

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



MODELOS ENTEROS  
PARA EL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO  
DE CIRCULOS EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR

POR

RUTH LIZETH ZAMARRÓN CASTRO

EN OPCION AL GRADO EN  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

ABRIL 2014

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**MODELOS ENTEROS  
PARA EL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO  
DE CIRCULOS EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR**

POR

**RUTH LIZETH ZAMARRÓN CASTRO**

**EN OPCION AL GRADO EN  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN,

ABRIL 2014

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Modelos Enteros para el Problema de Empaquetamiento de Círculos en un Contenedor Rectangular”, realizada por la alumna Ruth Lizeth Zamarrón Castro, con número de matrícula 1210579, sea aceptada como defensa como opción al grado en Maestría en Ingeniería con especialidad en Ingeniería en Sistemas.

El Comité de Tesis



---

Dr. Igor Litvinchev  
Director



Dra. Yasmín Ríos Solís  
Revisora

---

Dr. José Antonio Marmolejo

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios en Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Abril 2014

A mis padres, esposo, hijo, hermanos, hermanas que han estado siempre conmigo y por su apoyo incondicional en cada momento de mi vida.

# INDICE GENERAL

---

Agradecimientos	VIII
Resumen	X
1. Introducción	1
1.1. Motivación	
1.2. Objetivos	
1.3. Contribución	
1.4. Metodología	
1.5. Estructura de la tesis	
2. Marco teórico	6
2.1. Empaquetamiento de círculos de radios iguales en 2D	
2.1.1. Contenedor circular	
2.1.2. Contenedor cuadrado	
2.1.3. Contenedor rectangular	
2.1.4. Contenedor triangular	
2.1.5. Diversos contenedores	

2.2 Empaquetamiento de círculos de radios diferentes en 2D	
2.2.1 Contenedor circular	
2.2.2 Contenedor rectangular	
2.2.3 Diversos contenedores	
2.3 Problema de empaquetamiento de círculos en 3D	
2.3.1 Contenedor paralelepípedo	
2.3.2 Diversos contenedores	
2.4 Aplicaciones	
3. Formulaciones para el problema de empaquetamiento de círculos	17
3.1 Formulaciones de empaquetamiento de círculos en 2D	
3.1.1 Empaquetamiento de círculos en un círculo	
3.1.2 Empaquetamiento de círculos en un cuadrado	
3.1.3 Empaquetamiento de círculos en un rectángulo	
3.2 Formulaciones de empaquetamiento de círculos en 3D	
3.3 Formulaciones en diversos contenedores	
4. Metodología de Solución	31
4.1 Modelo	
4.1.1 Primera Formulación	
4.1.2 Segunda Formulación	
4.1.3 Tercera Formulación	
4.2 Algoritmo	

5. Experimentación y resultados	37
5.1 Parámetros	
5.2 Casos de la literatura	
6. Conclusiones	47
6.1 Trabajo futuro	
7. Apéndice A. Algoritmos	49
8. Apéndice B. Figuras	52
9. Apéndice C. Trabajo futuro	56
10. Índice de Figuras	60
11. Índice de Tablas	62
10. Bibliografía	64

# AGRADECIMIENTOS

---

No temas, porque yo estoy contigo;  
No desmayes, porque yo soy tu Dios que te esfuerzo;  
Siempre te ayudare, siempre te sustentare con la diestra de mi justicia.  
Isaías 41:10

Primero quiero agradecer a Dios, por las grandes bendiciones que me ha dado, por darme vida y salud, por mi familia, amigos, compañeros, por las experiencias que he vivido y las oportunidades que tenido. Por ser mi refugio. Gracias.

A mi Hijo Urim que siempre ha sido mi fortaleza, mi esposo que ha compartido conmigo grandes momentos y a pesar de todo sigue a mi lado.

A mi madre que ya no está con nosotros y sin ella nunca hubiera podido ser lo que soy. Mi padre que siempre me ha apoyado. Mi hermana Cecilia que siempre me ha escuchado, siempre está ahí cuando la necesito y por lo fuerte que es. Mi hermana Lorena, que fue la que me enseñó la importancia de estudiar. Mi hermano Héctor que a pesar de los momentos difíciles que está pasando siempre me ha alentado a seguir adelante. Mi hermana Adriana que con su fuerte carácter he aprendido a ser fuerte y siempre ha sabido que hacer o que decir. Mi hermana Mayra que siempre me recuerda la bendición de la vida. Por mi

hermana Nelly que me cuidó al crecer. Y por último, mi hermano Antonio, que tuvo que brindarnos todo para que nuestro futuro fuera mejor. Por su amor.

A mi amiga Nelly que está a mi lado en mis tristezas y alegrías. Mis amigos que me han dado su confianza y cariño. A mis sobrinos, cuñados por su aliento y apoyo.

Al Dr. Igor Litvinchev, por su tiempo, apoyo, por su paciencia, por sus enseñanzas y por creer en mí. A mi equipo de trabajo, Dra. Lucero Ozuna, por su tiempo, por sus palabras y por toda la ayuda que me ha dado a lo largo de este proyecto. A la Dr. Yasmin Ríos, por su tiempo, ayuda y paciencia. Al Dr. Antonio Marmolejo por su tiempo. A la Dra. Socorro Rangel, por recibirme en la UNESP, por su apoyo y tiempo.

A Dory, por su tiempo y amistad; a Lily, Nancy, Lilian, Christopher, Brenda, Juan, Luis, David y Dago y todos mis compañeros. Les agradezco los buenos momentos, por su tiempo, por la ayuda y el apoyo en este proceso. A Luis Infante, por su apoyo en Brasil, por sus enseñanzas, tiempo y paciencia.

A todo el cuerpo académico de PISIS, por su disposición y ayuda. Al Dr. Oscar Chacón, por su humildad y por su apoyo.

Quiero agradecer a CONACYT, FIME, y la UANL por el apoyo económico para realizar el Posgrado.

A todos aquellos que me faltó agradecer, que han estado conmigo y me han apoyado a lo largo de todo este proceso.

# RESUMEN

---

Ruth Lizeth Zamarrón Castro

Candidato para el grado en Maestría

con especialidad en Ingeniería en Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título de Estudio:

## MODELOS ENTEROS PARA EL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO DE CIRCULOS EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR

**OBJETIVOS Y METODOS DE ESTUDIO:** El objetivo general de este trabajo consiste en desarrollar e implementar un modelo de optimización lineal entera para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular.

La formulación de un problema es de suma importancia para encontrar su solución, por tal motivo, en el presente trabajo se estudian cuatro formulaciones equivalentes para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular y se busca aprovechar la estructura del mismo con el propósito de comparar la calidad de las diversas formulaciones.

Se busca encontrar una solución similar a lo existente en la literatura que depende de la cantidad de círculos a empaquetar, y otro de los objetivos que se espera es obtener un mejor tiempo para la solución del problema. Para esto, se desarrolla un modelo lineal entero binario para encontrar la solución y no un modelo basado en variables continuas que es lo que se hace comúnmente en la literatura para resolver el empaquetamiento de círculos.

Se encuentra una mejor solución que proporciona la solución factible para el problema, y se estudia además el tiempo en el que se encuentran dichas soluciones.

Se utiliza una formulación que cumple con todas las características del problema de empaquetamiento, una segunda formulación que cuenta con las restricciones de intersección, una tercera formulación que es compacta ya que elimina las restricciones que se duplican en la restricción de intersección y una última formulación que es compacta y utiliza las restricciones de intersección.

**CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES:** Se comparan numéricamente las diferentes soluciones que se encuentran, dependiendo de la cantidad de círculos que se empaquetaron, el tiempo en el que se resuelven las formulaciones, así como con las obtenidas en la literatura.

En la mayoría de los trabajos que tratan el problema de empaquetamiento son modelos no lineales, en donde las variables continuas son las coordenadas de los centros de los círculos que se procura empaquetar. Sin embargo, en la experimentación encontramos que con un modelo lineal binario: a) se pueden encontrar los mismos resultados, o la misma cantidad de círculos a empaquetar en el contenedor rectangular. b) el tiempo para encontrar la solución es el mismo o menor dependiendo del caso.

Algunos de los resultados de este trabajo se han presentado en congresos o foros nacionales e internacionales como:

- Segundo Congreso de la Sociedad Mexicana de Investigación de Operaciones/ Quinto Taller Iberoamericano de Investigación de Operaciones (TLAIO), Acapulco, México, noviembre 2013.

- Ciclo de Seminarios de la Universidad Estadual Paulista campus S. J. do Rio Preto, S.P. Brasil, Agosto 2013.
- Semana Cultural de la FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México, Octubre 2013.
- XXIII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico (ENOAN), Saltillo Coahuila, México, Abril 2013.
- Seminario de Investigación del Posgrado en Ingeniería en Sistemas, UANL, Abril 2013.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dr. Igor Litvinchev

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

El problema de empaquetamiento es un problema de optimización combinatoria, que abarca la búsqueda de la disposición adecuada de varios elementos u objetos en algún contenedor, ya sea de forma regular (círculos, cuadrados, rectángulos) o irregular.

Principalmente, la estructura general del problema empaquetamiento tiene las siguientes características (Washer 2007):

- Dimensionalidad

Se distinguen entre 2, 3 o hasta  $n$  dimensiones del problema.

- Tipos de asignación

Representa a los objetivos del problema.

- Maximización de las entradas (valor). Un stock de grandes objetos (cajas, contenedores) de tamaños fijos o estándar que tienen que ser utilizados para empaquetar las piezas para satisfacer las demandas de empaque.
- Minimización de las salidas (valor). Un conjunto de órdenes solicitando el empaquetado de ciertas piezas (ítems, cajas), en general de diferentes tamaños y en determinadas cantidades.

- Tamaño de los objetos

Existe una gran variedad de objetos (grandes o pequeños) a empaquetar.

El objetivo del problema de empaquetamiento es minimizar el área desperdiciada o maximizar la cantidad de objetos a colocar en el contenedor a utilizar.

Hay una gran variedad de problemas de empaquetamiento que depende de la forma del contenedor o de los objetos que se van a empaquetar.

Por ejemplo, existen diferentes tipos de empaquetamiento según la forma del contenedor:

- Empaquetamiento de círculos,
- Empaquetamiento de esferas,
- Empaquetamiento hiperbólico,

En este trabajo de investigación nos enfocaremos en resolver el problema de empaquetamiento de círculos en dos dimensiones (por sus siglas en inglés CPP Circle Packing Problem), que se refiere al arreglo de círculos de tamaños iguales o diferentes en alguna superficie de tal manera que no se intercepten entre sí. El objetivo del problema de empaquetamiento de círculos es maximizar el área que van a utilizar los círculos en el contenedor, con el fin de que el área desperdiciada sea mínima.

También se mencionaran algunas formulaciones y algoritmos para resolver el problema de empaquetamiento en tres dimensiones (3D).

## 1.1 MOTIVACIÓN

Este problema no solo consiste en empaquetar los círculos en el contenedor, sino también conocer la ubicación de los círculos para lograr un empaquetamiento eficiente.

La solución de este problema constituye una cuestión de interés para las empresas en el área de logística, debido al ahorro económico que se puede presentar al lograr un mejor empaquetamiento; en efecto deben de realizar el empaquetado de sus productos con el fin de lograr una mejor distribución, almacenaje y para conservarlos en buen estado. (Castillo et al. 2008).

En los trabajos estudiados de la literatura, los modelos establecidos para el problema de empaquetamiento presentan formulaciones no lineales y no convexas. Para solucionar el problema se utilizan generalmente diversos métodos heurísticos.

## 1.2 OBJETIVOS

El objetivo general de este problema es brindar un modelo lineal entero de gran escala que contenga restricciones tipo asignación, para establecer la proximidad al problema de empaquetamiento de círculos.

Entre los objetivos particulares se encuentran los siguientes:

- Elaborar una herramienta de programación matemática que ayude a determinar la cantidad de círculos a colocar en el contenedor.
- Colocar la mayor cantidad de círculos posible en el contenedor
- Minimizar el área desperdiciada del contenedor.
- Validar las formulaciones establecidas para el problema, para aplicarlo a círculos de radios iguales y diferentes.
- Realizar experimentación extensa para comparar la metodología propuesta con métodos existentes.

### 1.3 CONTRIBUCIÓN

En la literatura se encuentran modelos no lineales, en donde las variables continuas son las coordenadas de los centros de los círculos. (Correia et al. 2000). Por lo tanto, el problema va a ser abordado desde un enfoque que aún no ha sido aplicado. En efecto, se establecerán modelos lineales para resolverlo, las variables del modelo serán variables enteras de tipo asignación.

La principal contribución es el cubrimiento de nodos o puntos al contenedor a utilizar, en donde los centros de círculos deben de estar asignados en los puntos interiores del conjunto que cubre al contenedor.

Debido a su linealidad este método puede aplicarse de manera general a cualquier tipo de contenedor, rectangular o contenedores irregulares.

Además, se puede introducir el término telescopia, es decir, colocar círculos dentro de otros círculos de un radio mayor; con el fin de utilizar la mayor cantidad de área posible del contenedor.

Mediante un análisis experimental, encontramos que el método entero encuentra soluciones factibles al comparar los resultados con lo encontrado en la literatura.

## 1.4 METODOLOGÍA

Se realizan las siguientes actividades:

- Una extensa revisión bibliográfica.
- Analizar los modelos que han sido desarrollados para resolver el problema de empaquetamiento y revisar las diferentes estrategias que se han utilizado para resolverlo.
- Elaborar el modelo matemático para resolver el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular,
- Realizar el programa en un solver para círculos del mismo radio en contenedores de forma rectangular.
- Validación del modelo para utilizar diferentes metodologías de solución.
- Validar el modelo para aplicarlo a círculos de diferentes radios.
- Realizar experimentación extensa para comparar la metodología propuesta con los métodos existentes.

En general, para cumplir con los objetivos propuestos se presentan diversas metodologías equivalentes del problema y se comparan los resultados obtenidos en la experimentación con los resultados encontrados en las publicaciones.

## 1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente forma. El capítulo 2 presenta una revisión de algunas estrategias de solución utilizados en la literatura del problema de empaquetamiento de círculos en diferentes contenedores, como el circular, cuadrado, rectangular. Además de algunas referencias de las aplicaciones del problema.

En el capítulo 3 trata sobre la literatura de las diferentes formulaciones del empaquetamiento de círculos. También se hace referencia de algunas estrategias de solución.

La descripción del problema de investigación y una nueva formulación para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular se presentan en el capítulo 4 del trabajo.

El capítulo 5 se dedica a los resultados factibles para el problema de empaquetamiento de círculos obtenido por la metodología propuesta.

En el capítulo 6 se presenta la experimentación computacional. Se muestran los tamaños de las instancias usados a lo largo de la investigación y las comparaciones con otras publicaciones.

El capítulo 7 contiene las conclusiones obtenidas de este trabajo.

## CAPITULO 2

# MARCO TEÓRICO

---

En este capítulo se presenta la literatura del problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor.

