

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**EFECTOS ESTRUCTURALES EN LA  
SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS**

**POR**

**NIDIA LIZZETH GÓMEZ DUARTE**

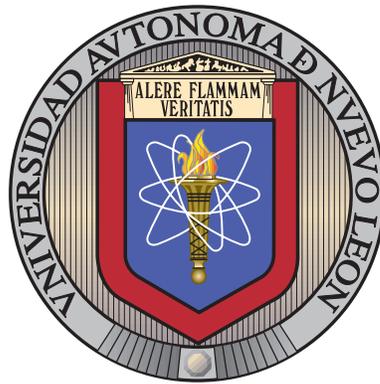
**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN  
INGENIERÍA DE SISTEMAS**

**JULIO 2010**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EFFECTOS ESTRUCTURALES EN LA  
SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS

POR

NIDIA LIZZETH GÓMEZ DUARTE

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

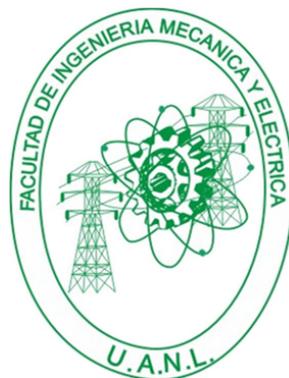
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EFFECTOS ESTRUCTURALES EN LA  
SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS

POR

NIDIA LIZZETH GÓMEZ DUARTE

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**División de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la tesis «Efectos estructurales en la sincronización de sistemas», realizada por el alumno Nidia Lizzeth Gómez Duarte, con número de matrícula 1151749, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

---

Dra. Satu Elisa Schaeffer

Asesor

---

Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez

Revisor

---

Dr. Arturo Berrones Santos

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Julio 2010

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sincronización . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	2
1.3. Hipótesis . . . . .	3
1.4. Metodología . . . . .	4
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Teoría de grafos</b>	<b>5</b>
2.1. Definiciones . . . . .	5
<b>3. Modelos de sincronización</b>	<b>9</b>
3.1. Modelo de Kuramoto . . . . .	10
3.1.1. Definición del modelo de Kuramoto . . . . .	10
<b>4. Redes complejas</b>	<b>12</b>

---

4.1. Euler y los puentes de Königsberg . . . . .	12
4.2. Redes y sistemas . . . . .	13
4.2.1. Redes complejas . . . . .	15
4.2.2. Propiedades de las redes complejas . . . . .	16
4.2.3. Tipos de redes complejas . . . . .	17
4.2.4. Redes Aleatorias . . . . .	18
4.2.5. Redes Power Law . . . . .	19
4.2.6. Redes Exponenciales . . . . .	20
4.3. Modelos de generacion de redes . . . . .	21
4.3.1. Modelos de generación sin crecimiento . . . . .	21
4.3.2. Modelo de generación de redes aleatorias de Erdős y Rényi . . . . .	21
4.3.3. Modelos de generación basados en crecimiento . . . . .	21
4.3.4. Modelo de generación de redes scale free de Barabási . . . . .	22
4.3.5. Aplicaciones . . . . .	22
<b>5. Planteamiento del problema</b>	<b>24</b>
<b>6. Experimentación y análisis de resultados</b>	<b>27</b>
6.1. Modelo . . . . .	27
6.2. Tipos de redes generadas . . . . .	28
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>35</b>
<b>A. Tablas de resultados</b>	<b>37</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. Dos péndulos oscilando, $a_1$ y $a_2$ representan la fase de cada péndulo, valores iguales de $a_1$ y $a_2$ representan la sincronización de los péndulos.	3
2.1. Grafo con las etiquetas de sus nodos y los pesos de las aristas . . . . .	6
2.2. Ejemplos de grafos completos de dos, tres, cuatro y cinco nodos . . . . .	6
4.1. En esta figura se visualizan en color rojo los siete puentes de Königsberg.	13
4.2. En esta figura se muestra la representación abstracta hecha por Euler de los siete puentes de Königsberg. . . . .	13
4.3. Red de Internet . . . . .	15
5.1. Ejemplo de cuatro pendulos acoplados. . . . .	24
5.2. En esta figura se muestran diferentes topologías del grafo. . . . .	24
6.1. En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo C. . . . .	28
6.2. En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo L. . . . .	29
6.3. En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo E. . . . .	29
6.4. En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo M. . . . .	29
6.5. Valores propios grafos . . . . .	30

---

6.6. Box plot valores propios . . . . .	31
6.7. Iteraciones grafos . . . . .	32
6.8. Box plot iteraciones . . . . .	33
6.9. Iteraciones vs. valores propios . . . . .	33

# ÍNDICE DE TABLAS

---

5.1. Caso de ejemplo . . . . .	26
A.1. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo círculo . . . . .	38
A.2. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo círculo . . . . .	39
A.3. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo línea . . . . .	40
A.4. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo línea . . . . .	41
A.5. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo estrella . . . . .	42
A.6. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo estrella . . . . .	43
A.7. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo malla . . . . .	44
A.8. Caso 50 nodos,100 aristas, tipo malla . . . . .	45

# AGRADECIMIENTOS

---

Reciban mi agradecimiento las instituciones de las cuales recibí apoyo:

- El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca de manutención para así poder realizar mis estudios de maestría.
- La Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME) por haberme otorgado una beca de cuotas internas y materias durante los 4 semestres cursados.
- La Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) por haberme otorgado una beca de cuotas escolares en los 4 semestres cursados.
- El proyecto UANL/PAICyT (IT264-09) obtenido por la Dra. Elisa Schaeffer, por haberme apoyado económicamente para exponer mi trabajo de tesis en la XIX Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico (ENOAN 2009), en Puebla, Puebla.

Gracias a la Dra. Elisa Schaeffer por todos sus consejos a lo largo de la elaboración de este trabajo.

Gracias a los miembros del comité, Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez y Dr. Arturo Berrones, muchas gracias por sus sugerencias.

Gracias al Dr. Jesús de León, muchas gracias por su tiempo y su interés en enseñarme conceptos nuevos de su área.

Gracias a los profesores del PISIS por el apoyo recibido durante estos dos años, gracias por sus enseñanzas, me ayudaron a crecer.

Gracias a mi familia por su apoyo incondicional.

Gracias a mis compañeros que siempre estuvieron ahí para apoyarme.

Gracias a mis amigos por escuchar mis historias de tesis, por apoyarme y darme palabras de ánimo.

Y mi mayor agradecimiento a Dios, por alentarme cada día, por ayudarme a aprender lecciones de vida siempre, aprendí muchas cosas durante la elaboración de esta tesis.

# RESUMEN

---

Nidia Lizzeth Gómez Duarte.

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

## EFECTOS ESTRUCTURALES EN LA SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS

Número de páginas: 49.

**OBJETIVOS:** La elaboración de esta tesis tiene como objetivo la adquisición de conocimiento del problema de sincronización de sistemas, además de hacer un estudio de la teoría de grafos y propiedades estructurales de éstos. También se tiene como objetivo, realizar una investigación de los modelos de sincronización de redes conocidos. Se desea evaluar el desempeño de algún modelo de sincronización elegido. Considerando una medida estructural elegida finalmente concluir bajo qué condiciones respecto de ésta propiedad elegida, el modelo sincroniza de una manera eficiente.

**CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES:** Se observará que los diferentes tipos de redes presentan diferentes valores propios y éstos se encuentran dentro de un rango de

valores dependiendo del tipo de red. Es importante resaltar que cada una de estas redes cuentan con el mismo número de aristas y nodos. Así mismo, para cada tipo de red, los valores de iteraciones requeridas para la sincronización que se obtendrán se encuentran dentro de un rango de valores dependiendo del tipo de red igualmente.

De esto se podrá concluir que al tener un sistema que se desee sincronizar, y teniendo cantidades de elementos en el sistema y conexiones fijas, es posible inducir en qué manera deben estar conectados estos para tener una sincronización más rápida o tal vez más lenta (según se desee), para lograr esto se debe representar dicho sistema mediante un grafo y de éste obtener la matriz laplaciana correspondiente y su segundo valor propio el cual representa la conectividad de dicho grafo.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dra. Satu Elisa Schaeffer

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

### 1.1 SINCRONIZACIÓN

La sincronización como un fenómeno emergente de unidades que interactúan dinámicamente ha fascinado a los seres humanos desde la antigüedad [4]. En la naturaleza existen cientos de situaciones en las que se producen sincronizaciones espontáneas. Contextos muy conocidos donde ocurre la sincronización espontánea son: el ritmo de los destellos luminosos de las luciérnagas, los chirridos de los grillos, los aplausos en un concierto o los latidos del corazón. ¿Cómo se produce esta situación en fenómenos tan dispares? Los físicos están trabajando para deducir la forma en que la auto-organización genera la aparición espontánea del orden a partir del caos [25].

¿Cómo puede ser que los millones de células que conforman un corazón se contraigan y relajen al mismo tiempo si carecen de la inteligencia necesaria para ello? ¿De qué forma logran sincronizar sus chirridos un grupo de grillos? ¿Cómo emerge la sincronización de cientos de aplausos en un concierto? Durante siglos, los filósofos y estudiosos de la naturaleza se plantearon preguntas acerca de esto. En todos los casos mencionados, y en otros cientos de casos similares, se produce la sincronización de cientos, miles o millones de piezas sueltas sin que exista un sistema específico destinado a conseguir esa hazaña. Los grillos son poco más que un oscilador cuya frecuencia depende de la temperatura, y al igual que las luciérnagas, carecen de la inteligencia necesaria para acordar con sus compañeros el ritmo de sus

actividades.

