

## **Dinámica no lineal estocástica del mercado cambiario mexicano (Non-linear stochastic dynamic of the Mexican exchange rate market)**

**Klender Aimer Cortez Alejandro, Martha del Pilar Rodríguez García &  
Adrián Wong Boren**

Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N.L., México.  
Email: klender.corteza@uanl.mx

**Keywords:** BDS test, bootstrapping, exchange rate, GARCH, time series, volatility

**Abstract:** This paper presents an analysis of the exchange rate volatility in the Mexican market during the flotation regime adopted since December 1994. The time series under study are the bid and ask interbank daily exchange rates from 1995 to 2010. As a starting point we begin analyzing the temporary structure of the variance, and later we look for a time series model that best fits the data. In order to detect the non-linear dynamic of the time series, we use the BDS test. The results show evidence in favor of the characterization of the exchange rate peso/dollar fluctuations with non-linear stochastic models, particularly the GARCH model. In order to validate the model we propose to use the bootstrapping technique together with the BDS test.

**Palabras clave:** GARCH, muestreo autodocimante, prueba BDS, series temporales, tipo de cambio, volatilidad

**Resumen:** En este trabajo se presenta un análisis de la volatilidad del mercado cambiario en México durante el periodo de flotación adoptado a partir de diciembre de 1994. Las series temporales de estudio son el tipo de cambio interbancario de 1995 a 2010 en su cotización diaria a la compra y a la venta. Como punto de partida se analiza la estructura temporal de la varianza de los datos y posteriormente se busca un modelo de series temporales que se ajuste mejor a las observaciones. Para detectar el carácter no lineal de la serie se utiliza la metodología BDS. Los resultados muestran evidencia a favor de la caracterización de la variación del tipo de cambio pesos/dólar con la utilización de modelos estocásticos no lineales, en particular, el modelo GARCH. Para validar el modelo se propone utilizar la técnica de bootstrapping sobre los residuos en conjunto con la técnica BDS.

**Dinámica No Lineal Estocástica & Mercado Cambiario**

## 1. Introducción

Después de la caída del sistema Breton Woods a principios de la década de los setenta, la mayoría de los países decidieron mantener un tipo de cambio (TC) flexible. En México se decretó la libre flotación del peso en 1976. Durante este periodo, los movimientos del TC se explicaron con modelos lineales basados en la hipótesis del poder adquisitivo y en los modelos de activos propuestos inicialmente por Frenkel (1976), Mussa (1976) y Bilson (1978), pero carecían de un soporte empírico como se demostró en los trabajos realizados por Meese & Rogoff (1983) y Backus (1984). Estos autores argumentaron que la evolución del TC seguía un modelo simple de "paseo aleatorio" sin la necesidad de utilizar tantas variables.

Grauwe et al. (1993: prefacio) mencionaron que los participantes del mercado cambiario se hicieron escépticos sobre la utilidad de los modelos económicos, lo que modificó el rumbo de las investigaciones. La atención se centró en cambiar de los modelos estructurales que daban una explicación a los movimientos del TC hacia modelos en los que esta ambición se abandonaba. Los estudios se concentraron en el análisis de las propiedades en series temporales del TC. De esta forma, surgieron publicaciones con el tema de si el TC sigue o no un paseo aleatorio y el análisis de series temporales mediante los modelos *ARIMA* propuestos por Box & Jenkins (1976). Para ello se tuvo en cuenta la Hipótesis del Mercado Eficiente; la cual, traducida en términos matemáticos, implicaba que los cambios en precios, en nuestro caso el TC, eran variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas (*iid*).

Sin embargo, los resultados de los trabajos de Meese & Singleton (1982) y Baille & Bollorslev (1989) rechazaron la hipótesis del paseo aleatorio. Después de la crisis bursátil de 1987 y del uso extensivo de herramientas informáticas, empezó a cobrar fuerza el paradigma de la no linealidad en la dinámica de los precios.

Una alternativa que trató la dependencia no lineal de la variación del TC consistió en la utilización de modelos estocásticos no lineales; en particular, los modelos ARCH (Modelo Autorregresivo de Heteroscedasticidad Condicional) y GARCH (Modelo Autorregresivo de Heteroscedasticidad Condicional Generalizado). Los hallazgos de Hsieh (1989) y Baille &

Bollorslev (1989) sugirieron que la variación del TC no era ruido blanco; ya que su varianza, al cambiar con el tiempo, no se distribuía independiente e idénticamente. Los resultados de Hsieh (1989) y Kugler & Lenz (1993) mostraron evidencia a favor de la caracterización de la variación de los tipos de cambio con estos modelos.

En relación a la política cambiaria en México desde 1955 a 1975 el TC en México se mantuvo fijo en 12.50 pesos por un dólar, pero en agosto de 1976 se devaluó la moneda. La política cambiaria del gobierno mexicano ha experimentado diversos cambios, sobre todo a partir de la década de los setenta. La Tabla 1 presenta un cuadro resumen de los diferentes regímenes cambiarios a partir de esa fecha.

**Tabla 1. Regímenes cambiarios en México (1955-2010).**

Periodo	Régimen cambiario
1955-1976	Tipo de cambio fijo
1976-1982	Tipo de cambio flexible mediante deslizamiento de la moneda
1982-1983	Control de cambios. Dualidad cambiaria
1983-1987	Minideslizamientos del tipo de cambio con propósitos subvaluatorios
1987-1991	Deslizamiento predeterminado decidido en los pactos. Uso del tipo de cambio como ancla nominal
1991-1994	Bandas cambiarias
1995-2010	Libre flotación

**Nota 1.** Fuente: Elaboración propia con información de Banxico (2009).

Después del abandono de las Bandas Cambiarias en diciembre de 1995 la política cambiaria se orientó fundamentalmente hacia la "flotación limpia", es decir, permitió que el peso se apreciara o depreciara en respuesta a las condiciones del mercado; sin embargo, el Banco de México anunció que participaría en este mercado para evitar una volatilidad excesiva en el TC (Banxico, 1996).

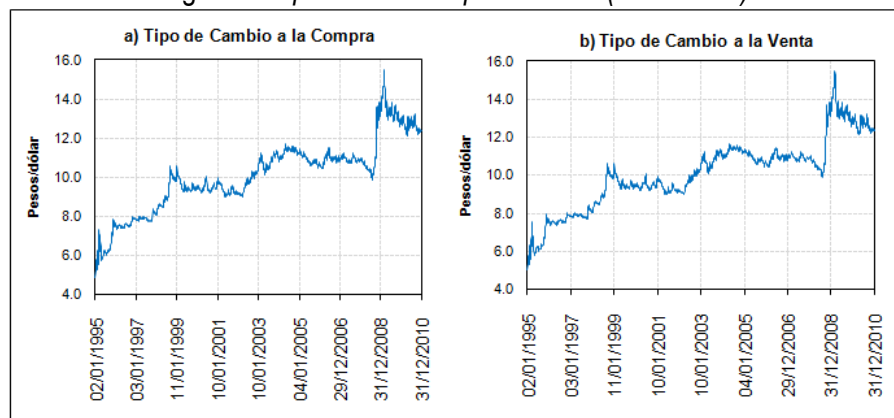
Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar la volatilidad del tipo de cambio pesos/dólar durante el periodo de libre flotación (1995-2010) y proponer un modelo no lineal de series temporales que se ajuste a los datos analizados utilizando el test BDS en conjunto con la técnica de bootstrapping (muestreo autodocimante). Nuestra hipótesis es que el TC durante este periodo presenta una dinámica no lineal estocástica representada por un

modelo GARCH el cual se ajusta bien a los datos del TC y genera residuos independientes e idénticamente distribuidos (*iid*).

## 2. Estadísticas descriptivas de la serie

En la Figura 1 se presenta la evolución histórica del TC pesos/dólar interbancario a 48 horas, cotización al cierre, durante el periodo de libre flotación que se publica diariamente por el Banco de México para el precio de compra y venta. En total tenemos 4025 observaciones en cada serie.

