

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS REGULARES**  
**EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR**

**POR**

**JOSÉ DANIEL MOSQUERA ARTAMONOV**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

**ENERO 2016**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS REGULARES  
EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR**

**POR  
JOSÉ DANIEL MOSQUERA ARTAMONOV**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN,      ENERO 2016**

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Empaquetamiento de objetos regulares en un contenedor rectangular», realizada por el alumno José Daniel Mosquera Artamonov, con número de matrícula 1707089, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

---

Dr. Igor S. Litvinchev

Asesor

---

Dra. Lucero Ozuna

Revisor

---

Dr Antonio Marmolejo

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Enero 2016

*La Bendición y la Gloria y la Sabiduría y la Acción de Gracias y la Honra y el Poder y la Fuerza, sean a nuestro Dios por los siglos de los siglos. AMEN*

***Apocalipsis 7:12***

*Al Angel de la primavera*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>x</b>
<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción . . . . .	3
2.2. Objetivo . . . . .	5
2.2.1. Objetivos Especificos . . . . .	5
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
3.1. Problemas de empaquetamiento . . . . .	7
3.1.1. ¿Como se puede clasificar los problemas de empaquetamiento?	8
3.2. Trabajos realizados en empaquetamiento de objetos . . . . .	17
3.2.1. Empaquetamiento de objetos regulares . . . . .	18
3.2.2. Empaquetamiento de objetos irregulares . . . . .	28
3.3. Algunas aplicaciones de empaquetamiento . . . . .	31

---

<b>4. Formulación Matemática</b>	<b>35</b>
4.1. Modelo matemático . . . . .	36
4.1.1. Función Objetivo . . . . .	37
4.1.2. Restricciones . . . . .	37
<b>5. Metodología</b>	<b>40</b>
5.1. Equipo computacional . . . . .	41
5.2. Implementación computacional . . . . .	41
5.3. Supuestos considerados . . . . .	41
5.4. Diseño de experimentos . . . . .	42
5.4.1. Sin telescopía . . . . .	42
5.4.2. Telescopía . . . . .	42
5.5. Generación de diferentes objetos . . . . .	42
<b>6. Experimentación</b>	<b>44</b>
6.1. Telescopía . . . . .	44
6.2. Sin telescopía . . . . .	48
<b>7. Conclusiones</b>	<b>62</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	62
7.2. Trabajo futuro . . . . .	63

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.1. Empaquetamiento de figuras regulares e irregulares . . . . .	10
3.2. Strip packing . . . . .	12
3.3. Embalaje en bin . . . . .	15
3.4. Mochila bidimensional . . . . .	16
3.5. Empaquetamiento de palet . . . . .	17
3.6. Anidamiento de círculos . . . . .	23
3.7. Empaquetamiento irregular . . . . .	29
3.8. Embalaje de inones . . . . .	32
3.9. Electronica . . . . .	32
3.10. Modelando el efecto de la densidad . . . . .	33
3.11. Corte de bloques de madera . . . . .	34
3.12. Arquitectura . . . . .	34
6.1. Resultados del empaquetamiento de diferentes objetos por 600 minutos . . . . .	46
6.2. Empaquetamiento con telescopía de círculos . . . . .	47

---

6.3. Empaquetamiento con telescopía de octágonos . . . . .	48
6.4. Empaquetamiento de círculos a 600 min . . . . .	49
6.5. Embalaje de octágonos . . . . .	50
6.6. Empaquetamiento de cuadrados a los 600 min . . . . .	51
6.7. Caja de vigotes por objeto por diferentes tiempos . . . . .	52
6.8. Variación del empaquetamiento a lo largo del tiempo . . . . .	55
6.9. Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto círculo . . . . .	56
6.10. Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto cuadrado . . . . .	57
6.11. Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto rombo . . . . .	58
6.12. Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto octágonos . . . . .	59



# ÍNDICE DE TABLAS

---

4.1. Normas de diferentes figuras . . . . .	38
6.1. ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 30 min . . . . .	50
6.2. ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 60 min . . . . .	51
6.3. ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 120 min . . . . .	53
6.4. ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 240 min . . . . .	53
6.5. ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 480 min . . . . .	54
6.6. ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 600 min . . . . .	55
6.7. Analisis de Varianzas para la hora 1,2,3,4 y 5 . . . . .	60
6.8. Analisis de Varianzas para la hora 6,7,8,9 y 10 . . . . .	61

# AGRADECIMIENTOS

---

Gracias a Dios por su inmenso amor, por la obra redentora hecha en la cruz con la cual limpio mis pecados y me dio la condición de hijo del altísimo. A mis padres y hermanos por alentarme a seguir a afrontar retos cada vez más grandes. Al pueblo Mexicano por contribuir de forma directa e indirecta en mi formación profesional como personal, Permitiendome atravez del CONACYT tener una beca de postgrado. A la Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingenieria Mecanica y Electrica, Posgrado en Ingenieria de Sistemas por ser mi casa durante estos dos años en Monterrey permitiendome desarrollar en el area de investigación de operaciones.

Al Dr. Igor Litvinchev por abrirme una puerta para trabajar en su grupo de investigación asi como el tiempo dedicado y enseñanzas decantadas. A los sinodales Dra Lucero Ozuña y el Dr. José Marmolejo, por la guia realizada en la elaboración de este trabajo asi como sus areas de oportunidad mencionadas. Asi como a la Dra. Socorro Rangel por los cuidados academicos y no academicos hechos al momento de estar en Brasil.

A los amigos y compañeros del postgrado que hicieron estos dos años pasaran volando, con sus diferentes ocurrencias matutinas. A mis amigos de Yalma, Fernando, Fernandiño, Romel, Eduardo, Myriam, Andres, Asael, Daniel, Ruth, Mayra, Ana, Luis infante, Luis benavides, Juan, Cristina, Nancy por permitirme ser parte de sus vidas cotidianas y conocer lo que pasa en el laboratorio despues de las 6 PM.

## CAPÍTULO 1

# RESUMEN

---

José Daniel Mosquera Artamonov

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias  
en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

### EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS REGULARES EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR

Número de páginas: 73.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** Determinar el efecto en el empaquetamiento rectangular teniendo como parametros de control diferentes objetos y dos familias de desigualdades validas. Usando metodos de solución exacta.

**CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES:** En el embalaje sin permitir la telescopia se notó que en los primeros 240 minutos de ejecución del solver (30,60,120 y 240),

tanto las desigualdades validas usadas como los diferentes objetos no presentan significancia estadística al 95 %, para la variable respuesta GAP (valor  $P > 0.05$ ). Dicho fenomeno no es similar a los 480 y 600 minutos en donde el tipo de objeto si afecta significativamente al GAP (valor  $P < 0.05$ ), pudiendose dar este patron principalmente al crecimiento combinatorio del problema en esos instantes.