El astrónomo, físico y matemático neerlandés, Christiaan Huygens (1629-1695), recordado por sus aportes a la mecánica y la óptica, fue uno de los primeros en interesarse en el problema de la sincronización y abordarlo con las herramientas de la ciencia. En una de las paredes de su dormitorio, Huygens tenía dos relojes de péndulo que él mismo había construido. En febrero de 1665, mientras convalecía en su cuarto de una gripe, notó que los péndulos encargados de impulsar a cada uno de los relojes estaban perfectamente sincronizados. Debido su formación física, Huygens sabía que era prácticamente imposible que ambos péndulos oscilaran de esa manera por casualidad. A pesar de la fiebre y de su estado gripal, este hecho llamó profundamente su atención. Por supuesto cabía la posibilidad de que efectivamente fuese solo una casualidad, así que se dedicó a mirarlos durante horas. Sin embargo, ambos relojes seguían sincronizados. Si los paraba y volvía a poner en marcha, los péndulos iniciaban su balanceo de forma desacompañada, pero al cabo de algún tiempo volvían a sincronizarse [23].

Huygens llegó a la conclusión que, de alguna extraña forma, ambos relojes estaban conectados. El único vínculo que existía entre ambos era, obviamente, la pared en la que estaban colgados. Entonces diseñó un experimento destinado a comprobar su teoría: simplemente cambió uno de los relojes a otra pared, y volvió a la cama a ver si se sincronizaban o no. Cuando al cabo de varias horas los relojes seguían marchando cada uno a su propio ritmo, Huygens supo que tenía razón: era el acoplamiento de los relojes a través de la pared lo que generaba la sincronización entre ellos [22].

## 1.2 OBJETIVO

Esta tesis tiene como objetivo llevar a cabo un análisis del comportamiento de un modelo de sincronización, donde los elementos que se desean sincronizar y sus relaciones son modeladas como un grafo. En este grafo cada nodo corresponde a un

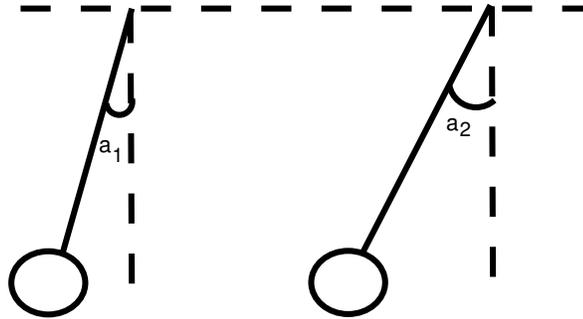


Figura 1.1: Dos péndulos oscilando,  $a_1$  y  $a_2$  representan la fase de cada péndulo, valores iguales de  $a_1$  y  $a_2$  representan la sincronización de los péndulos.

elemento del sistema, y cada arista a una relación entre dos elementos. Se desea analizar el comportamiento del modelo al presentarse diferentes relaciones entre los elementos, esto sería, probar grafos de distintas topologías. Con esto se desea concluir sí o no la topología del grafo que representa las conexiones del sistema influye en la eficiencia del modelo en términos de tiempo; esta información es de utilidad ya que dado un conjunto de elementos que se desean sincronizar para que realicen una tarea sería posible sugerir como deben comunicarse los elementos de modo que la sincronización se realice de una manera eficiente.

### 1.3 HIPÓTESIS

El segundo valor propio de la matriz laplaciana asociada a un grafo  $G$  provee información sobre qué tanta conectividad tiene la red. Valores grandes indican alta conectividad mientras que los valores pequeños poca conectividad entre los elementos. Nuestra hipótesis consiste en que la eficiencia del modelo de sincronización de redes está relacionada con este valor propio mencionado.

## 1.4 METODOLOGÍA

La metodología aplicada se basa en analizar el desempeño de un modelo de sincronización basado en osciladores acoplados a pulsos al presentarse diferentes tipos de sistemas para sincronizar. Dichos sistemas son modelados como una red (o grafo). Se estudia una propiedad espectral de la red para determinar si existe una relación entre este valor y el tiempo de sincronización.

## 1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS

El presente trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan fundamentos teóricos de la teoría de grafos, en el capítulo 3 se revisan fundamentos teóricos de la sincronización y algunos tipos de modelos de sincronización, en el capítulo 4 se revisan los fundamentos teóricos de las redes complejas y se presenta una revisión del estado del arte de la clasificación de redes complejas, en el capítulo 5 se presenta la explicación de como se desarrolló la experimentación realizada y el análisis de resultados y finalmente en el capítulo 6 se encuentran las conclusiones y trabajos futuros.

## CAPÍTULO 2

# TEORÍA DE GRAFOS

---

En este capítulo se definirán algunos conceptos de la teoría de grafos tales como el concepto de grafo, nodo vecino, así como que es un grafo dirigido y uno no dirigido. También se definirán conceptos como matriz de adyacencia, matriz de grados y matriz laplaciana. Posteriormente se hablará sobre algunos conceptos de álgebra lineal como el espectro de un grafo, el espectro del laplaciano y la conectividad algebraica.

## 2.1 DEFINICIONES

**GRAFO** Un grafo  $G$  es un par de conjuntos  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito de puntos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  llamados vértices o nodos y  $E$  es un conjunto finito de aristas  $(i, j)$ , cada uno de los cuales une pares ordenados de nodos. A las aristas se les puede asignar un valor o peso  $w_{ij}$  [17].

**NODO VECINO** Dos nodos  $i$  y  $j$  son vecinos entre ellos si existe la arista  $(i, j) \in E$ . Por ejemplo en la figura 2.1 los nodos  $v_1$  y  $v_2$  son vecinos ya que se tiene la arista 1, 2 mientras que los nodos  $v_1$  y  $v_3$  no son vecinos pues no se tiene la arista 1, 3.

**GRADO DE UN NODO** El grado de un nodo es la suma (de los pesos) de las aristas incidentes a un nodo. Se denota por  $d_i = \sum_j w_{ij}$ . Por ejemplo en la figura 2.1 el grado del nodo  $v_2$  es cuatro ya que hay cuatro aristas incidentes a este.

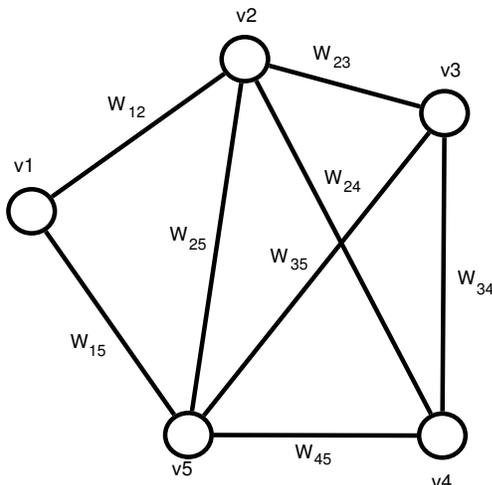


Figura 2.1: Grafo con las etiquetas de sus nodos y los pesos de las aristas

**GRAFO COMPLETO** Si cada par de nodos está conectado por una arista entonces se dice que el grafo es completo.

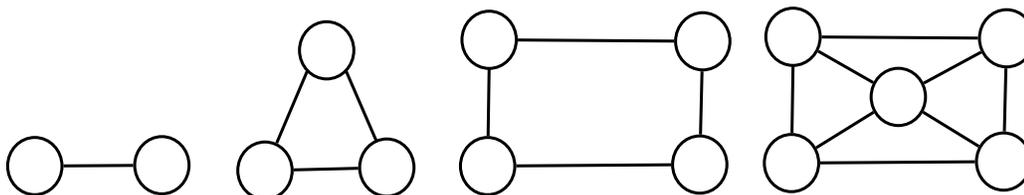


Figura 2.2: Ejemplos de grafos completos de dos, tres, cuatro y cinco nodos

**DIÁMETRO DE UN GRAFO** El diámetro de un grafo es la máxima distancia entre dos nodos. Esta es infinita si el grafo no es conexo [15].

**MULTIGRAFO** Un multigrafo es un grafo en el que entre un par de nodos  $i$  y  $j$  puede existir más de una arista.

**MATRIZ DE ADYACENCIA** La matriz de adyacencia de un grafo  $G$  es la matriz  $A(G)$  de tamaño  $n \times n$  cuyas entradas están dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia correspondiente al grafo de la figura 2.1 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**MATRIZ DE GRADOS** La matriz de grados asociada al grafo  $G$  es una matriz diagonal  $D(G)$  cuyos elementos  $d_{i,i}$  corresponden al grado de salida del nodo  $i$ .

La matriz de grados correspondiente al grafo de la figura 2.1 es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**MATRIZ DE LAPLACIANA** La matriz Laplaciana (o Laplaciano) asociada a  $G$  denotada por  $L(G)$  de tamaño  $n \times n$  cuyas entradas están dadas por:

$$l_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & \text{si } i = j, \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La matriz de Laplaciana correspondiente al grafo de la figura 2.1 es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**ESPECTRO DE UN GRAFO** El espectro de un grafo  $G$  es el conjunto de números los cuáles son valores propios de  $A(G)$ , además de sus multiplicidades. Si los valores propios distintos están dados por  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$ , y sus multiplicidades son  $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{n-1})$ , entonces se puede escribir:

$$\text{Spec } G = \{(\lambda_0, m(\lambda_0)), (\lambda_1, m(\lambda_1)), \dots, (\lambda_{n-1}, m(\lambda_{n-1}))\}$$

En el estudio de los procesos estocásticos, específicamente en las cadenas de Markov, los valores propios son de utilidad ya que proveen información sobre el comportamiento a largo plazo de la cadena.

**ESPECTRO DEL LAPLACIANO** Sea  $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$  los valores propios de la matriz Laplaciana  $L$  [11]. Entonces:

- $\mu_0 = 0$ , con vector propio  $(1, 1, \dots, 1)$ ;
- si  $G$  es conexo,  $\mu_1 > 0$ ;
- si  $G$  es regular de grado  $k$ , entonces  $\mu_i = k - \lambda_i$ , donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $G$ , en orden decreciente.

**CONECTIVIDAD ALGEBRAICA** La conectividad algebraica de un grafo  $G$  es el segundo valor propio más pequeño de la matriz laplaciana de  $G$ . Este valor es mayor a cero si y solo  $G$  es un grafo conexo. La magnitud de este valor refleja lo bien conectado que está el grafo, un valor grande indica una topología con muchos enlaces, mientras que un valor pequeño indica una topología más bien alargada [8].