Para resolver el problema se consideran dos objetivos en la literatura:

- a) Los círculos son de tamaño fijo y el contenedor es de tamaño variable.

Algunos ejemplos pueden ser: ·

- Para un contenedor cuadrado o rectangular.
  - Minimizar el perímetro del rectángulo.
  - Minimizar el área del rectángulo.
  - Minimizar la longitud.
- Teniendo en cuenta la dimensión fija del rectángulo, reducir al mínimo la otra dimensión.

Los problemas de este tipo se suelen referirse a problemas circulares dimensión abierta (Beasley 2013).

b) Considerar fijo el tamaño de los círculos y el contenedor y además, minimizar los "residuos". Los residuos pueden definirse en relación con los círculos no envasados (por ejemplo, el número de círculos no empaquetados o el perímetro / área de círculos no empaquetados) o introducir un valor asociado a cada círculo empaquetado (por ejemplo, el área de los círculos llenos), etc. (Beasley 2013).

El problema de empaquetamiento de círculos se puede llevar a cabo en diferentes formas de contenedor y en diferentes dimensiones. En los artículos publicados en la literatura se han

utilizado diversas formulaciones y algoritmos para resolver estos tipos de problemas. A continuación se presentan algunos de estos.

## 2.1 EMPAQUETAMIENTO DE CÍRCULOS DE RADIOS IGUALES EN 2D

El problema de empaquetamiento en dos dimensiones (2D), consiste en acomodar un conjunto  $n$  de círculos de radio  $r_i$  sin intersecciones.

Existen diferentes contenedores utilizados en la literatura como son: circular, cuadrado, rectángulo, entre otros. A continuación se presentan algunas formulaciones para estos contenedores.

### 2.1.1 Contenedor circular

En 1985 William Thurston introdujo una conexión con la teoría de Riemann y el empaquetamiento de círculos. En el empaquetamiento de  $n$  círculos de radio  $r_i$  en un contenedor circular con radio definido  $r$ .

Graham et al (1998) presentan el empaquetamiento de círculos congruentes en un contenedor circular de radio 1, en donde  $n$  es la cantidad de círculos y  $d$  es la distancia entre los centros de los círculos. Obtuvieron un empaquetamiento óptimo de hasta  $n= 65$  círculos. Utilizaron dos algoritmos, el primero es la repulsión de fuerzas y el segundo la Simulación Billiards.

Castillo et al (2008) revisan diversas aplicaciones industriales y explícitas del empaquetamiento de círculos, presentan diversas formulaciones de publicaciones de la literatura y algunas estrategias heurísticas para la solución del problema.

Grosso et al (2008) en este trabajo se propone un enfoque Cuenca Monótona y su variante Cuenca Población para resolver el problema de empacar círculos de radios iguales y diferentes dentro de un recipiente circular con mínimo radio.

### 2.1.2 Contenedor cuadrado

Los primeros trabajos para el problema de empaquetamiento de círculos en una unidad cuadrada los realizaron Graham en 1964 con  $n=6$  y la solución de hasta  $n= 9$  la obtuvo Shaer (Peikert 1994). En general, el problema de empaquetamiento de círculos en un

contenedor cuadrado con dimensiones  $[1,0]$  y  $[0,1]$ , trata de encontrar el máximo diámetro de los círculos y es equivalente a maximizar la mínima distancia entre un par de  $n$  puntos o problema de dispersión. Es decir, identificar el máximo radio  $r$  de círculos iguales.

En Peikert et al. (1994) brindan una breve historia del problema y resuelven el problema en tres pasos: aplicando el algoritmo Quasi-Newton, el procedimiento de eliminación y suponiendo el empaquetamiento óptimo.

Wurtz (1994) presenta una introducción de la historia del problema de empaquetamiento de círculos en una unidad cuadrada para los casos de hasta  $n=20$ . Su estrategia de solución es parecida a la de Peikert et al. (1994) pero no utilizan conjuntos de celdas sino regiones convexas limitadas.

Maranas et al (1995) formulan un modelo lineal para maximizar la mínima distancia entre un par de  $n$  puntos y un modelo que comprende un función objetivo lineal sujeta a restricciones de desigualdad cuadráticas y cóncavas.

Csaba (1999) presenta dos formulaciones para el problema. La primera tiene como objetivo maximizar los diámetros de los  $n$  círculos a empaquetar y el objetivo del segundo trata de minimizar la máxima distancia entre los puntos y para encontrar la solución introduce un algoritmo que modifica el intervalo para los cortes en el Branch and Bound.

Nurmela y Ostergard (2000) consideran un modelo no lineal con una formulación basada en la función de energía  $\sum_{i \neq j} (\lambda / d_{ij}^2)^m$  donde  $\lambda$  es un escalar y  $m$  es un entero positivo, sujeto a la no intersección entre los círculos. Realizan un cambio de variables que resuelven con un algoritmo de Búsqueda Híbrido, que utiliza la dirección del sub-gradiente y el algoritmo Quasi-Newton; esto para minimizar el área no cubierta por los círculos. Las coordenadas de los círculos son calculadas por un estructura física idealizada que consiste de barras tensionadas. Encuentran el mejor cubrimiento de hasta  $n \leq 50$ .

En Locatelli y Raber (2002) proveen un límite superior para el máximo radio de los círculos, modelan el problema con optimización cuadrática. Desarrollan un algoritmo que inicia desde el algoritmo de Corte y Ramificación rectangular, con estrategias que incluyen: una partición especial de los nodos, una estrategia de reducción de volumen. Brindan mejores soluciones para empaquetar  $n \leq 35$ ,  $n= 32, 37, 38$  y  $39$  círculos .

Gábor et al. (2005) consideran que el problema de empaquetamiento de círculos puede ser descrito por los siguientes problemas equivalentes: Problema 1: Encontrar el valor del máximo radio  $r$  del círculo, tal que los  $n$  círculos sean iguales y no se intersecten; Problema 2: Localizar  $n$  puntos en una unidad cuadrada, tal que la mínima distancia  $d$  entre dos puntos es máxima. Problema 3: Dar el cuadrado más pequeño de lado  $\rho_n$ , con círculos iguales y sin intersección que se colocan en una unidad cuadrada. Problema 4: Determinar el lado más pequeño del cuadrado  $\sigma_n$ , que contiene  $n$  puntos con una distancia menor que 1.

Markot y Csendes (2005) presentan dos procedimientos fundamentales: por un lado, desarrollaron un algoritmo para reducir el área desperdiciada al momento de empaquetar, que se basa en el intervalo de adaptación del procedimiento del polígono. Por otra parte, realizaron combinaciones o subconjuntos del contenedor y por lo tanto, resuelven el empaquetamiento de 27, 28 y 29 círculos.

Csaba (2007) completa la optimalidad de un trabajo previo para el empaquetamiento de 28, 29 o 30 círculos en la unidad cuadrada utilizando la modificación del algoritmo del intervalo.

Szabo y Specht (2007) consideran una breve reseña de algunos modelos de la literatura y métodos computacionales. Brindan límites inferiores teóricos para la cantidad de círculos  $n$  y se basan en una modificación del algoritmo de simulación Billiard para aproximar empaquetamientos y reportan hasta  $n = 200$ .

### *2.1.3 Contenedor rectangular*

Se tiene un contenedor rectangular con dimensiones de largo x ancho ( $L \times W$ ) al que se le colocan  $n$  objetos circulares de radio  $r$ .

Fraser y George (1994) consideran un caso industrial de carga de contenedores que depende de las entradas y salidas del programa. Se incluyen algoritmos heurísticos para las bobinas de un diámetro común, un algoritmo de embalaje para la combinación de carretes en pilas y un algoritmo de dos dimensiones para guardar objetos de diferentes tamaños.

Correia et al (2000) introducen un límite superior que consiste del área del radio del círculo que se usa para estimar el área utilizada del rectángulo. Además, presentan dos algoritmos para el problema: el primero, tiene como objetivo que se reduzca al mínimo la no

intersección entre los círculos, teniendo en cuenta un número fijo de círculos; en el segundo, el objetivo es maximizar la cantidad de círculos a colocar en el contenedor y la no intersección de los mismos, con un número no fijo de círculos. Estos algoritmos son resueltos con la heurística de Recocido Simulado.

Birgin et al (2005) presentan una metodología de decisión no lineal para resolver el problema en un contenedor rectangular. Introducen la regularización Hessiana continua, debido a las segundas derivadas que separan la región analítica de la función objetivo, ya que asegura la estabilidad de las iteraciones. Extienden el problema a contenedores circulares cambiando los límites en las restricciones.

#### *2.1.4 Contenedor triangular*

En Melissen y Shuur (1995) se presenta el empaquetamiento de  $n = 16, 17$  y  $18$  círculos en un triángulo equilátero. Los resultados los encontraron usando la heurística de Recocido Simulado y la técnica Quasi-Newton.

#### *2.1.5 Diversos contenedores*

Existen diversas publicaciones en la literatura en donde se presenta el empaquetamiento de círculos de radios iguales de 2D en diferentes contenedores. A continuación se mencionan varias:

Birgin y Sobral (2006) consideran maximizar la mínima distancia entre los centros de los círculos y tienen como objetivo maximizar el diámetro. Introducen una variedad de modelos no lineales para el problema de empaquetamiento utilizando diversos contenedores. En dos dimensiones: círculo, cuadrado, rectángulo, y tres dimensiones: esfera, cubo, pirámide, cilindro y otros. Se basan en la estrategia de N-body para reducir la complejidad computacional de la no intersección entre los círculos.

Hifi y M'Hallah (2009) brindan una revisión en la literatura de los modelos y métodos para el empaquetamiento de objetos circulares en regiones del plano euclidiano.

Birgin y Gentil (2009) presentan modelos no lineales para el problema de empaquetamiento de círculos en diferentes contenedores como el circular, cuadrado, rectángulo, entre otros. La estrategia de solución que utilizan es el método de Newton-Raphson.

En Lopez y Beasley (2011) se presenta una heurística que considera la formulación del espacio de búsqueda para resolver el problema. Lo realizan en diversos contenedores: circular, cuadrado, rectangular, otros. Utilizan un método no lineal con sistemas de coordenadas cartesianas y polares. Brindan resultados de hasta 500 círculos en los diferentes contenedores.

Se presenta una formulación no lineal para resolver el empaquetamiento de círculos en un contenedor elíptico en Birgin et al (2012). Utilizan heurísticas para resolver la complejidad del problema.

Galiev y Lisafina (2013) presentan un modelo entero para la solución del Problema de empaquetamiento de círculos en tres configuraciones geométricas: figura no convexa, rectángulo con dimensiones definidas (3 x 6) y en la tercera configuración se corta dos radios circulares en el rectángulo. Para resolver el problema forman un conjunto de nodos  $T$ , los centros de los círculos deben de colocarse en estos puntos. Utilizan una heurística para encontrar la solución del problema.

Después de este análisis de la literatura para el problema de empaquetamiento de círculos existen solo procedimientos heurísticos que resuelven satisfactoriamente el problema, y en algunas ocasiones como con Galiev y Lisafina (2013) con quienes comparamos nuestro trabajo, el tiempo es favorable para el problema; ya que los métodos exactos no logran empaquetar todos los círculos o cubrir toda el área del contenedor a utilizar. En Correia et al. (2000) utilizaron dos algoritmos con el Recocido Simulado para resolver el problema en poco tiempo, con quienes también comparamos nuestro trabajo.

## 2.2 EMPAQUETAMIENTO DE CÍRCULOS DE RADIOS DIFERENTES EN 2D

### 2.2.1 Contenedor circular

Dado un contenedor circular de radio  $r_0$  y un conjunto de  $n$  círculos de diferente radio  $r_1, \dots, r_n$ , el problema involucra colocar estos círculos en el contenedor sin intersecciones entre estos.

Wenqi y Ruchu (1999) presentan una estrategia en base al algoritmo Cuasi-físico con un potencial de energía y el Método del Gradiente para resolver el problema.

Huang et al (2002) introducen dos heurísticas que utilizan un par de círculos con el contenedor vacío y los dos círculos y el contenedor deben de ser tangentes entre sí, para cada círculo que se pretende colocar, examina que no exista intersección.

Collins y Stephenson (2003) consideran que un empaquetamiento de círculos es una configuración  $P$  de círculos especificando patrones tangenciales y lo combina con un contenedor complejo  $k$ , brindando condiciones apropiadas que calculan el radio de los círculos a colocar. Aplican el método de Perron de una hipérbola superior

Dennis y Williams (2005) presentan una triangulación creada por la acumulación de capas de los vértices en el plano euclidiano, que puede ser completada por el mismo plano euclidiano.

Zhang y Deng (2005) consideran un algoritmo Híbrido con la combinación de la heurística de Recocido Simulado y la Búsqueda Tabú que puede prevenir las diversificaciones.

Huang et al (2006) consideran la regla de seleccionar el círculo siguiente a colocar para así obtener los resultados de la primer heurística y el uso de una herramienta de pre-análisis para mejorarla y obtener el resultado de la segunda heurística.

Addis et al (2008) reformulan el problema como un programa matemático para el que utilizan procedimientos eficaces como la Búsqueda Local y la identificación de soluciones viables.

En Akeb et al (2009) consideran el problema de embalaje circular, cuyo objetivo es empaquetar  $n$  círculos  $C$  de radio  $r_i$ ,  $i \in N = \{1, \dots, N\}$ , determinar el radio  $r$  del círculo  $C$ , así como las coordenadas  $(x_i, y_i)$  del centro de los círculos a colocar  $C_i$ ,  $i \in N$ . Para resolverlo utilizan la heurística de búsqueda dicotómica combinada con algoritmo de Búsqueda en Haz adaptativo. Las decisiones en cada nodo en el árbol se basan en el grado máximo del agujero que utiliza la distancia mínima local. Mencionan diversas aplicaciones del problema.

Liu et al (2009) consideran el objetivo de determinar el radio más pequeño y las coordenadas del centro de cada círculo empaquetado. Utilizan la heurística de Recocido Simulado incorporando la heurística de Búsqueda Local y el método de Descenso del Gradiente.

### 2.2.2 Contenedor rectangular

George et al. (1995) presentan una formulación no lineal de programación, que resuelven aplicando seis heurísticas; primero brindan una construcción y modificación de los métodos que colocan los círculos, algoritmos aleatorios y genéticos basados en el concepto de disposición para posiciones estables, heurísticas de subgrupos y la asignación al azar de la solución.

George et al (1996) consideran el problema de los tubos de montaje de diferentes diámetros en un contenedor de transporte. Formulan una heurística que se basa en una variedad de normas de construcción de soluciones que emulan el proceso. Proporcionan un algoritmo Genético, que brinda soluciones estables.

Hifi y M'Hallah (2004) presentan el problema de corte circular en donde  $d_i$  es la demanda de objetos circulares; resuelven las restricciones circulares con una heurística basada en procedimientos constructivos y una heurística basada en algoritmos Genéticos.