Figura 1. Tipo de Cambio pesos/dólar (1995-2010)



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico (2011)

De la Figura 1 podemos distinguir cuatro años en donde aparecen cambios repentinos en la paridad pesos/dólar:

- 1) 1995: Periodo de crisis posterior al abandono del sistema de bandas cambiarias. La devaluación ocurrida en diciembre de 1994, combinada con los bajos niveles de reservas internacionales al inicio de 1995 generó incertidumbre e inestabilidad en el mercado cambiario (Banxico, 1996).
- 2) 1998: En ese año, la volatilidad en los mercados financieros internacionales causó una reducción en la oferta de capital extranjero en Latinoamérica, dando lugar a movimientos en tipos de cambio y tasas de interés. En particular, el colapso de la economía rusa y la moratoria unilateral declarada sobre sus obligaciones internas y externas resultaron

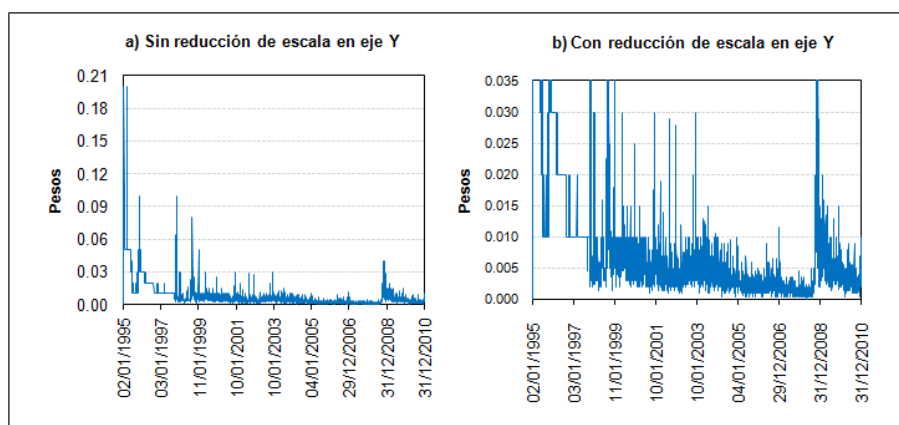
ser dañinas para los mercados financieros internacionales. Además, los precios del petróleo sufrieron una caída importante por lo que la entrada de divisas a México se redujo, (Banxico, 1999).

- 3) 2003: Durante este año, el peso se vio debilitado por factores internos y externos. Por un lado, el dinamismo en las exportaciones mexicanas, las cuales fueron afectadas por la posición cíclica de la economía estadounidense y por otro lado, la depreciación del peso posiblemente también fue influenciada por cuestiones de índole estructural, asociadas con la posible pérdida de competitividad de las exportaciones mexicanas ante otros proveedores de manufacturas, como es el caso de China. Adicionalmente, a principios de año se observó una rápida depreciación del peso acompañada de un aumento en la volatilidad implícita en las opciones de tipo de cambio principalmente a la situación geopolítica prevaleciente como consecuencia al conflicto armado en Irak, reflejándose en un menor apetito por riesgo por parte de los inversionistas extranjeros, (Banxico, 2004).
- 4) 2008: Las condiciones en los mercados financieros internacionales se deterioraron considerablemente durante 2008. El incremento de la cartera vencida en el sector hipotecario de Estados Unidos afectó considerablemente el mercado de instrumentos respaldados por hipotecas. A partir de septiembre de 2008, ante un entorno de desapalancamiento global y de mayor aversión al riesgo, en donde la fuerte desaceleración de las economías avanzadas afectó la actividad económica en las economías emergentes propició a que en la mayor parte de los países emergentes sus monedas se depreciaron de manera importante. En el caso de México (y de otras economías como Corea y Brasil), a partir de octubre el mercado cambiario se caracterizó en algunas ocasiones por mostrar poca liquidez. En algunos casos ello fue resultado de la demanda extraordinaria por parte de algunas empresas que mantenían posiciones cambiarias a través de productos derivados y que, a la postre, resultaron ser fuertemente perdedoras, (Banxico, 2009).

Como se observa en la Figura 1, la cotización del TCC (Tipo de Cambio a la Compra) y del TCV (Tipo de Cambio a la Venta) al parecer no presentan discrepancias significativas, sin embargo, en la Figura 2 se

muestran las diferencias entre el TCV y el TCC, las cuales se amplían principalmente en los cuatro años de inestabilidades cambiarias que se mencionaron anteriormente, por lo que, pudiera ser utilizado como una señal del sentimiento del mercado como señala Cortez (2004), sin embargo, se requiere de un mayor análisis sobre esta discusión, el cual rebasa el objetivo de este trabajo.

Figura 2. *Tipo de Cambio Venta menos Tipo de Cambio Compra (1995-2010)*



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico (2011)

Como punto de partida en el análisis de series temporales, se requiere que nuestros datos sean estacionarios, sin embargo, como observamos en la Figura 1 nuestros datos no parecen ser estacionarios en media. Para ello, realizamos la transformación expuesta por Osborne (1964) que consiste en calcular las primeras diferencias logarítmicas, que en fluctuaciones pequeñas, los valores son parecidos a los obtenidos por rendimientos o tasas de depreciación en nuestro caso, de hecho, pueden ser interpretados como rendimientos compuestos en el ámbito continuo como se señala en Brooks (2008), por lo que se considerarán en este artículo como sinónimos. Las series transformadas nos llevan a un total de 4024 observaciones en cada serie.

Para contrastar si las series transformadas son estacionarias aplicaremos el test de raíces unitarias conocido también como el test Dickey-

Fuller Aumentado (DFA). Si el valor que toma el estadístico t se encuentra en el área de aceptación de la hipótesis nula ( $H_0$ ) tomando de referencia el valor crítico o p-value, es decir, el riesgo de rechazar  $H_0$ , entonces existe una raíz unitaria, y por consiguiente la serie no es estacionaria con respecto a su media. Existen tres modelos de contraste: simple, con constante, con constante y tendencia, para mayores referencias véase Dickey y Fuller (1979).

Los resultados obtenidos en la prueba de DFA sobre las series de primeras diferencias logarítmicas del TCC ( $\Delta \ln TCC$ ) y TCV ( $\Delta \ln TCV$ ) se muestran en la Tabla 2. Como se puede observar los valores del estadístico t caen fuera del área de aceptación de la  $H_0$  concluyendo que las series son estacionarias con respecto a su media.

Tabla 2. *Test de raíces unitarias*

Simple				
	A la Compra		A la Venta	
Augmented Dickey-Fuller test statistic	Prob.*	t-Statistic	Prob.*	t-Statistic
Test critical values:	-11.4134	0.0000	-11.5223	0.0000
1% level	-2.565541			
5% level	-1.940903			
10% level	-1.616646			
Con Constante				
	A la Compra		A la Venta	
Augmented Dickey-Fuller test statistic	Prob.*	t-Statistic	Prob.*	t-Statistic
Test critical values:	-11.5281	0.0000	-11.6513	0.0000
1% level	-3.431803			
5% level	-2.862067			
10% level	-2.567094			
Con Constante y Tendencia				
	A la Compra		A la Venta	
Augmented Dickey-Fuller test statistic	Prob.*	t-Statistic	Prob.*	t-Statistic
Test critical values:	-11.5884	0.0000	-11.7376	0.0000
1% level	-3.960337			
5% level	-3.410931			
10% level	-3.127272			

Nota 1. Fuente: Elaboración propia utilizando el software Eviews 6

Concluimos que al aplicar primeras diferencias logarítmicas en el TC pesos/dólar eliminamos la raíz unitaria por lo que estas series son estacionarias al menos en media. El contraste DFA sólo comprueba el caso de estacionariedad en media ajustando un modelo autoregresivo (con retardos), pero como menciona Espinosa (2001: p25) no es un método de contraste de estacionariedad en términos genéricos. Sin embargo, al igual que este autor consideramos que las series de primeras diferencias son estacionarias en media. En relación a la estacionariedad en varianza supondremos por el momento que nuestros datos mantienen esta característica, sin embargo, revisaremos este tema cuando analizemos la estructura temporal de la varianza en un apartado más adelante.

Las características descriptivas de las primeras diferencias logarítmicas se presentan en la Tabla 3. La media de cada una de nuestras series tiene un valor muy cercano a cero, lo que viene a reforzar la estacionariedad de los datos.

