

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**DISEÑO DE UN OBSERVADOR CONVERGENTE POR TIEMPO FIJO  
PARA UNA CLASE DE SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES DE  
DIMENSIÓN FINITA**

**PRESENTA**

**DANY FERNANDO GUERRA AVELLANEDA**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO de MAESTRÍA EN  
CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**DICIEMBRE, 2016**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**DISEÑO DE UN OBSERVADOR CONVERGENTE POR TIEMPO FIJO  
PARA UNA CLASE DE SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES DE  
DIMENSIÓN FINITA**

**PRESENTA**

**DANY FERNANDO GUERRA AVELLANEDA**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO de MAESTRÍA EN  
CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN,**

**DICIEMBRE DE 2016**

*A mis padres, Constanza Avellaneda y Edilberto Guerra, por su apoyo incondicional.*

*Al resto de mi familia y a todas las personas que han depositado su confianza en mí.*

# Agradecimientos

Al **Dr Mikhail Basin** por su asesoría, apoyo continuo y su excelente disposición a compartir sus conocimientos durante mis estudios de Maestría.

Al **Dr Pablo Rodriguez** Por su apoyo principalmente en el trabajo de simulación requerido para la realización de mi tesis de maestría y su labor como jurado de la misma.

Al **Dr Alexander Loukianov** por sus observaciones y sugerencias durante mi estancia en CINVESTAV Guadalajara

Al **Dr Miguel Hernandez** por sus observaciones y su labor como jurado de mi tesis de Maestría.

Al **Dr Javier Almaguer** por su generosidad y apoyo al compartir sus intereses académicos durante mis estudios de Maestría.

A **mis padres**, por su apoyo incondicional, desinteresado, por el tiempo concedido, por la paciencia y comprensión para cumplir con la terminación del posgrado fuera de mi país.

A **mis amigos** por entusiasarme a iniciar esta aventura académica fuera de mi país.

Finalmente agradezco a la **Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas de la UANL** y al **CONACYT** por la gestión realizada que me permitió obtener apoyo económico, administrativo y académico mientras cumplía con mis estudios de Maestría en México.

# Resumen

Se propone un observador continuo no lineal que permite la convergencia en un tiempo fijo (tiempo finito preestablecido) de un sistema dinámico no lineal finito-dimensional cuyo único estado medible es el de grado relativo más alto, generalizando el caso estudiado en la literatura de convergencia por un tiempo finito. El observador se diseña a partir de un par de campos vectoriales asintóticamente estables con determinado grado de homogeneidad en las variables de error para un sistema no lineal que puede llevarse a una forma canónica lineal convergente al origen por un tiempo preestablecido basado en inyecciones en la salida que son continuas. Enseguida se estudia el problema relativo a la estimación del tiempo de convergencia del observador en tiempo fijo, calculando una cota superior uniforme del tiempo de asentamiento y encontrando que nuestra estimación de tiempos de convergencia es menos conservadora (más precisa) que las existentes en la literatura. Finalmente, se ponen a prueba los resultados en dos casos de estudio: un motor de corriente directa (sistema estable) y un péndulo invertido (sistema inestable). Se encuentra evidencia empírica de que si el sistema no lineal es inestable en el punto de operación no es posible estabilizarlo en tiempo fijo con un regulador construido a partir de las variables estimadas. Sin embargo, se logra convergencia en tiempo fijo construyendo parte del regulador desde las variables de estado.

**Palabras clave:** Sistemas no Lineales, Observadores Homogéneos, Estabilidad en tiempo fijo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
Resumen . . . . .	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.1.1. Antecedentes de reguladores en tiempo finito/fijo . . . . .	1
1.1.2. Antecedentes de Observadores y diferenciadores . . . . .	3
1.2. Motivación y Justificación . . . . .	7
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	8
1.4. Objetivo General . . . . .	9
1.4.1. Objetivos Específicos . . . . .	9
1.5. Contribuciones de la Tesis . . . . .	9
1.6. Metodología . . . . .	10
1.7. Estructura de tesis . . . . .	10
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>12</b>

2.1. Convergencia y Estabilidad en tiempo finito/fijo para sistemas autónomos continuos . . . . .	13
2.1.1. Preliminares . . . . .	13
2.1.2. Convergencia y estabilidad en tiempo finito . . . . .	15
2.1.3. Convergencia y estabilidad en tiempo fijo . . . . .	16
2.2. Homogeneidad . . . . .	17
2.2.1. Función Homogénea . . . . .	19
2.2.2. Campo Vectorial Homogéneo . . . . .	22
2.3. Estabilidad en tiempo finito/fijo y Homogeneidad . . . . .	23
<b>3. Diseño de un observador convergente por tiempo fijo</b>	<b>27</b>
3.1. El observador propuesto . . . . .	28
3.2. Estabilidad en tiempo finito del sistema $O(\alpha, e)$ . . . . .	29
3.2.1. Una Función de Lyapunov homogénea para el sistema $O(\alpha, e)$ . . . . .	31
3.3. Convergencia uniforme del Sistema $O(\beta, e)$ . . . . .	32
3.3.1. Una Función de Lyapunov Homogénea para el Sistema $O(\beta, e)$ . . . . .	33
3.4. Teorema de Estimación de Tiempo fijo para el observador Diseñado . . . . .	35
3.4.1. Anotaciones sobre el Observador diseñado . . . . .	40
3.4.2. Ventajas del observador diseñado . . . . .	41
3.4.3. Un diferenciador continuo en tiempo fijo . . . . .	41
<b>4. Casos de estudio</b>	<b>44</b>

4.1. Diseño de un Observador convergente por un tiempo fijo para un Motor de corriente Directa . . . . .	44
4.1.1. Transformación en la forma compañera del modelo del motor DC . . .	46
4.1.2. La entrada de control $V_a(t)$ . . . . .	46
4.1.3. Diseño del Observador convergente en tiempo fijo . . . . .	46
4.1.4. Diseño del regulador convergente en tiempo fijo . . . . .	47
4.1.5. Simulación del DC motor con switch . . . . .	48
4.1.6. Simulación del Regulador . . . . .	53
4.1.7. Simulación del DC motor sin switch . . . . .	57
4.1.8. Diseño de un Observador convergente por un tiempo fijo para un Péndulo invertido sobre un carro . . . . .	61
4.1.9. La entrada de control $u(t)$ . . . . .	63
4.1.10. Simulación de péndulo invertido sobre un carro . . . . .	65
4.1.11. Péndulo invertido sobre un carro con switch . . . . .	65
4.1.12. Diseño del Observador convergente en un tiempo fijo . . . . .	65
4.1.13. Diseño del regulador convergente en un tiempo fijo . . . . .	67
4.1.14. Simulación del Péndulo con switch . . . . .	67
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>72</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	72
5.2. Trabajo futuro . . . . .	72
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

4.1. Gráfico de componentes de un Motor CD . . . . .	45
4.2. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $\theta$ en ausencia del regulador	50
4.3. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $\omega$ en ausencia del regulador	51
4.4. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $i$ en ausencia del regulador	52
4.5. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $\theta$ actuando regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del regulador . . . . .	54
4.6. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $\omega$ actuando regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del regulador . . . . .	55
4.7. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $i$ actuando regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del regulador . . . . .	56
4.8. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $\theta$ actuando regulador y observador de manera simultanea . . . . .	58
4.9. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $\omega$ actuando regulador y observador de manera simultanea . . . . .	59
4.10. Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable $i$ actuando regulador y observador de manera simultanea . . . . .	60
4.11. Componentes y diagrama de cuerpo libre del modelo de Péndulo invertido sobre un carro . . . . .	62

4.12. Trayectorias estimadas y trayectorias de los estados del péndulo invertido sobre un carro formando un ciclo límite de gran amplitud. Actúan regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del observador y el tiempo estimado de convergencia del regulador . . . . .	66
4.13. Trayectoria estimada y trayectoria real de los estados del sistema durante el tiempo de convergencia estimado del observador y el tiempo estimado de convergencia del regulador . . . . .	69
4.14. Zoom de trayectoria estimada y trayectoria real de los estados del sistema durante el tiempo de convergencia estimado del observador y el tiempo estimado de convergencia del regulador . . . . .	70

"All the evolution we know of proceeds from the vague to the definite."

(Charles Sanders Peirce)

# Capítulo 1

## Introducción

---

### 1.1. Antecedentes

El primer estudio detallado de convergencia y estabilidad en tiempo finito definida para puntos de equilibrio de sistemas autónomos continuos pero no lipschitzianos así como las propiedades de la función de tiempo de convergencia son debidos a [1] y [2]. En dichos trabajos se definen funciones de tiempo de convergencia continuas, Lipschitz continuas y Holder continuas que son ilustradas mediante ejemplos. Además se establecen desigualdades diferenciales escalares para estabilidad en tiempo finito involucrando funciones de Lyapunov, sus propiedades y la relación con las funciones de tiempo de convergencia correspondientes. El documento finaliza con una sección que exhibe la robustez ante perturbaciones de sistemas estables en tiempo finito.

#### 1.1.1. Antecedentes de reguladores en tiempo finito/fijo

El primer resultado en cuanto a reguladores en tiempo finito se encuentra en [3] y consiste en establecer la existencia de un controlador continuo que estabiliza en tiempo finito una cadena de integradores. El controlador hace del sistema asintóticamente estable y homogéneo de grado negativo con respecto a una dilatación. Los autores emplean el controlador construido para demostrar que todo sistema lineal controlable es estabilizable en tiempo finito mediante realimentación de estados continua. El argumento de la demostración hace uso de

que todo sistema lineal controlable puede llevarse a la forma canónica de Brunovsky, la cual es una colección desacoplada de cadenas de integradores controladas independientemente. El resultado se obtiene por notar que en el primer resultado se estabiliza en tiempo finito una cadena de integradores en la forma canónica de Brunovsky. Es importante anotar que todos los resultados obtenidos en [3] se deducen al asumir unicidad de soluciones en tiempo futuro para el campo vectorial de interés.

Un estudio más profundo sobre las formas de estabilizar en tiempo finito una cadena de integradores puede consultarse en [4], así como un estado del arte hasta el año 2006 relacionado con estabilidad en tiempo finito.

En algunos sistemas dinámicos es deseable además de obtener estabilidad en tiempo finito garantizar que la función de tiempo de convergencia sea acotada independientemente de la condición inicial. Particularmente, el problema de diseño de leyes de control continuas convergentes por un tiempo fijo fue iniciado en [5] y [6], mientras que una ley de control multivariable convergente en tiempo fijo puede encontrarse en [7] y una ley de control para una cadena de integradores en [8].

[6] y [9], presentan estados del arte muy completos relativos a estabilidad en tiempo fijo y diseño de reguladores en tiempo fijo para sistemas no autónomos incluyendo sistemas discontinuos.

En cuanto a resultados donde se proporcionan estimados de los tiempos de convergencia de controladores para sistemas en bajas dimensiones puede consultarse: [10], [11], [13], [14], [15], [16] y [17].

Finalmente, en [8] se establece por primera vez (hasta donde los autores conocen) un estimado del tiempo de convergencia para un algoritmo de control convergente en tiempo fijo que lleva al origen a una cadena de integradores de dimensión finita. Los resultados obtenidos son aplicados a un motor de corriente directa.

La siguiente tabla resume algunos de los antecedentes revisados en cuanto a reguladores convergentes en tiempo finito/ fijo se refiere.

Referencia	Temática
[Bhat and Bernstein, 2005]	Estabilidad en tiempo finito y reguladores en tiempo finito
[Moulay and Perruquetti, 2006]	Estabilidad en tiempo finito y reguladores en tiempo finito
[Polyakov, 2012]	Estabilidad en tiempo fijo y reguladores en tiempo fijo
[Polyakov and Fridman, 2014]	Estabilidad, funciones de Lyapunov y reguladores en tiempo fijo
[Basin et al, 2015]	Reguladores en tiempo fijo y estimación de tiempo de convergencia

### 1.1.2. Antecedentes de Observadores y diferenciadores

El propósito de un observador es estimar los estados no medibles de un sistema a partir de las salidas medibles y las entradas. Puede decirse que un observador es una replica del sistema que dirige la entrada del sistema junto con una señal representando la diferencia entre la medida del sistema y las salidas del observador. En uno de los primeros observadores conocido en la literatura como el observador de Luenberger [18],[19], la diferencia entre la salida de la planta y el observador es realimentada linealmente en el observador. Sin embargo, en la presencia de incertidumbre o señales desconocidas dicho observador es incapaz de forzar el error de estimación en la salida a cero y de lograr que el observador de estados converja a los estados del sistema. Por tal razón es que un observador convergente en tiempo finito o en tiempo fijo es necesario. Este observador realimenta el error de estimación de la salida vía un término no lineal que hace switch proporcionando una solución a los inconvenientes que se presentan con el observador de Luenberger. Por ejemplo, si una cota sobre la magnitud de los disturbios es conocida, el observador convergente por tiempo finito/fijo puede forzar el error de estimación de la salida a converger a cero en tiempo finito, mientras que el observador de estados converge asintóticamente a los estados del sistema. Además, los disturbios dentro del sistema pueden ser reconstruidos.

En 1998 [20] presenta la estabilización asintótica de sistemas no lineales que pueden ponerse en la forma canónica observador/controlador generalizada propuesta en [21] y dada por el sistema:

$$\dot{x} = \hat{A}x + f(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) \quad (1.1.1)$$

$$y = Cx \quad (1.1.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $r \in \mathbb{N}$  y

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1, 0, \dots, 0)$$

con  $f$  pudiendo depender de varios estados del sistema y no solamente de la variable de salida.

Los autores en primera instancia diseñan un control seguido de un observador ambos convergentes por tiempo finito que se caracteriza porque considera medible únicamente la variable de estado con mayor grado relativo para finalmente analizar el sistema de lazo cerrado.

El observador propuesto tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1|z_1(t) - y(t)|\text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2|z_1(t) - y(t)|\text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= f(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) - k_n|z_1(t) - y(t)|\text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \end{aligned}$$

$k_1, k_2, \dots, k_n > 0$ , con  $\text{sgn}1 = 0$  antes de entrar en la fase y  $\text{sgn}1 = \text{sign}$  una vez se entra en ella (note que la función  $\text{sgn}1$  es responsable de la discontinuidad del observador). La matriz  $A$  empleada para resolver la ecuación de Lyapunov  $A^T P + P A = -I_n$  es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2/k_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -k_{n-1}/k_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n/k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

tal que sus ganancias  $k_i$   $i = 1, 2, \dots, n$   $A$  Hurwitz. Por tanto  $P$  es definida positiva.

La función de Lyapunov empleada para mostrar la convergencia y estabilidad del observador es  $V = 0.5e_1^2$ , cuya derivada es  $\dot{V} = e_1(e_2 - k_1 \text{sgn}(e_1))$ . Para asegurar convergencia en tiempo finito a cero de  $e_1$  imponen la condición:  $k_1 > |e_2|_{max}$ .

Finalmente, sugieren algunas modificaciones al observador para evitar chattering, la aparición de picos y mejorar la convergencia.

En [22] proponen el primer observador por tiempo finito continuo para sistemas de cualquier dimensión con realimentación no lineal. Su estructura es una ligera variante del mencionado arriba, las funciones *sign1* son reemplazadas por funciones *sgn* y aparecen potencias  $\alpha_i \in (1 - \epsilon, 1)$  obteniéndose:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1 |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2 |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_2} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= -k_n |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_n} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

$$k_1, k_2, \dots, k_n > 0.$$

Dichas potencias garantizan que el sistema de error asociado sea homogéneo de grado negativo y la matriz  $A$  empleada para resolver la ecuación de Lyapunov  $A^T P + P A = -I_n$  es:

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y es tal que sus ganancias  $k_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  la hacen Hurwitz. De igual manera  $P$  es definida positiva.

A partir de  $P$  construyen una función de Lyapunov  $V_\alpha(e) = \sigma^T P \sigma$ , con

$$\sigma = [v_1^{1/q}, v_2^{(1/\alpha_1)q}, \dots, v_n^{(1/\alpha_{n-1})q}]^T$$

una transformación que permite demostrar la estabilidad asintótica del sistema de estimación de error asociado al observador (de esta construcción ampliaremos más adelante en detalle dado que su observador es la base para el diseño del observador convergente por un tiempo fijo que proponemos en nuestra tesis).

En cuanto al diseño de diferenciadores, los trabajos se han enfocado en su mayoría a observadores en modos deslizantes en dimensiones bajas ( $n=2$ ) por un tiempo finito/fijo tanto discontinuos como continuos. Se destaca el diferenciador de primer orden propuesto por Levant [11], [12]. El diferenciador tiene la forma

$$\begin{aligned} u &= u_1 - \lambda|x - f(t)|^{1/2}sgn(x - f(t)) \\ \dot{u}_1 &= -\alpha sgn(x - f(t)) \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

donde  $\alpha, \lambda > 0$  y  $u(t)$  es la salida del diferenciador,  $f(t)$  es una función acotada y medible en  $[0, \infty]$ , con derivada acotada por una constante de lipschitz  $C$ , y se caracteriza por combinar la exactitud del diferenciador con la robustez con respecto a errores de medida o ruidos en las entradas (un diferenciador  $D$  se denomina exacto si sobre alguna de sus entradas, la salida coincide con su derivadas. El orden del diferenciador es el orden de la derivada que este produce. Además, un diferenciador es robusto sobre alguna entrada  $f(t)$  si la salida tiende uniformemente a  $Df(t)$  mientras que la señal de entrada tiende uniformemente a  $f(t)$ ).

En [23] extienden a observadores continuos convergentes por un tiempo fijo. Se sugiere el diferenciador:

$$\begin{aligned} u &= u_1 - k_1|x - f(t)|^{1/2}sgn(x - f(t)) + \mu|x - f(t)|^{3/2}sgn(x - f(t)) \\ \dot{u}_1 &= -(k_2/2)sgn(x - f(t)) + 2\mu|x - f(t)| + (3/2)\mu|x - f(t)|^2sgn(x - f(t))^2 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

La presencia del término adicional  $2\mu|x - f(t)| + (3/2)\mu|x - f(t)|^2sgn(x - f(t))^2$  es el que permite demostrar convergencia en tiempo fijo. Sin embargo, la cota estimada para la convergencia en tiempo fijo es muy conservadora, excediendo la convergencia real mas de 100 veces, lo cual resulta inaceptable desde un punto de vista práctico.

A continuación se muestra una tabla que resume los observadores y diferenciadores revisados

Feedback no lineal\*\*, Modo deslizante\*

Referencia	Convergencia	Tipo
[Perruquetti et al, 2008]**	Tiempo-finito	Continuo
[Levant, 1998]*	Tiempo-finito	Continuo ( $n=2$ )
[Perruquetti et al, 1998]*	Tiempo-finito	Discontinuo
[Cruz-Zavala et al., 2011]*	Tiempo-fijo	Continuo ( $n=2$ )

A partir de los antecedentes puede evidenciarse que no se tiene un observador continuo convergente en tiempo fijo para sistemas no lineales de dimensión  $n$  arbitraria.

## 1.2. Motivación y Justificación

En la revisión de literatura se encuentran antecedentes de observadores (diferenciadores) de alto orden continuos y discontinuos convergentes por tiempo fijo y observadores (diferenciadores) de orden 2 continuos convergentes en tiempo fijo. Todos ellos para diferentes clases de sistemas dinámicos que pueden llevarse a alguna forma canónica que permita la linealización del error del observador. Sin embargo no se reportan observadores continuos convergentes en tiempo fijo para sistemas no lineales de dimensión  $n$  arbitraria donde el único estado medible es el de mayor grado relativo. Además, no suelen realizarse estimaciones (determinación de cotas superiores) del tiempo de convergencia para tales observadores. En este trabajo llevamos a cabo dichas estimaciones.

La importancia de disponer de observadores convergentes por un tiempo fijo para sistemas no lineales de dimensión finita consiste en que la convergencia es uniforme y por tanto el cálculo de las cotas superiores es independiente de las condiciones iniciales del sistema. El principal inconveniente con los observadores convergentes por tiempo fijo es que a pesar de que el error de observación/diferenciación converge en forma exacta, su dependencia de las condiciones iniciales deriva en que al hacer crecer la norma de una condición inicial de manera no acotada su tiempo de convergencia tiende a infinito, impidiendo preestablecer el tiempo para el cual los errores de observación/diferenciación convergen a cero siquiera para un conjunto de condiciones iniciales.