Los resultados aqui presentados son los primeros en donde se empaqueta más de 10 objetos similares de diferentes tamaño en un contenedor rectangular, dado que la gran mayoria de los trabajos restringen la cantidad de tamaños diferentes a empaquetar a 8 aunado al analisis de fluctuación del GAP a lo largo del tiempo usando analisis de varianza.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dr. Igor S. Litvinchev

## CAPÍTULO 2

# INTRODUCCIÓN

---

*El precio de la grandeza es la responsabilidad.*

**Winston Churchill**

### **Bosquejo**

---

<b>2.1. Introducción</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2.2. Objetivo</b> . . . . .	<b>5</b>
2.2.1. Objetivos Especificos . . . . .	5

---

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Se ha percibido en las ultimas dos decadas un alto crecimiento demográficos en las ciudades, ahora transformadas en megaurbes. En dichas megaurbes con el aumento de la densidad poblacional, se requieren con mayor frecuencia un volumen alto de insumos básicos (alimentos, agua, energia, gas) para vivir moderadamente. Por lo cual se ha visto la necesidad de efficientizar los recursos que se tienen con la mira de obtener el mayor rendimiento posible de los mismos. Una de las necesidades básicas en las metropolis es el trasladar el mayor número posible de productos en un contenedor (regular o iregular), abarcar con el menor numero de torres de comu-

nicación un sector de la ciudad, establecer el número idóneo de plantas distribuidoras que abastezcan cierta zona o simplemente obtener el mayor número de piezas al momento de dividir un recurso (telas, metales, maderas), entre otros problemas. Dichas necesidades parecieran ser diferentes sin algún aspecto en común. [1].

Los mencionados problemas se pueden considerar pertenecientes a la misma familia, conocidos como problemas de empaquetamiento de objetos (regulares o irregulares) en contenedores (regulares o irregulares). Teniendo como objetivo disminuir el espacio desperdiciado en la mayoría de los casos, en otros casos añaden un objetivo de seleccionar los objetos con mayor contribución para el tomador de decisión, convirtiéndose en un problema hiperativo para las necesidades actuales de la humanidad.

El desarrollo de algoritmos exactos y/o heurísticos que permitieran añadir objetos regulares en un contenedor era una temática con mayor atención para los matemáticos "puros", pero en los últimos años ha recibido una considerable contribución por investigadores enfocados al área de investigación de operaciones motivados por las diferentes aplicaciones existentes del mismo problema [2].

El problema de empaquetamiento se ha catalogado como un problema de optimización combinatorial, los cuales además son considerados pertenecientes a la familia NP-Hard, puesto que no existe hasta el momento un algoritmo que pueda solucionarlo en tiempo polinomial. Muchos de los esfuerzos se han centrado en desarrollar métodos heurísticos que permitan encontrar una buena solución de este problema en un considerable tiempo corto (de acuerdo a la aplicación), brindando algunas directrices a las heurísticas con la finalidad de disminuir el espacio de búsqueda y así obtener una solución factible en un tiempo considerablemente corto.

Este trabajo consta de cinco partes. Una introducción, tres capítulos que desarrollan los objetivos propuestos, resultados y las conclusiones. En la introducción se exhibe una corta motivación del trabajo y los principales objetivos de la investigación. En el segundo capítulo se presenta el fundamento teórico del trabajo. Una

breve reseña histórica, que le permite al lector conocer los detalles más relevantes de la formulación matemática sobre problemas de empaquetamiento, así como algunas generalidades técnicas que permitan sin ser especialista en el ramo, comprender la terminología usada y las diferentes vertientes que serán estudiadas. También se presenta una corta sinopsis de las principales metodologías de optimización y de análisis que son usadas para el estudio realizado. En el tercer capítulo se despliega la metodología de investigación realizada durante los meses de enero y diciembre del 2015 en el laboratorio de alto rendimiento del Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico perteneciente a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. En el capítulo cuarto contiene el análisis de los modelos matemáticos usados en la investigación. Finalmente en el capítulo quinto se exterioriza las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

## 2.2 OBJETIVO

Determinar el efecto en el empaquetamiento rectangular teniendo como parámetros de control diferentes objetos y dos familias de desigualdades válidas.

### 2.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Determinar el efecto existente en el embalaje rectangular teniendo como parámetros de control los diferentes objetos umbral a 600 minutos permitiendo telescopía.
2. Delimitar el efecto en el empaquetamiento rectangular usando como parámetros de control los diferentes objetos y dos familias de desigualdades válidas en un umbral de 30, 60, 120, 240, 480, 600 minutos sin permitir telescopía.

## CAPÍTULO 3

# MARCO TEÓRICO

---

*El inteligente no es aquel que lo sabe todo  
sino aquel que sabe utilizar lo poco que sabe.*

**Sebastian Cohen Saavedra**

### Bosquejo

---

<b>3.1. Problemas de empaquetamiento . . . . .</b>	<b>7</b>
3.1.1. ¿Como se puede clasificar los problemas de empaquetamiento? . . . . .	8
<b>3.2. Trabajos realizados en empaquetamiento de objetos . .</b>	<b>17</b>
3.2.1. Empaquetamiento de objetos regulares . . . . .	18
3.2.2. Empaquetamiento de objetos irregulares . . . . .	28
<b>3.3. Algunas aplicaciones de empaquetamiento . . . . .</b>	<b>31</b>

---

## 3.1 PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

Se considera como problema de empaqueta la necesidad que tiene las personas de colocar determinado numero de objetos en un recipiente o contenedor [1]. Los objetos que se intentarán poner en el contenedor pueden ser similares en forma



geométrica (amplificados o reducidos) o no (ej: cuadrados, círculos, octágonos), el contenedor puede ser cuadrado, rectangular, triangular entre otras figuras regulares así como irregulares [3].

El objeto circular se define como  $S = \{x : \|x - x_0\| \leq R\}$ , donde la norma utilizada puede ser o no euclidiana. Se aproxima la forma del contenedor por una malla, de tal modo que los centros de objetos se ubiquen en los puntos de la malla. No se permite intersección entre los objetos empaquetados. Además se asume que la cantidad de artículos con tamaño desigual es limitada o ilimitada. Un modelo para empaquetamiento de objetos circulares fue formulado en [4]:

$$\min \quad r_0 \quad (3.1)$$

sujeto a:

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r \leq r_0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.2)$$

$$2r \leq d_{ij} \quad j=1, \dots, N \quad i < j \quad (3.3)$$

Este modelo impide el traslape entre círculos y como lo nota el lector una de las restricciones es no lineal generando que la región de búsqueda sea no convexa.

### 3.1.1 ¿COMO SE PUEDE CLASIFICAR LOS PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO?

La facilidad de poder clasificar un trabajo de empaquetamiento permite determinar, el grado de aportación de dicha labor investigativa. Algunas ideas iniciales sobre como discriminar las diferentes investigaciones, fue propuesto en [5], luego mejorado por [6]. En [5] se propone cuatro categorías específicas para la clasificación. Gran parte de esta sección se basa en las ideas publicadas en los dos anteriores trabajos, tomados como parte del conocimiento básico para desarrollar y clasificar los problemas de embalaje.