Tabla 3. *Estadísticas descriptivas*

	A la Compra	A la Venta
Media .....	0.000232.....	0.000225
Error típico.....	0.000132.....	0.000132
Intervalo de confianza (95%): .....		
Límite inferior.....	-0.000027.....	-0.000035
Límite superior.....	0.000491.....	0.000485
Mediana .....	-0.000122.....	-0.000162
Desviación estándar.....	0.008385.....	0.008402
Varianza de la muestra .....	0.000070.....	0.000071
Asimetría.....	-1.281027.....	-1.716235
Asimetría estandarizada.....	-33.175062.....	-44.445729
Curtosis.....	69.073738.....	78.493620
Curtosis estandarizada.....	894.409343.....	1016.383775
Rango .....	0.273012.....	0.283433
Mínimo.....	-0.173382.....	-0.184178
Máximo.....	0.099630.....	0.099255
Número de datos (N).....	4024.....	4024

Nota 1. Fuente: Elaboración propia utilizando el software Eviews v7

En cuanto a las medidas de dispersión, se observa que el rango de se encuentra alrededor del 0.27 con los valores máximos en enero de 1995 y los mínimos en marzo de 1995 como consecuencia de la crisis que vivió



México en esa época. La desviación estándar nos indica que en promedio los datos varían aproximadamente en 0.8% alrededor de la media. La tasa de depreciación (o primeras diferencias logarítmicas) del TCV presenta ligeramente más volatilidad que la del TCC en los 15 años de estudio, es decir, que cuando el mercado reacciona ante la llegada de nueva información, la tasa de depreciación a la venta es la que presenta mayores movimientos que a la compra.

El coeficiente de asimetría revela un cierto grado de asimetría hacia la izquierda en ambas series que implica valores menores de cero, es decir, son más frecuentes las depreciaciones que las apreciaciones de la moneda. Por otra parte, el coeficiente de curtosis es muy superior a cero, por lo que estamos ante el caso de funciones de distribución leptocúrticas, ya que presentan un alto grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable. Con respecto a los coeficientes estandarizados de asimetría, tanto en  $\Delta \ln TCC$  como  $\Delta \ln TCV$ , fueron mayores a 1.96 en valor absoluto, es decir, estamos ante la presencia de funciones asimétricas. Por otra parte, el coeficiente de curtosis estandarizado es mayor a 1.96 en valor absoluto que nos conduce a rechazar los datos mesocúrticos.

Con lo anterior, podemos comentar que nuestras series muy probablemente no sigan una distribución normal. Al aplicar el test de Kolmogorov-Smirnov considerando como Hipótesis Nula que la distribución de nuestros datos es normal con media cero y desviación estándar de 0.008 concluimos que rechazamos la hipótesis con un 95% de confianza, véase Tabla 4.

Tabla 4. *Test de Bondad de Ajuste Kolmogorov-Smirnov (KS)*

	Estadístico KS	p-value
$\Delta \ln TCC$	8.762	0.000
$\Delta \ln TCV$	8.852	0.000

Nota 1. Fuente: Elaboración propia utilizando el software SPSS v19

Los resultados obtenidos nos dicen que las primeras diferencias logarítmicas del TC no se aproximan a una función de distribución normal. Sin embargo, esto no significa que los datos no sean independientes e idénticamente distribuidos. Para contrastar esta idea utilizamos el test desarrollado por Ljung & Box (1978). Si las observaciones no están correlacionadas entonces los coeficientes de autocorrelación serían ceros. La

autocorrelación de orden  $j$  ( $\rho_j$ ) es la correlación separada  $j$  periodos de la misma serie temporal, es decir,

$$\rho_j = \text{Corr}(X_t, X_{t-j}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-j})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)} \cdot \sqrt{\text{Var}(X_{t-j})}} \quad (1)$$

donde,  $\text{Cov}(X_t, X_{t-j})$  es la covarianza de  $X_t$  y  $X_{t-j}$ , además  $\text{Var}(X_t)$  y  $\text{Var}(X_{t-j})$  representan las varianzas de  $X_t$  y  $X_{t-j}$  respectivamente.

El estadístico Ljung-Box está representado por la siguiente expresión,

$$Q = n \cdot (n + 2) \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\rho_j}{n - j} \quad (2)$$

El estadístico de la ecuación 1 sigue una distribución Chi-Cuadrada con  $m$  grados de libertad, donde  $m$  es el número de retardos. Se contrasta la hipótesis nula de que los datos no están correlacionados. Al igual que con los contrastes de bondad de ajuste, se calcula el nivel crítico ( $p$ -value) y si es suficientemente bajo se conduce al rechazo de la hipótesis nula.

La Tabla 5 presenta los resultados del contraste para las primeras diferencias logarítmicas del TC a partir de los coeficientes de autocorrelación (AC) para un total de  $m=10$  retardos.

**Tabla 5. Test Ljung-Box sobre las primeras diferencias logarítmicas del TC**

Retardo	$\Delta \text{LnTCC}$			$\Delta \text{LnTCV}$		
	AC	Ljung-Box Q	p-value	AC	Ljung-Box Q	p-value
1	-.081	26.134	.000	-.069	19.437	.000
2	-.037	31.693	.000	-.053	30.729	.000
3	-.018	33.046	.000	-.007	30.913	.000
4	.008	33.276	.000	.005	31.003	.000
5	.009	33.570	.000	.005	31.121	.000
6	-.030	37.247	.000	-.029	34.607	.000
7	-.033	41.669	.000	-.031	38.597	.000
8	.091	75.017	.000	.085	67.596	.000
9	-.028	78.199	.000	-.017	68.794	.000
10	-.002	78.211	.000	-.009	69.089	.000

**Nota1.** Fuente: Elaboración propia utilizando el software SPSS v19

Como podemos observar en la Tabla 5 aceptamos la hipótesis de que los datos están correlacionados. Los valores críticos  $p$ -values son muy bajos. Por ello, concluimos que nuestros datos presentan una dependencia y por lo tanto, no son variables *iid*. Además, el TCC presenta una mayor

autocorrelación que el TCV, ya que como mencionamos anteriormente la tasa de depreciación (primera diferencia logarítmica) del TCC es menos volátil por lo que los datos presentan un grado mayor de correlación entre sí.

Los resultados anteriores nos llevan a preguntarnos si nuestras series presentan una cierta “memoria” por lo que nuestro siguiente paso será ajustar un modelo de series temporales que emule el comportamiento de nuestras series generando residuos independientes e idénticamente distribuidos.

### 3. Dinámica lineal estocástica: Modelo ARIMA

En el punto anterior encontramos evidencia de autocorrelación en nuestro datos, por lo que en esta sección aplicaremos la metodología desarrollada por Box & Jenkins (1976) a nuestros datos. En los métodos paramétricos de series temporales univariantes, como es el caso de la metodología Box-Jenkins, la información relevante para explicar el comportamiento de una variable está constituido por los valores pasados de la propia variable. Este método se caracteriza por explicar la estructura estocástica de la población que se supone genera la serie temporal. Por tal razón, el concepto de proceso estocástico es importante.

Podemos definir un proceso estocástico como un conjunto de variables aleatorias que dependen de un parámetro o argumento. En el análisis de series temporales, este parámetro es el tiempo. Una definición más completa tomada de Aznar & Trivez (1993: pág. 1) es la siguiente,

*Proceso estocástico: Familia de variables aleatorias  $\{X_t\}$ , en donde  $t=-\infty \dots +\infty$  señala el tiempo tal que para cada serie finita de elecciones de  $t$ , esto es,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  se define una distribución de probabilidad conjunta para las correspondientes variables aleatorias  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ .*

Un proceso estocástico se podría describir a través de su distribución de probabilidad conjunta, pero esto resulta complicado en la práctica. Por ello, usualmente (aunque de forma incompleta) se explica a partir de sus momentos; particularmente los de primer y segundo orden, es decir, la media,  $\mu_t = E(X_t)$ , la varianza,  $\sigma_t^2 = E(X_t - \mu_t)^2$  y las covarianzas entre variables referidas a distintos periodos de tiempo  $(t, s)$ ,  $\gamma_{t,s} = E[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$ . Sólo

en el caso de que el proceso provenga de una distribución normal, ambas descripciones coinciden.

Para la aplicación de la metodología Box-Jenkins se requiere que las series temporales sean estacionarias. Un proceso estocástico es estacionario (en sentido estricto) cuando su función de distribución conjunta no cambia respecto de un desplazamiento en el tiempo. La estacionariedad en sentido débil se cumple cuando se satisfacen tres propiedades: 1) las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias son constantes en el tiempo,  $E(X_t) = E(X_{t+m}) \forall m$ , es decir,  $\mu_t = \mu \forall t$ ; 2) las varianzas son constantes en el tiempo y finitas,  $Var(X_t) = Var(X_{t+m}) \forall m$ , es decir,  $\sigma_t^2 = \sigma^2 \forall t$  y 3) las covarianzas entre dos periodos de tiempo distintos sólo dependen del lapso de tiempo transcurrido entre estos dos periodos de tiempo,  $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+m}, X_{s+m}) \forall m$ , es decir,  $\gamma_{t,s} = \gamma_{|t-s|} \forall t, s$ .