Finalmente, cabe resaltar que en la mayor parte de la literatura revisada, la convergencia en tiempo fijo se obtiene mediante acciones discontinuas. Nuestra propuesta trabaja sobre inyecciones en la salida homogéneas y continuas.

### 1.3. Planteamiento del problema

Diseñar un observador convergente en tiempo fijo para un sistema no lineal de la forma:

$$\dot{x} = \eta(x, u) \quad (1.3.1)$$

$$y = h(x) \quad (1.3.2)$$

donde

1.  $\xi \in \mathbb{R}^d$  es el vector de estados,
2.  $u \in \mathbb{R}^m$  es una ley de control conocida
3.  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida, considerada en adelante como el estado con mayor grado relativo del sistema.
4.  $\eta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  es un campo vectorial continuo conocido.

asumiendo que el sistema (1.3.1- 1.3.2) es localmente observable [24], que existe un cambio local de coordenadas de los estados y un cambio de coordenadas de la salida que transforman al sistema no lineal en la forma canónica:

$$\dot{x} = \hat{A}x + f(y, u) \quad (1.3.3)$$

$$y = Cx \quad (1.3.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados y

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1, 0, \dots, 0)$$

Las transformaciones involucradas en tal método de linealización pueden consultarse en [25], [26], [27], [28] principalmente y más recientemente en [29].

## 1.4. Objetivo General

- Diseñar un observador homogéneo de las variables de error para un sistema no lineal cuyo único estado que puede medirse es el de mayor grado relativo y que puede ponerse en una forma canónica lineal convergente al origen por un tiempo fijo (Tiempo finito preestablecido) basado en inyecciones en la salida que son continuas.

### 1.4.1. Objetivos Específicos

- Establecer el tiempo fijo de convergencia (asentamiento) del observador diseñado y calcular una cota superior uniforme del tiempo de asentamiento

- Mostrar el desempeño del observador mediante el diseño e implementación computacional de un diferenciador en dos casos de estudio: un Motor de corriente directa y un Péndulo invertido sobre un carro que permitan validar a través de simulaciones los resultados teóricos obtenidos

## 1.5. Contribuciones de la Tesis

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- Un observador continuo que lleva al origen todos los estados de una clase de sistemas no lineales de dimensión finita por un tiempo finito preestablecido mediante una entrada escalar, cuando únicamente el estado de grado relativo mayor puede medirse.

- Cálculo de una cota superior uniforme (independiente de las condiciones iniciales del sistema) para el tiempo de convergencia del observador convergente por un tiempo fijo diseñado.

- Se muestra el desempeño del observador mediante el diseño e implementación computacional de un diferenciador en dos casos de estudio: un Motor de corriente directa (un sistema estable) y un Péndulo invertido sobre un carro (sistema inestable). Permitiendo validar a través de simulaciones los resultados teóricos obtenidos

## 1.6. Metodología

Se realizan lecturas de distintos artículos que permite construir un estado del arte en cuanto a diseño de observadores. Se diseña el observador convergente por un tiempo fijo demostrándose su estabilidad mediante la construcción de funciones de Lyapunov adecuadas. Enseguida se enuncia y demuestra el teorema principal relativo a la estimación de tiempos de convergencia. A continuación se implementa el observador diseñado con la herramienta de simulación Simulink® en dos casos de estudio (DC Motor y Péndulo invertido sobre un carro), para finalmente analizar los resultados arrojados a través de las simulaciones respectivas y validar los hallazgos teóricos desarrollados en la tesis de maestría.

## 1.7. Estructura de tesis

El documento es organizado como sigue: Un primer capítulo donde se proporciona una serie de antecedentes, la motivación y justificación de la tesis, el planteamiento del problema a resolver enunciando la clase de sistemas para los cuales se diseña el observador. Enseguida se establecen objetivos, contribuciones de la tesis, metodología empleada y la estructura de la misma.

En el segundo capítulo se realiza un marco teórico introduciendo definiciones de convergencia en tiempo finito, convergencia en tiempo fijo, funciones homogéneas y campos vectoriales homogéneos. Enseguida se proveen definiciones relativas a estabilidad en tiempo finito, estabilidad en tiempo fijo, y un par de teoremas que relacionan estas ideas con homogeneidad.

El tercer capítulo versa del diseño de un observador convergente por un tiempo fijo para sistemas no lineales. Se demuestra el teorema relativo a la estimación del tiempo de convergencia del observador diseñado y se establece la relación entre dicho resultado con otros observadores documentados en la literatura.

El cuarto capítulo presenta dos casos de estudio: Un Motor de Corriente Directa y un péndulo invertido sobre un carro que ponen a prueba el observador diseñado. Con ayuda del teorema demostrado en el capítulo tres, se dan estimaciones de tiempos de convergencia comparándose con los tiempos de casos reportados en la literatura para dar cuenta de la precisión de nuestra estimación.

En el quinto y último capítulo se proporcionan un par de conclusiones y algunas propuestas de trabajo futuro derivadas del diseño del observador estudiado.

“No rational argument will have a rational effect on a man who does not want to adopt a rational attitude”

(Sir Karl Popper)

# Capítulo 2

## Marco Teórico

---

En este capítulo se proporcionan las definiciones, proposiciones y teoremas necesarios para la comprensión de los desarrollos teóricos que se harán en los capítulos posteriores. Principalmente, el diseño del observador convergente por un tiempo fijo y la demostración del teorema atinente a la estimación del tiempo de convergencia del observador diseñado.

En la primera sección se define convergencia en tiempo finito y convergencia en tiempo fijo al origen para sistemas dinámicos autónomos continuos no necesariamente Lipschitzianos. Enseguida se introduce la definición de estabilidad en tiempo finito para sistemas autónomos continuos que tiene solución única en tiempo futuro.

En la segunda sección se aborda homogeneidad de funciones y campos vectoriales, así como algunas de sus propiedades. Luego se proporciona un ejemplo de campo vectorial convergente en tiempo finito que servirá de punto de partida para el diseño del observador.

En la tercera sección se enuncia el teorema que relaciona homogeneidad y estabilidad en tiempo finito desde un punto de vista topológico. Este teorema asegura que un sistema homogéneo es estable en tiempo finito si y solamente si este es asintóticamente estable y tiene grado de homogeneidad negativo. Finalmente, se enuncia y demuestra el teorema que afirma que si un campo vectorial puede escribirse como una suma de varios campos vectoriales, cada uno de ellos homogéneos con respecto a una dilatación fija, entonces el campo vectorial es estable en tiempo finito siempre que el campo que posee menor grado de homogeneidad también lo sea.

A continuación se muestra una tabla resumen de las temáticas a tratar en el capítulo y

las principales referencias empleadas

Referencia	Temática
[Bhat and Bernstein, 2000]	Estabilidad en tiempo finito
[Bhat and Bernstein, 2005]	Homogeneidad y estabilidad en tiempo finito
[Polyakov and Fridman, 2014]	Estabilidad en tiempo finito y en tiempo fijo

## 2.1. Convergencia y Estabilidad en tiempo finito/fijo para sistemas autónomos continuos

### 2.1.1. Preliminares

A continuación se enuncian una serie de definiciones tomadas de [1], [3], [9] que serán útiles para los desarrollos *teóricos* del siguiente capítulo.

En adelante, por una vecindad abierta de un conjunto  $K$  se entiende un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  conteniendo a  $K$ .

Considere el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= g(y(t)) \\ y(t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua sobre una vecindad abierta  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  del origen y  $g(0) = 0$ .

**Definición 2.1.1.** Una función continuamente diferenciable  $y : I \rightarrow D$  se denomina **solución de (2.1.1) sobre el intervalo**  $I \subseteq \mathbb{R}$  si satisface (2.1.1) para todo  $t \in I$ . La continuidad de  $g$  implica que para todo  $x \in D$ , existe  $\tau_0 < 0 < \tau_1$  y una solución  $y(\cdot)$  de (2.1.1) definida sobre  $(\tau_0, \tau_1)$  tal que  $y(0) = x$ .

**Definición 2.1.2.** Una solución  $y$  se dice **maximal definida a derecha** si  $y$  no puede extenderse a derecha sin importar si es de manera única o no a una solución de (2.1.1). Toda solución de (2.1.1) tiene una extensión que es maximal definida a derecha.

**Proposición 2.1.3.** *si  $y : [0, \tau) \rightarrow D$  es una solución maximal definida a derecha de (2.1.1) tal que  $y(t) \in K$  para todo  $t \in [0, \tau)$ , donde  $\bar{K} \subseteq D$  es compacto, entonces  $\tau = \infty$  (para la demostración ver [30]).*

**Definición 2.1.4.** Se dice que (2.1.1) posee **soluciones únicas** en tiempo futuro para toda condición inicial, excepto posiblemente en el origen si para todo  $x \in D - \{0\}$  existe  $\tau_x$  tal que si  $y_1 : [0, \tau_1) \rightarrow D$  y  $y_2 : [0, \tau_2) \rightarrow D$  son dos soluciones maximales definidas de (2.1.1) con  $y_1(0) = y_2(0) = x$ , entonces  $\tau_x \leq \min\{\tau_1, \tau_2\}$  y  $y_1(t) = y_2(t)$  para todo  $t \in [0, \tau_x)$ . Sin pérdida de generalidad se asume que  $x$  y  $\tau_x$  son escogidos los números más grandes en  $\overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ . En tal caso se denota  $\phi(\cdot, x)$  o  $\phi^x(\cdot)$  la única solución de (2.1.1) en  $t \in [0, \tau_x)$  que satisface  $\phi(0, x) = 0$ .

**Observación:** Note que  $\phi^x(\cdot)$  no puede extenderse a la derecha de manera única a una solución de (2.1.1) puesto que si  $\tau_x < \infty$ , entonces  $t \rightarrow \tau_x$ , o bien  $\phi(t, x) \rightarrow bd(D)$  (la frontera de  $D$ ) se aproxima a la frontera de  $D$ , en tal caso  $\phi^x$  no puede extenderse a derecha a un a solución de (2.1.1),  $\phi(t, x) \rightarrow 0$  con (2.1.1) teniendo soluciones no únicas iniciando en 0, de tal forma que  $\phi^x$  puede extenderse a la derecha en mas de una forma. Si (2.1.1) tiene soluciones que no son únicas en tiempo futuro para la condición inicial 0, entonces  $\phi$  se encuentra definida sobre un subconjunto abierto relativo a  $\mathbb{R}^{\geq 0} \times (D - \{0\})$  sobre  $(D - \{0\})$ . Si (2.1.1) posee una única solución en tiempo futuro para la condición inicial 0, entonces  $\phi$  se encuentra definida sobre un subconjunto abierto relativo a  $\mathbb{R}^{\geq 0} \times D$  sobre  $D$  y para cada  $x \in D$   $\phi^x : [0, \tau_x) \rightarrow D$  es la única solución maximal de (2.1.1) definida a derecha para la condición inicial  $x$ . Unicidad en tiempo futuro y la continuidad de  $g$  implican que  $\phi$  es continua sobre su dominio de definición y se establece un semiflujo local sobre  $D - \{0\}$  o  $D$  según sea el caso [31]. En [32] puede encontrarse condiciones suficientes para unicidad hacia el futuro en ausencia de la condición de continuidad Lipschitz.

**Definición 2.1.5.** Un conjunto  $A$  se denomina **positivamente invariante bajo  $g$**  si  $\phi(t, A) \subseteq A$  para todo  $t > 0$ . Un conjunto positivamente invariante bajo  $g$  se denomina **invariante** si  $\phi(t, A) = A$  para todo  $t > 0$  y estrictamente invariante si  $\phi(t, A) \subset int(A)$  para todo  $t > 0$ .

**Definición 2.1.6.** Un conjunto no vacío  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  es **atractivo (convergente) bajo  $g$**  si existe una vecindad  $N$  de  $K$  tal que  $\phi^x(t) \rightarrow K$  para todo  $x \in N$ . En este caso el conjunto  $doa(K)$  de todos los puntos  $x$  tales que  $\phi^x(t) \rightarrow K$  es el dominio de atracción de  $K$ . Si  $K$  es atractivo con dominio de atracción  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $K$  es **globalmente atractivo**. El dominio de atracción de un conjunto atractivo no vacío  $K$ , es un conjunto abierto, invariante conteniendo a  $K$ .

**Definición 2.1.7.** Un conjunto no vacío y compacto  $K$  es **Lyapunov estable bajo  $g$**  si para toda vecindad  $U_\epsilon$  de  $K$ , existe una vecindad  $U_\delta$  de  $K$  tal que  $\phi_t(U_\delta) \subseteq U_\epsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Además,  $K$  es **(globalmente) asintóticamente estable bajo  $g$**  si  $K$  es Lyapunov estable y (globalmente) atractivo.

En particular, el origen se dice **Lyapunov estable, (globalmente) atractivo o (globalmente) asintóticamente estable bajo  $g$**  si el conjunto  $\{0\}$  es respectivamente, **Lyapunov estable, (globalmente) atractivo o (globalmente) asintóticamente estable bajo  $g$** .

Note que si un conjunto no vacío y compacto  $K$  es Lyapunov estable bajo  $g$ , entonces  $K$  es necesariamente positivamente invariante. En particular si el origen es Lyapunov estable bajo  $g$ , entonces  $\phi^0(t) = 0$ , y consecuentemente  $g(0) = 0$ .

**Definición 2.1.8.** Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **propia** si la imagen recíproca  $V^{-1}(M)$  de  $M$  es compacta para todo conjunto compacto  $M \subseteq V(\mathbb{R}^n)$ .  $V$  es radialmente no acotada si  $V$  es propia y  $V(\mathbb{R}^n)$  es no acotada.  $V$  es definida (negativa) positiva si  $V(0) = 0$  y  $V$  solo toma valores (negativos) positivos sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Finalmente,  $V$  es signo definida, si  $V$  es definida positiva o bien definida negativa.

**Definición 2.1.9.** La derivada Lie de una función continua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con respecto a  $g$  está dada por

$$L_g V(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [V(\phi_t(x)) - V(x)], \quad (2.1.2)$$

siempre que el límite exista.

## 2.1.2. Convergencia y estabilidad en tiempo finito

**Definición 2.1.10.** El origen de (2.1.1) se denomina equilibrio estable en tiempo finito si existe una vecindad abierta  $N \subseteq D$  del origen y una función  $T : N - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , denominada función de tiempo de asentamiento (convergencia), tal que las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Convergencia en tiempo finito: Para todo  $x_0 \in N - \{0\}$ ,  $\phi^{x_0}(t)$  es definida (y única) sobre  $[0, T(x_0))$ ,  $\phi^{x_0}(t) \in N - \{0\}$  for all  $t \in [0, T(x_0))$ ,  $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} \phi^{x_0}(t) = 0$  y  $\phi^{x_0}(t) = 0$ , para todo  $t \geq T(x_0)$ .
2. Estabilidad de Lyapunov: Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que, para toda  $x_0 \in (B_{\delta(\epsilon)}^n - \{0\}) \cap N$ ,  $\phi^{x_0}(t) \in B_\epsilon^n$  para todo  $t \in [0, T(x_0))$ .

Es decir; el origen de (2.1.1) es estable en tiempo finito si es convergente en tiempo finito y Lyapunov estable.

El origen se denomina equilibrio globalmente estable en tiempo finito si es un equilibrio estable en tiempo finito con  $D = N = \mathbb{R}^n$

**Ejemplo 1.** *Considere el campo escalar*

$$\dot{x} = -k \operatorname{sgn}(x(t)) |x(t)|^\alpha \quad (2.1.3)$$

donde  $\operatorname{sgn}(0) = 0$ . Para  $\alpha > 0$  la ecuación (2.1.3) puede integrarse obteniéndose el semiflujo:

$$\mu(t, x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x) \left( \frac{1}{|x|^{\alpha-1}} + k(\alpha-1)t \right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}, & \alpha > 1, \\ e^{-kt} x, & \alpha = 1, \\ \operatorname{sign}(x) \left( |x|^{1-\alpha} - k(1-\alpha)t \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & 0 \leq t < \frac{|x|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}, \quad \alpha < 1, \\ 0, & t \geq \frac{|x|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}, \quad \alpha < 1, \end{cases}$$

el origen de (2.1.3) es asintóticamente estable si y sólo si  $k > 0$  y estable en tiempo finito si y sólo si  $k > 0$  y  $\alpha < 1$ . En este caso, el campo vectorial es continuo en todas partes, localmente Lipschitz en todas partes excepto en el origen, de tal forma que toda condición inicial en  $\mathbb{R} - \{0\}$  tiene una única solución en tiempo futuro sobre un intervalo de tiempo suficientemente pequeño. El sistema cumple la definición con  $D = N = \mathbb{R}$  y la función de tiempo de asentamiento (convergencia)  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  dada por

$$T(x) = \frac{1}{k(1-\alpha)} |x|^{1-\alpha}$$

*Este sistema es globalmente estable en tiempo finito siempre que  $k > 0$  y  $\alpha < 1$ .*

### 2.1.3. Convergencia y estabilidad en tiempo fijo

**Definición 2.1.11.** El origen de (2.1.1) se denomina equilibrio estable en tiempo fijo de si existe una vecindad abierta  $N \subseteq D$  del origen y una función  $T : N - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , denominada función de tiempo de asentamiento (convergencia), tal que las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Convergencia en tiempo fijo: El sistema es convergente en tiempo finito con la función de tiempo de convergencia  $T$  que es independiente de la condición inicial  $x_0 \in N - \{0\}$ . Es decir; la función  $T$  es acotada en  $N$ , de tal modo que existe un número  $T_{max} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$  con  $T(x_0) \leq T_{max}$  para  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .
2. Estabilidad de Lyapunov: Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que, para toda  $x_0 \in (B_{\delta(\epsilon)}^n - \{0\}) \cap N$ ,  $\phi^{x_0}(t) \in B_\epsilon^n$  para todo  $t \in [0, T(x_0))$ .

Es decir; el origen de (2.1.1) es estable en tiempo fijo si es convergente en tiempo fijo y Lyapunov estable.

El origen se denomina equilibrio globalmente estable en tiempo fijo si es un equilibrio estable en tiempo fijo con  $D = N = \mathbb{R}^n$ .

El siguiente ejemplo muestra que la diferencia entre estabilidad en tiempo fijo y estabilidad en tiempo finito desde el punto de vista local es cuestionable

**Ejemplo 2.** *Considere*

$$\dot{x} = -|x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x)[1 - |x|] \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -|x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) & \text{para } x < 1 \\ &0 & \text{para } x \geq 1 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

en la bola abierta centrada en 0 de radio 1,  $N = B(0, 1)$ .

Note que las funciones de asentamiento de los dos sistemas

$$T_1(x_0) = \ln\left(\frac{1 + |x_0|^{1/2}}{1 - |x_0|^{1/2}}\right)$$

$$T_2(x_0) = 2|x_0|^{1/2}$$

son continuas sobre  $N$ , luego para cualquier  $y \in N$  seleccionamos la bola  $\{y\} + B(0, \epsilon) \subseteq N$  (bola abierta centrada en  $y$  de radio  $\epsilon$ ) donde  $\epsilon = (1 - |y|)/2$  tal que  $\sup_{x_0 \in \{y\} + B(0, \epsilon)} T_1(x_0) < \infty$  y  $\sup_{x_0 \in \{y\} + B(0, \epsilon)} T_2(x_0) < \infty$

Ahora bien,  $T_1(x_0) \rightarrow \infty$  si  $x_0 \rightarrow 1$ , mientras que  $T_2(x_0) \rightarrow 2$  si  $x_0 \rightarrow 1$ . Lo cual dice que los dos sistemas son convergentes en tiempo fijo sobre  $N$ . Sin embargo, el primer sistema pierde la propiedad si se amplía al conjunto  $N \cup \{1\}$ .

