

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**HADRONES EN LA MATERIA NUCLEAR A  
TEMPERATURA FINITA**

**POR**

**ADRIÁN JACOB GARZA AGUIRRE**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO  
DE DOCTOR EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN  
FÍSICA INDUSTRIAL**

**OCTUBRE, 2017**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**HADRONES EN LA MATERIA NUCLEAR A  
TEMPERATURA FINITA**

**POR**

**ADRIÁN JACOB GARZA AGUIRRE**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO  
DE DOCTOR EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN  
FÍSICA INDUSTRIAL**

**OCTUBRE, 2017**

## Miembros del Comité

---

Presidente - Dr. José Rubén Morones Ibarra

---

Secretario - Dr. Francisco Vicente Flores Báez

---

Primer Vocal- Dr. Edgar Martínez Guerra

---

Segundo Vocal- Dr. Javier Fco. Almaguer Martínez

---

Tercer Vocal- Dr. Max Salvador Hernández

## Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo de mi asesor el Dr. Jose Ruben Morones Ibarra, me gustaría darle las gracias por su ayuda y apoyo durante todo el posgrado, agradezco al Dr. Francisco Flores al igual que a mis padres por su gran apoyo y ayuda, tambien es importante mencionar el gran apoyo que me dio el Conacyt durante todo el posgrado.

# Indice

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2 Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>6</b>
2.1 El Campo y la Ecuación Escalar de Klein-Gordon . . . . .	9
2.2 Obtención del Campo de Klein Gordon (Funciones de Green) . . . . .	10
2.3 Campo de Dirac . . . . .	12
2.4 El Oscilador Armónico Cuántico . . . . .	13
2.5 La Segunda Cuantización . . . . .	14
2.5.1 Relaciones de Conmutación a Tiempos Iguales . . . . .	15
2.5.2 Segunda Cuantización del Campo de Klein-Gordon . . . . .	15
2.5.3 Segunda Cuantización del Campo de Dirac . . . . .	16
<b>3 Teoría de Perturbaciones</b>	<b>18</b>
3.1 El Operador de Evolución Temporal . . . . .	20
3.2 La Matriz de Dispersión S . . . . .	22
3.3 Ordenamiento Normal y Temporal . . . . .	22
<b>4 Formalismo de Tiempo Imaginario y Mecánica Estadística</b>	<b>25</b>
4.1 Rotación de Wick . . . . .	27
4.2 Bosones y Fermiones . . . . .	30
4.3 El Propagador de la Teoría $\lambda\phi^4$ . . . . .	31
4.4 Termino Tipo Tadpole Nivel a Un Loop . . . . .	33
4.5 Regularizacion Dimensional . . . . .	34
4.6 Termino de Polarización Nivel a Un Loop . . . . .	35
<b>5 Teoría Quiral en Hadrones</b>	<b>37</b>
5.1 Simetría Quiral . . . . .	41
5.1.1 Campos de Quarks Izquierdos y Derechos . . . . .	42
5.2 Teorema de Noether . . . . .	42
5.3 Lagrangiano Efectiva de Orden Más Bajo . . . . .	43
5.4 Relación Gellmann-Okubo . . . . .	45
5.5 Teoría Quiral de Perturbaciones . . . . .	47
5.6 Rompimiento de la Simetría . . . . .	48

<b>6</b>	<b>El Modelo Sigma Lineal</b>	<b>51</b>
6.1	El Modelo Sigma Lineal . . . . .	53
6.2	Rompimiento Espontaneo de la simetría . . . . .	53
6.2.1	Rompimiento Explicito de la Simetría . . . . .	53
6.3	Método de Resumación . . . . .	54
6.3.1	Condiciones de Optimizacion . . . . .	55
6.3.2	Condición de Convergencia Aparente más Rápida . . . . .	56
6.4	Discusión . . . . .	58
6.5	Conclusión . . . . .	61
6.6	Apéndice . . . . .	62
6.6.1	Función Espectral del Sigma . . . . .	62
6.6.2	pico de la función espectral Localizado de la Función Espectral	64
6.6.3	Las Autoenergias del Pion y Sigma . . . . .	66
6.6.4	Sumas de Matsubara . . . . .	68
6.6.5	Trabajo Publicado . . . . .	70
<b>7</b>	<b>El Modelo Nambu-Jona-Lassino</b>	<b>73</b>
7.1	El Modelo NJL (Bosonización y la Expansión de Campo Medio) . . .	74
7.2	Mass Gap in the NJL Model . . . . .	75
7.3	Parametros . . . . .	76
7.4	El Comportamiento del Condensado . . . . .	77
7.5	Comportamiento Termodinámico del $\pi$ y el $\sigma$ . . . . .	77
7.6	Función Espectral . . . . .	79
7.7	Discusión . . . . .	81
7.8	Conclusión . . . . .	81

## *Abstract*

En este trabajo se estudia los cambios de la masa y la anchura del mesón sigma en el marco del modelo Sigma lineal a temperatura finita, en la aproximación de un solo loop. Encontramos que a medida que aumenta la temperatura, la masa del sigma decrece. También se analizó la función espectral y observamos un incremento en el umbral generado en el punto crítico de Temperatura el cual consideramos que es una firma de la restauración parcial de simetría quiral, también puede interpretarse como una tendencia a la transición de fase quiral. Además, se estudió la anchura del meson sigma en el momento en el que el incremento del umbral se lleva a cabo, esto para diferentes valores posibles de la masa del sigma. Encontramos que hay una breve ampliación seguido de una caída abrupta en el ancho del sigma a medida que la temperatura aumenta, lo que también está relacionado con la restauración de la simetría quiral y es una indicación de que el sigma podría ser un estado ligado de dos piones.

# 1. *Introducción*

En este trabajo se investiga la física mesónica en el medio nuclear y a temperatura diferente de cero, esto con el fin de estudiar algunos aspectos de la materia nuclear que esta descrita por hadrones, los cuales son afectados en gran medida por la interacción fuerte. Esta interacción influye de manera particular a los hadrones ya que contiene fenómenos exclusivos que las otras interacciones que se estudian en el modelo estándar no tienen, por lo que se ha dedicado un gran esfuerzo al entendimiento de las propiedades o fenómenos que esta interacción presenta bajo diversas condiciones. La materia nuclear presenta propiedades como el confinamiento y la libertad asintótica las cuales son fenómenos exclusivos que estudia la teoría fundamental de la interacción fuerte, esta se conoce como QCD (cromodinámica cuántica) la cual es una teoría de norma o gauge no abeliana basada en un grupo de simetría local llamado  $SU(3)$  que consiste de partículas llamadas quarks, mientras que los mediadores de su fuerza son los gluones.

Es importante mencionar que la Cromodinámica Cuántica perturbativa falla a energías menores de 1GeV, por lo que para estudiar fenómenos de QCD que ocurren a energías menores a el limite mencionado es necesario realizar cálculos con modelos alternos como lo son la teoría de norma en el lattice o las teorías de campos efectivas. Algunos de los principales modelos efectivos los cuales producen resultados correctos son Hadrodinamica Cuantica(QHD), el modelo Nambu-Jona-Lassino (NJL), el modelo Sigma Lineal, la Teoría Quiral de Perturbaciones, entre otras.

Por otro lado en el mundo real resulta indispensable realizar cálculos incorporando las propiedades mecánico-estadísticas de Temperatura y potencial químico, debido a que los sistemas cuánticos presentan cambios de fases los cuales son de mucha importancia en el estudio de estrellas y la cosmología en general. Para estudiar estos fenómenos existe en la física teórica, la teoría cuántica de campo térmico también conocida como la teoría del campo a temperatura finita la cual consiste de un conjunto de métodos para calcular los valores esperados de observables físicos de una teoría cuántica de campos tomando en cuenta la propiedades termodinámicas.

En los últimos años el estudio de la física se ha enfocado a la búsqueda de los cambios de fase en materia nuclear y se están realizando experimentos en LHC así como en RHIC para el estudio de la transición al plasma de quarks y gluones, esta fase existe a extremadamente alta temperatura, densidad, o ambos. Las partículas de quarks y gluones elementales emergen como chorros de hadrones durante procesos muy energeticos, como cuando un quark en un protón es golpeado por otro quark muy rápido (en un impacto de protones) durante un experimento de algún acelerador de partículas. Esta fase consiste de quarks y gluones asintóticamente libres,

que se considera uno de los bloques básicos de la construcción de la materia y se cree que hasta pocos milisegundos después del Big Bang, el Universo se encontraba en un estado de plasma quark-gluón .

La principal contribución de este trabajo corresponde a la determinación de la variación de las masas del mesón escalar sigma y de los piones como función de la temperatura, así como también el análisis del comportamiento del condensado. Estos resultados aparecen en el capítulo 6 de esta tesis. Los resultados de este trabajo fueron publicados en el International Journal of Modern Physics.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: primero una breve introducción a la teoría cuántica de campos y la teoría de perturbaciones ya que estas son las herramientas principales para realizar cálculos en el modelo estándar de partículas, posteriormente presento la metodología de la teoría cuántica de campo térmico y su aplicación al estudio del mesón sigma a temperatura finita mediante el uso del LSM y el modelo NJL. En este trabajo se utiliza la notación covariante relativista, además se aplica la simplificación con unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ) .

## 2. *Teoría Cuántica de Campos*

La Teoría Cuántica de Campos o QFT(Quantum Field Theory) por sus siglas en ingles es considerada la herramienta fundamental para el análisis de partículas cuántico-relativistas, esta consiste de la unión entre la teoría cuántica y la teoría de campos , esta unión nos da un enfoque adecuado para explicar los fenómenos fundamentales de la materia. Un elemento importante en la teoría cuántica de campos en problemas fundamentales es la teoría de la relatividad especial de Einstein. Con respecto a esta cabe destacar que antes del año 1928 existían intentos que buscaban unificar la teoría de relatividad y la mecánica cuántica la cual podía describir efectivamente problemas atómicos, entre estos intentos se encontraba la ecuación de Klein–Gordon, sin embargo no fue hasta que Dirac propuso la ecuación que lleva su nombre que se logró la unificación gracias a la reinterpretación de los estados cuánticos de spin emergentes así como la predicción y posterior descubrimiento del positrón. Por otro lado mientras Dirac cuantizo el campo electromagnético en 1927, Heisenberg junto con Born y Jordan construyeron la teoría expresada en forma de una cadena infinita de osciladores cuánticos, los cuales se obtienen al introducir operadores de creación y aniquilación en un espacio de Fock, este espacio forma la base teórica para el campo cuántico. Además durante la década de los 50 se logró consolidar la electrodinámica cuántica, que proporcionó un sistema satisfactorio para explicar lo medido experimentalmente en procesos electromagnéticos a un nivel de física cuántica relativista. Posteriormente se logró incluir las interacciones fuerte y débil al sistema que se conoce como el modelo estándar de partículas.

La teoría cuántica de campos propone nuevos conceptos como la polarización del vacío o la mencionada antimateria, pero quizá lo más novedoso consiste en reinterpretar el debate de partículas/onda con la realización de que más bien son excitaciones en los campos cuánticos que permean el universo. Esta teoría ha tenido un efecto tremendamente positivo en nuestro entendimiento de la materia y el espacio, por ejemplo la electrodinámica cuántica una de las teorías que forman la QFT predice el fenómeno de corrimiento de lamb que postula un cambio detectable en los niveles de energía del hidrogeno así como los momentos magnéticos anómalos del electrón y el muon, estos fueron detectados con un alto grado de precisión comparado con lo predicho por la teoría.

En la física el comportamiento dinámico de una partícula, o más precisamente, un punto de masa en la mecánica clásica, se puede deducir de la ecuación movimiento de Lagrange. Tomando en cuenta lo anterior y considerando que todas la teorías de la física se sustentan con herramientas matemáticas particulares y necesarias, partiremos del Lagrangiano de la teoría clásica [1] para después hacer la conexión

con la teoría de campos, por lo que el lagrangiano se define como

$$L = L(q_i, \dot{q}_i), \quad (2.1)$$

donde  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  son las coordenadas y momentos generalizados respectivamente. Por otro lado la acción está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (2.2)$$

donde el diferencial de  $t_1$  y  $t_2$  es el tiempo transcurrido y las ecuaciones obtenidas son las ecuaciones de Euler-Lagrange ec.2.3

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.3)$$

las cuales se obtienen aplicando el principio de mínima acción (mostrado a continuación) a la ecuación 2.2

$$\delta S = 0. \quad (2.4)$$

Ahora tomemos los campos en cada punto en el espacio como las variables dinámicas para cuantificar estos directamente. Este enfoque generaliza la mecánica clásica de un sistema de partículas, y su cuantización, a un sistema continuo, es decir, a los campos. Este formalismo proporciona un procedimiento de cuantización sistemático para cualquier teoría clásica de campos derivable de un Lagrangiano. En la teoría de campos el Lagrangiano pasa a ser una densidad Lagrangiana [2]. Entonces partimos de una densidad de Lagrange que depende de los campos y de sus momentos mostrada en la ec.2.5 para posteriormente obtener las ecuaciones de campo mediante el principio de mínima acción antes mencionado.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}) \quad (2.5)$$

Por otro lado la acción está dada por,

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}) \quad (2.6)$$

donde se puede observar que donde se tenían las coordenadas generalizadas  $q_i$  ahora se tiene el objeto  $\phi_i$  que son conocidos como los campos. Por otro lado se tiene un espacio-tiempo de cuatro dimensiones que debe ser no sólo homogénea en virtud de translaciones sino también isotrópico con respecto a las rotaciones, por lo tanto, es necesaria la que la acción de Lorentz sea invariante bajo ciertas transformaciones. Estas transformaciones de Lorentz incluyen rotaciones en tres dimensiones ordinarias del espacio, así como las transformaciones de velocidad (boost de Lorentz) que pueden ser vistos como rotaciones en Hiperplanos espaciotemporales mixtos en el espacio de Minkowski donde el tensor métrico de Minkowski está representado por la matriz siguiente

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Usando la matriz anterior podemos escribir la métrica de Minkowski en función de las coordenadas  $x^\nu$

$$x^\nu = (-x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.7)$$

y tenemos que la metrica nos da

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.8)$$

donde los 4-vector  $x^\nu$  se transforman de la siguiente manera

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.9)$$

y el diferencial del espacio se transforma de la siguiente manera,

$$d^4x' = \mathcal{J}d^4x = \mathcal{J}\left(\frac{x'}{x}\right)d^4x \quad (2.10)$$

donde Jacobiano de la transformación está dado por ,

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^a} = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^a} \quad (2.11)$$

$$|\mathcal{J}| = |\Lambda^\mu_a| = \pm 1 = 1 \quad (2.12)$$

Por otro lado el Lagrangiano debe ser invariante (es decir un escalar de Lorentz)[2] y debe depender solamente de los campos que podemos observar en la ecuación 2.5, además en la teoría clásica se establece el principio de mínima de acción dado por 2.4.

En la frontera de la superficie  $\Omega$  que limita el volumen de integración tenemos,

$$\delta\phi^i = 0 \quad (2.13)$$

$$\delta\phi^i(x) = \phi'^i(x) - \phi^i(x) \quad (2.14)$$

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi'^i, \frac{\partial\phi'^i}{\partial\dot{\phi}_i}) - \mathcal{L}(\phi^i, \frac{\partial\phi}{\partial\dot{\phi}_i}) \quad (2.15)$$

La configuración de campo físico en el volumen de espacio-tiempo es tal que la acción  $S$  permanece invariante ante pequeñas variaciones en los campos de las condiciones de contorno fijo [2]. El cálculo de la variación de la acción produce las ecuaciones de Euler- Lagrange de movimiento para los campos que se muestra a continuación

$$\delta S = \int_{\Omega} (\mathcal{L}' - \mathcal{L})d^4x = \int_{\Omega} (\mathcal{L}'(\phi^i - \delta\phi^i, \phi^i_{,\mu} - \delta\phi^i_{,\mu}) - \mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu}))d^4x = 0 \quad (2.16)$$

Desarrollando por serie de Taylor obtenemos,

$$\delta S = \int (\mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu}) + \frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu})}{\partial\phi_i} \delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu})}{\partial\phi^i_{,\mu}} \delta\phi^i_{,\mu} - \mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu}))d^4x = 0 \quad (2.17)$$

Pero se tiene que

$$\delta\phi^i_{,\mu} = \phi'^i_{,\mu} - \phi^i_{,\mu} = \partial_\mu(\phi'^i - \phi^i) = \partial_\mu\delta\phi^i \quad (2.18)$$

Entonces realizamos la integración por partes para obtener

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu})}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu})}{\partial\phi^i_{,\mu}} \right) \right) \delta\phi^i d^4x - \int_{\Omega} \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu})}{\partial\phi^i_{,\mu}} \delta\phi^i \right) d^4x = 0 \quad (2.19)$$

En la última integral se puede realizar usando el teorema de la divergencia de Gauss, pero si tomamos en cuenta que  $\delta\phi^i = 0$  en  $\partial\Omega$  la integral es cero

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^i, \phi_{,\mu}^i)}{\partial \phi_{,\mu}^i} \delta\phi^i \right) d^4x = 0 \quad (2.20)$$

tomando en cuenta la relación anterior obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange para un campo .

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^i, \phi_{,\mu}^i)}{\partial \phi^i} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^i, \phi_{,\mu}^i)}{\partial \phi_{,\mu}^i} \right) = 0 \quad (2.21)$$

## 2.1 El Campo y la Ecuación Escalar de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon, como una ecuación de una sola partícula, tenía en su infancia dificultades por la aparición de soluciones de energía negativa además de que su corriente  $j^{\mu}$  definida no daba una densidad de probabilidad  $\rho$  positiva, como la ecuación de Schrödinger. Por estas razones, había que abandonar la interpretación de la ecuación de Klein-Gordon como una ecuación de una sola partícula (históricamente, este fue el motivo que llevó a Dirac a su ecuación). Por lo antes mencionado los físicos se preguntaban si se podía dar algún sentido físico a la ecuación de Klein-Gordon, después de todo, existen partículas spin 0 escalares como  $(\pi, K, \text{etc})$  por lo que, sin duda, tiene que haber alguna interpretación física de la ecuación. Poco después con el descubrimiento del positrón por Carl David Anderson surgió la reinterpretación de que los estados de energía negativos en realidad explicaban la existencia de la antimateria por lo que el problema de la energía negativa quedaba resuelto.

Empezaremos por tratar la ecuación como un campo clásico, como lo hicimos en la sección pasada. Tendremos entonces que tomar en serio el hecho de que  $\phi(x)$  es un campo cuántico mediante el reconocimiento de que se trata como un operador que está sujeto a varias relaciones de conmutación análogas a las de la mecánica cuántica ordinaria. Este proceso es a menudo denominada "segunda cuantización" y será explicado más adelante en este capítulo.

Para la teoría de Klein Gordon la Lagrangiana está dada por,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m^2 \phi^2) \quad (2.22)$$

donde  $m$  es la masa del campo  $\phi$  y su ecuación de movimiento se obtiene usando la ecuación 2.21 de la siguiente manera ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} = -m^2 \phi \quad (2.23)$$

una vez que ya tenemos el primer término nos enfocamos en el segundo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \phi_{,\mu}^i} \partial_{\alpha} \phi \partial^{\alpha} \phi \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \partial_{\alpha} \phi}{\partial \phi_{,\mu}^i} \partial^{\alpha} \phi + \partial_{\alpha} \phi \frac{\partial \partial^{\alpha} \phi}{\partial \phi_{,\mu}^i} \right) = \partial_{\alpha} \phi \quad (2.25)$$

Usando el resultado anterior tenemos,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^i} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi \quad (2.26)$$

lo que nos permite llegar a la ecuación de Klein Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (2.27)$$

Por otro lado en mecánica el momento conjugado es una magnitud asociada a las coordenadas del espacio de configuración, ligada de manera especial a las coordenadas. La noción aparece tanto en la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana de sistemas de partículas así como en la teoría clásica de campos e incluso en la mecánica cuántica. En la mecánica Lagrangiana el momento está dado por,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} = \pi \quad (2.28)$$

el Hamiltoniano es una de las cantidades más importantes en la mecánica , para encontrarlo usamos la transformación de Legendre dada por la siguiente relación,

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \dot{\phi}^i - \mathcal{L} \quad (2.29)$$

Entonces con lo anterior podemos encontrar el Hamiltoniano de Klein Gordon mostrado a continuación

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \partial_\alpha \phi}{\partial \dot{\phi}_{,0}^i} \partial^\alpha \phi + \partial_\alpha \phi \frac{\partial \partial^\alpha \phi}{\partial \dot{\phi}_{,0}^i} \right) = \partial_\alpha \phi \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{2} (\delta_\alpha^0 \partial^\alpha \phi + \partial_\alpha \phi \delta_0^\alpha) = \partial_0 \phi = \dot{\phi} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} \dot{\phi}^i - \mathcal{L} = -\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.32)$$

## 2.2 Obtención del Campo de Klein Gordon (Funciones de Green)

Empezamos proponiendo como solución a la ecuación de Klein Gordon la siguiente expresión,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} \quad (2.33)$$

$$\delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{-ik(x-x')} dk \quad (2.34)$$

Sustituyendo la ec.2.33 en la ecuación de Klein Gordon obtenemos,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k ((-ik_\mu)(-ik^\mu) + m^2) \tilde{\phi} e^{-ikx} = 0 \quad (2.35)$$

Enfocándonos en el integrando se tiene

$$(-k_\mu k^\mu + m^2)\tilde{\phi}(k) = 0 \quad (2.36)$$

$$(-k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2) = 0 \quad (2.37)$$

Usando  $k_0^2 \rightarrow \omega_k^2$  obtenemos

$$\vec{k}^2 + m^2 = \omega_k^2 \quad (2.38)$$

Donde la raíces para  $\omega_k^2$  están dadas por

$$\omega_k = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (2.39)$$

esto nos dice que las raíces de la energía pueden ser positivas o negativas , que se interpreta como energía de las partículas y las antipartículas. Por otro lado la solución de ec.2.38 se puede escribir usando la función  $\delta(-k^2 + m^2)$  , de la siguiente manera,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(-k^2 + m^2) f(k) e^{-ikx} d^4k \quad (2.40)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} dk_0 \delta(k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) f(k) e^{-ikx} \quad (2.41)$$

Usando la relacion siguiente  $k_0 \rightarrow \pm\omega_k$

$$\int dk_0 \delta(k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) \rightarrow \int dk_0 \left( \frac{\delta(k_0^2 - \omega_k^2)}{2\omega_k} + \frac{\delta(k_0^2 - \omega_k^2)}{2\omega_k} \right) \quad (2.42)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} (f(\omega_k, \vec{k}) e^{-ik_0 \cdot x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + f(-\omega_k, \vec{k}) e^{ik_0 \cdot x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \quad (2.43)$$

Tomemos  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  en la segunda integral para obtener:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} f(\omega_k, \vec{k}) e^{-ik_0 \cdot x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int -d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} f(-\omega_k, -\vec{k}) e^{ik_0 \cdot x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Separando la solución en dos partes llegamos a la solución siguiente,

$$\phi(x) = \phi(x)^+ + \phi(x)^- \quad (2.45)$$

Donde

$$\phi(x)^+ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} f(\omega_k, \vec{k}) e^{-ik \cdot x} \quad (2.46)$$

$$\phi(x)^- = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} f(-\omega_k, -\vec{k}) e^{ik \cdot x} \quad (2.47)$$

Si imponemos la condición  $\phi(x) = \phi(x)^\dagger$  en ec.2.45,

$$\begin{aligned} \phi(x)^\dagger &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} f(\omega_k, \vec{k})^\dagger e^{ik \cdot x} + \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int -d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_k} f(-\omega_k, -\vec{k})^\dagger e^{-ik \cdot x} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Entonces las funciones  $f$  tienen las siguientes propiedades

$$f(\omega_k, \vec{k})^\dagger = f(-\omega_k, -\vec{k}) \quad (2.49)$$

$$f(-\omega_k, -\vec{k})^\dagger = f(\omega_k, \vec{k}) \quad (2.50)$$

## 2.3 Campo de Dirac

La ecuación de Dirac es una ecuación de onda relativista derivada por el físico británico Paul Dirac en 1928. En su forma libre describe todas las partículas masivas de spin 1/2 tales como electrones y protones. Dirac mientras buscaba una ecuación óptima para estas partículas decidió aplicar un enfoque utilizando un camino característicamente directo[3], esto con el fin de obtener una densidad de probabilidad definida positiva  $\rho > 0$ , por lo que se requiere un Hamiltoniano que también sea lineal en las derivadas espaciales (igualdad de coordenadas espaciales y temporales). Por lo tanto, la ecuación deseada tenía que ser de la forma siguiente

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [-i(\alpha_1\frac{\partial}{\partial^1x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial^2x} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial^3x}) + \beta m]\psi = (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)\psi \quad (2.51)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  tienen los siguientes términos de conmutación

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_j = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.52)$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad \text{con } j, i = 1, 2, 3 \quad \text{donde } i \neq j \quad (2.53)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad (2.54)$$

Para que estas matrices satisfagan las relaciones anteriores los valores de las mismas son,

$$\alpha_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

por otro lado si usamos la notación covariante relativista, el Lagrangiano de Dirac para partículas de spin  $\frac{1}{2}$  con la simplificación ( $\hbar = c = 1$ ) se escribe de la siguiente manera,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad , \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \quad (2.56)$$

donde las cuatro matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , satisfacen el siguiente algebra

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.57)$$

Usando el lagrangiano 2.21 llegamos a la ecuación covariante de Dirac.

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.58)$$

La ecuación implicaba también la existencia de una nueva forma de materia, la anti-materia, previamente insospechada y no observada y que fue confirmada experimentalmente varios años después. También proporcionó una justificación teórica para la introducción de varias funciones de onda componentes en la teoría fenomenológica de Pauli del spin. Las funciones de onda en la teoría de Dirac son vectores de cuatro números complejos (conocidos como bispinores), dos de los cuales se asemejan a la función de onda de Pauli en el límite no relativista, en contraste con la ecuación de Schrödinger que describe las funciones de onda de un solo valor complejo.

## 2.4 El Oscilador Armónico Cuántico

El sistema del oscilador armónico cuántico es de suma importancia para la teoría cuántica de campos ya que este nos ayuda a representar partículas y antipartículas mediante el uso de operadores de creación y aniquilación[4]. Los operadores inyectan las características en la teoría, las propiedades matemáticas necesarias para su uso correcto en las subsecuentes herramientas como lo es la teoría de perturbación. Veamos brevemente la teoría cuántica del oscilador armónico, ya que está estrechamente relacionado con el formalismo de la cuantización de los campos. El Hamiltoniano de un oscilador unidimensional de masa  $m$  y la frecuencia de oscilación  $\omega$  se escribe,

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad (2.59)$$

El método que aplica los "operadores escalera", desarrollado por Paul Dirac, nos permite extraer los valores propios de energía sin resolver directamente la ecuación diferencial. Por otra parte, es fácilmente generalizable a problemas más complicados, sobre todo en la teoría cuántica de campos. Siguiendo este enfoque, definimos los operadores  $\hat{a}$  y su adjunto  $\hat{a}^\dagger$  donde los operadores de creación y aniquilación respectivamente son,

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad (2.60)$$

Esto conduce a la representación útil para  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (2.61)$$

donde los operadores siguen las reglas de conmutación siguientes,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (2.62)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.63)$$

Usando la ec.2.61 podemos escribir el Hamiltoniano de la siguiente manera

$$\mathcal{H}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\omega_k(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = \omega_k(\hat{N} + \frac{1}{2}) \quad (2.64)$$

Donde  $\hat{N}$  es,

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (2.65)$$

Se puede observar que el operador  $\hat{a}$  no es hermitiana, ya que este no es igual su adjunto  $\hat{a}^\dagger$ . Sin embargo, los estados propios de energía  $|n\rangle$  interactúan con estos operadores de la siguiente manera

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.66)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (2.67)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.68)$$

Los vectores  $|n\rangle$  forman un sistema orthonormal conocido como "Espacio de Fock". Una definición de los estados de Fock es que son los elementos de un espacio de

Fock los cuales son estados propios del operador del número de partículas y también son superposiciones de estados de diferentes números de partículas. Por lo tanto, no todos los elementos de un espacio de Fock se les conocen como "estados de Fock." Los estados normalizados en el espacio de Fock son,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2.69)$$

Entonces regresando a la ecuación 2.64 cuando aplicamos el Hamiltoniano a un estado de Fock  $|n\rangle$  tenemos que  $\omega_k \frac{1}{2} |n\rangle$  es una constante infinita que carece de significado físico que podemos eliminar por completo al cambiar el cero de la escala de energía para coincidir con el estado de vacío. Entonces el resultado del Hamiltoniano se escribe como

$$\mathcal{H}(\vec{k}) = \omega_k \hat{a}(\vec{k})^\dagger \hat{a}(\vec{k}) \quad . \quad (2.70)$$

Para la expresión anterior se pasaron todos los operadores de creación a la izquierda y los de aniquilación a la derecha y esto es llamado ordenamiento normal.