En Stoyan y Yaskov (2004) consideran aumentar la dimensión del problema y un método de Gradiente reducido, así como en el concepto de desigualdades de activos y el método de Newton.

Huang et al (2005) para solucionar el problema propone dos algoritmos voraces. El primer algoritmo, selecciona el siguiente círculo a colocar de acuerdo al tamaño del círculo (mayor a menor). El segundo algoritmo, mejora al primer algoritmo agregando una Búsqueda look-ahead.

Kubach et al (2009) consideran que la longitud del rectángulo se reduce al mínimo. Utilizan el algoritmo Greedy con un enfoque subordinado, para resolver el problema de la Mochila y el de empaquetamiento.

Akeb y Hifi (2010) consideran un algoritmo que combina varias estrategias: la Búsqueda Adaptativa look-ahead, Búsqueda en Haz, multi-start, así como una estrategia de haces separados. Observan que un algoritmo paralelo también puede permitir problemas de procesamiento industriales más grandes (millar de círculos) en un razonable tiempo de cálculo.

Akeb et al (2011) consideran la heurística de búsqueda local, presentan dos versiones del algoritmo. La primera versión se basa en el multi-inicio y la segunda combina la estrategia de inicio y la estrategia de vigas separadas.

Akeb y Hifi (2013) presentan el problema de corte y empaquetamiento caracterizado por un conjunto de piezas circulares. Combinan la heurística de Búsqueda Local, look ahead y el procedimiento Greedy. Además, se realiza un estudio de los parámetros utilizados por los algoritmos, ya que un algoritmo paralelo puede realizarse para problemas industriales grandes.

### *2.2.3 Diversos contenedores*

Kubach et al (2009) presentan dos algoritmos para el problema de la mochila y otro para el problema de empaquetamiento ya sea en un contenedor rectangular o un cuadrado para círculos de radios diferentes, derivados de Huang et al (2005). Los algoritmos Greedy están en paralelizados usando una memoria compartida maestro-esclavo.

George (1996) propone un método entero de programación que resuelve con Búsqueda tabú, Recocido Simulado y Algoritmo Genético, que utiliza dependiendo del contenedor, cuadrado, rectángulo, circular.

## 2.3 PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO DE CIRCULOS EN 3D

El empaquetamiento de círculos en tres dimensiones concierne en la disposición de esferas de idéntico tamaño relleno un espacio. Normalmente el espacio es el euclideo tridimensional. La proporción del espacio relleno por las esferas es llamada densidad del empaquetamiento, que se mide en un volumen amplio del contenedor. Un empaquetamiento periódico o reticular es aquel en que las esferas forman un patrón muy simétrico llamado retículo o conjunto ordenado y son más fáciles de analizar, los empaquetamientos en los que las esferas no están dispuestas en patrones simétricos se llaman irregulares o aperiódicos.

### *2.3.1 Contenedor paralelepípedo*

El contenedor paralelepípedo cuenta con tres dimensiones: ancho, altura y profundidad. El centro de las esferas a empaquetar se encuentra con las coordenadas y el objetivo del

problema es minimizar la profundidad o la altura del contenedor, la distancia entre los objetos, el contenedor y la frontera del contenedor debe de ser mayor o igual que las distancias dadas.

Xue y Lai (1997) se basan en la operación de carga y transporte de una aplicación industrial para el empaquetamiento de cajas de cartón en un contenedor paralelepípedo, proponen dos técnicas heurísticas severas para resolverlo, minimizando la profundidad; con esto lograron reducir los costos de transportación.

Stoyan y Yaskov (2003) consideran minimizar la altura del contenedor y combinan tres estrategias para resolverlo: búsqueda de aproximada de puntos extremos, mejoran las aproximaciones con la búsqueda del vecino más cercano y proponen un modelo no lineal.

Stoyan y Chugay (2009) presentan una formulación para el empaquetamiento de cilindros y paralelepípedos, se aplica un método para la construcción de puntos de partida, la búsqueda de mínimos locales, y una búsqueda no exhaustiva de mínimos locales para obtener buenas aproximaciones a un mínimo global.

Wu et al (2010) presentan una variante para el empaquetamiento de las cajas de cartón, el objetivo es minimizar la altura del contenedor cubico que puede ser ajustada dependiendo de los cajas a empaquetar. Utilizan un algoritmo Genético para resolver la construcción de bloques.

Wei et al (2012) consideran una heurística basada en los puntos extremos del problema que utiliza una longitud de referencia para guiar la solución y una heurística de búsqueda. Esto para resolver el problema de empaquetamiento de cajas de cartón.

### *2.3.2 Diversos contenedores*

Birgin y Sobral (2006) presentan formulaciones no lineales para el empaquetamiento en tres dimensiones en diversos contenedores: cubo, esfera, cubo, entre otros. El objetivo es minimizar la dimensión del objeto.

## 2.4 APLICACIONES

Este problema ha sido aplicado en diferentes áreas de logística incluyendo el patrón del corte de piezas circulares para motores eléctricos (Cui 2005), carga de contenedores para la industria del papel (Fraser y George 1994), embalaje de tubos (George 1996), colocación de diales circulares en el salpicadero de un automóvil Riskin et al. 2003), distribución de instalaciones (Drezner 1980). (Castillo et al. 2008).

George et al. (1995) estudian un problema de embalaje de tubos de plástico de diversos diámetros en sentido longitudinal en un contenedor de transporte, en donde tubos más pequeños son colocados sobre tubos más grandes.

En Menon y Schrage (2002) consideran que en la industria se tienen diversos materiales como los textiles, papel, lámina de metal y plástico que se fabrican generalmente en rollos muy amplios, que después se cortan en rollos mas angostos; las industrias tienen diversas maquinas a las que se les asignan ordenes que se realizan desde el cliente inicial.

Stoyan y Yaskov (2013) presentan un problema en 3D basándose en diferentes publicaciones, el estudio de estructuras de proteínas en biología (Uhler y Mian, 2011), en la tomografía de rayos X (Wang 1999), en los diseños de antenas (Conway y Sloane 1999), tratamientos gamma en medicina (Chen et al. 2001), los átomos y las moléculas en el estado líquido (Duer et al. 1977), Yamada et al. (2011) considera una las propiedades de una superficie de concreto áspera, ya que el llenado de los poros en el hormigón con materiales sólidos o nano-partículas mejora la fuerza. Por lo tanto, los materiales sólidos o nano-partículas se pueden modelar como esferas.

## CAPITULO 3

# FORMULACIONES PARA EL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO DE CIRCULOS

---

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura existente relacionada con la formulación del empaquetamiento de círculos en 2D y 3D en diversos contenedores; el circular, cuadrado, rectangular y triangulo isósceles, paralelepípedo.

### 3.1 FORMULACIONES DE EMPAQUETAMIENTO DE CIRCULOS EN 2D

La literatura del problema de empaquetamiento de círculos es muy extensa. Por tal motivo, no se mencionaran todas las publicaciones que se refieran al empaquetamiento de círculos.

En esta sección se presenta la metodología del problema de empaquetamiento de círculos de diversos contenedores proporcionada por algunos autores como: Castillo et al. (2008), Correia et al. (2000), López y Beasley (2009), Hifi y M'Hallah (2009), entre otros.

En Castillo et al. (2008) consideran que un empaquetamiento de círculos de  $n$  círculos en algún contenedor y la calidad del empaquetado tiene que cumplir con algunos criterios:

- 1) El tamaño del contenedor
- 2) La distancia promedio entre el centro de los círculos debe ser grande
- 3) Una combinación lineal entre el criterio 1 y 2.

#### *3.1.1 Empaquetamiento de círculos en un círculo*

En los siguientes modelos, la notación para el problema es el siguiente:

- $(x_i - y_i)$  coordenadas del centro del círculo  $i$
- $(0,0)$  coordenadas del contenedor circular
- $r_i, i = 1, \dots, n$ : radio del círculo  $i$  a empaquetar
- $n$ : cantidad de círculos a empaquetar
- $d_{ij}$ : distancia Euclidiana que separa los centros de los círculos  $i$  y  $j$ , denotada por:  $d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad i, j = 1, \dots, n, i < j$ .

La metodología que presentan algunos autores como en Castillo et al. (2008) para el problema de empaquetamiento de círculos es la siguiente:

$$\text{Minimizar} \quad r_0 \quad (3.1)$$

Sujeto a

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \leq r_0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$2 r_i \leq d_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \quad i < j \quad (3.3)$$

El objetivo de (3.1) es encontrar el radio mínimo  $r_0$  de un contenedor circular de manera que podamos acomodar  $n$  círculos de radio  $r_i$ .

La restricción (3.1) garantiza que cada círculo de radio  $r_i$  se colocara dentro del contenedor, la restricción (3.2) asegura que los círculos no se interceptan y la restricción (3.3) es un límite inferior para el radio del contenedor.

Una forma equivalente del problema sería la propuesta en Huang et al. (2006), en donde se requieren empaquetar un conjunto de círculos de radios diferentes, se tiene que encontrar el radio mínimo de un contenedor circular. Determinan si existen  $2n$  números reales  $x_i, y_i, \dots, x_n, y_n$  tal que:

$$\text{Minimizar} \quad r_0 \quad (3.4)$$

$$\text{Sujeto a} \quad r_0 - r_i - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$d_{ij} - r_i - r_j \geq 0 \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

En la restricción (3.5) los círculos de radio  $r_i$  no deberán extenderse fuera del contenedor y la distancia del centro del círculo al contenedor, no debe de ser negativa, se denota como:

$$d_{i0} = r_0 - r_i - \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

La restricción (3.6) establece que los círculos empaquetados no deberán interceptarse unos con otros. La figura 3.1 establece estas restricciones.

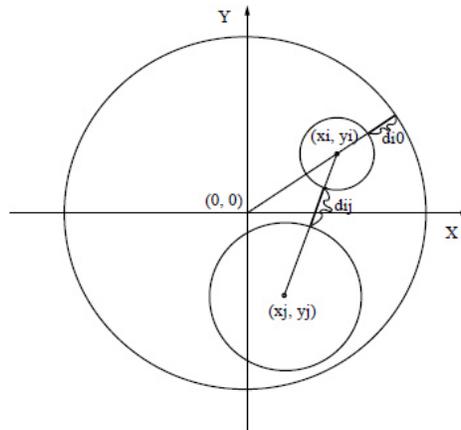


Figura 3.1 Problema de empaquetamiento de círculos.  
 Contenedor circular  
 Huang et al. 2006

### 3.1.2 Empaquetamiento de círculos en un cuadrado

En Castillo et al. (2007) el problema consiste en empaquetar  $n$  cantidad de círculos idénticos en una unidad cuadrada con el objetivo de identificar el máximo radio  $r$  de  $n$  círculos idénticos. Se busca encontrar el valor óptimo de  $r$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\text{Maximizar } r \quad (3.7)$$

Sujeto a

$$r \leq x_i \leq 1 - r \quad i \in I \quad (3.8)$$

$$r \leq y_i \leq 1 - r \quad i \in I \quad (3.9)$$

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq 2r \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (3.10)$$

donde  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$ , denota las coordenadas del centro de círculo  $i$ , para las restricciones (3.8) y (3.9); y (3.10) es la distancia Euclidiana que separa los centros de los círculos  $i$  y  $j$ , para evitar la intersección entre los círculos.

Este problema de empaquetamiento es equivalente a el problema de dispersión de  $n$  puntos en una unidad cuadrada, tal que la mínima distancia  $d$  entre cualquier par de puntos sea máxima. Este problema de dispersión puede ser declarado como:

$$\text{Maximizar } d \tag{3.11}$$

Sujeto a

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i \in I \tag{3.12}$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad i \in I \tag{3.13}$$

$$d \leq \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad \leq i < j \leq n, \tag{3.14}$$

donde  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$ , denota las coordenadas del punto  $i$ . La solución óptima del problema original se relaciona con el problema de dispersión de la siguiente manera:

$$r = d / 2 (d + 1) \tag{3.15}$$

$$x_i = x_i'(1-2r) + r \tag{3.16}$$

$$y_i = y_i'(1-2r) + r \tag{3.17}$$

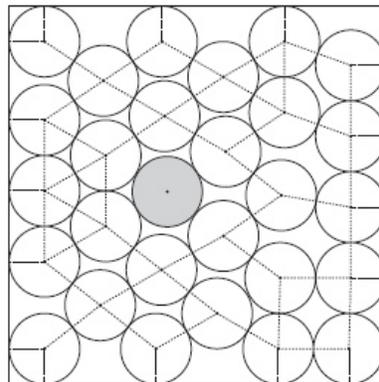


Figura 3.2. Empaquetamiento de círculos en un cuadrado.  
Csaba (2007)

Nurmela y Oestergard (2000) introducen una formulación no lineal basado en una función de energía  $\sum_{i \neq j} (\lambda/d_{ij}^2)^m$ ,  $\lambda$  es un factor escalar y  $m$  es un entero positivo. La función de energía es minimizada y sujeta a la no intersección de los círculos.

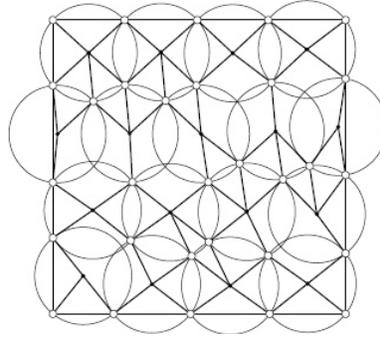


Figura 3.3 Cubrimiento de círculos  
Nurmela y Ostergad (2000)

Locatelli y Raber (2002) proveen un límite superior del radio máximo de  $n$  círculos que pueden ser empaquetados. La formulación la realizan a través del problema de dispersión como un problema de programación matemática.

Denotan por  $f: R^{2n} \rightarrow R$

$$f(x) := \min_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 \quad (3.18)$$

la distancia mínima del par de puntos del  $x_i \in U [0,1]^2$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de puntos  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U^n$ . Entonces el problema de dispersión puede ser reformulado como sigue:

$$\max_{x \in U} f(x) \quad (3.19)$$

o equivalente a: (Problema de dispersión)

$$\max d \quad (3.20)$$

$$d \leq \|x_i - x_j\|^2 \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (3.21)$$

$$x_i \in U \quad i = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

Una formulación equivalente sería: (Problema de empaquetamiento)

$$\max t \quad (3.23)$$

$$t - \|x_i - x_j\|^2 \leq 0 \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (3.24)$$

$$x_i \in U \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

### 3.1.3 Empaquetamiento de círculos en un rectángulo

El problema de empaquetamiento de círculos consiste en identificar el máximo número de círculos idénticos de radio conocido  $r$  que pueden ser empaquetados en un rectángulo de dimensiones conocidas,  $(L \times W)$ ; donde los círculos deberán estar totalmente dentro del área del rectángulo y no deberán interceptarse. Este problema es clasificado como un problema de mochila singular según Washer et al (2007).