## 2.2. Homogeneidad

La Homogeneidad es una propiedad de ciertos objetos (en este caso funciones y campos vectoriales) de escalar de manera consistente respecto a una operación de escalamiento sobre un espacio subyacente (de configuraciones). La homogeneidad es definida en relación a

una operación de escalamiento (dilatación), la cual es esencialmente la acción de un grupo multiplicativo de números reales positivos sobre el espacio de estados. La operación familiar de multiplicación por escalar en  $\mathbb{R}^n$  lleva a la dilatación estándar  $\Delta_\lambda(x) = \lambda x$ , donde  $\lambda > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Homogeneidad con respecto a la dilatación estándar es uno de los dos axiomas de linealidad el otro es aditividad.

En los últimos años hay un interés creciente en sistemas que son homogéneos con respecto a dilataciones de la forma

$$\Delta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Delta_\lambda(x) = (\lambda^{r_1}x_1, \lambda^{r_2}x_2, \dots, \lambda^{r_n}x_n) \quad (2.2.1)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

donde los  $r_i$  son números reales positivos. La dilatación estándar es un caso especial en el que  $r_i = 1$  para todo  $i$ .

Muchos de los resultados recientes acerca de sistemas homogéneos son generalizaciones de propiedades reconocidas en sistemas lineales. Por ejemplo, en un sistema homogéneo con respecto a la dilatación (2.2.1), estabilidad asintótica en una vecindad del origen implica estabilidad asintótica global, además de la existencia de una función de Lyapunov que también resulta homogénea con respecto a la dilatación. Esta propiedad de sistemas homogéneos es una extensión del hecho conocido que un sistema lineal asintóticamente estable posee una función de Lyapunov cuadrática, que resultan homogéneos con respecto a la dilatación estándar. La estabilidad de un sistema homogéneo se determina por su restricción a ciertos conjuntos invariantes, mientras que la estabilidad de sistemas lineales se determina por su restricción a los espacios generados por sus valores propios.

Una aplicación importante de homogeneidad está en deducir la estabilidad de un sistema no lineal a partir de la estabilidad de su aproximación homogénea. Un resultado general que se presentará, establece que si un campo vectorial puede escribirse como la suma de varios campos vectoriales, cada uno de los cuales es homogéneo con respecto a una dilatación fija de la forma (2.2.1), entonces la estabilidad asintótica del campo vectorial de menor grado de homogeneidad implica la estabilidad asintótica local del campo vectorial original.

Homogeneidad tiene una caracterización simple en términos del campo vectorial  $v$ . Un campo vectorial  $f$  sobre  $\mathbb{R}^n$  se denomina homogéneo con respecto a  $\Delta$  si y solamente si la derivada de Lie  $L_v f$  de  $f$  con respecto a  $v$  satisface  $L_v f = mf$ . Basado en estas ideas se desarrolla una noción geométrica de homogeneidad en términos del campo vectorial  $v$ , llamado el campo vectorial de Euler de la dilatación  $\Delta$ . Para un campo vectorial de Euler  $v$  el origen es globalmente asintóticamente estable bajo  $-v$ , implica que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(-s, x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

### 2.2.1. Función Homogénea

**Definición 2.2.1.** Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice homogénea de grado  $d$  con respecto a los pesos  $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  si

$$V(\Delta_\lambda x) = V(\lambda^{r_1} x_1, \lambda^{r_2} x_2, \dots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^d V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^d V(x) \quad (2.2.2)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

donde los  $\lambda > 0$ . La dilatación estándar es un caso especial en el que  $r_i = 1$  para todo  $i$ .

Geométricamente una función que es homogénea con respecto a una operación de escalamiento tiene la propiedad de que todo conjunto de nivel escalado de la función es también un conjunto de nivel.

**Ejemplo 3.** Considere la función dada por 2.1.3

$$V(y) = -k \operatorname{sgn}(y(t)) |y(t)|^\alpha$$

donde  $\operatorname{sgn}(0) = 0$ .

Para  $\alpha > 0$  la función  $V(y)$  es homogénea de grado  $\alpha$  con respecto a la dilatación estándar  $\Delta_\lambda(x) = \lambda x$ .

La siguiente proposición establece algunas propiedades de regularidad de funciones homogéneas.

**Proposición 2.2.2.** Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  y homogénea de grado  $l$  con respecto a un campo vectorial de Euler  $v$

- i Si  $l < 0$ , entonces  $V$  es continua sobre  $\mathbb{R}^n$ , sí y solo sí  $V = 0$
- ii Si  $l = 0$ , entonces  $v$  es continua sobre  $\mathbb{R}^n$  sí y solo sí  $V = V(0)$
- iii Si  $l > 0$ , entonces  $v$  es continua sobre  $\mathbb{R}^n$

**Demostración** La continuidad sobre  $\mathbb{R}^n$  y homogeneidad implican

$$V(0) = V(\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(-s, x)) = \lim_{s \rightarrow \infty} V(\psi(-s, x)) = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-ls} V(x) \quad (2.2.3)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

- i  $V = 0$  implica continuidad sobre  $\mathbb{R}^n$ . Por otro lado, sea  $l < 0$ , supongamos  $V$  continua sobre  $\mathbb{R}^n$ . Si  $V(z) \neq 0$  para algún  $z \in \mathbb{R}^n$  entonces el límite en (2.1.9) no existe para  $x = z$  contradiciendo continuidad. Por lo tanto concluimos  $V = 0$
- ii  $V = 0$  implica continuidad sobre  $\mathbb{R}^n$ . Por otro lado, si  $l = 0$ ,  $V$  continua sobre  $\mathbb{R}^n$  entonces el límite en (2.1.9) lleva a  $V(0) = V(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$
- iii sea  $l > 0$  y considere  $\epsilon > 0$  sea  $N$  una vecindad acotada de cero y denote  $L = \max_{x \in bd(N)} |V(x)|$ . Elija  $T > 0$  tal que  $Le^{-ls} < \epsilon$  para todo  $s > T$ . El conjunto  $M = \phi([-T, 0]) \times bd(N)$  es compacto y no contiene al cero. Luego existe una vecindad abierta  $U_\delta \subseteq N$  de cero, tal que  $U_\delta \cup M = \emptyset$ . Considere  $x \in U_\delta - \{0\}$ . Existe  $z \in bd(N)$  y  $s \geq 0$  tal que  $x = \phi_{-s}(z)$ . Por construcción  $s > T$ . Además,  $|V(x) - V(0)| = |V(x)| = e^{-ls}|V(z)| < Le^{-ls} < \epsilon$ . Luego  $|V(x) - V(0)| < \epsilon$  para todo  $x \in U_\delta$  y en consecuencia  $V$  es continua en cero.

El siguiente lema asegura que funciones signo-definidas y homogéneas son radialmente no acotadas.

**Lema 2.2.3.** Suponga que  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  y homogénea de grado  $l$  con respecto a un campo vectorial de Euler  $v$ .

- i Si  $V$  es signo definida, entonces  $V$  es radialmente no acotada,
- ii si  $n > 1$  y  $V$  es propia, entonces  $V$  es signo definida.

### **Demostración**

(i) Suponga que  $V$  es signo definida. Entonces  $V(0) = 0$ , mientras que (i) y (ii) del teorema anterior implican que el grado de homogeneidad de  $l$  de  $V$  es positivo. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $V$  es definida positiva. Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  una vecindad abierta de cero, acotada y sea  $\beta = \min_{z \in bd(K)} V(z) > 0$ . Ahora, suponga que  $x \notin \bar{K}$ , y sea  $s > 0$  tal que  $z = \psi_{-s}(x) \in bd(K)$ . Entonces la homogeneidad implica que  $v(x) = e^{ls}V(z) > V(z) \geq \beta$  luego por continuidad  $V^{-1}([0, \beta])$  es cerrado y está contenido en el compacto  $\bar{K}$  y por tanto es compacto. Ahora, dado  $\gamma \in V(\mathbb{R}^n)$ , homogeneidad implica que  $V^{-1}([0, \gamma]) = V^{-1}([0, e^{ls}\beta]) = \psi_s(V^{-1}([0, \beta]))$  para  $s = \frac{1}{l}(\ln \gamma - \ln \beta)$ , luego por la continuidad de  $\psi_s$ ,  $V^{-1}([0, \gamma])$  es compacto. Dado que todo conjunto compacto  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  está contenido en un intervalo de la forma  $[0, \gamma]$ , se concluye que  $V$  es propia. El hecho de que también es radialmente no acotada sigue de  $V(\psi_s(x)) = e^{ls}V(x)$  tomando  $s \rightarrow \infty$ .

(ii) Sea  $n > 1$  y suponga  $V$  propia, luego  $S = V^{-1}(\{0\})$  es compacto. Si  $l \leq 0$ , entonces se tiene de (i) y (ii) del teorema anterior que  $V^{-1}(\{V(0)=\}) = \mathbb{R}^n$ , contradiciendo que  $V$  sea propia. Por lo tanto  $l > 0$  y como  $V(\psi_s(x)) = e^{ls}V(x)$ ,  $V(0) = 0$  de donde  $S$  es no vacío. Aplicando  $V^{-1}(e^{ls}\{0\}) = \psi_s(V^{-1}(\{0\}))$  se tiene que  $\psi_s(S) = S$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Esto es  $S$  es invariante bajo  $v$ . Dado que el único conjunto no vacío, compacto, invariante bajo  $v$  es  $\{0\}$ , se sigue que  $S = \{0\}$ . También,  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  es conexo. Dado que  $V$  es continua y  $S = \{0\}$ , se sigue que  $V(\mathbb{R}^n - \{0\}) = V(\mathbb{R}^n - S)$  es un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  que no contiene a cero, y por tanto  $V$  es signo definida.

**Observación:** note que  $V(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es una función propia y homogénea de grado 1 con respecto a la dilatación estándar sobre  $\mathbb{R}$ , pero no es signo definida. Por tal razón es que en la segunda parte del lema se toma  $n > 1$

El último lema de esta sección proporciona un principio de comparación entre funciones homogéneas.

**Lema 2.2.4.** Suponga  $V_1$  y  $V_2$  funciones a valores reales y continuas definidas en  $\mathbb{R}^n$ , homogéneas respecto a un campo vectorial de Euler  $v$  de grados  $l_1 > 0$  y  $l_2 > 0$ , respectivamente, y  $V_1$  definida positiva. Entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

$$[\min_{\{z:V_1(z)=1\}}V_2(z)][V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}} \leq V_2(x) \leq [\max_{\{z:V_1(z)=1\}}V_2(z)][V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}} \quad (2.2.4)$$

**Demostración** Dado que  $l_1 > 0$  y  $l_2 > 0$ ,  $V_1(0) = V_2(0) = 0$  y (2.2.4) se tiene para  $x = 0$ . Suponga  $x \neq 0$  y sea  $s = -\frac{1}{l_1}\ln[V_1(x)]$ , entonces, por homogeneidad,  $V_1(\phi(s)(x)) = 1$  así que

$$\min_{\{z:V_1(z)=1\}}V_2(z) \leq V_2(\phi_s(x)) \leq \max_{\{z:V_1(z)=1\}}V_2(z) \quad (2.2.5)$$

Note que por el lema anterior  $V_1$ , es propia, así que  $V_1^{-1}(\{1\})$  es compacto y el mínimo y el máximo en (2.2.5) están bien definidos. La ecuación (2.2.4) sigue de (2.2.5) viendo que  $V_2$  es homogénea de grado  $l_2$ ,  $V_2(\phi_s(x)) = e^{l_2s}V_2(s) = V_1(x)^{-\frac{l_2}{l_1}}[V_2(x)]$

Vale anotar que si se denota  $V_1$  como el cuadrado de la norma euclídeana sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $V_2$  forma cuadrática sobre  $\mathbb{R}^n$  (2.2.4) lleva a la bien conocida desigualdad de Rayleigh-Ritz para formas cuadráticas.

## 2.2.2. Campo Vectorial Homogéneo

**Definición 2.2.5.** Un campo vectorial  $g$  se denomina homogéneo de grado  $d$  con respecto a los pesos  $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  si, para todo  $1 \leq i \leq n$  la  $i$ -ésima componente  $g_i$  es función homogénea de grado  $r_i + d$ , esto es

$$g_i(\lambda^{r_1}x_1, \lambda^{r_2}x_2, \dots, \lambda^{r_n}x_n) = \lambda^{r_i+d}V(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.2.6)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  para todo  $\lambda > 0$ .

De este modo el sistema es homogéneo de grado  $d$  si el campo vectorial es homogéneo de grado  $d$

Geoméricamente un campo vectorial homogéneo tiene la propiedad de que toda órbita escalada del campo vectorial también es una órbita.

El primer paso para tener una noción geométrica de homogeneidad es reescribir el grupo de dilataciones  $\{\Delta_\lambda(\cdot)\}_{\lambda>0}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  como el operador diferencial de primer orden

$$v(x) = \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.2.7)$$

con esto una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice homogénea de grado  $d$  con respecto a la dilatación  $\Delta$  si y solamente si

$$vV = dV$$

o en forma extensa

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = dV(x) \quad (2.2.8)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^\times$

Análogamente un campo vectorial  $g$  sobre  $\mathbb{R}^n$  ahora considerado geoméricamente como un operador diferencial parcial  $g = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  homogéneo de grado  $d$  con respecto a la dilatación  $\Delta$  sí y solamente sí el producto de Lie de  $v$  con  $g$  satisfaciendo

$$[v, g] = dg$$

**Ejemplo 4.** Considere el campo vectorial

$$f = f_1(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

sobre  $\mathbb{R}^2$  con  $f_1(x_1, x_2) = x_2$ ,  $f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{m} \operatorname{sgn}(x_2) |x_2|^\alpha - \frac{1}{m} \operatorname{sgn}(x_1) |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$ , con  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $m > 0$ .

Note que  $f_1(\lambda^{2-\alpha} x_1, \lambda x_2) = \lambda x_2 = \lambda^{(2-\alpha)+\alpha-1} f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(\lambda^{2-\alpha} x_1, \lambda x_2) = \lambda^\alpha f_2(x_1, x_2) = \lambda^{1-(\alpha-1)} f_2(x_1, x_2)$ . Luego el campo vectorial es de grado negativo  $\alpha - 1$  con respecto a la dilatación  $\Delta_\lambda(x) = (\lambda^{2-\alpha} x_1, \lambda x_2)$

**Ejemplo 5.** Considere el campo escalar dado en (2.1.3). Para  $\alpha > 0$  tenemos un campo escalar homogéneo de grado  $\alpha - 1$  con respecto a la dilatación estándar  $\Delta_\lambda(x) = \lambda x$ .

En adelante, se asume que el campo vectorial  $v$  es un campo vectorial de Euler, el cual satisface que el origen es un equilibrio globalmente asintóticamente estable bajo  $-v$ . Luego,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(-s, x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además, dada una vecindad abierta y acotada  $U$  de cero, la continuidad de  $\psi$  implica que para todo  $x \notin U$  existe  $s > 0$  tal que  $\psi_{-s}(x) \in \operatorname{bd}(U)$ , mientras que para todo  $x \in U - \{0\}$ , existe  $s > 0$  tal que  $\psi_s(x) \in \operatorname{bd}(U)$ . Más aún,  $\{0\}$  es el único conjunto no vacío, compacto e invariante bajo  $v$ . Dado que  $v$  define un flujo global sobre  $\mathbb{R}^n$ ,  $\psi(s, x) = 0$  implica  $x = 0$

## 2.3. Estabilidad en tiempo finito/fijo y Homogeneidad

En [3] se establece la relación entre una generalización de homogeneidad y estabilidad en tiempo finito. El principal resultado que relaciona homogeneidad y estabilidad en tiempo finito es de carácter topológico, y asegura que un sistema homogéneo es estable en tiempo finito si y solamente si este es asintóticamente estable y tiene grado de homogeneidad negativo. Tal resultado es aplicado en la estabilización de una cadena de integradores.

Se inicia con un teorema cuya demostración puede consultarse en [34].

**Teorema 2.3.1.** Suponga que existe una función continua y definida positiva  $V : N \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre una vecindad  $N$  del origen, tal que  $L_g V$  está definida sobre toda  $N$  y satisface  $L_g V() \leq -c[V()]^\alpha \leq 0$  sobre  $N$  para alguna  $c > 0$  y  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces el origen es un equilibrio estable en tiempo finito bajo  $g$ , y la función de tiempo de convergencia es continua sobre el dominio de atracción del origen. Además, si  $N = \mathbb{R}^n$  y  $V$  es propia, entonces el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito bajo  $g$ .

El siguiente teorema asegura que un sistema homogéneo asintóticamente estable posee una función de Lyapunov homogénea

**Teorema 2.3.2.** [Teorema 6.2 [3]] Sea  $g$  definido sobre  $\mathbb{R}^n$  un campo vectorial homogéneo de grado  $d < 0$  con respecto a los pesos  $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  en un campo vectorial de Euler  $v$ . Además suponga que el origen de es asintóticamente estable, entonces para todo  $l > \max\{-m, 0\}$  existe una función continua definida positiva  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que es homogénea de grado  $l$  con respecto a  $v$ ,  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , y tal que su derivada es continua y definida negativa.

**Demostración** Fije  $l > \max\{-m, 0\}$  por el teorema 5.12 dado en [33] implica que existe una función continua definida positiva  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es homogénea de grado  $l$  con respecto al campo vectorial de Euler  $v$ ,  $C^1$  sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  y tal que  $L_f V$  es continua y definida negativa. Se sigue que  $L_f V$  es continua sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  y homogénea de grado  $l + m > 0$  con respecto a  $v$ . Por (iii) de se tiene que  $L_f V$  es continua.

El siguiente teorema cuya demostración se presenta en [2] exhibe la principal aplicación de homogeneidad a estabilidad en tiempo finito y estabilización en tiempo finito.

**Teorema 2.3.3.** Sea  $g$  definido sobre  $\mathbb{R}^n$  un campo vectorial homogéneo de grado  $d < 0$  con respecto a los pesos  $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Si el origen de 2.1.1 es asintóticamente estable, este es globalmente estable en tiempo finito.

Termina esta sección con un importante resultado que será de utilidad en el diseño de nuestro observador. Deriva del hecho demostrado en [2] que afirma que si un campo vectorial puede escribirse como una suma de varios campos vectoriales, cada uno de ellos homogéneos con respecto a una dilatación fija, entonces el campo vectorial es asintóticamente estable siempre que el campo que posee menor grado de homogeneidad también lo sea. A continuación se presenta un resultado análogo en términos de estabilidad en tiempo finito.

**Teorema 2.3.4.** Sea  $v$  un campo vectorial de Euler  $C^1$  y suponga  $g$  un campo vectorial que pueda escribirse como la suma de  $k$  campos vectoriales  $g_i$  continuos y homogéneos con grados  $m_i$  con respecto a  $v$ , y  $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ , Si el origen es estable en tiempo finito para  $g_1$ , entonces el origen es estable en tiempo finito para  $g$ .

**Demostración** Suponga que  $v$  un campo vectorial de Euler  $C^1$  y el origen un equilibrio estable en tiempo finito bajo  $g_1$ . Sea  $l > \max\{-m_1, \bar{\sigma}\}$  por el teorema 2.3.2. existe una función definida positiva  $C^1$   $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que es homogénea de grado  $l$  y tal que  $L_{g_1} V$  es definida negativa. Para cada  $i = 1, \dots, k$   $L_{g_i} V$  es continua y homogénea de grado  $l + m_i > 0$  con respecto a  $v$ . Por el lema (2.2.4) existe  $c_1 > 0$ ,  $c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  tales que

$$L_{g_i} V(x) \leq -c_i [V(x)]^{\frac{l+m_i}{l}}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$

Por tanto para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$L_g V(x) \leq -c_1 [V(x)]^{\frac{l+m_1}{l}} \cdots - c_k [V(x)]^{\frac{l+m_k}{l}} = [V(x)]^{\frac{l+m_1}{l}} [-c_1 + U(x)] \quad (2.3.1)$$

donde  $U(x) = -c_2 [V(x)]^{\frac{m_2-m_1}{l}} \cdots - c_k [V(x)]^{\frac{m_k-m_1}{l}}$ . Dado que  $m_i - m_1 > 0$  para todo  $i > 1$ , se tiene que la función  $U$  la cual toma el valor de cero en el origen, es continua. Por lo tanto, existe una vecindad abierta  $N$  del origen tal que  $U(x) < c_1/2$  para todo  $x \in N$ . la última lleva a

$$L_g V(x) \leq -\frac{c_1}{2} [V(x)]^{\frac{l+m_1}{l}}, \quad x \in N \quad (2.3.2)$$

Por el teorema anterior  $m_1 < 0$ , luego la hipótesis del teorema 2.3.1 se cumple con  $c = c_1/2$  y  $\alpha = \frac{l+m_1}{\epsilon}(0,1)$ . Luego por el teorema 2.3.1 el origen es un punto de equilibrio estable en tiempo finito bajo  $g$ .