## 2.5 La Segunda Cuantización

El método de la segunda cuantización es particularmente importante en la teoría de campo cuántico cuando el número de partículas en un sistema físico dado no es constante ya que pueden cambiar durante varios procesos que acontecen en el sistema, es decir para analizar 2 o más partículas se requiere incorporar un concepto llamado segunda cuantización[2]. Por lo tanto, la teoría de la radiación cuántica y la teoría cuántica de partículas y sistemas de varias cuasi-partículas elementales son las áreas más importantes de la aplicación del método de la segunda cuantización, por ejemplo en los sistemas que se producen fotones durante los procesos de emisión, absorción y dispersión los cuales se examinan en la teoría de la radiación [4]. En la teoría de las partículas elementales es necesario utilizar el método de la segunda cuantización que nos da la posibilidad de transformaciones mutuas de partículas, por ejemplo, los procesos de conversión de electrones y positrones en fotones, y el proceso inverso.

El aparato matemático de la segunda cuantización consiste en convertir a los campos en operadores de campo, de manera similar a cómo se usan las cantidades físicas (posición, momento etc.) de los operadores en la primera cuantización. Aquí el papel principal es interpretado por los operadores de partículas de "aniquilación" y "creación". El operador de aniquilación es un operador que transforma la función de onda de un estado de un sistema físico, disminuyendo el número de partículas en -1 . Del mismo modo, el operador de la creación aumenta el número de partículas en el estado en +1.

El aparato matemático específico del método, incluyendo las principales propiedades de los operadores de creación y de aniquilación, difiere significativamente en estos casos porque el número de partículas que pueden existir en un estado dado no está limitado para el caso de la estadística de Bose-Einstein (de modo que la números de ocupación pueden tomar valores arbitrarios), mientras que en las estadística de Fermi-Dirac no puede haber más de una partícula en cada estado y los números de ocupación pueden tener sólo los valores 0 y 1.

El método de la segunda cuantización fue desarrollado por primera vez por el físico Inglés P. Dirac (1927) en su teoría de la radiación y fue profundizado más por el trabajo hecho por el físico soviético VA Fok (1932). El término "segunda cuantización" apareció debido a que el método desarrollado después de la "ordinaria" o "la primera", cuantización, cuyo propósito era determinar las propiedades ondulatorias de las partículas. La necesidad de la consideración sistemática de las propiedades corpusculares de campos también (desde la dualidad partícula-onda es inherente a todos los tipos de materia) dieron lugar a la aparición de los métodos de segunda cuantización.

### 2.5.1 Relaciones de Conmutación a Tiempos Iguales

En la teoría cuántica de campos, los campos y todos los observables construidos a partir de ellos, se sustituyen por los operadores cuánticos en un espacio de Hilbert. La forma canónica de cuantizar campos consiste en postular ciertas relaciones de conmutación a tiempos iguales entre los campos [4]. Este espacio de Hilbert se basa en un estado de vacío, y la dinámica se rige por un Hamiltoniano, un operador positivo que aniquila el vacío. Una construcción de una teoría cuántica de campo escalar se puede encontrar en el siguiente tema, que utiliza relaciones de conmutación canónicas entre los campos, como base para la construcción, las variables básicas son los campos  $\phi$  y su momentos conjugados. En los puntos espaciotemporales iguales, las relaciones de conmutación canónicas son,

$$[\pi_l(x, t), \phi^i(x', t')] = \frac{\hbar}{i} \delta_{lj} \delta(x - x') \quad (2.71)$$

### 2.5.2 Segunda Cuantización del Campo de Klein-Gordon

A continuación se muestra la segunda cuantización para el campo de Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (2.72)$$

El campo escalar real es el que satisface la ecuación anterior, proponiendo una solución libre tipo ondas planas se tiene,

$$\phi(x) \sim e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (2.73)$$

Y en términos de la expansión de Fourier tenemos que la solución se escribe de la siguiente manera,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{k} (f(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} + f^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (2.74)$$

Aplicamos los siguientes cambios en el proceso de cuantización a la ecuación anterior

$$f(\vec{k}) \rightarrow a(\vec{k}) \quad (2.75)$$

$$f(\vec{k})^\dagger \rightarrow a(\vec{k})^\dagger \quad (2.76)$$

$$\phi(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} d^3\vec{k} (a(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (2.77)$$

$$\phi(x) = \phi(x)^+ + \phi(x)^- \quad (2.78)$$

$$\phi(x)^+ = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \quad (2.79)$$

$$\phi(x)^- = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} a(\vec{k})^\dagger e^{ik \cdot x} \quad (2.80)$$

Enseguida tenemos que aplicar las relaciones de conmutación, donde el momento conjugado para el campo escalar está dado por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \quad (2.81)$$

$$\partial_0 \phi = \partial_0 \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (a(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (2.82)$$

$$= \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (a(\vec{k}) (-i\omega_k) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(\vec{k}) (i\omega_k) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (2.83)$$

$$\pi(x) = -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} - a^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (2.84)$$

Los operadores de creación y aniquilación satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[\hat{a}(\hat{k}), \hat{a}^\dagger(\hat{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (2.85)$$

$$[\hat{a}(\hat{k})^\dagger, \hat{a}(\hat{k}')^\dagger] = [\hat{a}(\hat{k}), \hat{a}(\hat{k}')] = 0 \quad (2.86)$$

En mecánica cuántica el operador de posición y el de momento siguen la relación de conmutación siguiente,

$$[x_i, x_j] = i\delta_{ij} \quad (2.87)$$

Pero en la teoría cuántica de campos tenemos que

$$\delta_{ij} \rightarrow \delta(x - y) \quad (2.88)$$

Para probar las relaciones de conmutación a tiempos iguales se usan las siguientes relaciones

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y) \quad (2.89)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y) \quad (2.90)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0 = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] \quad (2.91)$$

### 2.5.3 Segunda Cuantización del Campo de Dirac

La Cuantización del campo de Dirac se logra mediante la sustitución de los [3] espinores  $\psi(x, t)$  y  $\psi^\dagger(x, t)$  por los operadores de campo  $\hat{\psi}(x, t)$  y  $\hat{\psi}^\dagger(x, t)$ . En esta etapa una decisión se tiene que tomar con respecto a si se debe utilizar reglas de conmutación o anticonmutación. Por supuesto que ya sabemos la respuesta, ya que los electrones, que son descritos por la ecuación de Dirac, se encuentran empíricamente para satisfacer el Principio de Exclusión de Pauli. Por lo tanto vamos a seguir el camino "correcto" y usar las reglas de cuantización de Jordan y Wigner. La razón

más profunda de esta elección se aclarará más adelante. Utilizando la ec.2.94 se postula que los operadores de campo de Dirac cumplen las normas de anticonmutación a tiempos iguales. La solución general de la ecuación de Dirac puede ser escrita en función de las soluciones de ondas planas mostradas a continuación

$$\hat{\psi}(x) = \int d^3\vec{k} \frac{m}{k_0(2\pi)^3} \sum_{\alpha} (b_a(\vec{k})u^a(\vec{k})e^{-i(k \cdot x)} + d_a(\vec{k})^\dagger v^a(\vec{k})e^{i(k \cdot x)}) \quad (2.92)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int d^3\vec{k} \frac{m}{k_0(2\pi)^3} \sum_{\alpha} (b_a(\vec{k})^\dagger \bar{u}^a(\vec{k})e^{i(k \cdot x)} + d_a(\vec{k})\bar{v}^a(\vec{k})e^{-i(k \cdot x)}) \quad (2.93)$$

donde  $b_a$  denota las partículas y  $d_a$  las antipartículas. Los fermiones siguen las reglas de anti conmutación siguientes,

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (2.94)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta^\dagger(x')\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(x - x') \quad (2.95)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(x')\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x), \hat{\psi}_\beta^\dagger(x')\} = 0 \quad . \quad (2.96)$$

## REFERENCIAS

- [1] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.
- [2] Lewis H. Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [3] Walter. Greiner. *Relativistic quantum mechanics*. Springer, 2000.
- [4] Graham Shaw Mandl, Franz. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.

### 3. *Teoría de Perturbaciones*

La Teoría de Perturbaciones se originó como solución para resolver el problema de la dinámica de cuerpos en sistemas planetarios, posteriormente esta herramienta fue adaptada para resolver problemas cuánticos en sistemas atómicos y subatómicos. Esta teoría resulta imprescindible para la descripción de los sistemas cuánticos reales y consiste de un conjunto de técnicas matemáticas cuyo objetivo es formular problemas en partes perturbativas pero solubles. Los resultados producidos por la teoría no son exactos, pero pueden conducir a expresiones precisas, siempre y cuando el parámetro de expansión sea muy pequeño. Esta herramienta resulta indispensable en la electrodinámica cuántica (QED) y otras teorías cuánticas de campos.

Una característica particular de la Teoría de Perturbaciones es que usualmente los cálculos aplicados a las teorías cuánticas de campos son acompañados por diagramas de Feynman que son técnicas de cálculo especiales las cuales expresan los procesos que se buscan analizar. Estos diagramas se consideran como una representación gráfica de una contribución perturbativa a la amplitud de transición o función de correlación de una teoría de campo cuántico o cuántica estadística y se utilizan para resumir sistemáticamente los términos de series de potencias producidas cuando uno usa la teoría de perturbaciones para analizar la matriz de dispersión también llamada matriz S, que se puede escribir en función del operador de evolución temporal como [1]:

$$S_{fi} = \langle \alpha_f | \hat{U}(\infty, -\infty) | \alpha_i \rangle \quad (3.1)$$

esta matriz contiene los términos de interacción de la teoría, donde el subíndice  $i$  denota el estado inicial y el subíndice  $f$  denota el estado final.

Por otro lado se sabe que uno puede formular de maneras distintas a la mecánica cuántica ordinaria, estas "representaciones" o "formalismos" son completamente equivalentes y solo difieren en la forma de su dependencia Temporal. Esta ambigüedad surge ya que todos los observables físicos son valores esperados o elementos de matriz de operadores evaluados con los vectores de estado, estos se mantienen sin cambios si los operadores y los vectores de estado son sometidos conjuntamente a una transformación unitaria. Las dos opciones extremas que se pueden construir de esta manera son el formalismo de Schrödinger (operadores son constantes, los vectores de estado son dependientes del tiempo) y formalismo de Heisenberg (vectores de estado son constantes, los operadores dependen del tiempo). En el contexto de la teoría cuántica de campos a menudo se prefiere el formalismo de Heisenberg, esto es lo que se ha usado hasta ahora es decir se ha tratado a los operadores de campo  $\phi(x, t)$  como tiempo dependientes. En el formalismo de Heisenberg los operadores satisfacen la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$i\partial_t \hat{O}^H(t) = [\hat{O}^H(t), \hat{H}(t)] \quad (3.2)$$

donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano (independiente del tiempo) del sistema, además suponemos que el sistema es cerrado, de lo contrario podría experimentar una dependencia del tiempo adicional impulsado por influencias externas. Una solución formal para el desarrollo en el tiempo de un operador  $\hat{O}$  se puede escribir de la siguiente manera,

$$\hat{O}^H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{O}^H(0)e^{-i\hat{H}t}. \quad (3.3)$$

La dependencia del tiempo ahora se puede transferir a los vectores de estado, lo que conduce al formalismo de Schrödinger. Esto se logra mediante la transformación siguiente,

$$\hat{O}^S(t) = e^{-i\hat{H}t}\hat{O}^H(t)e^{i\hat{H}t} \quad (3.4)$$

$$|\alpha, t\rangle^S = e^{i\hat{H}t}|\alpha, t\rangle^H. \quad (3.5)$$

Como punto de partida para el desarrollo de una teoría de la perturbación suponemos que el Hamiltoniano del sistema en estudio se puede separar en dos partes

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (3.6)$$

aquí  $\hat{H}_0$  es típicamente el Hamiltoniano de un sistema de campos libres. Para este Hamiltoniano solo se puede dar una solución exacta. La estrategia ahora es poner esta parte "fácil" del problema en la definición de los vectores de estado. Sólo entonces la "perturbación" del operador  $\hat{H}_1$  será visible en las ecuaciones de movimiento. En la mecánica cuántica, el formalismo de interacción (también conocido como formalismo Dirac) es una representación intermedia entre el formalismo de Schrödinger y el de Heisenberg, mientras que en los otros dos formalismos, ya sea el vector de estado o los operadores llevan dependencia del tiempo[1], en el formalismo de interacción ambos llevan la dependencia del tiempo. Entonces para encontrar las conexiones con el formalismo de interacción en términos del formalismo Schrödinger las ecuaciones para los vectores y operadores son

$$|\alpha, t\rangle^I = e^{i\hat{H}_0^S t}|\alpha, t\rangle^S \quad (3.7)$$

$$\hat{O}^I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t}\hat{O}^S(0)e^{-i\hat{H}_0^S t} \quad (3.8)$$

Asimismo la conexión con el formalismo de Heisenberg está dado por las siguientes relaciones, usando 3.4 se tiene que

$$\hat{O}^I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}t}\hat{O}^H(0)e^{-i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0^S t} \quad (3.9)$$

$$|\alpha, t\rangle^I = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}t}|\alpha\rangle^H \quad (3.10)$$

La conexión entre los tres formalismos es mediada por transformaciones unitarias sin embargo todos conducen a los mismos elementos de matriz[1]. La ecuación de Schrödinger para la parte temporal del vector de estado en el marco de interacción asume la siguiente forma

$$i\partial_t |\alpha, t\rangle^I = -\hat{H}_0^S e^{i\hat{H}_0^S t}|\alpha, t\rangle^S + e^{i\hat{H}_0^S t}i\partial_t |\alpha, t\rangle^S \quad (3.11)$$

$$= -\hat{H}_0^S |\alpha, t\rangle^I + e^{i\hat{H}_0^S t}\hat{H}e^{-i\hat{H}_0^S t}e^{i\hat{H}_0^S t}|\alpha, t\rangle^S \quad (3.12)$$

$$(-\hat{H}_0^S + \hat{H}^I)|\alpha, t\rangle^I = -(\hat{H}_0^I + \hat{H}^I)|\alpha, t\rangle^I \quad (3.13)$$

y por lo tanto

$$i\partial_t |\alpha, t\rangle^I = \hat{H}_1^I |\alpha, t\rangle^I \quad (3.14)$$

donde hemos usado

$$\hat{H}_0^I = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{H}_0^S \quad . \quad (3.15)$$

Como se pretende, la ecuación de movimiento Ec3.14 para el vector de estado contiene sólo el operador "perturbación"  $\hat{H}_1$ . Por otro lado, la dependencia del tiempo de los operadores está determinada por la dinámica del campo libre.

### 3.1 El Operador de Evolución Temporal

Dentro del formalismo de Dirac el efecto de la interacción esta por supuesto, escondido en los vectores de estado  $|\alpha, t\rangle^I$ . Entonces, la ecuación de Schrödinger Ec3.14 es el punto de partida para un tratamiento perturbativo del problema de interacción de campos[1]. Por esto definimos el operador de evolución temporal (también conocido como el operador Dyson) descrito por el operador unitario  $\hat{U}(t_1, t_0)$  el cual nos permite llegar al operador  $S$  que describe la conexión entre los vectores de estado en el momento  $t_1$  y  $t_0$ . Si empezamos con

$$|\alpha, t_1\rangle^I = \hat{U}(t_1, t_0) |\alpha, t_0\rangle^I \quad (3.16)$$

y con la ayuda de 3.7 y 3.8 podemos escribir inmediatamente una solución formal de esta ecuación con  $\hat{H}_0^S = \hat{H}_0$

$$|\alpha, t_1\rangle^I = e^{i\hat{H}_0 t_1} |\alpha, t_1\rangle^S = e^{i\hat{H}_0 t_1} e^{i\hat{H}(t_1-t_0)} |\alpha, t_0\rangle^S \quad (3.17)$$

$$= e^{i\hat{H}_0 t_1} e^{i\hat{H}(t_1-t_0)} e^{i\hat{H}_0 t_0} |\alpha, t_0\rangle^I \quad (3.18)$$

donde

$$\hat{U}(t_1, t_0) = e^{i\hat{H}_0 t_1} e^{i\hat{H}(t_1-t_0)} e^{i\hat{H}_0 t_0} \quad . \quad (3.19)$$

Como los operadores  $\hat{H}_0$  y  $\hat{H}$  en general no conmutan, el orden de los factores en 3.19 es muy importante. El operador de evolución temporal nos da una serie de relaciones fundamentales, que vamos a usar ahora. Una propiedad del sistema que es trivial es

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad . \quad (3.20)$$

Por otra parte, cuando se aplican dos traslaciones de tiempo consecutivamente se obtiene la siguiente propiedad de grupo

$$\hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_0) = \hat{U}(t_2, t_0) \quad (3.21)$$

$$\hat{U}(t_2, t_0)^\dagger = \hat{U}^{-1}(t_2, t_0) \quad (3.22)$$

esto garantiza que la normalización de los vectores de estado no depende de tiempo. La ecuación 3.22 se puede derivar de la propiedad hermítica de los Hamiltonianos  $\hat{H}_0$  y  $\hat{H}$ , como se puede demostrar con la ayuda de la solución formal de ec.3.19.

$$\hat{U}(t_1, t_0)^\dagger = e^{i\hat{H}_0^\dagger t_1} e^{-i\hat{H}^\dagger(t_1-t_0)} e^{i\hat{H}_0^\dagger t_0} = (e^{i\hat{H}_0 t_1} e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} e^{i\hat{H}_0 t_0})^{-1} = \hat{U}(t_1, t_0)^{-1} \quad (3.23)$$

Tomando nota de que  $\hat{U}(t, 0)^\dagger = e^{i\hat{H}_0^S t_1}$  es el operador de transformación ec.3.9 que une el formalismo de Heisenberg y de interacción tenemos,

$$\hat{O}^I(t) = \hat{U}(t, 0)\hat{O}^H(t)\hat{U}^{-1}(t, 0) \quad (3.24)$$

$$|\alpha, t\rangle^I = \hat{U}(t, 0)|\alpha, t\rangle^H \quad . \quad (3.25)$$

Dado que el operador  $\hat{U}$  determina la evolución en el tiempo del vector de estado  $|\alpha, t\rangle^I$  este satisface la ecuación diferencial siguiente.

$$i\partial_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_I^I \hat{U}(t, t_0) \quad (3.26)$$

En la teoría cuántica de campos, como en la teoría ordinaria de dispersión de la mecánica cuántica, resulta ventajoso transformar la ecuación diferencial 3.11 en una ecuación integral equivalente [1]. Dentro de la condición de contorno la ec.3.20, esta ecuación se escribe como:

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} + i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^I \quad . \quad (3.27)$$

que se verifica inmediatamente por la diferenciación con respecto al tiempo. La ecuación 3.27 es una ecuación integral de tipo Volterra (es decir, la variable independiente entra como una frontera integral). Las ecuaciones de este tipo se pueden resolver por iteración bajo condiciones bastante generales. El proceso de inserción re-sucesiva del lado izquierdo de ec. 3.27 conduce a la serie Neumann escrita a continuación.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} + i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I^I + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_I^I(t_1) \hat{H}_I^I(t_2) + \\ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_I^I(t_1) \hat{H}_I^I(t_2) \dots \hat{H}_I^I(t_n) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$T(\hat{H}_I^I(t_1) \hat{H}_I^I(t_2) \dots \hat{H}_I^I(t_n)) = \hat{H}_I^I(t_1) \hat{H}_I^I(t_2) \dots \hat{H}_I^I(t_n) \quad \text{donde } t_1 \geq t_2 \geq t_3 \dots \geq t_n \quad (3.29)$$

El concepto de un orden de tiempo se puede aplicar a todos los tipos de productos de los operadores[2], en particular, a los operadores de campo ( $\phi(x), \psi(x), A_\mu(x), etc$ ) y sus campos canónicamente conjugados. Pueden surgir problemas si los operadores que están involucrados no son tomados en argumentos de tiempo iguales. Para una definición general se agrega la regla donde se agrega un signo menos por cada intercambio de operador de fermiones en el tiempo dado. Tales factores de signos no surgen en ec.3.29 desde que el Hamiltoniano es de carácter escalar y por lo tanto siempre consiste en un número par de operadores fermionicos (que implican medio giro-número entero). Dado lo antes mencionado, nos encontramos con la serie de perturbación para el operador de evolución temporal  $\hat{U}(t, t_0)$  escrito a continuación.

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(\hat{H}_I^I(t_1) \hat{H}_I^I(t_2) \dots \hat{H}_I^I(t_n)) \quad (3.30)$$

## 3.2 La Matriz de Dispersión S

La matriz de dispersión (matriz  $S$ ) es un concepto central en la teoría del campo cuántico así como en la mecánica cuántica ordinaria. Describe la amplitud de probabilidad para un proceso en el que el sistema hace una transición a un estado final bajo la influencia de una interacción. Si uno trabaja bajo el formalismo de interacción el operador de evolución temporal es la herramienta adecuada para evaluar la matriz de dispersión.

Si usamos la relación siguiente que muestra al vector de estado dependiente del tiempo evolucionado del estado inicial  $|\phi_i\rangle$  bajo el límite  $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\Psi(t)\rangle = |\phi_i\rangle \quad (3.31)$$

Entonces la matriz  $S$  está definida como una proyección del vector de estado final  $\langle\phi_f|$ , dado por el número cuántico  $f$  en el límite  $t \rightarrow \infty$

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\phi_f| \hat{S} |\phi_i\rangle \quad (3.32)$$

Si la expresáramos en términos del operador de evolución temporal tendríamos que

$$S_{fi} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle\phi_f| \hat{U}(t_2, t_1) |\phi_i\rangle \quad (3.33)$$

donde el operador  $\hat{S}$  está definido como

$$\hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty) \quad . \quad (3.34)$$

Si usamos la ecuación en ec.3.30 llegamos a serie perturbativa para el operador  $\hat{S}$

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(\hat{H}_I^I(t_1) \hat{H}_I^I(t_2) \dots \hat{H}_I^I(t_n)) \quad . \quad (3.35)$$

## 3.3 Ordenamiento Normal y Temporal

Retomando lo antes mencionado, en la teoría cuántica de campos a veces es necesario escribir ciertas expresiones de la manera más conveniente, una de estas maneras es el ordenamiento normal [3] donde se busca tener los operadores de creación a la izquierda por ejemplo,

$$\begin{aligned} : \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})^\dagger : &:= \hat{a}(\vec{k})^\dagger \hat{a}(\vec{k}) \\ : \hat{a}(\vec{k})^\dagger \hat{a}(\vec{k}) : &:= \hat{a}(\vec{k})^\dagger \hat{a}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Si tenemos  $: \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) :$  donde  $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(x)^+ + \hat{\phi}(x)^-$  entonces el ordenamiento normal se puede expresar como

$$: \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) : := \hat{\phi}(x)^+ \hat{\phi}(x)^+ + \hat{\phi}(x)^- \hat{\phi}(x)^+ + \hat{\phi}(x)^- \hat{\phi}(x)^- \quad (3.37)$$

Otro tipo de ordenamiento es el Temporal el cual nos permite representar matemáticamente el hecho de que las partículas tienen que ser creadas antes de que sean destruidas.

$$T[\hat{\phi}(t_1) \hat{\phi}(t_2)] = \begin{cases} \hat{\phi}(t_1) \hat{\phi}(t_2) & t_1 > t_2 \\ \hat{\phi}(t_2) \hat{\phi}(t_1) & t_1 < t_2 \end{cases} \quad (3.38)$$

Lo anterior se cumple solo para campos escalares sin embargo podemos generalizar la expresión de los ordenamientos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} : \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y) : &= \hat{\Phi}(x)^+\hat{\Phi}(x)^+ + \hat{\Phi}(x)^-\hat{\Phi}(x)^+ + \hat{\Phi}(x)^-\hat{\Phi}(x)^- + \epsilon\hat{\Phi}(x)^-\hat{\Phi}(x)^- \\ &= \epsilon : \hat{\Phi}(y)\hat{\Phi}(x) : \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde  $\epsilon$  representa un signo -1 si los campos son fermionicos y 1 si los campos son bosonicos. Ahora vamos a mostrar una fórmula para la evaluación general de la ordenada por el producto ordenado en el tiempo de un número arbitrario de operadores. Expresiones de este tipo es el ingrediente central de la serie de perturbaciones.

$$T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)) =: \hat{\Phi}(y)\hat{\Phi}(x) : + \langle 0 | T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)) | 0 \rangle \quad (3.40)$$

Esta ecuación se ha derivado para  $t_1 > t_2$  sin embargo, también funciona en el caso opuesto  $t_1 < t_2$  y por lo tanto es válido en general. Esto implica de la observación anterior que tanto el producto normal como el producto  $T$  son invariantes bajo permutación de los factores. Dado que el valor de esperado del vacío de un producto normal desaparece su valor está dado por  $\langle 0 | T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)) | 0 \rangle$ , que es lo que nos dice la ecuación 3.32. Además el valor esperado del vacío de un producto  $T$  de dos operadores lleva con frecuencia un nombre propio y una notación compacta, esta se conoce como contracción ordenada en el tiempo (o simplemente la contracción) de dos operadores

$$\overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)} = \langle 0 | T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)) | 0 \rangle \quad (3.41)$$

Las contracciones también pueden aparecer en expresiones más complicadas por ejemplo dentro del argumento de un producto normal. Un ejemplo, escrito vagamente, podría ser:

$$\overline{ABCDEFGH} = \epsilon : CDG : \overline{AE} \overline{BF} \quad (3.42)$$

Por ejemplo usando la regla anterior podemos expresar el ordenamiento  $T$  para 3 operadores de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)\hat{\Phi}(z)) &=: \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)\hat{\Phi}(z) : + \overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)}\hat{\Phi}(z) \\ &\quad + \overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(z)}\hat{\Phi}(y) + \overline{\hat{\Phi}(y)\hat{\Phi}(z)}\hat{\Phi}(x) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Este resultado es conocido como teorema de Wick y se puede generalizar a los productos de complejidad arbitraria. El teorema de Wick es un método para reducir las derivadas de alto orden a un problema combinatorio. Se utiliza ampliamente en la teoría de campos cuánticos para reducir los productos arbitrarios de los operadores de creación y aniquilación a sumas de productos de pares de estos operadores. Esto permite el uso de los métodos de función de Green, y por consiguiente el uso de diagramas de Feynman en el campo bajo estudio. Tomando en cuenta lo anterior podemos describir la esencia del teorema de Wick como, el producto ordenado por el tiempo de un conjunto de operadores que puede ser descompuesto en la suma de los productos normales contraídos. Todas contracciones de pares de operadores que posiblemente puedan surgir entran a esta suma.

## REFERENCIAS

- [1] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer, 1996.
- [2] John Dirk Walecka. *Advanced modern physics: theoretical foundations*. World scientific, 2010.
- [3] Graham Shaw Mandl, Franz. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.