Alguna notación para las formulaciones siguientes es:

$L$ : medida de la base del rectángulo

$W$ : medida de la altura del rectángulo

Correia et al. (2000) introduce un nuevo límite superior para el número óptimo de círculos que se colocan en el rectángulo. El límite consiste de un espacio no utilizado de los bordes del rectángulo y el área interna no utilizada de los círculos empaquetados. El desarrollo de estos límites es utilizado para estimar mejor el área correspondiente al rectángulo. Reformulan la función objetivo como sigue:

$$\text{Min } F(x) = \text{intersección } (x) - \beta * \text{área total de los círculos } (x)$$

El coeficiente  $\beta$  tiene valores  $[0,1]$  es el peso del segundo componente de la función objetivo para distinguir la inclusión de un círculo causado por la variación de los componentes de la función objetivo.

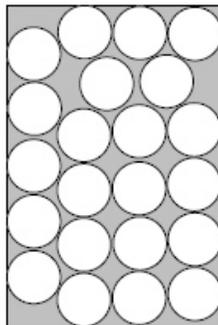


Figura 3.4 Empaquetamiento de círculos en un rectángulo  
Correia et al. (2000)

Birgin et al. (2005) resuelven una serie de problemas de decisión. Cada problema investiga la factibilidad de empaquetar  $n$  círculos idénticos de radio conocido  $r$  en un rectángulo ( $L \times W$ ). Si el empaquetamiento es factible,  $k$  es incrementado y el problema de decisión resuelto. El problema de decisión es factible si el valor de la función objetivo es cero, y es infactible en otro caso. El algoritmo se detiene cuando el problema de decisión produce un empaquetamiento infactible. El problema de decisión es formulado como:

$$\text{Minimizar } \sum_{i < j} \max (0, 4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2)^2 \quad (3.26)$$

Sujeto a

$$r \leq x_i \leq L - r \quad i \in I = \{1, \dots, k\} \quad (3.27)$$

$$r \leq y_i \leq W - r \quad i \in I \quad (3.28)$$

Para cualquier par de círculos ( $i, j$ ) interceptados, la distancia Euclidiana separando sus centros deberán ser menor que la suma de sus radios:

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (3.29)$$

Lo cual es equivalente a

$$4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 > 0 \quad (3.30)$$

implica que

$$\max \{4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, 0\} > 0 \quad (3.31)$$

El objetivo es maximizar la mínima distancia entre los centros de los círculos. Si el valor de la función objetivo dado por (3.26) es cero, entonces cada uno de los términos de la sumatoria es igual a cero. Es decir, ninguno de los pares de círculos se intercepta, según lo establecen en las restricciones (3.27) y (3.28).

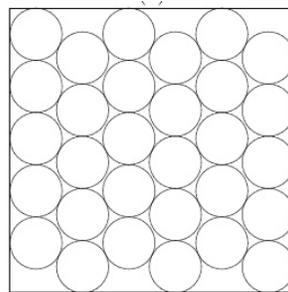


Figura 3.5  
Birgin et al. (2005)

Una variante del problema es considerar círculos de radios no idénticos; como se indica en George et al. (1995) que proponen un programa entero mixto no lineal para el empaquetamiento de círculos de radios conocidos en un rectángulo ( $L \times W$ ) con dimensiones conocidas. El modelo tiene  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$  como variables continuas y usa las variables binarias  $\delta_i$ ,  $i \in I$ , las cuales son iguales a 1 si el  $i$ -ésimo círculo es colocado en el rectángulo y 0 otro caso. El modelo establecido es:

$$\text{Maximizar } \sum c_i \delta_i \quad (3.32)$$

Sujeto a

$$\delta_i r_i \leq x_i \leq \delta_i (L - r_i) \quad i \in I \quad (3.33)$$

$$\delta_i r_i \leq y_i \leq \delta_i (W - r_i) \quad i \in I \quad (3.34)$$

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq r_i + r_j \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (3.35)$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad \delta_i \in \{0,1\}, \quad i \in I \quad (3.36)$$

donde  $c_i$ ,  $i \in I$  es el objetivo obtenido cuando se incluye el círculo  $i$  de radio  $r$  en el rectángulo ( $L \times W$ ). Las restricciones (3.33) y (3.34) aseguran que si un círculo es colocado, ninguna porción del círculo se extiende fuera de las dimensiones del rectángulo. La restricción (3.35) asegura la no intersección entre los círculos. Este modelo involucra  $k$  variables de decisión binarias,  $2k$  variables de decisión continuas, y  $2k + (k(k-1)/2)$  restricciones.

Stoyan y Yaskov (2004) proponen un modelo matemático para la variante de círculos no idénticos, en donde el objetivo es minimizar el ancho del contenedor rectangular:

$$\text{Minimizar } W \quad (3.37)$$

Sujeto a

$$r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \quad (3.38)$$

$$r_i \leq y_i \leq W - r_i \quad i \in I \quad (3.39)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \leq (r_i + r_j)^2 \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (3.40)$$

$$W \geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i \in I$$

Las restricciones (3.38) y (3.39) describen las condiciones del centro del círculo en el rectángulo, ya que limitan que se extiendan fuera del contenedor y la restricción (3.40) describe la no intersección. Además este modelo cumple con diversas características para la solución del problema que dependen de la superficie y de los puntos extremos del rectángulo.

### 3.2 FORMULACIONES DE EMPAQUETAMIENTO DE CIRCULOS EN 3D

El empaquetamiento de esferas tiene diversas aplicaciones en la industria. Como por ejemplo, el empaquetamiento aleatorio de objetos geométricos, la estructura de materiales de líquidos y gases, el fenómeno de conductividad eléctrica, el flujo, distribución de materiales granulares.

Dado una esfera sólida  $S_i$  con radio  $r$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , y un paralelepípedo  $Q = \{(x, y, z) \in R^3: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$  ( $R^3$  es el espacio Euclidiano de 3D). En donde las constantes son la longitud  $L$  y el ancho  $W$ , y la altura  $H$  es considerada como una variable. En esto se basan Stoyan y Yaskov (2003) para proponer el siguiente modelo para el problema de esferas de radios diferentes  $r_i$ , en donde el objetivo es minimizar la altura  $H$ .

$$\text{Minimizar } H \tag{3.41}$$

Sujeto a

$$r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \tag{3.42}$$

$$r_i \leq y_i \leq W - r_i \quad i \in I \tag{3.43}$$

$$r_i \leq z_i \leq H - r_i \quad i \in I \tag{3.44}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \leq (r_i - r_j)^2 \quad 1 \leq i < j \leq n \tag{3.45}$$

Las restricciones (3.42), (3.43) y (3.44) aseguran que las esferas colocadas no se extiendan fuera del contenedor y la restricción (3.45) evita la no intersección entre las esferas. La formulación anterior puede ser utilizada para radios idénticos, debido a que el radio  $r_i = r$ .

### 3.3 FORMULACIONES EN DIVERSOS CONTENEDORES

Birgin y Sobral (2006) brindan formulaciones no lineales para el empaquetamiento en 2D y 3D para un conjunto de ítems circulares de radios iguales o diferentes, en diferentes contenedores.

Los modelos tienen la siguiente estructura:

Minimizar *la dimensión del contenedor*

Sujeto a

*Los ítems deben ser colocados dentro del contenedor*

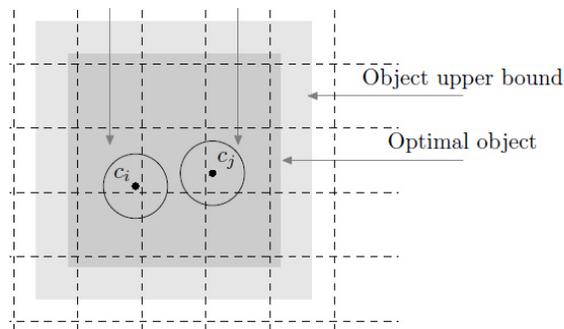


Figura 3.6 Ítems colocados dentro del contenedor  
Birgin y Sobral (2006)

*No intersección entre los ítems*

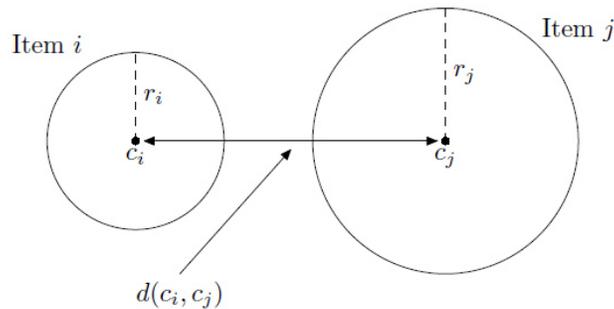


Figura 3.7 No intersección entre los ítems  
Birgin y Sobral (2006)

Los modelos establecidos para el empaquetamiento de círculos en 2D es el siguiente:

Sea  $c_i, i = 1, \dots, n$ , el centro de los  $n$  círculos con radio  $r_i, i = 1, \dots, n$  a empaquetar. Sea  $d(c_i, c_j)$  la distancia Euclidiana.

*Contenedor circular*

$$\text{Minimizar } R \tag{3.46}$$

$$\text{Sujeto a } x_i^2 + y_i^2 \leq (R - r_i)^2 \quad i \in I \tag{3.47}$$

$$R \geq r_{\max} = \max \{r_i\} \tag{3.48}$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \tag{3.49}$$

La restricción (3.48) brinda un valor para el radio  $r$  del tamaño del contenedor.  $R$  es el radio del contenedor circular

*Contenedor cuadrado*

$$\text{Minimizar } L \tag{3.50}$$

$$\text{Sujeto a } r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \tag{3.51}$$

$$r_i \leq y_i \leq L - r_i \quad i \in I \tag{3.52}$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \tag{3.53}$$

La dimensión de los lados del cuadrado está representada por  $L$ .

*Contenedor Rectangular*

$$\text{Minimizar } L * W \tag{3.54}$$

$$\text{Sujeto a } r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \tag{3.55}$$

$$r_i \leq y_i \leq W - r_i \quad i \in I \tag{3.56}$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \tag{3.57}$$

El largo del rectángulo es  $L$  y la altura es  $W$ .

Además de los modelos anteriores los autores brindan la formulación para un triángulo equilátero en 2D.

Los modelos para el empaquetamiento de círculos en 3D son los siguientes:

### Contenedor esférico

$$\text{Minimizar } R \quad (3.58)$$

$$\text{Sujeto a } x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \leq (R - r_i)^2 \quad (3.59)$$

$$R \geq r_{\max} = \max \{r_i\} \quad (3.60)$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \quad (3.61)$$

### Contenedor cubo

$$\text{Minimizar } L \quad (3.62)$$

$$\text{Sujeto a } r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \quad (3.63)$$

$$r_i \leq y_i \leq L - r_i \quad i \in I \quad (3.64)$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \quad (3.65)$$

La dimensión de los lados del cuadrado está representada por  $L$ .

### Contenedor cuboide

$$\text{Minimizar } L * W * H \quad (3.66)$$

$$\text{Sujeto a } r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \quad (3.67)$$

$$r_i \leq y_i \leq W - r_i \quad i \in I \quad (3.68)$$

$$r_i \leq z_i \leq H - r_i \quad i \in I \quad (3.69)$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \quad (3.70)$$

### Contenedor Cilíndrico

$$\text{Minimizar } R_2 H \quad (3.71)$$

$$\text{Sujeto a } x_i^2 + y_i^2 \leq (R - r_i)^2 \quad (3.72)$$

$$R \geq r_{\max} = \max \{r_i\} \quad (3.73)$$

$$r_i \leq z_i \leq H - r_i \quad i \in I \quad (3.74)$$

$$\sum_{i < j} \max \{0, (r_i + r_j)^2 - d(c_i, c_j)^2\}^2 \quad (3.75)$$

También brindan las formulaciones para contenedores Tetraédricos, pirámides y otros.

A continuación se presenta una Tabla 3.1 con información general de algunas publicaciones del Problema de empaquetamiento de Círculos en 2D.

Referencia	Tamaño de los círculos	Contenedor	Funcion Objetivo	Estrategia de solución	Aplicación industrial
Peikert et al. (1992)	iguales	cuadrado	cantidad de círculos	quasi-newton, procedimiento eliminación	cubrimiento de círculos
Wurtz (1994)	iguales	cuadrado	cantidad de círculos	Heurísticas	cubrimiento de círculos
Markót & Csendes (1994)	iguales	unidad cuadrada	tamaño contenedor	branch and bound (n=30)	empaquetamiento de círculos
Melissen y Shuur (1995)	iguales	triangulo equilatero	cantidad de círculos	Recocido Simulado quasi-Newton	empaquetamiento de círculos
Maranas et al. (1995)	iguales	unidad cuadrada	tamaño contenedor	Exact (n=29)	empaquetamiento de círculos
George et al. (1995)	diferentes	rectangular	cantidad de círculos	Heurísticas	tubos de montaje
George et al. (1996)	diferentes	diversos contenedores	tamaño contenedor	Búsqueda tabú, Recocido Simulado y Algoritmo genético	Embalaje de tubos
Graham et al. (1998)	iguales	circular	cantidad de círculos	Método de repulsión	empaquetamiento de círculos
Csaba (1999)	iguales	cuadrado	cantidad de círculos	Branch and bound	empaquetamiento de círculos
Nurmela & Ostergard (2000)	iguales	unidad cuadrada	tamaño contenedor	Método cuasi-Newton con BFGS	empaquetamiento de círculos
Correia et al. (2000)	iguales	rectangular	cantidad de círculos	Recocido Simulado	Carga de contenedores
Huang et al. (2002)	diferentes	rectangular	tamaño contenedor	Heurísticas	empaquetamiento de círculos
Locatelli & Raber (2002)	iguales	unidad cuadrada	tamaño contenedor	branch and bound (n=37)	empaquetamiento de círculos
Birgin et al. (2003)	iguales diferentes	circular, rectangular	cantidad de círculos	GENPACK	Carga de contenedores
Collins y Stephenson (2003)	diferentes	circular	cantidad de círculos	Metodo Perron	empaquetamiento de círculos
Markot (2004)	iguales	unidad cuadrada	cantidad de círculos	Intervalos aritméticos	empaquetamiento de círculos
Stoyan y Yaskov (2004)	diferentes	rectangular	cantidad círculos	Metodo del Gradiente Metodo Newton	empaquetamiento de círculos
Hifi & M'Hallah (2004)	diferentes	rectangular	tamaño contenedor	Heurísticas	emp y corte de círculos
Yu & Zhang(2005)	diferentes	rectangular	cantidad de círculos	Método de Lagrangiano Aumentado	empaquetamiento de círculos
Denise y William (2005)	diferentes	circular	cantidad de círculos	Embalaje de capas	empaquetamiento de círculos
Gabor et al. (2005)	iguales	cuadrado	cantidad de círculos	Heurísticas	empaquetamiento de círculos