*Long run is a misleading guide to current affairs. In the long run we are all  
dead*

*(John Maynard Keynes)*

# Capítulo 3

## Diseño de un observador convergente por tiempo fijo

*En este capítulo se realiza el diseño de un observador continuo convergente por tiempo fijo para una clase de sistemas no lineales (el lector puede encontrar observadores discontinuos convergentes en tiempo finito para el sistema no lineal (1.3.1-1.3.2) en [35] y [36]). Se demuestra el teorema principal relativo a la estimación del tiempo de convergencia del observador diseñado y se establece la relación entre dicho resultado con otros observadores documentados en la literatura.*

*Considere el sistema (1.3.1-1.3.2) y suponga que solo la salida escalar  $y(t)$  puede medirse. Asuma que nuestro sistema puede ponerse en la forma canónica (1.3.3-1.3.4), la cual reescribimos:*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + f_1(y, u) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + f_2(y, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(y, u) \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

*Un observador continuo convergente en tiempo fijo para este sistema se diseña como sigue:*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) + f_1(y, u) + v_1(x_1 - z_1) + w_1(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + f_2(y, u) + v_2(x_1 - z_1) + w_2(x_1 - z_1) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= f_n(y, u) + v_n(x_1 - z_1) + w_n(x_1 - z_1) \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{3.0.2}$$

donde las funciones  $v_i$ , y  $w_i$  serán definidas de tal manera que el error de observación  $e = x - z$  tienda a cero en tiempo fijo.

De este modo el sistema de estimación de error o la dinámica del error esta dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= e_2(t) + v_1(e_1) + w_1(e_1) \\
 \dot{e}_2(t) &= e_3(t) + v_2(e_1) + w_2(e_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_n(t) &= + v_n(e_1) + w_n(e_1)
 \end{aligned} \tag{3.0.3}$$

La estrategia para el diseño del observador consiste en construir dos subsistemas del sistema anterior, un primer subsistema involucrando a las funciones  $v_i$  y que asegura la convergencia al origen en tiempo finito de cualquier trayectoria que inicia sobre la frontera de un conjunto compacto. Un segundo subsistema involucrando a las funciones  $w_i$  que garantiza la convergencia uniforme de todas las trayectorias iniciando en infinito a la frontera de dicho conjunto compacto.

### 3.1. El observador propuesto

De este modo un observador convergente en tiempo fijo que reconstruye los valores de las derivadas de las salidas  $y^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  y estima los valores de todas las variables de estado  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  para el sistema (1.3.1-1.3.2) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_1|z_1(t) - y(t)|^{\beta_1} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_2} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_2|z_1(t) - y(t)|^{\beta_2} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad \vdots \\
 \dot{z}_n(t) &= -k_n|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_n} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_n|z_1(t) - y(t)|^{\beta_n} \text{sgn}(z_1(t) - y(t))
 \end{aligned}$$

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n > 0$$

El respectivo sistema de estimación de error del observador es

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= e_2(t) - k_1|e_1(t)|^{\alpha_1} \text{sgn}(e_1(t)) - \kappa_1|e_1(t)|^{\beta_1} \text{sgn}(e_1(t)) \\
\dot{e}_2(t) &= e_3(t) - k_2|e_1(t)|^{\alpha_2} \text{sgn}(e_1(t)) - \kappa_2|e_1(t)|^{\beta_2} \text{sgn}(e_1(t)) \\
&\vdots \\
\dot{e}_n(t) &= -k_n|e_1(t)|^{\alpha_n} \text{sgn}(e_1(t)) - \kappa_n|e_1(t)|^{\beta_n} \text{sgn}(e_1(t))
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

donde  $e_i(t) = e^{(i-1)}(t) = y^{(i-1)}(t) - z_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$

$\beta$  es seleccionada en el intervalo  $(1, 1 + \epsilon_1)$ , para un  $\epsilon_1 > 0$  suficientemente pequeño, satisfaciendo las relaciones recurrentes  $\beta_i = i\beta - (i-1)$ ,  $i = 2, \dots, n$ ,  $\beta_1 = \beta$ . Las ganancias del observador  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$  son seleccionadas de tal forma que la matriz  $A_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -\kappa_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\kappa_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

es Hurwitz.

$\alpha$  es seleccionada en el intervalo  $(1 - \epsilon, 1)$ , para un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, satisfaciendo las relaciones recurrentes  $\alpha_i = i\alpha - (i-1)$ ,  $i = 2, \dots, n$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ . Las ganancias del observador  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son seleccionadas de tal forma que la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

es Hurwitz

## 3.2. Estabilidad en tiempo finito del sistema $O(\alpha, e)$

**Lema 3.2.1** (Lema 7 [22]). Sean  $m \in \mathbb{R}$ ,  $k_i > 0$ , se definen  $r_i > 0, \alpha_i > 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha > 1 - \frac{1}{n-1}$  tales que

$$r_{i+1} = r_i + m \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3.2.1)$$

$$\alpha_i = \frac{r_{i+1}}{r_1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3.2.2)$$

$$\alpha_n = \frac{r_n + m}{r_1} \quad (3.2.3)$$

y fijando  $v_i(e_1) = -k_i|e_1|^{\alpha_i} \text{sgn}(e_1)$ ,  $w_i = 0$  con  $1 \leq i \leq n$  en entonces, el sistema obtenido es homogéneo de grado  $m = \alpha - 1$  con respecto a las dilataciones  $r_i = (i-1)\alpha - (i-2)$  y  $\alpha_i = i\alpha - (i-1)$ ,  $1 < i \leq n$ .

**Demostración** Considere una dilatación con pesos  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . El sistema de estimación del error que en adelante se denota  $O(\alpha, e)$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2(t) - k_1|e(t)|^{\alpha_1} \text{sgn}(e(t)) \\ \dot{e}_2(t) &= e_3(t) - k_2|e(t)|^{\alpha_2} \text{sgn}(e(t)) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1}(t) &= e_n(t) - k_{n-1}|e(t)|^{\alpha_{n-1}} \text{sgn}(e(t)) \\ \dot{e}_n(t) &= -k_n|e(t)|^{\alpha_n} \text{sgn}(e(t)) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Según la definición 2.2.5 este sistema será homogéneo de grado  $m = \alpha - 1$  si y sólo si cada una de las funciones componentes del campo vectorial son homogéneas de grado  $r_i + m$ . Por el ejemplo 3 se sabe que las funciones  $v_i(e_1) = -k_i|e_1|^{\alpha_i} \text{sgn}(e_1)$  son homogéneas y por tanto el sistema 3.2.4 es homogéneo.

Normalizando las dilataciones de (3.2.1-3.2.3) en forma recurrente con  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = \alpha$  y  $m = r_2 - r_1 = \alpha - 1$  se obtiene

$$r_i = (i-1)\alpha - (i-2), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.2.5)$$

$$\alpha_i = i\alpha - (i-1), \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3.2.6)$$

dado que  $r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$

tenemos

$$\alpha > \frac{n-2}{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1}$$

y el lema está demostrado.

### 3.2.1. Una Función de Lyapunov homogénea para el sistema $O(\alpha, e)$

Considere la función  $V_\alpha(e) = \xi^T P \xi$ ,

con  $\xi = [v_1^{1/q}, v_2^{(1/[\alpha_1]q)}, \dots, v_n^{(1/[\alpha_{n-1}]q)}]^T = [v_1^{1/q}, v_2^{(1/[\alpha]q)}, \dots, v_n^{(1/[(n-1)\alpha - (n-2)]q)}]^T$

$$q = \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i$$

donde  $P$  es la solución de la ecuación de Lyapunov  $A^T P + P A = -I_n$  donde

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

tal que sus ganancias  $k_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  hacen de  $A$  Hurwitz. Por tanto  $P$  es definida positiva.

**Proposición 3.2.2** (Teorema 10 [22]). *La función  $V_\alpha(e) = \xi^T P \xi$ , es función de Lyapunov homogénea de grado 1 y su derivada con respecto al tiempo es homogénea de grado  $1 + m > 0$  para el sistema  $O(\alpha, e)$*

**Demostración** Veamos que  $V_\alpha(e)$  es homogénea.

Para empezar,  $\xi(\Delta_r e) = [v_1^{1/q}, v_2^{(r_2/[\alpha_1]q)}, \dots, v_n^{(r_n/[\alpha_{n-1}]q)}]^T = [v_1^{1/q}, v_2^{1/q}, \dots, v_n^{1/q}]^T = \lambda^{1/q} \xi(e)$

$$V_\alpha(\Delta_r e) = \xi^T(\Delta_r e) P \xi(\Delta_r e) = \lambda^{1/q^2} V_\alpha(e)$$

y  $V_\alpha(e)$  es diferenciable para  $0 < \alpha \leq 1$  puesto que cada componente de  $\xi$  es de la forma  $(v_i)^{1/r_i}$  con  $1/r_i \geq 1$ . Note que las condiciones anteriores se encuentran parametrizadas por  $\alpha$ .

Como  $V_\alpha(e)$  es propia, el conjunto

$$S = \{e \in \mathbb{R}^n : V(1, e) = 1\}$$

es compacto en  $\mathbb{R}^n$ . Se define la función

$$\phi : \mathbb{R}^{>0} \times S \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.2.7)$$

$$(\alpha, e) \mapsto (\nabla V(\alpha, e), O(\alpha, e)) \quad (3.2.8)$$

y como  $A$  es Hurwitz el sistema  $\dot{e}(t) = Ae(t)$  ( $O(1, e)$ ) es asintóticamente estable.

Con  $\phi$  es continua  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^{<0})$  es subconjunto abierto de  $\Delta \times S$  que contiene a  $\{1\} \times S$  como  $S$  es compacto se sigue del lema tubular [37] que  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^{<0})$  contiene algún tubo  $(1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2) \times S$  sobre  $\{1\} \times S$ . Para todo  $(\alpha, e) \in (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2) \times S$

$$(\nabla V(\alpha, e), O(\alpha, e)) < 0$$

Note que  $V(\alpha, \lambda^{r_1} e_1, \dots, \lambda^{r_n} e_n) = \lambda^{1/q^2} V(\alpha, e_1, \dots, e_n)$

luego

$$e \mapsto V(\alpha, e)$$

es homogénea de grado  $1/q^2$  con respecto a las ponderaciones  $r_i$  de [38] puede deducirse que

$$(\alpha, e) \mapsto (\nabla V(\alpha, e), O(\alpha, e))$$

es homogénea de grado  $(1/q^2) + \alpha - 1$  con respecto a las ponderaciones  $r_i$  y por tanto, es definida negativa. Esto implica que para  $\alpha \in (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2)$ ,

$$e \mapsto V(\alpha, e)$$

es función de Lyapunov para el subsistema  $O(\alpha, e)$ .

Se ha mostrado que el sistema de estimación del error  $O(\alpha, e)$  es asintóticamente estable, de grado de homogeneidad negativo y por tanto convergente por un tiempo finito al origen.

### 3.3. Convergencia uniforme del Sistema $O(\beta, e)$

**Lema 3.3.1.** Sean  $m_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_i > 0$ , se definen  $r_i > 0$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $\beta_1 = \beta > 1 + \frac{1}{n-1}$  tales que

$$r_{i+1} = r_i + m_1 \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3.3.1)$$

$$\beta_i = \frac{r_{i+1}}{r_1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3.3.2)$$

$$\beta_n = \frac{r_n + m}{r_1} \quad (3.3.3)$$

y fijando  $v_i = 0$ ,  $w_i(e_1) = -k_i|e_1|^{\beta_i} \text{sgn}(e_1)$  con  $1 \leq i \leq n$ .

entonces el sistema obtenido es homogéneo de grado  $m_1 = \beta - 1$  con respecto a las dilataciones  $r_i = (i - 1)\beta - (i - 2)$  y  $\beta_i = i\beta - (i - 1)$ ,  $1 < i \leq n$ .

**Demostración** Considere una dilatación con pesos  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . El sistema de estimación del error que en adelante se denota  $O(\beta, e)$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - \kappa_1|z_1(t) - y(t)|^{\beta_1} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - \kappa_2|z_1(t) - y(t)|^{\beta_2} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= -\kappa_n|z_1(t) - y(t)|^{\beta_n} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

$$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n > 0$$

Según la definición 2.2.5 este sistema será homogéneo de grado  $m_1 = \beta - 1$  si y sólo si cada una de las funciones componentes del campo vectorial son homogéneas de grado  $r_i + m_1$ . Por el ejemplo 3 se sabe que las funciones  $w_i(e_1) = -\kappa_i|e_1|^{\beta_i} \text{sgn}(e_1)$  son homogéneas y por tanto el sistema 3.3.4 es homogéneo.

Normalizando las dilataciones poniendo  $r_1 = 1$  luego,  $r_2 = \beta$  y  $m = r_2 - r_1 = \beta - 1$  de (3.3.1-3.3.3) de forma recurrente se obtiene

$$r_i = (i - 1)\beta - (i - 2), \quad 1 \leq i \leq n \tag{3.3.5}$$

$$\beta_i = i\beta - (i - 1), \quad 1 \leq i \leq n - 1 \tag{3.3.6}$$

$$\tag{3.3.7}$$

dado que  $r_n > \dots > r_2 > r_1 > 0$

tenemos

$$\beta > \frac{n}{n - 1} = 1 + \frac{1}{n - 1}$$

y el lema está demostrado.

### 3.3.1. Una Función de Lyapunov Homogénea para el Sistema $O(\beta, e)$

Considere ahora la siguiente función de Lyapunov:  $V_\beta(e) = \psi^T P_1 \psi$ ,

con  $\psi = [w_1^{1/q}, w_2^{(1/[\beta_1]q)}, \dots, w_n^{(1/[\beta_{n-1}]q)}]^T = [w_1^{1/q}, w_2^{(1/[\beta]q)}, \dots, w_n^{(1/[(n-1)\beta - (n-2)]q)}]^T$

$$q = \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i$$

donde  $P_1$  es la solución de la ecuación de Lyapunov  $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I_n$  con

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -\kappa_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\kappa_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

tal que sus ganancias  $\kappa_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  hacen de  $A_1$  Hurwitz. Por tanto  $P_1$  es definida positiva.

**Proposición 3.3.2.** La función  $V_\beta(e) = \psi^T P_1 \psi$ , es función de Lyapunov homogénea de grado 1 y su derivada con respecto al tiempo es homogénea de grado  $1 + m_1 > 0$  para el sistema  $O(\beta, e)$

**Demostración** Veamos que  $V_\beta(e)$  es homogénea.

Para empezar,  $\psi(\Delta_r e) = [w_1^{1/q}, w_2^{(r_2/[\beta_1]q)}, \dots, w_n^{(r_n/[\beta_{n-1}]q)}]^T = [w_1^{1/q}, w_2^{1/q}, \dots, w_n^{1/q}]^T = \lambda^{1/q} \psi(e)$

$$V_\beta(\Delta_r e) = \psi^T(\Delta_r e) P_1 \psi(\Delta_r e) = \lambda^{1/q^2} V_\beta(e)$$

y  $V_\beta(e)$  es diferenciable para  $\beta \geq 1$  puesto que cada componente de  $\psi$  es de la forma  $(w_i)^{1/r_i}$  con  $1/r_i \geq 1$ . Note que las condiciones anteriores se encuentran parametrizadas por  $\beta$ .

Como  $V_\beta(e)$  es propia, el conjunto

$$S = \{e \in \mathbb{R}^n : V(1, e) = 1\}$$

es compacto en  $\mathbb{R}^n$ . Se define la función

$$\phi : \mathbb{R}^{>0} \times S \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.3.8}$$

$$(\beta, e) \mapsto (\nabla V(\beta, e), O(\beta, e)) \tag{3.3.9}$$

y como  $A_1$  es Hurwitz el sistema  $\dot{e}(t) = A_1 e(t)$  ( $O(\beta = 1, e)$ ) es asintóticamente estable.

Con  $\phi$  es continua  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^{<0})$  es subconjunto abierto de  $\Delta \times S$  que contiene a  $\{1\} \times S$  como  $S$  es compacto se sigue del lema tubular [37] que  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^{<0})$  contiene algún tubo  $(1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2) \times S$  sobre  $\{1\} \times S$ . Para todo  $(\beta, e) \in (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2) \times S$

$$(\nabla V(\beta, e), O(\beta, e)) < 0$$

Note que  $V(\beta, \lambda^{r_1} e_1, \dots, \lambda^{r_n} e_n) = \lambda^{1/q^2} V(\beta, e_1, \dots, e_n)$

luego

$$e \mapsto V(\beta, e)$$

es homogénea de grado  $1/q^2$  con respecto a las dilataciones  $r_i$ . De [38] puede deducirse que

$$(\beta, e) \mapsto (\nabla V(\beta, e), O(\beta, e))$$

es homogénea de grado  $(1/q^2) + \beta - 1$  con respecto a las ponderaciones  $r_i$  y por tanto, es definida negativa. Esto implica que para  $\alpha \in (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2)$ ,

$$e \mapsto V(\beta, e)$$

es función de Lyapunov para el subsistema  $O(\beta, e)$ .

Se ha mostrado que el sistema de estimación del error  $O(\beta, e)$  es asintóticamente estable y de grado de homogeneidad positivo.

### 3.4. Teorema de Estimación de Tiempo fijo para el observador Diseñado

Ya se dispone de los elementos necesarios para demostrar el teorema principal:

**Teorema 3.4.1.** *Considere el observador con su respectivo sistema de estimación de error. El error  $e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)] \in \mathbb{R}^n$  converge al origen y el vector de estados del observador  $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)] \in \mathbb{R}^n$  converge al vector de derivadas de la salida  $y(t)$ ,  $[y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]$  por un tiempo fijo (preestablecido)*

$$T_{BBF} \leq \frac{\lambda_{max}^p(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^\sigma}$$

donde  $\rho = 1 - \alpha$ ,  $\sigma = \beta - 1$ ,  $r = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}$ ,  $r_1 = \frac{\lambda_{min}(Q_1)}{\lambda_{max}(P_1)}$ ,  $\Upsilon \leq \lambda_{min}(P_1)$ , es un número positivo y las matrices  $P$ ,  $P_1$  satisfacen las correspondientes ecuaciones de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ ,  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$  donde  $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas.

**Demostración** Considere de forma separada el sistema de error únicamente con los términos  $\alpha_i$  introducidos, el sistema  $O(\alpha, e)$ .

Dado que las ganancias  $k_i$  del regulador forman un polinomio Hurwitz, la matriz  $A$  es Hurwitz. Luego el sistema  $\dot{e}(t) = Ae(t)$  ( $O(1, e)$ ) es asintóticamente estable.

Como la matriz  $P$  es solución del sistema  $PA + A^T P = -Q$ , la función  $V(x) = e^T P e$  es función de Lyapunov para el sistema lineal  $\dot{e}(t) = Ae(t)$  y la derivada con respecto al tiempo satisface la desigualdad

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = e^T (A^T P + P A) e = -e^T Q e < 0$$

Por proposición 3.2.2, la última desigualdad  $\dot{V} < 0$  también se cumple para la función  $V(\xi) = \xi^T(e) P \xi(e)$  donde  $\xi = [e_1^{\alpha_1}(t), e_2^{\alpha_2}(t), \dots, e_n^{\alpha_n}(t)] \in \mathbb{R}^n$ , si  $\alpha$  es seleccionada en el intervalo  $(1 - \epsilon, 1)$ , para un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y  $\dot{V}(\xi)$  es calculada para trayectorias del sistema de estimación del error, en vista de la continuidad del lado derecho de este sistema con respecto a  $\alpha$ . Por lo tanto,  $V(\xi)$  es función de Lyapunov para el sistema  $O(\alpha, e)$  y Tomando en cuenta que  $\dot{V}(\xi) < 0$ , el sistema es asintóticamente estable.