## CAPÍTULO 3

# MODELOS DE SINCRONIZACIÓN

---

La convalecencia de Huygens en 1665 y sus relojes de péndulo sincronizados [23] fueron la piedra fundamental sobre la que los científicos modernos edificaron toda una rama de la matemática aplicada y la física llamada teoría de los osciladores acoplados. Detrás de ese nombre se esconden las ecuaciones capaces de explicar por qué actualmente la Luna, orbitando la Tierra, nos muestra siempre la misma cara (o por qué su periodo de rotación coincide con su periodo de traslación alrededor de la Tierra). Cada uno de los relojes de Huygens es un oscilador. Lo rudimentario de sus mecanismos confería a cada uno una frecuencia de oscilación ligeramente diferente, ya que dependía (entre otros factores) de los parámetros constructivos del péndulo (su peso, longitud, etc.). Cada péndulo realizaba su recorrido de ida y vuelta en un tiempo ligeramente diferente y la pared (como notó Huygens) era el medio a través del cual los relojes-osciladores estaban acoplados. La oscilación de uno de los péndulos provoca una vibración que se transmite por la pared e influye en el movimiento del otro, y viceversa. Se trata de una influencia muy sutil y que depende (entre otras cosas) de la rigidez de la pared, pero basta para que en un tiempo relativamente corto ambos osciladores se sincronicen. Cuando esto ocurre, ambos péndulos completan su recorrido de ida y vuelta en el mismo tiempo, con la misma frecuencia. Aún sin saberlo, Huygens es el responsable del láser, un artilugio en el que trillones de átomos acoplados de una forma similar a sus dos relojes de péndulo oscilan acompasadamente para emitir fotones con la misma frecuencia y fase.

En efecto, a pesar de que las ecuaciones encargadas de describir el comportamiento de un oscilador son sencillas, la interacción entre dos o más de ellos es de una complejidad extraordinaria. En los últimos años, sin embargo, se han producido algunos avances que permiten especular con que en un lapso de tiempo razonable podremos comprender cabalmente la forma en que se acoplan estos osciladores individuales. Concretamente, el trabajo de investigadores como Charles S. Peskin, Arthur T. Winfree o Yoshiki Kuramoto y los modelos de simulación mediante superordenadores han hecho que la rama de la ciencia encargada de comprender el caos haya dado algunos pasos adelante [4].

### 3.1 MODELO DE KURAMOTO

El modelo de Kuramoto es un modelo matemático que se usa para describir la sincronización. Para ser más específico, es un modelo para un conjunto grande de osciladores acoplados. Su formulación está motivada por el comportamiento de sistemas de osciladores químicos y biológicos, y este tiene diversas aplicaciones [24].

El modelo toma varios supuestos entre estos se pueden mencionar los siguientes:

- Existe un acoplamiento débil.
- Los osciladores son idénticos o muy parecidos.
- Las interacciones dependen de forma senoidal en la diferencia de fase entre cada par de osciladores.

#### 3.1.1 DEFINICIÓN DEL MODELO DE KURAMOTO

En la versión más popular del modelo de Kuramoto, se considera que cada oscilador tiene su propia frecuencia natural  $\omega_i$ , y cada uno está acoplado de la misma manera al resto de los osciladores. Este modelo no lineal puede ser resuelto de manera

exacta en el límite infinito de  $N$  mediante una transformación y la aplicación de argumentos de consistencia [22].

La forma más popular del modelo sigue las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K/N \sum_{j \in N_i} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (3.1)$$

$$i = 1, \dots, N$$

donde el sistema está compuesto de  $N$  osciladores.  $\theta_i \in [0, 2\pi]$  es la variable de fase de cada oscilador,  $\omega_i$  describe la frecuencia intrínseca, esta está distribuida uniformemente al azar,  $K$  es la fuerza de acoplamiento.

Earl y Strogatz usaron este modelo para obtener un criterio de estabilidad en la sincronización de elementos modelados como un grafo [13]. Lucarelli y Wang usan dicho modelo para desarrollar un protocolo de sincronización para redes sensoras densas y de gran escala [19].

## CAPÍTULO 4

# REDES COMPLEJAS

---

En este capítulo se dará una breve introducción al campo de las redes, haciendo énfasis en las redes complejas. Se hablará sobre sus propiedades y los distintos modelos de generación de éstas. Al final se hablará sobre algunas aplicaciones de este concepto de gran utilidad.

### 4.1 EULER Y LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

En un viaje realizado por Euler a Königsberg [21], él se encontró con este problema. La ciudad se encontraba conectada por siete puentes, los habitantes se preguntaban si era posible hacer un paseo en el que se terminase en el lugar donde se comenzó habiendo pasado sólo una vez por cada puente.

Euler visualizó cada masa de tierra como un nodo y cada puente como una arista. Esta manera abstracta de visualizar el problema lo llevó a demostrar que tal paseo era imposible de realizar

De este modo se inicia el estudio de la teoría de grafos que después se extendió al estudio de las redes y las redes complejas.

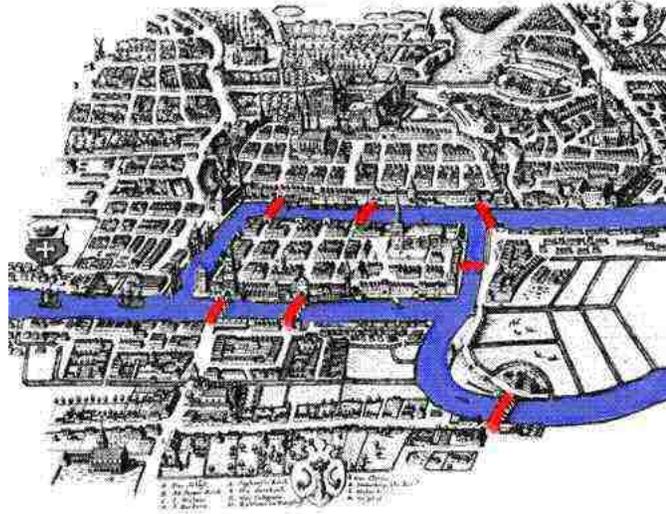


Figura 4.1: En esta figura se visualizan en color rojo los siete puentes de Königsberg.

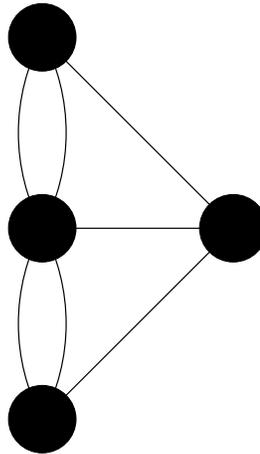


Figura 4.2: En esta figura se muestra la representación abstracta hecha por Euler de los siete puentes de Königsberg.

## 4.2 REDES Y SISTEMAS

Un sistema es un conjunto de elementos relacionados entre sí para lograr un fin común. Existen diferentes tipos de sistemas tales como [3]:

- *Sistemas simples* que tienen un número pequeño de componentes los cuales actúan de acuerdo a leyes bien comprendidas.

- *Sistemas complicados* que tienen un gran número de componentes los cuales tienen funciones bien definidas y están gobernados por reglas bien comprendidas.
- *Sistemas complejos* que generalmente tienen un gran número de componentes los cuales pueden actuar de acuerdo de acuerdo a reglas que pueden cambiar a través del tiempo y que pueden no ser bien comprendidas, además, la conectividad de los componentes y sus funciones son variables.

Una red es un conjunto de elementos los cuales se conocen como nodos. En una red, estos nodos tienen conexiones entre ellos a las cuales reciben el nombre de aristas. Una red también es conocida como grafo en gran parte de la literatura matemática. Existen muchos sistemas que pueden ser representados mediante una red, por ejemplo en una red social de personas, los nodos pueden representar mujeres u hombres, personas con diferentes nacionalidades, edades, ingresos, etc; por otro lado, las aristas podrían representar amistad, pero a la vez proximidad geográfica o conocimiento profesional, entre otros [12]. La célula es mejor descrita como una red compleja de químicos conectados por reacciones químicas. También el Internet es otro ejemplo de red compleja compuesta por ruteadores y computadoras las cuales están ligadas por varias conexiones físicas o inalámbricas [14].

La investigación en redes complejas puede ser vista como la intersección entre la teoría de grafos y la mecánica estadística, lo cual otorga una naturaleza multidisciplinaria a esta área reciente.

En la actualidad hemos sido testigos de un movimiento substancial en el estudio de las redes, dejando de lado el análisis de grafos simples y pequeños y las propiedades de vértices individuales o aristas y concentrándose en la consideración de propiedades estadísticas de grafos a gran escala. Este nuevo enfoque se ha desarrollado en gran manera por la disponibilidad de las computadoras y las redes de comunicación que permiten reunir y analizar datos en una escala mayor de lo previamente posible. Este cambio fuerza a un cambio en el enfoque analítico que hasta ahora se ha desarrollado

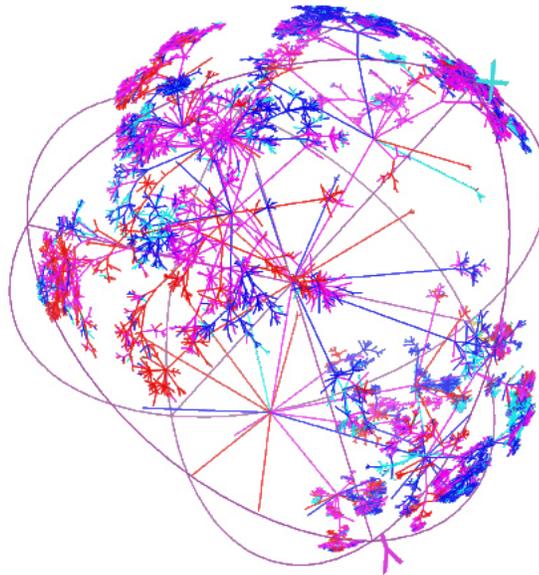


Figura 4.3: Red de Internet

[20].

