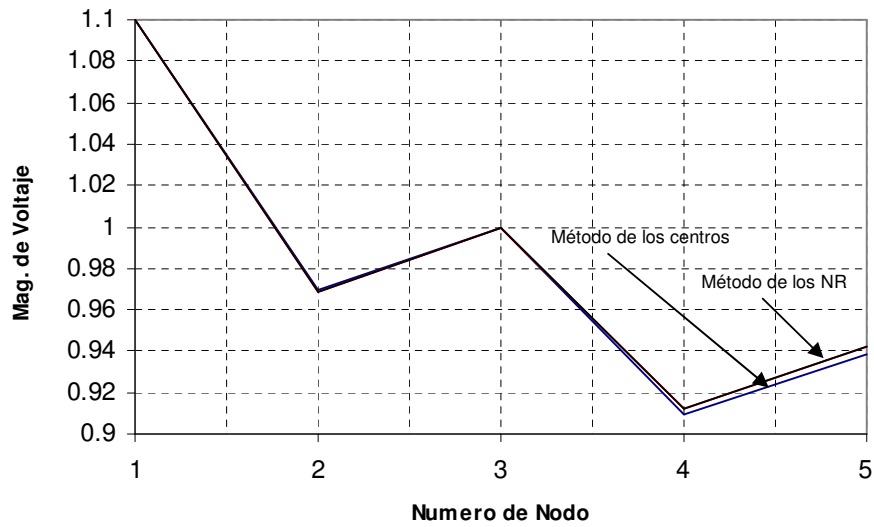
$$V_2 = 0.9685 \angle -0.1118 \text{ rad}$$

$$V_3 = 1.0000 \angle -0.0086 \text{ rad}$$

$$V_4 = 0.9097 \angle -0.1235 \text{ rad}$$

$$V_5 = 0.9389 \angle -0.1488 \text{ rad}$$

En la Figura 4.4 se gráfica la magnitud de del voltaje con respecto al número del nodo tanto para el resultado presentado por el método de los centros como por el método Newton – Raphson de tal forma que se muestra una pequeña diferencia entre ambos.



**FIG. 4.4** Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR

Como se observa el perfil de voltaje de los nodos 4 y 5 están en defecto, por lo que se procederá a incluir en la formulación restricciones en los voltajes en los nodos de carga, a fin de que el perfil de voltaje en dichos nodos no se degrade. La nueva solución del sistema empleando el método de los centros se muestra a continuación

$$V_1 = 1.1000 \angle 0.0000 \text{ rad}$$

$$V_2 = 0.9600 \angle -0.1385 \text{ rad}$$

$$V_3 = 1.0000 \angle -0.0416 \text{ rad}$$

$$V_4 = 0.9501 \angle -0.1712 \text{ rad}$$

$$V_5 = 0.9501 \angle -0.2000 \text{ rad}$$

con una potencia reactiva de generación siguiente:

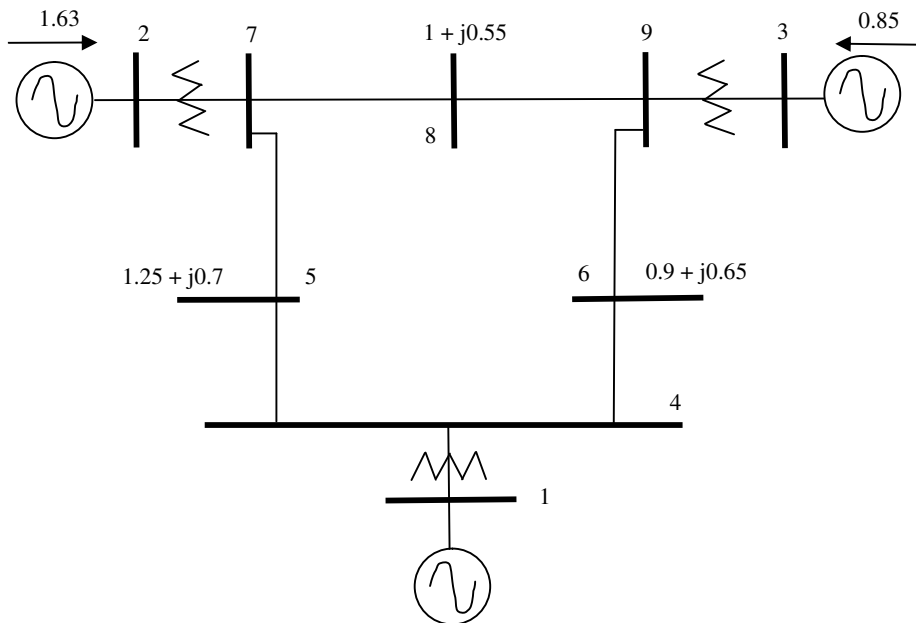
$$Q_{\text{Gen } 1} = 0.8054 \text{ p.u.}$$