## 4. *Formalismo de Tiempo Imaginario y Mecánica Estadística*

La Mecánica Estadística es una herramienta que resulta indispensable en el estudio de sistemas o ensambles de partículas. En la Mecánica Estadística de equilibrio uno normalmente se encuentra con tres tipos de Ensamblés, estos son conocidos como los conjuntos micro-canónico, canónico y gran-canónico. El conjunto micro canónica se utiliza para describir un sistema aislado que tiene una energía  $E$  fija, un número de partículas fijo  $N$ , y un volumen fijo  $V$ . El conjunto canónico se utiliza para describir un sistema en contacto con un depósito de calor a la temperatura  $T$ , el sistema puede intercambiar energía libremente con algún depósito, pero el número de partículas y el volumen se fija. En el conjunto macro o gran canónico el sistema puede intercambiar partículas así como energía con un depósito. En este conjunto la temperatura, el volumen y potencial químico  $\mu$  son cantidades fijas. Por otro lado en los ensambles canónico y gran canónico, la cantidad  $T^{(-1)} = \beta$  puede ser tomada como un multiplicador de Lagrange que determina la energía media del sistema. Del mismo modo,  $\mu$  puede ser pensado como un multiplicador de Lagrange que determina el número medio de partículas en el sistema. Es importante mencionar que en un sistema cuántico relativista, donde las partículas pueden ser creadas y destruidas, es más fácil de calcular observables en el conjunto gran canónico, ya que al hacerlo no hay pérdida de generalidad porque uno puede pasar a cualquiera de los otros conjuntos mediante el uso de una transformada inversa de Laplace en la variable  $\mu$  y / o la variable  $\beta$ . En QED, por ejemplo, el número de electrones menos el número de positrones es una cantidad conservada, no así el número de electrones o positrones por separado, debido a reacciones como  $e + e^- \rightarrow e + e + e^- + e^-$ . Estas cantidades  $N_i$  u operadores de número deben ser hermiticos y deben conmutar con el Hamiltoniano, también deben ser extensibles (escala con el volumen del sistema) con el fin de que el límite termodinámico macroscópico habitual pueda ser tomado[1]. La matriz de densidad es una matriz que describe un sistema cuántico en un estado mixto, un conjunto estadístico de varios estados cuánticos. La matriz de densidad  $\rho$  representada como la ecuación 4.1, se observa a continuación

$$\rho = e^{[\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)]} \quad (4.1)$$

donde el subíndice en  $-\mu_i \hat{N}_i$  denota una sumatoria. Por otro lado utilizaremos la matriz de densidad estadística para calcular la media del conjunto de cualquier observable  $A$  representada a través de la siguiente ecuación

$$A = \langle \hat{A} \rangle = \frac{Tr(\hat{A}\hat{\rho})}{Tr(\hat{\rho})} \quad (4.2)$$

donde  $\text{Tr}$  denota la operación de traza. Por otro lado la función de partición gran canónica es

$$Z = Z(V, T, \mu_1, \mu_2, \dots) = \text{Tr} \hat{\rho} \quad , \quad (4.3)$$

esta es una de las funciones más importante en la termodinámica mediante la cual las propiedades termodinámicas se pueden determinar. Por ejemplo, la presión, número de partículas, la entropía y la energía, en el límite infinito de volumen, que se pueden escribir de la siguiente manera

$$P = \frac{\partial(T \text{Ln} Z)}{\partial V} \quad (4.4)$$

$$N_i = \frac{\partial(T \text{Ln} Z)}{\partial \mu_i} \quad (4.5)$$

$$S = \frac{\partial(T \text{Ln} Z)}{\partial T} \quad (4.6)$$

$$E = -PV + TS + \mu_i N_i \quad . \quad (4.7)$$

Como se mencionó en la introducción, la teoría de campo térmico se puede describir mediante el uso del formalismo tiempo imaginario o el formalismo tiempo real [2]. En esta sección, se presenta el formalismo tiempo imaginario. Este formalismo es también llamado el formalismo Matsubara, en honor de la persona que estableció por primera vez la teoría de perturbaciones esquemática de la función de partición de una manera de campo teórico. Como se verá, este formalismo evalúa la función de partición perturbativamente utilizando un método esquemático que es análogo a la teoría de campo a temperatura cero. Cuando el sistema de encuentra en equilibrio térmico, el comportamiento estadístico de un sistema cuántico se estudia a través de algún conjunto estadístico apropiado. El comportamiento de un sistema a temperatura finita (ignorando la parte del potencial químico) es dado por la función de partición  $Z(\beta)$  ec 4.8

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (4.8)$$

donde  $\rho(\beta) = e^{-\beta H}$  es el matriz de densidad,  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  es el inverso de la temperatura, y  $H$  es el Hamiltoniano del conjunto particular tomando en cuenta las unidades naturales ( $\hbar = k_B = c = 1$ ). Por lo tanto el valor esperado térmico de un observable  $A$  está dada por

$$\langle \hat{A} \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}] \quad (4.9)$$

y el promedio térmico de la función de correlación entre dos operadores  $A$  y  $B$  se escribe como

$$\langle \hat{A} \hat{B} \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} \hat{B}] \quad . \quad (4.10)$$

Dado un ensamble y un conjunto de operadores expresado en la formalismo de Schrödinger, los operadores en el formalismo de Heisenberg se pueden definir como

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A}_s(t) e^{-i\hat{H}t} \quad , \quad (4.11)$$

en la ecuación 4.11, el subíndice indica el formalismo Heisenberg y el subíndice  $S$  indica el formalismo Schrödinger. Si quisiéramos el promedio térmico de la función de correlación entre dos operadores de Heisenberg se escribiría de la siguiente manera

$$\langle \hat{A}_H(t) \hat{B}_H(t') \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}_H(t) \hat{B}_H(t')] \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} \hat{A}_H(t) e^{-\beta \hat{H}} e^{-\beta H} \hat{B}_H(t')] \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} \hat{B}_H(t') \hat{A}_H(t + i\beta)] = \langle \hat{A}_H(t + i\beta) \hat{B}_H(t') \rangle_\beta \quad . \quad (4.14)$$

Con el fin de simplificar el problema el Hamiltoniano del sistema se separa en dos partes, una parte libre y una parte de interacción, la matriz de densidad se puede escribir de la siguiente manera

$$\rho(\beta) = e^{-\beta(\hat{H}_0 + \hat{H}_I)} = \rho_0(\beta) S(\beta) \quad (4.15)$$

Donde  $\rho_0(\beta) = e^{-\beta \hat{H}_0}$  es la matriz de densidad en un conjunto que no interactúa. Por otro lado  $S(\beta)$  está dada por

$$S(\beta) = \rho(\beta) = e^{-\beta \hat{H}_I} = \rho_0^{-1}(\beta) \rho(\beta) \quad , \quad (4.16)$$

además se sabe que la matriz densidad satisface las siguientes ecuaciones en el intervalo  $0 \leq \tau \leq \beta$

$$\frac{\partial \rho_0(\tau)}{\partial \tau} = -\hat{H}_0 \rho_0(\tau) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} = -\hat{H} \rho(\tau) = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) \rho(\tau) \quad (4.18)$$

Estas ecuaciones pueden ser considerados como las ecuaciones de evolución de la matriz de densidad en el intervalo  $0 \leq \tau \leq \beta$ , mientras que la ecuación de evolución de  $S(\tau)$  está dado por

$$\frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} = \rho_0^{-1}(\tau) (\hat{H}_0 - \hat{H}_I) \rho(\tau) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} = -e^{\tau \hat{H}_0} \hat{H}_I e^{-\tau \hat{H}_0} S(\tau) \quad (4.20)$$

$$= \hat{H}_I(\tau) S(\tau) \quad (4.21)$$

Con la definición

$$\hat{H}_I(\tau) = -e^{\tau \hat{H}_0} \hat{H}_I e^{-\tau \hat{H}_0} \quad (4.22)$$

Para valores imaginarios de  $\tau$  la transformación es unitaria. También, escribiendo  $\tau = it$  la expresión de  $\hat{H}_I$  coincide con la formalismo usual de interacción 4.22 que se puede interpretar como un marco de interacción en el que el tiempo se ha girado en el plano complejo donde  $\tau = it$ .

## 4.1 Rotación de Wick

Una rotación Wick es una rotación en el plano complejo para transformar una variable real en una variable imaginaria. La rotación hace que sea posible una solución a un problema en el espacio de Minkowski mediante la búsqueda de una solución a un problema relacionado en el espacio euclidiano. La métrica de Minkowski en cuatro dimensiones es

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4.23)$$

mientras que la métrica de Minkowski de cuatro dimensiones en el espacio euclidiano está dada por

$$ds_E^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad . \quad (4.24)$$

Estas no son distintas si  $t$  toma valores complejos. Por otro lado podemos pasar de la métrica de Minkowski a la métrica euclidiana mediante la transformación  $\tau = it$

$$ds^2 = (-idt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4.25)$$

$$ds^2 = -d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -ds_E^2 \quad . \quad (4.26)$$

Donde  $ds_E^2$  es la métrica euclidiana en coordenadas  $x, y, z$  y  $\tau$ . El operador  $e^{it\hat{H}}$  denota un estado cuántico a través de un intervalo de tiempo real  $t$  [3]. Como se ha visto anteriormente, el operador que se propaga a través de un estado y el intervalo de tiempo imaginario está dada por  $e^{-\tau\hat{H}}$  donde  $\tau = it$ . Esto no es una propagación física, pero el operador está bien definido matemáticamente. Los valores propios y vectores propios de  $e^{-E\hat{H}}$  se pueden utilizar para encontrar los valores propios y los vectores propios de  $e^{-\tau\hat{H}}$  dado que  $E = \frac{1}{\tau} \text{Ln}(e^{-\tau\hat{H}})$ . Por lo tanto no se pierde información cuando se gira a tiempo euclidiano. Las integrales de la siguiente forma se pueden evaluar mediante el uso de la integral de contorno más allá de los polos para realizar una rotación en el espacio euclidiano

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)^l} \quad (4.27)$$

$$\int d\Omega_d \int \frac{q^{d-1} dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)^l} \quad (4.28)$$

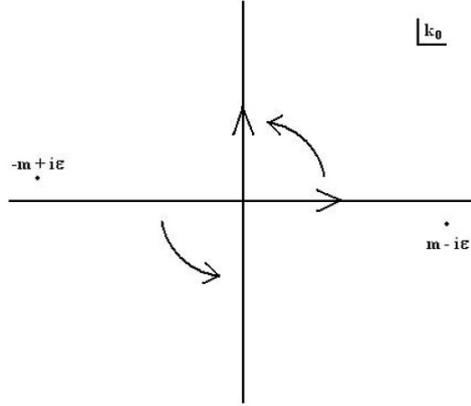


Figure 4.1: Representación del espacio complejo de una Rotación de Wick

La rotación del ángulo  $\theta$  es alrededor del contorno al eje imaginario. La rotación no cambia el valor de la integral y la integral se puede escribir como,

$$i(-1)^l \frac{\omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk_E \frac{k_E^{d-1}}{(k_E^2 + m^2)^l} \quad (4.29)$$

$$= i(-1)^l \int_0^\infty \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^l} \quad . \quad (4.30)$$

Como ya se mencionó anteriormente existen dos formulaciones en la teoría de campos a temperatura finita para calcular funciones de Green y cantidades termodinámicas como presión y la energía libre, el formalismo de tiempo imaginario también conocido como formalismo de Matsubara y el formalismo de tiempo real. El formalismo de tiempo real permite calcular propiedades fuera de equilibrio y el formalismo de Matsubara permite calcular propiedades en equilibrio. Una de las ventajas del formalismo de Matsubara es que está basado en el hecho que los cálculos que aparecen en la teoría de campo a temperatura finita son muy similares a los cálculos de los elementos de la matriz-S en la teoría cuántica de campos perturbativa a  $T = 0$ . Como se sabe, los elementos de la matriz-S pueden ser representados por los diagramas de Feynman, por lo que son elementos de la función de partición, la estrecha relación entre estas dos teorías se aclarará más adelante en esta tesis. Una de las principales diferencias entre los dos formalismos, es la sustitución que se lleva a cabo en la representación funcional de la amplitud de transición vía la cantidad imaginaria  $\tau$  esto es por qué se le conoce como formalismo de tiempo imaginario, esto conduce a una modificación de la componente de orden cero del cuadrimomento  $p_0$  en el formalismo en tiempo real (para los Cálculos de la matriz-S) . Para llegar desde los diagramas en tiempo real a los que representan el tiempo imaginario debe hacerse la sustitución  $p_0 \rightarrow i\omega_n$ , donde  $\omega_n = 2\pi nT$  es para bosones y  $\omega_n = 2\pi(N + \frac{1}{2})T$  para fermiones con  $n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \dots \infty$  donde  $\omega_n$  es la frecuencia de Matsubara. En el cálculo de los diagramas de Feynman las integrales que aparecen constantemente son de la siguiente forma

$$\int dp^0 \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2)^l} \quad (4.31)$$

mientras que en el formalismo de tiempo imaginario estas integrales, tomando el caso de  $l = 1$  y con la sustitución  $p^0 \rightarrow ip_E^0$ , la integral se convierten en

$$\int idp_E^0 \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{((ip_E^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2)} \quad (4.32)$$

donde esto es válido en limite  $\Delta T \rightarrow 0$  ya que

$$2\pi nT = \omega_n \quad \frac{\Delta\omega_n}{2\pi} = \Delta T \rightarrow 0 \quad . \quad (4.33)$$

Sin embargo, a temperatura finita, la integral sobre  $p_E^0$  en la ecuación 4.32 se convierte en discreta cuando se usa la ecuación 4.33, por lo que la integral de la ecuación 4.32 se convierte entonces en

$$iT \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi i)^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{((\omega_n)^2 + \omega^2)} \quad . \quad (4.34)$$

Esto significa que todas las integrales de la forma

$$iT \int \frac{d^D p}{(2\pi i)^D} \sum_{-\infty}^{\infty} f(p^0, \vec{p}) \quad (4.35)$$

serán sustituidos por

$$iT \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi i)^{D-1}} \sum_{-\infty}^{\infty} f(p^0 = i\omega_n, \vec{p}) \quad . \quad (4.36)$$

## 4.2 Bosones y Fermiones

En la física estadística existen dos maneras posibles en las que una colección de partículas no interactuantes indistinguibles puede ocupar un conjunto de estados de energía discreta disponibles en equilibrio termodinámico. Estas dos maneras son la estadística de Bose-Einstein que describe a los bosones y la estadística de Fermi-Dirac que describe a los fermiones. Para describir la estadística de estas partículas empecemos con un simple ejemplo de una sola partícula cuántica independiente del tiempo cuyo modo mecánico puede ser ocupado por bosones. Cada bosón en ese modo tiene la misma energía  $\omega$  y puede haber cualquier número de bosones ocupando ese modo además no hay interacciones entre las partículas. Este sistema puede ser pensado como un conjunto de osciladores armónicos cuánticos simples y sirve como un prototipo de sistemas de la teoría cuántica campos relativista que introduce en el capítulo 2. Estamos interesados en el cálculo de la media del número de partículas, la energía, y la entropía. Dado que el sistema no tiene volumen no hay presión física. Entonces el álgebra para bosones está dada por las relaciones de conmutación siguientes [4]

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (4.37)$$

Donde el Hamiltoniano escalar se puede de la siguiente manera

$$\hat{H}(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} \omega_k a(\vec{k})^\dagger a(\vec{k}) \quad (4.38)$$

y la función de partición es

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{[-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})]} = \text{Tr} e^{[-\beta(\omega - \mu) \hat{N}]} \quad (4.39)$$

$$Z(\beta) = \sum_0^\infty \langle n | e^{[-\beta(\omega - \mu) \hat{N}]} | n \rangle \quad \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (4.40)$$

Consideremos ahora el mismo problema que en el apartado anterior, pero para los fermiones en lugar de bosones. Se trata de un prototipo para un gas de Fermi por lo que sus constituyentes podrían ser los electrones y positrones en QED, neutrones y protones en los núcleos y la materia nuclear, o quarks en QCD. El principio de exclusión de Pauli prohíbe la ocupación de más un (fermión) en el mismo estado cuántico. Por lo que podemos usar dos estados de la sistema,  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . El álgebra de la creación y la aniquilación de fermiones operadores en estos estados es el siguiente[4]:

$$\{a(\vec{k}), a(\vec{k})^\dagger\} = a(\vec{k})a(\vec{k})^\dagger + a(\vec{k})^\dagger a(\vec{k}) \quad (4.41)$$

Donde el Hamiltoniano con propiedades vectoriales se escribe de la siguiente manera

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} a(\vec{k}) a(\vec{k})^\dagger \quad (4.42)$$

y la función de partición es

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta(\omega - \mu) \hat{N}} \quad N(\vec{k}) |n\rangle = n |n\rangle \quad (4.43)$$

$$Z(\beta) = \sum_0^1 \langle n | e^{-\beta(\omega - \mu) \hat{N}} | n \rangle \quad (4.44)$$

### 4.3 El Propagador de la Teoría $\lambda\phi^4$

En física de partículas el propagador describe la dinámica del sistema y está representada por una función de Green. A temperatura cero la auto energía es la contribución de una partícula que se propaga producida por las fluctuaciones del vacío. A temperatura diferente de cero las contribuciones térmicas se deben incluir, además se sabe que en una teoría de campos los términos de dispersión representados por diagramas contribuyen individualmente a la propagación de partículas. Por otro lado la teoría de campos escalares  $\lambda\phi^4$  resulta importante para ilustrar una cantidad considerable de fenómenos, es por eso que la usaremos para ejemplificar la solución de diversas integrales que aparecen comúnmente en la teoría de campo térmico. El lagrangiano de esta teoría está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \quad (4.45)$$

y el propagador a un loop en primer orden para la teoría  $\lambda\phi^4$  se puede escribir de la siguiente manera

$$G_\beta(x, x') = \langle Tr\{\phi(x)\phi(x')\} \rangle_\beta \quad (4.46)$$

Donde los diagramas a primer orden para el propagador se representan en Figure 4.2



Figure 4.2: Diagramas a un loop para el propagador  $G_\beta(x, x')$ .

Por otro lado la auto-energía  $\Sigma(k)$  de la teoría  $\lambda\phi^4$  nos permite encontrar las correcciones a orden  $n$  para el propagador térmico escrito por la ecuación de dyson siguiente

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \vec{k}) = G_\beta + G_\beta(-\Sigma(k))G_\beta + G_\beta(-\Sigma(k))G_\beta(-\Sigma(k))G_\beta + \dots \quad (4.47)$$

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \vec{k}) = G_\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-\Sigma(k)G_\beta)^{n-1} = \frac{1}{(G_\beta)^{-1} - \Sigma(k)} \quad (4.48)$$

Usando la expresión para el propagador térmico para la teoría  $\lambda\phi^4$  tenemos

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2 + \Sigma(k)} \quad (4.49)$$

y se puede probar[1] que la autoenergía a 1 loop se escribe de la siguiente manera

$$\Sigma(k) = 12T\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2} \quad (4.50)$$

donde  $\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2$ . Para poder evaluar el diagrama de un loop de la ecuación 4.50 necesitamos realizar una suma de residuos en términos de una función  $f(p^0)$ ,

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p^0) = i\omega_n = 2\pi nTi \quad (4.51)$$

suponiendo que  $p^0$  es la componente que representa la energía en el cuadrimomento del espacio de Minkowski podemos la ecuación 4.55 en términos de la integral de contorno siguiente

$$\frac{T}{2\pi i} \oint_c dp^0 f(p^0) \frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{1}{2}\beta p^0\right) \quad (4.52)$$

La función  $\frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{1}{2}\beta p^0\right)$  tiene polos en  $p^0 = 2\pi n T i$  y es analítica en el resto del plano.

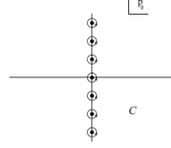


Figure 4.3: Contorno mostrando los polos de la función  $\frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{1}{2}\beta p^0\right)$ .

El contorno entonces se puede deformar en Entonces re-arreglando las exponenciales

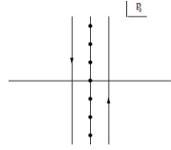


Figure 4.4: Contorno mostrando la deformación de la función.

cotangentes hiperbólicas obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dp^0 f(p^0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta p^0} - 1}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp^0 f(p^0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta p^0} - 1}\right) \quad (4.53)$$

Si realizamos  $p^0 \rightarrow -p^0$  en la primera integral obtenemos

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p^0 = i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp^0 \frac{1}{2} (f(p^0) + f(-p^0)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp^0 (f(p^0) + f(-p^0)) \frac{1}{e^{\beta p^0} - 1} \quad (4.54)$$

Esta expresión es correcta siempre y cuando  $f(p^0)$  no tenga singularidades a lo largo de la Eje  $p^0$  imaginario. La suma de frecuencia se separa naturalmente en una Independiente de la temperatura (la parte de vacío) y una parte que contiene La distribución de Bose-Einstein (la parte de la materia). En cierto sentido, la sustitución de las sumas de frecuencia por integrales de contorno, es equivalente cambiar de tiempo imaginario (frecuencias discretas en Espacio Euclideo) a tiempo real (energías continuas en el espacio de Minkowski). Sin embargo Esto es sólo una cuestión de conveniencia matemática y no implica física. Con  $f(p^0) = -1/((p^0)^2 - \omega^2)$  obtenemos

$$\Sigma(k) = 12\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_4)^2 + \vec{p}^2 + m^2} + 12\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (4.55)$$

## 4.4 Termino Tipo Tadpole Nivel a Un Loop

Los términos representados por diagramas tadpole contribuyen al valor esperado del vacío del campo, por lo que es simplemente el "punto cero" del campo que se ve afectada por los diagramas de renacuajo. El resto de la física no debería verse afectada. No hay nada especial acerca de los tadpole que hacen el resto del trabajo de la física y de la mayoría de los diagramas de renacuajo se desvanecen en la regularización dimensional de todos modos. La física de los diagramas tipo tadpole junto con su denominación fue inventado por Sidney Coleman. Las palabras se derivan de la forma del diagrama de Feynman. Un círculo con un intervalo de línea adjunta a su lado externo. Los diagramas tadpole, en este sentido, aparecen por primera vez en el artículo antes mencionado[5].

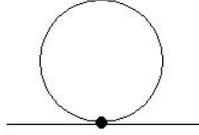


Figure 4.5: Representación del diagrama tipo Tadpole

La Integral que representa el diagrama en cuatro dimensiones es

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^2 - m^2 - i\epsilon)} = \int dp^0 \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^{0^2} - \vec{p}^2 - m^2 - i\epsilon)} \quad (4.56)$$

Una vez que separado el cuadrimomento en sus componentes y haciendo una rotación de wick tenemos

$$\int idp_E^0 \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_E^{0^2} - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon)} = - \int idp_E^0 \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \quad (4.57)$$

$$- i \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega_n \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \quad (4.58)$$

Los términos que involucran las sumas se les conocen como sumas de matsubara a continuación se presenta un ejemplo,

$$\Delta\omega_n = 2\Delta n\pi T \quad (4.59)$$

$$- i \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\Delta n\pi T) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{i}{((2n\pi T)^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \quad (4.60)$$

usando  $\omega = \vec{p}^2 + m^2$  tenemos que

$$= T \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{((2n\pi T)^2 + \omega^2)} \quad (4.61)$$

aplicando la suma de matsubara respectiva tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{((2n\pi T)^2 + \omega^2)} = \frac{1}{2\omega} \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) = \frac{1}{2\omega} \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1}\right) \quad (4.62)$$

por lo que la integral en cuestion se convierte en

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{2} + B(\omega) \right) \quad \text{donde } \omega = E \quad (4.63)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} B(E) \quad (4.64)$$

$$= (\Sigma_0 + \Sigma_T) \quad (4.65)$$

La integral independiente de la temperatura es divergente. Para que la teoría sea finita necesitamos añadir un contra termino en el Lagrangiano de tal manera que absorba esta divergencia mediante el uso de un proceso de regularización. Este contra término se agrega como un término de masa en el Lagrangiano.

$$L_{CTC} = -\frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2 \quad (4.66)$$

## 4.5 Regularizacion Dimensional

Las integrales que ocurren en los diagramas de Feynman suelen incluir divergencias ultravioleta (UV) por lo que es necesario utilizar el proceso de regularización dimensional para hacer frente a este problema. La idea detrás de esto es que las integrales de Feynman UV divergentes serán convergentes en una dimensión espacio-tiempo más pequeño. A continuación se ejemplifica el proceso de regularizacion con las integrales que aparecen en los calculos realizados en capitulo 6 de este trabajo.

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^l} \quad (4.67)$$

$$\int d\Omega_d \int \frac{k^{(d-1)} dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^l} \quad (4.68)$$

Usaremos las siguientes identidades para resolver el problema

$$\Gamma(Z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad , z > 0 \quad (4.69)$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^\infty dt \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}} \quad (4.70)$$

en términos de D que denota la coordenada polar dimensional de la integral . A continuación resolveremos la integral  $\int d\Omega_d$

$$\pi^{\frac{D}{2}} = \left( \int dx e^{-x^2} \right)^D = \int dx_1 \dots \int dx_D e^{-\sum_i x_i^2} \quad (4.71)$$

$$= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{D-1} e^{-x^2} = \int d\Omega_D \frac{1}{2} \int_0^\infty dx^2 (x^2)^{\frac{D}{2}-1} e^{-x^2} = \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{2} \int d\Omega_D \quad (4.72)$$

Entonces la integral del ángulo solido dimensional  $d\Omega_d$  es igual a

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \quad (4.73)$$

Realizando una rotación de wick a la segunda integral llegamos al término siguiente [6]

$$I = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk_E^D \frac{k_E^{d-1}}{(k_E^2 + m^2)^l} \quad (4.74)$$

Ahora hagamos la integral que nos falta mediante la siguiente sustitución  $x = \frac{k_E^2}{m^2}$

$$\int_0^\infty dk_E^2 \frac{(k_E^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(k_E^2 + m^2)^l} = \frac{m^{\frac{D}{2}-l}}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{(x+1)^l} \quad (4.75)$$

La última integral es la función Beta  $B(\frac{D}{2}, l - \frac{D}{2})$  que se puede escribir como

$$I = \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(l - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(1)} = \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}}}{(m^2)(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(l - \frac{D}{2})}{\Gamma(l)} \quad (4.76)$$

donde

$$\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z) \quad , \Gamma(1) = 1 \quad (4.77)$$

$$\Gamma(l - \frac{D}{2}) = -\frac{\Gamma(l + \frac{4-D}{2})}{(1 - \frac{4-D}{2})^{\frac{4-D}{2}}} = -\frac{\Gamma(l + \frac{4-D}{2})}{\frac{4-D}{2}} \quad (4.78)$$

si usamos la sustitución  $4 - D \rightarrow \epsilon$  junto con las relaciones siguientes

$$a^x = e^{-Ln(a)x} = 1 + Ln(a)x + O(x^2) \quad (4.79)$$

$$Z \rightarrow 0 \quad (4.80)$$

$$\Gamma(Z) \cong \frac{1}{Z} - \gamma_E + O(Z) \quad (4.81)$$

Regresando a la parte divergente de la ecuación 4.64 es decir  $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E}$  y realizando una expansión de Taylor a la función gamma también usamos la aproximación para pequeños valores de  $4 - D$  para obtener el resultado final escrito a continuación.

$$\frac{m^2}{16\pi^{\frac{3}{2}}(m^2)^\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon - 1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\frac{m^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + O(\epsilon) \right) \quad (4.82)$$

## 4.6 Término de Polarización Nivel a Un Loop

Los diagramas One-loop por lo general se calculan como la integral sobre un impulso independiente que puede "funcionar en el ciclo". El efecto Casimir, la radiación de Hawking y el Lamb shift son ejemplos de fenómenos cuya existencia puede ser implícita utilizando diagramas de un loop de Feynman, ":

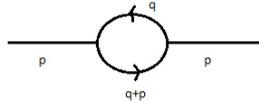


Figure 4.6: Diagrama tipo polarización

La masa de la partícula está dada por el polo del propagador, tenemos que usar el formalismo de tiempo imaginario para calcular la integral anterior

$$-1\Sigma(p) = (Vertice)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)} \frac{1}{((p+q)^2 - m^2)} \quad (4.83)$$

La suma de matsubara anterior se encuentra en el apéndice y fue obtenido en [7]].

## REFERENCIAS

- [1] Joseph I. Kapusta and Charles Gale. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. Cambridge Monographs, 2nd edition, 2006.
- [2] Michel Le Bellac. *Thermal Field theory*. University Press, 2000.
- [3] Mike Guidry. *Gauge eld theories: an introduction with applications*. John Wiley Sons, 2008.
- [4] Graham Shaw Mandl, Franz. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.
- [5] Sidney Coleman and SL Glashow. Departures from the eightfold way: Theory of strong interaction symmetry breakdown. *Physical Review*, 134(3B):B671, 1964.
- [6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An introduction to quantum Field theory*. Westview Press, 1995.
- [7] JI Kapusta and SMH Wong. Two-loop self-energy and multiple scattering at finite temperature. *Physical Review D*, 64(4):045008, 2001.