### 1. Dimensión

- Una dimensión
- Dos dimensión
- Tres dimensión
- Más de tres dimensiones

### 2. Tipo de asignación

- Se asignan todos los objetos
- No se asignan todos los objetos

### 3. Variedad de objetos

- Objetos similares
- Objetos de diferentes formas

### 4. Variedad de elementos Esta división hace referencia a la forma y cantidad de los elementos

- Pocos elementos
- Elementos similares
- Muchos elementos de muchas formas diferentes
- Muchos elementos de pocas formas diferentes

Se ha podido notar en párrafos anteriores que el objetivo de los trabajos en empaquetamiento es la eficiente colocación de objetos en una sección del contenedor sin presentar superposición entre los objetos, cumpliendo con una determinada función de ganancia. Dado este objetivo la mayor complejidad radica en la geometría de las figuras que se deben embalar en el contenedor. En donde hay figuras regulares (círculos, cuadrados, etc) o figuras irregulares o asimétricas.

La figura 3.1, presentará un ejemplo de empaquetamiento en un contenedor rectangular en donde el caso A) tiene el embajala de figuras regulares, mientras que B) muestra el empaquetamiento de figuras irregulares.

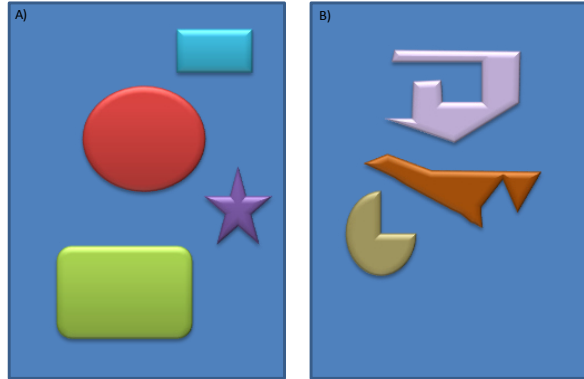


Figura 3.1: Empaquetamiento de figuras regulares e irregulares

#### 3.1.1.1 PROBLEMAS DE EMBALAJE RECTANGULAR

En este problema se tiene  $n$  elementos  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , en donde se conoce para cada elemento su respectivo ancho  $w_i$ , así como el alto  $h_i$  del elemento  $I_n$ . Los elementos deben ser ingresados en el contenedor rectangular, sin presentar traslape entre ellos de modo que maximicen/ minimicen una función de utilidad específica. En la literatura existen muchas variantes de este problema, pero se usan tres criterios para clasificarlos.

- Tipo de asignación
- Ordenamiento de los objetos
- ordenamiento de los elementos

Algunos de los problemas más estudiados en la literatura son presentados a continuación.

## 3.1.1.2 PROBLEMA DE STRIP PACKING

Dado  $n$  elementos (rectángulos pequeños), con su respectivo ancho  $w_i$ , así como el alto  $h_i$ , en donde hay un objeto grande (conocido como tira o strip), donde su ancho  $W$  es fijo, pero su altura  $H$  es variable. Se tiene como meta reducir al mínimo la altura  $H$  usada de la tira, obligando que todos los elementos deban ser embalados. En [7], se presenta el problema strip packing en dos y tres dimensiones para figuras regulares bajo un algoritmo shaking. Mientras que en [8], se muestra el embalaje de objetos irregulares. La estructura formal de este problema está dada:

$$\text{Min}H \tag{3.4}$$

Sujeto a:

$$0 \leq x_i \leq w_i \quad \forall i \in N \tag{3.5}$$

$$0 \leq y_i \leq h_i \quad \forall i \in N \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

Se presentan cuatro restricciones más posibles para cada  $i$  y  $j$ .

$$x_i + y_i \leq x_j \tag{3.8}$$

$$x_j + y_j \leq x_i \tag{3.9}$$

$$x_i + y_i \leq x_j \tag{3.10}$$

$$y_i + h_i \leq y_j \tag{3.11}$$

$$y_j + h_j \leq y_i \tag{3.12}$$

Siendo  $(x_i, y_i)$  las coordenadas del borde inferior izquierdo del elemento  $i$ . Las dos primeras restricciones implican que todos los elementos, se deben colocar en el objeto grande. Las siguientes cuatro ecuaciones protegen que los elementos colocados en la tira no se traslapen. En la figura ??, se presenta en A) una tira sin límite superior en la cual se le debe introducir diferentes objetos rectangulares. B) presenta el empaquetamiento de los mismos objetos de A, pero en dos contenedores finitos.

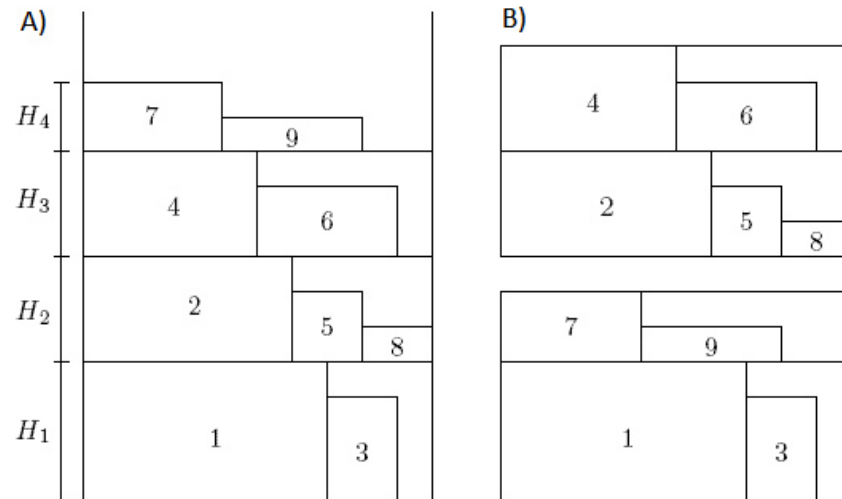


Figura 3.2: Strip packing

### 3.1.1.3 PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE ÁREA

Se tiene  $n$  elementos, cada uno definido por su ancho  $w_i$ , así como el alto  $h_i$ , además se tiene un gran objeto cuyo ancho  $W$  y altura  $H$  son variables. La finalidad de este modelo es minimizar el área total usada  $WXH$  considerando que todos los elementos deben ser colocados dentro del gran objeto o tira. Dicho modelo es muy usado en el transporte de carga, en donde se quiere disminuir el espacio usado del contenedor. Puesto que una ineficiente utilización del mismo implicaría mayores costos en el traslado. En [9], Se presentan dos algoritmos (Busqueda de arbol, genético) para la solución de quince casos reportados en la literatura. En donde en diez de ellos mejorar las soluciones encontradas e introduce nuevas instancias para trabajos futuros. El modelo para este problema es muy similar al mostrado en la subsección anterior, en donde el principal cambio es la función objetivo.