#### 4.2.1 REDES COMPLEJAS

Un conjunto de nodos junto con aristas es el tipo más simple de una red; existen muchas formas en las que unas redes pueden ser más complejas que otras. Por ejemplo, puede existir más de un tipo diferente de nodo en la red y los nodos o las aristas pueden tener una variedad de propiedades asociadas, numéricas o de otro tipo. Cualquier sistema natural o artificial puede ser representado por una red compleja, una red compleja se refiere a un grafo con un gran número de elementos y que tiene una estructura topológica no trivial [1].

Una de las razones por las que las redes complejas se han vuelto tan populares es su flexibilidad y generalidad para representar virtualmente cualquier estructura natural, incluso aquellas donde se presentan cambios dinámicos en su topología.

El deseo de entender tales sistemas que son representados por una red compleja,

ha encontrado desafíos interesantes. Los físicos, que han sido los más beneficiados del reduccionismo, han desarrollado un arsenal de herramientas exitosas para predecir el comportamiento de un sistema a partir de las propiedades de sus componentes.

Gracias a esto, ahora se entiende cómo surge el magnetismo del comportamiento colectivo de millones de spines, o cómo partículas cuánticas generan el fenómeno de condensación de Bose-Einstein [7].

En los últimos años, se han llevado a cabo muchos avances, por ejemplo, la captura de adquisición de datos en todos los campos llevó al surgimiento de grandes bases de datos sobre la topología de varias redes reales.

También, el desarrollo de las computadoras ha permitido investigar redes que contienen millones de nodos, explorando preguntas que antes no habían sido planteadas. Además, la colaboración interdisciplinaria, ha dado a investigadores acceso a diversas bases de datos permitiendo revelar propiedades genéricas de las redes complejas.

#### 4.2.2 PROPIEDADES DE LAS REDES COMPLEJAS

- El efecto de mundo-pequeño.

El famoso experimento de Milgram es una de las primeras demostraciones directas del efecto de mundo pequeño, el hecho de que la mayor parte de los pares de nodos en la mayoría de las redes parecen estar conectados por un camino corto a través de la red. Este efecto tiene consecuencias obvias en la dinámica de los procesos que se llevan a cabo en las redes. Por ejemplo, si se considera la propagación de información, el efecto de mundo pequeño implica que esta propagación será más rápida [9].

- Transitividad o agrupamiento.

Una desviación clara del comportamiento de los grafos aleatorios puede ser vista en la propiedad de transitividad de la red (o agrupamiento). En muchas redes reales se encuentra que si el nodo A está conectado al nodo B, y a su vez este último está conectado al nodo C, entonces existe una alta probabilidad de

que el nodo A este conectado al nodo C. Por ejemplo una red de amigos. Este es cuantificado por medio del coeficiente de agrupamiento [20].

- Distribución de grado.

Sabemos que el grado de un nodo en una red es igual al número de aristas incidentes a este. Se define  $p(k)$  como la fracción de nodos en la red los cuales tienen grado igual a  $k$ . Equivalentemente,  $p(k)$  es la probabilidad de que un nodo elegido uniformemente al azar tenga grado  $k$ . La gráfica de  $p(k)$  para cualquier red dada puede formarse haciendo un histograma de los grados de los nodos. Este histograma es la distribución de grado de la red. Por ejemplo, en un grafo aleatorio, cada arista tiene la misma probabilidad de existir o no en el grafo, por lo que la distribución de grado de este es binomial o Poisson para grafos grandes [20].

- Resistencia de la red.

Relacionada con las distribuciones de grado está la propiedad de resistencia en una red a la eliminación de algunos de sus nodos. Existen diferentes formas en las que un nodo puede ser eliminado y redes diferentes muestran grados variados a esto. Por ejemplo, se podrían eliminar nodos aleatoriamente o enfocarse en una clase específica de nodos, como aquellos con el mayor grado. La resistencia de la red es de importancia en epidemiología [20].

- Correlaciones de grado.

¿Los nodos de mayor grado preferirán conectarse con otros nodos de grado alto o preferirán los nodos de menor grado? Esta propiedad es de importancia dado que el grado es ya una propiedad de la topología de grafos, las correlaciones de grado pueden dar lugar a algunos efectos de la estructura interesantes [20].

### 4.2.3 TIPOS DE REDES COMPLEJAS

Las redes complejas comparten ciertas propiedades además de su tamaño, tales como:

- Tienden a ser esparcidas, esto es, tienden a tener relativamente pocas aristas en comparación con el gran número de nodos  $n$ , en general, el número de aristas es más cercano a  $n$  que al número máximo de aristas que pueden existir.
- Tienden a ser agrupadas, es decir, las aristas en el grafo no están distribuidas uniformemente pero tienden a formar grupos.
- Tienden a tener diámetro pequeño, la ruta más larga de las cortas que atraviesan a una red compleja, puede estar alrededor de  $\log n$ , valor que es mucho más chico que  $n$ .
- Tienen una secuencia de grado conocida como distribución del grado, esta propiedad describe el patrón de conexión de los nodos.

De acuerdo a la distribución del grado, las redes complejas se clasifican en redes Aleatorias, Power-Law y Exponenciales, las cuáles serán tratadas a continuación, así también, se explica el fenómeno small world que puede presentarse en estas redes [16].

#### 4.2.4 REDES ALEATORIAS

La teoría de grafos se originó en el siglo XVIII con los trabajos de Leonard Euler acerca de la solución del problema de los puentes de Königsberg. En el siglo XX la teoría de grafos se volvió más estadística y algorítmica. Una particular fuente de ideas es el estudio de grafos aleatorios, grafos en los cuales las aristas se distribuyen aleatoriamente.

La teoría de grafos aleatorios fue publicada por Erdős y Rényi en una serie de artículos publicados a finales de los 50's y comienzos de los 60's. Erdős y Rényi se enfocaron a estudiar las propiedades estadísticas de grafos aleatorios con  $n$  nodos y  $e$  aristas. Erdős propuso el modelo de grafos aleatorios  $G_{n,e}$  que considera a  $M = \binom{n}{2}$  como el número máximo de aristas posibles entre los  $n$  nodos del grafo  $G$ . Por lo

anterior, se considera a  $G_{n,e}$  como el espacio de todos los  $M = \binom{M}{e}$  grafos posibles con  $n$  nodos y  $e$  aristas [9].

Más tarde a principios de los 80's diversas investigaciones arrojaron resultados más precisos, encontrando que un grafo aleatorio generado con una probabilidad de conexión  $p$ , el grado  $k_i$  del nodo  $i$  sigue una distribución binomial con parámetros  $n - 1$  y  $p$  [5]:

$$P(k_i = k) = C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}. \quad (4.1)$$

Para valores grandes de  $n$ , la distribución del grado sigue una distribución de Poisson, de ahí que la probabilidad de que un nodo tenga grado  $k$  es:

$$P(k_i = k) \approx \frac{\langle k_i \rangle^k e^{-\langle k_i \rangle}}{k!} \quad (4.2)$$

donde  $\langle k_i \rangle = 2e/n = p(n-1)$ .

#### 4.2.5 REDES POWER LAW

En la década de los 90's diversos investigadores como Albert y Faloutsos, descubrieron que la distribución del grado de las redes del mundo real como el World Wide Web, Internet, redes de proteínas y metabolismo, las redes de lenguaje y sociales, difieren a la distribución de Poisson, exhibiendo una distribución del grado Power-Law:  $P(k_i) \approx k^{-\gamma}$  [18].

Las redes con distribución Power-Law son llamadas *Scale-free* o de Libre escala, debido a que independientemente de la escala, es decir del número de nodos, la distribución del grado no cambia. La característica invariante de estas redes es que un conjunto reducido de nodos que conforman la red tienen un gran número de enlaces (un grado muy alto) mientras que el resto de los nodos tienen pocos enlaces (o un grado bajo) [6]. Esta característica permite que la tolerancia a fallas aleatorias sea grande, pero si los nodos con grado muy alto son llamados nodos centrales son atacados intencionalmente esta red es muy vulnerable [14].

En esta distribución el parámetro  $\gamma$  decrece desde  $+\infty$  hasta 0, siendo un parámetro de control que describe qué tan rápido decae la frecuencia de aparición del grado  $k$ , de manera que el grado promedio de la red se incrementa a medida que  $\gamma$  se decrementa [2].

#### 4.2.6 REDES EXPONENCIALES

Aunque las redes Power-Law son comunes, también existen casos de redes que exhiben una distribución de grado exponencial como la red de energía del sur de California [3] y la red de vías de ferrocarril de la India (Sen), a estas redes se les llama redes exponenciales.

En estas redes la distribución del grado  $P(k_i = k)$  muestra un pico en  $\langle k_i \rangle$  y después cae exponencialmente para valores grandes de  $k$ :  $P(k_i = k) \approx e^{-k_i}$ .

Este tipo de red, no es muy tolerante a fallas aleatorias pues al eliminar cualquier nodo el daño es similar, debido a que cada nodo en la red se relaciona aproximadamente con la misma cantidad de nodos

**REDES SMALL WORLD** El concepto «small world» [17] es un término que describe el hecho de que a pesar de que las redes complejas tienen gran tamaño, en la mayoría de las redes la distancia entre dos nodos es relativamente corta. La distancia entre dos nodos está definida como el número de nodos a lo largo de la ruta que los conecta. La manifestación más popular de small world es el concepto de seis grados de separación descubierto por Stanley Milgram en 1967 quien concluyó que la ruta de conocidos entre pares de personas en los Estados Unidos tiene una distancia típica de seis. Esta propiedad de small world aparece caracterizando a la mayoría de las redes complejas. El concepto de small world no es indicador de un principio de organización particular, sino un fenómeno que puede darse en las redes complejas.

## 4.3 MODELOS DE GENERACION DE REDES

En esta sección se hablará sobre los diferentes tipos de modelos de generación de redes.