Note que el lado derecho de el sistema es un campo vectorial homogéneo de grado  $m = \frac{\alpha-1}{\alpha} < 0$  con respecto a pesos (dilataciones)  $r_i = (i - 1)\alpha - (i - 2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . En particular esto implica que el sistema es convergente al origen en tiempo finito.

Verificamos que la función de Lyapunov  $V(\xi)$  es homogénea en  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de grado  $l = 1 > \max(-m, 0)$ , si  $\alpha$  es suficientemente cercana a 1, y su derivada con respecto al tiempo  $\dot{V}(\xi)$  es homogénea en  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$  de grado  $l + m = 1 + m > 0$ , con respecto a los mismos pesos  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto en vista de la relación

$$-c_1[V(\xi)]^{\frac{l+m}{l}} \leq L_f V(\xi) \leq -c_2[V(\xi)]^{\frac{l+m}{l}}, \xi \in \mathbb{R}^n$$

obtenida en el lema 2.1.15 se tiene la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}(\xi) \leq -cV^{l+m}(\xi)$$

donde  $c$  es una constante positiva y  $1 + m < 1$ .

Para el sistema lineal  $\dot{e}(t) = Ae(t)$ , las desigualdades de Raileigh

$$\lambda_{\min}(P)\|e\|^2 \leq v(e) = e^T P e \leq \lambda_{\max}(P)\|e\|^2$$

y

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = e^T (A^T P + P A) e = -e^T Q e < 0$$

implican que  $V(e) \leq \lambda_{\max}(P)\|e\|^2$  y  $\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2$ , por lo tanto

$$\dot{V}(e) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}V(e) < -\frac{\lambda_{\min}(Q) - \delta}{\lambda_{\max}(P)}V(e)$$

para un  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño.

En vista de la continuidad del lado derecho del sistema con respecto a  $\alpha$ , la desigualdad

$$\dot{V}(\xi) < -\frac{(\lambda_{\min}(Q) - \delta)}{\lambda_{\max}(P)}V^{1+m}(\xi)$$

también se cumple para la función  $V(\xi)$ , si  $\alpha$  es seleccionada en el intervalo  $(1 - \epsilon, 1)$ , para un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y  $\dot{V}$  es calculada para trayectorias del sistema 3.2.4.

Dado que  $\delta > 0$  es una constante positiva arbitrariamente pequeña, la desigualdad

$$\dot{V}(\xi) \leq -cV(x)^{l+m}(\xi)$$

puede escribirse como

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}V^{l+m}(\xi)$$

luego la constante  $c$  puede asignarse como  $c = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ .

Ahora considere de forma separada el sistema de error únicamente con los términos  $\beta_i$  introducidos, el sistema  $O(\beta, e)$ .

Dado que las ganancias  $\kappa_i$  forman un polinomio Hurwitz, la matriz  $A_1$  es Hurwitz, luego el sistema  $\dot{e}(t) = A_1 e(t)$  es asintóticamente estable.

Como la matriz  $P_1$  es solución del sistema  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$ , la función  $V_1(e) = e^T P_1 e$  es función de Lyapunov para el sistema lineal  $\dot{e}(t) = A_1 e(t)$  y la derivada con respecto al tiempo satisface la desigualdad

$$\dot{V}_1(e) = \dot{e}^T P_1 e + e^T P_1 \dot{e} = e^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) e = -e^T Q_1 e < 0$$

En vista de la continuidad del lado derecho del sistema de estimación del error con respecto a  $\beta$ , la última desigualdad  $\dot{V}_1 < 0$  también se cumple para la función  $V_1(\psi) = \psi^T P_1 \psi$ , donde  $\psi = [e_1^{\beta_1}(t), e_2^{\beta_2}(t), \dots, e_n^{\beta_n}(t)] \in \mathbb{R}^n$  si  $\beta$  es seleccionada en el intervalo  $(1, 1 + \epsilon_1)$ , para un  $\epsilon_1 > 0$  suficientemente pequeño, y  $\dot{V}_1(\psi)$  es calculada para trayectorias del sistema  $O(\beta, e)$ , por lo tanto  $V_1(\psi)$  es función de Lyapunov para el sistema 3.3.4 y tomando en cuenta que  $\dot{V}_1(\psi) < 0$ , el sistema es asintóticamente estable.

Note que el lado derecho del sistema  $O(\beta, e)$  es un campo vectorial homogéneo de grado  $m = \frac{\beta-1}{\beta} > 0$  con respecto a pesos (dilataciones)  $r_i = 1/\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Verificando que la función de Lyapunov  $V_1(\psi)$  es homogénea en  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de grado  $l_1 = 1 > \max(-m_1, 0)$ , si  $\beta$  es suficientemente cercano a 1, y su derivada con respecto al tiempo  $\dot{V}_1(\psi)$  es homogénea en  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$  de grado  $l_1 + m_1 = 1 + m_1$ , con respecto a los mismos pesos  $r_i = 1/\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto en vista de la relación

$$-c_1[V(x)]^{\frac{l_1+m_1}{l_1}} \leq L_f V(x) \leq -c_2[V(x)]^{\frac{l_1+m_1}{l_1}}, x \in \mathbb{R}^n$$

obtenida en el lema 2.2.4 se tiene la siguiente desigualdad

$$\dot{V}_1(\psi) \leq -c_1 V_1^{l_1+m_1}(\psi)$$

donde  $c_1$  es una constante positiva y  $1 + m_1 > 1$ .

Para el sistema lineal  $\dot{e}(t) = A_1 e(t)$ , las desigualdades de Raileigh y

$$\dot{V}_1(e) = \dot{e}^T P_1 e + e^T P_1 \dot{e} = e^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) e = -e^T Q_1 e < 0$$

implican que  $V_1(e) \leq \lambda_{\max}(P_1) \|e\|^2$  y  $\dot{V}_1(e) \leq -\lambda_{\min}(Q_1) \|e\|^2$ , por lo tanto

$$\dot{V}_1(e) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)} V_1(e) < -\frac{\lambda_{\min}(Q_1) - \delta}{\lambda_{\max}(P_1)} V_1(e)$$

para un  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño.

En vista de la continuidad del lado derecho del sistema 3.3.4 con respecto  $\beta$ , la desigualdad

$$\dot{V}_1(\psi) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)} V_1^{l+m_1}(\psi)$$

también se cumple para la función  $V_1(\psi) = \psi^T(e)P\psi(e)$ , si  $\beta$  es seleccionada en el intervalo  $(1, 1+\epsilon)$ , para un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y  $\dot{V}_1$  es calculada para trayectorias del sistema 3.3.4.

Dado que  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño.

la desigualdad

$$\dot{V}_1(\psi) \leq -c_1 V_1^{l+m_1}(\psi)$$

puede escribirse como

$$\dot{V}_1(\psi) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)} V_1^{l+m_1}(\psi)$$

luego la constante  $c_1$  puede asignarse como  $c_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)}$ .

Ahora considere el sistema de estimación de error completo 3.4.1. Note que el lado derecho del sistema puede verse como la suma de dos campos vectoriales homogéneos

$$g_1 = \left[ \frac{e_2}{2} + v_1(t), \frac{e_3}{2} + v_2(t), \dots, v_n(t) \right]$$

$$g_2 = \left[ \frac{e_2}{2} + w_1(t), \frac{e_3}{2} + w_2(t), \dots, w_n(t) \right]$$

con  $v_i(t) = -k_i |e_i(t)|^{\alpha_i} \text{sgn}(e_i(t))$  y  $w_i(t) = -\kappa_i |e_i(t)|^{\beta_i} \text{sgn}(e_i(t))$

$i = 1, \dots, n$  de grados  $m < 0$ ,  $m_1 > 0$ ,  $m < m_1$ . Luego en vista del teorema 2.3.4. el sistema completo es estable en tiempo finito al origen.

Considere un número  $\Upsilon > 0$  tal que  $V_1(\psi(t_0)) > \Upsilon$  donde  $V_1(\psi) = \psi^T P_1 \psi$ . calculando su derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema de estimación del error 3.4.1 obtenemos

$$\dot{V}_1 \leq \dot{V}_1(\psi) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(V_1)}{\partial x_i} (v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t)) \leq \dot{V}_1(\psi) \leq -c_1 V^{l+m_1}$$

donde  $\dot{V}_1(\psi)$  es la derivada con respecto al tiempo de  $V_1(\psi)$  sobre las trayectorias del sistema 3.3.4. Por tanto puede verificarse que  $V_1$  decrece y alcanza el valor  $\Upsilon$  para un tiempo no mayor que  $T_1 = \frac{1}{c_1 m_1 \Upsilon^{m_1}}$  el cual corresponde al segundo término en la expresión de nuestro teorema, y es independiente de las condiciones iniciales para el sistema 3.4.1.

Finalmente, calculando la derivada con respecto al tiempo de  $V(\xi)$  a lo largo de las trayectorias del sistema obtenemos

$$\dot{V} \leq \dot{V}(\xi) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(V)}{\partial x_i} (w_1(t) + w_2(t) + \dots + w_n(t)) \leq \dot{V}(\xi) \leq -c V^{l+m}$$

donde  $\dot{V}(\xi)$  es la derivada con respecto al tiempo  $V(\xi)$  sobre las trayectorias del sistema 3.2.4. La aserción del teorema se obtiene de la integración directa de la última desigualdad y las desigualdades de Raileigh  $\|\psi\|^2 \leq \frac{V_1(\psi)}{\lambda_{\min}(P_1)} \leq \frac{\Upsilon}{\lambda_{\min}(P_1)} \leq 1$  y  $V(\xi) \leq \lambda_{\max}(P) \|\xi\|^2$  aplicada a  $\|\xi\| = 1$ . Teorema 3.4.1 es demostrado.

### 3.4.1. Anotaciones sobre el Observador diseñado

1. La estabilidad o la convergencia en tiempo finito aseguran la obtención de una estimación rápida y precisa de las salidas (ver[17]). De hecho la estabilidad o la convergencia en tiempo finito son deseables en el marco de observación, particularmente para el propósito de diseño de controladores basados en observadores para sistemas no lineales, pues bajo tal estabilidad, para una clase amplia de sistemas no lineales el observador puede diseñarse separadamente del controlador y el principio de separación no requiere demostrarse. Este tipo de estabilidad también es de vital importancia en las aplicaciones que requieren estimaciones rápidas de las salidas desconocidas como en detección de fallas e identificación, o en identificación de parámetros en línea [42].
2. La prueba de estabilidad del observador se basa en argumentos de continuidad y el resultado solo se tiene cuando el grado de homogeneidad es suficientemente cercano a cero. Es decir, cuando el observador es casi lineal [43] y [44].
3. El resultado presentado en el teorema permanece valido para cualquier sistema lineal de  $n$  dimensiones observable que pueda transformarse en una cadena de  $n$  integradores (forma canónica) por un cambio lineal de coordenadas.

### 3.4.2. Ventajas del observador diseñado

- a *Provee convergencia al origen por un tiempo fijo (tiempo finito preestablecido) para el sistema no lineal (1.3.1-1.3.2)*
- b *Posee una estructura simple y resulta más apropiado para la implementación debido a que realiza una estimación menos conservadora (más precisa) del tiempo de convergencia*

### 3.4.3. Un diferenciador continuo en tiempo fijo

*Se procede a derivar un diferenciador a partir del observador diseñado [41]. Considere una señal suave  $y(t)$  que será empleada para estimar las derivadas sucesivas de  $y(t)$  hasta el orden  $(n-1)$ . Esto es digamos  $\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ . Asuma que  $y^{(n)}(t) = \theta(\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ . Fijamos  $Y = [y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]^T$  entonces*

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= AY + \Theta(Y) \\ y &= CY\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

donde  $A$  y  $C$  son dadas en (1.3.3- 1.3.4),  $\Theta(Y) = [0, 0 \dots 0, \theta(\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))]^T \in \mathbb{R}^n$

De acuerdo a la sección anterior se propone el diferenciador

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1|z_1 - y|^{\alpha_1} \text{sgn}(z_1 - y) - \kappa_1|z_1 - y|^{\beta_1} \text{sgn}(z_1 - y) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2|z_1 - y|^{\alpha_2} \text{sgn}(z_1 - y) - \kappa_2|z_1 - y|^{\beta_2} \text{sgn}(z_1 - y) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t) - k_{n-1}|z_1 - y|^{\alpha_{n-1}} \text{sgn}(z_1 - y) - \kappa_{n-1}|z_1 - y|^{\beta_{n-1}} \text{sgn}(z_1 - y) \\ \dot{z}_n(t) &= -k_n|z_1 - y|^{\alpha_n} \text{sgn}(z_1 - y) - \kappa_n|z_1 - y|^{\beta_n} \text{sgn}(z_1 - y)\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

Haciendo  $e = Y - z$  se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= e_2(t) - k_1|e_1|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(e_1) - \kappa_1|e_1|^{\beta_1} \operatorname{sgn}(e_1) \\
\dot{e}_2(t) &= e_3(t) - k_2|e_1|^{\alpha_2} \operatorname{sgn}(e_1) - \kappa_2|e_1|^{\beta_2} \operatorname{sgn}(e_1) \\
&\vdots \\
\dot{e}_{n-1}(t) &= e_n(t) - k_{n-1}|e_1|^{\alpha_{n-1}} \operatorname{sgn}(e_1) - \kappa_{n-1}|e_1|^{\beta_{n-1}} \operatorname{sgn}(e_1) \\
\dot{e}_n(t) &= \theta(\dot{y}(t), \dots, y^{n-1}(t)) - k_n|e_1|^{\alpha_n} \operatorname{sgn}(e_1) - \kappa_n|e_1|^{\beta_n} \operatorname{sgn}(e_1)
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Debido al término  $\theta(\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  no es posible con esta estructura conseguir convergencia del error a cero sin algún conocimiento adicional de la señal y por tanto del término  $\theta(\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ . Para abordar tal problema uno puede asumir que  $x(t)$  es localmente polinomial sobre un pequeño intervalo de tiempo de tal forma que  $\theta(\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) = 0$  y en ese caso es posible recuperar la derivada temporal. Otro camino consiste en asumir que  $\theta$  es acotada  $|\theta| \leq M$  para todo  $t$ . De esa forma uno busca dominar  $M$  usando un término discontinuo como se muestra a continuación.

El caso límite  $\alpha = \beta = 1$  proporciona el observador de Luenberger. En cuanto al caso  $\alpha \rightarrow \frac{n-1}{n}$ ,  $\beta \rightarrow \frac{n}{n-1}$ , cuando  $n$  crece ocurre que  $-|e_1|^{\alpha_n} \operatorname{sgn}(e_1) - |e_1|^{\beta_n} \operatorname{sgn}(e_1) \rightarrow -\operatorname{sgn}(z_1 - y)$  y ha de usarse para que el término  $-k_n|e_1|^{\alpha_n} \operatorname{sgn}(e_1) - \kappa_n|e_1|^{\beta_n} \operatorname{sgn}(e_1)$  domine al término  $\theta(\dot{y}(t), \dots, y^{n-1}(t))$ .

Finalmente el caso  $\alpha = \frac{n-1}{n}$ , es el diferenciador por modos deslizantes no recurrente de alto orden dado en [12] (no se incluyen  $\beta_i$ , por tanto es un diferenciador convergente en tiempo finito).

*“Alice laughed. ‘There’s no use trying,’ she said. ‘One can’t believe impossible things.’*

*I daresay you haven’t had much practice,’ said the Queen. ‘When I was your age, I always did it for half-an-hour a day. Why, sometimes I’ve believed as many as six impossible things before breakfast. There goes the shawl again!’”*

*(Lewis Carroll)*

# Capítulo 4

## Casos de estudio

---

*En este capítulo se presentan dos casos de estudio: Un Motor de Corriente Directa y un péndulo invertido sobre un carro que ponen a prueba el observador diseñado. Con ayuda del teorema demostrado en el capítulo 3 se dan estimaciones de tiempos de convergencia evidenciándose la precisión de nuestra estimación comparada con las estimaciones reportadas en la literatura.*

### 4.1. Diseño de un Observador convergente por un tiempo fijo para un Motor de corriente Directa

*Se inicia presentando el modelo matemático del sistema a estudiar: un motor de corriente directa (Motor CD) [39].*

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= \frac{1}{J}(-b\omega + k_m i_a(t)) \\ \frac{di_a(t)}{dt} &= \frac{1}{L_a}(-R_a i_a(t) - k_a \omega(t) + V_a(t))\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

*donde  $\theta$  es el ángulo de rotación,  $\omega(t)$  es la velocidad angular,  $i_a(t)$  es la corriente de armadura,  $V_a(t)$  es el voltaje de armadura (entrada de control),  $J$  es el rotor de inercia,  $k_m$*

es la constante del motor,  $k_a$  es la constante de armadura,  $R_a$  es la resistencia de armadura,  $L_a$  es la inductancia de armadura y  $b$  es el coeficiente de fricción. Asumimos que  $\theta(t)$  es la única variable de estado que es medible.

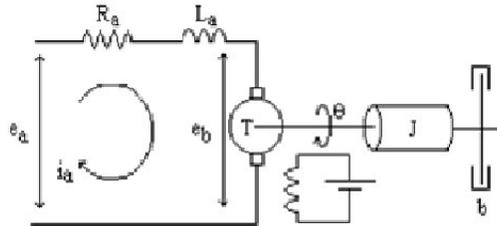


Figura 4.1: Gráfico de componentes de un Motor CD

En la tabla que se muestra a continuación se especifican los valores numéricos de los parámetros del motor:

Parámetro	Valor	Unidades	Parámetro	Valor	Unidades
$k_a$	0.001	Hs/rad	$R_a$	0.01	Ohms
$k_m$	0.001	Vs/rad	$b$	0.003	Nms/rad
$L_a$	0.1	Henrys	$J$	0.005	kg/m <sup>2</sup>

Reemplazando los valores de los parámetros obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= -0.6\omega + 0.2i_a(t) \\
 \frac{di_a(t)}{dt} &= -0.01\omega(t) - 0.1i_a(t) + 10V_a(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.1.2}$$

#### 4.1.1. Transformación en la forma compañera del modelo del motor DC

Introduciendo otra variable de estado  $w(t) = \dot{\omega}(t)$  el sistema (4.1.2) se convierte en la forma compañera con respecto a las variables  $\theta(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $w(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= w(t) \\ \dot{w}(t) &= -0.062\omega(t) - 0.7w(t) + 2V_a(t)\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

El objetivo del control es diseñar una ley de control continua convergente por un tiempo fijo que lleve la salida  $\theta(t)$  de los sistemas (4.1.2), (4.1.3) al origen.

#### 4.1.2. La entrada de control $V_a(t)$

La entrada de control toma la forma  $2V_a(t) = V_{a1}(t) + V_{a2}(t)$  donde

$$V_{a1}(t) = 0.062z_2(t) + 0.7z_3(t)$$

con  $z_2(t)$  y  $z_3(t)$  las estimaciones de las variables  $\omega(t)$  y  $w(t)$ , respectivamente. Además  $V_{a2}(t) = u(t)$

donde  $u(t)$  consiste de una serie de términos que garantizan la estabilidad en tiempo fijo en el origen.

como resultado el sistema (4.1.3) toma la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= w(t) \\ \dot{w}(t) &= 0.062(z_2(t) - \omega(t)) + 0.7(z_3(t) - w(t)) + u(t)\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

#### 4.1.3. Diseño del Observador convergente en tiempo fijo

En la siguiente tabla se indican los valores de los parámetros involucrados en el diseño del observador:

Parámetros	Valor
$\alpha_i$	9/10, 8/10, 7/10
$\beta_i$	10/9, 11/9, 12/9
$k_i$	18, 1000, 1000
$K_i$	18, 1000, 1000

El observador toma la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
&\quad - \kappa_1|z_1(t) - y(t)|^{\beta_1} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
\dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_2} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
&\quad - \kappa_2|z_1(t) - y(t)|^{\beta_2} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
\dot{z}_3(t) &= -k_3|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_3} \text{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
&\quad - \kappa_3|z_1(t) - y(t)|^{\beta_3} \text{sgn}(z_1(t) - y(t))
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales del observador están dadas por:  $z = (1, 1, 1, 1)$

#### 4.1.4. Diseño del regulador convergente en tiempo fijo

Para el diseño del regulador se toman como condiciones iniciales de los estimados, los valores de las variables de estado en el tiempo en que el error del observador es cero en ausencia del regulador. Esto se hace con el objeto de que los términos de  $\dot{w}(t)$ ,  $0.062(z_2(t) - \omega(t)) + 0.7(z_3(t) - w(t))$  se hagan cero, de tal forma que el observador basado en el regulador actúe sobre la cadena de integradores.