## 3.1.1.4 PROBLEMA DE BIN PACKING EN DOS DIMENSIONES

Se tiene  $n$  elementos, cada uno definido por su tamaño  $a_i$ , en donde se tiene  $N$  contenedores disponibles de peso  $V$ . El objetivo es utilizar la menor cantidad posible de contenedores que permitan embalar todos los elementos. Un modelo típico para este problema es presentado en [10], dicho modelo se ilustra a continuación.

$$\text{Min } \sum_{i \in I} y_i \quad (3.13)$$

Sujeto a:

$$N_i \geq 1 \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \in n} a_j x_{ij} \leq V y_i \quad i \in n \quad (3.15)$$

$$\sum_{i \in n} x_{ij} = 1 \quad j \in n \quad (3.16)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in n \quad (3.17)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in n \quad j \in n \quad (3.18)$$

Donde  $y_i = 1$  si el contenedor (bin) es usado y  $x_{ij}$  es el elemento  $j$ , en el contenedor llamado como bin  $i$ . La restricción 2.15 hace que al menos un contenedor se deba abrir para guardar los objetos. La ecuación 2.16, no permite que se pongan mayor capacidad  $V$  en el contenedor  $N_i$ , considerando los objetos puestos  $a_i$ . La siguiente restricción hace que si, se abre un contenedor este tenga un objeto. Finalmente las ecuaciones 2.18-2.19 son la naturaleza de las variables.

La figura 3.3, muestra el acomodo de diferentes objetos rectangulares en tres o cuatro contenedores de igual características (bin), siendo A) una buena solución al problema pero B) es la optima pues disminuye el uso de un bin en el embalaje.

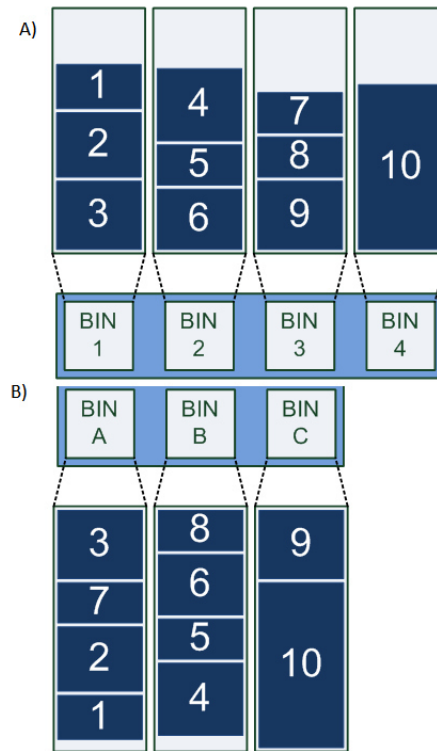


Figura 3.3: Embalaje en bin

### 3.1.1.5 PROBLEMA DE LA MOCHILA EN DOS DIMENSIONES

Se tiene un conjunto  $I$  de elementos, para cada elemento  $i \in I$  se le conoce su ancho  $w_i$ , así como el alto  $h_i$  y un valor  $c_i$ . Además se cuenta con una mochila rectangular con ancho  $W$  y largo  $H$ . Se pretende determinar un subconjunto  $\hat{I} \subseteq I$  con un valor máximo total  $\sum_{i \in \hat{I}} c_i$ , tal que todos los elementos  $I \in \hat{I}$  pueden ser empacados en la mochila. Uno modelo para el problema de la mochila en dos dimensiones es presentado en [11].

$$\text{Max} \sum_{i \in m} c_i x_i \tag{3.19}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in m} w_i h_i x_i \leq WXH \tag{3.20}$$

$$x_i \in \{0, 1, \dots, u_i\} \tag{3.21}$$

$$x_i \quad \text{copias de tipo rectangular} \tag{3.22}$$

Adicionalmente en la anterior investigación, se presentan dos metodos bien conocidos en este problema, el de arriba hacia abajo y los enfoques de abajo hacia arriba. Son mezclados en un algoritmo para resolver este problema. En donde encuentran la solución óptima en muchos de los casos en tamaños moderados, dejando atras a los demás metodos en situaciones de gran tamaño.

La figura 3.4 ilustra uno de los casos más conocidos del problema de la mochila bidimensional, en donde se tiene como objetivo llevar el mayor peso posible al menor costo.

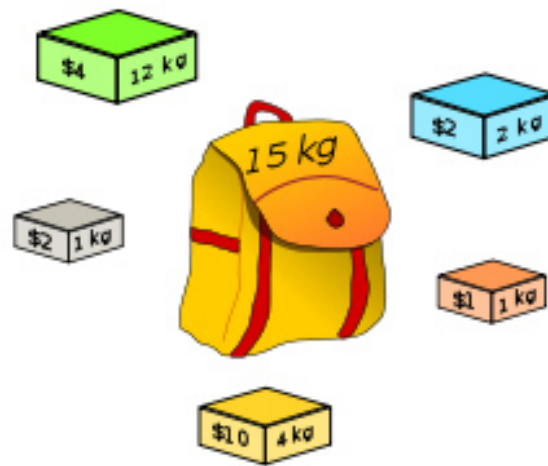


Figura 3.4: Mochila bidimensional

### 3.1.1.6 CARGA DE PALETS (PALLET LOADING)

Se tiene una gran cantidad de elementos de idéntica configuración  $(w,h)$  y un objeto rectangular de capacidad grande  $(W,H)$ , el objetivo es poner el mayor número de elementos en el objeto rectangular, en este caso se permite que los objetos giren  $90^\circ$ .

En [12], representan el problema de carga de palets como un conjunto de problemas de independencia máxima para dividirlo por grupos. En donde los bordes



de agrupación inter se relajan con técnicas lagrangianas. Después con estos resultados implementan un enfoque de generación de columnas para el modelo obtenido en el paso anterior. Finalmente proponer extender la investigación implementando un Branch-Cut. En la figura 3.5 presenta una configuración confiable de palet, para movilizar mercancía en un vehículo además de una estructura no segura para el mencionado objetivo.

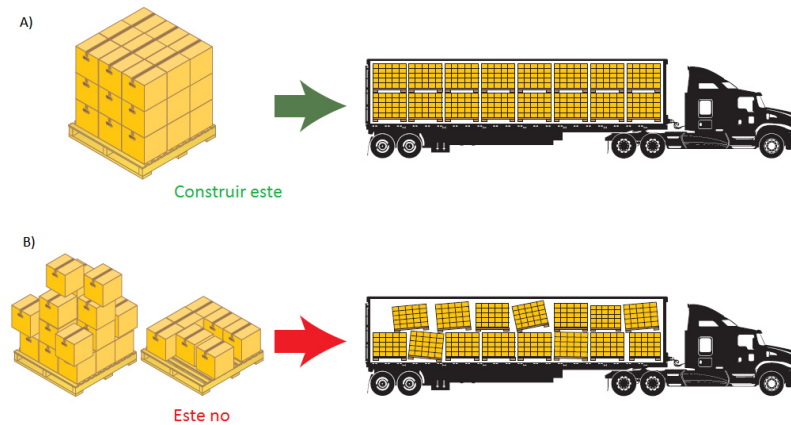


Figura 3.5: Empaquetamiento de palet

## 3.2 TRABAJOS REALIZADOS EN EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS

En esta sección se hará una revisión de los diferentes trabajos realizados en empaquetamiento de objetos, sin discriminar el método de solución (exacto o heurístico), estructura del modelo (lineal o no lineal), Pero si hará una separación si las figuras son regulares o irregulares.