$$Q_{\text{Gen } 2} = 0.0575 \text{ p.u.}$$

como puede apreciarse el perfil del voltaje en los nodos 4 y 5 se encuentran ahora dentro de la tolerancia previamente preestablecida, debido a un aumento en la potencia reactiva del generador en nodo 1.

#### 4.4 SISTEMA DE PRUEBA DE 9 NODOS

En la figura 4.5 se muestra el sistema de prueba de 9 nodos para la solución de flujos; los datos nodales se muestran en la misma figura y los datos de las impedancias se muestran en la Tabla 4.3 y están dadas en p.u. Se toma el nodo 1 como el nodo compensador, con un voltaje igual a  $1.04 \angle 0$  rad.



**Fig. 4.5** Sistema de prueba de 9 nodos

Tabla 4.3 Datos del sistema de prueba de la Figura 4.5

NODOS	R	X	B/2
1 – 4	0.0000	0.0576	0.0000
2 – 7	0.0000	0.0625	0.0000
3 – 9	0.0000	0.0586	0.0000
4 – 6	0.0170	0.0920	0.0790
4 – 5	0.0100	0.0850	0.0880
5 – 7	0.0320	0.1610	0.1530
6 – 9	0.0390	0.1700	0.1790
7 – 8	0.0085	0.0720	0.0745
8 – 9	0.0119	0.1008	0.1045

la solución del sistema empleando el método de los centros se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1.0400 \angle 0.0000 \text{ rad} & V_5 &= 0.9495 \angle -0.0836 \text{ rad} \\
 V_2 &= 1.0000 \angle 0.2071 \text{ rad} & V_6 &= 0.9571 \angle -0.0825 \text{ rad} \\
 V_3 &= 1.0000 \angle 0.0953 \text{ rad} & V_7 &= 0.9890 \angle 0.0844 \text{ rad} \\
 V_4 &= 0.9973 \angle -0.0491 \text{ rad} & V_8 &= 0.9679 \angle 0.0275 \text{ rad} \\
 & & V_9 &= 0.9954 \angle 0.0416 \text{ rad}
 \end{aligned}$$

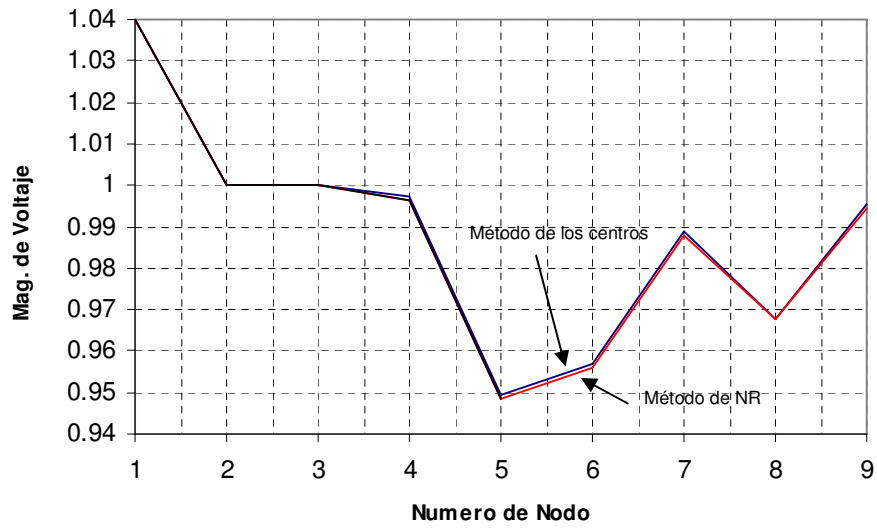
con una potencia reactiva de generación de