Birgin y Sobral (2006)	iguales	circular, cuadrado, rectángulo, triángulo	cantidad de círculos	GENPACK	empaquetamiento de círculos
Huang et al. (2006)	diferentes	circular	tamaño contenedor	Heurísticas	empaquetamiento de círculos
Hifi & M'Hallah (2007)	diferentes	circular	cantidad de círculos	Busqueda Local	emp. de círculos (cables del sensor de automóvil)
Szabo y Specht (2007)	iguales	cuadrado	cantidad de círculos	simulación Billiard	empaquetamiento de círculos
Csaba (2007)	iguales	cuadrado	cantidad de círculos	Branch and bound	empaquetamiento de círculos
Castillo et al. (2008)	iguales diferentes	circular, unidad cuadrada, rectángulo	tamaño contenedor, cantidad de círculos	Exacto	empaquetamiento de círculos
Addis et al. (2008)	diferentes	circular	tamaño del contenedor	Busqueda local	Corte y emp de círculos
Grosso et al. (2008)	iguales diferentes	circular	cantidad de círculos	Monotonic Basin Hopping	empaquetamiento de círculos
Liu et al. (2009)	iguales diferentes	circular	tamaño contenedor	Recocido Simulado busqueda local	Carga de contenedores
Birgin y Gentil (2009)	iguales	circular, cuadrado, rectángulo, triángulo	tamaño contenedor	Metodo de Lagrangiano Aumentado	empaquetamiento de círculos
Akeb et al. (2009)	diferentes	circular	tamaño contenedor	Busqueda Local	Corte y emp de círculos
Kubach et al. (2009)	diferentes	rectangular	tamaño contenedor	Algoritmo Greedy	empaquetamiento de círculos
Akeb & Hifi (2010)	diferentes	rectangular	tamaño contenedor	look ahead adaptative	Corte y emp de círculos
Lopez y Beasley (2011)	iguales	circular, unidad cuadrada, rectángulo, semicírculo, isósceles	cantidad de círculos	Heurística	empaquetamiento de círculos
Akeb et al. (2011)	diferentes	rectangular	tamaño contenedor	Busqueda Local	Corte y emp de círculos
Birgin et al. (2012)	iguales	elipse	cantidad de círculos	Heurística	empaquetamiento de círculos
Akeb y Hifi (2013)	diferentes	rectangular	tamaño contenedor	búsqueda local, look ahead y greedy	empaquetamiento de círculos
Galiev y Lisafina	iguales	rectangular	cantidad de círculos	Heurística	empaquetamiento de círculos

## CAPITULO 4

### Metodología de Solución

---

Para entender mejor un problema es importante estudiarlo a fondo y realizar su formulación. En el presente trabajo se brinda una nueva formulación para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor. En donde utilizan nodos que se colocan en forma discreta aproximando el contenedor rectangular (Beasley, 1985). Los nodos se consideran como posiciones potenciales para la asignación de los círculos. El problema de empaquetamiento es un problema de optimización lineal a gran escala 0-1. En donde las variables binarias representan la asignación de los centros de los círculos a los nodos del contenedor.

El objetivo que se procura consiste en optimizar un conjunto de ítems circulares en un contenedor rectangular con dimensiones fijas, en donde  $L$  son las dimensiones horizontales y  $W$  las dimensiones verticales del contenedor. Se pretende cubrir el área del contenedor por puntos o nodos, de tal modo que los centros de los círculos se ubiquen en los puntos del contenedor. Por lo tanto,  $M$  es el número de puntos equidistantes horizontales y  $N$  es el número de puntos equidistantes verticales. Entonces el contenedor tiene  $M \times N$  puntos o nodos en total.

En la figura 4.1 se muestra una forma general del acomodo de los nodos en el contenedor.

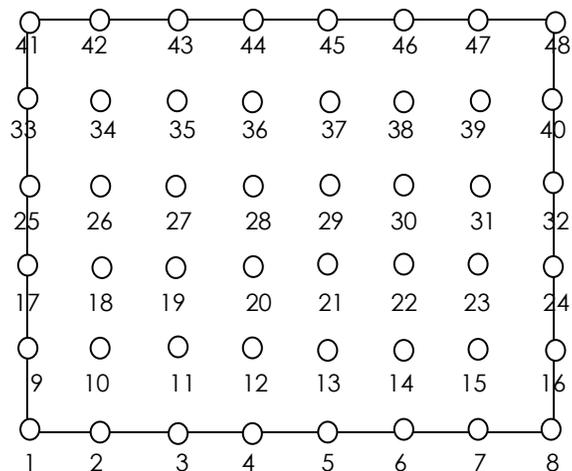


Figura 4.1 Representación de los puntos o nodos

#### 4.1 EL MODELO

Se tienen círculos idénticos  $C_k$  de radio conocido  $R_k$ ,  $k \in K = \{1, 2, \dots, K\}$ . Se tiene  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  los puntos o nodos que cubren el contenedor rectangular.

Para formular el problema se describen los siguientes parámetros:

- $I$  conjunto de puntos o nodos en el contenedor
- $J$  conjunto de puntos o nodos en el contenedor
- $K$  conjunto de radios de los círculos
- $m_k$  cantidad de círculos  $C_k$
- $F$  puntos de la frontera del contenedor
- $d_{ij}$  distancia Euclidiana entre el punto  $i$  y el punto  $j$

Definimos la siguiente variable de decisión:

$x_{ik} \in \{0, 1\}$ , donde  $x_{ik} = 1$  si y solo si el centro del círculo  $C_k$  es asignado a el punto  $i$ ;  $x_{ik} = 0$  en caso de otro caso.

Consideramos diversas formulaciones equivalentes del problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular.

#### 4.1.1 Primera Formulación

El problema puede ser formulado mediante el siguiente modelo de programación lineal entero binario (**Formulación A**). Con el fin de asignar un círculo  $C_k$  a el punto  $i$  sin que exista intersección con otros círculos a empaquetar, es necesario que  $x_{ik}$ , para  $j \in I, l \in K$ , tal que  $d_{ij} < R_k + R_l$ . Para fijar  $i, k$  se tiene  $N_{ik} = \{j, l: i \neq j, d_{ij} < R_k + R_l\}$ .

Entonces  $n_{ik}$  es la cardinalidad de  $N_{ik}$ :  $n_{ik} = |N_{ik}|$ . Entonces el problema de maximizar el área cubierta por los círculos es el siguiente:

$$Z = \max \pi \sum_i \sum_k R_k x_{ik} \quad (4.1)$$

Sujeto a

$$\sum_i x_{ik} \leq m_k \quad k \in K \quad (4.2)$$

$$\sum_k x_{ik} \leq 1 \quad i \in I \quad (4.3)$$

$$R_k x_{ik} \leq \min d_{ij} \quad i \in I, k \in K, j \in F \quad (4.4)$$

$$x_{ik} + x_{jl} \leq 1 \text{ tal que } d_{ij} < R_k + R_l \quad i, j \in I, k, l \in K \quad (4.5)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad i, j \in I, k, l \in K \quad (4.6)$$

La función objetivo (4.1) consiste en maximizar el área cubierta por los círculos. La restricción (4.2) asegura que al menos  $m_k$  círculos  $C_k$  deberán ser empaquetados; la restricción (4.3) al menos un centro de círculo es asignado al algún punto; en la restricción (4.4) nos dice que  $i$  puede ser centro de círculo  $C_k$  si la distancia desde  $i$  a la frontera es menor que  $R_k$ ; la restricción (4.5) asegura que se puede colocar el centro de círculo  $C_k$  en  $i$  y el centro de círculo  $C_l$  en  $j$ , si la distancia entre los centros es menor que la suma de los correspondientes radios, además asegura que no hay intersección entre los círculos; las (4.6) representa la naturaleza de las variables binarias.

#### 4.1.2 Segunda Formulación

La siguiente formulación es una formulación compacta ya que cuenta con la restricción de intersección (4.5), eliminando las otras restricciones de frontera. Para el caso particular de empaquetamiento de círculos iguales de radio  $R$  se reducen las dimensiones del contenedor por  $2R$  (**Formulación B**).

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ tal que } d_{ij} < 2R \quad i, j \in I \quad (4.7)$$

#### 4.1.3 Tercera Formulación

En el problema de localización de plantas de Stoyan y Yaskov (2013) cuentan con la condición de no intersección en una forma compacta, que se menciona en la siguiente formulación (**Formulación C**). Entonces sumando la restricción (4.5) por pares se obtiene:

$$n_{ik} x_{ik} + \sum_{j, l \in N_{ik}} x_{lj} \leq n_{ik} \quad i \in I, k \in K \quad (4.8)$$

La restricción (4.8) es similar a la usada por Galiev y Lisafina (2013) para el empaquetamiento de círculos iguales.

**Proposición 1.** Las restricciones (4.5) y (4.6) son equivalentes a las restricciones (4.6) y (4.8).

**Comprobación.** Si la restricción (4.5) de la formulación completa, entonces la (4.8) lo contiene. Entonces (4.8)  $x_{ik} = 1$  se tiene  $\sum_{j, l \in N_{ik}} x_{lj} \leq 0$  y  $x_{lj} = 0$  para  $j, l \in N_{ik}$  como en (4.5). Si  $x_{ik} = 0$  en (4.8) entonces  $\sum_{j, l \in N_{ik}} x_{lj} \leq n_{ik}$  para toda  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ .

El problema (4.1) – (4.6) es equivalente a el problema (4.1) – (4.4), (4.6), (4.8). Al comparar dos formulaciones equivalentes, tenemos:

$$P_1 = \{x \geq 0: x_{ik} + x_{lj} \leq 1, \text{ para } i \in I, \text{ para } i \in I, k \in K, (j, l) \in N_{ik}\},$$

$$P_2 = \{x \geq 0: n_{ik} x_{ik} + \sum_{j, l \in N_{ik}} x_{lj} \leq n_{ik}, \text{ para } i \in I, \text{ para } i \in I, k \in K\}$$

**Proposición 2:**  $P_1 \subset P_2$

**Comprobación:** Las restricciones de  $P_2$  son obtenidas por la suma de las restricciones de  $P_1$ , entonces  $P_1$  está contenido en  $P_2$ . Para demostrar que  $P_1 \subset P_2$  se necesita encontrar un punto en  $P_2$  que no se encuentre en  $P_1$ . Este punto puede ser construido como sigue, se eligen  $(i,k)$  y  $(j,l) \in N_{ik}$  tal que  $n_{ik}, n_{jl} \geq 2$ . Dar el valor de cero a todas las variables excepto  $x_{ik}, x_{jl}$ . Todas las restricciones correspondientes a las variables que son cero son completadas. Se define  $x_{ik}, x_{jl}$  para cumplir las dos restricciones restantes como igualdades:

$$n_{ik} x_{ik} + x_{jl} = n_{ik}, \quad n_{jl} x_{jl} + x_{ik} = n_{jl}$$

con  $n_{ik}, n_{jl} \geq 2$ . La solución correspondiente es:

$$x_{ik} = \frac{n_{jl}(n_{ik}-1)}{n_{jl}n_{ik}-1} < 1, \quad x_{jl} = \frac{n_{ik}(n_{jl}-1)}{n_{jl}n_{ik}-1} < 1$$

con  $n_{ik}, n_{jl} \geq 2$ . La solución correspondiente es:

$$x_{ik} + x_{jl} = 1 + \frac{1 + n_{jl}n_{ik} - n_{jl} - n_{ik}}{n_{jl}n_{ik} - 1} > 1$$

Este punto viola las restricciones correspondientes en  $P_1$  y por lo tanto  $P_1 \subset P_2$ . (Litvinchev y Ozuna 2014)

#### 4.1.4 Cuarta Formulación

Por definición  $N_{ik} = \{j, l: i \neq j, d_{ij} < R_k + R_l\}$  y si  $(j,l) \in N_{ik}$ , entonces  $(i,k) \in N_{jl}$ . Se tienen la mitad de las restricciones de (4.7) que son redundantes (**Formulación D**):

$$x_{ik} + x_{jl} \leq 1 \quad i \in I, k \in K, (j,l) \in N_{ik} \quad (4.9)$$

$$x_{jl} + x_{ik} \leq 1 \quad i \in I, k \in K, (j,l) \in N_{jl}. \quad (4.10)$$

Las restricciones redundantes pueden ser eliminadas haciendo una reducción por pares a la formulación de no intersección. El total del conjunto de restricciones reducidas son independientes entre sí y se elimina la restricción anterior o la segunda. Sin embargo, el camino de restricciones redundantes eliminadas afectara a la formulación obtenida por la restricción reducida.

## 4.2 ALGORITMO

---

### ALGORITMO 1 Formulación A

---

1. Paso 0. *Cálculo de las coordenadas.*  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i \in I$ .
  2. *Calcular distancia Euclideana.* Sea  $d_{ij}$  el valor de la distancia  $i \neq j \in I$ .
  3. *Calcular conjunto para solapamientos.*  $i \neq j \quad d_{ij} < R_k + R_l, k, l \in K$ .
  4. *Calcular conjunto existe en frontera del contenedor.* Punto  $j$  frontera  $\rightarrow$  Existe  $= 0$ . Punto  $i$  no frontera  $\rightarrow$  Existe  $= 1$ .
  5. Paso 1. *Función objetivo.*  $31415 * R^* x_{ik}$  área cubierta por los círculos.
  6. Paso 2. *Restricciones. Limitación de la cantidad de círculos.*  $m \rightarrow x_{ik} \leq m_k$
  7. *En punto  $i$  máximo centro de radio  $k$ .* Existe  $i = 1. x_{ik} \leq 1$ .
  8. *No existe intersección con frontera.*  $x_{ik} * R_k \leq d_{ij}$
  9. *No existe intersección.*  $x_{ik} + x_{jl} \leq 1$ .
  10. *Frontera no existe centro.* Existe  $j = 0. x_{ik} \leq 0$ .
  11. *Naturaleza de variables.*  $x_{ik}$ .
  12. *Fin*
-

## CAPITULO 5

# Experimentación y Resultados

---

Para la realización de la experimentación se hicieron comparaciones con diversas publicaciones para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular. Para la experimentación establecimos un gap 0% para encontrar los resultados.

### 5.1 PARAMETROS

Para poder realizar la solución del problema por medio del algoritmo se utilizaron diversos parámetros, como:

- Coordenadas,  $x$  y  $y$  para cada punto o nodo contenido en el contenedor.
- Distancia euclídeana  $d_{ij}$  de cada punto  $i$  a punto  $j$ .
- $W_{ijkl}$  conjunto para evitar solapamientos.
- $Existe$  conjunto para aquellos puntos en  $j$  que existen en la frontera.
- Valor de los radios  $R_k$  de los círculos a empaquetar.
- Cantidad de círculos a empaquetar  $m_k$ .

Para obtener el valor de la distancia euclídeana se obtuvo con la fórmula:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Las formulaciones presentadas anteriormente tienen en pasos equivalentes en común para la realización del algoritmo.

Todos los problemas de optimización se resolvieron por el sistema CPLEX 12.5. Las corridas de las instancias fueron ejecutadas en una DELL Power Edge T410, Intel Xeon, 2.53 Ghz y 16 Gb de Memoria RAM. En el algoritmo para resolver el problema se programó una salida para que se realizaran directamente los dibujos resultantes en la solución el Latex.