Una implicación importante del supuesto de estacionariedad en la serie temporal es que las propiedades estadísticas de ésta no se afectan si se hace un cambio en el origen de tiempo. Esto significa que las relaciones estadísticas entre  $n$  observaciones con origen  $t$ , digamos  $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n-1}$  son las mismas que las relaciones estadísticas entre  $n$  observaciones en el origen  $t+j$ , o sea,  $X_{t+j}, X_{t+j+1}, \dots, X_{t+j+n-1}$ .

El fin del análisis estocástico de series temporales es inferir a partir de una serie temporal las características de la estructura probabilística subyacente. La idea es inferir las propiedades de la población (proceso estocástico) a partir de la muestra (serie temporal). Para ello, consideramos un caso particular del proceso estocástico: el proceso estocástico lineal discreto. Se dice que un proceso estocástico es lineal discreto si cada observación  $X_t$  puede expresarse de la forma:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (3)$$

donde  $\mu$  y los parámetros  $\psi_1, \psi_2, \dots$  son constantes, y  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$  es una secuencia de perturbaciones aleatorias distribuidas idéntica e independientemente con media cero y varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ , es decir, son ruidos blancos (Aznar & Trávez, 1993).

Aunque cualquier proceso estocástico lineal discreto puede escribirse en la forma general de la ecuación (3) nuestro interés se centra en procesos en los que los coeficientes  $\psi_i$  puedan expresarse en términos de un

pequeño número de parámetros, es decir, procesos (modelos), de medias móviles (*MA*), autorregresivos (*AR*) o mixtos autorregresivos de medias móviles (*ARMA*).

1) El modelo autorregresivo de orden  $p$ ,  $AR(p)$ , se define como:

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \dots + \varepsilon_t \quad (4)$$

donde  $\varepsilon_t$  es ruido blanco.

2) El modelo de medias móviles de orden  $q$ ,  $MA(q)$  se define como:

$$X_t = \mu - \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (5)$$

en donde el signo negativo de los coeficientes  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  se supone por mera conveniencia notacional.

3) Un posible problema asociado a cualquiera de las representaciones anteriores es que pueden contener demasiados parámetros, lo que puede reducir la eficiencia en la estimación. Por tal motivo, en la construcción de un modelo puede ser necesario incluir términos tanto autorregresivos como de medias móviles, es decir, un modelo autorregresivo de medias móviles de orden  $p, q$  o  $ARMA(p, q)$ , esto es,

$$X_t = \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (6)$$

El modelo autorregresivo de medias móviles integrados surge a consecuencia de la existencia de series temporales no estacionarias y por lo tanto, no podríamos suponer que éstas provengan de los 3 modelos presentados. Sin embargo, muchas de las series temporales tienen la propiedad de convertirse en estacionarias al diferenciar una o más veces la serie original. Por ejemplo, si diferenciamos una vez la serie no estacionaria de  $X_t$ , entonces podríamos tener una nueva serie estacionaria  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ .

Por tal, resulta conveniente considerar procesos estocásticos que incluso no cumpliendo originalmente las condiciones de estacionariedad, son susceptibles de transformarse en estacionarios efectuando alguna diferenciación. A estos procesos se les denomina modelos autorregresivos de medias móviles integrados o modelos estocásticos lineales no estacionarios homogéneos, esto es,  $ARIMA(p, d, q)$ . El parámetro  $d$  representa el número de veces que debe diferenciarse el proceso original para transformarse en estacionario, es decir, el grado u orden de homogeneidad.

La idea es encontrar un patrón que se parezca al de algún modelo como el  $AR(p)$ ,  $MA(q)$ ,  $ARMA(p,q)$  o  $ARIMA(p,d,q)$ , pero antes de llevar a cabo este objetivo tenemos que preguntarnos si la serie es o no estacionaria. Si no lo es entonces hay que realizar alguna transformación a nuestros datos, ya sea con logaritmos, aplicando diferencias o ambas. Como vimos anteriormente en nuestro caso utilizamos ambas transformaciones, es decir, tenemos series de primeras diferencias logarítmicas del TC o dicho de otra forma, la tasa de depreciación. Por ello, buscaremos identificar el modelo  $ARMA(p,q)$  que mejor se ajuste a las series de primeras diferencias logarítmicas que sería equivalente a un modelo  $ARIMA(p,1,q)$  de las series de logaritmos del TC .

Para estimar el número de parámetros  $p$  y  $q$  del modelo requerimos algún método que nos permita seleccionar de entre los modelos existentes, aquel que mejor se adapte a la estructura de nuestros datos. Para ello, primero se proponen unos valores iniciales de  $p$  y  $q$ , se estima el modelo, se calcula el error estimado de la varianza del modelo propuesto ( $\sigma^2$ ) y finalmente se selecciona el mejor modelo en base a este valor. En nuestro caso utilizamos el criterio de Schwarz (CS) desarrollado por Schwarz (1978), el cual como se menciona en Mills (1994: p29) a diferencia de otros criterios como el propuesto por Akaike (1974), penaliza más la inclusión de un mayor número de parámetros y por ello, evita errores en la estimación de modelos con gran cantidad de parámetros. El CS se define como sigue,

$$CS(p,q) = \log \hat{\sigma}^2 + \left( \frac{p+q}{n} \right) \cdot \log n \quad (7)$$

En relación a la estimación de los parámetros, buscamos los valores que minimizan  $\sum \varepsilon_t^2$ . En nuestros datos consideramos valores de  $p$  y  $q$  entre 0 y 10 inclusive, calculamos el valor de  $CS(p,q)$  y finalmente seleccionamos el modelo  $ARMA(p,q)$  que tenga el  $CS$  menor utilizando el paquete estadístico EViews v7. De esta forma el mejor modelo para las primeras diferencias logarítmicas del TC es un  $ARMA(10,9)$  para ambas series (véase Tabla 6). Para comprobar si los modelos estimados reflejan el comportamiento de los datos aplicamos el test de Ljung-Box sobre los residuos de los modelos. Si estos últimos se ajustan adecuadamente, los residuos deben ser variables *iid*, es decir,  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Si tomamos de referencia la Tabla 7 podríamos decir que con un nivel de significancia del 5% hasta el retardo 7 los datos son

independientes; aunque a medida que avanzamos en retardos posteriores esta independencia se pierde. Considerando un nivel de significancia del 1% tendríamos independencia hasta en un retardo más sólo en el caso del TCV, una respuesta a esto podría ser por el carácter más volátil de esta serie.