## 5. Teoría Quiral en Hadrones

En los años 50 una descripción de las interacciones fuertes de la teoría cuántica de campos parecía fallar debido a un número cada vez mayor de los hadrones observados, así como una constante de acoplamiento, que era demasiado grande para permitir una aplicación racional de la teoría de perturbaciones [1]. Los ricos espectros de hadrones junto con sus tamaños finitos fueron los primeros indicios que apuntaban a una subestructura en términos de constituyentes más fundamentales. Según el conocimiento actual, los hadrones son objetos muy complejos contruidos a partir de grados más fundamentales de la libertad. Estos son, por un lado, campos de materia espín 1/2 (quarks) y por otro lado campos (gluones) sin masa spin-1 que median las interacciones fuertes. Un cálculo de los momentos magnéticos anómalos de los protones y neutrones en el marco de una interacción pion-nucleón pseudoescalar dio lugar a los valores que estaban muy lejos de los empíricos. Por otro lado, un simple análisis del modelo de quark [2] dio una predicción  $-3/2$  para la relación  $\mu_p/\mu_n$  que es cercano al valor empírico de  $-1,46$ . Sin embargo, la existencia de los quarks fue objeto de fuertes debates durante mucho tiempo, ya que estos bloques de construcción elementales, a diferencia de los constituyentes de la física atómica, no podían ser aislados como partículas libres, sin importar la cantidad de energía que se suministra a los nucleones.

Muchos de los resultados experimentales de mediana y gran energía física [3] tales como la producción de pares de leptones en los procesos Drell-Yan, la producción de hadrones en la aniquilación electrón-positrón, la profunda dispersión inelástica leptón-hadrones se pueden describir con éxito utilizando métodos perturbativos en el marco de una teoría de gauge  $SU(3)$  conocida como la cromodinámica cuántica (QCD) [1, 4]. La QCD se distingue entre los seis sabores de quarks u(up), d(down), s(strange), c(charm), b(bottom) y t(top), cada uno de los cuales viene en tres colores diferentes grados de libertad y transformación como un triplete bajo la representación fundamental del color  $SU(3)$ . Las fuerzas nucleares son fuertes y de corto alcance. La interacción entre los quarks y los ocho bosones no depende de sabor, es decir, los gluones son en sí mismos sabor neutro. Por otro lado, la QCD contiene un carácter no-abeliano del grupo  $SU(3)$ , debido a que los gluones también transportan "cargas de color" de tal manera que la Lagrangiana de QCD contiene interacciones gluon-gluon que involucran vértices con tres y cuatro campos de gluones. Como resultado, la estructura de la QCD es mucho más complicado que el de la electrodinámica cuántica (QED) que se basa en una teoría Abeliiana  $U(1)$  de invariancia local.

Ya que ni los quarks ni los gluones se han observado cómo estados asintóticos libres, se supone que cualquier hadrón observable debe estar en un estado llamado singlete

de color que es invariante bajo el grupo  $SU(3)$  ante las transformaciones de color, es decir, un estado físicamente observable. El fuerte incremento del acoplamiento de corriente a grandes distancias, posiblemente, proporciona un mecanismo para el confinamiento de color [5]. La QCD exhibe la simetría  $SU(3)$  la cual es una simetría de color local y contiene nuevas simetrías globales. Por ejemplo, en un proceso de interacción fuerte, un quark puede que no cambia su sabor, y si pares quark-antiquark se crean o son aniquilados durante la interacción, estos pares deben ser neutrales de sabor. En otras palabras, para cada sabor la diferencia en el número de quarks y antiquarks (número sabor) es una constante del movimiento. Esta simetría se origina en una invariancia global bajo un producto directo de transformaciones  $U(1)$  para cada sabor de quark y una simetría exacta de QCD independiente del valor de las masas de los quarks.

Es bien sabido que el espectro de hadrones puede organizarse en términos de (aproximadamente) los estados básicos degenerados que llevan representaciones irreducibles de isospín  $SU(2)$ . Despreciando los efectos electromagnéticos, tal simetría en QCD resulta de la masa de los quarks  $u$  y  $d$  iguales. La extensión incluyendo el quark  $s$  lleva al famoso sabor de simetría  $SU(3)$ , que, sin embargo, ya se ha roto de manera significativa debido a la mayor masa de quark  $s$ . Las masas de los tres quarks  $u$ ,  $d$ , y  $s$  son pequeñas en comparación con las masas de "típicos" hadrones ligeros como, por ejemplo, el pión (140MeV) o el protón (938MeV). Por otro lado, los ocho mesones pseudoescalares más ligeros se distinguen por sus comparativamente pequeñas masas.

Aunque QCD es ampliamente aceptado como una teoría de norma fundamental que subyace a las interacciones fuertes, todavía carecemos de las herramientas analíticas para descripciones de propiedades y procesos de baja energía. Sin embargo, nuevas técnicas han sido desarrolladas para extender los resultados de la QCD. Una de estas técnicas llamada teoría de la perturbación quirral [6] describe la dinámica de los bosones de Goldstone, en el marco de una teoría de campo efectiva. Aunque uno vuelve a una teoría del campo en términos de hadrones no elementales, hay una distinción importante entre las primeras teorías cuánticas de campo de las interacciones fuertes y el nuevo enfoque en el sentido de que, ahora, se está tratando de resolver usando teoría de campo efectivas. El punto de partida es un teorema de Weinberg que indica que una descripción perturbativa en términos de una Lagrangiana efectiva más general que contiene todos los términos posibles compatibles con los principios de simetría supuestos se obtiene la matriz  $S$  compatible con los principios fundamentales de la teoría cuántica de campos y de los principios de simetría asumidos [6]. La prueba del teorema se basa en la invariancia de Lorentz y la ausencia de anomalías [7] y comienza a partir de la observación de que las identidades de Ward satisfechas por las funciones de Green de las corrientes de simetría que son equivalentes a la invariabilidad del generador funcional bajo transformaciones locales [7]. Por esa razón, se considera un Lagrangiano efectivo localmente invariante aunque las simetrías de la teoría subyacente pueden tener su origen en una simetría  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)$  del Lagrangiano quirral. Se supone que la simetría al ser rota espontáneamente a  $SU(3)_V \times U(1)_V$  y usando el teorema de Goldstone se generan ocho bosones sin masa. Los elementos de  $SU(3)$  están convenientemente

escritos en términos de la representación exponencial siguiente:

$$U(\Phi) = e^{-i \sum_{a=1}^8 \Phi_a \frac{\lambda_a}{2}} \quad (5.1)$$

$$\lambda_a = \lambda_a^\dagger \quad (5.2)$$

$$Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

El conjunto de matrices  $\lambda_a$  es la base para el álgebra de Lie  $SU(3)$  las cuales se llaman matrices Gellmann. La estructura del grupo de Lie está contenida en las relaciones de Conmutación de las matrices Gellmann dadas por:

$$\left(\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right) = if_{abc}\lambda_c \quad (5.5)$$

La constante estructura fina antisimétrica se obtienen con:

$$if_{abc}\lambda_c = \frac{1}{4i}Tr\left(\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right]\lambda_c\right) \quad (5.6)$$

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{abc}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Y las relaciones de anticonmutación están dadas por:

$$\lambda_a, \lambda_b = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c \quad (5.7)$$

abc	118	146	157	228	247	256	338	344
$d_{abc}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
abc	355	366	377	448	558	668	778	888
$d_{abc}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$id_{abc}\lambda_c = \frac{1}{4}Tr\left(\left\{\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right\}\lambda_c\right) \quad (5.8)$$

La matriz que contiene las masas en el Lagrangiano se puede escribir como

$$M = \sum_{a=0}^{\infty} \lambda_a M_a \quad (5.9)$$

Donde la matriz compleja  $M_a$  se puede escribir como

$$M_a = \sum_{a=0}^{\infty} Tr(\lambda_a M) \quad (5.10)$$

Los campos de materia de QCD son los llamados quarks, que son fermiones de spin-1/2, con seis sabores diferentes, además de sus tres posibles colores. Dado que los quarks no han sido observados como estados asintóticamente libres, el significado de masas de los quarks y sus valores numéricos están estrechamente relacionados con el método por el cual se extraen de propiedades hadrónicas. En cuanto a los llamados valores de corriente de los quarks ligeros, hay que ver los términos de masa de quarks simplemente como una ruptura de la simetría con los parámetros de su magnitud que proporciona una medida en que la simetría quiral se rompe [8]. Por ejemplo, las proporciones de las masas de los quarks livianos se pueden deducir de las masas del octeto pseudoescalar liviano (ver Ref. [9]). El Lagrangiano QCD obtenida del principio de norma es,

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_f \bar{q}_f (\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu} \quad (5.11)$$

Para cada sabor de quark  $q_f$  se compone de un triplete de color (subíndices r, g, b que significa "rojo", "verde" y "azul"),

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

este se aplica mediante una transformación de norma  $g(x)$  descrito por los parámetros  $\phi_a(x) = [\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]$

$$q_f \rightarrow q'_f = e^{\sum_{a=1}^8 \phi_a(x) \frac{\lambda_a^c}{2}} q_f = U[g(x)] q_f \quad (5.13)$$

Técnicamente hablando, cada campo quark se transforma de acuerdo con la representación fundamental del color  $SU(3)$ . Debido a que  $SU(3)$  es un grupo de ocho parámetros, la derivada covariante de la ecuación 5.11 contiene ocho potenciales de norma independientes  $A_{\mu,a}$ ,

$$D_\mu \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^c}{2} A_{\mu,a} \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Tomamos nota de que la interacción entre los quarks y los gluones es independiente de los sabores de quarks. Exigimos la invariancia de norma de  $\mathcal{L}_{QCD}$  imponiendo la siguiente propiedad de transformación de los campos de norma.

$$\lambda_a^c A_{\mu,a} \rightarrow U[g(x)] q_f \lambda_a^c A_{\mu,a} U^\dagger[g(x)] q_f - \frac{1}{2} \partial_\mu U[g(x)] q_f U^\dagger[g(x)] \quad (5.15)$$

Una vez más, con este requisito, la derivada covariante  $\partial_\mu q_f$  se transforma como  $D_\mu q \rightarrow D'_\mu q' = U(g) D_\mu q$ . Bajo una transformación de norma del primer tipo, es decir, una transformación  $SU(3)$  global, el segundo término en el lado derecho de la ecuación se desvanecería y los campos de norma transformaría según la representación adjunta. Hasta ahora sólo hemos considerado la parte más importante

del campo de  $\mathcal{L}_{QCD}$  incluyendo partes de la interacción con los campos de norma. Además la ecuación 5.11 también contiene la generalización del tensor de intensidad de campo para el caso no abeliano,

$$G_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} + gf_{abc}A_{\mu,b}A_{\nu,c} \quad (5.16)$$

con el grupo  $SU(3)$  las constantes Estructura se dan en la Tabla 2.1 así como la suma sobre índices repetidos implícitos. Dada la ecuación 5.15 el tensor de intensidad de campo se transforma bajo  $SU(3)$  como:

$$G_{\mu\nu,a} \equiv \frac{\lambda_a^c}{2} G_{\mu\nu,a} \rightarrow U[g(x)]G_{\mu\nu}U^\dagger[g(x)] \quad (5.17)$$

Usando la ecuación de Lagrangiano anterior, la parte gluonica  $\mathcal{L}_{QCD}$  se puede escribir de la siguiente manera,

$$G_{\mu\nu,a} \equiv G_{\mu\nu,a} \rightarrow U[g(x)]G_{\mu\nu}U^\dagger[g(x)] \quad (5.18)$$

$$\frac{1}{4}Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \quad (5.19)$$

que, mediante la propiedad cíclica de las trazas,  $Tr(AB) = Tr(BA)$ , junto con  $UU^\dagger = 1$ , se ve fácilmente que es invariante bajo la transformación de la ecuación 5.17. En contraste con el caso Abeliano de la QED, el tensor fuerza cuadrado de campo da lugar a interacciones del campo de gauge que implican auto vértices con tres y cuatro campos de norma de la fuerza  $g$  y  $g^2$ , respectivamente. Tales términos de interacción son característicos de teorías gauge no abelianas por lo que los hacen mucho más complicados que las teorías abelianas.

## 5.1 Simetría Quiral

La Lagrangiana de la QCD posee simetría quiral esto quiere decir que es invariante ante transformaciones de paridad por lo que se puede expresar en términos de estados izquierdos y derechos por lo que el lagrangiano sin masas esta dado por

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = -\frac{1}{4}Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + i\bar{q}_L\gamma^\mu D_\mu q_R + i\bar{q}_R\gamma^\mu D_\mu q_L \quad (5.20)$$

se tiene una Lagrangiana que es invariante bajo la transformación global  $G = SU(N_f)_L \times (N_f)_R$  de quarks derechos e izquierdos en un espacio de sabor.

$$q_x \rightarrow g_x q_x \quad x = R, L \quad (5.21)$$

Las corrientes Noether asociados con el grupo quiral  $G$  son:

$$J_X^{a\mu} = \bar{q}_x \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_x \quad x = R, L \quad a = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (5.22)$$

donde las cargas de Noether correspondientes están dadas por:

$$Q_X^a = \int d^3X J_X^{a0} \quad (5.23)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación familiares

$$[Q_X^a, Q_Y^b] = \delta_{XY} f_{abc} Q_X^c \quad (5.24)$$

### 5.1.1 Campos de Quarks Izquierdos y Derechos

Para mostrar la totalidad de las simetrías globales de Lagrangiano QCD la matriz quiralidad se tiene que introducir la relación  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , la quinta matriz gamma cumple con las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\gamma^5, \gamma_\mu] = 0 \quad \gamma_5^2 = 1 \quad (5.25)$$

Los operadores de proyección son:

$$P_R = 1/2(1 + \gamma_5) = P_R^\dagger \quad P_L = 1/2(1 - \gamma_5) = P_L^\dagger \quad (5.26)$$

Donde los subíndices  $R$  y  $L$  se refieren a la mano derecha e izquierda, respectivamente, como se hará más claro a continuación. Obviamente, las matrices de  $4 \times 4$   $P_R$  y  $P_L$  satisfacen la relación de completos.

$$P_R + P_L = 1 \quad (5.27)$$

$$P_R^2 = P_R \quad P_L^2 = P_L \quad (5.28)$$

Las ecuaciones anteriores garantizan que  $P_L$  y  $P_R$  son de hecho los operadores de proyección que proyectan a partir de la variable del campo de Dirac  $q$  a sus componentes quirales  $q_L$  y  $q_R$ ,

$$q_R = P_R q \quad q_L = P_L q \quad (5.29)$$

## 5.2 Teorema de Noether

Para identificar las corrientes asociadas con esta invariancia quiral de Noether, se aplica y considera la ecuación 5.20 bajo las variaciones de transformación infinitesimal local. Por simplicidad solamente consideramos solamente simetrías internas. Para ello partimos de una función de Lagrange  $\mathcal{L}$  en función de  $n$  campos independientes y sus primeras derivadas parciales.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)) \quad (5.30)$$

Para cada uno de los generadores de transformaciones infinitesimales que representan el grupo de simetría subyacente, considere una transformación infinitesimal local del campo -

$$\Phi_i(x) \rightarrow \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \delta\Phi_i(x) = \Phi_i(x) - \epsilon_a(x) F_i^a[\Phi_j(x)] \quad (5.31)$$

Haciendo caso omiso de los términos de orden superior, la variación de la función de Lagrange es

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi'_i(x), \partial_\mu \Phi'_i(x)) - \mathcal{L}(\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)) \quad (5.32)$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} \delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \Phi_i(x)} \partial_\mu \delta\Phi_i \quad (5.33)$$

$$= \epsilon_a(x) \left( -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} F_i^a - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \Phi_i(x)} \partial_\mu F_i^a \right) + \partial_\mu \epsilon_a(x) \left( -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \Phi_i(x)} \partial_\mu F_i^a \right) \quad (5.34)$$

$$= \epsilon_a(x) \partial_\mu J^{\mu a} + \partial_\mu \epsilon_a(x) J^{\mu a} \quad (5.35)$$

Donde la cuadridensidad de corriente se escribe como,

$$J^{\mu a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i(x)} F_i^a \quad (5.36)$$

Mediante el cálculo de la divergencia  $\partial_\mu J^{\mu a}$  obtenemos la cantidad conservada,

$$\partial_\mu J^{\mu a} = -i \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i(x)} \right) F_i^a - i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i(x)} \right) \partial_\mu F_i^a \quad (5.37)$$

$$= -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} F_i^a - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i(x)} \partial_\mu F_i^a \quad (5.38)$$

$$J^{\mu a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \epsilon_a(x)} \quad (5.39)$$

$$\partial_\mu J^{\mu a} = -i \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon_a(x)} \quad (5.40)$$

Entonces para una corriente conservada  $\partial_\mu J^{\mu a} = 0$ , la carga está dada por :

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(\vec{x}, t) \quad (5.41)$$

### 5.3 Lagrangiano Efectiva de Orden Más Bajo

Si queremos conseguir una realización de Lagrangiano efectiva de QCD, a bajas energías, para el sector ligero de quarks (u, d, s), nuestro supuesto básico es el patrón de SCSB (Rompimiento espontaneo de la simetría) es decir,

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{SCSB} SU(3)_V \quad (5.42)$$

La comprensión actual del mecanismo de SCSB se basa en la generación dinámica de un valor distinto de cero del valor esperado del condensado quark escalar  $\square = \langle 0 | \bar{u}u_0 | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d_0 | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{s}s_0 | 0 \rangle \neq 0$ . El bosón de Goldstone que corresponde a las excitaciones de energía cero más el condensado de vacío; su campo se puede recoger en una matriz unitaria de 3x3

$$U(\Phi) = e^{i \frac{\Phi \sqrt{2}}{f_\pi}} \quad (5.43)$$

$$\Phi(x) = \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{2}} \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

La matriz  $U(\Phi)$  se transforma linealmente bajo el grupo quiral

$$U(\Phi) \rightarrow g_R U(\Phi) g_L^\dagger \quad (5.45)$$

pero la transformación inducida por campos de Goldstone  $\Phi$  es altamente no lineal. Como hay una brecha que separa la masa del octeto pseudoescalar del resto del espectro de hadrones, podemos construir un una teoría efectiva de campo que contiene sólo los modos de Goldstone. Debemos escribir la función de Lagrange más

general que implica la matriz  $U(\Phi)$ , que es coherente con la simetría quiral. Por otra parte, podemos organizar la función de Lagrange en términos de aumento de los poderes del momento o, de manera equivalente, en términos de un número creciente de derivados (conservación de la paridad requiere un número par de derivados):

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_n L_{2n} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad (5.46)$$

donde  $F_0 \approx 93 \text{MeV}$  es un parámetro libre directamente relacionado con el decaimiento del pion. El orden más bajo del Lagrangiano mesónico,  $L_2$ , está dado por el modelo  $\sigma$  no lineal acoplado a campos externos [10, 11]. Contiene dos parámetros libres: la constante de desintegración de piones y el condensado de quarks escalar en el límite quiral. Los valores específicos no están determinados por la simetría quiral y deben, en última instancia explicarse a partir de la dinámica de QCD en el cálculo de los procesos en la aproximación fenomenológica a  $L_2$ , es decir, considerando únicamente los diagramas de niveles de árbol, donde uno reproduce los resultados de álgebra actual [6]. Dado que los diagramas de nivel de árbol que involucran vértices derivados de un Lagrangiano hermitiano son siempre reales, uno tiene que ir más allá del nivel de un loop con el fin de no violar la unitariedad de la matriz S. Un cálculo de diagramas de un loop con  $L_2$ , por una parte, conduce a infinitos que no son del tipo de original, y también contribuye a una restauración perturbativa de unitariedad. Debido al power counting de Weinberg, los términos divergentes son de orden  $O(P^4)$  y por lo tanto se pueden compensar por medio de una renormalización de la función de Lagrange más general en  $O(P^4)$ .

El Lagrangiano efectivo más general, en  $O(P^4)$  se construyó por primera vez por Gasser y Leutwyler el cual contiene 10 constantes energía baja (LEC), así como dos términos adicionales que contienen solamente los campos externos. Ocho constantes son necesarios para la renormalización de los infinitos debido a los diagramas de un loop que implican en  $L_2$ . Las partes finitas de las constantes representan parámetros libres, lo que refleja nuestra ignorancia con respecto a la teoría subyacente, es decir, la QCD, en este orden de la expansión dinámica. Estos parámetros pueden ser fijados fenomenológicamente por comparación con los datos experimentales [11, 12]. También existen enfoques teóricos para estimar las constantes de bajo orden en el marco de los modelos inspirados por la QCD [12, 13, 14, 15], la saturación resonancia- meson [16, 17, 18, 19] y QCD en lattice [20, 21]. Sin campos externos (es decir, QCD puro) o incluyendo solamente procesos electromagnéticos, los Lagrangianos efectivos  $L_2$ , y  $L_4$ , tienen una simetría adicional: contienen los términos de interacción que involucran exclusivamente un número par de bosones de Goldstone. Esta propiedad se refiere a menudo como normal o incluso la paridad intrínseca, pero obviamente no es una simetría de la QCD, porque excluye reacciones del tipo  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  o  $K + K^- \rightarrow \pi + \pi^- \pi^0$ . En [22], Witten discutió cómo quitar esta simetría del Lagrangiano efectivo y esencialmente re-deriva la acción anómala efectiva Wess-Zumino que describe la anomalía quiral. La correspondiente función de Lagrange, que es de orden  $O(P^4)$ , no se puede escribir como un Lagrangiano efectivo local de estándar en términos de la matriz quiral habitual  $U$  pero puede expresarse directamente en términos de los campos de bosones de Goldstone, particularmente para el caso anterior, por la construcción que contiene los términos de interacción con un número impar de bosones de Goldstone (paridad intrínseca

impar). A diferencia de la función de Lagrange de Gasser y Leutwyler, la acción efectiva Wess-Zumino-Witten (WZW) no contiene ningún parámetro libre, aparte de la cantidad de colores. Además la excelente descripción del decaimiento de piones neutros  $a \rightarrow \gamma\gamma$  para  $N_c = 3$  es considerado como una prueba clave para la existencia de tres grados de color.

## 5.4 Relación Gellmann-Okubo

En física, la fórmula de la masa Gell-Mann-Okubo ([23],[24]) proporciona una regla de la suma de las masas de hadrones dentro de un multiplete específico, determinada por su isospín y extrañeza ( o, alternativamente , hipercarga ). Queremos calcular la masa de los quarks a partir de los mesones ,entonces usaremos el termino de masa del Lagrangiano que rompe la simetría por lo que utiliza el siguiente Lagrangiano  $\mathcal{L}_{sb}$

$$\mathcal{L}_{sb} = \frac{f_\pi^2 B_0}{2} (Tr\{2M\} + \frac{1}{f_0^2} Tr\{M\pi^2\}) \quad (5.47)$$

Para empezar nos enfocamos en el segundo término

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_0^2} Tr\{M\pi^2\} &= \begin{bmatrix} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{m}_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{bmatrix} = M_{ij}(\pi_{ij})^2 = M_{ij}\pi_{jk}\pi_{ki} \end{aligned}$$

Donde se tiene que,

$$(\pi^{11})^2 = (\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta)^2 + 2\pi^+\pi^- 2K^+K^- \quad (5.48)$$

$$(\pi^{22})^2 = 2\pi^+\pi^- + (-\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta)^2 + 2\bar{K}^0K^0 \quad (5.49)$$

$$(\pi^{33})^2 = -2K^+K^- - 2\bar{K}^0K^0 + (\sqrt{\frac{4}{3}}\eta)^2 \quad (5.50)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{m}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\pi^{11})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\pi^{22})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\pi^{33})^2 \end{bmatrix} = \hat{m}\pi^{11} + \hat{m}\pi^{22} + \hat{m}_s\pi^{33} \quad (5.51)$$

Tomando solo los términos del Lagrangiano tipo masa.

$$\frac{1}{f_0^2} Tr\{M\pi^2\} = (2(\pi^0)^2 + \frac{2}{3}\eta^2 + 2\bar{K}^0K^0)\hat{m} + (\frac{4}{3}\eta^2 + 2\bar{K}^0K^0)\hat{m}_s \quad (5.52)$$

Igualando términos tipo masa podemos deducir la masa de los mesones.

$$\frac{f_\pi^2 B_0}{2} (Tr\{2M\}) = \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{2} \quad (5.53)$$

$$m_\pi^2 = B_0(m_u + m_d)m_\eta^2 = \frac{1}{3}B_0(m_u + m_d + 4m_s)m_k^2 = B_0(m_u + m_d + m_s) \quad (5.54)$$

Para entender el valor para el parámetro  $B_0$  se realiza lo siguiente,

$$\mathcal{L}_{sb} = \frac{f_\pi^2 B_0}{2} (\text{Tr}\{2M\} + \frac{1}{f_0^2} \text{Tr}\{M\pi^2\}) \quad (5.55)$$

$$\mathcal{H}_{sb}^{eff} = -\mathcal{L}_{sb} \quad (5.56)$$

Para el estado fundamental  $U$  se expande hasta primer orden.

$$\mathcal{L}_{sb} = \frac{f_\pi^2 B_0}{2} \text{Tr}\{2M\} = \frac{f_\pi^2 B_0}{2} (m_u + m_d + m_s) \quad (5.57)$$

Por otra parte el estado fundamental de la cromodinamica cuántica está dado por el condensado de quarks.

$$\langle \mathcal{H}_{QCD} \rangle = \langle \bar{q}q_0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}q_0 | 0 \rangle \quad (5.58)$$

$$\mathcal{H}_{QCD} = -\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + (m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s) \quad (5.59)$$

Suponemos que los condensados de los pares de quark antiquark son iguales.