Las entradas del programa son: Las dimensiones horizontales L, las dimensiones verticales, radio R, cantidad de puntos horizontales M y cantidad de punto verticales N. Y las salidas del programa son la cantidad de círculos a empaquetar, las coordenadas de los círculos, el tiempo en que se resuelve el modelo, el dibujo resultante, el lp del programa (el modelo: función objetivo y restricciones), el gap.

## 5.2 CASOS EN LA LITERATURA

Primero se generaron instancias comparando con la publicación de Correia et al. (2000) que resuelven el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular. Ellos proponen heurísticas de Recocido Simulado para la solución, en a dos formulaciones: en el primero se establece un numero de círculos fijo que tiene como objetivo la no intersección de los círculos y el segundo el número de círculos no es fijo y tiene como objetivo maximizar el número de círculos y la no intersección entre estos.

En la Tabla 5.1 se establecen los resultados brindados por Correia et al. (2000) para las siguientes instancias: Las dimensiones del rectángulo y el radio del círculo están dadas en centímetros.

Datos	Dimensión Rectángulo	Radio Círculo	Heurística (Recocido Simulado)
1.1	100×200	18	15
1.2	120×80	12	15
1.3	100×100	13	13
2.1	100×200	25	8
2.2	120×80	17	7
2.3	100×100	18	6
3.1	100×200	31	3
3.2	120×80	21	4
3.3	100×100	22	4

Tabla 5.1. Resultados de Correia et al. (2000) Tabla 4.

El tiempo promedio en segundos obtenido para las instancias, por el artículo de Correia et al. (2000), se indica en la Tabla 5.2:

Dato	Tiempo Promedio
1.1	1.187
1.2	1.301
1.3	0.969
2.1	0.59
2.2	0.396
2.3	0.295
3.1	0.187
3.2	0.225
3.3	0.217

Tabla 5.2. Tiempo obtenido Correia et al. (2000) Tabla 2

En la Tabla 5.3 se presentan los resultados obtenido por la Formulación A (completa) para las instancias publicadas por Correia et al. (2000). Los valores de  $M$  y  $N$  son discretos de acuerdo a las coordenadas de plano cartesiano.

Dato	Dimensión Rectángulo	Radio Círculo	Modelo lineal – binario
1.1	100×200	18	15
1.2	120×80	12	15
1.3	100×100	13	13
2.1	100×200	25	8
2.2	120×80	17	7
2.3	100×100	18	6
3.1	100×200	31	3
3.2	120×80	21	4
3.3	100×100	22	4

Tabla 5.3 Resultados Modelo lineal- binario

El tiempo de ejecución para las instancias anteriores se muestra en la siguiente tabla 5.4:

Dato	Tiempo Promedio
1.1	1.565
1.2	1.727
1.3	0.945
2.1	0.591
2.2	0.516
2.3	0.425
3.1	0.297
3.2	0.204
3.3	0.192

Tabla 5.4 Tiempo Modelo lineal- binario

A continuación se muestran algunas de las figuras y las coordenadas donde se ubicaron los círculos empaquetados a partir de las instancias anteriores:

**Instancia 1.2 Dimensiones 120 x 80 R: 12**

Coordenadas	
$\dot{x}$	$\dot{y}$
12	15
36	15
60	15
84	15
108	15
12	40
36	40
60	40
84	40
108	40
12	65
36	65
60	65
84	65
108	65

Tabla 5.5 R= 12

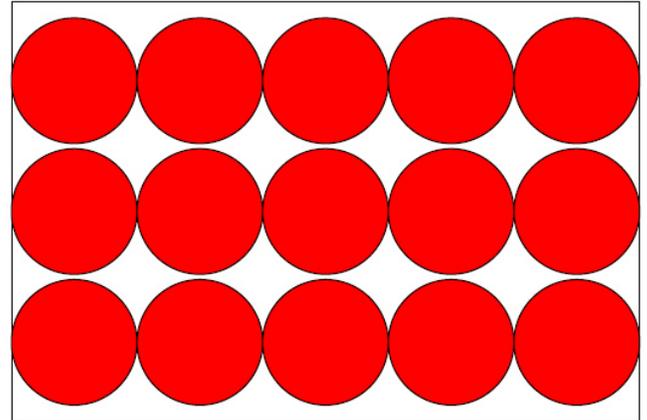


Figura 5.1 R=12

**Instancia 3.1 Dimensiones 100 x 200 R: 3**

Coordenadas	
$\dot{x}$	$\dot{y}$
33.333	33.333
33.333	100
33.333	166.667

Tabla5.6 R= 3

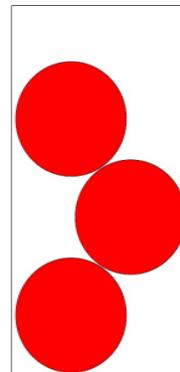


Figura 5.2 R

### Instancia 3.2 Dimensiones 120 x 80 $R= 21$

Coordenadas	
$\dot{x}$	$\dot{y}$
21.818	21.818
65.455	21.818
43.636	58.182
98.182	58.182

Tabla5.7  $R= 21$

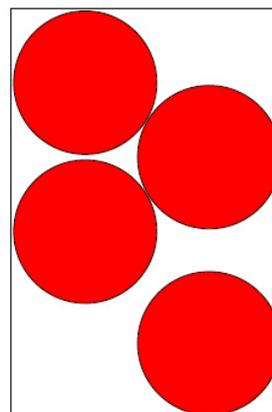


Figura 5.3  $R= 21$

Al final se encuentran las demás figuras de los resultados de estas instancias.

Además de la comparación anterior, también se realizaron instancias a partir de la publicación de Galiev y Lisafina (2013) para círculos de radios iguales en un rectángulo.

En este artículo presentan diversas soluciones para el problema: un modelo entero y una heurística basada en el mismo modelo lineal para diversos tipos de instancias.

Ellos utilizaron nodos que forman un conjunto de nodos en el rectángulo y asumen que los centros de los círculos son empaquetados en los nodos del conjunto. El problema de empaquetamiento de los círculos de radios iguales lo resuelven con un modelo de asignación 0-1. Se tomaron los resultados de la segunda configuración que utilizaron en la publicación, en donde las dimensiones del rectángulo  $R$  son: ancho 3 y altura 6.

El radio de los círculos, conjunto de puntos, total de puntos ( $n$ ), número de círculos empaquetados y el tiempo del artículo publicado por Galiev y Lisafina (2013) se muestran en la Tabla 5.5:

Circle radius	$\Delta$	Problem dimension	Circle number	Packing density $p$	$H$
0.625	0.078125	1403	10/10	0.682	49s
0.5625	0.0625	2449 (961/1029)	13/13	0.718	19m43s
0.5	0.125	697 (289/291)	18/18	0.785	8s
0.4375	0.0546875	3666 (1521/1885)	21/-	0.701	>12 h
0.375	0.09375	1425 (625/628)	32/32	0.785	48m57s
0.3125	0.078125	2139 (682/546/541)	45/-	0.767	>12 h
0.275	0.06875	2880 (1044/716/752)	61/-	0.805	>12 h
0.25	0.0625	3649 (1353/866/866)	74/-	0.807	>12 h
0.1875	0.046875	6897 (1026/117/1078/ 1192/1098)	140/-	0.859	>12 h

Tabla 5.8 Resultados de Galiev y Lisafina  
(2013) Tabla 3

Algunas figuras de los resultados de la publicación se encuentran en la figura 5.3,  $R = .125$ ,  $R=.25$ ,  $R=.1875$ , en donde se muestran los círculos y el conjunto de nodos en donde ubicaron los centros:

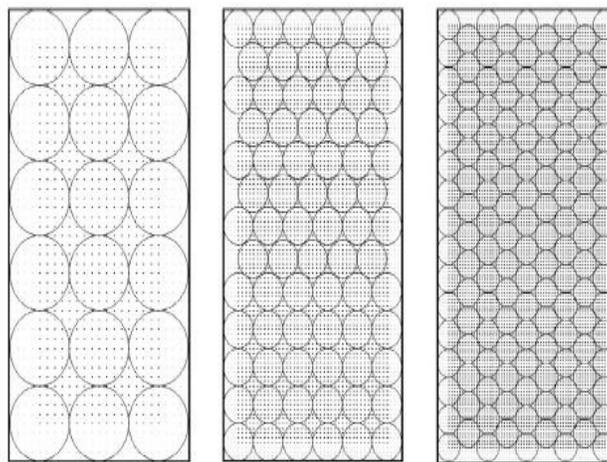


Figura5.4 Resultados de Galiev y Lisafina  
(2013) Figura 6.

En esta parte de la experimentación se utilizaron las diferentes formulaciones mencionadas anteriormente, las dimensiones del contenedor rectangular son de 3 x 6 en las Formulaciones A y C, en las Formulaciones B y D, se sustrae el radio del círculo a

utilizar para obtener las dimensiones del rectángulo. Las dimensiones del conjunto de nodos  $\Delta$  para cada instancia es diferente como lo establecido en el artículo.

Utilizamos el mismo conjunto de 9 instancias para realizar la experimentación. Los resultados de la experimentación están establecidos en la Tabla 5.6. Esta está distribuida de la siguiente forma: la primera columna presenta el radio del círculo, después se muestra la dimensión de la construcción del conjunto de puntos  $\Delta$ , el total de puntos ( $n$ ), y el número de círculos empaquetados. Las últimas cuatro columnas dan el tiempo en CPU de las diferentes formulaciones (en segundos).

Radio Círculo	$\Delta$	Dimensión Problema	Número de círculos	completo	mitad	compacto	compacto mitad
0.625	0.15625	1403	10	6.4	125.5	144.8	110.6
0.5625	0.0703125	2449	13	50.4	647.0	5034.5	1890.6
0.5	0.125	697	18	2.6	3.2	5.2	24.1
0.4375	0.0546875	3666	21	849.2	310.8	7459.9	3690.5
0.375	0.046875	1425	32	50.0	21.4	3873.5	847.7
0.3125	0.078125	2139	45	403.8	183.9	6514.3	4451.8
0.275	0.06875	2880	61	1032.4	415.3	*	6985.4
0.25	0.0625	3649	74	1234.8	535.5	14645.9	7840.6
0.1875	0.046875	6897	140	1427.3	725.9	*	8765.2

Tabla 5.9 Resultados experimentales

Las instancias marcadas con \*, quieren decir que el CPLEX no encontró resultado en un tiempo prolongado.

Se puede observar en la Tabla 5.6, el tiempo en CPU para la formulación completa es típicamente mucho menor que la formulación compacta, especialmente para los problemas más grandes. Se nota que de acuerdo a la Proposición 2, la formulación completa por pares es más fuerte que la compacta. Eliminando las restricciones redundantes típicamente (pero no siempre) se reduce el tiempo de CPU, aunque para la formulación completa la eliminación de la redundancia no cambia la relajación continua. Este efecto es bien

conocido por los usuarios de CPLEX, ya que reordena las restricciones que pueden incrementar/decrecer el tiempo computacional, dependiendo del camino seleccionado por el algoritmo del Corte y Ramificación. Sin embargo, nosotros podemos concluir que eliminando restricciones redundantes son mas utiles para problemas largos.

En las siguientes figuras se presentan las imágenes de las instancias resueltas de la Tabla 5.6 con radio 0.375, 0.3125, 0.4375 y 0.275 respectivamente.

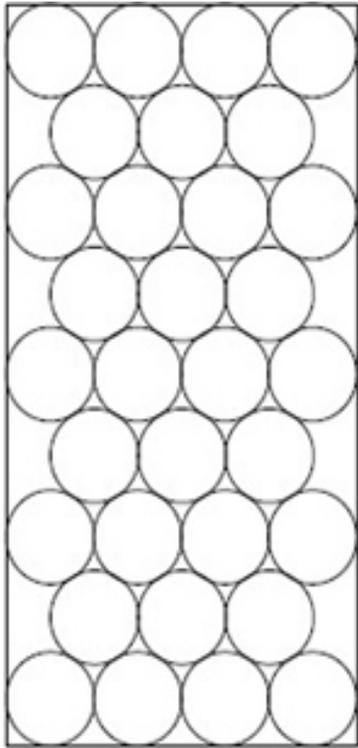


Figura 5.5  $R = 0.375$

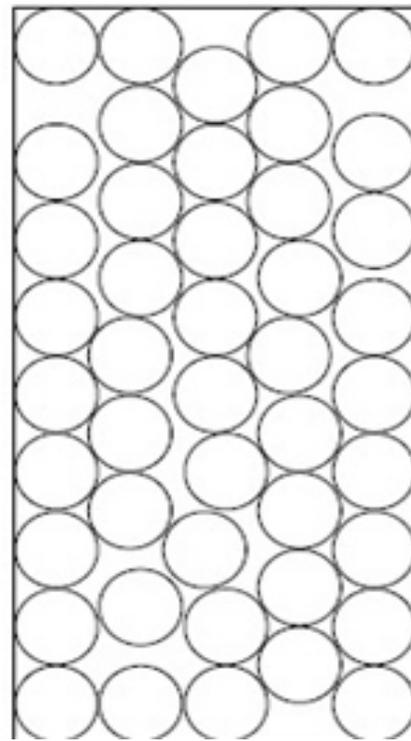


Figura 5.6  $R = 0.3125$

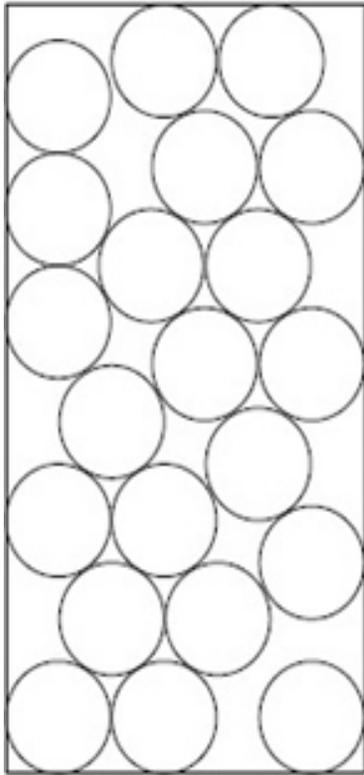


Figura 5.7  $R = 0.4375$

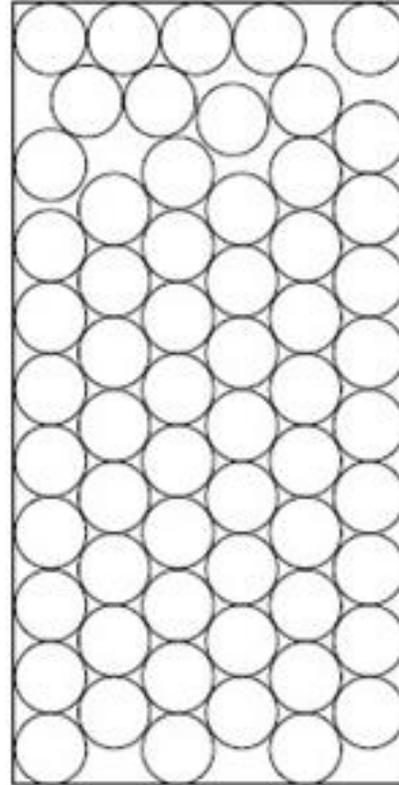


Figura 5.8  $R = 0.275$

Correia et al. (2000) que la eficiencia de sus algoritmos depende de los tipos de datos que se tengan dependiendo del objetivo que se requiera. Y concluyen que por la versatilidad del MaxNSA se puede utilizar en el empaquetamiento de círculos de radios diferentes.