### 3.2.1 EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS REGULARES

En 1995 [13], estudian el problema de empaquetar círculos con dimensiones diferentes, dentro del mismo contenedor rectangular. Formulando un modelo de optimización entera mixta no lineal, dicho problema es atacado con diferentes heurísticas incluyendo un algoritmo genético. Probando las heurísticas con 66 problemas generados aleatoriamente. Presentando mejores resultados las heurísticas semialeatorias y el algoritmo genético.

En 1998 [14], presentan el empaquetamiento denso de círculos dentro de un contenedor circular, disertando con dos algoritmos de empaquetamiento, usando formulaciones no lineales y biojetivos. Teniendo un total de 65 círculos ingresados dentro del contenedor circular.

Para el 2002 [15], usando una formulación matemática no lineal proponen un algoritmo bio-hispirado llamado "Quasi-human algorithm", dicho metodo busca el lugar con mayor área para colocar el siguiente objeto y así maximizar el área ocupada del contenedor. Siendo está una estrategia adaptativa similar a la búsqueda Tabu.

En el 2005 [16], Combinan la metodología de la búsqueda tabu con el algoritmo de recocido simulado con la finalidad de evitar ciclismos, mejorar la diversificación y obtener una búsqueda estocástica de gran alcance. Está estrategia se prueba con algunos casos reportados en la literatura, obteniendo buenos resultados en el empaquetamiento de círculos en un contenedor circular.

En [17], Para el problema de embalaje de círculos desiguales en un contenedor rectangular de dos dimensiones desarrollan dos algoritmos golosos. En donde el primer algoritmo escoje el siguiente círculo considerando el grado máximo de capacidad del recipiente, imitando las estrategias humanas para este problema. El siguiente metodo, mejora el anterior en la estrategia de búsqueda. Se realiza una comparación con los metodos publicados en la literatura para este problema. Finalizan el trabajo proponiendo ingresarle a los algoritmos para embalaje la experiencia humana, en

está labor.

En el 2007 [18], realizan un trabajo en el empaquetamiento de frutas similares de diferentes tamaños. Planteando un modelo de mezcla, el cual permite asignar la probabilidad de origen del bin a las frutas, en los lugares de empaque preestablecidos. Dándole una alta importancia a la trazabilidad del producto, puesto que unido a una correcta agrupación de las frutas con tamaños similares en el mismo contenedor, permite un mayor precio de venta del insumo y por consiguiente mayor rentabilidad para la firma. Los análisis de la información los realizan usando estrategias estadísticas y plantean un modelo bayesiano para determinar la inercia del fenómeno.

En [19], Presentan un caso particular de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular para la industria de las motocicletas con restricciones específicas acordes a la necesidad del cliente. Dichas restricciones son consideradas al momento de realizar los cambios de entornos en las búsquedas locales del algoritmo. Los resultados obtenidos por los investigadores permiten reducir el tiempo de ejecución del empaquetamiento de horas a segundos. Proponen para futuros trabajos introducirle inteligencia al método para que las decisiones realizadas en cada iteración dejen de ser aleatorias.

En el 2008 [20], desarrollan un algoritmo híbrido inspirado en técnicas de recocido simulado, búsqueda de vecindad variable y técnicas constructivas para el problema de empaquetamiento con restricciones tipo guillotina. Determinan que la metodología propuesta tiene una probabilidad del 86.43% de encontrar soluciones iguales o mejores a las reportadas en la literatura.

En este mismo año [2], realizan una revisión extensa de los problemas de empaquetamiento, con un enfoque académico vinculándolo con el práctico. Los autores enlistan a otros investigadores según el problema de empaquetamiento que haya trabajado (tipo de objetos), la estrategia de solución (exacta o heurística), la función objetivo (maximización o minimización). Para la sección de problemas de empaque-

tamiento en la industria presentan: el tipo de industria en donde lo aplicaron, el tipo de círculos (uniformes o no), la función objetivo (Aprovechamiento del espacio o economía) y finalmente la estrategia de solución (exacto o heurística). Además describen los modelos matemáticos típicos para cada tipo de problema.

También en el 2008[21], trabajan en un problema de empaque en tres dimensiones de un Bin-Packing. Usan para obtener una solución factible una estrategia constructiva golosa (GRASP). Dicho planteamiento tiene restricciones de estabilidad para los productos, es decir no se permite el conjunto de insumos empaquetados que presenten rotación. Establecieron condiciones suficientes de optimalidad anudado a una estrategia de mejora.

En [22], Usan una mezcla de búsquedas locales, estrategias de optimización global para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor circular. la fortaleza de su metodología se entra en:

1. Optimización local estandar. La cual permite rapidamente reducir espacios de busqueda.
2. Movimientos locales. Con la finalidad de escapar de optimos locales y seguir en la busqueda del incumbente.
3. Diversificación de población. Evita quedar atrapado en una opción muy atractiva pero por debajo del optimo local.

En el 2011 [23], realizan trabajos para introducir objetos circulares de igual dimensión en un contenedor circular. Diseñan un metodo casi-fisico para la optimización global de las instancias. Mencionan que este problema es una instancia clásica para discriminar los algoritmos bueno de los mediocres. Usan una función de energia para solucionar el problema, la cual emplean en diferentes simulaciones para demostrar la robustez de la metodología propuesta. Orientan futuras investigaciones a trabajar en el empaquetamiento de elipses y círculos no homogéneos en contene-

dores circulares o rectangulares con la metodología propuesta por ellos con algunas pequeñas modificaciones en la estrategia constructiva.

En [1], Desarrollan una heurística inspirada en la búsqueda de espacio para el problema de empaque de círculos para diferentes contenedores (círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo isósceles y semicírculo en ángulo recto), en donde la formulación que usan es un modelo de optimización no lineal. Los resultados obtenidos mejoran a los existentes en la literatura donde se bajan en la búsqueda de espacio. Presentando una gran diferencia con aportaciones previas en el uso de restricciones que limitan el rango de movimiento para colocar el centro de los círculos.

En el 2012 [24], Presenta el problema de empaquetamiento de una cantidad máxima de círculos idénticos en un dominio multiconexo. Plantean un modelo matemático para este problema, el cual es probado con la construcción de puntos de partida de forma aleatoria. Se emplean desigualdades activas para mejorar el rendimiento del modelo. Finalmente hacen énfasis que el enfoque propuesto puede ser extendido a una implementación de paralelización.

Para el 2013 [3], presentan el empaque de círculos de diferentes radios en diferentes contenedores, siendo estos rectángulos y triángulos, con el fin de evitar el sobreposicionamiento de los objetos. Se apoyan de una formulación no lineal para solucionar el problema, usan una discretización del contenedor para colocar los objetos a dentro. Estos autores hicieron una metodología para determinar una solución factible, reemplazando las restricciones por desigualdades lineales aproximadas. Dicha estrategia no todas las veces da soluciones óptimas, presentando casos que la solución es infactible.