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle \quad (5.60)$$

$$\langle \bar{q}q \rangle = q \langle \bar{u}u \rangle \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial \langle \mathcal{H}_{QCD} \rangle}{\partial m_u} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial \langle \mathcal{H}_{sb}^{eff} \rangle}{\partial m_u} = -f_\pi^2 B_0 \quad (5.63)$$

Igualando las últimas dos ecuaciones se tiene,

$$\frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle = -f_\pi^2 B_0 \quad (5.64)$$

$$-\frac{1}{3f_\pi^2} \langle \bar{q}q \rangle = B_0 \quad (5.65)$$

un vez obtenido  $B_0$  podemos llegar a la relación buscada mediante la sustitución de los términos de masa para los mesones ,

$$m_\pi^2 = - - \frac{1}{3f_\pi^2} \langle \bar{q}q \rangle (m_u + m_d) \quad (5.66)$$

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle (m_u + m_d) \quad (5.67)$$

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{1}{2} \langle 0 | \bar{d}d + \bar{d}d | 0 \rangle (m_u + m_d) \quad (5.68)$$

## 5.5 Teoría Quiral de Perturbaciones

La teoría quiral de perturbaciones conocido como (ChPT) por su siglas en ingleses una teoría de campo efectivo construida con una función de Lagrange consistente con la simetría quiral (aproximada) de la cromodinámica cuántica (QCD), así como las simetrías de paridad y la conjugación de la carga. ChPT es una teoría que permite estudiar la dinámica de baja energía de QCD. Como QCD se convierte en no-perturbativa a baja energía, es imposible utilizar métodos perturbativos para extraer información de la función de partición de QCD en el régimen de baja energía de la QCD, los grados de libertad ya no son los quarks y los gluones, sino más bien de hadrones, este es un resultado del confinamiento. Si uno pudiera "resolver" la función de partición QCD, (de modo que los grados de libertad en el Lagrangiano se sustituyen por los hadrones) entonces se podría extraer información acerca de la física a baja energía. Hasta la fecha esto no se ha logrado. Una teoría efectiva de baja energía con hadrones como los grados fundamentales de la libertad es una posible solución, de acuerdo con Steven Weinberg, una teoría efectiva puede ser útil si uno escribe todos los términos compatibles con las simetrías de la teoría fundamental. En general, hay un número infinito de términos que cumplen este requisito. Por lo tanto, con el fin de hacer predicciones físicas, uno asigna la teoría de un sistema de Power Counting que organiza términos por un grado de importancia pre-especificado que permite a uno mantener algunos términos y rechazar todos los demás como correcciones de orden superior que puede dejarse de lado en forma segura. Además, las constantes de acoplamiento desconocidos, también llamadas constantes de baja energía (LEC), se asocian con los términos de la función de Lagrange que se pueden determinar mediante el ajuste a los datos experimentales o derivarse de la teoría. La base de la teoría de la perturbación quiral es que a bajas energías se puede utilizar un Lagrangiano efectivo para describir las interacciones fuertes en lugar de la Lagrangiano estándar de la cromodinámica cuántica. En el Lagrangiano efectivo, los quarks y los campos de gluones de QCD son reemplazados con campos de mesones y bariones. El resultado es que los cálculos necesarios para una reacción específica se simplifican mediante la sustitución de todas las interacciones quark por una serie de vértices efectivos. Los vértices efectivos deben reproducir los resultados de la QCD, los cuales deberán cumplir las mismas propiedades de simetría que la teoría mencionada. Se trata de las simetrías quirales, de Lorentz, P, C y T que dan la forma a los vértices efectivos. Cada vértice efectivo también incluye una o más constantes de baja energía, que podría, en principio calcularse utilizando QCD, aunque en la práctica estas constantes se determinan por lo general de forma experimental. A energías más altas, el Lagrangiano efectivo y las constantes de baja energía (LEC) dejan de aproximar las propiedades físicas de las partículas, y la teoría de la perturbación quiral deja de proporcionar un modelo preciso. En general la función de Lagrange para mesones se puede utilizar para describir los octetos completos de mesones pseudoescalares y vectoriales, aunque sólo obtendremos lo parte del Lagrangiano que describe los tres mesones de energía más bajos, conocidos como los piones. Mientras que la Lagrangiana total SU (3) no es difícil de calcular, los vértices suplementarios que contiene no son necesarios en las reacciones de nucleones-pión. Similarmente el Lagrangiano meson-barión que contiene interacciones del octeto barión con el octeto mesón pseudoescalar puede reducirse a contener sólo interacciones

pión-nucleón. El Lagrangiano quiral de Orden ( $p^4$ ) está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 = & L_1(\text{Tr}\{D_\mu D^\mu U^\dagger\})^2 + L_2(\text{Tr}\{D_\mu D_\nu U^\dagger\}\text{Tr}\{D^\mu D^\nu U^\dagger\}) \\
& + L_3(\text{Tr}\{D_\mu D^\mu U^\dagger\}\text{Tr}\{D_\nu D^\nu U^\dagger\}) + L_4(\text{Tr}\{D_\mu D^\mu U^\dagger\}\text{Tr}\{\chi U^\dagger - U\chi\}) \\
& + L_5(D_\mu D^\mu U^\dagger(\text{Tr}\{\chi U^\dagger - U\chi\})) + L_6(\text{Tr}\{\chi U^\dagger + U\chi\})^2 + L_7(\text{Tr}\{\chi U^\dagger - U\chi\})^2 \\
& L_8(\text{Tr}\{\chi U^\dagger \chi U^\dagger - U\chi^\dagger U\chi^\dagger\}) - iL_9(\text{Tr}\{f_{\mu\nu}^R D^\mu D^\nu U^\dagger + f_{\mu\nu}^L D_\mu D_\nu U^\dagger\}) \\
& + L_{10}(\text{Tr}\{U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_{\mu\nu}^R\}) + H_1 \text{Tr}\{f_{\mu\nu}^L f^{R,\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f^{L,\mu\nu}\} + H_2 \text{Tr}\{\chi\chi^\dagger\}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

## 5.6 Rompimiento de la Simetría

Las simetrías de las leyes físicas pueden ser rotas, ya sea de manera explícita o de forma espontánea. Para introducir la ruptura de la simetría de manera explícita se utiliza un parámetro como término ESB (rompimiento explícito de la simetría) como se proponen en [25] y [26]. Para introducir el rompimiento de manera espontánea o SSB (rompimiento espontaneo de la simetría) podemos usar el potencial siguiente conocido como potencial de sombrero mexicano:

$$V(\sigma, \pi) = \frac{1}{2}\mu^2(\pi^2 + \sigma^2) + \frac{\lambda}{4!}(\pi^2 + \sigma^2)^2 \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial V(\sigma, \pi)}{\partial \sigma} = \sigma(\mu^2 + \frac{\lambda}{6}(\pi^2 + \sigma^2)) = 0 \quad \frac{\partial V(\sigma, \pi)}{\partial \pi} = \pi(\mu^2 + \frac{\lambda}{6}(\pi^2 + \sigma^2)) = 0 \tag{5.71}$$

Si  $\mu^2 > 0$  no existe una solución real entonces el potencial tiene el siguiente comportamiento

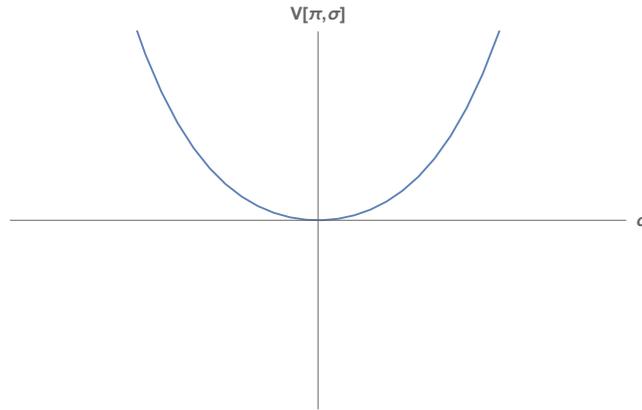


Figure 5.1: Potencial con simetría no rota.

Si  $\mu^2 < 0$  tendríamos el potencial de la figura 5.2, entonces para romper la simetría seleccionamos el valor esperado de vacío como el estado fundamental  $\xi = \sqrt{\frac{-6\lambda}{\mu^2}}$  y  $\pi = 0$  recordando que como en cualquier teoría de campo cuántica las partículas se generan a partir del vacío  $\pm\sigma_0$ .

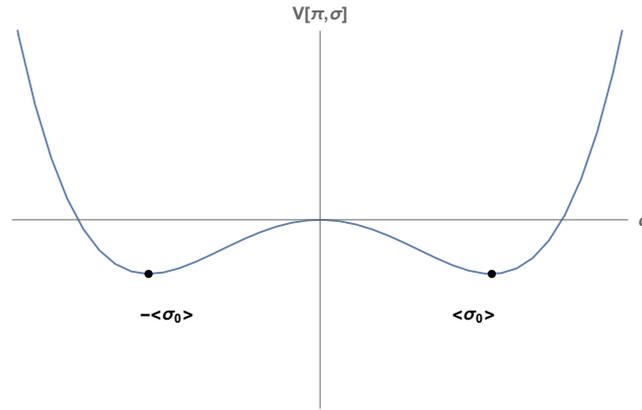


Figure 5.2: Potencial tipo "Sombrero Mexicano" que representa la ruptura de la simetría.

## REFERENCIAS

- [1] David J Gross. Twenty five years of asymptotic freedom. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 74(1-3):426–446, 1999.
- [2] Giacomo Morpurgo. Is a non-relativistic approximation possible for the internal dynamics of elementary particles? *Physics*, 2:95, 1965.
- [3] Guido Altarelli. Experimental tests of perturbative qcd. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 39(1):357–406, 1989.
- [4] Steven Weinberg. Non-abelian gauge theories of the strong interactions. *Physical Review Letters*, 31(7):494, 1973.
- [5] David J Gross and Frank Wilczek. Asymptotically free gauge theories. i. *Physical Review D*, 8(10):3633, 1973.
- [6] Steven Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 96(1-2):327–340, 1979.
- [7] Heinrich Leutwyler. On the foundations of chiral perturbation theory. *arXiv preprint hep-ph/9311274*, 1993.
- [8] Florian Scheck. *Electroweak and strong interactions: An introduction to theoretical particle physics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] H Leutwyler. The ratios of the light quark masses. *Physics Letters B*, 378(1-4):313–318, 1996.
- [10] Juerg Gasser and Heinrich Leutwyler. Chiral perturbation theory to one loop. *Annals of Physics*, 158(1):142–210, 1984.
- [11] Juerg Gasser and Heinrich Leutwyler. Chiral perturbation theory: expansions in the mass of the strange quark. *Nuclear Physics B*, 250(1-4):465–516, 1985.
- [12] editors Maiani Luciano, et al. *The Second DANE Physics Handbook*, volume 452. Springer Verlag, 1995.

- [13] D Ebert and H Reinhardt. Effective chiral hadron lagrangian with anomalies and skyrme terms from quark flavour dynamics. *Nuclear Physics B*, 271(3-4):188–226, 1986.
- [14] Doménech Espriu, E De Rafael, and J Taron. The qcd effective action at long distances. *Nuclear Physics B*, 345(1):22–56, 1990.
- [15] D Ebert, AA Bel’kov, AV Lanyov, and A Schaale. Effective chiral lagrangians for strong, weak and electromagnetic-weak interactions of mesons from quark flavor dynamics. *International Journal of Modern Physics A*, 8(07):1313–1344, 1993.
- [16] Gerhard Ecker, Jurg Gasser, H Leutwyler, Antonio Pich, and E De Rafael. Chiral lagrangians for massive spin-1 fields. *Physics Letters B*, 223(3-4):425–432, 1989.
- [17] Gerhard Ecker, Jürg Gasser, Antonio Pich, and Eduardo De Rafael. The role of resonances in chiral perturbation theory. *Nuclear Physics B*, 321(2):311–342, 1989.
- [18] John F Donoghue, Carlos Ramirez, and German Valencia. Spectrum of qcd and chiral lagrangians of the strong and weak interactions. *Physical Review D*, 39(7):1947, 1989.
- [19] Stefan Leupold. Rho meson properties from combining qcd-based models. *Nuclear Physics A*, 743(4):283–302, 2004.
- [20] Stanley Myint and Claudio Rebbi. Derivation of chiral lagrangians from lattice qcd. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 34:213–215, 1994.
- [21] Maarten Golterman. Chiral perturbation theory, non-leptonic kaon decays, and the lattice. *Chiral Dynamics: Theory and Experiment III: Jefferson Laboratory, USA, July 17-22, 2000*, 11:33, 2001.
- [22] Edward Witten. Global aspects of current algebra. *Nuclear Physics B*, 223(2):422–432, 1983.
- [23] Murray Gell-Mann. The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry. Technical report, California Inst. of Tech., Pasadena. Synchrotron Lab., 1961.
- [24] Susumu Okubo. Note on unitary symmetry in strong interactions. *Progress of Theoretical Physics*, 27(5):949–966, 1962.
- [25] R Rapp, J Wambach, and H Van Hees. The chiral restoration transition of qcd and low mass dileptons. In *Relativistic Heavy Ion Physics*, pages 134–175. Springer, 2010.
- [26] David A Kirzhnits and Andrei D Linde. Macroscopic consequences of the weinberg model. *Physics Letters B*, 42(4):471–474, 1972.

## 6. *El Modelo Sigma Lineal*

Durante los últimos 20 años se ha dedicado un gran esfuerzo al estudio teórico y experimental de las colisiones de iones pesados relativistas. Algunas predicciones muy interesantes se han hecho usando Lattice Gauge Theory, así como métodos no perturbativos en QCD a temperatura finita aplicado a la materia hadrónica en condiciones extremas de densidad y temperatura. Algunos de estas predicciones son la restauración de la simetría quiral [1] y la transición al desconfinamiento en cual la materia hadrónica se descompone en un plasma de quarks y gluones. Además en los años setenta, Kirzhnits y Linde [2] sugirieron que las simetrías rotas a temperatura cero podrían ser restauradas a temperatura finita. Particularmente la modificación de las propiedades de hadrones en materia nuclear caliente y densa, el cual es considerado un tema interesante en la física nuclear, la astro-física y la cosmología, que es comúnmente estudiado mediante el uso de teorías de campo efectivas en QCD, ver Ref[3]. Por ejemplo, una Teoría efectiva con simetría  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  y rompimiento espontaneo de la simetría (SSB) se puede aplicar a los sistemas a temperatura finita. Estos modelos han descrito con éxito las propiedades térmicas y dinámicas de materia hadrónica. En particular, el modelo Sigma Modelo Lineal (LSM) [4] que utilizamos en este trabajo, es una teoría de campo efectivo de la QCD renormalizable a bajas energías, introducida inicialmente por Gell-Mann y Levy (1960) [5] para estudiar las interacciones entre nucleones y piones. En su versión original, el LSM contiene como grados de libertad, los nucleones, tres piones y el mesón escalar isoscalar conocido como sigma. La cantidad importante de las predicciones del modelo y el éxito obtenido en la explicación de varios fenómenos observados, han traído a este modelo un muy alto grado de confianza.

Por otro lado, se conoce que hay una conexión directa entre el condensado quiral de QCD, que se asocia con el mesón sigma escalar, también conocido como  $f_0(600)$  [6], y el desconfinamiento de la transición de fase [7]. Las pruebas experimentales sobre la existencia del mesón sigma se puede ver en Ref.[7]. Además, las propiedades del sigma juegan un papel muy importante en la descripción de la fuerza nuclear, ya que esta partícula tiene un papel como partícula intermediara en varios procesos en el vacío y en el medio nuclear [7]. Por ejemplo, algunos de los aspectos de la física de hadrones en los que participa el mesón sigma escalar son:

1. La existencia de sigma está relacionada con el vacío de la QCD, jugando el mismo papel que el bosón de Higgs en la teoría electro débil.[8]
2. Hay evidencia de la participación de la sigma en los procesos de dispersión pion-pion.[9]
3. En el Modelo Sigma Lineal, el sigma es esencial para explicar las interacciones pion-nucleón.[8]

En el proceso de colisión entre iones pesados a muy altas energías, se producen un gran número de mesones, entre ellos piones y mesones sigma. La evolución dinámica del sistema es fuertemente influenciada por el comportamiento térmico de la física en los parámetros de estos mesones. Esta es una de las razones por el interés actual en la comprensión de la forma en que las masas y anchuras de mesones cambian con la temperatura, ver Ref [10].

A pesar de que la partícula sigma escalar juega un papel importante en fuerte interacciones a bajas energías, sus propiedades a temperatura finita aún no están bien entendidas, en particular el comportamiento de su masa. Por otra parte, muy pocos aspectos físicos se conocen hasta ahora sobre la estructura del mesón sigma. Con respecto a este se han propuesto diversas posibilidades sobre la naturaleza de la sigma entre ellos se encuentran glueballs,[11, 12] tetraquarks[13, 14] o una resonancia pion-pion[15]. Una gran esfuerzo en el aspecto teórico se ha dedicado al estudio de la conducta del mesón a temperatura de finita, entre ellos se puede mencionar los trabajos de Refs.[16, 17, 18, 19, 20]. Por otro lado, los estudios experimentales sobre el comportamiento de la materia bajo condiciones extremas de densidad y temperatura se llevan a cabo a través de colisiones ultrarelativistas de iones pesados que tienen lugar en el programa del Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) y en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC)[21], esta investigación proporcionara datos experimentales que se puede utilizar para probar los resultados teóricos obtenidos en la física de las interacciones fuertes, que se refieren al estudio llevado a cabo en este trabajo. La lista anterior de fenómenos, en los que el sigma escalar participa, y los aspectos que muestran la relevancia de sigma en los procesos de baja energía de las interacciones fuertes, son las razones que justifican el enorme interés en la comprensión de sus propiedades.

El propósito de este trabajo es el estudio de la masa y la anchura del mesón sigma mediante el uso de su función espectral en el marco LSM, usando el procedimiento de resumación conocido como Optimized Perturbation Theory (OPT), siguiendo el trabajo de Ref. [22]. En particular en este trabajo se ha construido la función espectral de sigma a diferentes valores de la temperatura, que muestran un incremento en el pico de la función espectral. Este comportamiento es una firma de la restauración parcial de la simetría quiral o, equivalentemente, una tendencia del sistema de someterse a una transición de fase quiral. Además se estudia el ancho del sigma, en el momento en el que se lleva a cabo el aumento del pico de la función espectral se lleva a cabo, para diferentes valores de la masa del sigma. Se ha encontrado que hay una breve ampliación seguido de una caída abrupta en la anchura con el aumento de la temperatura. Se interpreta este resultado como una restauración de la simetría quiral, ya que se ha demostrado que este fenómeno da lugar a un pequeño ancho de sigma, que es debido a la supresión del espacio fase del sigma en el decaimiento a dos piones.

## 6.1 El Modelo Sigma Lineal

El modelo LSM se introdujo en el trabajo original [5] en el cual los autores introdujeron como grados de libertad un isotriplete de piones ( $\pi$ ), una isodoublete de nucleones ( $N$ ) y el mesón escalar sigma ( $\sigma$ ). La densidad de Lagrange propuesta se escribe ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2) + \bar{N} i \gamma^\mu \partial_\mu N + g \bar{N} (\sigma + i \tau \cdot \pi \gamma_5) N - V(\sigma, \pi) \quad , \quad (6.1)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento nucleón-mesón y  $V(\sigma, \pi)$  es potencial producido para romper de forma espontánea de la simetría quiral  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  que se escribe de la siguiente manera,

$$V(\sigma, \pi) = \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{24} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad , \quad (6.2)$$

Dónde  $\mu^2$  es un término de masas y  $\lambda$  es la constante de acoplamiento pion-sigma. Debido a nuestro interés en el análisis de la propagador mesón sigma solo estamos interesados en la parte mesonica del Lagrangiano. El SSB está presente en el modelo y además, se considera un término para romper de forma explícita la simetría.

## 6.2 Rompimiento Espontaneo de la simetría

Con el fin de romper espontáneamente la simetría quiral es necesario establecer  $\mu^2 < 0$ , donde el valor esperado de vacío se define como  $\sigma_0 = \xi = \sqrt{-\frac{6}{\lambda} \mu^2}$  con  $\pi = 0$ . Como se tiene habitualmente las partículas están representados por los campos desplazados  $\delta\sigma$  y  $\delta\pi$ , y son generados a partir del vacío de acuerdo con las relaciones habituales:  $\delta\sigma = \sigma - \xi$  y  $\delta\pi = \pi$  al ampliar el potencial  $V(\delta\sigma + \xi, \delta\pi)$  , los términos de interacción se dan por los diagramas mostrados en la Fig.6.1.

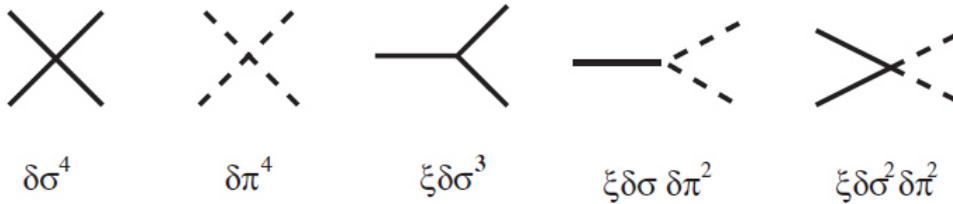


Figure 6.1: Diagramas para el potencial  $V(\delta\sigma + \xi, \delta\pi)$

El SSB produce la generación de las masas a nivel de árbol para el pion y el sigma,

$$\begin{aligned} m_{0\sigma}^2 &= \mu^2 + \frac{\lambda}{2} \xi^2 \\ m_{0\pi}^2 &= \mu^2 + \frac{\lambda}{6} \xi^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

### 6.2.1 Rompimiento Explicito de la Simetría

En el caso del Rompimiento Explicito de la Simetría (ESB), las ecuaciones dinámicas no son invariantes bajo el grupo de simetría considerado. En este caso, al menos

un término de ESB estará presente en la función de Lagrange[23]. Los términos de ESB se pueden insertar mediante simple términos matemáticos o resultados experimentales, también utilizando anomalías mecánico cuánticas para cantidades tales como las corrientes Noether y en la teoría de campo efectivo, cuando se toman en cuenta términos de orden mayor en efectos no renormalizable de mayor masa, todo esto conduce al rompimiento explícitamente de la simetría.

### 6.3 Método de Resumación

En esta sección se revisa la obra de Chiku y Hatsuda [[22]] en específico aquí presentamos el marco de OPT. Es bien sabido que para el modelo LSM cuando se usa la técnica conocida como Naive Perturbación Teoría (TNP) a temperatura finita, el procedimiento fracasa [22]. Por ejemplo, cuando NPT se usa para los cálculos en materia caliente, la masa generada a través de la SSB se comporta de manera taquionica. Este problema puede ser tratado por una expansión efectiva que implica algunos términos de resumación como el uso de bucles térmicos duros [24], este método para llevar a cabo el procedimiento de resumación se introdujo por primera vez con resultados importantes en Ref. Citen paul, chiku y se llama Optimized Perturbation Theory (OPT). Con el fin de introducir el método OPT comenzamos con el siguiente Lagrangiano con simetría  $O(4)$  y con contra términos[[22]],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial\phi)^2 - \mu^2\phi^2) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}C_1(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}C_2\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}C_3\phi^4 + C_4\mu^4 + h\sigma \quad , \quad (6.4)$$

dónde  $\phi = (\sigma, \pi)$  son los campos del pion y sigma y  $C_1, C_2, C_3, C_4$  son los contra términos renormalizados, ver Refs.[25]. Con el fin de romper la simetría quiral explícitamente se introduce el parámetro  $h$  [26] en la Ec. (6.4), esto provoca que los piones adquieran masa. Los valores de las constantes se muestran en la Tabla 1.

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
0	$\frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$	$\frac{\lambda}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$	$-\frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$

Tabla 1. Valores de las constantes renormalizadas donde  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi)$ ,  $\gamma$  es la constante de Euler y  $n$  es el número de dimensiones.

Entonces el término de masa  $\mu^2$  se separa en dos partes mediante la introducción de un nuevo término de masa  $m^2$  a través de la identidad  $\mu^2 = m^2 - \chi$  donde  $m^2$  es una masa a nivel de árbol y  $\chi$  es tratado como una perturbación tomado de las referencia [22]. Además se introduce el campo desplazado con la sustitución  $\sigma = \sigma + \xi$  y junto con la identidad mencionada, el lagrangiano dado en la ecuación (6.4) sería el siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}\chi\phi^2 + h\sigma - \frac{1}{2}C_1(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}C_2m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}C_3\phi^4 + C_4m^4 \quad . \quad (6.5)$$

dónde  $\phi = (\sigma + \xi, \pi)$  son los campos del pion y sigma. Ya que sólo estamos interesados en términos de orden de a un loop, se han omitido los términos  $C_4\chi^2$ ,  $C_4\chi$  and  $C_2\chi$ . Los parámetros  $m$  o las masas a nivel de árbol para el  $\sigma$  y  $\pi$  se vuelven dependientes

de la temperatura cuando uno aplica ya sea el formalismo de tiempo imaginario o formalismo de tiempo real a los propagadores sigma y pion, los parametros de masa a nivel árbol se muestran a continuación

$$\begin{aligned} m_{0\sigma}^2(T) &= m^2(T) + \frac{\lambda}{2}\xi(T)^2 \\ m_{0\pi}^2(T) &= m^2(T) + \frac{\lambda}{6}\xi(T)^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Para encontrar el valor esperado  $\xi(T)$ , se introduce el siguiente potencial efectivo regularizado al nivel de un loop,

$$\begin{aligned} D(\xi, m, T) &= \frac{1}{2}(\mu\xi)^2 - h\xi + \frac{\lambda}{4!}\xi^4 + \frac{1}{64\pi^2} [m_{0\sigma}^4 \ln|\frac{m_{0\sigma}^2}{\kappa^2 e^{\frac{3}{2}}}| + 2m_{0\pi}^4 \ln|\frac{m_{0\pi}^2}{\kappa^2 e^{\frac{3}{2}}}|] \\ &+ T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\ln(1 - e^{\frac{E_\sigma}{T}}) + 3\ln(1 - e^{\frac{E_\pi}{T}})] \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde se tiene que

$$E_\phi = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_{0\phi}^2} \quad , \quad (6.8)$$

$m_{0\phi}$  puede ser la masa a nivel árbol del pion o sigma,  $\kappa$  es un punto renormalización que se introduce durante el procedimiento de regularización, mientras que  $E_\sigma$  y  $E_\pi$  son la energía del sigma y pion.

### 6.3.1 Condiciones de Optimización

El método OPT aplicado al modelo sigma lineal establece condiciones físicas que ayudan a determinar los parámetros  $(\mu^2, h, \lambda)$  a  $T = 0$ . Estas condiciones están etiquetadas como 1, 2 y 3 y se muestran a continuación.

**Condicion 1.** El Propagador del Pion:

$$m_\pi^2 - m_{0\pi}^2 - \Sigma_\pi(\omega, k, T)|_{T=0} = 0 \quad , \quad (6.9)$$

donde  $m_\pi = 140\text{MeV}$  es la masa física del pion,  $\Sigma_\pi(\omega, k, T)$  es la autoenergía renormalizada del pion,  $m_{0\pi}^2$  es la masa nivel de árbol que tomamos como  $m_{0\pi} = m_\pi$  la cual nos da la ventaja de que la auto-energía a un loop del pion,  $\Sigma_\pi(\omega, k, T)$  sea igual a cero y el comportamiento de la función espectral sigma comienza en el pico de la función espectral. Además el trimomento de la auto energía se toma como  $\mathbf{k} = 0$  y  $\omega$  representa la masa de la partícula para el pion se elige igual que  $140\text{MeV}$ . Por otra parte, los términos térmico-dependientes desaparecen cuando se aplican los criterios  $\Sigma(\omega, 0, 0) = 0$ , con el fin de ser consistentes con  $m^2(T) = \mu^2$  a  $T=0$ .

**Condicion 2.** La Corriente Axial parcialmente conservada (PCAC), que se escribe de la siguiente manera :

$$f_\pi m_{0\pi}^2 = h\sqrt{Z_\pi} \quad , \quad (6.10)$$

$$m_{0\pi} = m_\pi \quad , \quad (6.11)$$

se tiene que  $f_\pi$  es la constante de desintegración de piones con el valor  $f_\pi = 92.4\text{MeV}$ . Es importante observar que cuando se utiliza el esquema de sustracción mínimo (una variación de regularización), se realiza utilizando un punto de

normalización  $\kappa$  para satisfacer las condiciones propuestas. Además, la constante de renormalización del pion se toma como  $Z_\pi = 1$ .

**Condición 3.** El pico de la Función Espectral:

$$\frac{\partial \rho_\sigma(\omega, \mathbf{k}, T)}{\partial(\omega^2)} \Big|_{\omega=m_\sigma} = 0, \quad (6.12)$$

aquí la función espectral está dada por

$$\rho_\sigma(\omega, \mathbf{k}, T) = -\frac{1}{\pi} \frac{Im\Sigma_\sigma(\omega, k, T)}{(m_\sigma^2 - m_{0\sigma}^2 - Re\Sigma_\sigma(\omega, k, T))^2 + (Im\Sigma_\sigma(\omega, k, T))^2}, \quad (6.13)$$

y  $\Sigma_\sigma(\omega, \mathbf{k}, T)$  es la auto energía renormalizada del de  $\sigma$ . El valor de  $m_\sigma$  se fija en los valores requeridos que hemos elegido como 450, 500, 550 y 600 MeV, para estar en acuerdo con los valores propuestos que figuran en las referencias [26, 27, 28, 29, 30]. La función espectral habitual Ec. (6.13), que hemos tomado como en Ref.[31] se utiliza para determinar las propiedades de una partícula resonante. Una vez que se aplican las 3 condiciones de optimización obtenemos los siguientes valores de los parámetros para el modelo que se muestran en la tabla 2.