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{Gen } 1} &= 0.2482 \text{ p.u.} \\
 Q_{\text{Gen } 2} &= 0.2950 \text{ p.u.} \\
 Q_{\text{Gen } 3} &= 0.1030 \text{ p.u.}
 \end{aligned}$$

y la solución del sistema empleando el método NR fue la siguiente

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1.0400 \angle 0.0000 \text{ rad} & V_5 &= 0.9485 \angle -0.0719 \text{ rad} \\
 V_2 &= 1.0000 \angle 0.1763 \text{ rad} & V_6 &= 0.9558 \angle -0.0636 \text{ rad} \\
 V_3 &= 1.0000 \angle 0.0901 \text{ rad} & V_7 &= 0.9877 \angle 0.0731 \text{ rad} \\
 V_4 &= 0.9965 \angle -0.0403 \text{ rad} & V_8 &= 0.9678 \angle 0.0174 \text{ rad} \\
 & & V_9 &= 0.9944 \angle 0.0400 \text{ rad}
 \end{aligned}$$

En la figura 4.6 se gráfica la magnitud del voltaje con respecto al número de nodo tanto para el resultado presentado por el método de los centros como por el método Newton – Raphson de tal forma que se muestra una pequeña diferencia entre ambos.



**Fig. 4.6** Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR

Como se observa el perfil del voltaje del nodo 5 está en defecto, por lo que se procederá con una nueva corrida de flujos, incluyendo una restricción en el nodo con problemas de voltaje; la nueva solución la que se muestra a continuación

$V_1 = 1.0400 \angle 0.0000 \text{ rad}$	$V_5 = 0.9502 \angle -0.0867 \text{ rad}$
$V_2 = 1.0000 \angle 0.2062 \text{ rad}$	$V_6 = 0.9613 \angle -0.0867 \text{ rad}$
$V_3 = 1.0000 \angle 0.0971 \text{ rad}$	$V_7 = 0.9914 \angle -0.0867 \text{ rad}$
$V_4 = 0.9956 \angle -0.0509 \text{ rad}$	$V_8 = 0.9664 \angle -0.0299 \text{ rad}$
	$V_9 = 0.9975 \angle -0.0424 \text{ rad}$

con una potencia reactiva de generación de

$$Q_{\text{Gen } 1} = 1.4654 \text{ p.u.}$$

$$Q_{\text{Gen } 2} = 0.8132 \text{ p.u.}$$

$$Q_{\text{Gen } 3} = 0.2080 \text{ p.u.}$$





Tabla 4.4 Datos de los elementos del sistema de la Figura 4.7

NODOS	R	X	B/2
1 - 2	0.0194	0.0592	0.0264
1 - 5	0.0540	0.2230	0.0246
2 - 3	0.0470	0.1980	0.0219
2 - 4	0.0581	0.1763	0.0187
2 - 5	0.0569	0.1739	0.0170
3 - 4	0.0670	0.1710	0.0173
4 - 5	0.0133	0.0421	0.0064
4 - 7	0.0000	0.2091	0.0000
4 - 9	0.0000	0.5562	0.0000
5 - 6	0.0000	0.2520	0.0000
6 - 11	0.0950	0.1989	0.0000
6 - 12	0.1229	0.2558	0.0000
6 - 13	0.0661	0.1303	0.0000
7 - 8	0.0000	0.1761	0.0000
7 - 9	0.0000	0.1100	0.0000
9 - 10	0.0318	0.0845	0.0000
9 - 14	0.1271	0.2704	0.0000
10 - 11	0.0820	0.1921	0.0000
12 - 13	0.2209	0.1999	0.0000
13 - 14	0.1709	0.3480	0.0000