### 4.3.1 MODELOS DE GENERACIÓN SIN CRECIMIENTO

Estos modelos se caracterizan por dos aspectos importantes:

- El número de nodos permanece constante, es decir, durante la construcción del grafo se añaden nuevos nodos.
- La agregación de aristas entre cualquier par de nodos sigue una distribución de probabilidad.

### 4.3.2 MODELO DE GENERACIÓN DE REDES ALEATORIAS DE ERDÖS Y RÉNYI

El modelo de Erdős y Rényi es un modelo sin crecimiento que comienza con  $n$  nodos desconectados, cada par de nodos es conectado con una probabilidad  $p$ . Por tanto el número total de enlaces es una variable aleatoria con un valor esperado de  $p[n(n-1)/2]$  [20].

### 4.3.3 MODELOS DE GENERACIÓN BASADOS EN CRECIMIENTO

Estos tipos de modelos se distinguen de los anteriores por los siguientes aspectos:

- La construcción del grafo comienza con un número fijo de nodos y a cada paso cierta cantidad de nodos es añadida a la red, esto quiere decir que el número de nodos se incrementa.

- La agregación de aristas entre cualquier par de nodos sigue una distribución de probabilidad.

#### 4.3.4 MODELO DE GENERACIÓN DE REDES SCALE FREE DE BARABÁSI

Después de haber estudiado el comportamiento de muchas redes reales hacia 1999, se introduce el modelo Barabási-Albert inspirado en el crecimiento y el enlace preferencial, este fue el primer modelo que reprodujo redes con una distribución del grado Power-Law. El modelo considera dos elementos [6]:

- *Crecimiento* comienza con un pequeño número de nodos  $m_0$ , a cada paso  $t$  se añade un nuevo nodo  $m \leq m_0$  aristas que enlacen al nuevo nodo con  $m$  diferentes nodos ya existentes en el sistema.
- *Enlace preferencial* cuando se selecciona los nodos a los cuales un nuevo nodo se va a conectar, se asume que la probabilidad  $\Pi$  de que un nuevo nodo sea conectado al nodo  $i$  depende del grado  $k_i$  del nodo  $i$ , tal que:

$$\Pi(k_i) = k_i \sum k_j \quad (4.3)$$

donde  $N$  es el conjunto de nodos en la red.

Después de  $t$  lapsos de tiempo, el procedimiento resulta en una red con  $n = t + m_0$  nodos con  $mt$  aristas.

#### 4.3.5 APLICACIONES

Dado el gran crecimiento de la world-wide web, que está excediendo a 800 millones de páginas [18], los buscadores web tienen la necesidad de ver mas allá de solamente el contenido de las páginas para proveer buenos resultados en sus búsquedas, esto se hace modelando la world-wide web como una red compleja. Por ejemplo,

el buscador Google usa PageRank un algoritmo iterativo para ofrecer mejores resultados, este determina la importancia de una página según la importancia de sus páginas padre. [10]

La world-wide web es cada vez más usada para obtener respuestas a preguntas, o como un medio de información. Debido a esto, es muy importante que los buscadores se preocupen por ofrecer buenos resultados en sus búsquedas, PageRank es una forma muy útil de satisfacer las necesidades de los buscadores y gracias a que puede ser modelada como una red compleja, esto puede ser calculado sin tantos requerimientos de memoria.

## CAPÍTULO 5

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

En este capítulo se dará un breve ejemplo con el fin de ayudar al lector a comprender bien el problema que se está tratando en esta tesis.

Se tiene un conjunto de elementos los cuáles se desea sincronizar, por ejemplo supongase que se desea sincronizar cuatro péndulos, los cuales se encuentran conectados en cierta manera.

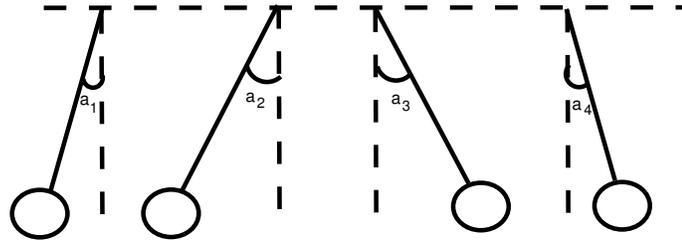


Figura 5.1: Ejemplo de cuatro péndulos acoplados.

El modelo de Kuramoto modela este fenómeno de sincronización de péndulos acoplados. Nuestra hipótesis consiste en que la manera en que se conectan dichos péndulos influye en el tiempo que estos tardarán en sincronizarse.

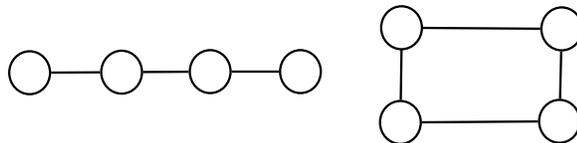


Figura 5.2: En esta figura se muestran diferentes topologías del grafo.

Por ejemplo en la figura 5.2 se muestran diferentes maneras en que se podrían

conectar los péndulos.

Cada una de éstas diferentes maneras de conectar péndulos puede representarse mediante un grafo. De éste grafo se pueden obtener la matriz de adyacencia, la matriz laplaciana y el espectro de la matriz laplaciana.

A continuación se muestran las matrices adyacente (A), laplaciana (L) y el segundo valor propio de la matriz laplaciana ( $\mu$ ) correspondientes a los grafos mostrados en la figura anterior:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mu_1 = 1.555$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mu_2 = 2$$

Tabla 5.1: Caso de ejemplo

ID	n	m	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafo en línea	3	4	1.555	0.518	1576
Grafo en cuadro	4	4	2	0.5	5275

Una vez que se tiene el espectro de la matriz laplaciana del grafo correspondiente, con el segundo valor propio que representa la conectividad del grafo, se puede analizar si existe una relación entre dicha medida y el tiempo que tarda el grafo en sincronizarse.

Para los grafos probados se obtuvieron los datos mostrados en la tabla 5.1. Los resultados obtenidos muestran una notable diferencia en la cantidad de iteraciones requerida para llegar a la sincronización y una diferencia en los valores propios. Lo que se desea es probar si existe una relación entre éstos dos valores.

## CAPÍTULO 6

# EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

En el presente capítulo se describe paso a paso como se llevó a cabo la experimentación elaborada en este trabajo. Además, se muestran los resultados obtenidos de los experimentos realizados.

### 6.1 MODELO

Se tiene un sistema donde cada elemento tiene un estado inicial asociado. Se desea analizar el desempeño un modelo de sincronización basado en un modelo de osciladores acoplados a pulsos el cuál se describió en el capítulo 3. Este modelo sincroniza el sistema en función del comportamiento de sus vecinos más cercanos de la siguiente manera:

Considere un sistema de  $n$  elementos [22]. La dinámica del sistema está dada por la ecuación (6.2)

$$\dot{x}_i = \omega_i + \lambda / \langle k \rangle \sum_{j \in N_i} a_{ij} \sin(x_j - x_i). \quad (6.1)$$

$N_i$  : conjunto de vecinos de  $i$   
 $i = 1, \dots, n$

$\omega_i \in [0, 2\pi]$  es la variable de fase de cada oscilador.  $\omega_i$  describe la frecuencia intrínseca, esta está distribuida uniformemente al azar,  $\lambda$  es la fuerza de acoplamiento

to, y  $a_{ij}$  es la matriz de adyacencia. La fuerza de acoplamiento se escala por el grado promedio  $\langle k \rangle$  de los nodos, promediado sobre toda la red.

Los valores de  $\omega_i$  están uniformemente distribuidos sobre el intervalo  $0.9 \leq \omega_i \leq 1.1$  y las fases iniciales son también aleatorias.

Dado el objetivo de la tesis que es analizar el desempeño de dicho modelo (6.2) en redes con diferentes medidas de conectividad, se generaron los siguientes tipos de redes:

## 6.2 TIPOS DE REDES GENERADAS

Se generaron redes con  $n = 100$  nodos y  $m = 400$  aristas. Se generaron 30 redes de 3 familias distintas que son:

- Familia 1. (Tipo C) Se genera una red inicial con 50 nodos en la que los nodos se encuentran unidos en un círculo. Esta red inicial contiene 50 aristas, el resto de las aristas (50 aristas) fueron añadidas al azar.

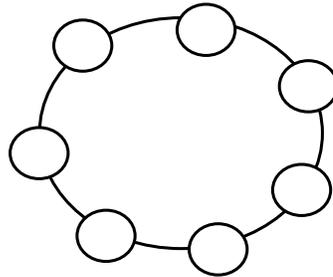


Figura 6.1: En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo C.

- Familia 2. (Tipo L) Se genera una red inicial con 50 nodos en la que los nodos se encuentran unidos en un línea. Esta red inicial contiene 49 aristas, el resto de las aristas (51 aristas) fueron añadidas al azar.
- Familia 3. (Tipo E) Se genera una red inicial con 50 nodos en la que los nodos se encuentran unidos en una tipo estrella (49 nodos unidos a uno mismo). Esta

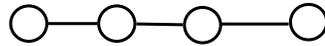


Figura 6.2: En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo L.

red inicial contiene 99 aristas, el resto de las aristas (51 aristas) fueron añadidas al azar.

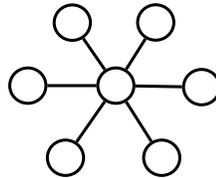


Figura 6.3: En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo E.

- Familia 4. (Tipo M) Se genera una red inicial con 50 nodos en la que los nodos se encuentran unidos como en una malla. Las aristas faltantes para completar 100 aristas son añadidas al azar.

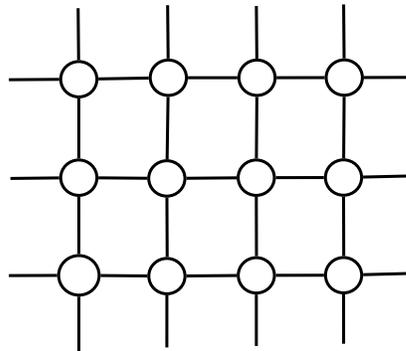


Figura 6.4: En esta figura se muestra un ejemplo de los grafos tipo M.