**Tabla 6. Resultados del modelo ARMA(p,q) para el TC**

$\Delta \text{LnTCC}$					$\Delta \text{LnTCV}$				
Variable	Coefficiente	Error Est.	t-estad.	Prob.	Variable	Coefficiente	Error Est.	t-estad.	Prob.
AR(1)	-0.472	0.040	-11.813	0.000	AR(1)	0.406	0.192	2.115	0.035
AR(2)	-0.986	0.026	-37.775	0.000	AR(2)	-1.420	0.158	-8.974	0.000
AR(3)	0.144	0.049	2.921	0.004	AR(3)	0.830	0.333	2.491	0.013
AR(4)	-0.135	0.044	-3.033	0.002	AR(4)	-0.890	0.295	-3.020	0.003
AR(5)	0.292	0.040	7.296	0.000	AR(5)	0.915	0.284	3.220	0.001
AR(6)	-0.205	0.042	-4.887	0.000	AR(6)	-0.964	0.286	-3.366	0.001
AR(7)	-0.572	0.040	-14.345	0.000	AR(7)	0.133	0.295	0.450	0.653
AR(8)	-0.575	0.026	-22.268	0.000	AR(8)	-0.575	0.145	-3.966	0.000
AR(9)	-0.638	0.029	-22.049	0.000	AR(9)	-0.342	0.157	-2.180	0.029
AR(10)	-0.020	0.015	-1.344	0.179	AR(10)	-0.050	0.015	-3.261	0.001
MA(1)	0.454	0.037	12.219	0.000	MA(1)	-0.456	0.192	-2.370	0.018
MA(2)	0.955	0.024	40.382	0.000	MA(2)	1.409	0.165	8.566	0.000
MA(3)	-0.202	0.047	-4.325	0.000	MA(3)	-0.907	0.338	-2.678	0.007
MA(4)	0.083	0.046	1.825	0.068	MA(4)	0.883	0.312	2.830	0.005
MA(5)	-0.321	0.040	-8.021	0.000	MA(5)	-0.966	0.297	-3.255	0.001
MA(6)	0.173	0.044	3.955	0.000	MA(6)	0.988	0.309	3.201	0.001
MA(7)	0.611	0.041	14.771	0.000	MA(7)	-0.138	0.314	-0.438	0.661
MA(8)	0.580	0.020	28.391	0.000	MA(8)	0.548	0.158	3.467	0.001
MA(9)	0.697	0.029	23.756	0.000	MA(9)	0.368	0.169	2.173	0.030
R-cuadrada	0.1256	Media var dependente	0.0002		R-cuadrada	0.1265	Media var. dep.	0.0002	
R-cuadrada Ajustada	0.1216	Desv. Est. var. dep.	0.0079		R-cuadrada Ajustada	0.1225	Desv. Est. var. dep.	0.0080	
Err.Est. de regresión	0.0074	Akaike info criterio	-6.9732		Err.Est. de regresión	0.0075	Akaike info criterio	-6.9329	
Suma resid cuadrados	0.2181	Schwarz criterio	-6.9433		Suma resid cuadrados	0.2270	Schwarz criterio	-6.9031	
Log likelihood	14014.1200	Hannan-Quinn criter.	-6.9626		Log likelihood	13933.4224	Hannan-Quinn criter.	-6.9224	
Durbin-Watson estat.	1.9960				Durbin-Watson estat.	1.9792			

**Nota1.** Fuente: Elaboración propia utilizando el EViews v7

**Tabla 7. Test Ljung-Box sobre los residuos del modelo ARMA(p,q) del TC**

Retardo	$\Delta \text{LnTCC}$			$\Delta \text{LnTCV}$		
	AC	Ljung-Box Q	p-value	AC	Ljung-Box Q	p-value
1	0.001	0.005	0.945	0.0076	0.2292	0.6321
2	-0.030	3.736	0.154	-0.0046	0.3161	0.8538
3	-0.018	5.047	0.168	-0.0143	1.1431	0.7667
4	0.020	6.584	0.160	-0.0006	1.1446	0.8871
5	0.011	7.113	0.212	0.0041	1.2125	0.9437
6	-0.007	7.283	0.295	0.0119	1.7779	0.9390
7	0.019	8.688	0.276	0.0444	9.6973	0.2064
8	0.081	35.102	0.000	0.0506	19.9861	0.0104
9	-0.033	39.360	0.000	-0.0235	22.2163	0.0082
10	-0.010	39.771	0.000	0.0146	23.0721	0.0105
11	-0.017	40.948	0.000	-0.0028	23.1031	0.0171
12	0.010	41.335	0.000	-0.0258	25.7755	0.0115
13	0.075	63.934	0.000	0.0819	52.8077	0.0000
14	-0.064	80.214	0.000	-0.0356	57.9075	0.0000
15	0.019	81.614	0.000	0.0076	58.1416	0.0000

**Nota1.** Fuente: Elaboración propia utilizando el EViews v7

## Dinámica No Lineal Estocástica & Mercado Cambiario

A pesar que la Tabla 7 presenta mejores resultados que los hallazgos de la Tabla 5 con los datos originales, no logramos eliminar toda la dependencia en los datos. Hasta ahora habíamos hecho un supuesto sobre la estacionariedad en la varianza, por lo que, una posible alternativa en la búsqueda de un modelo que se ajuste a los datos sería revisar la estructura temporal de la varianza.

#### **4. Estructura temporal de la varianza**

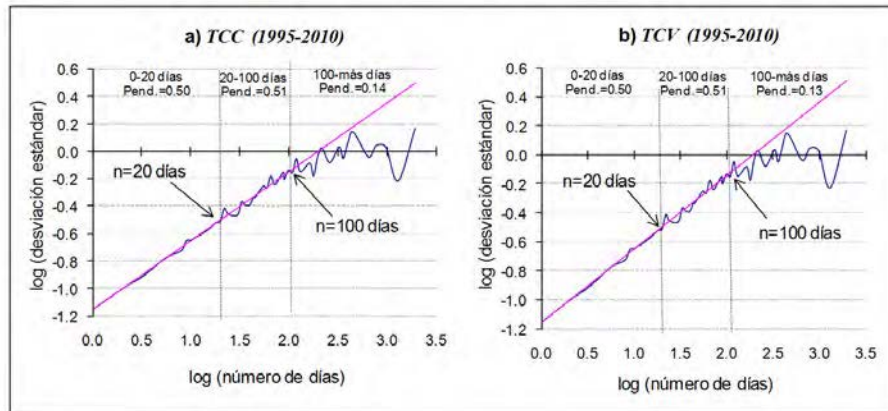
Existe un cierto consenso acerca de que la variación del tipo de cambio no es ruido blanco ya que, al cambiar con el tiempo su media y su varianza, no se distribuye independiente e idénticamente. Previamente habíamos señalado que al transformar nuestros datos originales en primeras diferencias logarítmicas obteníamos estacionariedad en media, de hecho ésta era muy cercana a cero. En cuanto a la estacionariedad en varianza comentamos que suponíamos que las series lo son. Sin embargo, a continuación ponemos en cuestión este supuesto.

Un supuesto necesario para aplicar la distribución normal a una serie temporal está relacionado con la estructura temporal de la varianza. Típicamente, usamos la desviación estándar para medir la volatilidad y asumimos que ésta incrementa con la raíz cuadrada del tiempo, por ejemplo, si tenemos la desviación estándar de rendimientos mensuales y queremos expresarla en forma anual sólo multiplicamos ésta por la raíz cuadrada de 12, ya que un año contiene 12 meses. Esta práctica se deriva del trabajo de Einstein (1905) sobre el movimiento browniano.

En la Figura 3 mostramos si se cumple o no esta regla en el régimen de libre flotación del TC pesos/dólar para la cotización de compra (TCC) y venta (TCV). Para construir las gráficas de esta figura hemos seleccionado las últimas 3961 observaciones con el objetivo de tener suficientes particiones enteras y así, generamos una serie de 3960 rendimientos (diferencias logarítmicas) diarios hasta una serie con 2 datos de rendimientos de 1080 días. Posteriormente, calculamos la desviación estándar en cada serie. Asimismo, construimos una línea con pendiente igual a 0.5 de tal forma que si la regla de Einstein se cumple entonces los puntos obtenidos deben seguir esta línea.



Figura 3. Volatilidad del TC (1995-2010)



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico (2011)

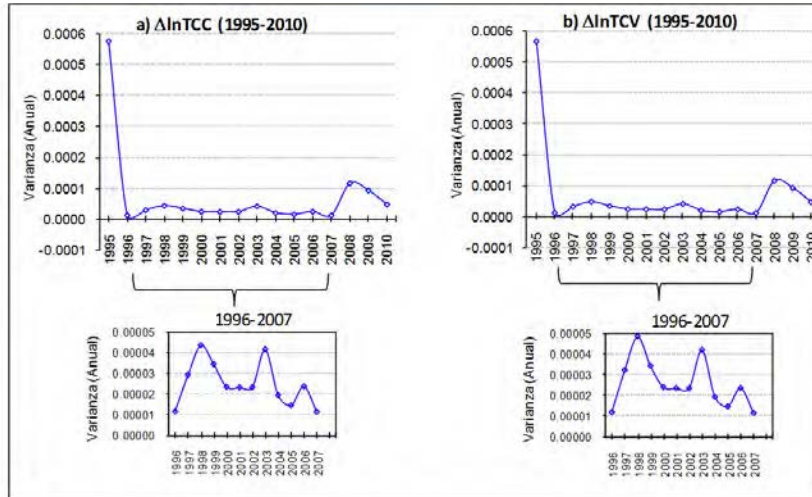
Podemos ver que los puntos siguen la línea recta para un periodo muy corto de 20 días hábiles en ambas cotizaciones (TCC y TCV). Si medimos la pendiente de nuestros datos hasta este punto ( $n=20$ ) tenemos un valor de 0.5. No obstante, al ir incrementando el número de días, la desviación estándar no incrementa según la raíz cuadrada del tiempo, en el caso de 20 a 100 días tenemos una pendiente ligeramente mayor de 0.51. Para 100 días o más sucede lo contrario, la desviación estándar decrementa según la raíz cuadrada del tiempo, ya que los puntos están por debajo de la línea con pendiente 0.50 y al calcular la pendiente en este segmento obtenemos un valor alrededor de 0.13.