$m_\sigma(MeV)$	$\mu^2(MeV)^2$	$h(MeV)^3$	$\lambda$	$\kappa(MeV)$
450	$-(225.6)^2$	$-(122.8)^3$	51.9	212.7
500	$-(257)^2$	$-(122.8)^3$	61.9	236
550	$-(283)^2$	$-(123)^3$	73	255
600	$-(306)^2$	$-(123.2)^2$	85	270.2

Table 2. Valores de los parámetros optimizados

### 6.3.2 Condición de Convergencia Aparente más Rápida

Para determinar  $m^2$  y  $\xi$ , se tiene que elegir entre la condición de Principle of Minimal Sensitivity (PMS) o la condición conocida como Fastest Apparent Convergence (FAC) que Stevenson primero introdujo en Ref ([25]). En los criterios de FAC uno sólo tiene que llegar al análisis de un loop que difiere de la condición PMS ya que este requiere un análisis a 2 loops [21], por esto usamos FAC, considerando lo anterior tenemos que la condición FAC se escribe como,

$$\mathcal{O}_L - \mathcal{O}_{L-n} = 0, \quad (6.14)$$

donde  $\mathcal{O}_L$  es la magnitud física al orden  $L$ , que debe ser calculada utilizando los criterios FAC y  $n$  es el número de vértices que tiene el límite siguiente  $1 \leq n \leq L$ . Se realizó el cálculo para la auto-energía del pion al nivel de un loop y el componente cero del trimomento utilizando el formalismo a tiempo imaginario. Para obtener la ecuación de brecha o gap, hemos elegido la misma condición híbrida como en Ref.[22] con  $L = 1$ , por lo que la ecuación se escribe como,

$$[m_\pi^2 - m_{0\pi}^2 - \Sigma_{\pi T=0}(\omega, 0) - \Sigma_{\pi T \neq 0}(0, 0, T) = 0] \Big|_{\omega=m_{0\pi}} \quad (6.15)$$

donde  $\phi = (\sigma, \pi)$  son los campos del pion y sigma. La ecuación anterior de la autoenergía del pion con *contraterminos*  $= \delta_\pi$  usada en la condición FAC esta dada

por

$$\Sigma_{\pi_T=0}(\omega, k) + \Sigma_{\pi_T \neq 0}(\omega, k) = (a) + (b) + (c) - (m^2 - \mu^2) + \delta_\pi. \quad (6.16)$$

donde (a) , (b) y (c) están representados en la Fig.6.2. Las expresiones analíticas para los diagramas se muestran en el Apéndice D. Estos se calcularon utilizando el formalismo tiempo imaginario convencional y mediante la respectiva suma de Matsubara [32]. La Fig. 6.3 muestra la variación de masas nivel árbol como una

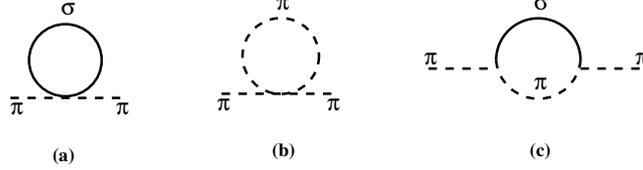


Figure 6.2: Diagramas para la auto-energía del pion

función de la temperatura de los mesones sigma, pion y de  $\xi(T)$ . Vale la pena notar que las masas del sigma y pion definidas en la figura 6.6 contienen las propiedades térmicas obtenidas a partir del potencial efectivo y la autoenergía del pion (condición FAC), además se observa que las masas de los mesones llegan a un punto en el que parecen degeneradas a medida que la temperatura aumenta, también se observa que el valor de la relación del condensado descende con la temperatura. Este resultado es consistente con los cálculos realizados con otros métodos tales como aproximación Hartree con el formalismo CJT [33], así como el modelo PNJL [26]. Mediante el uso de la derivada del potencial efectivo térmico regularizado a un loop también conocida como la condición estacionaria de Ref[22] Ec.6.17 junto con la condición FAC Ec. (6.15), se tiene dos ecuaciones no lineales y dos variables  $m^2$  y  $\xi$  que deben ser resueltos para cada valor de la temperatura.

$$\frac{\partial D}{\partial \xi} = -h + \mu\xi + \frac{\lambda}{6}\xi^3 + \frac{\lambda}{2}\xi((P_{2\pi}^{(2)} + R_{2\pi}^{(2)}) + (P_{2\sigma}^{(2)} + R_{2\sigma}^{(2)})) = 0 \quad (6.17)$$

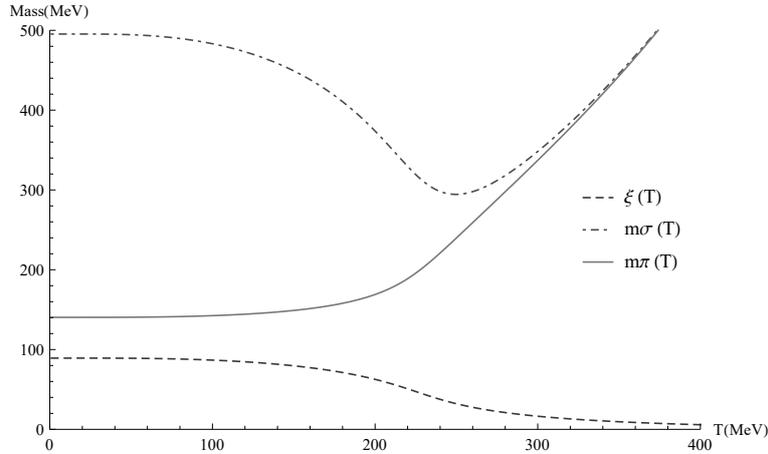


Figure 6.3: Comportamiento de las masas nivel árbol del pion, sigma y el condensado, en función de la temperatura tomando  $m_\sigma = 500$  MeV .

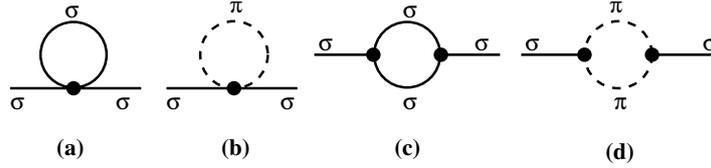


Figure 6.4: Diagramas para la auto-energía sigma

Los términos de la auto-energía del sigma para la función espectral que vamos a utilizar en la sección siguiente se muestran en la Fig. 6.4 y su expresión analítica junto con sus correspondiente *contraterminos* ( $\delta_\sigma$ )

$$\Sigma_{\sigma T=0}(\omega, k) + \Sigma_{\sigma T \neq 0}(\omega, k) = (a) + (b) + (c) + (d) - (m^2 - \mu^2) + \delta_\sigma \quad (6.18)$$

donde los cálculos explícitos de estos diagramas se llevan a cabo en la sección 6.6.3 y 6.6.4 de este capítulo.

## 6.4 Discusión

El concepto de temperaturas críticas ( $T_c$ ) en una teoría de campo está asociada con un cambio de fase, también esta es una de las principales razones para estudiar los sistemas físicos a temperatura finita [34]. El modelo sigma lineal reproduce algunas de las características del cambio de fase [35]. Como se puede observar en la Fig.6.5, el valor del condensado disminuye con la temperatura lo cual es algo que se esperaría durante la transición quiral. Los autores de Ref. [[22, 26, 36, 37, 38]] han calculado valores de temperaturas críticas entre 155 a 200 MeV que por otro lado la teoría QCD en lattice mientras que [35] provee el valor más aceptado de  $T_c = 151 \pm 3$  MeV. La función espectral es un instrumento muy útil en muchas teorías cuánticas

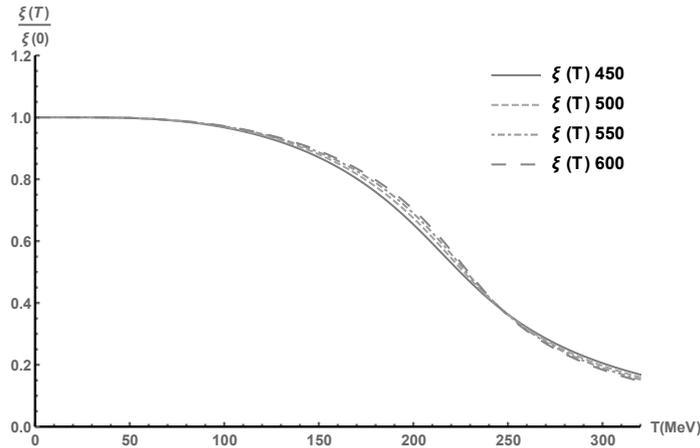


Figure 6.5: Comportamiento del condensado  $\frac{\xi(T)}{\xi(0)}$  a temperatura finita y diferentes valores de  $m_\sigma$  (450,500,550,600 MeV)

ya que es una forma alternativa de analizar la información de los sistemas físicos. A continuación, en la figura 6.6 se muestra una comparación entre diferentes valores de  $m_\sigma$  para la función espectral a  $T = 0$ . Las funciones espectrales se comportan de manera similar con el incremento de  $T$ .

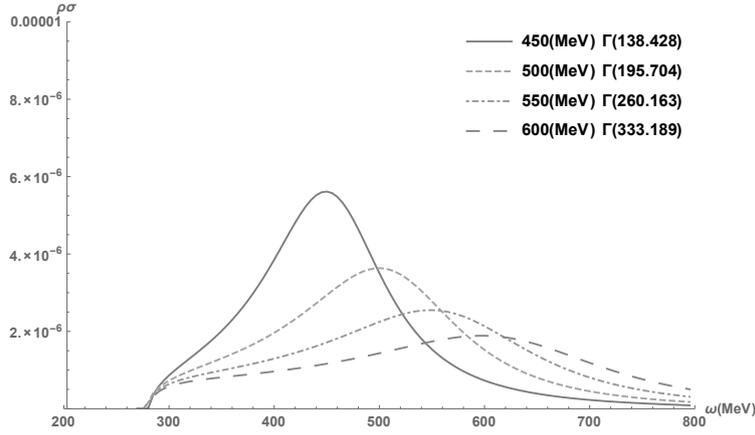


Figure 6.6: función espectral del sigma a  $T=0$  y diferentes valores de  $m_\sigma = (450, 500, 550, 600$  MeV) y sus respectivos anchos  $\Gamma$ .

En todos los casos el pico de la función espectral aparece cuando el valor de la masa es de aproximadamente 280 MeV (como se muestra en el 6.6.2). En la Fig. 6.6 se puede observar una localización espectral a medida que disminuye la masa. Esto se puede interpretar como una transición de fase débil de primer orden en el diagrama de fase QCD. La función espectral también se puede utilizar para obtener la masa de alguna partícula que se busque estudiar, ya que el punto máximo de la misma función está definida como la masa de la partícula. En este caso se muestra en la figura 6.7 (figura de la izquierda) la masa del meson sigma vista en términos del máximo de la función espectral tomando en cuenta solamente el máximo (local o global) , esto se realizó aislando el pico de la función espectral y tratándolo por separado. La gráfica muestra la superficie expuesta en el Apéndice 6.6.1 vista desde el plano  $(\omega, T)$  donde se puede observar que el comportamiento de la masa del sigma concuerda con la masa a nivel árbol del sigma en la figura 6.3. Cabe mencionar que si no se aísla el pico de la función espectral se obtiene un comportamiento distinto entre la masa a nivel árbol del sigma y la masa calculada a partir del maximo de la función espectral. Esto se debe a que aparece otro máximo global (mostrado en la figura 6.7 derecha) el cual domina el comportamiento de la masa del sigma, este comportamiento discontinuo concuerda con un cambio de fase de primer orden aproximadamente a  $T = 135 \pm 5 MeV$ . La razón por la que se origina el pico que provoca la discontinuidad en la figura 6.7 derecha se explica por el acoplamiento  $\sigma - \pi - \pi$  mostrado en el cuarto diagrama de la Fig. 6.4. Esto por otro lado se puede mostrar analizando la forma aproximada de la función espectral para  $\omega \simeq 2m_0\pi$  y la temperatura antes mencionada de  $T = 135 \pm 5 MeV$ . Empecemos por el primer término en el denominador de la función 6.13, el cual tiende a cero a medida que  $\omega \rightarrow 2m_0\pi$ .

$$[\omega^2 - m_{0\sigma}^2 - Re\Sigma_\sigma(\omega, 0, T)]_{\omega \rightarrow 2m_0\pi} \rightarrow 0 \quad (6.19)$$

Además la parte imaginaria de la autoenergía es un factor del espacio fase multiplicado por una función continuamente diferenciable  $f$ :

$$Im\Sigma_\sigma(\omega, 0, T) = \theta(\omega - 2m_0\pi) \sqrt{1 - \frac{4m_{0\pi}}{\omega^2}} f(\omega, T) \quad (6.20)$$

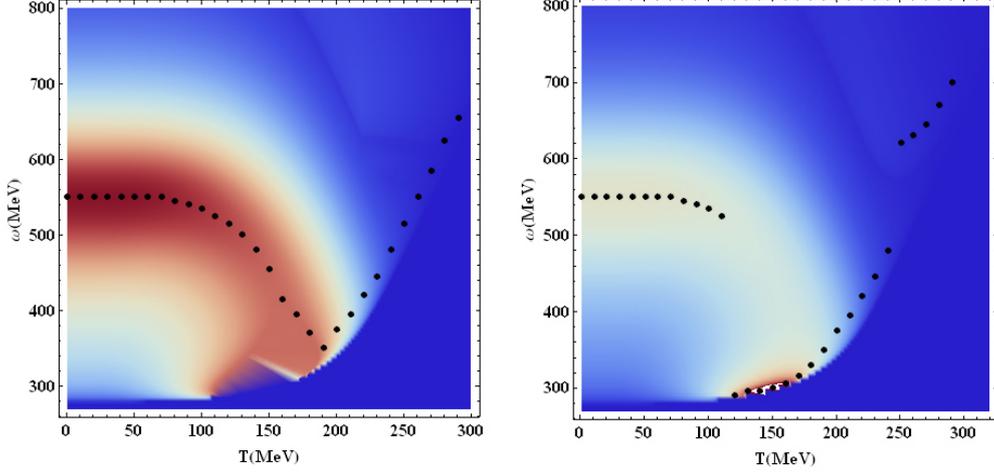


Figure 6.7: La masa del sigma como el pico de la Función Espectral del sigma a  $m_\sigma = (550 \text{ MeV})$ .

Sustituyendo 6.20 y 6.19 en la función 6.13 se llega a la siguiente expresión matemática.

$$\rho_\sigma(\omega \simeq 2m_0\pi, 0, T) = \theta(\omega - 2m_0\pi) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m_0^2}{\omega^2} f(\omega, T)}} \quad (6.21)$$

Esto explica el pico de la función justo por encima del umbral y se puede ver que es explicado por el factor del espacio de fase. Lo anterior se puede ver más a fondo en Ref [22].

Además se calculó el ancho de la función espectral ya que esta nos da información cuantitativa sobre el comportamiento del sigma. Es importante tener en cuenta que tomamos la anchura de la función espectral sigma como la distancia entre dos puntos interceptados en la mitad del valor máximo de la función espectral. En el pico de la función espectral equivalente a la masa de dos piones observamos en la Fig. 6.8 una drástica caída en el ancho de la función espectral sigma, en otras palabras, a medida que la temperatura aumenta la anchura de la función espectral muestra un pequeño incremento seguido de una fuerte caída correspondiente al pico de la función espectral de dos piones de la función espectral que persiste hasta 150 MeV. Este comportamiento se interpreta como una restauración quiral, ya que se ha demostrado que este fenómeno da lugar a una pequeña anchura del sigma, que es debido a la supresión del espacio-fase del decaimiento de  $\sigma \rightarrow 2\pi$  ([38]). Además, este resultado refuerza la hipótesis sobre la estructura de sigma como una resonancia de dos piones. La abrupta caída en la anchura de sigma se genera a partir del pico de la función espectral de la función espectral [15], como se puede observar en las figuras del 6.6.2.

Dos aspectos que caben mencionar de la función espectral del mesón sigma que observan aquí son que a  $T = 0$  el sigma es una resonancia amplia, pero cuando la temperatura sube a 140 MeV, un pico se observa en el pico de la función espectral. Este comportamiento sugiere fuertemente que el sigma es una estructura de dos piones. El segundo que es complementaria al primero, es la caída repentina en el valor de la anchura de la función espectral aproximadamente a  $T = 140 \text{ MeV}$ . Esto también se interpreta como una restauración parcial de la simetría quiral, un resultado que está en acuerdo con lo obtenido por Patkos et al[39].

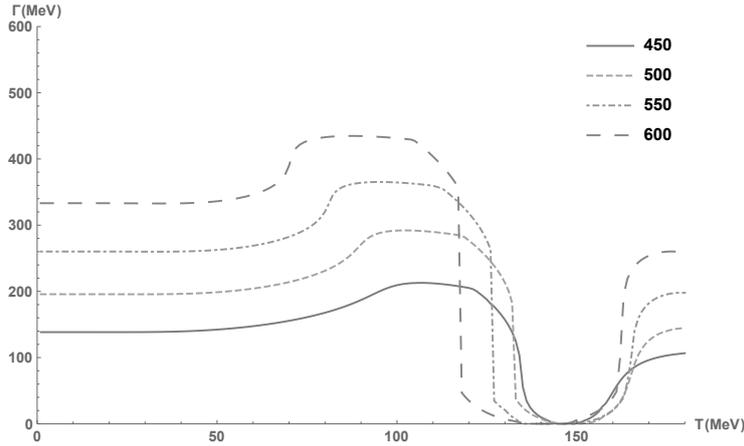


Figure 6.8: El comportamiento del ancho de la función espectral del sigma a diferentes valores de su masa  $m_\sigma=(450,500,550,600 \text{ MeV})$ .

## 6.5 Conclusión

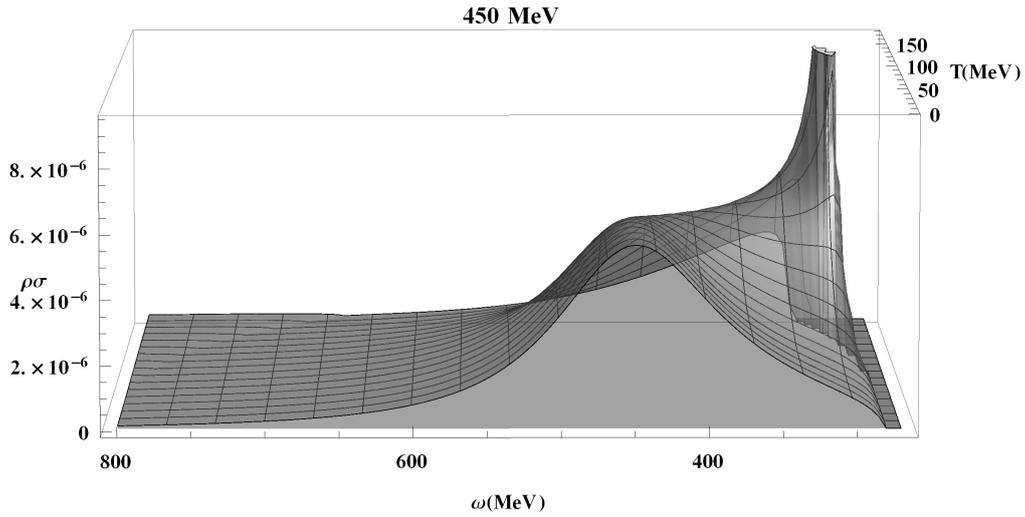
Hemos utilizado el modelo sigma lineal y OPT aplicada como una técnica de resumación para calcular el comportamiento propiedades térmicas del mesón sigma y diferentes valores iniciales posibles de su masa que son  $m_\sigma = 450; 500; 550; 600 \text{ MeV}$ , aunque el cálculo para  $550 \text{ MeV}$  se realizó previamente por Ref [22] decidimos incluir esta para propósitos de comparación. Nuestros resultados concuerdan con los estudios anteriores, donde muestran una tendencia general del sistema para restaurar la simetría quiral a alta temperatura.

Por otro lado, se observa que el valor del condensado disminuye con la temperatura y las masas sigma y pion parecen degenerados, lo que sugiere un fuerte acoplamiento de estas partículas. El análisis de la función espectral también se realizó con los anteriormente valores iniciales mencionados de  $m_\sigma$  y se mostró que la posición del pico a  $T = 0$  se desplaza hacia abajo, moviéndose hacia el valor de dos veces la masa del pion a medida que la temperatura aumenta. Este resultado se puede interpretar como una tendencia del sistema para restaurar la simetría quiral [40]. En este trabajo también se incluyó un nuevo análisis del comportamiento del ancho de la función espectral del sigma mesón en un baño termal. Se puede observar de que el ancho de la función espectral se hace más pequeño con el aumento de la temperatura. Este resultado se asocia, además, con la restauración parcial de la simetría quiral [40]. Resultados similares se obtienen con el enfoque Breit-Wigner y por otros autores, tales como en Ref.[26], donde se calcularon propiedades del mesón sigma mediante el modelo PNJL a temperatura finita. Estos resultados pueden explicarse por la disminución del valor del condensado del sigma con la temperatura, que se asocia con la restauración simetría quiral. A medida que existan experimentos como ALICE, CMS y ATLAS sigan buscando la naturaleza del plasma de quarks y gluones, nuevas pruebas y modelos surgirán para ayudar a comprender más profundamente la relación del sigma y sus acoplamientos con otros mesones tales como  $\pi, \omega, \rho, \eta$  entre otros.

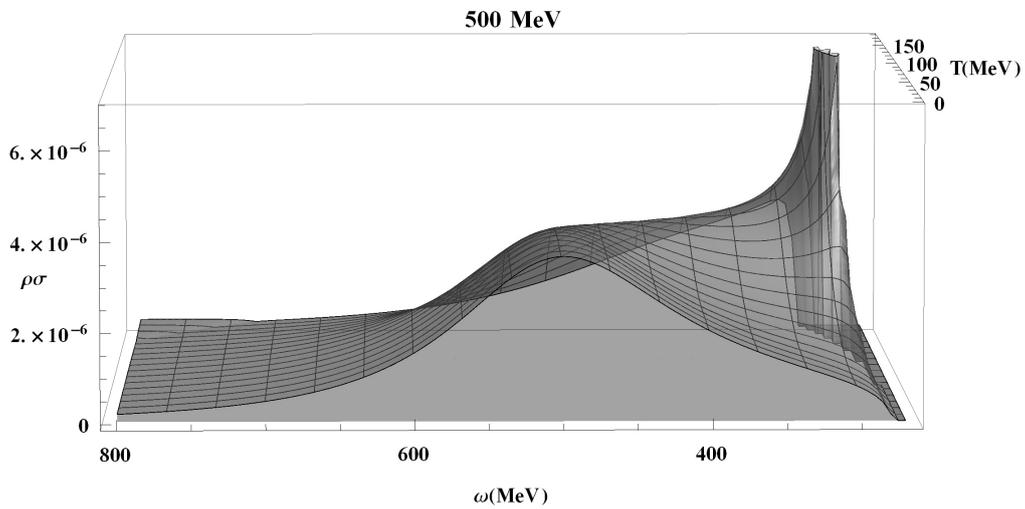
## 6.6 Apéndice

### 6.6.1 Función Espectral del Sigma

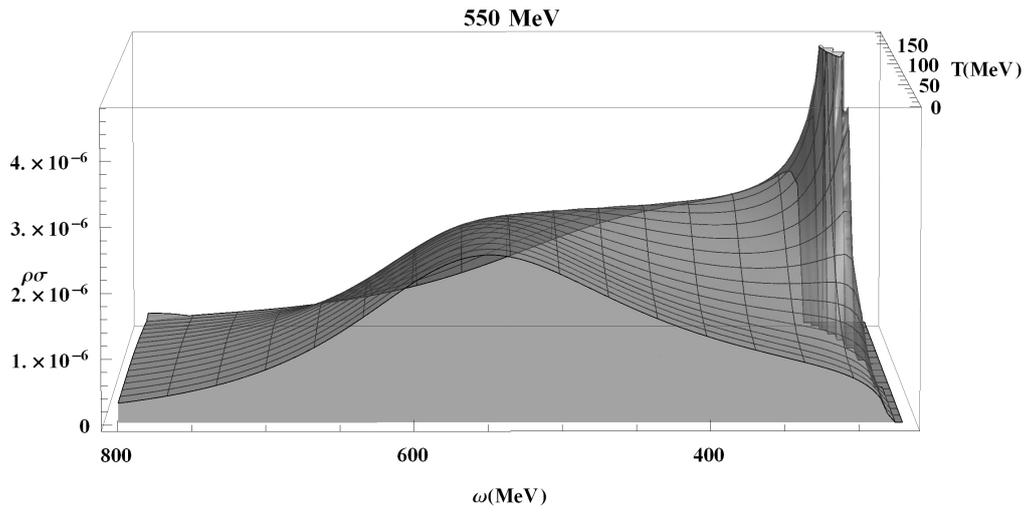
En este apéndice se muestra un grupo de gráficos en 3D de la función espectral del meson sigma a Temperatura Finita. Se puede observar claramente que la temperatura tiene repercusiones importantes en el comportamiento de la masa de la función espectral del sigma a valores altos.



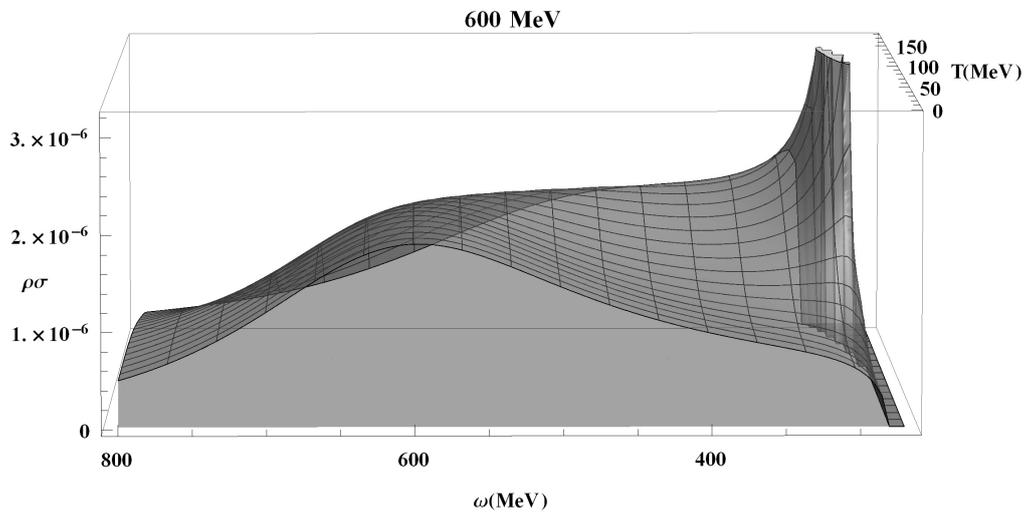
a) funciones espectrales del mesón sigma para  $m_\sigma = 450\text{MeV}$



b) funciones espectrales del mesón sigma para  $m_\sigma = 500\text{MeV}$



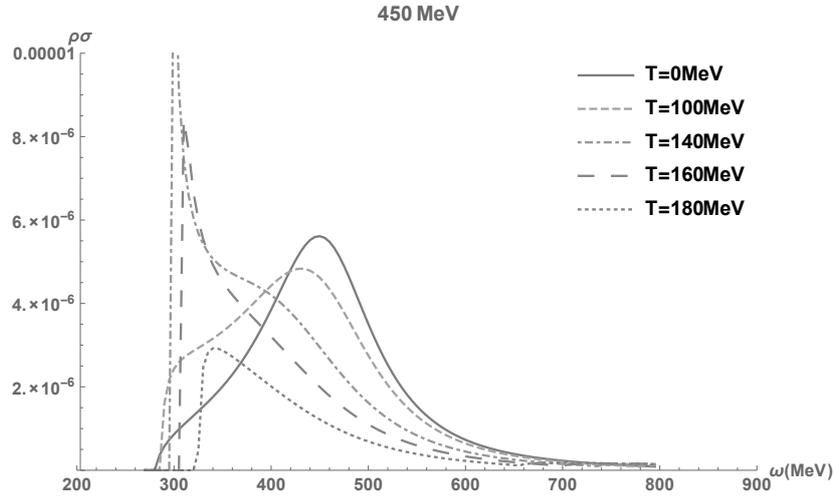
c) funciones espectrales del mesón sigma para  $m_\sigma = 550 \text{ MeV}$



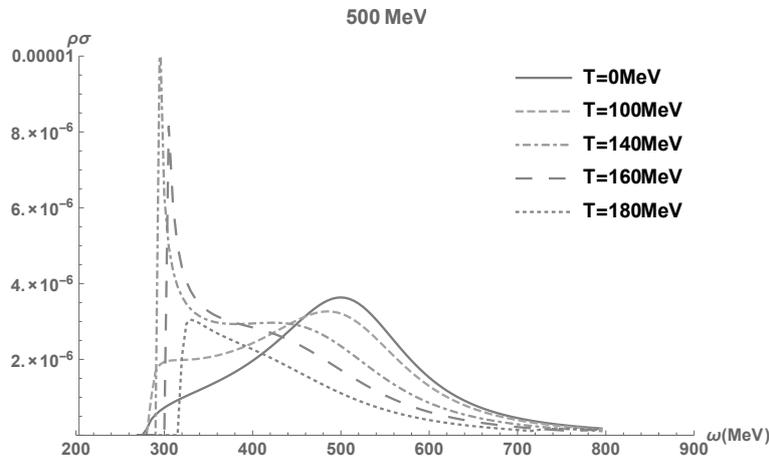
d) funciones espectrales del mesón sigma para  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$

## 6.6.2 pico de la función espectral Localizado de la Función Espectral

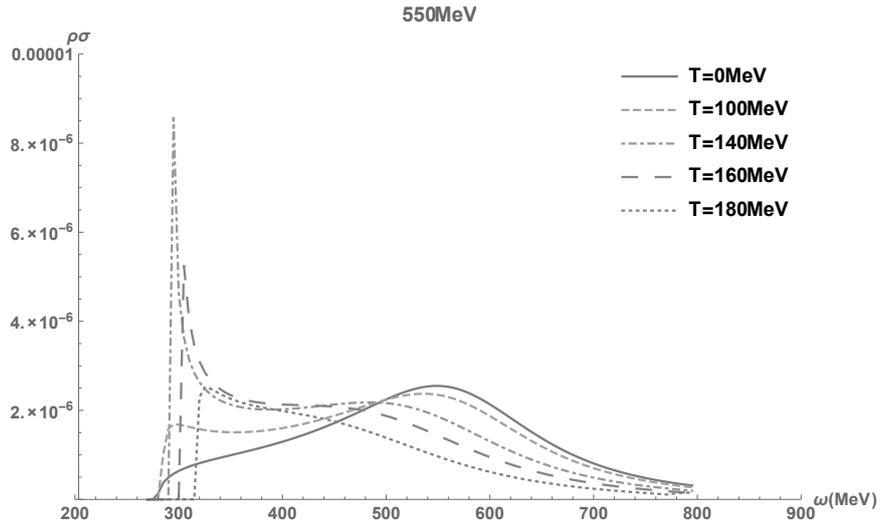
Las figuras muestran el comportamiento de la función espectral a diferentes valores de la temperatura indicadas por las diferentes líneas. Se puede observar que el pico de la función el cual es un importante ingrediente en la determinación de su masa, tiende a moverse hacia la izquierda a medida que la temperatura se incrementa por lo que se interpreta que la masa tiende a disminuir con la temperatura.