De estas redes se calculó el segundo valor propio de la matriz laplaciana mencionado en el Capítulo 2. Se observó que los valores varían dentro de un rango según el tipo de familia.

En la figura 6.6 se muestran en puntos rojos los valores propios que representan la conectividad algebraica de las redes tipo C, los puntos verdes corresponden a las

redes tipo L, los azules a redes tipo E y los rosas a las redes tipo M.

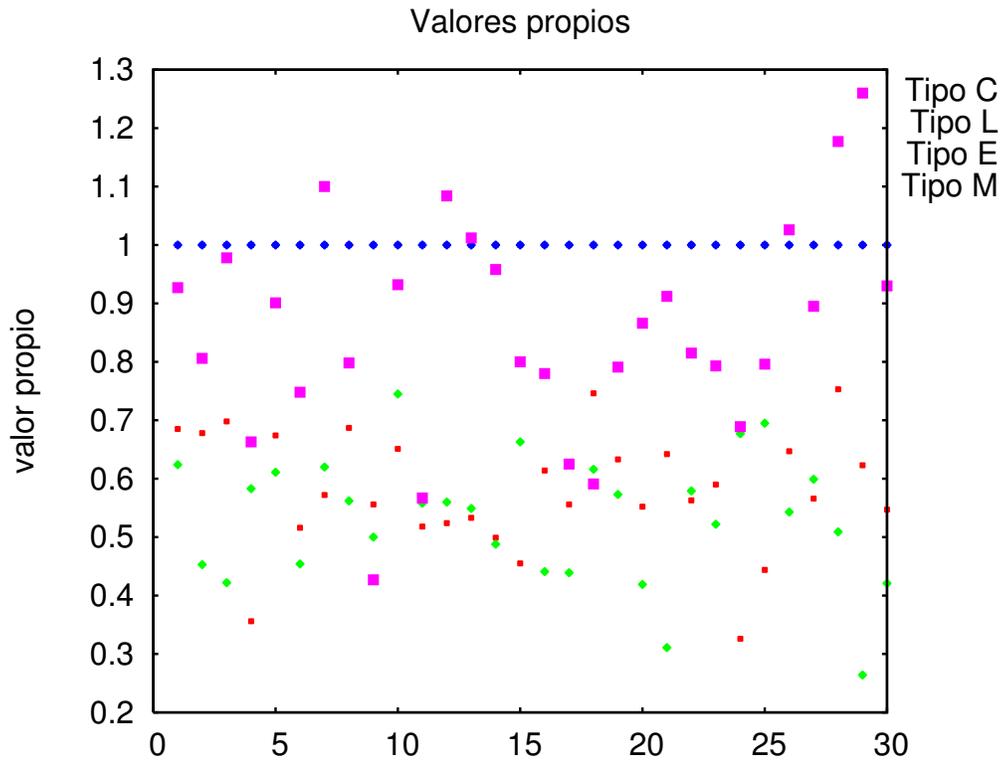


Figura 6.5: Valores propios grafos

Se puede apreciar un gran parecido en los valores propios del tipo C y tipo L, esto se debe a que éste tipo de redes tienen características bastante parecidas, los valores propios de las redes tipo E se encuentran concentrados dentro de un rango mientras que los de tipo M se encuentran dispersos.

Dados estos resultados, en los que se observa una relación entre los valores propios y los tipos de familias, se realizaron experimentos aplicando el modelo de sincronización a cada uno de los grafos generados ya que se desea investigar si existe alguna relación entre los valores propios obtenidos y la cantidad de iteraciones requeridas para que los elementos del grafo se sincronicen.

Los resultados que se obtuvieron fueron la cantidad de iteraciones para llegar a una medida de sincronización menor a 0.05. En el apéndice se muestran los resultados

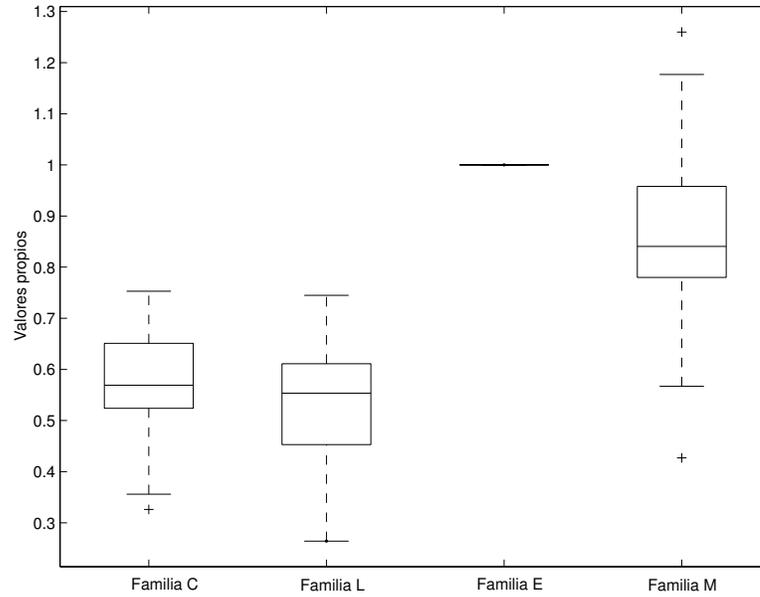


Figura 6.6: Box plot valores propios

que corresponden a promedios de varias pruebas de la misma instancia con distintos valores iniciales.

La medida de sincronización utilizada está dada por:

$$\sum_N |\sin(0.5(x_i - x_j))|. \quad (6.2)$$

Como  $x_i$  varía entre 0 y  $2\pi$ , esto es una revolución completa, lo más alejados que podrían estar dos elementos es a una distancia  $\pi$ . Dado esto, se ha tomado la medida de sincronización como  $\sin(0.5(x_i - x_j))$  ya que con esta sólo se obtendrán valores de la función  $\sin(x)$  entre 0 y  $\pi$  dando el valor de diferencia mayor en  $\sin(\frac{\pi}{2})$  que corresponde a una diferencia en la fase igual a  $\pi$  que es la mayor diferencia posible como antes se mencionó. Para diferencias de 0 el valor de la medida es 0 también. Por otro lado, por ejemplo al tener una diferencia de  $\frac{\pi}{6}$  o de  $\frac{5\pi}{6}$  los cuales corresponderían a la misma distancia entre dos elementos, la medida también refleja el mismo valor para ambos casos ya que  $\sin(\frac{\pi}{3}) = 0.5$  y  $\sin(\frac{5\pi}{3}) = -0.5$  al tomar solo el valor absoluto, se tiene la misma medida.

En las gráficas 6.7 y 6.8 se muestran algunas gráficas correspondientes a los resultados obtenidos.

La figura 6.7 muestra promedios de las iteraciones realizadas por el modelo para llegar a la sincronización de las redes generadas. De la misma manera, los puntos rojos corresponden a redes tipo C, verdes a redes tipo L, azules a redes tipo E y rosas a las tipo M.

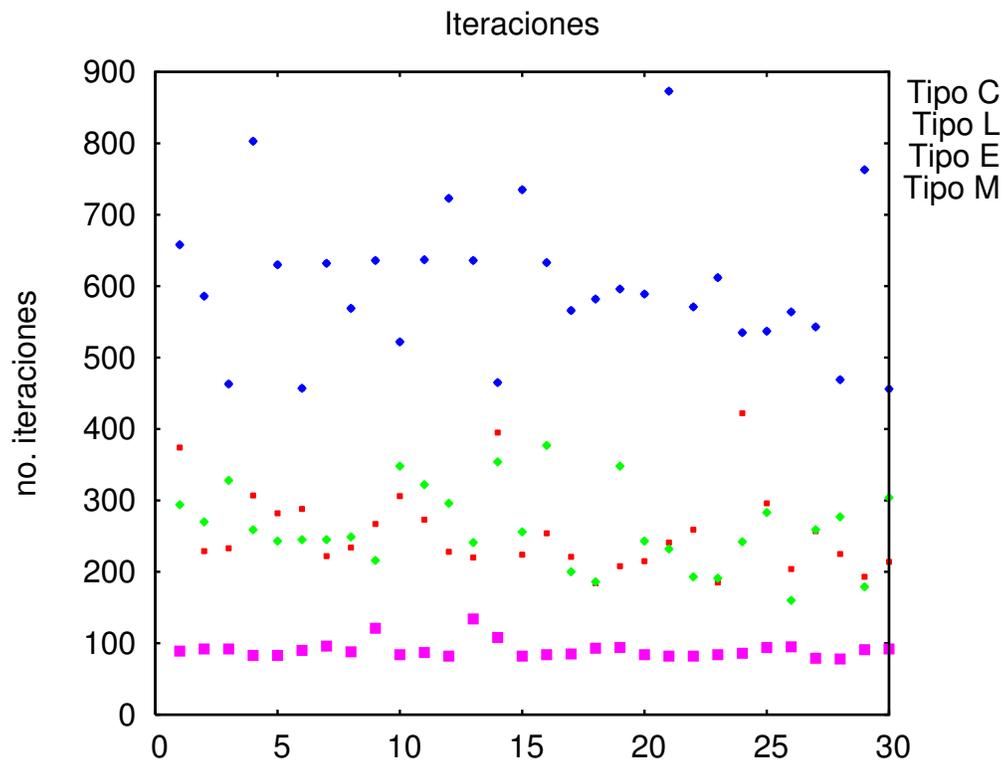


Figura 6.7: Iteraciones grafos

Se puede observar que la cantidad de iteraciones requeridas para llegar a la sincronización varía según el tipo de red. Los valores más altos de iteraciones requeridas para llegar a la sincronización corresponden a las redes tipo E, mientras que los valores más pequeños corresponden a las redes tipo M. Para las redes tipo C y L, los valores de iteraciones requeridas varían dentro de un mismo rango. De esto se puede inducir que efectivamente la medida de conectividad de la red tiene influencia en la sincronización de ésta.