Tabla 4.5 Condiciones iniciales del sistema de la Figura 4.7

NODO	GENERACION		CARGA	
	P	Q	P	Q
1	-	-	-	-
2	0.4000	0.0000	0.2170	0.1270
3	0.0000	0.0000	0.9420	0.1900
4	0.0000	0.0000	0.4780	-0.0390
5	0.0000	0.0000	0.0760	0.0160
6	0.0000	0.0000	0.1120	0.0750
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.2950	0.1660
10	0.0000	0.0000	0.0900	0.0580
11	0.0000	0.0000	0.0350	0.0180
12	0.0000	0.0000	0.0610	0.0160
13	0.0000	0.0000	0.1350	0.0580
14	0.0000	0.0000	0.1490	0.0500

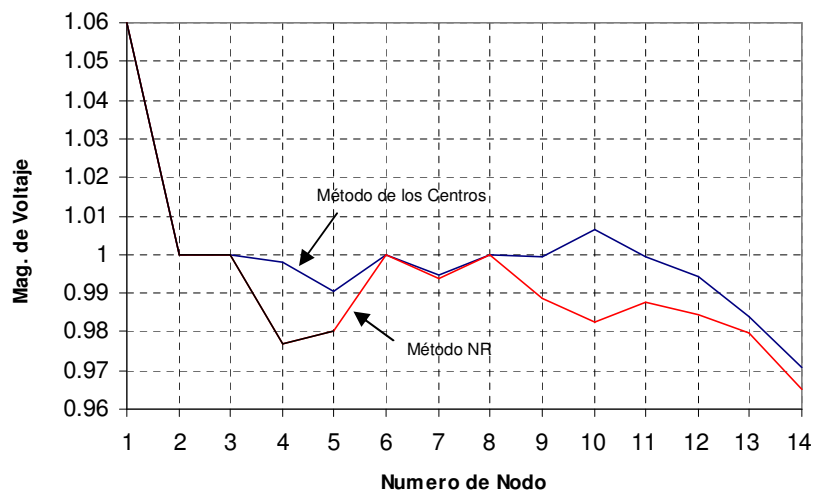
La solución del sistema empleando el método de los centros se muestra a continuación

$V_1 = 1.0600 \angle 0.0000 \text{ rad}$	$V_8 = 1.0000 \angle -0.2132 \text{ rad}$
$V_2 = 1.0000 \angle -0.0702 \text{ rad}$	$V_9 = 0.9994 \angle -0.2521 \text{ rad}$
$V_3 = 1.0000 \angle -0.2232 \text{ rad}$	$V_{10} = 1.0066 \angle -0.2631 \text{ rad}$
$V_4 = 0.9979 \angle -0.1701 \text{ rad}$	$V_{11} = 0.9993 \angle -0.2588 \text{ rad}$
$V_5 = 0.9903 \angle -0.1404 \text{ rad}$	$V_{12} = 0.9943 \angle -0.2746 \text{ rad}$
$V_6 = 1.0000 \angle -0.2457 \text{ rad}$	$V_{13} = 0.9840 \angle -0.2672 \text{ rad}$
$V_7 = 0.9947 \angle -0.2132 \text{ rad}$	$V_{14} = 0.9709 \angle -0.2804 \text{ rad}$

La solución al sistema empleando el método NR se muestra a continuación

$V_1 = 1.0600 \angle 0.0000 \text{ rad}$	$V_8 = 1.0000 \angle -0.2384 \text{ rad}$
$V_2 = 1.0000 \angle -0.0773 \text{ rad}$	$V_9 = 0.9886 \angle -0.2700 \text{ rad}$
$V_3 = 1.0000 \angle -0.2324 \text{ rad}$	$V_{10} = 0.9827 \angle -0.2732 \text{ rad}$
$V_4 = 0.9771 \angle -0.1790 \text{ rad}$	$V_{11} = 0.9875 \angle -0.2669 \text{ rad}$
$V_5 = 0.9800 \angle -0.1503 \text{ rad}$	$V_{12} = 0.9844 \angle -0.2724 \text{ rad}$
$V_6 = 1.0000 \angle -0.2553 \text{ rad}$	$V_{13} = 0.9795 \angle -0.2741 \text{ rad}$
$V_7 = 0.9938 \angle -0.2384 \text{ rad}$	$V_{14} = 0.9653 \angle -0.2918 \text{ rad}$