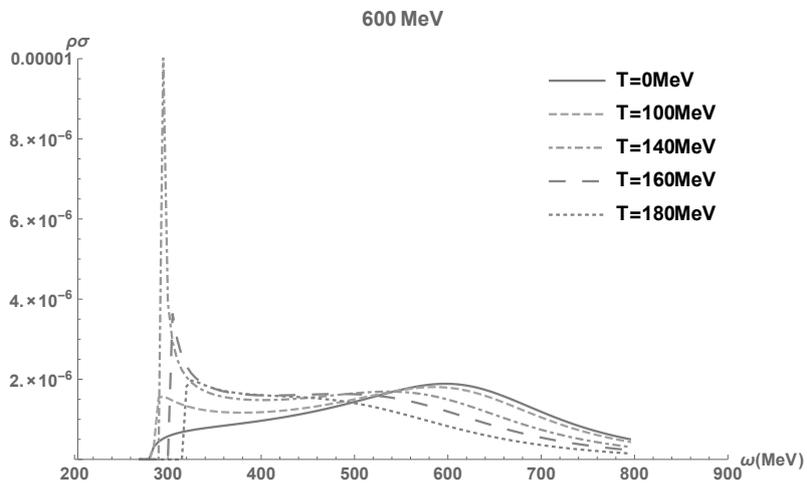
a) Función espectral del sigma con su masa tomada como  $m_\sigma = 450 \text{ MeV}$



b) Función espectral del sigma con su masa tomada como  $m_\sigma = 500 \text{ MeV}$



c) Función espectral del sigma con su masa tomada como  $m_\sigma = 550\text{MeV}$



d) Función espectral del sigma con su masa tomada como  $m_\sigma = 600\text{MeV}$

### 6.6.3 Las Autoenergias del Pion y Sigma

Este apéndice contiene los términos matemáticos usados para las autoenergias del pion y sigma. El subíndice T indica la dependencia de la temperatura en los términos respectivos. Los subíndices  $\phi = (\sigma, \pi)$  indican los campos a los que están asociados los términos mientras que los superíndices se usan para identificar términos. Para poder escribir las autoenergias completas escribimos primero las definiciones siguientes.

$$q_2 = \sqrt{\left| \frac{4k^2 m_{0\phi}^2}{\kappa^2} - 1 \right|}, \quad (6.22)$$

$$q_3 = \sqrt{\frac{|(k^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2)^2 - 4k^2 m_{0\sigma}^2|}{\kappa^2}}, \quad (6.23)$$

donde  $k^2 = \mathbf{k}^2 - \omega^2$ .

También necesitamos las siguientes funciones

$$P_{\pi,\sigma}^{(1)} = -\frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 - \ln \left( \frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{\kappa^2} \right) \right), \quad (6.24)$$

$$P_{2\pi,\sigma} = -\frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{16\pi^2} \left( 1 - \ln \left( \frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{\kappa^2} \right) \right), \quad (6.25)$$

$$R_{\pi,\sigma}^{(1)} = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2 n_B(E(m_{0\pi,\sigma}))}{E(m_{0\pi,\sigma})} \quad (6.26)$$

Donde las constantes  $C_2, C_3$  están dadas en la tabla 1 de la sección 3, y la función  $n_B(\omega)$  es la bien conocida función de distribución de Bose-Einstein.

$$n_B(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1}. \quad (6.27)$$

Con las masas invariantes

$$M^\pm = (m_{0\sigma} \pm m_{0\pi})^2, \quad (6.28)$$

Y las funciones siguientes

$$F = \frac{(2k^2 q_3 + k^2 - m_{0\sigma}^2 + m_{0\pi}^2)(2k^2 q_3 + k^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2)}{(2k^2 q_3 - k^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2)(2k^2 q_3 - k^2 - m_{0\sigma}^2 + m_{0\pi}^2)} \quad (6.29)$$

$$P_{\pi,\sigma}^{(2)} = i P_{\pi,\sigma}^{(1)} - \left[ \frac{v m_{0\pi,\sigma}^2}{16\pi^2} \right] 2 \begin{cases} q_2 \ln \left[ \frac{1-q_2}{1+q_2} + i\pi \right] & \text{if } k^2 > 4m_{0\pi,\sigma}^2 \\ 2q_2 \arctan \left[ \frac{1}{q_2} \right] & \text{if } 0 < k^2 < 4m_{0\pi,\sigma}^2 \end{cases} \quad (6.30)$$

$$P^{(3)} = -\frac{v}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \left[ \frac{m_{0\pi}^2}{\kappa^2} \right] + \frac{(k^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2)}{2k^2} \right) + 2 \begin{cases} q_3 \ln(F - 2i\pi) & \text{if } (M^+)^2 < k^2 \\ 2q_3 \left( \arctan \left[ \frac{k^2 - m_{0\sigma}^2 + m_{0\pi}^2}{2q_3 k^2} \right] + \arctan \left[ \frac{k^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2}{2q_3 k^2} \right] \right) & \text{if } M^- < k^2 < M^+ \\ q_3 \ln[F] & \text{if } k^2 < M^- \end{cases} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}
P^{(4)} &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2 n_B(E(m_{0\pi,\sigma}))}{E(m_{0\pi,\sigma})} \frac{1}{(\omega - E(m_{0\pi,\sigma}))^2 - E(m_{0\pi,\sigma})^2} \\
&+ \begin{cases} \sqrt{(\omega^2 + k^2 - m_{0\sigma}^2 + m_{0\pi}^2)^2 - 4k^2 m_{0\sigma}^2} & \text{if } M^+ < \omega^2 \\ n_B\left(\frac{|\omega^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2|}{2\omega^2}\right) & \text{if } 0 < \omega^2 < M^- \\ 0 & \text{if } M^- < k^2 < M^+ \end{cases} \\
&+ m_{0\sigma} \leftrightarrow m_{0\pi} \tag{6.32}
\end{aligned}$$

$$P^{(5)} = \begin{cases} \frac{1}{8\pi\omega^2} \sqrt{(\omega^2 + k^2 - m_{0\sigma}^2 + m_{0\pi}^2)^2 - 4k^2 m_{0\sigma}^2} & \text{if } M^+ < \omega^2 , \\ n_B\left(\frac{|\omega^2 + m_{0\sigma}^2 - m_{0\pi}^2|}{2\omega^2}\right) n_B\left(\frac{|\omega^2 - m_{0\sigma}^2 + m_{0\pi}^2|}{2\omega^2}\right) & \text{if } 0 < \omega^2 < M^- \\ 0 & \text{if } M^- < k^2 < M^+ \end{cases} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
R_{\pi,\sigma}^{(2)} &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2 n_B(E(m_{0\pi,\sigma}))}{E(m_{0\pi,\sigma})} \frac{1}{\omega^2 - 4E^2(m_{0\pi,\sigma})} \\
&+ \theta(\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2) \frac{\sqrt{\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2}}{16\pi\omega} n_B(\omega/2) , \tag{6.34}
\end{aligned}$$

$$R_{\pi,\sigma}^{(3)} = \theta(\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2) \frac{\sqrt{\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2}}{16\pi\omega} n_B(\omega/2) , \tag{6.35}$$

donde  $\theta(\omega^2 - \omega_0)$  es la función Escalón que depende de  $\omega$ .  
La autoenergía del pion está dada por la siguiente función,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\pi_T}(\omega, k, T) &= \frac{5}{6}\lambda (P_\pi^{(1)} + R_\pi^{(1)}) + \frac{1}{6}\lambda (P_\sigma^{(1)} + R_\sigma^{(1)}) - i\frac{(\lambda\xi)^2}{9} (P^{(3)} + P^{(4)} + P^{(5)}) \\
&- (m^2 - \mu^2) + \delta_\pi . \tag{6.36}
\end{aligned}$$

Donde el primer término es la autoenergía a T=0 y el Segundo termino considera los efectos de la temperatura. De la misma manera, la energía propia Sigma se escribe

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\sigma_T}(\omega, k, T) &= \Sigma_\sigma(\omega, k, 0) + \Sigma_\sigma(\omega, k, T) , \\
&= \frac{1}{2}\lambda(P_\pi^{(1)} + R_\pi^{(1)} + P_\sigma^{(1)} + R_\sigma^{(1)}) \\
&- \frac{i(\lambda\xi)^2}{6}(P_\pi^{(2)} + 2R_\pi^{(2)} + R_\pi^{(3)}) - i\frac{(\lambda\xi)^2}{2}(P_\sigma^{(2)} + 2R_\sigma^{(2)} + R_\sigma^{(3)}) \\
&- (m^2 - \mu^2) + \delta_\sigma . \tag{6.37}
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que los contraterminos de las autoenergías se escriben como:

$$\delta_\sigma = C_2 m^2 + \frac{1}{2}\lambda C_3 \xi^2 \quad \delta_\pi = C_2 m^2 + \frac{1}{6}\lambda C_3 \xi^2 . \tag{6.38}$$

### 6.6.4 Sumas de Matsubara

Aquí presentamos el cálculo de los loops (a) y (b) , la aplicando el formalismo de la suma de Matsubara donde  $m$  es la masa del pion o sigma. La suma más simple se muestra a continuación

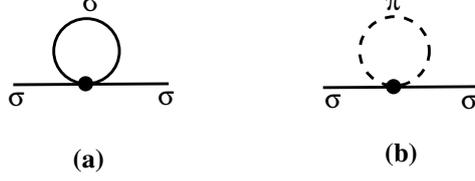


Figure 6.9: Loops del pion y el sigma.

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = T \sum_{n=-\infty}^{-\infty} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{q}^2 + m^2} \quad (\text{E1})$$

$$= \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (1 + 2n(E))$$

La suma de los loops para el pion y sigma se calcular al final del capítulos 4, que se muestran en la figura 9 los cuales se escriben,

$$(a) + (b) = \frac{1}{2} \lambda (P_\pi^{(1)} + R_\pi^{(1)} + P_\sigma^{(1)} + R_\sigma^{(1)}) \quad (\text{E2})$$

donde,

$$P_{\pi,\sigma}^{(1)} = -\frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 - \ln\left(\frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{\kappa^2}\right) \right) \quad , \quad (\text{E3})$$

$$R_{\pi,\sigma}^{(1)} = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \left( \frac{p^2 n_B(E(m_{0\pi,\sigma}))}{E(m_{0\pi,\sigma})} \right) \quad , \quad (\text{E4})$$

la parte no dependiente de la temperatura del loop requiere regularización, este procedimiento se realiza mediante el uso de la función de distribución de Bose-Einstein  $n(E(m_{0\pi,\sigma}))$ .

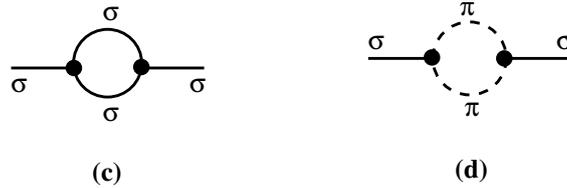


Figure 6.10: Pion and sigma self-energy loops.

En los diagramas (c) y (d) el procedimiento para la auto-energía del pion y sigma es el siguiente,

$$I(p) = (-i\lambda\xi)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{E5})$$

Después de separar los componentes espaciales y temporales en el denominador, se obtiene,

$$I(p) = (-i\lambda\xi)^2 \int idp_E^0 \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(iq_E^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} \frac{1}{(ip_E^0 - iq_E^0)^2 - E_{p+q}^2 + i\epsilon} \quad (\text{E6})$$

Donde las energías se escriben como,

$$E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad E_{p+q}^2 = (\mathbf{p}-\mathbf{q})^2 + m^2 \quad (\text{E7})$$

$$q_E^0 = 2\pi nT = \omega_n \quad p_E^0 = \omega_p \quad (\text{E8})$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{q}=0$  en el centro de la masa junto con la rotación de Wick obtenemos,

$$I(p) = (-i\lambda\xi)^2 T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + E_p^2} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_q^2) + E_p^2} \quad (\text{E9})$$

y realizando la suma Matsubara como en Ref.[32] obtenemos,

$$I(p) = (-i\lambda\xi)^2 T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E(p)} \frac{1}{4E(p)^2 + \omega_q^2} (1 + 2n(E(p))) \quad (\text{E10})$$

Con el fin de obtener cantidades físicas, tenemos que seguir analíticamente Espacio de Minkowski. La auto-energía retardada se obtiene mediante la sustitución  $\omega_q \rightarrow -i\omega + \epsilon$  con  $\omega > 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0+$ . Realizando la integral y la regularización de la parte no dependiente de la temperatura, se puede demostrar que el resultado anterior es equivalente al resultado de la figura en el Apéndice D, donde la integral para el pión es dada por

$$I(p)_\pi = -i \frac{(\lambda\xi)^2}{6} (P_\pi^{(2)} + 2R_\pi^{(2)} + R_\pi^{(3)}) \quad , \quad (\text{E11})$$

y para el sigma, la integral se escribe como

$$I(p)_\sigma = i \frac{(\lambda\xi)^2}{2} (P_\sigma^{(2)} + 2R_\sigma^{(2)} + R_\sigma^{(3)}) \quad , \quad (\text{E11})$$

Donde

$$q_2 = \sqrt{\left| \frac{4k^2 m_{0\sigma}^2}{\kappa^2} - 1 \right|} \quad , \quad (\text{E12})$$

$$P_{\pi,\sigma}^{(2)} = -i \frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 - \ln\left(\frac{m_{0\pi,\sigma}^2}{\kappa^2}\right) + 2 \begin{cases} q^2 (\ln(\frac{1-q_2}{1+q_2} + i\pi)) & \text{if } k^2 > 4m_{0\pi,\sigma}^2 \\ 2q^2 \arctan(\frac{1}{q_2}) & \text{if } 0 < k^2 < 4m_{0\pi,\sigma}^2 \end{cases} \right) \quad , \quad (\text{E13})$$

$$R_{\pi,\sigma}^{(2)} = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \left( \frac{p^2 n_B(E(m_{0\pi,\sigma}))}{E(m_{0\pi,\sigma})} \frac{1}{\omega^2 - 4E^2(m_{0\pi,\sigma})} \right) \quad (\text{E14})$$

$$+ \theta(\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2) \frac{\sqrt{\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2}}{16\pi\omega} n_B\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad ,$$

$$n_B\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{2T}} - 1} \quad , \quad (\text{E15})$$

$$R_{\pi,\sigma}^{(3)} = \theta(\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2) \frac{\sqrt{\omega^2 - 4m_{0\pi,\sigma}^2}}{16\pi\omega} n_B\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad . \quad (\text{E16})$$

## 6.6.5 Trabajo Publicado

El contenido explorado en este capítulo fue publicado en la revista *International Journal of Modern Physics A* y se puede obtener de la siguiente liga <https://doi.org/10.1142/S0217751X15502140>.

## REFERENCIAS

- [1] Ralf Rapp and Jochen Wambach. Chiral symmetry restoration and dileptons in relativistic heavy-ion collisions. In *Advances in Nuclear Physics*, pages 1–205. Springer, 2002.
- [2] David A Kirzhnits and Andrei D Linde. Symmetry behavior in gauge theories. *Annals of Physics*, 101(1):195–238, 1976.
- [3] Kenji Fukushima and Chihiro Sasaki. The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 72:99–154, 2013.
- [4] Jonathan T Lenaghan, Dirk H Rischke, and Jürgen Schaffner-Bielich. Chiral symmetry restoration at nonzero temperature in the  $su(3)_c \times su(3)_f$  linear sigma model. *Physical Review D*, 62(8):085008, 2000.
- [5] Murray Gell-Mann and Maurice Lévy. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 16(4):705–726, 1960.
- [6] Lisa M Haas, Rainer Stiele, Jens Braun, Jan M Pawłowski, and Jürgen Schaffner-Bielich. Improved polyakov-loop potential for effective models from functional calculations. *Physical Review D*, 87(7):076004, 2013.
- [7] MK Volkov, AE Radzhabov, and NL Russakovich.  $\sigma$  meson in hot and dense matter. *Physics of Atomic Nuclei*, 66(5):997–1004, 2003.
- [8] Teiji Kunihiro. Significance of the sigma meson in hadron physics (qcd) and possible experiments to observe it. *arXiv preprint hep-ph/9905262*, 1999.
- [9] Shin Ishida, Muneyuki Ishida, Hiroyuki Takahashi, Taku Ishida, Kunio Takamatsu, and Tsuneaki Tsuru. An analysis of  $\pi\pi$ -scattering phase shift and existence of  $\sigma$  (555) particle. *Progress of Theoretical Physics*, 95(4):745–766, 1996.
- [10] Yoshimasa Hidaka, Osamu Morimatsu, Tetsuo Nishikawa, and Munehisa Ohtani. Effect of the pion thermal width on the sigma spectrum. *Physical Review D*, 68(11):111901, 2003.
- [11] Tamal K Mukherjee, Mei Huang, Qi-Shu Yan, Leonardo Angelini, Giuseppe Eugenio Bruno, Gabriele Chiodini, Pietro Colangelo, Claudio Corianò, Donato Creanza, Fulvia De Fazio, et al. Sigma meson and lowest possible glueball candidate in an extended linear  $\sigma$  model. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1492, pages 171–176. AIP, 2012.
- [12] Leonard S Kisslinger. Sigma/glueball decay of  $d^+$  and  $d^+_s$ . *arXiv preprint hep-ph/0103326*, 2001.

- [13] Feng-Kun Guo, Liuming Liu, Ulf-G Meißner, and Ping Wang. Tetraquarks, hadronic molecules, meson-meson scattering, and disconnected contributions in lattice qcd. *Physical Review D*, 88(7):074506, 2013.
- [14] Hua-Xing Chen, Atsushi Hosaka, and Shi-Lin Zhu. Light scalar tetraquark mesons in the qcd sum rule. *Physical Review D*, 76(9):094025, 2007.
- [15] M Albaladejo and JA Oller. Size of the  $\sigma$  meson and its nature. *Physical Review D*, 86(3):034003, 2012.
- [16] T Herpay and Zs Szép. Resummed one-loop determination of the phase boundary of the  $s u(3) \times s u(3)$  linear sigma model in the  $(m_{\pi^-}, m_K)$  plane. *Physical Review D*, 74(2):025008, 2006.
- [17] Heron Carlos de Godoy Caldas, Andre Luiz Mota, and Maria Carolina Nemes. Chiral fermion meson model at finite temperature. *Physical Review D*, 63(5):056011, 2001.
- [18] P Kovacs and Zs Szép. Critical surface of the  $s u(3) \times s u(3)$  chiral quark model at nonzero baryon density. *Physical Review D*, 75(2):025015, 2007.
- [19] B-J Schaefer and Mathias Wagner. Three-flavor chiral phase structure in hot and dense qcd matter. *Physical Review D*, 79(1):014018, 2009.
- [20] Denis Parganlija, Peter Kovacs, Gy Wolf, Francesco Giacosa, and Dirk H Rischke. Meson vacuum phenomenology in a three-flavor linear sigma model with (axial-) vector mesons. *Physical Review D*, 87(1):014011, 2013.
- [21] Suenori Chiku. Optimized perturbation theory at finite temperature two-loop analysis. *Progress of Theoretical Physics*, 104(6):1129–1150, 2000.
- [22] S Chiku and T Hatsuda. Optimized perturbation theory at finite temperature. *Physical Review D*, 58(7):076001, 1998.
- [23] Elena Castellani. On the meaning of symmetry breaking. *Symmetries in physics: Philosophical reflections*, pages 321–334, 2003.
- [24] Robert D Pisarski. Resummation and the gluon damping rate in hot qcd. *Nuclear Physics A*, 525:175–188, 1991.
- [25] Paul M Stevenson. Optimized perturbation theory. *Physical Review D*, 23(12):2916, 1981.
- [26] AV Friesen, Yu L Kalinovsky, and VD Toneev. Decay of a scalar  $\sigma$  meson near the critical end point in the pnl model. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 9(1):1–6, 2012.
- [27] Yukihiro Muto and Koichi Saito. Scalar and vector meson propagation in asymmetric nuclear matter. *Physics Letters B*, 659(3):565–570, 2008.
- [28] JA Oller, E Oset, and A Ramos. Chiral unitary approach to meson-meson and meson-baryon interactions and nuclear applications. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 45(1):157–242, 2000.

- [29] R Garcia-Martin, JR Pelaez, and FJ Yndurain. Experimental status of the  $\pi$  isoscalar s wave at low energy:  $f_0(600)$  pole and scattering length. *Physical review D*, 76(7):074034, 2007.
- [30] M Albaladejo and JA Oller. Size of the  $\sigma$  meson and its nature. *Physical Review D*, 86(3):034003, 2012.
- [31] Nicholas Petropoulos. Linear sigma model and chiral symmetry at finite temperature. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 25(11):2225, 1999.
- [32] JI Kapusta and SMH Wong. Two-loop self-energy and multiple scattering at finite temperature. *Physical Review D*, 64(4):045008, 2001.
- [33] Frithjof Karsch. Lattice qcd at high temperature and density. In *Lectures on Quark Matter*, pages 209–249. Springer, 2002.
- [34] Claudia Ratti, Michael A Thaler, and Wolfram Weise. Phases of qcd: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Physical Review D*, 73(1):014019, 2006.
- [35] Y Aoki, G Endrődi, Z Fodor, SD Katz, and KK Szabo. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature*, 443(7112):675–678, 2006.
- [36] Edwin Laermann and Owe Philipsen. Lattice qcd at finite temperature. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 53(1):163–198, 2003.
- [37] Da Huang and Yue-Liang Wu. Chiral thermodynamic model of qcd and its critical behavior in the closed-time-path green function approach. *arXiv preprint arXiv:1110.4491*, 2011.
- [38] T Hatsuda and T Kunihiro. The  $\sigma$ -meson and  $\pi$ - $\pi$  correlation in hot/dense medium: soft modes for chiral transition in qcd. *arXiv preprint nucl-th/0112027*, 2001.
- [39] András Patkós, Zs Szép, and P Szépfalusy. Finite temperature spectral functions of the linear  $\sigma$  (n)-model at large-n applied to the  $\pi$ - $\sigma$  system. *Physics Letters B*, 537(1):77–85, 2002.
- [40] T Hatsuda and T Kunihiro. Fluctuation effects in hot quark matter: Precursors of chiral transition at finite temperature. *Physical review letters*, 55(2):158, 1985.

## 7. *El Modelo Nambu-Jona-Lassinio*

Como ya se ha mencionado la teoría de campos fundamental que trata con las interacciones fuertes es la QCD, esta describe con éxito la dinámica de los quarks a altas energías (distancias cortas). Sin embargo, cuando se aplica la teoría a procesos de baja energía esta teoría diverge. Para resolver este problema se han propuesto varios modelos basados en las simetrías de QCD. La guía para construir estos modelos ha sido la simetría quiral, el cual es uno de los fenómenos característicos más importantes de la QCD para los quarks sin masa. En este capítulo utilizamos el modelo NJL, para estudiar algunas propiedades de los mesones ligeros.

El modelo de Nambu Jona-Lasinio (NJL) surgió en 1961 cuando los pioneros Nambu y Jona-Lasinio publicaron el artículo Ref.[1], en el cual se introdujo este modelo. El modelo utiliza similitudes entre las partículas de Dirac y las excitaciones de cuasi-partículas que aparecen en la teoría BCS de la superconductividad. Originalmente a este modelo se le atribuyó el problema de la no renormalizabilidad, por esta razón se solía evitar, sin embargo recuperó la popularidad cuando las teorías de campo efectivas comenzaron a servir como una aproximación adecuada con características importantes de QCD a baja energía.

El modelo NJL se establece mediante un lagrangiano eficaz de fermiones relativistas que interactúan a través de acoplamientos locales fermión-fermión. Aunque el modelo carece del confinamiento de color, este contiene las simetrías globales de QCD y se convierte en una excelente herramienta para la observación de mecanismos de ruptura de la simetría [2]. Por esta razón el modelo es aplicable a fenómenos hadrónicos y nucleares que no implican el mecanismo de confinamiento. El modelo NJL tiene interacciones de cuatro fermiones y la teoría necesita regularización para obtener expresiones finitas. Cabe mencionar que suelen introducir parámetros fenomenológicos en la teoría efectiva de baja energía para que el problema sea fácil de resolver en comparación con la QCD. Los parámetros del modelo pueden ser un cutoff que se introduce durante el procedimiento de regularización, o puede ser la constante de acoplamiento. Estos parámetros se determinan fenomenológicamente. Además resulta que las cantidades físicas se ven afectadas por el método de regularización y por supuesto de los parámetros introducidos para regularizar la teoría por lo que estos se optimizan para que las cantidades físicas concuerden con los resultados experimentales.

Por otro lado el modelo NJL ha sido empleado ampliamente en la literatura para estudiar la estructura de fase de QCD a altas temperaturas y / o densidades [1, 3]. En este capítulo se analiza la dependencia de la temperatura ( $T$ ) y la densidad de barionica ( $\mu$ ) de las masas meson sigma y el pion en el modelo NJL en el formalismo del tiempo imaginario.

## 7.1 El Modelo NJL (Bosonización y la Expansión de Campo Medio)

Para evaluar las magnitudes termodinámicas hemos empleado la técnica estándar de bosonización. El procedimiento de bosonización consiste en la construcción de variables bosónicas que nos permiten estudiar las propiedades del mesón de las que estamos interesados.

Para llevar a cabo el procedimiento de bosonización se introducen campos colectivos y se realiza la integración del campo de quarks de modo que permanezcan los estados del meson y el di-quark. El lagrangiano resultante no es lineal aunque la quiralidad permanece en el modelo, pero todavía se requieren transformaciones adicionales para expresar el lagrangiano completamente en términos de la materia hadrónica.

Partimos de la densidad lagrangiana siguiente,

$$L_{NJL} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)q + \frac{G}{2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau^a q)^2] \quad (7.1)$$

donde  $m_0$  son las masas de quarks y  $\tau^a$  son las matrices de Pauli. El modelo descrito por la Ec. 7.1 no es renormalizable, por lo tanto necesitamos regularizar las divergencias. El procedimiento que seguiremos aquí es la introducción de un cutoff de trimomentos para regularizar las integrales.