También [25], trabajan un problema de empaquetamiento bi-dimensional óptimo de rectángulos en un contenedor circular. Desarrollan una formulación matemática no lineal entera mixta, con la finalidad de resolver rápidamente los problemas de pequeña empaquetadura. En los casos de mayor complejidad, se estructura dos métodos heurísticos: uno constructivo en donde se colocan rectángulos de mayor tamaño y posteriormen-

te los de menor tamaño. El segundo es la implementación del recocido simulado, en donde se considera una serie finita de rectangulos los cuales son incluidos en una función de construcción. El enfoque constructivo presenta una eficiencia del 91.3 %, aunque la estrategia de recocido simulado desarrolla patrones de embalaje, con una eficiencia del 93.6 % del contenedor. Para poder aumentar este rendimiento se tuvo que utilizar mayor tiempo de maquina en los peores casos ( $>1h$ ). Brindando a la comunidad científica como industrial dos estrategias diferentes de acuerdo al tamaño del problema. Aunque los autores mencionan la aplicación de estas estrategias a empresas del ramo forestal, no usan restricciones tipo guillotina.

Galiev et al, presentan en [26] la discretización del contenedor en donde cada punto con coordenadas  $x,y$  son es un posible lugar en donde colocar un objeto, volviendo el problema en un problema de decisión ( colocar o no un objeto en la posición  $x_i, y_i$ ) Estructuran un algoritmo heurístico inspirado en el modelo lineal que proponen. La metodología que usan permite ser utilizada en cualquier contenedor, obteniendo muy buenos resultados. Aunque los resultados obtenidos presentan menor eficiencia que otros propuestos anteriormente, la metodología descrita no le afecta el tipo de contenedor convirtiendo este aspecto en una fortaleza del trabajo.

En [27], presentan una corta disertación para dos realciones en un problema de empaquetamiento de esferas, asi como particulas cubicas y discos circulares. Los resultados validan hallazgos practicos asi como simulados.

En [28], emplean tres algoritmos de emjambre inteligente (colonia de hormigas, Algoritmo de colonia de abeja artificial y optimización swarm) para resolver el problema de embalaje circular con restricciones de equilibrio. Para los tres algoritmos implementados el algoritmo que presenta mejores resultados es colonia de abeja artificial por su estabilidad y equilibrio.

En [29], trabajan en una formulación para el empaquetamiento de circulos en un contenedor rectangular teniendo en cuenta desigualdades validad y el anidamiento de los objetos embalados. Presentan los resultados computacionales para diferentes

configuraciones de los contenedores, así como teniendo relajado el modelo en las restricciones más exigentes.

La figura 3.6, muestra el empaquetamiento de círculos con diferentes radios, en la cual se le permite al objeto de mayor tamaño anidar otros objetos de menor dimensión a él, dicha figura fue obtenida después de diez minutos de ejecución del modelo utilizado en esta investigación. La figura es colocada para ejemplificar el empaquetamiento de objetos regulares en un contenedor rectangular con telescopía.

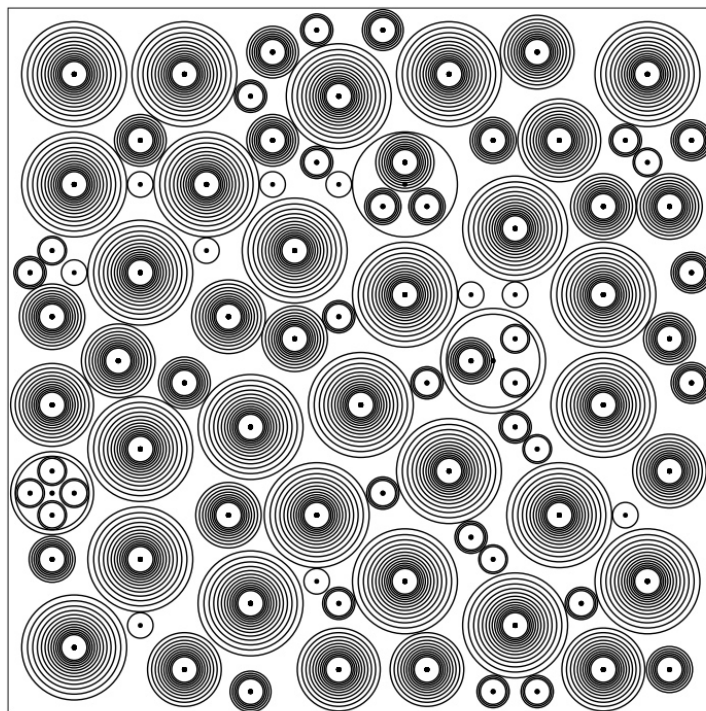


Figura 3.6: Anidamiento de círculos

En el 2014 [30], consideran el problema de empaquetamiento binario en dos dimensiones (2DVSBPP), usando restricciones de tipo guillotina. Parten de un algoritmo de embalaje bin mixto (MixPacking), para el caso del problema solo Bin, posteriormente desarrollan un algoritmo de retroceso que vincula el bin mixto para resolver el (2DVSBPP). Prosiguen mejorando las soluciones encontradas con una implementación de un algoritmo de recocido simulado y búsqueda binaria. Los resulta-

dos encontrados por los autores hasta el momento superar a los algoritmos conocidos. Siendo uno de los aportes de los autores la posibilidad de retroceso del algoritmo, así como la metodología de mejora de la puntuación.

En ese mismo año [31], presentan un problema de empaquetamiento multiobjetivo con dos dimensiones. En donde hay un número finito de contenedores, teniendo el peso y la longitud de los artículos a colocar en el embalaje, se busca la optimización de tres funciones de costo. Siendo el primer objetivo, utilizar el menor número de contenedores. El segundo es la minimización máxima de un bin. Finalmente el tercer objetivo pretende equilibrar la carga dentro del contenedor. Desarrollan dos diferentes metaheurísticas centradas en poblaciones, a los algoritmos estructurados se les brinda la habilidad de ser adaptivos a lo largo del tiempo con la finalidad de ajustar los parámetros durante el proceso de búsqueda.

En [32], formulan un modelo lineal entero para el problema de empaquetamiento de círculos de radios diferentes. Usan una cuadrícula rectangular para aproximar el contenedor de los objetos, en donde cada punto de la cuadrícula es un posible lugar en donde poner el círculo. El modelo binario planteado es solucionado con programas comerciales, pues proponen dos familias de desigualdades válidas que ayudan a la eficiencia del sistema operativo. Proponen para futuras investigaciones realizar trabajos implementando relajaciones Lagrangeanas, técnicas de descomposición o otras familias de desigualdades válidas.

En [33], desarrollaron diferentes formulaciones lineales interas para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular. En donde el primer modelo que plantean tienen mejores resultados que los otros. El modelo usado es fácilmente escalable a problemas de más dimensiones y de diferentes formas del contenedor. Además desarrollan unas restricciones que permiten la anidación de círculos dentro de otros.

En el 2015 [34], trabajan en un problema de empaquetamiento con un contenedor rectangular fijo del mismo tamaño pero los objetos a empacar presentan diferentes



dimensiones. Usan una discretización del recipiente para determinar en que lugar colocar determinado objeto. Transformando el problema en un modelo de gran escala, para el cual emplean desigualdades validas para mejorar el tiempo de ejecución. Posteriormente cambiando la norma euclidiana usada almacenan elipses, rombos y octagonos demostrando la fortaleza que tiene el modelo matemático formulado. Proponen enfatizar esfuerzo en el desarrollo la generación de las desigualdades validas para el caso de anidación, así como la implementación de relajaciones Lagranjeanas y heurísticas correspondientes para esta técnica.