La tabla muestra los parámetros empleados en el diseño del regulador

Parámetros	Valor
$\gamma_i$	19/23, 19/22, 19/21
$\delta_i$	21/17, 21/18, 21/19
$\bar{k}_i$	1, 3, 3
$\bar{\kappa}_i$	1, 3, 3

El regulador toma la forma

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\bar{k}_1 \text{sgn}(z_1)|z_1|^{\gamma_1} - \bar{k}_2 \text{sgn}(z_2)|z_2|^{\gamma_2} - \bar{k}_3 \text{sgn}(z_3)|z_3|^{\gamma_3} \\
&\quad - \bar{\kappa}_1 \text{sgn}(z_1)|z_1|^{\delta_1} - \bar{\kappa}_2 \text{sgn}(z_2)|z_2|^{\delta_2} - \bar{\kappa}_3 \text{sgn}(z_3)|z_3|^{\delta_3}
\end{aligned}$$

y el sistema queda

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= w(t) \\ \dot{w}(t) &= u(t)\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

#### 4.1.5. Simulación del DC motor con switch

##### Simulación del Observador

El paso de simulación es fijado en  $1e-3$ . La cota superior estimada para la convergencia del observador es de 1687 segundos y se obtiene a partir de la expresión dada por el teorema 3.4.1.

$$T_{BBF} \leq \frac{\lambda_{max}^{\rho}(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^{\sigma}}$$

donde  $\rho = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ ,  $\sigma = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$ ,  $r = \frac{1}{59.3920}$ ,  $r_1 = \frac{1}{59.3920}$ ,  $\Upsilon = 0.0286$ , es un número positivo,  $\lambda_{min}(P) = 0.0286$ ,  $\lambda_{max}(P) = 59.3920$  y las matrices

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 59.3824 & -0.5000 & -0.5684 \\ -0.5000 & 0.5684 & -0.5000 \\ -0.5684 & -0.5000 & 0.5097 \end{pmatrix}$$

satisfacen las correspondientes ecuaciones de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ ,  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$  donde  $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices simétricas definidas positivas ( $Q = Q_1 = I_3$ ).

Sobre el sistema inicialmente actúa la componente  $V_{a1}(t)$  en términos de las variables del observador sin involucrar el componente del regulador  $V_{a2}(t)$ . Luego, cuando el tiempo  $t$  es mayor que la cota superior estimada para la convergencia del observador, actúan observador y regulador. Note que el observador siempre está presente.

Se simuló el sistema para diferentes condiciones iniciales. Aunque veremos que los valores de las condiciones iniciales no son relevantes, dado que el regulador diseñado provee convergencia global para la salida.

La tabla muestra que los tiempos de convergencia fijos simulados son siempre menores que las cotas superiores estimadas para la convergencia del observador obtenidos por el teorema

<i>Condiciones iniciales</i>	<i>TCVS</i>	<i>TCE</i>	<i>tasa</i>
$(\pi/2, 5, 30)$	145	1687	11.6
$(\pi, 10, 60)$	150	1687	11.2
$(4\pi/3, 100, 90)$	170	1687	9.9
$(3\pi/2, 500, 120)$	175	1687	9.6
$(2\pi, 1000, 150)$	175	1687	9.6

*TCVS: Tiempo de convergencia vía simulación en segundos*

*TCE: Tiempo de convergencia estimado en segundos*

Las condiciones iniciales elegidas para las figuras que se muestran a continuación son  $\theta(0) = \pi$ ,  $\omega(0) = 10$ ,  $i_a(0) = 60$ .

En cada una de las figuras se observa que en ausencia del regulador las variables  $\theta$ ,  $\omega$ , e  $i$  convergen a sus respectivos valores de referencia. Además en el zoom puede evidenciarse que las trayectoria estimadas de cada una de las variables de estado convergen a las trayectorias reales del sistema a tal punto que aún en escalamiento la diferencia entre las dos trayectorias (la estimada y la real) es imperceptible.

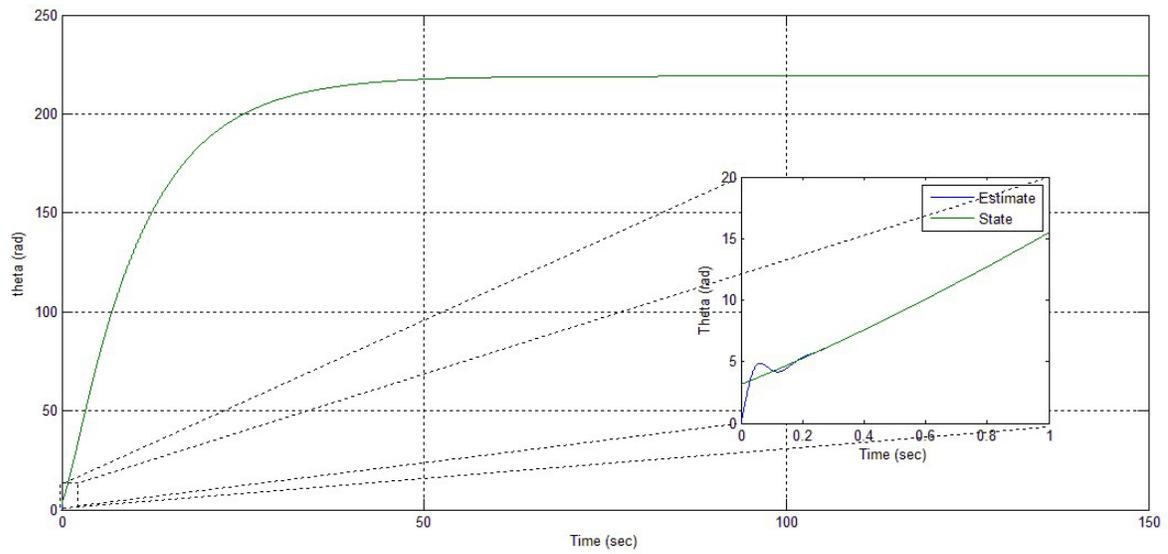


Figura 4.2: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $\theta$  en ausencia del regulador

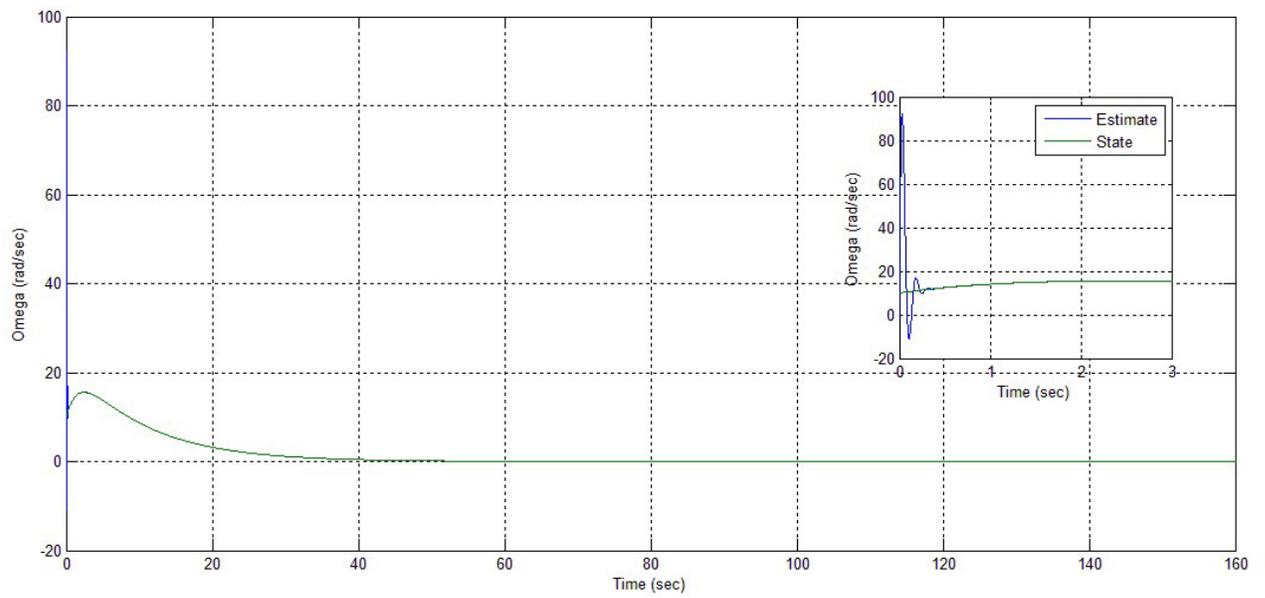


Figura 4.3: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $\omega$  en ausencia del regulador

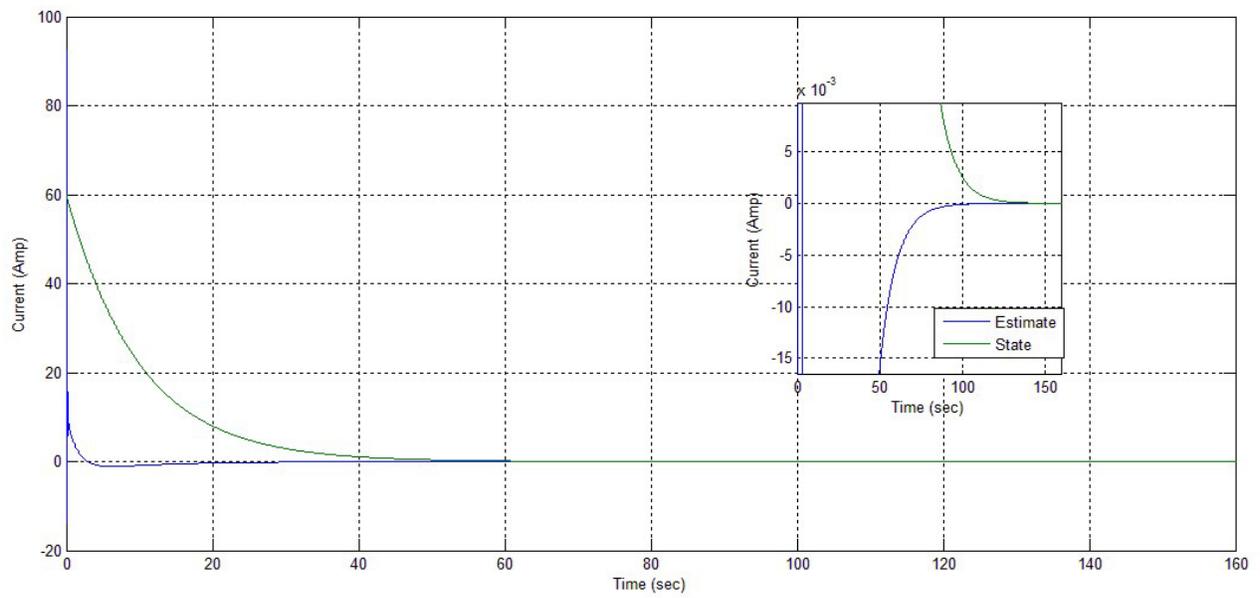


Figura 4.4: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $i$  en ausencia del regulador

### 4.1.6. Simulación del Regulador

El paso de simulación es fijado en  $1e-3$ . La cota superior estimada para la convergencia del regulador es: 116.3 segundos y se obtiene a partir de la expresión dada por el teorema 2 dado en [8]

$$T_{BBF} \leq \frac{\lambda_{max}^\rho(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^\sigma}$$

donde  $\rho = (1 - \frac{19}{21})/\frac{19}{21} = \frac{2}{19}$ ,  $\sigma = (\frac{21}{19} - 1)/\frac{21}{19} = \frac{2}{21}$ ,  $r = \frac{1}{4.9728}$ ,  $r_1 = \frac{1}{4.9728}$ ,  $\Upsilon = 0.2192$ , es un número positivo  $\lambda_{min}(P) = 0.2192$ ,  $\lambda_{max}(P) = 4.9728$  y las matrices

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 2.3125 & 1.9375 & 0.5000 \\ 1.9375 & 3.2500 & 0.8125 \\ 0.5000 & 0.8125 & 0.4375 \end{pmatrix}$$

satisfaciendo las correspondientes ecuaciones de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ ,  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$  donde  $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices simétricas definidas positivas ( $Q = Q_1 = I_3$ ).

La tabla muestra que los tiempos de convergencia fijos simulados son siempre menores que las cotas superiores estimadas para la convergencia del regulador obtenidos por el teorema 2 dado en [8]

Condiciones iniciales	T CVS	T CE	tasa
$(\pi/2, 5, 30)$	40	116.3	2.9
$(\pi, 10, 60)$	50	116.3	2.4
$(4\pi/3, 100, 90)$	50	116.3	2.4
$(3\pi/2, 500, 120)$	54	116.3	2.2
$(2\pi, 1000, 150)$	55	116.3	2.1

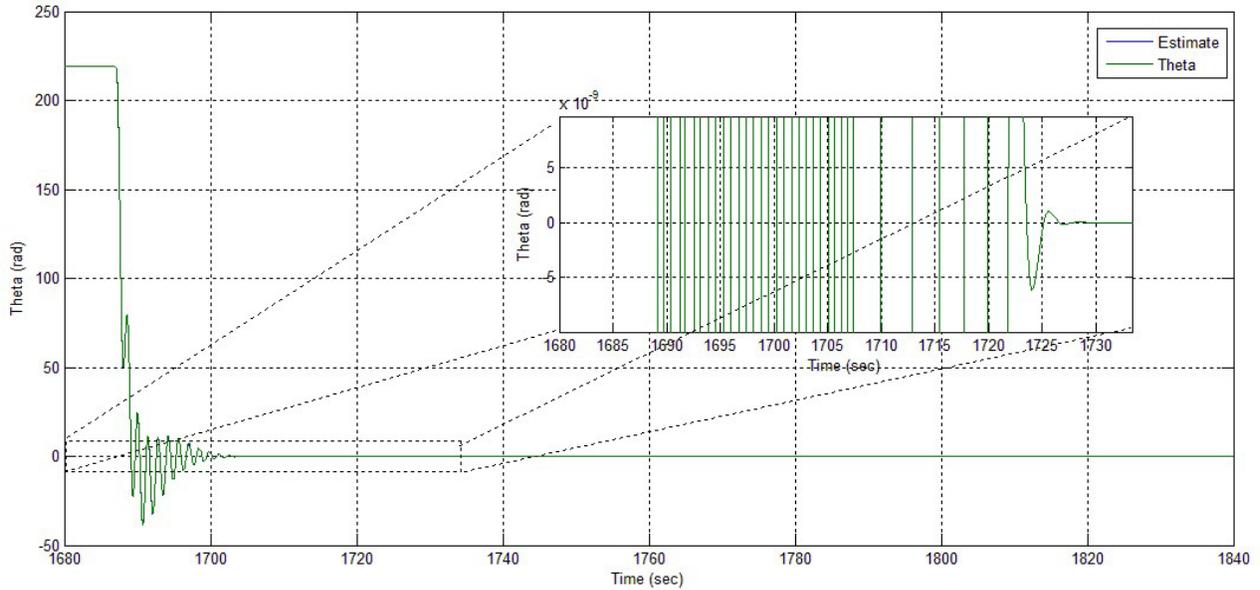


Figura 4.5: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $\theta$  actuando regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del regulador

*En la figura 4.5 se observa el comportamiento de la variable  $\theta$ . Se evidencia que una vez actúa el regulador  $\theta$  converge a cero en un tiempo aproximado de 20 segundos. Además en el zoom puede evidenciarse que la trayectoria estimada se acerca rápidamente a la trayectoria real del sistema hasta el punto que aún en escalamiento la diferencia entre las dos trayectorias es imperceptible.*

*En la figura 4.6 se observa el comportamiento de la variable  $\omega$ . Se evidencia que una vez actúa el regulador este causa una perturbación en la trayectoria que es seguida por el estimado. 20 segundos después la trayectoria de la variable de estado permanece en cero. Además en el zoom puede notarse como la trayectoria estimada se acerca a la trayectoria real del sistema.*

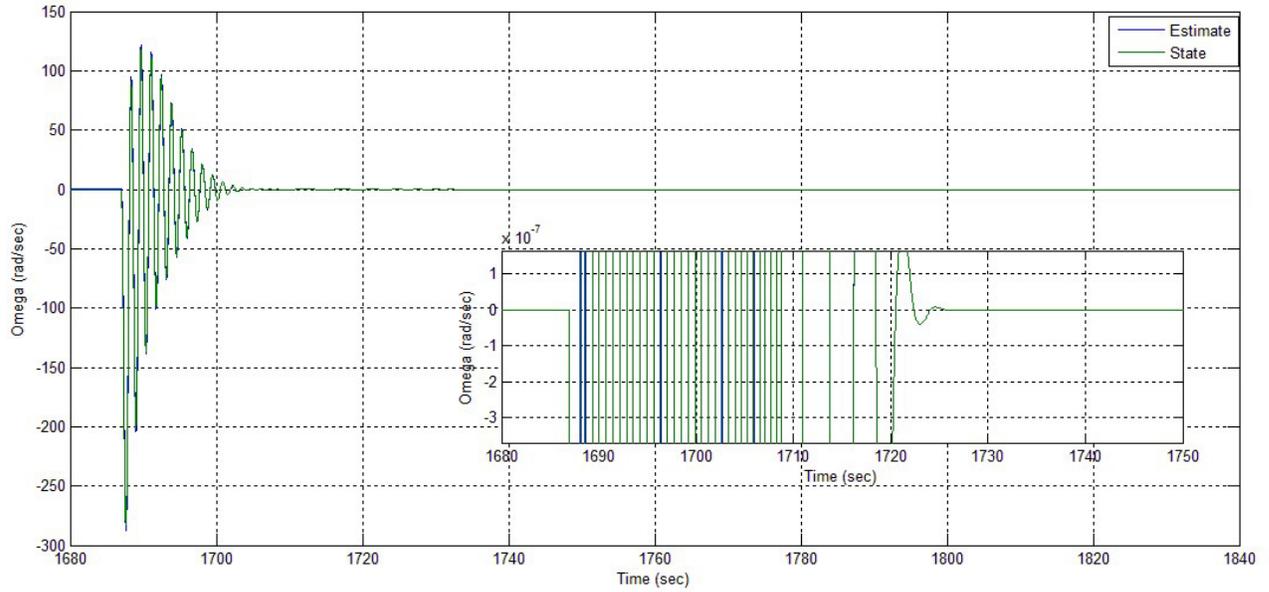


Figura 4.6: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $\omega$  actuando regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del regulador

*En la figura 4.7 se observa el comportamiento de la variable  $i$ . Se evidencia que una vez actúa el regulador este causa una perturbación en la trayectoria que es seguida por el estimado. En el zoom puede notarse que la trayectoria estimada se acerca a la trayectoria real del sistema.*

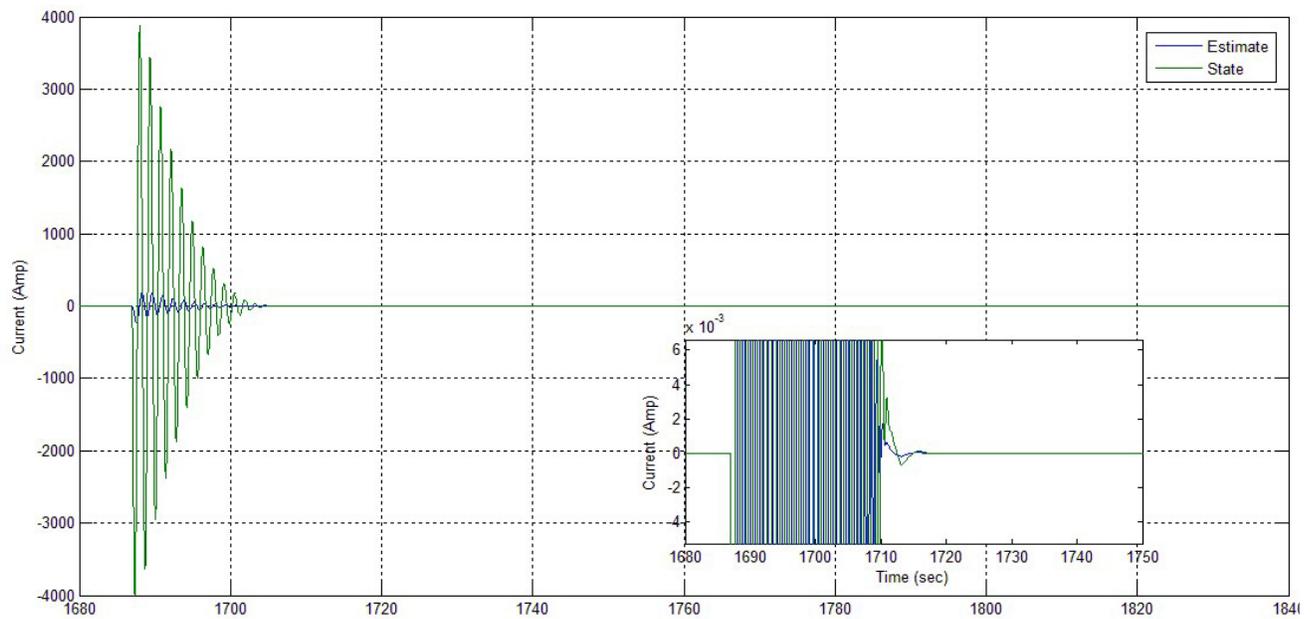


Figura 4.7: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $i$  actuando regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del regulador

#### 4.1.7. Simulación del DC motor sin switch

Para este caso actúan desde el inicio del horizonte temporal observador y regulador en forma simultánea. Los datos en la siguiente tabla muestran que el tiempo fijo de convergencia real está por debajo de la suma de los tiempos obtenidos por el teorema 3.4.1 y el teorema 2 en [8].