En la publicación de Galiev y Lisafina (2013) concluyen que la aproximación del algoritmo heurístico al resultado es eficiente para el problema de empaquetamiento de círculos.

En el trabajo futuro propuesto se trabajará con círculos de radio diferentes para el empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular.

## CAPITULO 6

# Conclusiones

---

Con el modelo propuesto se realiza una importante aportación para el problema de empaquetamiento de círculos, porque se resuelve el problema mediante un modelo lineal binario que aporta buenos resultados para la solución del problema de empaquetamiento. Las variables binarias 0-1 son utilizadas para la asignación de los centros de los círculos en los puntos o nodos que cubren el contenedor rectangular.

Consideramos 4 formulaciones equivalentes para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular. En la formulación A, es una formulación completa que cuenta con todas las restricciones del problema de empaquetamiento. La Formulación B, se utiliza solo la restricción de no intersección para el problema permitiendo colocar círculos en la frontera. La Formulación C, es una formulación compacta debido a que se eliminan las restricciones redundantes en las restricciones de intersección. Y en la Formulación D, que es una formulación compacta que solo utiliza la restricción de intersección y elimina esas restricciones redundantes.

Las formulaciones resultan con la misma solución óptima respecto a la cantidad de círculos, pero el tiempo fue variable dependiendo de la formulación. Por ejemplo, en la Formulación D o compacta-mitad requiere mayor cantidad de tiempo, aunque se eliminen las restricciones redundantes.

Se pudo observar que la Formulación A es más fuerte que la Formulación C debido al tiempo en que se resuelve el modelo. Al utilizar la Formulación A se tienen todas las

restricciones necesarias para el problema de empaquetamiento obteniendo un mejor tiempo, que eliminando las restricciones redundantes,

Con esto se puede concluir que los resultados que brindan las formulaciones propuestas son eficientes debido a que satisfacen los resultados encontrados en la literatura y en un mejor tiempo.

La metodología del modelo propuesto para resolver el problema de empaquetamiento de círculos se puede utilizar en diversos problemas de empaquetamiento como en los problemas de 2D y 3D, en diferentes formas del contenedor, incluyendo formas irregulares.

## 6.1 TRABAJO FUTURO

A continuación se describen algunos aspectos que se derivan de este trabajo como futuras líneas de investigación:

- Aplicar la metodología propuesta en este trabajo de investigación pero con círculos de radios diferentes.
- Aplicación del termino telescopia, con una formulación equivalente del método propuesto para problema de empaquetamiento.
- Uso de técnicas de relajación Lagrangiana.
- Uso de desigualdades válidas para encontrar formulaciones más fuertes.
- Combinación continua y formulaciones enteras en el proceso de solución,

## APENDICE A

### Algoritmos

---

En esta sección se muestran los algoritmos de las Formulaciones B, C y D que no fueron presentados en el capítulo de formulaciones. Los algoritmos son equivalentes al algoritmo de la Formulación A, las diferencias presentadas dependen de lo que cada formulación pretende realizar.

La siguiente formulación aquella llamada mitad o la cual solo cuenta con las restricciones de intersección y se eliminaron las restricciones de frontera:

#### **ALGORITMO 2 Formulación B**

---

1. Paso 0. *Cálculo de las coordenadas.*  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i \in I$ .
  2. *Calcular distancia Euclideana.* Sea  $d_{ij}$  el valor de la distancia  $i \neq j \in I$ .
  3. *Calcular conjunto  $W$  para solapamientos.*  $i \neq j, d_{ij} < 2R, k, l \in K$ .
  4. Paso 1. *Función objetivo.*  $31415 * R^2 * \sum x_{ik}$  área cubierta por los círculos.
  5. Paso 2. Restricciones.
  6. *En punto  $i$  máximo centro de radio  $k$ .*  $x_{ik} \leq 1$ .
  7. *No existe intersección entre círculos.*  $x_{ik} + x_{jl} \leq 1$ .
  8. *Naturaleza de variables.*  $x_{ik} \geq 0$ .
  9. *Fin*
-

La Formulación C es aquella formulación compacta a la cual le eliminamos las restricciones redundantes a la restricción de intersección e incluye también las demás restricciones del problema de empaquetamiento:

### ALGORITMO 3 Formulación C

---

1. Paso 0. *Cálculo de las coordenadas.*  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i \in I$ .
  2. *Calcular distancia Euclideana.* Sea  $d_{ij}$  el valor de la distancia  $i \neq j \in I$ .
  3. *Calcular conjunto para solapamientos.*  $i \neq j, d_{ij} < R_k + R_l, k, l \in K$ .
  4. *Calcular conjunto existe en frontera del contenedor.* Punto  $j$  frontera  $\Rightarrow$  *Existe* = 0. Punto  $i$  no frontera  $\Rightarrow$  *Existe* = 1.
  5. *Simular valor de Lamda.*  $i \neq j, \text{Lambda } j = 1$ .
  6. Paso 1. *Función objetivo.*  $31415 * R^2 * x_{ik}$  área cubierta por los círculos.
  7. Paso 2. Restricciones. *Limitación de la cantidad de círculos.*  $m \rightarrow k, x_{ik} \leq m_k$
  8. *En punto  $i$  máximo centro de radio  $k$ .* *Existe*  $i = 1, x_{ik} \leq 1$ .
  9. *No existe intersección con frontera.*  $x_{ik} * R_k \leq d_{ij}$
  10. *No existe intersección.*  $x_{ik} * \text{Lambda } j * W_{ijkl} + x_{jl} * \text{Lambda } j * W_{ijkl} \leq \text{Lambda } j * W_{ijkl}$ .
  11. *Frontera no existe centro.* *Existe*  $j = 0, x_{ik} \leq 0$ .
  12. *Naturaleza de variables.*  $x_{ik} \geq 0$ .
  13. *Fin*
-

El siguiente algoritmo es de la formulación que solo cuenta con la restricción de no intersección y la eliminación de las restricciones redundantes de la misma:

#### **ALGORITMO 4 Formulación D**

---

1. Paso 0. *Cálculo de las coordenadas.*  $(x_i, y_i), i \in I$ .
  2. *Calcular distancia Euclideana.* Sea  $d_{ij}$  el valor de la distancia  $i \neq j \in I$ .
  3. *Calcular conjunto W para solapamientos.*  $i \neq j, d_{ij} < 2R, k, l \in K$ .
  4. *Simular valor de Lamda.*  $i \neq j, \text{Lambda } j = 1$ .
  5. Paso 1. *Función objetivo.*  $3.1415 * R^2 * \sum x_{ik}$  área cubierta por los círculos.
  6. Paso 2. Restricciones.
  7. *En punto i máximo centro de radio k.*  $x_{ik} \leq 1$ .
  8. *No existe intersección.*  $\sum x_i * \text{Lambda } j * W_{ij} + \sum x_j * \text{Lambda } j * W_{ij} \leq \text{Lambda } j * W_{ij}$ .
  9. *Naturaleza de variables.*  $x_{ik} \geq 0$ .
  10. *Fin*
-

## APENDICE B

### Figuras

---

En el siguiente apartado se pondrán las figuras de las instancias realizadas que no se mostraron en los resultados computacionales.

Las figuras siguientes corresponden a las instancias comparadas con el artículo de Correia et al. (2000).

#### **Instancia 1.3** Dimensiones 100 x 100 $R=13$

Coordenadas	
x	Y
14.286	14.286
42.857	14.287
71.429	14.286
28.571	37.143
57.143	37.143
85.714	37.143
14.826	60.000
42.857	60.000
71.429	60.000
28.571	82.857
57.143	82.857
85.714	82.857

Tabla A.1

$R= 13$

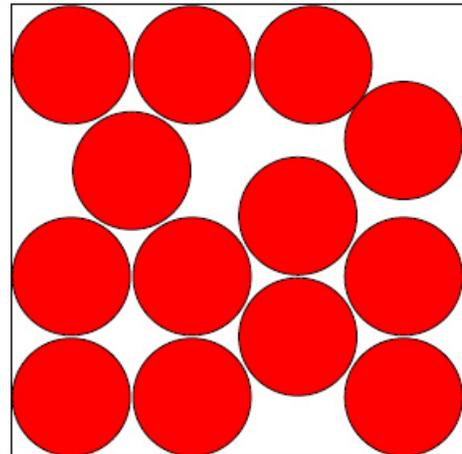


Figura A.1  $R = 13$

**Instancia 2.1 Dimensiones 100 x 200  $R = 25$**

Coordenadas	
x	Y
25	25
75	25
25	75
75	75
25	125
75	125
25	175
75	175

TablaA.2  $R=25$

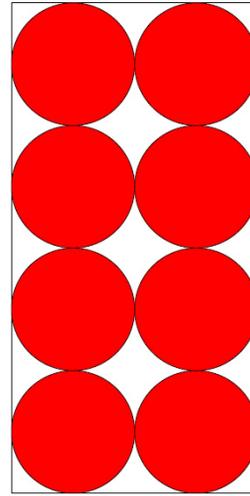


Figura A.2  $R = 25$

**Instancia 2.3 Dimensiones 100 x 100  $R = 18$**

Coordenadas	
x	Y
18.182	18.182
54.545	18.182
81.818	45.455
18.182	54.545
45.455	81.818
81.818	81.818

Tabla A.3  $R= 18$

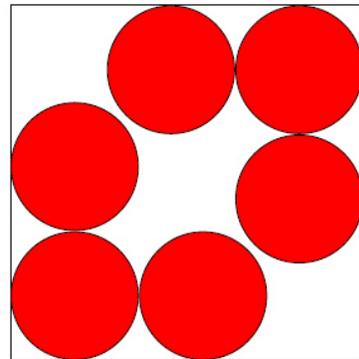


Figura A.3  $R = 18$

**Instancia 3.3 Dimensiones 100 x 100  $R = 22$**

Coordenadas	
x	y
25.000	25.000
75.000	25.000
25.000	75.000
75.000	75.000

Tabla A.4  $R = 22$

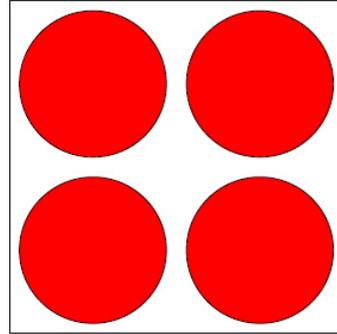


Figura A.4  $R = 22$

Las siguientes figuras pertenecen a las instancias comparadas con Galiev y Lisafina (2013):

**Instancia 2**

Coordenadas	
x	Y
0.75	0
1.88	0
0	0.88
1.88	1.13
0.94	1.75
0	2.38
1.88	2.38
0.94	3
0	3.63
1.88	3.63
0.94	4.25
0	4.88
1.88	4.88

Tabla A.5  $R = 0.5625$

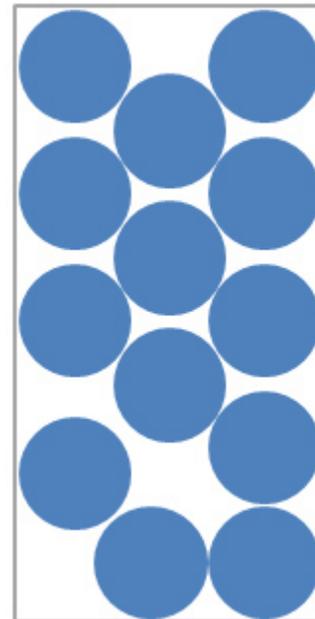


Figura A.5  $R = 0.5625$

### Instancia 3

Coordenadas	
$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	0
1	0
2	0
0	1
1	1
2	1
0	2
1	2
2	2
0	3
1	3
2	3
0	4
1	4
2	4
0	5
1	5
2	5

Tabla A.6  $R=0.5$

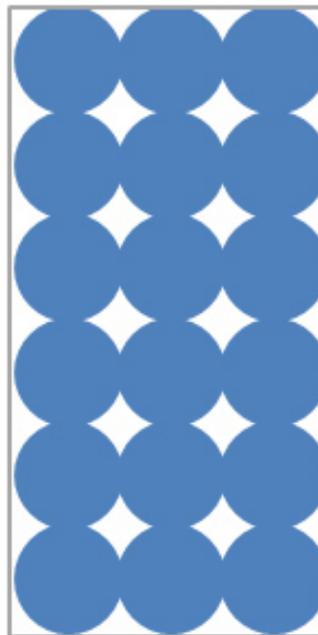


Figura A.6  $R=0.5$

### Instancia 1

Coordenadas	
x	Y
0.3977	0
1.75	0
0	1.1875
1.27273	1.1875
0.397727	2.375
1.75	2.375
0	3.5625
1.35227	3.5625
0.397727	4.75
1.75	4.75

Tabla A.7  $R=0.625$

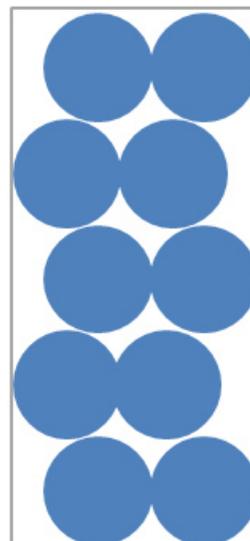


Figura A.7  $R=0.625$

## APENDICE C

# TRABAJO FUTURO

---

En este trabajo se propone un modelo lineal para resolver el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular. Por lo tanto, se puede utilizar para resolver el mismo problema pero con círculos de radios diferentes, telescopía, problema de 3D y/o diversos contenedores o irregulares. El apartado de un poco de trabajo futuro que se puede realizar como: círculos de radios diferentes, telescopía.

### CIRCULOS DE RADIO DIFERENTES

Para resolver círculos de radio diferentes se utiliza la misma formulación completa y con la formulación mitad o que utiliza la restricción de no intersección. En la formulación se colocan diferentes radios de los círculos que se vayan a empaquetar. A continuación se presenta el algoritmo.

---

#### ALGORITMO B.1

---

1. Paso 0. *Cálculo de las coordenadas.*  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i \in I$ .
2. *Calcular distancia Euclídeana.* Sea  $d_{ij}$  el valor de la distancia  $i \neq j \in I$ .
3. *Simular radios de los círculos.*  $K =$  cantidad de radios.
4. *Calcular conjunto para solapamientos.*  $i \neq j \quad d_{ij} < R_k + R_l, k, l \in K$ .
5. *Calcular conjunto existe en frontera del contenedor.* Punto  $j$  frontera  $\rightarrow$  Existe = 0. Punto  $i$  no frontera  $\rightarrow$  Existe = 1.