En [35], plantean un modelo entero para un problema de empaquetamiento vectorial bidimensional con función de costos lineal a trozos (2DVPP-PLC). Dicho problema surge de la necesidad que tiene la industria textil de enviar sus productos por el servicio de mensajería. Donde se considera el peso y el volumen del contenedor y se tiene como objetivo minimizar el costo del envío. Hacen un algoritmo de búsqueda local iterativa para poder solucionar instancias grandes y que permita mejorar la calidad de la solución cada vez más. Invitan a la comunidad científica que desarrolle métodos exactos de gran escala para este problema específico (branch-and-price).

En [36], Desarrollan un algoritmo genético de agrupación con control en el gen de transmisión (GGA-CGT), para el problema unidimensional Bin. Dicho método permite estimular la herencia de los mejores genes en los cromosomas, sin perder el balance entre la diversificación e intensificación. En donde los mejores genes son agrupados en un nuevo conjunto de operadores genéticos. La evolución es controlada con una técnica de reproducción que limita el espacio de exploración, impidiendo que el algoritmo converja precosmente. Dicha metodología presenta muy buenos resultados para diversos problemas de tamaño y estructura. Este método presenta gran número de parámetros que deben ser calibrados. Dicho algoritmo presenta bajo rendimiento en ciertos problemas clásicos, que hasta el momento no es claro para la comunidad que los vuelve complejos.

En [37], usan la acción espacial (ASGO) para la optimización global de un

problema de empaquetamiento de círculos de radios diferentes en un contenedor cuadrado. Realizan el empaquetamiento de los círculos en el contenedor, considerándolo como rectángulo. Los elementos que presentan mayor deformación son movidos para corregir este problema. La aproximación del objeto circular a un rectángulo facilita la búsqueda de espacio factible para un objeto. En el proceso de búsqueda se usa la estrategia tabu con el fin de prevenir ciclos y mejorar la diversificación. Realizan una estrategia de intercambio de círculos de posición con la finalidad de aumentar la diversificación del sistema. Usan 68 instancias de prueba de la lectura (Packomania), en donde el 92 % de las instancias usadas presenta mejores resultados que los reportados actualmente. La metodología usada permite estimar con una baja complejidad computación las posiciones y tamaños de los espacios vacantes para una configuración específica. Proponen la extensión de este método a tres dimensiones, así como considerar contenedores acotados (circular o rectangular).

En [38], presentan un algoritmo de reducción dinámica el cual transforma una instancia inicial a una serie de instancias del problema de empaquetamiento rectangular (contenedor rectangular, objetos rectangulares de diferentes tamaños). incorporan una metodología de compactación para compartir el diseño resultante por medio de movimientos alternativamente de izquierda, hacia abajo o a la esquina inferior izquierda con la finalidad de obtener un rectángulo envolvente de menor tamaño. Usan 28 instancias reportadas en la literatura para demostrar la eficiencia y superioridad de la metodología propuesta a comparación de resultados existentes a la fecha. Esta estrategia tiene una complejidad computacional de  $O(n^6)$ .

En [39], consideran el problema de empaquetamiento de círculos de diferentes radios en un contenedor rectangular de tamaño constante. Con la finalidad de maximizar la cantidad de círculos colocados en el contenedor o minimizar el área residual del recipiente. Resuelven un modelo de gran escala, discretizando el área del contenedor en un cuadrícula. Se usa un programa comercial para resolver este modelo, apoyándolo con la implementación de desigualdades válidas. Según los resultados obtenidos las desigualdades válidas mejoran la eficiencia del modelo, dichas

---

desigualdades pueden ser usadas para cualquier tipo de objeto. Proponen implementar las desigualdades validas para los casos en que los objetos empaquetados están anidados.

### 3.2.2 EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS IRREGULARES

En el 2006 [40], Presentan un algoritmo heurístico para el problema de dos dimensiones de cortes irregulares. Dicho metodo permite el empaquetamiento de objetos representados bajo lineas y ademas facilita embalar objetos que tienen arcos. Los problemas fueron solucionados con un tiempo de ejecución de maquina de cinco minutos. En donde hacen incapie de la poca inexistencia de instancia reales (industriales) para este problema.

En [41], Implementan un algoritmo hibrido para resolver el problema de empaquetamiento irregular. Usan un algoritmo de simulación recocida para guiar la busqueda, ayudados de modelos de programación lineal optimizan localmente cada diseño.

En el 2012 [42], Desarrollan un híbrido entre las metaheurísticas de GRASP y recocido simulado para el empaquetamiento de figuras convexas y no convexas. Como en otros articulos discretizan el espacio para determinar en que lugar colocar el objeto y no tener problemas de translape.

En el 2013 [43], Trabajan en el desarrollo de un algoritmo genético con procedimiento goloso (inferior izquierda) para solucionar la jerarquización de dos dimensiones. Resuelven algunos casos teoricos asi como una consultoria para la industria textil.

Mientras que [44], Formulan un modelo entero mixto, en donde las variables binarias están asociadas con un punto discreto del tablero, y un tipo de pieza. Con este modelo se resuelve a optimalidad instancias más grandes de problemas de anidación. Hacen alusión que hasta el momento no hay soluciones optimas para la anidación de más de siete piezas.

En el 2014 [45], abordan el embajalade de figuras poligonales (no convexas), por medio de un algoritmo genético unido a una regla de colocación (inferior izquier-

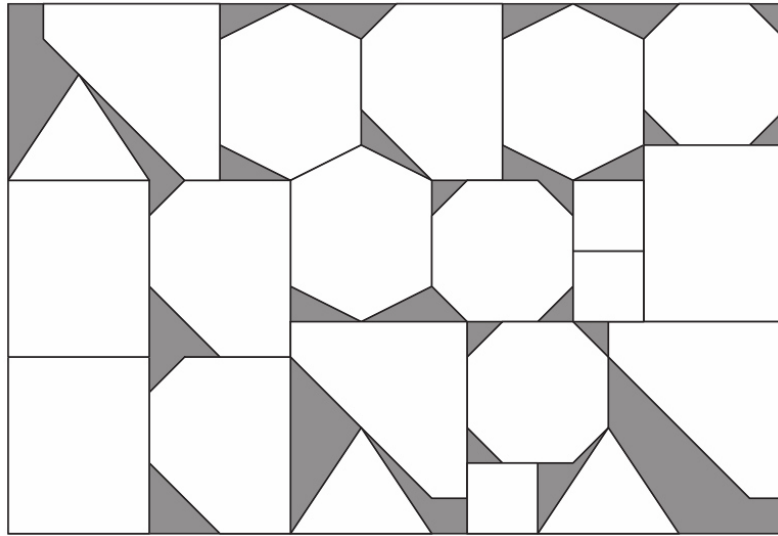


Figura 3.7: Empaquetamiento irregular

da). Hacen una estrategia de mejora en la cual cambian los polígonos más estrechos entre sí. En donde prueban este enfoque con instancias reportadas en la literatura y un caso de estudio en la industria textil. Proponen trabajar en modelos de programación lineal para la compactación de este tipo de empaquetamiento.