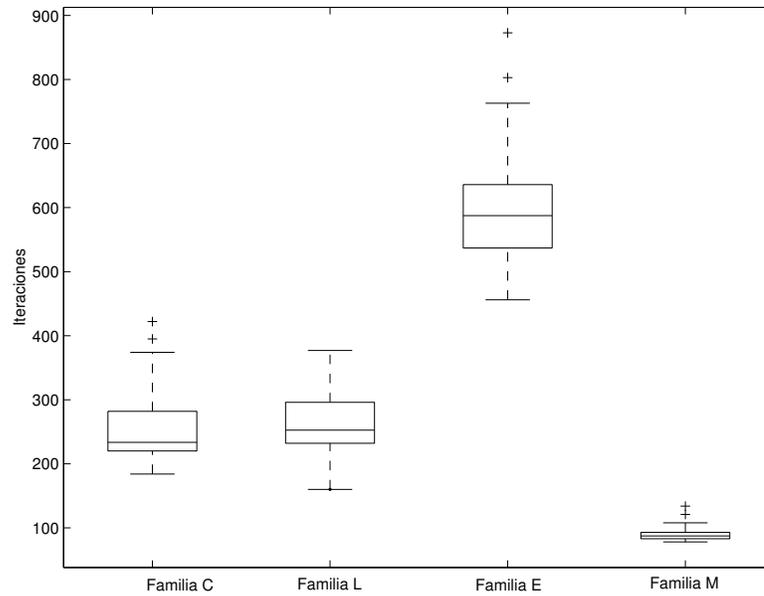


Figura 6.8: Box plot iteraciones

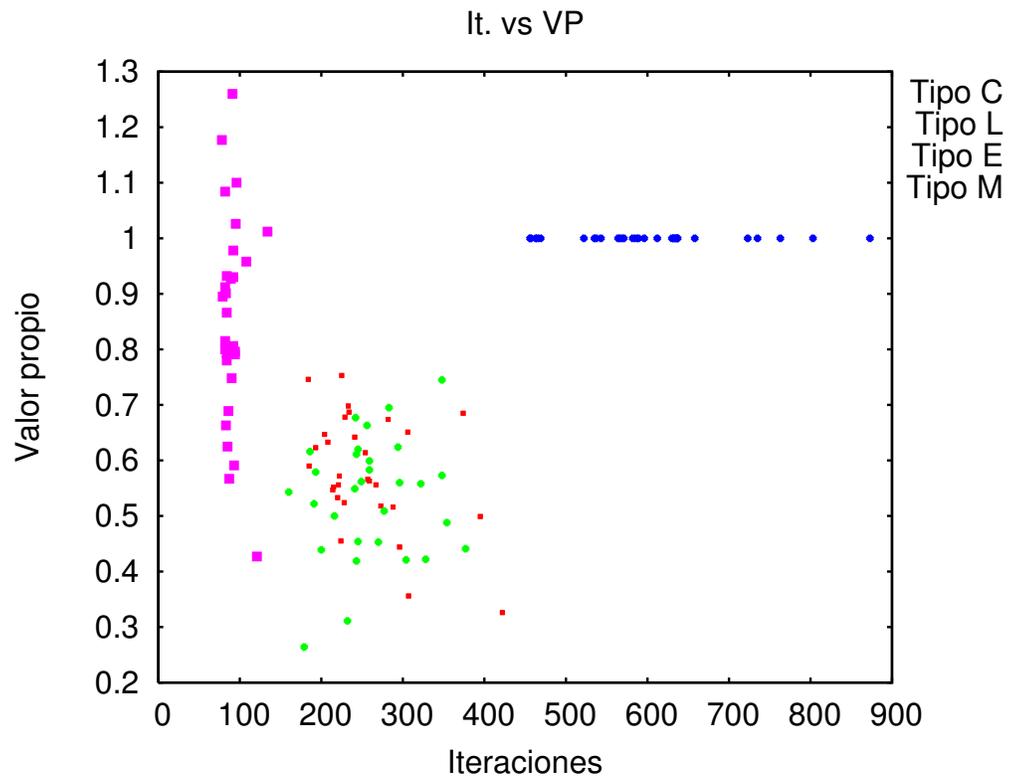


Figura 6.9: Iteraciones vs. valores propios

Observemos ahora la relación conectividad-iteraciones. En la figura 6.9 se graficó la cantidad de iteraciones requeridas contra el valor propio (conectividad) de cada red. En ésta se puede observar un agrupamiento respecto al tipo de red. Se puede apreciar un agrupamiento de los valores correspondientes a las redes tipo E (en verde) que son las que presentan características distintas a las otras dos familias. De esto se puede inducir que las características de las redes, en este caso la conectividad algebraica, sí influye en la sincronización de la red.

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

En el presente capítulo se hablará sobre las conclusiones de la tesis y algunas propuestas de trabajo futuro.

Después de haber experimentado con los diferentes tipos de redes mencionados en el capítulo anterior el desempeño del modelo de sincronización, se tienen las siguientes conclusiones:

En los resultados obtenidos se pudo observar que los diferentes tipos de redes presentan diferentes valores propios y éstos se encuentran dentro de un rango de valores dependiendo del tipo de red. Es importante resaltar que cada una de estas redes cuentan con el mismo número de aristas y nodos. Así mismo, para cada tipo de red, los valores de iteraciones requeridas para la sincronización obtenidos se encuentran dentro de un rango de valores dependiendo del tipo de red igualmente.

De esto se puede decir que al tener un sistema que se desee sincronizar, y teniendo cantidades de elementos en el sistema y conexiones fijas, es posible inducir en qué manera deben estar conectados estos para tener una sincronización más rápida o tal vez más lenta (según se desee). Para lograr esto se debe representar dicho sistema mediante un grafo y de éste obtener la matriz laplaciana correspondiente y su segundo valor propio el cuál representa la conectividad de dicho grafo, por medio de manipulaciones al grafo tomando como referencia el segundo valor propio de la matriz laplaciana se podría buscar tener una sincronización deseada.

Como trabajo futuro se podría hacer un análisis más profundo sobre qué valores

---

propios en la matriz laplaciana son los que producen una sincronización más rápida y los que la hacen más lenta. También se podría realizar un estudio sobre cómo tener una sincronización rápida con la menor cantidad de conexiones posible.

APÉNDICE A

TABLAS DE RESULTADOS

---

Tabla A.1: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo círculo

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafoc-50-100-1	50	100	0,082	0,685	0,014	374
Grafoc-50-100-2	50	100	0,082	0,678	0,014	229
Grafoc-50-100-3	50	100	0,082	0,698	0,014	233
Grafoc-50-100-4	50	100	0,082	0,356	0,007	307
Grafoc-50-100-5	50	100	0,082	0,674	0,013	282
Grafoc-50-100-6	50	100	0,082	0,516	0,010	288
Grafoc-50-100-7	50	100	0,082	0,572	0,011	222
Grafoc-50-100-8	50	100	0,082	0,687	0,014	234
Grafoc-50-100-9	50	100	0,082	0,556	0,011	267
Grafoc-50-100-10	50	100	0,082	0,651	0,013	306
Grafoc-50-100-11	50	100	0,082	0,518	0,010	273
Grafoc-50-100-12	50	100	0,082	0,524	0,010	228
Grafoc-50-100-13	50	100	0,082	0,533	0,011	220
Grafoc-50-100-14	50	100	0,082	0,499	0,010	395
Grafoc-50-100-15	50	100	0,082	0,455	0,009	224

Tabla A.2: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo círculo

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafoc-50-100-16	50	100	0,082	0,614	0,012	254
Grafoc-50-100-17	50	100	0,082	0,556	0,011	221
Grafoc-50-100-18	50	100	0,082	0,746	0,015	184
Grafoc-50-100-19	50	100	0,082	0,633	0,013	208
Grafoc-50-100-20	50	100	0,082	0,552	0,011	215
Grafoc-50-100-21	50	100	0,082	0,642	0,013	241
Grafoc-50-100-22	50	100	0,082	0,563	0,011	259
Grafoc-50-100-23	50	100	0,082	0,590	0,012	185
Grafoc-50-100-24	50	100	0,082	0,326	0,007	422
Grafoc-50-100-25	50	100	0,082	0,444	0,009	296
Grafoc-50-100-26	50	100	0,082	0,647	0,013	204
Grafoc-50-100-27	50	100	0,082	0,566	0,011	257
Grafoc-50-100-28	50	100	0,082	0,753	0,015	225
Grafoc-50-100-29	50	100	0,082	0,623	0,012	193
Grafoc-50-100-30	50	100	0,082	0,547	0,011	214

Tabla A.3: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo línea

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafol-50-100-1	50	100	0,082	0,624	0,012	294
Grafol-50-100-2	50	100	0,082	0,453	0,009	270
Grafol-50-100-3	50	100	0,082	0,422	0,008	328
Grafol-50-100-4	50	100	0,082	0,583	0,012	259
Grafol-50-100-5	50	100	0,082	0,611	0,012	243
Grafol-50-100-6	50	100	0,082	0,454	0,009	245
Grafol-50-100-7	50	100	0,082	0,620	0,012	245
Grafol-50-100-8	50	100	0,082	0,562	0,011	249
Grafol-50-100-9	50	100	0,082	0,500	0,010	216
Grafol-50-100-10	50	100	0,082	0,745	0,015	348
Grafol-50-100-11	50	100	0,082	0,558	0,011	322
Grafol-50-100-12	50	100	0,082	0,560	0,011	296
Grafol-50-100-13	50	100	0,082	0,549	0,011	241
Grafol-50-100-14	50	100	0,082	0,488	0,010	354
Grafol-50-100-15	50	100	0,082	0,663	0,013	256