Si tomamos la desviación como medida de riesgo, podríamos decir que el participante del mercado incurre en un riesgo similar al implicado en una distribución normal para un horizonte temporal menor que 20 días o 1 mes (llamaremos a este periodo corto plazo), esto es, la desviación estándar de rendimientos mensuales la podemos calcular multiplicando la desviación estándar de rendimientos diarios por la raíz cuadrada de 20 teniendo en cuenta que un mes tiene 20 días hábiles. Sin embargo, esto no puede aplicarse para un horizonte superior a 20 días, en este sentido tendríamos dos conclusiones: a) de 20 a 100 días (1 a 5 meses aproximadamente) el participante del mercado incurre en un riesgo mayor que el considerado en

una distribución normal (llamaremos a este lapso de tiempo mediano plazo), y b) de 100 a más días (más de 5 meses) se incurre en un riesgo menor que el considerado en una distribución normal (largo plazo).

Otra forma de visualizar la no estacionariedad de la varianza en nuestros datos la presentamos en la Figura 4 en donde se presenta la evolución histórica de la varianza. Como se puede observar, la varianza del TC no muestra una evolución constante en el tiempo. Los puntos más altos se visualizan en 1995 y en el 2008 a consecuencia de las inestabilidades cambiarias vividas en esos años. Por otro lado, pareciera que de 1996 a 2007 la varianza muestra una mayor estabilidad, sin embargo, si se observa con más detalle este lapso de tiempo en las gráficas más pequeños entonces podemos contemplar que la varianza no es constante en el tiempo. Ello puede ser la causa del alto grado de leptocurtosis revisado en las estadísticas descriptivas de las series.

Figura 4. Estructura temporal de la varianza del TC (1995-2010)



Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico (2011)

Los resultados anteriores nos llevan a cuestionarnos sobre la no linealidad de nuestros datos, lo que nos lleva a pensar en la búsqueda de un modelo que capte estas no linealidades, tema del siguiente punto.

K. Cortez, M.P. Rodríguez & A. Wong

## 5. Dinámica no lineal estocástica: Modelo *GARCH*

La estructura temporal de la volatilidad en el TC pesos/dólar no sigue una distribución normal. Como se mencionó anteriormente nuestras series mostraban un alto grado de leptocurtosis, característica de distribuciones de probabilidad con un apuntamiento elevado. Este tipo de distribuciones usualmente son evidencia de un proceso estocástico no lineal debido a la no estacionariedad de la varianza. Los modelos de la familia *ARCH* tratan de capturar este comportamiento.

Los procesos *ARCH* fueron introducidos por Engle (1982) y permiten que la varianza condicional cambie en el tiempo como función de los errores pasados dejando constante la varianza no condicional. La característica de los modelos *ARCH* es que hacen depender la varianza condicional ( $\sigma_t^2$ ) del cuadrado de los valores pasados del término de perturbación ( $\xi_t$ ) que representa la nueva información disponible a los agentes.

Por ejemplo, el logaritmo del tipo de cambio ( $s_t$ ) se puede modelizar como un proceso *ARCH*( $p$ ) de la siguiente manera,

$$s_t = s_{t-1} + \xi_t \quad (8)$$

$$\xi_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot \xi_{t-j}^2$$

$$Z_t = \frac{\xi_t}{\sigma_t}$$

donde  $p$  es el parámetro de retardo en el tiempo de  $\xi_t^2$ ,  $\alpha_0$  y  $\alpha_j$  con  $j=1, \dots, p$  son los parámetros que estimamos y  $Z_t$  representa los residuos estandarizados  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

El parámetro  $\alpha_0$  representa una constante y  $\alpha_j$  es la sensibilidad de la varianza condicional en relación a los residuos (o componente no esperado de la tasa de depreciación) del periodo anterior al cuadrado. El tamaño de este último va a determinar los movimientos de la varianza condicional, ya que si el valor es alto, la serie va a tener fuertes subidas y bajadas como

respuesta de la reacción de la varianza condicional a cambios en el componente no esperado.

Por otro lado, los procesos GARCH( $p, q$ ) propuestos por Bollerslev (1986) generalizan la dependencia de la varianza condicional incluyendo los propios valores pasados de ésta,

$$\begin{aligned}
 s_t &= s_{t-1} + \xi_t & (9) \\
 \xi_t &\sim N(0, \sigma_t^2) \\
 \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot \xi_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^q \delta_k \cdot \sigma_{t-k}^2 \\
 Z_t &= \frac{\xi_t}{\sigma_t}
 \end{aligned}$$

donde  $q$  es el parámetro de retardo en el tiempo de  $\sigma_t^2$  y ahora los parámetros que estimamos son  $\alpha_0$ ,  $\alpha_j$  con  $j=1, \dots, p$  y  $\delta_k$  con  $k=1, \dots, q$ .

El parámetro  $\delta_k$  representa la sensibilidad de la varianza condicional a la varianza condicional pasada, es decir, es el coeficiente de autocorrelación de la varianza condicional y nos da una señal de la persistencia (que tanto sigue una tendencia) de la serie.

En este sentido un proceso GARCH( $p, 0$ ) es lo mismo que un ARCH( $p$ ). No tratamos los teoremas ni la metodología para estimar los parámetros, los interesados en profundizar pueden remitirse a los artículos de Engle (1982) y Bollerslev (1986). Como hemos mencionado, se ha encontrado evidencia a favor de la caracterización de la variación de los tipos de cambio como procesos GARCH. Este tipo de modelos exhiben comportamientos de colas pesadas, es decir, los sucesos con baja probabilidad de ocurrencia en una distribución normal se reproducen con mayor frecuencia cuando ésta presenta colas pesadas.

A continuación estimamos los parámetros para nuestras series de TC en el periodo de libre flotación (1995-2010). Usamos el modelo GARCH(1,1), ya que es el más utilizado en series de TC. Los resultados se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8. Resultados del modelo GARCH(1,1) para el TC

$\Delta \ln TCC$					$\Delta \ln TCV$				
Variable	Coefficiente	Error Est.	z-estad.	Prob.	Variable	Coefficiente	Error Est.	z-estad.	Prob.
$\alpha_0$	0.0000014	0.0000001	13.8925090	0.000	$\alpha_0$	0.0000016	0.0000001	14.0123667	0.000
$\alpha_1$	0.1973504	0.0074094	26.6352320	0.000	$\alpha_1$	0.2218708	0.0062390	35.5617716	0.000
$\delta_1$	0.7800204	0.0079260	98.4132069	0.000	$\delta_1$	0.7612724	0.0068811	110.6325508	0.000
R-cuadrada	-0.0008	Media var dependiente	0.0002		R-cuadrada	-0.0007	Media var. dep.	0.0002	
R-cuadrada Ajustada	-0.0013	Desv. Est. var. dep.	0.0084		R-cuadrada Ajustada	-0.0012	Desv. Est. var. dep.	0.0084	
Err.Est. de regresión	0.0084	Akaike info criterio	-7.6098		Err.Est. de regresión	0.0084	Akaike info criterio	-7.5862	
Suma resid cuadrados	0.2840	Schwarz criterio	-7.6051		Suma resid cuadrados	0.2853	Schwarz criterio	-7.5815	
Log likelihood	15313.8666	Hannan-Quinn criter.	-7.6081		Log likelihood	15266.3448	Hannan-Quinn criter.	-7.5845	
Durbin-Watson estat.	2.1374				Durbin-Watson estat.	2.1168			

Nota1. Fuente: Elaboración propia utilizando el EViews v7

De los resultados de la Tabla 8 podemos observar claramente la existencia de efector ARCH (con las  $\alpha$ 's) y GARCH (con la  $\delta$ ) en la varianza condicional, ya que todos los parámetros son estadísticamente significativos.