La cantidad fundamental para calcular las magnitudes termodinámicas es la función de partición  $Z(T, \mu)$ . La función de partición en el modelo NJL con el numero de sabores igual a  $N_f = 2$  a temperatura diferente de cero y potencial químico [4] se escribe de la siguiente manera,

$$Z = \int Dq D\bar{q} e^{i \int d^4x L_{NJL}} \quad , \quad (7.2)$$

dado que  $L_{NJL}$  contiene términos cuadráticos en los campos de quark, la integración sobre los campos fermiónicos no es posible en este nivel. Para resolver este problema, introducimos los campos auxiliares escalar  $\sigma$  y pseudoscalar  $\vec{\pi}$  al multiplicar la Ec.7.2 por la cantidad siguiente

$$\int D\sigma D\pi e^{i \int d^4x (-\frac{\sigma^2 + \pi^2}{2G})} \quad (7.3)$$

entonces podemos expresar 7.2 explícitamente en términos de quarks y grados de libertad bosonico como

$$Z(T, \mu) = \int D\sigma D\pi Dq D\bar{q} e^{i \int d^4x (\bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 - \gamma^0 \mu)q + \frac{G}{2} ((\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau^a q)^2)) - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{2G}} \quad (7.4)$$

donde  $q$  son los campos de quark y  $G$  es la constante de acoplamiento. Ahora usamos al formalismo del tiempo imaginario, aplicando la transformación  $t \rightarrow -i\tau$  y la integración sobre  $\tau$  es de 0 a  $\beta$ , lo que convierte esta función de partición en

$$Z(T, \mu) = \int D\sigma D\pi Dq D\bar{q} e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{q}(\gamma^0 \partial_\tau - i\gamma^l \partial_l + m_0 - \gamma^0 \mu)q + \frac{G}{2} ((\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau^a q)^2)) - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{2G}} \quad (7.5)$$

además los campos fermiónicos son antiperiodicos con el periodo  $\beta$ ,  $\bar{\tau}$  en  $\bar{q}i\gamma_5\tau\bar{q}$  son las matrices pauli y  $m_0 = \text{diag}(m_{0u}, m_{0d})$  denotan las masas de quarks. Ahora, cambiamos los campos bosónicos a través de la prescripción  $\sigma \rightarrow \sigma - \sigma\bar{q}q$  y  $\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} - G\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q$  que al reemplazarlo en 7.5, el término de interacción de los cuatro quarks se bi-linealiza, dando la expresión

$$Z(T, \mu) = \int D\sigma D\pi Dq D\bar{q} e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{q}(\gamma^0\partial_\tau - i\gamma^l\partial_l + m_0 - \gamma^0\mu + \sigma + \vec{\pi}\cdot i\gamma_5\vec{\tau})q - \frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{2G})} \quad (7.6)$$

posteriormente integramos el campo bosónico respecto al espacio y al tiempo para poder aislar la expresión en el exponente  $e^{\beta V(-(\frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{2G}))}$ . La parte que corresponde al campo fermiónico ya tiene la forma correcta para integrarse siguiendo el procedimiento estándar para integrales gaussianas en variables de Grassmann por lo que la Ec. 7.6 se escribe como

$$Z(T, \mu) = \int D\sigma D\pi e^{\beta V(-(\frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{2G}))} \int Dq D\bar{q} e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{q}(\gamma^0\partial_\tau - i\gamma^l\partial_l + m_0 - \gamma^0\mu + \sigma + \vec{\pi}\cdot i\gamma_5\vec{\tau})q)} \quad (7.7)$$

en la aproximación de Campo Promedio tomamos  $\sigma = \langle\sigma\rangle_0$  y  $\langle\vec{\pi}\rangle_0 = 0$ , entonces la función de partición toma la forma siguiente

$$Z(T, \mu) = e^{\beta V(-\frac{\sigma^2}{2G})} \int Dq D\bar{q} e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{q}(\gamma^0\partial_\tau - i\gamma^l\partial_l + m_0 - \gamma^0\mu + \sigma + \vec{\pi}\cdot i\gamma_5\vec{\tau})q)} \quad (7.8)$$

Ahora podemos calcular el potencial termodinámico por unidad de volumen  $\Omega(T, \mu) = -T\frac{1}{V}\text{Ln}Z(T, \mu)$  y también introducimos las transformaciones de Fourier para trabajar en el espacio de tri-momentos lo que conduce a la siguiente ecuación,

$$\Omega(T, \mu) = \frac{\sigma_{MF}^2}{2G} - \frac{T}{2} \sum_n \int^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \text{Ln} \left( \frac{1}{T} \tilde{S}^{-1}(i\omega_n, p) \right) \quad (7.9)$$

Donde  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  son las frecuencias de Matsubara para los fermiones y  $\tilde{S}^{-1}(i\omega_n, \mathbf{p})$  es el propagador de quark inverso.

## 7.2 Mass Gap in the NJL Model

La magnitud fundamental a calcular es el potencial termodinámico por unidad de volumen dado por la Ec. 7.9. A partir de  $\Omega(T, \mu)$  calcularemos las cantidades termodinámicas que nos interesan, pero antes el potencial requiere ser minimizado a temperatura finita. Utilizamos la identidad  $\text{Tr} \ln (X) = \ln \det (X)$  para llevar a cabo la traza de la Ec. 7.9.

$$\text{Tr} \text{Ln} \left( \frac{1}{T} \tilde{S}^{-1}(i\omega_n, p) \right) = 2N_c N_f \left[ \frac{(\omega_n + i\mu)^2 + E_p^2}{T^2} \right] + \left[ \frac{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2}{T^2} \right] \quad (7.10)$$

aquí se tiene que el propagador de quarks inverso  $\tilde{S}^{-1}(p^0, \mathbf{p})$  está dado por

$$\tilde{S}^{-1}(p^0, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \not{p} - m_0 + \sigma - \mu\gamma_0 & 0 \\ 0 & \not{p} - m_0 + \sigma + \mu\gamma_0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

entonces para obtener el resultado final usamos la siguiente relación

$$T \sum_{-\infty}^{\infty} \text{Ln}\left(\frac{\omega_n^2 + \lambda^2}{T^2}\right) = \lambda + 2T \text{Ln}(1 + e^{\frac{-\lambda}{T}}) \quad . \quad (7.12)$$

Finalmente obtenemos el potencial

$$\Omega_{MF}(T, \mu) = \frac{\sigma_{MF}^2}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (E_p - T \text{Ln}(f^+(E_p)) - T \text{Ln}(f^-(E_p))) \quad (7.13)$$

Donde la función de distribución fermiónica está dada por

$$f^{\pm}(E_p) = \frac{1}{e^{-\beta(E \pm \mu)} + 1} \quad (7.14)$$

y la energía  $E_p$  se escribe como

$$E_p = \sqrt{(p^2 + m^2)} \quad . \quad (7.15)$$

La masa de los quarks constituyentes  $m$  esta dada por la minimización del potencial termodinámico con respecto a  $\frac{(\partial\Omega_{MF})}{\partial\sigma_{MF}} = 0$  y está escrito como en [4],

$$m = m_0 - 2G \langle q\bar{q} \rangle \quad (7.16)$$

$$m = m_0 + 4G_s N_c N_f \int_0^{\Lambda} \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{p^2}{E_p} (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \quad (7.17)$$

donde  $N_c = 3$  y  $N_f = 2$ .

Una de las cantidades más importantes que se utiliza en este modelo para obtener resultados físicos se conoce como la función de polarización de partículas. Las matemáticas de los operadores de polarización de partículas están dadas por integrales de bucle que contienen la correlación para los campos cuánticos del sigma escalar y pion pseudoscalar, estas se escriben como en en la referencia[5].

$$\Pi_{ab}^{PP}(p^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i\gamma_5 \tau^a S(a+p) i\gamma_5 \tau^b S(p)] \quad (7.18)$$

$$\Pi_{ab}^{SS}(p^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[iS(a+p)S(p)] \quad (7.19)$$

### 7.3 Parametros

Para hacer el modelo coherente con la observación de la materia hadrónica el modelo NJL con cutoff infrarrojo se requiere la optimización de tres parámetros a  $T = 0$ , por lo que se eligen las cantidades empíricas que son la masa pion, la constante de decaimiento del pion y el condensado de quark. Por otro lado para obtener la constante de acoplamiento  $G$ , el punto de cutoff infrarrojo del trimomento y la masa del quark desnudo se aplica la metodología presentada en[6].

Hay una gran importancia en la selección de los parámetros para que los valores iniciales de las masas de mesones puedan ser consistentes con los reportados por la literatura, hemos elegido el límite inferior de la integral de corrección a un loop como la masa de quark constituyente y el límite superior conocido como el cutoff en  $602.472 \text{ MeV}$ .

$\Lambda$	$G\Lambda^2$	$m$	$ \bar{\psi}\psi ^{\frac{1}{3}}$	$f_\pi$	$m_\pi$
602.472(MeV)	2.318	5.495(MeV)	-240.772(MeV)	92.4 (MeV)	139.3(MeV)

Table 7.1: Model Parameters.

## 7.4 El Comportamiento del Condensado

La existencia de un condensado en una teoría de campo se asocia a que las partículas de la teoría tengan masa y además esto significa que la invariancia de gauge se ha roto. Para calcular el valor esperado del vacío (VEV) del campo en una forma invariante de gauge se debe seleccionar una fase del condensado. El condensado también conocido como el VEV es un concepto importante en la teoría cuántica del campo debido a su importante contribución a la ruptura de simetría. Como se puede ver en la ecuación de gap, el condensado viene dado por la siguiente expresión

$$\langle q\bar{q} \rangle = 2N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{dp}{(2\pi^2)} \frac{p^2}{E_p} (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \quad (7.20)$$

El condensado  $\langle q\bar{q} \rangle$  representa la densidad escalar de energía negativa llena del mar de Dirac y se muestra en la figura siguiente. Como se puede ver en la Figura 7.1 la masa del condensado disminuye a medida que la temperatura aumenta de tal manera que el condensado manifiesta propiedades que uno esperaría durante la restauración de la simetría quiral.

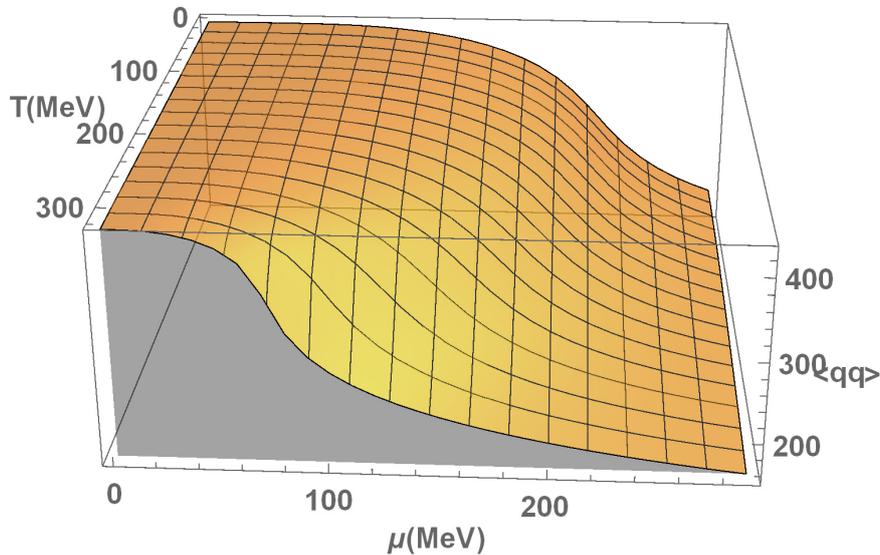


Figure 7.1: Comportamiento del condensado del vacío a temperatura finita y potencial químico.

Además en la Figura 7.1 se muestra que a medida que aumenta el potencial químico, los requisitos de temperatura para la rotura de simetría quiral disminuyen.

## 7.5 Comportamiento Termodinámico del $\pi$ y el $\sigma$

Los estados hadrónicos del modelo NJL decaen para liberar quarks, de manera que para obtener estados ligados se aplica un cutoff infrarrojo[4], por lo que se asume un

límite inferior en términos de la masa de quark  $m(T)$  para la disociación del mesón en el modelo NJL, para así estudiar las transiciones de fase a temperatura finita del pion y sigma.

Los mésones de pion y sigma han sido estudiados en gran medida en campos físicos efectivos, estos presentan un comportamiento termodinámico típico de la rotura de simetría que puede verse con la dependencia del condensado con respecto a la masa del mesón pion y sigma. Además se estudió las propiedades termodinámicas lo que nos permite detectar elementos que se producen en los cambios de fase de algún sistema. El siguiente análisis se centra en las masas de mesones y su dependencia de la temperatura y el potencial químico.

Para obtener las magnitudes físicas correctas con los parámetros del modelo determinados a  $T = 0$  podemos resolver las ecuaciones termodinámicas particulares para el comportamiento masivo del sigma y del pion, esta ecuación conocida como Bethe-Salpeter es una herramienta teórica de campo cuántico general, por lo tanto las aplicaciones para esta pueden encontrarse en cualquier teoría de campos cuánticos. La ecuación de Bethe-Salpeter (llamada así por Hans Bethe y Edwin Salpeter)[7] describe los estados unidos de un sistema de campo cuántico de dos cuerpos (partículas) en un formalismo covariante relativista. La ecuación se publicó por primera vez en 1950 al final de un artículo de Yoichiro Nambu, pero sin derivación. Algunos ejemplos son el positronio (estado enlazado de un par de electrones-positrones), los excitones (estado unido de un par de electrones-agujeros), y los mesones (como el estado ligado quark-antiquark). Entonces la masa de los mesones se obtiene solucionando la siguiente ecuación de Bethe-Salpeter.

$$1 - 2G\Pi(p^2) = 0$$

Es importante señalar que en la integral de la función de polarización se ha optimizado con la condición el límite superior del cutoff  $\Lambda$  y un límite inferior en términos de la masa de quark  $m(T)$  que imita el confinamiento, de manera que la función da un valor inicial correcto de la masa del mesón. Para el caso del pion, una vez calculada la función de polarización, la ecuación se escribe como en [4, 6]

$$1 + 4GN_c N_f \int_{m(T)}^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{(M_\pi^2 - E_p^2)} (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) = 0 \quad (7.21)$$

A continuación se muestra el comportamiento de la masa del pion con la temperatura y el potencial químico donde se observa que la masa del pion asciende con la temperatura así como también con el potencial químico.

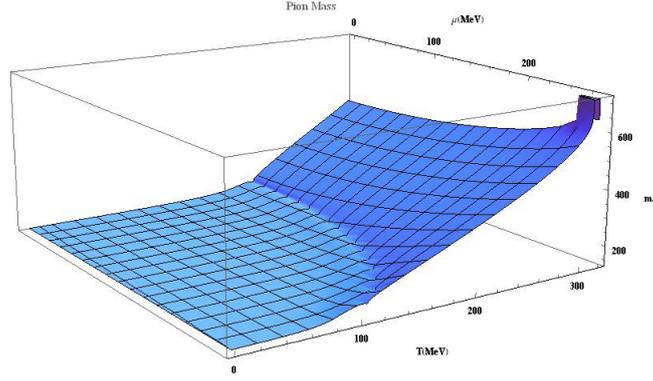


Figure 7.2: Comportamiento de la masa del pion con respecto a la temperatura y potencial químico.

Por otro lado en los últimos años ha habido un debate sobre la posible masa de sigma, ya que no es bien conocido en detalle, el actual rango de masas propuestas se encuentra entre 450-750MeV, pero aún no se ha llegado a una conclusión. La función de polarización del sigma se escribe como en [4, 6].

$$1 + 4GN_c N_f \int_{m(T)}^{\Lambda} \frac{(d^3p)}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{E_p^2} \frac{E_p}{(M_\pi^2 - E_p^2)} (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) = 0$$

A diferencia de la masa del pion, la masa del sigma disminuye considerablemente antes de empezar a aumentar una vez que el cambio de fase se lleva a cabo, esto se muestra en la siguiente gráfica. Como se puede ver en las gráficas del pion y sigma,

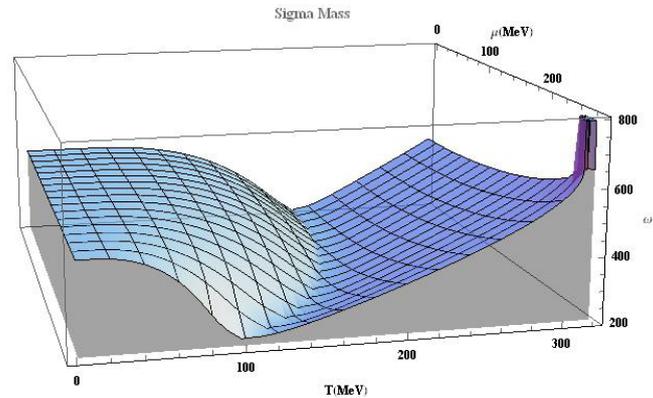


Figure 7.3: Comportamiento de la masa del sigma con respecto a temperatura y potencial químico.

se observa una curva distintiva que indica un cambio en el comportamiento de ambos gráficos 3D, esto coincide con los resultados mostrados en el capítulo anterior .

## 7.6 Función Espectral

El uso de la función de Green para estudio de fenómenos físicos ha sido bastante útil, particularmente en la teoría de los campos cuánticos. Un ejemplo de la importancia que tiene la función de Green se observa al utilizar esta herramienta ya que emerge

el concepto de representación espectral, lo que implica el uso de la función espectral para describir las propiedades de un sistema. Los datos que los propagadores ocultan se hacen evidentes si se aplica la transformación de Fourier a la variable de tiempo insertando la integridad de los estados intermedios, lo anterior se explica debido a que esto hace que el espectro y las amplitudes de transición aparezcan explícitamente. Mediante la aplicación de las relaciones de completitud en un sistema de varios cuerpos se obtiene la representación de Lehmann de una función de Green de muchos cuerpos, esto también sirve como soluciones de la ecuación de Dyson. La función espectral sirve como una forma de analizar el efecto de la correlación en las partículas, así como para describir muchas otras propiedades físicas que un sistema físico podría tener. Al usar la ecuación de Dyson se representa como

$$G(p; E) = G^{HF}(p; E) + G^{HF}(p; E)\Sigma(p; E)G(p; E)\dots \quad (7.22)$$

donde  $G^{HF}(p; E)$  es el propagador libre y  $\Sigma(p; E)$  es la autoenergía, tomando en cuenta lo anterior la solución de 7.22 se escribe como,

$$G(p; E) = \frac{1}{(G^{HF}(p; E))^{-1} - \Sigma(p; E)}$$

Así que la función espectral se escribe como

$$S(p; E) = \frac{1}{\pi |ImG(p; E)|}$$

donde  $S(p; E)$  es una función continua de  $p$  y  $E$  y que cumple la siguiente regla de suma

$$\int S(p; E)dE = 1 \quad .$$

Una característica importante de la función espectral es la identificación de la transición quiral por disociación del sigma, esto se observa por la disminución del comportamiento del pico de la función 7.4, así como el incremento de la anchura de la función espectral.

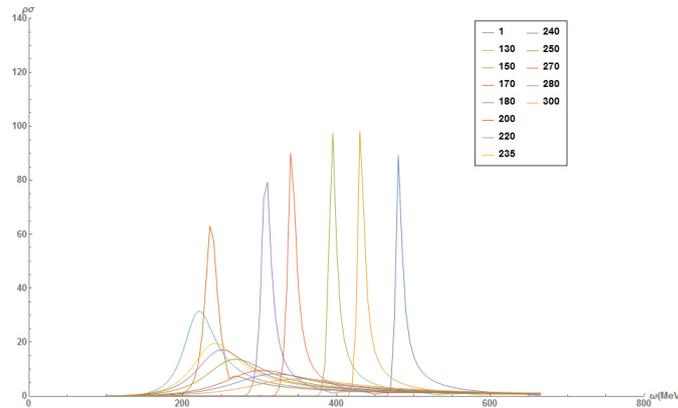


Figure 7.4: Comportamiento de la función espectral a temperatura finita.

## 7.7 Discusión

La función espectral en el modelo NJL presentada en la figura 7.4 presenta un comportamiento similar al observado en la misma función para el modelo LSM con OPT. Podemos ver que el pico de la función tiende a desplazarse hacia valores más cercanos a  $180\text{MeV}$ , al sobrepasar la temperatura de aproximadamente  $200\text{MeV}$  el ancho de la función se incrementa lo que concuerda con el comportamiento de la función en el modelo LSM con OPT. Si observamos el comportamiento de las masas producidas por el modelo NJL en la figura 7.5 se puede ver que el comportamiento de las masas para el pion y sigma es similar al comportamiento obtenido para las masas en el modelo LSM con OPT del capítulo anterior. Algunas de las diferencias entre los modelos como la masa inicial del sigma se deben a que en la elección de las distintas condiciones para la optimización de los parámetros en OPT se considera notablemente diferentes propiedades termodinámicas tales como el pico de función espectral del sigma. La figura 7.5 muestra las masas de sigma y pion en función de

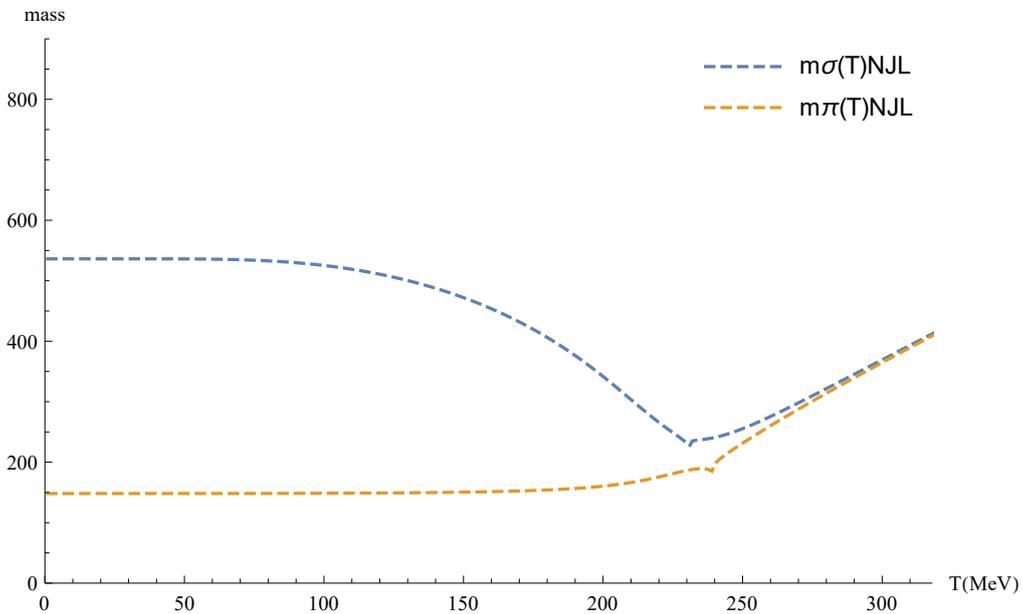


Figure 7.5: Masas del pion y sigma para el modelo NJL.

la temperatura para modelo NJL. Observamos que la masa del sigma disminuye con la temperatura hasta alcanzar la temperatura de transición quiral de  $T_c = 207\text{MeV}$ . Más allá de este valor, la masa de sigma comienza a aumentar, por otro lado la masa de pion nunca disminuye. Además se ha calculado la temperatura crítica  $T_c$  para la transición de fase quiral en el modelo  $SU(2)$  NJL obteniendo  $T_c = 207\text{ MeV}$  cuando se toma  $m_q = 5\text{ MeV}$  para la masa de quark desnudo. En la figura 7.5 se observa que este es el punto donde la curva de masas de mesón presenta una discontinuidad.

## 7.8 Conclusión

Se ha comparado la termodinámica de los modelos NJL y OPT en el estudio del pion y sigma. Nuestros resultados son consistentes con los resultados reportados

en [5, 8, 9]. Las propiedades termodinámicas del medio se describen bien cuando se tiene en cuenta el acoplamiento entre simetría quiral y el de-confinamiento. El modelo NJL y el modelo OPT se comportan de una manera similar cuando uno la reproducción de las propiedades mesón sigma y pion en materia caliente.

## REFERENCIAS

- [1] Yoichiro Nambu and Giovanni Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Physical Review*, 122(1):345, 1961.
- [2] Heui-Seol Roh and T Matsui. Chiral phase transition at finite temperature in the linear sigma model. *The European Physical Journal A-Hadrons and Nuclei*, 1(2):205–220, 1998.
- [3] MK Volkov. Meson lagrangians in a superconductor quark model. *Annals of Physics*, 157(1):282–303, 1984.
- [4] Aleksandr Dubinin, D Blaschke, and Yu L Kalinovsky. Pion and sigma meson dissociation in a modified njl model at finite temperature. *arXiv preprint arXiv:1312.0559*, 2013.
- [5] AV Friesen, Yu L Kalinovsky, and VD Toneev. Thermodynamics in njl-like models. *arXiv preprint arXiv:1102.1813*, 2011.
- [6] A Wergieluk, D Blaschke, Yu L Kalinovsky, and AV Friesen. Pion dissociation and levinson’s theorem in hot pnjl quark matter. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 10(7):660–668, 2013.
- [7] E. E. Salpeter and H. A. Bethe. A relativistic equation for bound-state problems. *Phys. Rev.*, 84:1232–1242, Dec 1951.
- [8] David Blaschke, M Buballa, A Dubinin, G Röpke, and D Zablocki. Generalized beth–uhlenbeck approach to mesons and diquarks in hot, dense quark matter. *Annals of Physics*, 348:228–255, 2014.
- [9] Hubert Hansen, WM Alberico, A Beraudo, A Molinari, M Nardi, and C Ratti. Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the nambu–jona-lasinio model with a polyakov loop. *Physical Review D*, 75(6):065004, 2007.

# Lista de Figuras

4.1	Representación del espacio complejo de una Rotación de Wick . . . . .	28
4.2	Diagramas a un loop para el propagador $G_\beta(x, x')$ . . . . .	31
4.3	Contorno mostrando los polos de la función $\frac{\beta}{2} \coth(\frac{1}{2}\beta p^0)$ . . . . .	32
4.4	Contorno mostrando la deformación de la función. . . . .	32
4.5	Representación del diagrama tipo Tadpole . . . . .	33
4.6	Diagrama tipo polarización . . . . .	35
5.1	Potencial con simetría no rota. . . . .	48
5.2	Potencial tipo "Sombrero Mexicano" que representa la ruptura de la simetría. . . . .	49
6.1	Diagramas para el potencial $V(\delta\sigma + \xi, \delta\pi)$ . . . . .	53
6.2	Diagramas para la auto-energía del pion . . . . .	57
6.3	Comportamiento de las masas nivel árbol del pion, sigma y el condensado, en función de la temperatura tomando $m_\sigma = 500$ MeV . . . . .	57
6.4	Diagramas para la auto-energía sigma . . . . .	58
6.5	Comportamiento del condensado $\frac{\xi(T)}{\xi(0)}$ a temperatura finita y diferentes valores de $m_\sigma$ (450,500,550,600 MeV) . . . . .	58
6.6	función espectral del sigma a T=0 y diferentes valores de $m_\sigma = (450,500,550,600$ MeV) y sus respectivos anchos $\Gamma$ . . . . .	59
6.7	La masa del sigma como el pico de la Función Espectral del sigma a $m_\sigma = (550$ MeV). . . . .	60
6.8	El comportamiento del ancho de la función espectral del sigma a diferentes valores de su masa $m_\sigma = (450,500,550,600$ MeV) . . . . .	61
6.9	Loops del pion y el sigma. . . . .	68
6.10	Pion and sigma self-energy loops. . . . .	68
7.1	Comportamiento del condensado del vacío a temperatura finita y potencial químico. . . . .	77
7.2	Comportamiento de la masa del pion con respecto a la temperatura y potencial químico. . . . .	79
7.3	Comportamiento de la masa del sigma con respecto a temperatura y potencial químico. . . . .	79
7.4	Comportamiento de la función espectral a temperatura finita. . . . .	80
7.5	Masas del pion y sigma para el modelo NJL. . . . .	81