<i>Condiciones iniciales</i>	<i>TCVS</i>	<i>TCE</i>	<i>tasa</i>
$(\pi/2, 5, 30)$	30	1803.3	60.1
$(\pi, 10, 60)$	31	1803.3	58.2
$(4\pi/3, 100, 90)$	33	1803.3	54.6
$(3\pi/2, 500, 120)$	37	1803.3	48.7
$(2\pi, 1000, 150)$	38	1803.3	46.6

En la figura 4.8 se observa el comportamiento de la variable  $\theta$ . Al actuar el sistema con observador y regulador de manera simultánea la trayectoria del estado que es seguida por el estimado rápidamente se acerca al estado. Con el zoom puede evidenciarse que la trayectoria estimada se acerca a la trayectoria real del sistema lográndose convergencia a cero. Así, la variable de estado y su estimado permanecen en cero.

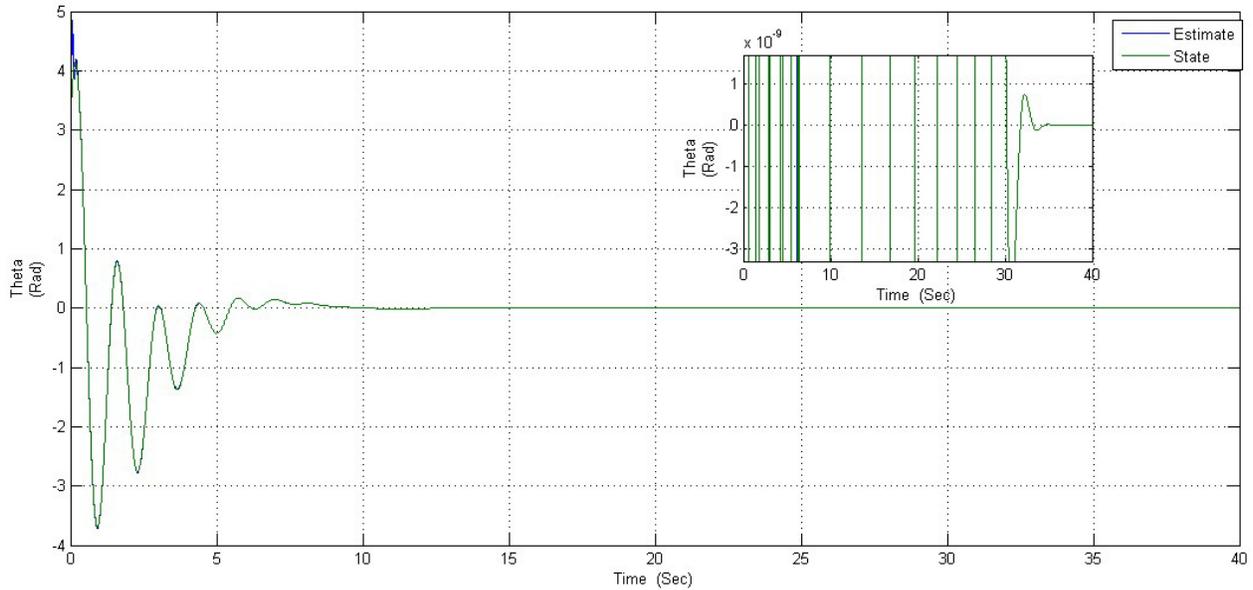


Figura 4.8: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $\theta$  actuando regulador y observador de manera simultanea

*En la figura 4.9 se observa el comportamiento de la variable  $\omega$ . Al actuar el sistema con observador y regulador de manera simultanea la trayectoria del estado que es seguida por el estimado rápidamente se acerca al estado. Con el zoom puede evidenciarse que la trayectoria estimada se acerca a la trayectoria real del sistema lográndose convergencia a cero. Así, la variable de estado y su estimado permanecen en cero.*

*En la figura 4.10 se observa el comportamiento de la variable  $i$ . Al actuar el sistema con observador y regulador de manera simultanea la trayectoria del estado que es seguida por el estimado rápidamente se acerca al estado. Con el zoom puede evidenciarse que la trayectoria estimada se acerca a la trayectoria real del sistema lográndose convergencia a cero. Así, la variable de estado y su estimado permanecen en cero.*

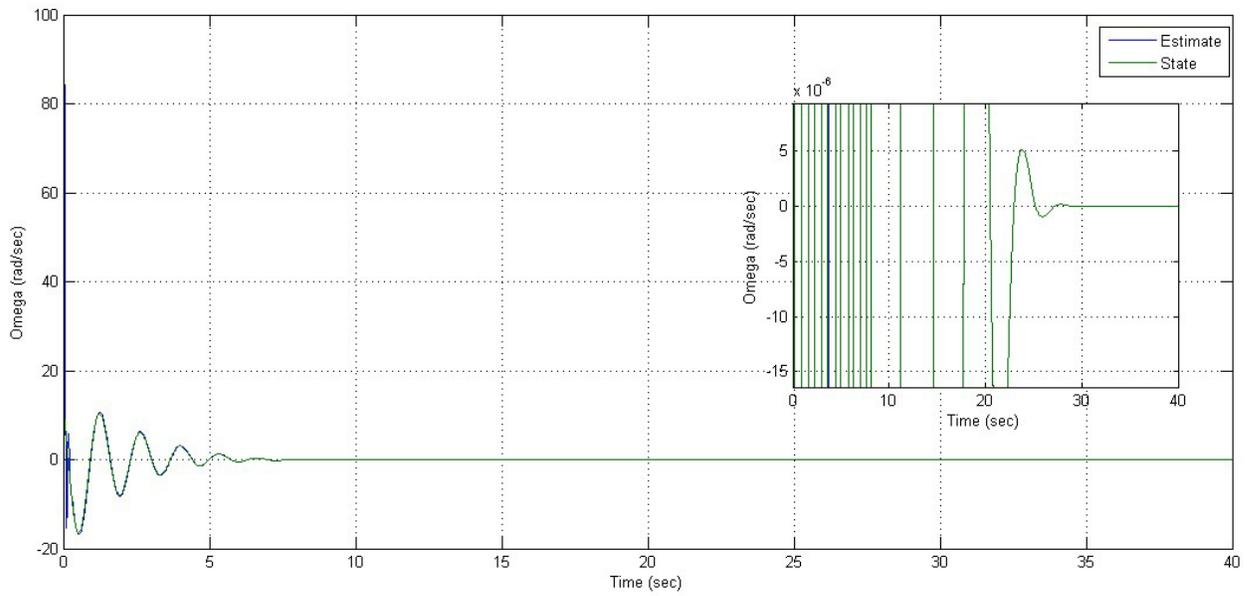


Figura 4.9: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $\omega$  actuando regulador y observador de manera simultanea

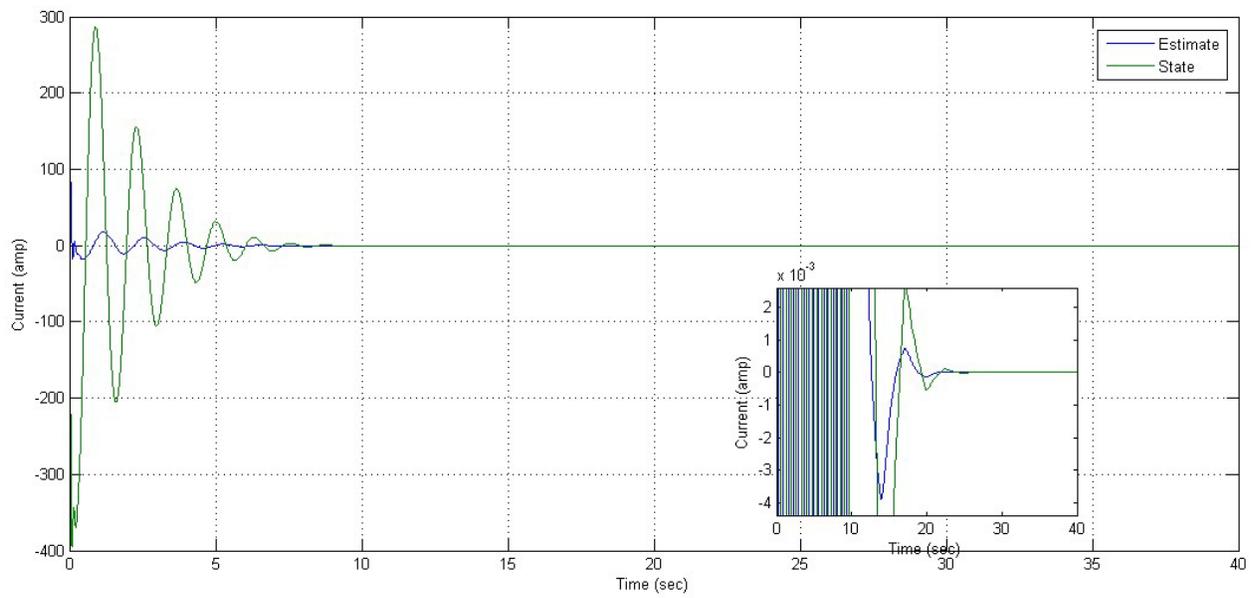


Figura 4.10: Trayectoria estimada y trayectoria real de la variable  $i$  actuando regulador y observador de manera simultanea

#### 4.1.8. Diseño de un Observador convergente por un tiempo fijo para un Péndulo invertido sobre un carro

*Un sistema de balance es un sistema mecánico en el cual el centro de masa es balanceado por encima del punto de pivote. Algunos ejemplos comunes son el transporte personal Segway® que usa una plataforma motorizada para estabilizar a una persona encima de ella. Cuando la persona se inclina hacia adelante, el modo de transporte propulsa así mismo a lo largo de la base manteniendo la posición vertical [19].*

*Un modelo de sistema de balance es el péndulo invertido sobre un carro. Estabilizar un péndulo invertido sobreamortiguado sobre un carro (un sistema subactuado), es una tarea de control que suele resolverse despreciando la fuerza de amortiguamiento para el diseño del controlador. Un primer problema consiste en llevar al péndulo desde su posición natural a la posición vertical, la forma de hacerlo es llevando el péndulo a una órbita homoclínica. Una vez tenemos el péndulo en una posición suficientemente cercana a la posición vertical, con una velocidad pequeña, se realiza un cambio de controlador no lineal a uno lineal que permite llevar el péndulo a su posición vertical [40]. El otro problema consiste en estabilizar el sistema alrededor de su equilibrio inestable, asumiendo que el péndulo es inicializado encima del plano horizontal, o reside dentro de una vecindad abierta la cual se encuentra relacionada con la región de atracción del sistema de lazo cerrado [45],[46] y [47].*

*La idea es introducir una estrategia de control y observación que estabilice el péndulo invertido sobre el carro alrededor de su punto de equilibrio inestable asumiendo que el péndulo inicia su movimiento en el semiplano superior. Inspirados por el procedimiento realizado en [19], y [40], transformamos el sistema en una cadena de integradores de cuarto orden, con una perturbación adicional.*

*El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la dinámica del péndulo sobre el carro tiene la forma*

$$\begin{aligned}\Theta\ddot{\Phi} + C\dot{\Phi} - M_1l_Sg \sin \Phi + M_1l_S\ddot{r} \cos \Phi &= 0 \\ M\ddot{r} + F_r\dot{r} + M_1l_S(\ddot{\Phi} \cos \Phi - (\dot{\Phi})^2 \sin \Phi) &= F\end{aligned}$$

*donde,  $r(t)$  representa la posición del carro sobre el eje horizontal con respecto a un punto de referencia,  $\Phi(t)$  el ángulo de rotación del péndulo,  $\dot{r}(t)$  la velocidad del carro,  $\dot{\Phi}(t)$  la velocidad angular del péndulo,  $M_0$  la masa del carro,  $M_1$  la masa del péndulo,  $F_r$  el coeficiente de fricción del carro,  $C$  el coeficiente de fricción del péndulo,  $l_S$  la longitud del*

péndulo,  $\Theta_S$  el momento de inercia del péndulo,  $F$  la fuerza aplicada al carro,  $\Theta = \Theta_S + M_1 l_S^2$ , y  $M = M_0 + M_1$ . La variable medible será la posición del carro.

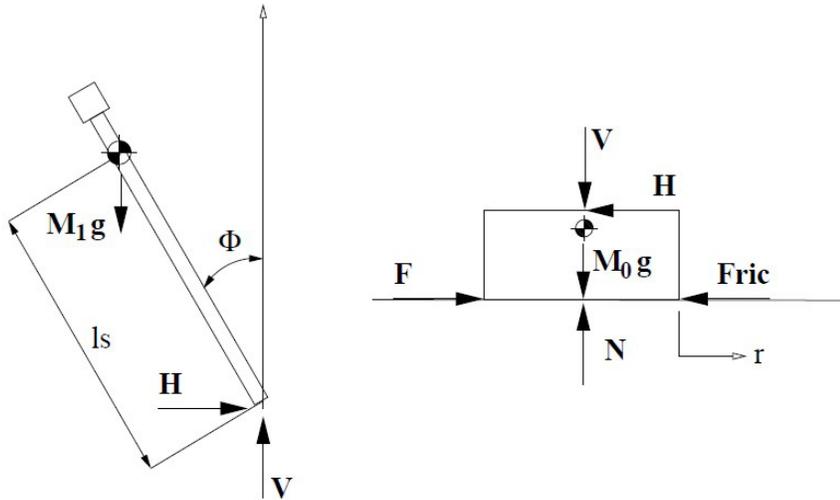


Figura 4.11: Componentes y diagrama de cuerpo libre del modelo de Péndulo invertido sobre un carro

En la tabla que se muestra a continuación se especifican los valores numéricos de los parámetros del sistema:

Parámetro	Valor	Unidades	Parámetro	Valor	Unidades
$M_0$	3.2	Kg	$N$	0.1446	Kgm
$M_1$	0.329	Kg	$N_{01}^2$	0.23315	Kg <sup>2</sup> m <sup>2</sup>
$l_S$	0.44	m	$F_r$	6.2	Kg/s
$\Theta$	0.072	Kgm <sup>2</sup>	$C$	0.009	Kgm <sup>2</sup> /s

En muchos casos el ángulo  $\theta$  puede considerarse pequeño (cercano a cero)  $\sin \theta \approx 0$ ,  $\cos \theta \approx 1$  y de hecho si  $\dot{\theta}$  es pequeño, podemos ignorar términos cuadráticos y de mayor grado en theta, sustituyendo las aproximaciones, transformamos el sistema de ecuaciones en un sistema lineal de primer orden alrededor del punto de operación representado por el equilibrio inestable  $\Phi = 0$  (posición vertical). Introducimos el vector de estado  $[r, \Phi, \dot{r}, \dot{\Phi}] = [x_1, x_2, x_3, x_4]$  y la entrada de control  $u(t) = F$ .

Mediante la transformación sugerida en [40] se lleva el sistema 4.1.8 al sistema de ecuaciones lineal de primer orden

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= 37.7328x_2(t) + 21.2341x_3(t) - 2.0510x_4(t) + u(t)
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

#### 4.1.9. La entrada de control $u(t)$

El objetivo del control es diseñar una ley de control continua convergente por un tiempo fijo, basadas en las proposiciones vistas, que lleven la salida del sistema al origen.

Para empezar con el diseño del regulador, la entrada de control es descompuesta en dos términos,

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

donde

$$u_1(t) = -37.7328x_2(t) - 21.2341x_3(t) + 2.0510x_4(t)$$

y  $u_2(t)$  por establecer y consiste de una serie de términos que garantizan la estabilidad en tiempo fijo en el origen.

como resultado, el sistema (4.1.6) es representado como una cadena de integradores con una entrada de control escalar

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= 37.7328(x_2(t) - z_2(t)) + 21.2341(x_3(t) - z_3(t)) - 2.0510(x_4(t) - z_4(t)) + u_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

## Ciclos límite en Péndulo invertido sobre un carro

Construimos observador y regulador a partir de las variables del observador tal como se hizo para el modelo del motor.