El valor  $\alpha_0$  es prácticamente cero por lo que no existe un valor constante en la varianza condicional. Por otro lado, en el TCV se tiene más en cuenta las perturbaciones pasadas (al cuadrado) que en el TCC (parámetro  $\alpha_1$ ), es decir, la varianza condicional del TCV muestra mayores cambios repentinos que el TCC como respuesta a cambios fuertes en el componente no esperado. Una forma de interpretar lo anterior pudiera ser que una noticia inesperada tuviera más impacto en el cambio porcentual del TCV en relación con el TCC al ser más volátil la serie de primeras diferencias logarítmicas del TCV, esto es, habría cambios más bruscos en el precio de venta que de compra.

De forma contraria, en el TCV el peso de la varianza pasada es menor que en el TCC (parámetro  $\delta_1$ ). Lo anterior pudiera interpretarse como una mayor persistencia o una probabilidad mayor de seguir tendencias por parte de la varianza condicional de la serie de TCC, es decir, una noticia pudiera tener efectos más duraderos en la varianza condicional de los cambios porcentuales del TCC. Al ser más volátil la serie de primeras diferencias logarítmicas del TCV, ésta reaccionaría más rápido a la noticia y descontaría más pronto el impacto de esta noticia en comparación al TCC.

Para validar los modelos necesitamos comprobar que los residuos estandarizados  $Z_t$  sean independientes. Podemos emplear el test Ljung-Box, sin embargo, esta técnica no detectaría la dependencia no lineal de la serie. Una alternativa más viable sería el empleo del test BDS desarrollado por Brock et al. (1987) y llamado así por las siglas de sus autores (Brock-

Dechert-Scheinkman). El test BDS prueba la hipótesis nula que los datos de una serie temporal determinada son independientes e idénticamente distribuidos (*iid*). Este método es un test análogo al Ljung-Box, sin embargo, el test BDS detecta toda clase de dependencia, lineal o no lineal, a diferencia del Ljung-Box. Si la hipótesis nula se rechaza en el test BDS, entonces los datos no son *iid* por causa de la no estacionariedad, no linealidad o existencia de algún comportamiento caótico como lo señala Opong et al. (1999: p272) entre otros.

Originalmente el test BDS fue diseñado para probar la independencia en una serie temporal, pero como menciona Belaire y Contreras (2002: p 691) en la práctica el test es utilizado sobre los residuos de un modelo específico, para probar si todavía queda algún tipo de dependencia después de haber filtrado los datos con algún modelo. Por esta razón, el test es usado como una herramienta no paramétrica para la selección de modelos. El test BDS se basa en la integral de correlación,  $C_m(R)$ , esto es, la probabilidad de que un par de puntos en un espacio de fases  $m$  dimensional estén dentro de una distancia  $R$  (valor épsilon) de uno al otro. Brock et al. (1987) demostraron que si los datos son *iid*, entonces  $E[C_m(R)] = \{E[C_1(R)]\}^m$ . De esta forma, el estadístico BDS,  $W_m(R)$  queda definido como sigue,

$$W_m(R) = \sqrt{N} \cdot \frac{C_m(R) - C_1(R)^m}{\sigma_m(R)} \quad (10)$$

donde  $N$  es el número de observaciones de la serie y  $\sigma_m(R)$  es la desviación estándar de las integrales de correlación. El cuadrado de  $\sigma_m(R)$  es,

$$\sigma_m^2(R) = 4 \cdot \left\{ k^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \left[ k^{m-j} \cdot c^{2j} + (m-1)^2 \cdot c^{2m} - m^2 \cdot k \cdot c^{2m-2} \right] \right\} \quad (11)$$

$$c = C_1(R)$$

$$k = \frac{1}{N^3} \sum_{h=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \theta(R - \|X_h - X_i\|) \cdot \theta(R - \|X_i - X_j\|) \right)$$

$$\theta(R - \|X_h - X_i\|) = \begin{cases} 1 & \text{si } R - \|X_h - X_i\| > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$\theta(R - \|X_i - X_j\|) = \begin{cases} 1 & \text{si } R - \|X_i - X_j\| > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

**K. Cortez, M.P. Rodríguez & A. Wong**

Así,  $[C_m(R) - C_1(R)^m]$  tiene una distribución normal asintótica de media cero y varianza  $\sigma_m^2(R)$ . La hipótesis nula puede rechazarse con un 95% de confianza si  $|W_m(R)| > 2$  y con 99% si  $|W_m(R)| > 3$ . Sin embargo, Brock et al. (1991) mostraron que la distribución asintótica del estadístico BDS no es aplicable a los residuos estandarizados de modelos GARCH. Por tal motivo, proponen realizar simulaciones de la distribución de los datos como guía para encontrar los valores críticos del estadístico BDS, esta técnica se llama *bootstrapping* y fue introducida por Efron (1979). Este término se ha sido traducido por “autodocimasia” y por el de “iniciador”, sin embargo, utilizaremos el término en inglés por su mayor uso incluso en literatura en español.

El *bootstrapping* se diferencia del enfoque tradicional paramétrico en que emplea un gran número de cálculos repetitivos para estimar la forma de la distribución muestral del estadístico, en lugar de asunciones distribucionales y fórmulas analíticas. En el *bootstrapping*, tratamos la muestra como si fuera la población y realizamos un procedimiento del estilo Monte Carlo sobre la muestra. Esto se hace extrayendo aleatoriamente un gran número de “submuestras” de tamaño  $n$  de la muestra original y con reposición. Así, aunque cada submuestra tiene el mismo número de elementos que la serie original cada una de ellas puede tener algunos de los datos originales más de una vez y algunos que no aparezcan.

Por lo tanto, cada serie generada probablemente es leve y aleatoriamente diferente de la muestra original. Por ello, un estadístico calculado a partir de una submuestra toma un valor ligeramente distinto del obtenido en las otras. Con esta idea, se calcula el estadístico BDS para cada una de ellas y se compara con el obtenido de los datos originales. Se cuantifica el número de repeticiones con un estadístico superior e inferior al original. Obtenemos la menor de estas dos cuantías y la dividimos entre el número total de repeticiones. El resultado se multiplica por dos para tener en cuenta las dos colas de la distribución y tenemos el *p-value*.

Así, el *p-value* es la probabilidad de que los datos simulados con un estadístico BDS sea mayor en valor absoluto que el generado por los residuos GARCH de los datos originales. Si el *p-value* es menor que 0.05 rechazamos la hipótesis de independencia con un nivel de significancia del 5%.

Antes de aplicar esta técnica en los modelos GARCH estimados realizamos el ejercicio con los residuos de los modelos ARMA estimados a manera de comparación. Los resultados se muestran en la Tabla 9. Como podemos observar los valores del estadístico BDS son altos y por consiguiente los *p-values* (Prob.Boots.) son bajos (menores a 0.05) para todas las dimensiones de inmersión (*m*) presentadas. Por lo tanto, los residuos del modelo ARMA no son variables *iid* y presentan una dependencia no lineal.

Tabla 9. Resultados del análisis BDS sobre residuos del modelo ARMA(9,10) para el TC utilizando bootstrapping.

$\Delta \text{LnTCC}$					$\Delta \text{LnTCV}$						
Dimensión	BDS estad.	Error Est.	z-estad.	Prob.Normal	Prob.Boot.	Dimensión	BDS estad.	Error Est.	z-estad.	Prob.Normal	Prob.Boot.
2	<b>0.033349</b>	0.0016	20.9852	0.0000	<b>0.0000</b>	2	<b>0.031961</b>	0.0016	20.0518	0.0000	<b>0.0000</b>
3	<b>0.062268</b>	0.0025	24.6729	0.0000	<b>0.0000</b>	3	<b>0.060471</b>	0.0025	23.8844	0.0000	<b>0.0000</b>
4	<b>0.082175</b>	0.0030	27.3556	0.0000	<b>0.0000</b>	4	<b>0.080564</b>	0.0030	26.7281	0.0000	<b>0.0000</b>
5	<b>0.093094</b>	0.0031	29.7433	0.0000	<b>0.0000</b>	5	<b>0.091285</b>	0.0031	29.0599	0.0000	<b>0.0000</b>
6	<b>0.096916</b>	0.0030	32.1161	0.0000	<b>0.0000</b>	6	<b>0.095375</b>	0.0030	31.4845	0.0000	<b>0.0000</b>
Épsilon 0.007722					Épsilon 0.007752						
Pares dentro de épsilon 11326960 V-estadist 0.70301					Pares dentro de épsilon 11329014 V-estadist 0.70313						
Triples dentro de épsilon 3.52E+10 V-estadist 0.54455					Triples dentro de épsilon 3.52E+10 V-estadist 0.54488						

**Nota1.** Fuente: Elaboración propia utilizando el EViews v7

**Nota2.** Para el cálculo del *p-value* se elaboraron 2000 repeticiones (submuestras).

Si ahora aplicamos el test BDS utilizando la técnica de *bootstrapping* a los residuos de los modelos BDS estimados entonces encontramos resultados contrarios a los modelos ARMA (véase Tabla 10). Los valores del estadístico BDS son bajos y por consiguiente los *p-values* son altos para todas las dimensiones de inmersión (*m*) presentadas. Con estos resultados no podemos rechazar la hipótesis de independencia de los residuos y por consiguiente validamos el modelo GARCH(1,1).