Tabla A.4: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo línea

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafol-50-100-16	50	100	0,082	0,441	0,009	377
Grafol-50-100-17	50	100	0,082	0,439	0,009	200
Grafol-50-100-18	50	100	0,082	0,616	0,012	186
Grafol-50-100-19	50	100	0,082	0,573	0,011	348
Grafol-50-100-20	50	100	0,082	0,419	0,008	243
Grafol-50-100-21	50	100	0,082	0,311	0,006	232
Grafol-50-100-22	50	100	0,082	0,579	0,012	193
Grafol-50-100-23	50	100	0,082	0,522	0,010	191
Grafol-50-100-24	50	100	0,082	0,677	0,014	242
Grafol-50-100-25	50	100	0,082	0,695	0,014	283
Grafol-50-100-26	50	100	0,082	0,543	0,011	160
Grafol-50-100-27	50	100	0,082	0,599	0,012	259
Grafol-50-100-28	50	100	0,082	0,509	0,010	277
Grafol-50-100-29	50	100	0,082	0,264	0,005	179
Grafol-50-100-30	50	100	0,082	0,421	0,008	304

Tabla A.5: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo estrella

---

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafoe-50-100-1	50	100	0,082	1,000	0,020	658
Grafoe-50-100-2	50	100	0,082	1,000	0,020	586
Grafoe-50-100-3	50	100	0,082	1,000	0,020	463
Grafoe-50-100-4	50	100	0,082	1,000	0,020	803
Grafoe-50-100-5	50	100	0,082	1,000	0,020	630
Grafoe-50-100-6	50	100	0,082	1,000	0,020	457
Grafoe-50-100-7	50	100	0,082	1,000	0,020	632
Grafoe-50-100-8	50	100	0,082	1,000	0,020	569
Grafoe-50-100-9	50	100	0,082	1,000	0,020	636
Grafoe-50-100-10	50	100	0,082	1,000	0,020	522
Grafoe-50-100-11	50	100	0,082	1,000	0,020	637
Grafoe-50-100-12	50	100	0,082	1,000	0,020	723
Grafoe-50-100-13	50	100	0,082	1,000	0,020	636
Grafoe-50-100-14	50	100	0,082	1,000	0,020	465
Grafoe-50-100-15	50	100	0,082	1,000	0,020	735

---

Tabla A.6: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo estrella

---

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafoe-50-100-16	50	100	0,082	1,000	0,020	633
Grafoe-50-100-17	50	100	0,082	1,000	0,020	566
Grafoe-50-100-18	50	100	0,082	1,000	0,020	582
Grafoe-50-100-19	50	100	0,082	1,000	0,020	596
Grafoe-50-100-20	50	100	0,082	1,000	0,020	589
Grafoe-50-100-21	50	100	0,082	1,000	0,020	873
Grafoe-50-100-22	50	100	0,082	1,000	0,020	571
Grafoe-50-100-23	50	100	0,082	1,000	0,020	612
Grafoe-50-100-24	50	100	0,082	1,000	0,020	535
Grafoe-50-100-25	50	100	0,082	1,000	0,020	537
Grafoe-50-100-26	50	100	0,082	1,000	0,020	564
Grafoe-50-100-27	50	100	0,082	1,000	0,020	543
Grafoe-50-100-28	50	100	0,082	1,000	0,020	469
Grafoe-50-100-29	50	100	0,082	1,000	0,020	763
Grafoe-50-100-30	50	100	0,082	1,000	0,020	456

---

Tabla A.7: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo malla

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafom-50-100-1	50	100	0,082	0,927	0,019	89
Grafom-50-100-2	50	100	0,082	0,806	0,016	92
Grafom-50-100-3	50	100	0,082	0,978	0,020	92
Grafom-50-100-4	50	100	0,082	0,663	0,013	83
Grafom-50-100-5	50	100	0,082	0,901	0,018	83
Grafom-50-100-6	50	100	0,082	0,748	0,015	90
Grafom-50-100-7	50	100	0,082	1,100	0,022	96
Grafom-50-100-8	50	100	0,082	0,798	0,016	88
Grafom-50-100-9	50	100	0,082	0,427	0,009	121
Grafom-50-100-10	50	100	0,082	0,932	0,019	84
Grafom-50-100-11	50	100	0,082	0,567	0,011	87
Grafom-50-100-12	50	100	0,082	1,084	0,022	82
Grafom-50-100-13	50	100	0,082	1,012	0,020	134
Grafom-50-100-14	50	100	0,082	0,958	0,019	108
Grafom-50-100-15	50	100	0,082	0,800	0,016	82

Tabla A.8: Caso 50 nodos,100 aristas, tipo malla

ID	n	m	$\delta$	$\mu$	$\mu/n$	iter
Grafom-50-100-16	50	100	0,082	0,780	0,016	84
Grafom-50-100-17	50	100	0,082	0,625	0,013	85
Grafom-50-100-18	50	100	0,082	0,591	0,012	93
Grafom-50-100-19	50	100	0,082	0,791	0,016	94
Grafom-50-100-20	50	100	0,082	0,866	0,017	84
Grafom-50-100-21	50	100	0,082	0,912	0,018	82
Grafom-50-100-22	50	100	0,082	0,815	0,016	82
Grafom-50-100-23	50	100	0,082	0,793	0,016	84
Grafom-50-100-24	50	100	0,082	0,689	0,014	86
Grafom-50-100-25	50	100	0,082	0,796	0,016	94
Grafom-50-100-26	50	100	0,082	1,026	0,021	95
Grafom-50-100-27	50	100	0,082	0,895	0,018	79
Grafom-50-100-28	50	100	0,082	1,177	0,024	78
Grafom-50-100-29	50	100	0,082	1,260	0,025	91
Grafom-50-100-30	50	100	0,082	0,930	0,019	92

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] ALBERT y BARABÁSI, «Statistical mechanics of complex networks», *Reviews of modern physics*, **74**(1), págs. 47–97, 2002.
- [2] ALBERT, JEONG y BARABÁSI, «Error and attack tolerance of complex networks», *Nature*, **506**(1), págs. 378–382, 2000.
- [3] AMARAL y OTTINO, «Complex systems and networks: Challenges and opportunities for chemical and biological engineers», *Chemical engineering scientist*, **59**(1), págs. 1653–1666, 2004.
- [4] ARENAS, DIAZ-GUILERA, KURTHS, MORENO y ZHOU, «Synchronization in complex networks», *Physics Reports*, **1**(1), págs. 60–65, 2008.
- [5] BARABÁSI, «Emergency of scaling in complex networks», *Wiley/VCH*, **1**(1), págs. 69–82, 2003.
- [6] BARABÁSI, ALBERT y JEONG, «Mean-Field theory for scale-free random networks», *Physica*, **272**(1), págs. 173–189, 1999.
- [7] BIANCONI y BARABÁSI, «Bose-Einstein condensation in complex networks», *Physical Review Letters*, **86**(1), págs. 5632–5635, 2001.
- [8] BIGGS, *Algebraic Graph Theory.*, segunda edición, Cambridge Mathematical Library, EUA, Nueva York, 1993.
- [9] BOLLOBÁS y RIORDAN, «OM:Mathematical results on scale-free random graphs», *Wiley/VCH*, **1**(1), págs. 1–32, 2002.

- 
- [10] BRIN y PAGE, «The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine», *In Proceedings of the Seventh International World Wide Web Conference*, **1**(1), págs. 64–68, 1998.
- [11] CHUNG, *CBMS Conference on recent advances in spectral graph theory*, primera edición, Conference board of the mathematical sciences, EUA, California, 1994.
- [12] COSTA, RODRIGUES, TRAVIESO y VILLAS, «Characterization of complex networks: a survey of measurements», *X*, **1**(1), págs. 107–109, 2007.
- [13] EARL y STROGATZ, «Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion», *Physical Review*, **67**(2), págs. 101–106, 2003.
- [14] FALOUTSOS, «On power-law relationships of the internet topology», *Computer Communication Review*, **29**(4), págs. 251–262, 1999.
- [15] GODSIL y ROYLE, *Algebraic graph theory*, primera edición, editorial Springer, EUA, Nueva York, 2004.
- [16] HAYES, «Graph theory in practice: part II», *American Scientist*, **88**(2), págs. 104–109, 2000.
- [17] LATORA y MARCHIORI, «Efficient Behavior of Small World Networks», *Physical Review Letters*, **87**(19), págs. 1–2, 2001.
- [18] LAWRENCE y GILES, «Accessibility of information on the web», *Nature*, **1**(1), págs. 107–109, 1998.
- [19] LUCARELLI y WANG, «Decentralized synchronization protocols with nearest neighbor communication», *SenSys 04*, **1**(1), págs. 62–68, 2004.
- [20] NEWMAN, «The Structure and function of Complex Networks», *SIAM Review*, **45**(2), págs. 167–256, 2003.
- [21] NEWMAN, BARABÁSI y WATTS, «The structure and dynamics of networks», *Princeton University Press*, **1**(1), págs. 112–120, 2006.

- 
- [22] OSIPOV, KURTHS y ZHOU, *Synchronization in oscillatory networks*, primera edición, editorial Springer, EUA, Nueva York, 2007.
- [23] PIKOVSKY, KURTHS y ROSENBLUM, *Synchronization*, primera edición, Cambridge University Press, EUA, Cambridge, 2001.
- [24] STROGATZ, «From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators», *Physica D*, **143**(1), págs. 1–20, 2000.
- [25] STROGATZ, *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature and daily life*, primera edición, editorial Hyperion, EUA, Nueva York, 2003.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Nidia Lizzeth Gómez Duarte

Candidato para el grado de Maestro en ciencias  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

EFFECTOS ESTRUCTURALES EN LA  
SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS

Estudié en la Universidad Autónoma de Nuevo León, en la facultad de Ciencias Físico Matemáticas, la licenciatura en matemáticas cuyos estudios concluyeron en el año 2008. En el 2009 comencé los estudios de maestría en Ciencias de la Ingeniería de Sistemas en la facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la misma universidad donde elaboré el presente trabajo para obtener el grado de maestro en ciencias bajo la asesoría de la Dra. Elisa Schaeffer.