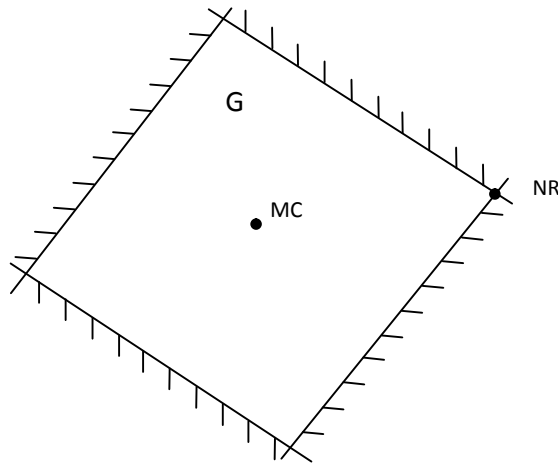
En la Figura 4.8 se gráfica la magnitud de del voltaje con respecto al número de nodo tanto para el resultado presentado por el método de los centros como por el método de Newton – Raphson de tal forma que se muestra una pequeña diferencia entre ambos.



**Fig. 4.8** Diferencia gráfica entre el método de los centros y el método de NR

#### 4.6 ANALISIS DE RESULTADOS

Como se puede observar en los sistemas de prueba anteriores las magnitudes de los voltajes en el MC esta por encima de los resultados mostrados por el método NR, la razón estriba en que la solución obtenida mediante el MC es aproximada (Figura 4.9), esto quiere decir que la solución obtenida bajo este método se encuentra dentro de la región de factibilidad (G) y no en un punto extremo (solución real); a simple vista se puede cuestionar que el MC no es apropiado para la solución de flujos de potencia debido a ser un método aproximado; sin embargo la ventaja es de que el MC proporciona en forma sencilla la adición de restricciones de máxima variación de voltaje en los nodos de carga, proporcionando la cantidad de reactivos necesarios para dicha condición de operación.



**Fig. 4.9** Localización de las soluciones del MC y NR en G

## **CAPITULO CINCO**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **5.1 INTRODUCCION**

El presente trabajo analiza el problema de flujos de potencia como un problema de programación lineal y describe su solución mediante técnicas de redes neuronales y el método de los centros analíticos. El método de los centros (método de puntos interiores) se ha presentado como una herramienta poderosa para resolver el problema de flujos incluyendo restricciones en variables nodales. Los resultados mostrados ilustran el análisis.

#### **5.2 CONCLUSIONES**

De los estudios y análisis desarrollados en el presente trabajo, se concluye lo siguiente:

- La aplicación de los métodos convencionales en el problema de flujos de potencia pueden dar lugar a soluciones infactibles a diferencia de los métodos no convencionales, que en teoría son no divergentes, y por lo tanto más robustos en el proceso de alcanzar el óptimo.

- Los métodos no convencionales necesitan una cantidad de tiempo de cómputo mayor que los convencionales, sin embargo resultan más eficientes para estudios alrededor del caso base. Por el contrario, los casos de difícil convergencia extrema se resuelven más eficientemente utilizando métodos no convencionales.
- El método de redes neuronales utilizado para resolver el problema de flujos no presentó ventajas importantes debido principalmente al tiempo de solución (cantidad de operaciones); es posible disminuir el tiempo de convergencia utilizando técnicas de paso de integración variable.
- El método de redes neuronales se consideran un método particular de los métodos de puntos interiores pero con la ventaja de tener soluciones próximas al óptimo sin recurrir al proceso del simplex para moverse a través de puntos extremos.
- Resulta importante desde el punto de vista didáctico y de investigación abordar la técnica de redes neuronales por los conceptos de la cual se deriva su algoritmo de solución.
- En el MC el problema de flujos de potencia se soluciona como un problema de programación no lineal, en el cual es posible establecer restricciones nodales (límites de reactivos, niveles de voltaje, diferencias angulares) sin gran complejidad.
- En el MC se requiere un punto de arranque inicial constituido por voltajes unitarios (perfil plano) para linealizar el sistema de ecuaciones como en el método NR y un