6. Paso 1. *Función objetivo.*  $31415 * R^* x_{ik}$  área cubierta por los círculos.
  7. Paso 2. Restricciones. *Limitación de la cantidad de círculos.*  $m \geq k. x_{ik} \leq m_k$
  8. *En punto i máximo centro de radio k.* Existe  $i=1. x_{ik} \leq 1.$
  9. *No existe intersección con frontera.*  $x_{ik} * R_k \leq d_{ij}$
  10. *No existe intersección.*  $x_{ik} + x_{jl} \leq 1.$
  11. *Frontera no existe centro.* Existe  $j=0. x_{ik} \leq 0.$
  12. *Naturaleza de variables.*  $x_{ik}.$
  13. *Fin*
- 

Algunos ejemplos de esta formulación se presentan a continuación:

Las dimensiones del contenedor son:  $L$  y  $W = 30$ ,  $R_1 = .6$ ,  $R_2 = 3$ , y las dimensiones del conjunto de nodos es  $M$  y  $N = 31$ . La figura correspondiente se muestra a continuación:

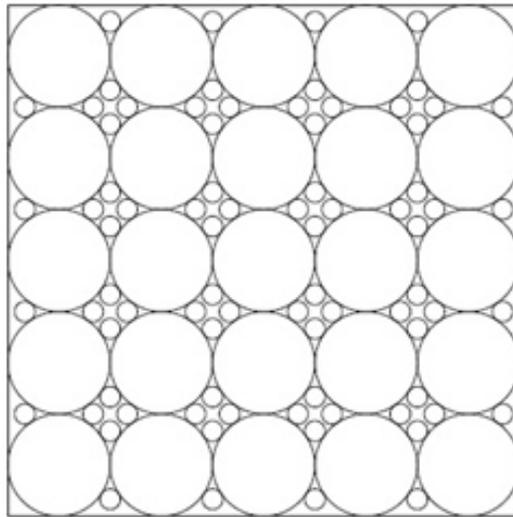


Figura B.1  $R_1 = 6$ ,  $R_2 = 3$

Las dimensiones del contenedor son:  $L$  y  $W = 30$ ,  $R_1 = .6$ ,  $R_2 = 3$ ,  $R_3 = 6$ , y las dimensiones del conjunto de nodos es  $M$  y  $N = 51$ . La figura correspondiente es:

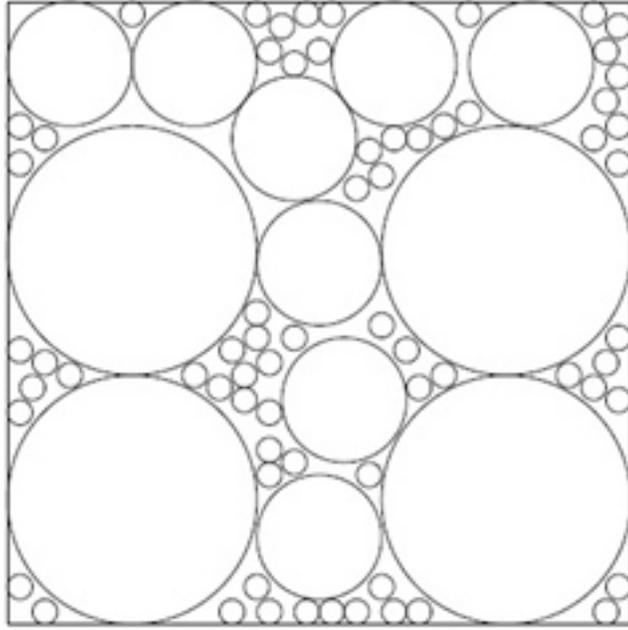


Figura B.2  $R_1 = .6$ ,  $R_2 = 3$ ,  $R_3 = 6$ ,

## INDICE DE FIGURAS

---

Figura 3.1 Problema de empaquetamiento de círculos en un círculo	19
Figura 3.2 Empaquetamiento de círculos en un cuadrado	20
Figura 3.3 Cubrimiento de círculos	21
Figura 3.4 Empaquetamiento de círculos en un rectángulo	22
Figura 3.5 Empaquetamiento de círculos en un cuadrado	24
Figura 3.6 Items colocados dentro del contenedor	26
Figura 3.7 No intersección entre los ítems	27
Figura 4.1 Representación de los puntos o nodos	33
Figura 5.1 $R = 12$	42
Figura 5.2 $R = 3$	42
Figura 5.3 $R = 21$	43
Figura 5.4 Resultados de Galiev y Lisafina (2013)	44
Figura 5.5 $R = 0.375$	46
Figura 5.6 $R = 3125$	46
Figura 5.7 $R = 0.4375$	47

47	Figura	5.8		R	=	0.275
53	Figura	A.1		R	=	13
	Figura	A.2	R = 25			54
54	Figura	A.3		R	=	18
55	Figura	A.4		R	=	22
	Figura	A.5	R = 0.5625			54
54	Figura	A.5		R	=	0.5
55	Figura	A.7		R	=	0.625
	Figura	B.1	$R_1 = .6, R_2 = 3$			58
59	Figura	B.2	$R_1 = .6, R_2 = 3, R_3 = 6$			6

## INDICE DE TABLAS

---

Tabla 3.1	Información general del problema de empaquetamiento de círculos	30
Tabla 5.1	Resultados Correia et al. (2000)	40
40	Tabla 5.2 Tiempo obtenido Correia et al. (2000)	
41	Tabla 5.3 Resultados Modelo lineal - binario	
41	Tabla 5.4 Tiempo obtenido Modelo lineal - binario	
42	Tabla 5.5 R =	12
42	Tabla 5.6 R =	3
43	Tabla 5.7 R =	21
44	Tabla 5.8 Resultados Galiev y Lisafina (2013)	
45	Tabla 5.9 Resultados experimentales	

53	Tabla	A.1	R	=	13
	Tabla A.2	R = 25			54
54	Tabla	A.3	R	=	18
55	Tabla	A.4	R	=	22
	Tabla A.5	R = 0.5625			54
54	Tabla	A.5	R	=	0.5
55	Tabla	A.7	R	=	0.625

## BIBLIOGRAFÍA

---

H. Akeb y M. Hifi, “An adaptive Look-Ahead strategy-based algorithm for the circular open dimension problem”, The second International Conference on Adaptive and Self-Adaptive systems and applications”, 2010.

H. Akeb y M. Hifi, “Solving the circular open dimension problem using separate beams and look-ahead strategies”, Computers & Operations Research, vol.40, pp. 1243-1255, 2013.

H. Akeb, M. Hifi y R. M’Hallah, “A beam search algorithm for the circular packing problem”, Computers & Operations Research vol. 36, pp1513-1528, 2009.

E. Baltacioglu, J.T. Moore y Hill R.R., The distributor’s three-dimensional pallet-packing problem: a human-based heuristical approach”, International Journal of Operations Research, vol.1, pp. 249-266, 2006.

J. E. Beasey, An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure, Operations Research, vol. 33, pp. 49-64, 1985.

E.G. Birgin y J.M. Gentil, “New and improved results for packing identical unitaryradius circles within triangles, rectangles and strips”, Computers & Operations Research, vol. 37, pp. 1318-1327, 2010.

E.G. Birgin, J.M. Martínez y D.P. Ronconi. “Optimizing the Packing of Cylinders into a Rectangular Container: A Nonlinear Approach”, 2003.

E.G. Birgin y F.N.C. Sobral, "Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems", *Journal Computers and Operations Research*, vol. 35, pp. 2357-2375, 2008.

I. Castillo, F.J. Kampas y J.D. Pinter, "Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications", *European Journal of Operational Research*, vol. 191, pp. 786-802, 2008.

C. Collins y K. Stephenson, "A circle packing algorithm", *Computational Geometry*, vol. 25, pp. 223-256, 2003.

M.H. Correia, J.F. Oliveira y J.S. Ferreira, "Cylinder packing by simulated annealing". *Pesquisa Operacional*, vol. 20, pp. 269-286, 2000.

M. Csaba Markot, "An interval Method for verifying structural optimality of the circle packing configuration in the unit square ", *Jornal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 199, pp. 353-157, 2007.

D. Dennise y G. Brock Williams, "Layered circle packings", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*", vol. 15, pp. 2429-2440, 2005.

H.J. Frazer y J.A. George, "Integrated container loading software for pulp and paper industry", *European Journal of Operational Research*, vol. 77, pp. 466-474, 1994

P. Gabor, M. Csaba Markot y T. Csendes, "Global optimization in geometry circle packing into the square", *Essays and surveys in global optimization*, pp. 234-265, 2001.

P.Gabor Szabo y E. Specht, "Packing up to 200 equal circles in a square", *Springer*, vol. 4, pp. 141-156, 2007.

S.I. Galiev y M.S. Lisafina. "Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain", *European Journal of Operational Research*, vol. 230, pp. 505-514, 2013.

J.A. George, "Multiple container packing: a case study of pipe packing", *Journal of the Operational Research Society*, vol. 47, pp. 1098-1109, 1996.

R.L. Graham, B.D. Lubachevsky, K.J. Nurmela, "Dense packings of congruent circles in a circle", *Discrete Mathematics*, vol. 181, pp. 139-154, 1998.

A. Grosso, A. Jamali y M. Locatelli, "Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container", F. Shoen, *Journal of Global Optimization*, vol. 47, pp. 63 - 81, 2008.

M. Hifi y R. M'Hallah, "A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies", *Advances in Operations Research*, vol. 2009, pp. 22.

M. Hifi y R. M'Hallah, "Approximate algorithms for constrained circular cutting problems", *Computers & Operations Research*, vol. 31, pp. 675-694, 2004.

W. Huang, Y. Li, H. Akeb y C. Li. "Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container", 2005.

T. Kubach, A. Bortfeldt, H. Gehring, "Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle", Springer-Verlag, vol. 17, pp. 461-467, 2009.

I. Litvinchev y L. Ozuna, "Integer programming formulations for approximate packing in a rectangular container, *Mathematical Problems in Engineering*", 2014 (to appear).

J. Liu, Y. Zheng y W. Liu, "A heuristic simulated annealing algorithm for the circular packing problem", *Third International Conference on Genetic and Evolutionary Computing*, 2009.

M. Locatelli y U. Raber, "Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach", *Discrete Applied Mathematics*, vol. 122, pp. 139-166, 2002.

C.O. Lopez y J.E. Beasley, "A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers", *European Journal of Operational Research*, vol. 214, pp. 512-525, 2011.

C.O. Lopez y J.E. Beasley, "Packing unequal circles using formulation space search", *Computers & Operations Research*, vol. 40, pp. 1276-1288, 2013.

C.D. Maranas, C.A. Floudas y P.M. Pardalos, "New results in the packing of equal circles in a square", *Discrete Mathematics*, vol. 142, pp. 287-293, 1995.

J.B.M. Melissen, P.C. Schuur, "Packing 16, 17 o 18 circles in an equilateral triangle", *Discrete Mathematics*, vol. 145, pp. 333-342, 1995.

K.J. Nurmela y P.R.J. Ostergard, "Covering a square with up to 30 equal circles", Helsinki University of Technology, ISBN 951-22-50712-1.

R. Peikert, D. Wurtz, M. Monagan y C. de Groot, "Packing circles in a square: a review and new results", Zurich, Switzerland, CH-8092, 1994.

W.Qi Huang, Y. Li, S. Gerard, C. Min Li y R. Chu Xu, "A Learning from human heuristic for solving unequal circle packing problem", Journal Computers and Operations Research, vol. 33, pp. 2125 – 2142, 2006.

C. Romano y C. Gracia, "Métodos y Algoritmos para resolver problemas de corte unidimensional en entornos realistas. Aplicación a una empresa del sector siderurgico" , Tesis doctoral, Departamento de Organización de empresas, Universidad Politecnica de Valencia.

C. Salto, J. M. Molina, E. Alba, G. Leguizamon, "Metaheurísticas para resolver problemas de corte y empaquetado",

S. Skyzman y J. Cagan, "A simulated annealing based approach to three dimensional component packing", Journal of Mechanical Design, vol. 117, pp. 338, 1995.

Y. Stoyan y A. Chugay, "Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region", European Journal of Operational Research, vol. 197, pp. 446-455, 2009.

Y.G. Stoyan y G.N. Yaskov, "Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain", International Transactions in Operational Research, vol. 20, pp. 79-99, 2013.

E. Toro, A. Garces y H. Ruiz, "Solución al problema de empaquetamiento bidimensional usando un algoritmo hibrido en vecindad variable y recocido simulado", Revista Facultad de Ingenieria Antioquia, ISSN: 0120-6230.

G. Washer, H. Haufner, y H. Schumann," Improved typology of cutting and packing problem". European Journal of Operational Research, vol. 183, pp. 1109-1130, 2007.

L. Wei, W. Chong-Oon, W. Zhu y A. Lim, "A reference length approach for the 3D strip packing problem", European Journal of Operational Research, vol. 220, pp. 37-47, 2012.

G. Whitwell, "Novel Heuristics and Metaheuristic approaches to cutting and packing", Thesis Submitted to the University of Nottingham, School of computer science and information , 2004.

L.A. Wolsey, Integer programming. Wiley, New York, 1999.

D. Wurtz, M. Monagan y Peikert, " The history of packing circles in a a square", Lecture notes in control and information science, vol. 180, pp. 45-54, 1992.

Y. Wu, W. Li, M. Goh y R. de Souza, "Three dimensional bin packing problem with variable bin height", European Journal of Operational Research, vol. 202, pp. 347-355, 2010.

H. Xia Yu y L. Wei Zhang, "An Optimization model for the two dimensional packing problem the two dimensional packing problem and its augmented lagrangian method", International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 27, pp. 1-10, 2006.

J. Xue y K.K. Lai, "Effective Methods for a Container Packing Operation", Mathematical, Computational Modelling, vol. 25, pp. 75-84, 1997.

Q. Yue, J. Cao, y F. Wang, "Research and implementation of simulated annealing algorithm in the large scale rectangular optimal cutting stock problem", International Conference on Mechatronics and Automation, Harin, China, 2007.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

Ruth Lizeth Zamarrón Castro

Candidato para el grado en Maestría en Ciencias  
en Ingeniería de Sistemas  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis  
MODELOS ENTEROS  
PARA EL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO  
DE CIRCULOS EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR

Nací el 15 de Noviembre de 1986 en la Ciudad de Monterrey, Nuevo León, México. Realicé mis estudios de licenciatura en Ingeniería Industrial Administrador en la Facultad de Ciencias Químicas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Ingrese en el 2012 al Posgrado de Ingeniería de Sistemas en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la misma universidad bajo la dirección del Dr. Igor Litvinchev.