Tabla 10. Resultados del análisis BDS sobre residuos del modelo GARCH(1,1) para el TC utilizando Bootstrapping.

$\Delta \text{LnTCC}$					$\Delta \text{LnTCV}$						
Dimensión	BDS estad.	Error Est.	z-estad.	Prob.Normal	Prob.Boot.	Dimensión	BDS estad.	Error Est.	z-estad.	Prob.Normal	Prob.Boot.
2	<b>0.000310</b>	0.0013	0.2388	0.8112	<b>0.7850</b>	2	<b>-0.000184</b>	0.0013	-0.1409	0.8880	<b>0.8880</b>
3	<b>0.000365</b>	0.0021	0.1773	0.8592	<b>0.8300</b>	3	<b>-0.000935</b>	0.0021	-0.4512	0.6519	<b>0.6830</b>
4	<b>-0.000008</b>	0.0024	-0.0032	0.9974	<b>0.9890</b>	4	<b>-0.001566</b>	0.0025	-0.6343	0.5259	<b>0.5240</b>
5	<b>-0.000270</b>	0.0025	-0.1062	0.9154	<b>0.9260</b>	5	<b>-0.001945</b>	0.0026	-0.7558	0.4498	<b>0.4560</b>
6	<b>-0.000121</b>	0.0024	-0.0494	0.9606	<b>0.9750</b>	6	<b>-0.001732</b>	0.0025	-0.6978	0.4853	<b>0.5050</b>
Épsilon 1.346433					Épsilon 1.339769						
Pares dentro de épsilon 11389218 V-estadist 0.70336					Pares dentro de épsilon 11414498 V-estadist 0.70492						
Triples dentro de épsilon 3.49E+10 V-estadist 0.53586					Triples dentro de épsilon 3.51E+10 V-estadist 0.53827						

**Nota1.** Fuente: Elaboración propia utilizando el EViews v7

**Nota2.** Para el cálculo del *p-value* se elaboraron 2000 repeticiones (submuestras).



## 5. Conclusiones

En suma podemos concluir que existe una dependencia no lineal estocástica como consecuencia de una varianza condicional a valores pasados no constante: el TC pesos/dólar en el régimen de flotación (1995-2010) presenta una volatilidad no constante que sigue un modelo GARCH(1,1). Lo anterior se puede interpretar como periodos con mayor (o menor) riesgo que otros, si consideramos la volatilidad (desviación estándar) como medida de riesgo. De hecho, durante este lapso de tiempo el tipo de cambio pesos/dólar sufrió 4 importantes depreciaciones a raíz de los acontecimientos económicos de 1995, 1998, 2003 y 2008 lo que generó una alta volatilidad en este mercado.

Por otro lado, resulta interesante mencionar las conclusiones relacionadas con la diferencia entre las paridades de compra y venta. La tasa de depreciación (primeras diferencias logarítmicas) del TC venta muestran una mayor volatilidad que el TC compra. Además, se encontró evidencia de una menor persistencia en el comportamiento de la paridad de venta, es decir, al ser más volátil descuenta más rápidamente la llegada de nueva información, mientras que en el TC compra esta información puede perdurar más tiempo y tener menos cambios bruscos. Estos resultados pudieran interpretarse que ante una noticia, el mercado reacciona rápidamente con movimientos en la paridad de venta ampliando el diferencial de ambas cotizaciones, por lo que pudiera considerarse como un indicador del sentimiento del mercado, sin embargo, se requiere de un análisis más profundo de ello. Otra línea de investigación sería identificar variables explicativas que pudieran incrementar el valor del coeficiente de determinación ( $R^2$ ) de los modelos aquí expuestos.

## Referencias

- Akaike, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723.
- Aznar, A., & Trivez, F. J. (1993). *Métodos de predicción en economía II. Análisis de series temporales*. Barcelona: Ariel Economía.
- Backus, D. (1984). Empirical models of the exchange rate: Separating the wheat from the shaft. *The Canadian Journal of Economics*, 17(4), págs. 824-846.

- Baille, R. T., & Bollerslev, T. (1989). The message in daily exchange rates: A conditional variance tale. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7(3), págs. 297-305.
- Banxico. (2011). *Estadísticas Económicas y Financieras*. Recuperado el : 01 de abril de 2011, de Banco de México: <http://www.banxico.org.mx/estadisticas/index.html>
- Banxico. (1996). *Exposición sobre la Política Monetaria para 1996*. México, D.F: Banco de México.
- Banxico. (1996). *Informe anual 1995*. México, D.F: Banco de México.
- Banxico. (1999). *Informe anual 1998*. México, D.F: Banco de México.
- Banxico. (2004). *Informe anual 2003*. México, D.F: Banco de México.
- Banxico. (2009). *Informe anual 2008*. México, D.F: Banco de México.
- Banxico. (2009). *Regímenes cambiarios en México a partir de 1954*. México, D.F: Banco de México.
- Belaire-Franch, J., & Contreras, D. (2002). How to compute the BDS test: A software comparison. *Journal of Applied Econometrics* 17(6), 691-699.
- Bilson, J. F. (1978). The monetary approach to the exchange rate: Some empirical evidence. *IMF Staff Papers*, 25(1), págs. 48-75.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day Inc.
- Brock, W. A., Dechert, W. D., & Scheinkman, J. A. (1987). A test for independence based on the correlation dimension. *SSRI Working Paper*, 8702, Department of Economics, University of Wisconsin-Madison.
- Brooks, C. (2008). *Introductory econometrics for finance* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.
- Cortez, K. (2004). *Dinámica no lineal del tipo de cambio: aplicación al mercado mexicano*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, Facultad de Economía y Empresa, Barcelona, España.
- Dickey, D., & Fuller, W. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series. *Journal of the American Statistical Association*, 24(366), 427-431.
- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 17, 549-560.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometría*, 50(4), 987-1007.

- Espinosa-Navarro, F. (2001). *Modelización no browniana de series temporales financieras*. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, Facultad de Economía y Empresa, Barcelona, España.
- Frenkel, J. A. (1976). A monetary approach to the exchange rate: Doctrinal aspects and empirical evidence. *Scandinavian Journal of Economics*, 78(2), págs. 200-224.
- Grauwe, P., Dewachter, H., & Embrechts, M. (1993). *Exchange rate theory: Chaotic models of foreign exchange markets*. Oxford, UK: Blackwell.
- Hsieh, D. (1989). Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates. *Journal of Business*, 62(3), págs. 339-368.
- Kugler, P., & Lenz, C. (1993). Chaos, ARCH and the foreign exchange market: Empirical results from weekly data. *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*, 40(2), págs. 127-140.
- Ljung, G., & Box, G. (1978). On a measure of a lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2), 297-303.
- Meese, R. A., & Rogoff, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies: Do they fit out of sample? *Journal of International Economics*, 14(1), págs. 3-24.
- Meese, R. A., & Singleton, K. J. (1982). On unit roots and the empirical modeling of exchange rates. *Journal of Finance*, 37(4), págs. 1029-1035.
- Mills, T. C. (1994). *The econometrics modelling of financial time series*. Cambridge, Mass: Cambridge University Press.
- Mussa, M. (1976). The exchange rate, the balance of payments and monetary and fiscal policy under a regime of controlled floating. *Scandinavian Journal of Economics*, 78(2), págs. 229-248.
- Opong, K. K., Mulholland, G., Fox, A. F., & Farahmand, K. (1999). The behaviour of some UK equity indices: An Application of Hurst and BDS tests. *Journal of Empirical Finance*, 6(3), 267-282.
- Osborne, M. (1964). Brownian motion in the stock market. En P. H. Cootner (Ed.), *The random character of stock market price*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.