segundo punto inicial para resolver el problema programación no lineal sin restricciones que da lugar a la solución del problema de flujos.

- Mediante la formulación empleada del MC únicamente se requiere evaluar la matriz Jacobiana una sola vez, por lo que se dispone de un ahorro de memoria de cómputo con respecto a otros métodos.
- Utilizando el método de los centros la cantidad de operaciones se incrementa con el tamaño del sistema debido a que bajo este método el número de restricciones es de  $2n$ ; donde  $n$  es el orden de la matriz Jacobiana.
- El MC es un algoritmo que en teoría es no divergente lo cual hace posible su aplicación para la solución de sistemas de difícil convergencia así como para la solución de sistemas en el que sea necesario conocer la cantidad de reactivos necesarios para mantener cierta condición de una(s) variable(s) nodal.
- Al transformar el problema de programación lineal con restricciones a un problema de programación no lineal sin restricciones mediante el MC, se tiene la ventaja de disponer de una gran variedad de métodos para su solución (Métodos Cuasi – Newton, gradientes conjugados, etc.) que son más robustos en sus características de convergencia.
- La solución del MC la solución es aproximada, es decir, el método determina el centro analítico a partir de una región de factibilidad formada a partir de las restricciones, sin embargo como la solución óptima se encuentra en un vértice de la región factible, las

magnitudes de los voltajes en los sistemas presentados presentan un perfil de voltaje mayor que el determinado en el método NR.

- Las consideraciones realizadas y los resultados obtenidos al utilizar el método de los centros para la solución del problema de flujos de potencia, demuestran su potencialidad para su aplicación en la planeación de sistemas eléctricos debido a la simple implementación de restricciones de desigualdad (caso contrario del NR) con una buena aproximación de la solución.

### **5.3 APORTACIONES**

Este trabajo pretende ser la base para el desarrollo de investigaciones futuras en el área de control y operación de sistemas eléctricos de potencia. A continuación se enumeran las aportaciones del trabajo de investigación reportado en esta tesis:

- Un algoritmo para la solución de flujos de potencia mediante redes de neuronas artificiales en el, que partiendo del sistema  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  formado en base al método simplex y utilizando de una red formada por integradores, se soluciona un sistema de ecuaciones diferenciales para el ajuste del estado (variables del problema) de las neuronas.
- Un nuevo algoritmo para la solución de flujos de potencia basado en el método de los centros que permite incorporar restricciones de voltajes de los nodos de carga, límites de reactivos, capacidades de transmisión etc. Impuestas por la condición de operación del sistema de potencia.

#### **5.4 RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS**

En base a los resultados obtenidos, se recomienda continuar investigando en los siguientes aspectos