El observador es

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_1|z_1(t) - y(t)|^{\beta_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_2|z_1(t) - y(t)|^{\beta_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_3(t) &= z_4(t) - k_3|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_3} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_3|z_1(t) - y(t)|^{\beta_3} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_4(t) &= -k_4|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_4} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_4|z_1(t) - y(t)|^{\beta_4} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t))
 \end{aligned}$$

El regulador

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= -\bar{k}_1 \operatorname{sgn}(z_1)|z_1|^{\gamma_1} - \bar{k}_2 \operatorname{sgn}(z_2)|z_2|^{\gamma_2} \\
 &\quad - \bar{k}_3 \operatorname{sgn}(z_3)|z_3|^{\gamma_3} - \bar{k}_4 \operatorname{sgn}(z_4)|z_4|^{\gamma_4} \\
 &\quad - \bar{\kappa}_1 \operatorname{sgn}(z_1)|z_1|^{\delta_1} - \bar{\kappa}_2 \operatorname{sgn}(z_2)|z_2|^{\delta_2} \\
 &\quad - \bar{\kappa}_3 \operatorname{sgn}(z_3)|z_3|^{\delta_3} - \bar{\kappa}_4 \operatorname{sgn}(z_4)|z_4|^{\delta_4}
 \end{aligned}$$

y  $u_1(t)$  se transforma en

$$u_1(t) = -37.7328z_2(t) - 21.2341z_3(t) + 2.0510z_4(t)$$

Con el diseño del regulador se busca que cada uno de los sumandos que aparecen en  $\dot{x}_4(t) = 37.7328(x_2(t) - z_2(t)) + 21.2341(x_3(t) - z_3(t)) - 2.0510(x_4(t) - z_4(t))$  se conviertan en cero, de tal forma que el observador basado en el regulador actúe sobre la cadena de integradores

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= u_2(t)
\end{aligned}
\tag{4.1.8}$$

#### 4.1.10. Simulación de péndulo invertido sobre un carro

*No fue posible obtener convergencia construyendo el regulador a partir de las variables del observador.*

*La dinámica no modelada produce ciclos límites en vez de convergencia a cero del observador.*

*Debido a que el sistema original es inestable en el punto de operación, obtenemos un ciclo límite de gran amplitud (ver figura 4.12).*

*Para el caso del motor funcionó en tanto el sistema original es estable.*

*¿Qué puede hacerse al respecto?*

*Para obtener convergencia se diseña un sistema con switch en el cual los términos del regulador  $u$  se construyen así: el término  $u_1$  involucra variables del observador y  $u_2$  involucra únicamente las variables de estado.*

#### 4.1.11. Péndulo invertido sobre un carro con switch

#### 4.1.12. Diseño del Observador convergente en un tiempo fijo

*La tabla muestra los parámetros empleados en el diseño del observador*

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>	<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>
$\alpha_i$	$9/10, 8/10, 7/10, 6/10$	$k_i$	$4, 6, 4, 1$
$\beta_i$	$10/9, 11/9, 12/9, 13/9$	$K_i$	$4, 6, 4, 1$

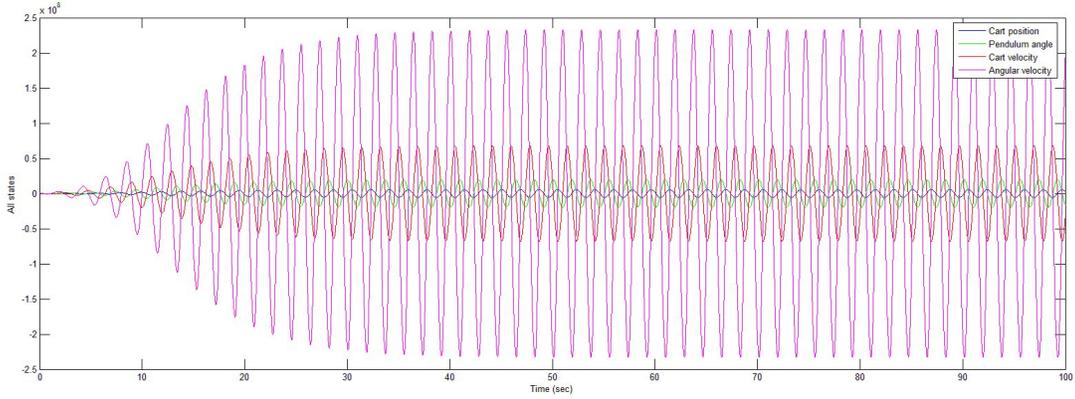


Figura 4.12: Trayectorias estimadas y trayectorias de los estados del péndulo invertido sobre un carro formando un ciclo límite de gran amplitud. Actúan regulador y observador de manera simultanea durante el tiempo estimado de convergencia del observador y el tiempo estimado de convergencia del regulador

*El observador es*

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_1|z_1(t) - y(t)|^{\beta_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_2|z_1(t) - y(t)|^{\beta_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_3(t) &= z_4(t) - k_3|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_3} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_3|z_1(t) - y(t)|^{\beta_3} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 \dot{z}_4(t) &= -k_4|z_1(t) - y(t)|^{\alpha_4} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
 &\quad - \kappa_4|z_1(t) - y(t)|^{\beta_4} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t))
 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales del observador están dadas por:  $z = (1, 1, 1, 1)$

#### 4.1.13. Diseño del regulador convergente en un tiempo fijo

La tabla muestra los parámetros empleados en el diseño del regulador

Parámetros	Valor
$\gamma_i$	19/23, 19/22, 19/21, 19/20
$\beta_i$	21/17, 21/18, 21/19, 21/20
$\bar{k}_i$	1, 4, 6, 4
$\bar{K}_i$	1, 4, 6, 4

$$\begin{aligned}
 u_2(t) = & -\bar{k}_1 \operatorname{sgn}(x_1) |x_1|^{\gamma_1} - \bar{k}_2 \operatorname{sgn}(x_2) |x_2|^{\gamma_2} \\
 & - \bar{k}_3 \operatorname{sgn}(x_3) |x_3|^{\gamma_3} - \bar{k}_4 \operatorname{sgn}(x_4) |x_4|^{\gamma_4} \\
 & - \bar{\kappa}_1 \operatorname{sgn}(x_1) |x_1|^{\delta_1} - \bar{\kappa}_2 \operatorname{sgn}(x_2) |x_2|^{\delta_2} \\
 & - \bar{\kappa}_3 \operatorname{sgn}(x_3) |x_3|^{\delta_3} - \bar{\kappa}_4 \operatorname{sgn}(x_4) |x_4|^{\delta_4}
 \end{aligned}$$

y  $u_1(t)$  se transforma en

$$u_1(t) = -37.7328z_2(t) - 21.2341z_3(t) + 2.0510z_4(t)$$

#### 4.1.14. Simulación del Péndulo con switch

El paso de simulación es fijado en  $1e-3$ . La cota superior estimada para la convergencia del observador es de 284.5 segundos y es calculada mediante la expresión dada por el teorema 3.4.1

$$T_{BBF} \leq \frac{\lambda_{\max}^{\rho}(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^{\sigma}}$$

donde  $\rho = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ ,  $\sigma = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$ ,  $r = \frac{1}{11.8670}$ ,  $r_1 = \frac{1}{11.8670}$ ,  $\Upsilon = 0.1434$ , es un número positivo,  $\lambda_{\min}(P) = 0.1434$ ,  $\lambda_{\max}(P) = 11.8670$  y las matrices

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 2.1250 & -0.5000 & -1.3750 & 0.5000 \\ -0.5000 & 1.3750 & -0.5000 & -2.1250 \\ -1.3750 & -0.5000 & 2.1250 & -0.5000 \\ 0.5000 & -2.1250 & -0.5000 & 11.3750 \end{pmatrix}$$

satisfacen las correspondientes ecuaciones de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ ,  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$  donde  $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  son matrices simétricas definidas positivas ( $Q = Q_1 = I_4$ ).

Sobre el sistema, inicialmente actúa la componente  $u_1(t)$  en términos de las variables del observador sin involucrar el componente del regulador  $u_2(t)$ . Luego para cuando el tiempo  $t$  es mayor que la cota superior estimada para la convergencia del observador actúan observador y regulador.

Note que el observador siempre está presente.

Las condiciones iniciales elegidas son  $r(0) = 100$ ,  $\Phi(0) = \pi$ ,  $\dot{r}(0) = 100$  y  $\dot{\Phi}(0) = 100$ . Aunque se verá que los valores de las condiciones iniciales no son relevantes, en tanto el observador diseñado provee convergencia global para la salida.

Dado que los valores de las variables de estado  $[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]$  no son conocidos en el tiempo de convergencia del diferenciador (284.5 segundos), ellos son asignados como los valores obtenidos de las variables del diferenciador en dicho momento

$$[z_1(284.5), z_2(284.5), z_3(284.5), z_4(284.5)]$$

En cuanto al regulador, el paso de simulación es fijado en  $1e-3$  La cota superior estimada para la convergencia del regulador es de 364.1 segundos y se obtiene a partir del teorema 2 de [8]

$$T_{BBF} \leq \frac{\lambda_{max}^p(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^\sigma}$$

donde  $\rho = (1 - \frac{19}{21})/\frac{19}{21} = \frac{2}{19}$ ,  $\sigma = (\frac{21}{19} - 1)/\frac{21}{19} = \frac{2}{21}$ ,  $r = \frac{1}{14.5629}$ ,  $r_1 = \frac{1}{14.5629}$ ,  $\Upsilon = 0.1728$ , es un número positivo,  $\lambda_{min}(P) = 0.1728$ ,  $\lambda_{max}(P) = 14.5629$  y las matrices

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 3.1250 & 4.0000 & 2.3750 & 0.5000 \\ 4.0000 & 8.3750 & 5.5000 & 1.1250 \\ 2.3750 & 5.5000 & 5.1250 & 1.0000 \\ 0.5000 & 1.1250 & 1.0000 & 0.3750 \end{pmatrix}$$

satisfacen las correspondientes ecuaciones de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ ,  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$  donde  $Q, Q_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  son matrices simétricas definidas positivas ( $Q = Q_1 = I_4$ ).

Los datos en la siguiente tabla muestran que el tiempo fijo de convergencia real está por debajo de los tiempos obtenidos por la aplicación del teorema mencionado.

Condiciones iniciales	TCVS	TCE	tasa
$(0, \pi/6, 0, 0)$	56	364.1	6.5
$(10, \pi/2, 10, 10)$	56	364.1	6.5
$(100, \pi, 100, 100)$	56	364.1	6.5
$(1000, 4\pi/3, 1000, 1000)$	56	364.1	6.5
$(10^4, 3\pi/2, 10^4, 10^4)$	57	364.1	6.4
$(10^5, 2\pi, 10^5, 10^5)$	58	364.1	6.3

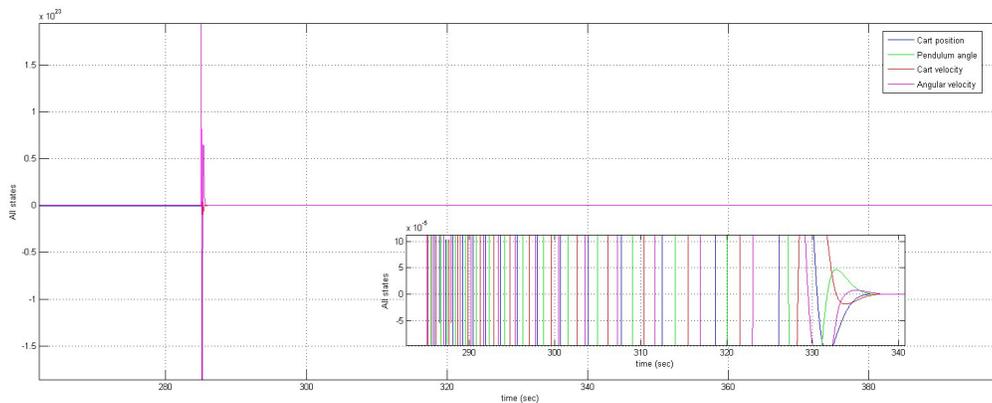


Figura 4.13: Trayectoria estimada y trayectoria real de los estados del sistema durante el tiempo de convergencia estimado del observador y el tiempo estimado de convergencia del regulador

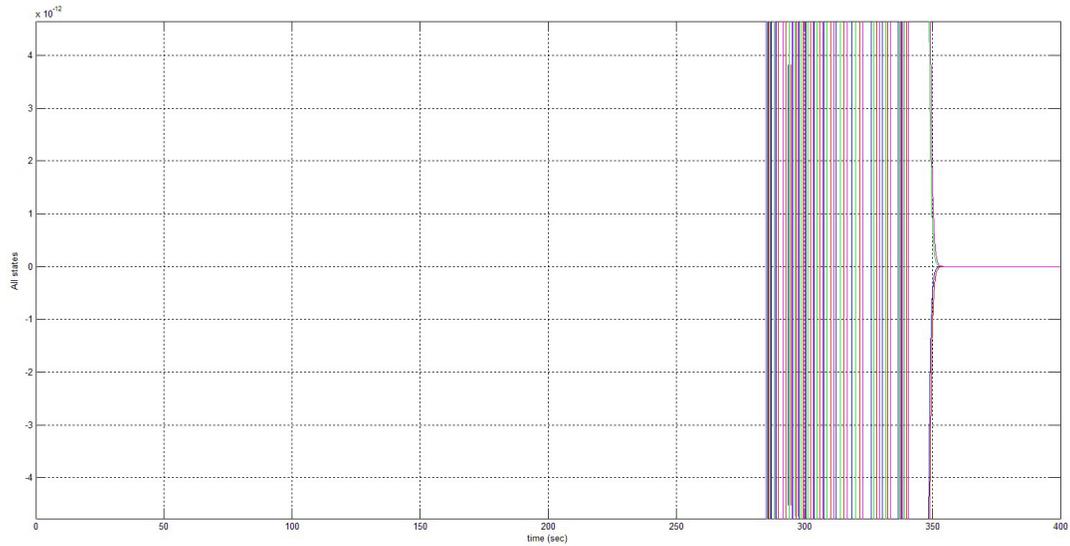


Figura 4.14: Zoom de trayectoria estimada y trayectoria real de los estados del sistema durante el tiempo de convergencia estimado del observador y el tiempo estimado de convergencia del regulador

*En la figura 4.13 se observa el comportamiento de todas las variables de estado. A partir de el tiempo de convergencia del observador actúan el sistema con observador y regulador de manera simultanea y la trayectoria del estado que es seguida por el estimado rápidamente se acercan. En el zoom de la figura 4.14 puede evidenciarse que la trayectorias estimadas se acercan a la trayectoria real del sistema en un tiempo aproximado de 57 segundos y la convergencia a cero se da a los 57 segundos, momento en el cual las variables de estado y sus estimados permanecen en cero.*

*‘The end cannot justify the means, for the simple and obvious reason that the means employed determine the nature of the ends produced.’*

*(Aldous Huxley)*

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

---

### 5.1. Conclusiones

1. *El problema de convergencia al origen por un tiempo fijo ha sido abordado proponiendo un algoritmo observador continuo para el caso escalar, cuando únicamente el estado de mayor grado relativo es medible.*
2. *Los tiempos de convergencia estimados que se obtienen, son menos conservativos y más precisos para realizar implementaciones que los existentes.*
3. *Se ha puesto a prueba el observador diseñado mediante casos de aplicación a un Motor de corriente directa y un Péndulo invertido sobre un carro. Se encuentra evidencia empírica de que si el sistema no lineal es inestable en el punto de operación no es posible estabilizarlo en tiempo finito con un regulador construido a partir de las variables estimadas. Sin embargo, se logra convergencia en tiempo fijo construyendo parte del regulador desde las variables de estado.*

### 5.2. Trabajo futuro

1. *Diseño y análisis de algoritmos para estimación de tiempos de convergencia.*
2. *Diseño e implementación del observador para sistemas perturbados.*

# Bibliografía

- [1] S. P. Bhat, and D. S. Bernstein, *Finite time stability of continuous autonomous systems*, *SIAM J. Control Optim.* 38 (3) pp. 751-766, 2000.
- [2] S. P. Bhat, and D. S. Bernstein, *Finite-time stability of homogeneous systems*, in *Proceedings of American Control Conference, Albuquerque*, pp 2513–2514, 1997.
- [3] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, *Geometric homogeneity with applications to finite-time stability*, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, Vol. 17, pp. 101-127, 2005.
- [4] E. Moulay and W. Perruquetti, *Finite-time stability and stabilization: State of the art*, in *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control (Lecture Notes in Control and Information Sciences)*, vol. 334. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [5] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi, *Homogeneous Approximation, Recursive Observer Design, and Output Feedback*, *SIAM J. Control Optimization*, vol. 47, no. 4, pp. 1814–1850, 2008.
- [6] A. Polyakov, *Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems*, *IEEE Trans. Autom. Control* 57 (99) pp. 2106-2110, 2012.
- [7] M. Basin, C. B. Panathula, and Y. Shtessel, *Continuous second-order sliding mode control: convergence time estimation*, in *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5408–5413, Osaka, Japan, 2015.
- [8] M. Basin, Y. Shtessel, and F. Aldukali, *Continuous finite- and fixed-time regulators*, in *Proceedings of the 14th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 120–125, 2016.
- [9] A. Polyakov and L. Fridman, *Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems*, *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 351, pp. 1831-1865, 2014.
- [10] A. Levant, *Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control*, *International Journal of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.

- [11] A. Levant, *Robust exact differentiation via sliding mode technique*, *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379 – 384, 1998.
- [12] A. Levant, *Higher-order sliding modes, differentiation and outputfeedback control*, *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [13] A. Polyakov and A. Poznyak, *Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: Twisting controller for second-order sliding mode realization*, *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 444 – 448, 2009.
- [14] A. Polyakov and A. Poznyak, “Reaching time estimation for supertwisting second order sliding mode controller via Lyapunov function designing,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, pp. 1951– 1955, 2009.
- [15] J. A. Moreno, *Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms*, in *Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century* (L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte, eds.), vol. 412 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 113–149, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [16] J. Moreno and M. Osorio, *Strict Lyapunov functions for the supertwisting algorithm*, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 57, pp. 1035–1040, 2012.
- [17] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, 2014.
- [18] D. Luenberger, *An introduction to the observers*, *IEEE Transactions on Automatica Control*, vol. 16, no. 6, pp. 596–602, 1971.
- [19] K. J. Astrom and R. M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA. 2008.
- [20] W. Perruquetti, T. Floquet, and P. Borne, *A note on sliding observer and controller for generalized canonical forms*, in *Proc. IEEE Conf. Decis. Control, Tampa, FL*, pp. 1920-1925, 1998.
- [21] M. Fliess, F. Messenger, *Sur la Commande en Regime Glissant*, *C.R. Academie des Sciences de Paris*, t.313, Serie I, pp. 951-956, 1992.
- [22] W. Perruquetti, T. Floquet, and E. Moulay, *Finite-time observers: applications to secure communication*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 53, pp. 356-360, 2008.
- [23] E. Cruz-Zavala, J. Moreno and L. Fridman, *Uniform robust exact differentiator*, *IEEE Trans. Autom. Control* 56 (11) 2727-2733, 2011.
- [24] R. Hermann and A. J. Krener, *Nonlinear controllability and observability*, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-22, no. 5, pp. 728–740, Oct. 1977.

- [25] A. J. Krener and A. Isidori, *Linearization by output injection and nonlinear observers*, *Systems and Control Letters*, vol. 3, pp. 47–52, 1983.
- [26] A. J. Krener and W. Respondek, *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 23, pp. 197–216, 1985.
- [27] X. H. Xia and W. B. Gao, *Nonlinear observer design by observer error linearization*, *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 27, pp. 199–216, 1989.
- [28] M. Fliess, *Generalized controller canonical form for linear and nonlinear dynamics*, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 9, pp. 994–1001, Sep 1990.
- [29] G. Zheng, D. Efimov and W. Perruquetti, *Finite-time observer for the output depending observer form in 53rd IEEE Conference on Decision and Control December 15-17. Los Angeles, California, USA pp 1626-1630, 2014.*
- [30] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., *Pure and Applied Mathematics XXI*, Krieger, Malabar, FL, 1980.
- [31] N. P. Bhatia and O. Hajek, *Local Semi-Dynamical Systems*, *Lecture Notes in Math. 90*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [32] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, *Math. Appl.*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1988.
- [33] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, London, 2001
- [34] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, *Lyapunov analysis of finite-time differential equations*. In: *Proceedings American control conference, Seattle, pp 1831–1832, 1995*
- [35] S. V. Drakunov and V. I. Utkin, *Sliding mode observers tutorial*, in *Proc. 34th IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 3376–3378, 1995.
- [36] W. Perruquetti, T. Floquet, and P. Borne, *A note on sliding observer and controller for generalized canonical forms*, in *Proc. IEEE Conf. Decis. Control, Tampa, FL, 1998*, pp. 1920–1925.
- [37] J. R. Munkres, *Topology: A first course*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1975
- [38] L. Rosier, *Homogeneous Lyapunov Function for Homogeneous Continuous Vector Field*, *Systems and Control Letters*, 19, pp. 467–473, 1995.
- [39] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*. Pearson, 12 ed., 2011.
- [40] S. Ding, *Model-Based Fault Diagnosis Techniques Design Schemes, Algorithms and Tools, Second Edition, Advances in Industrial Control ISBN 978-1-4471-4798-5, Springer-Verlag London, 2013*

- [41] W. Perruquetti and T. Floquet, *Homogeneous finite time observer for nonlinear systems with linearizable error dynamics in Proc. 46th IEEE Conf. Decis. Control, New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, pp. 390-395, 2007.*
- [42] T. Floquet and J. P. Barbot, *Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. International Journal of Systems Science 38(10), pp. 803-815, 2007*
- [43] E. Bernuau, W. Perruquetti, D. Efimov and E. Moulay *Finite-time output stabilization of the double integrator in 51st IEEE Conference on Decision and Control December 10-13, Maui, Hawaii, USA pp 5906-5911, 2012.*
- [44] E. Bernuau, D. Efimov, E. Moulay and W. Perruquetti, *Homogeneous continuous finite-time observer for the triple integrator in European Control Conference (ECC) July 15-17, Linz, Austria pp. 903-908, 2015.*
- [45] J. K. Roberge, *The Mechanical Seal, Bachelor's thesis. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1960.*
- [46] J. Schaffer and R. Cannon, *On the control of unstable mechanical systems, in Automatic and Remote Control III: Proceedings of the Third Congress of the International Federation of Automatic Control, 1966.*
- [47] K. Yoshida, *Swing-up control of an inverted pendulum by energy-based methods, in Proceedings of the 1999 American Control Conference., vol. 6, pp. 4045-4047, 1999.*