- Incluir en la formulación del método de redes neuronales un paso de integración variable para la reducción del tiempo de computo.
- Investigar en el método de redes neuronales una posible relación con acciones de control para mejorar los voltajes nodales o bien la inclusión de límites en la capacidad de transmisión.
- Desarrollar algoritmos en base al método de los centros para realizar estudios de flujos óptimos así como de cargabilidad de enlaces de transmisión.
- Desarrollar un método para la selección del punto inicial en el problema de programación no lineal sin restricciones.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Ward and H. Hale, “*Digital computer solution of power flow problems.*” Trans. AIEE, Vol 75, 1956, pp. 17-28.
- [2] L.L. Freris and A. M. Sasson, “*Investigation of the load flow problem.*” Proc. IEE, Vol. 115, No. 10, 1968, pp. 1459-1470.
- [3] I. Elizarraraz, *Power System Computation*. Notes London 1980.
- [4] J.C. Das, *Power System Analysis: Short Circuit, Load Flow and Harmonics*, Ed. Marcel Dekker, Inc. Ed. 2002.
- [5] A. Medina y E. Acha, *Flujos de Potencia un Enfoque Computacional* Ed. UMSH, 1984.
- [6] W. Dommel, F. Tinney, L. Powell, “*Further developments in Newton`s method for power system applications.*” Proc. IEEE, 1969, pp. 1-9.
- [7] A. Pai, *Computer Techniques in Power System Analysis*. Ed Tata McGraw Hill, Publishing Company Limited, 2006.
- [8] H. Tovar y R. Mota, “*Análisis de Métodos de Solución al Problema de Flujos Convencional Utilizando Técnicas de Programación no-lineal,*” IEEE Reunion de Verano de Potencia, Acapulco, Guerrero, México, 1991.
- [9] A. Avalos, O. Chacón, S. Acha, “*Método Simplex Aplicado al Problema de Fijos.*” IEEE Reunion de Verano de Potencia, Acapulco, Guerrero, México, 1992.
- [10] B. Barrón, O. Chacón, S. Acha, “*Problemas de Flujos de Potencia: Nuevas Técnicas de Solución,*” SIEEEM, 1993.
- [11] B. Barrón, O. Chacón, S. Acha, “*Uso del Método de los Centros en la Solución del Problema de Flujos en Sistemas Eléctricos de Potencia,*” IEEE Reunion de Verano de Potencia, Acapulco, Guerrero, México, 1994.
- [12] O. Elgerd, *Electric Energy System Theory*, Ed. McGraw-Hill, 1985.
- [13] Bazaraa, Jarvis, Sheraly, *A Linear Programming and Network Flows*, Ed. John Wiley & Sons, “ 4th. Ed. 2010.
- [14] S. Yakowitz, F. Szidarovsky, *An Introduction to Numerical Computation*, Ed. Maxwell Macmillan, 2nd. Ed.1990.
- [15] A. Avalos, O. Chacón, S. Acha, *Método Simplex Aplicado al Problema de Fijos*. Reporte Interno. DIE-92, UANL.
- [16] Chia-Yiu, A. Shanblatt, “*Linear and Quadratic Programming Neural Network*

- Analysis,*” IEEE Trans. On Neural Network, Vol. 3, 1993.
- [17] F. Aboytes Ed., *Control de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia*, 1992.
  - [18] G. T. Heydt, *Computer Analysis Methods for Power Systems*, Ed. McMillan, 1996.
  - [19] G. Durga, K. Jana, C. Tripathy, “*Modifications to Newton-Raphson Load Flow for Ill-Conditioned Power Systems,*” Electric Power & Energy Systems, 1989.
  - [20] C. Tripathy, P. Prasad, “*Load Flow for Ill-Conditioned Power Systems By Quadratically Convergent Newton-like Method,*” IEE Proc. Vol. 127, No. 5, 1980.
  - [21] A. Volkov, *Métodos Numéricos*, Ed. Mir Moscu, 1987.
  - [22] David G. Luenberger, Yinyu Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, International Series in Operations Research and Management Science, 3rd. Edition, Springer Verlag, 2008.
  - [23] E. Nesterov, S. Nemirovsky, *Self Concordant Functions and Polynomial Time Methods in Convex Programming*, CEMI, Moscow, 1989.
  - [24] S. Boyd, C. Barratt, “*Interactive Engineering Design Via Analytic Centers,*” E.E. Stanford University, 1992.
  - [25] E. Gill, W. Murray, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*, Ed. Academic Press, 1974.
  - [26] E. Gill, W. Murray, *Practical Optimization*, Ed. Academic Press, 1982.
  - [27] I. Helmke, J. B. Moore, *Optimization and Dynamical Systems*, Ed. Springer-Verlag.
  - [28] Curtis F. Gerald, *Análisis Numérico*, Ed. Alfaomega. 1990