En [46], Desarrollan un algoritmo que utiliza la idea de la diferencia entre el área de una colección de polígonos y el área del casco convexo. Trabajando el empaquetamiento de figuras irregulares en un contenedor irregular y regular. La asignación en el contenedor se realiza por medio de pruebas de factibilidad (la prueba de ángulo, prueba con destino, la inclusión y la prueba de punto de intersección de polígonos). Los casos conocidos de la literatura son probados, en donde se obtienen resultados competitivos. En figura 3.7, se muestra el empaquetamiento de figuras irregulares [47].

En el 2015 [48], Trabajan en crear una configuración compacta de elementos bidimensionales dentro de un recipiente rectangular sin solapamiento. En dicho caso la longitud del recipiente es variable y se permite cuatro diferentes orientaciones para los elementos. Protegen la infactibilidad en traslapes de los elementos con una heurística constructiva, la cual va colocando un elemento a la vez. Se usa un

algoritmo de recocido simulado para controlar la secuencia de introducción en el contenedor así como guiar la búsqueda sobre espacios de búsqueda. Proponen varias heurísticas para atacar este problema, los cuales son probados con instancias de la literatura. Encontraron que la densidad de disposición y el tiempo de ejecución están relacionados con la heurística de colocación adaptada.

En [49], Generán un procedimiento de búsqueda adaptativa aleatoria goloza (GRASP) para el problema de empaquetamiento de figuras irregulares. Dicha implementación no depende de la forma de la pieza, siendo capaz de embalar hasta 30 objetos de siete diferentes tipos a optimalidad. Igualmente como muchos autores comparan los resultados con los reportados en la literatura. Este enfoque mejoró 9 de 16 casos probados, para los demás casos se obtuvo una brecha (Gap) de 2.4%, además de las ideas usadas en el preprocesamiento permiten que el algoritmo sea más rápido y presente mejores resultados. Finalmente proponen mejorar el método de búsqueda local con una metodología de búsqueda tabu.

En [47], proponen un modelo semicontinuo entero mixto para el problema de empaquetamiento bidimensional de formas irregulares. En donde el eje  $Y$  es discretizado pero el eje  $X$  es continuo. Este enfoque permite encontrar soluciones óptimas para problemas de pequeños y hacer frente a los de gran envergadura. Como es de esperarse la solución óptima para modelos discretos depende de la etapa de discretización que se está utilizando.

En los anteriores párrafos se ha visto, las diferentes estrategias usadas para clasificar los problemas de empaquetamiento, Los problemas más estudiados así como los trabajos relacionados en el empaquetamiento de objetos regulares e irregulares, En los siguientes párrafos se hará énfasis en las diferentes aplicaciones de esta estructura matemática.

### 3.3 ALGUNAS APLICACIONES DE EMPAQUETAMIENTO

En esta sección se hará mención a la utilización de ideas o modelos matemáticos para resolver problemas de empaquetamiento usadas por profesionales alejos a la ingeniería de sistemas o investigación de operaciones, ingeniería de producción o ingeniería industrial.

En [50], utilizan un modelo de empaquetamiento para la generación de supercapacitores dado a la necesidad de satisfacer la creciente demanda de contenedores de alta potencia en dispositivos renovables dado que tienen límite de uso extendido en comparación con las baterías tradicionales. Dicho modelo evidencia el impacto significativo de los factores geométricos, arraigados principalmente en tres parámetros:

- Distribución del tamaño del poro.
- Tamaño iónico.
- Volumen de poro.

Teniendo como variable de respuesta la capacitancia gravimétrica del material. En la figura 3.8, se presenta el embalaje de iones para desarrollar un supercapacitor, en donde dependiendo del tamaño del poro se tiene diferentes respuestas siendo redistribuidas en cinco secciones [50].

En [51], presenta algunas de las limitaciones y consecuencias del cierre de embalaje en la geometría de los materiales filamentosos o columnares que tienen texturas poco comunes. Demostrando una fuerte conexión entre la geometría de interfilamento y la geometría de las superficies no euclidianas.

En [52], investigan el efecto de la densidad del empaquetamiento geométrico en la extracción de luz de nitruro III, en emisores de luz con matrices de microesferas

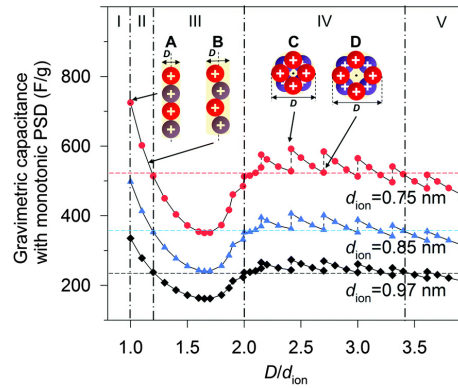


Figura 3.8: Embalaje de inones

y la relación de diámetro. Los resultados muestran la importancia de tener un hexágono así como un empaquetamiento compacto en la configuración de la matriz de microesferas monocapa para lograr la máxima eficacia de la extracción. En la figura 3.9, se muestra la radiación luminosa de campo lejano de los patrones en los LED con hexagonal a) y b), mientras que c), d) son arreglos de microesferas monocapa. Estos dos geometrías de embalaje tienen diferentes exposiciones en sus diagramas de radiación, lo que implica la mejora de la intensidad de la luz en la dirección normal y un angular más grande en la distribución en comparación con los LED planares.

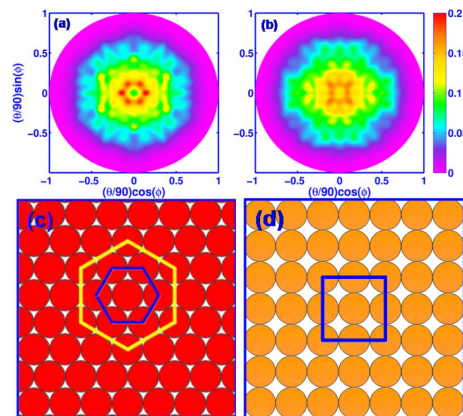


Figura 3.9: Electronica

En [53], Identifican algunos de los patrones que permiten a una célula mostrar morfologías diversas así como estructuras dinámicas durante el desarrollo. Siendo dichos patrones similares al empaquetamiento rectangular en epitelios revelando un



procedimiento para la generación de estructuras altamente ordenadas durante el desarrollo de la célula.

En [54], Se presenta un modelo para el cambio continuo en el dominio poroso geométrico así como la permeabilidad produciendo la filtración de una membrana, en donde la densidad del empaquetamiento se convierte en un factor significativo en la transferencia de masa.

En la Figura 3.10, se esquematiza las condiciones de contorno asociadas para la representación del trabajo, en donde se estudia la densidad del empaquetamiento y su significancia sobre el crecimiento de la torta espacial a lo largo de la fibra. Llamando el interés de los modelos que se describen en los flujos y el crecimiento de la torta, convirtiéndose en herramientas eficientes para analizar el efecto de la geometría del dispositivo de filtración, el rendimiento filtración entre otros.

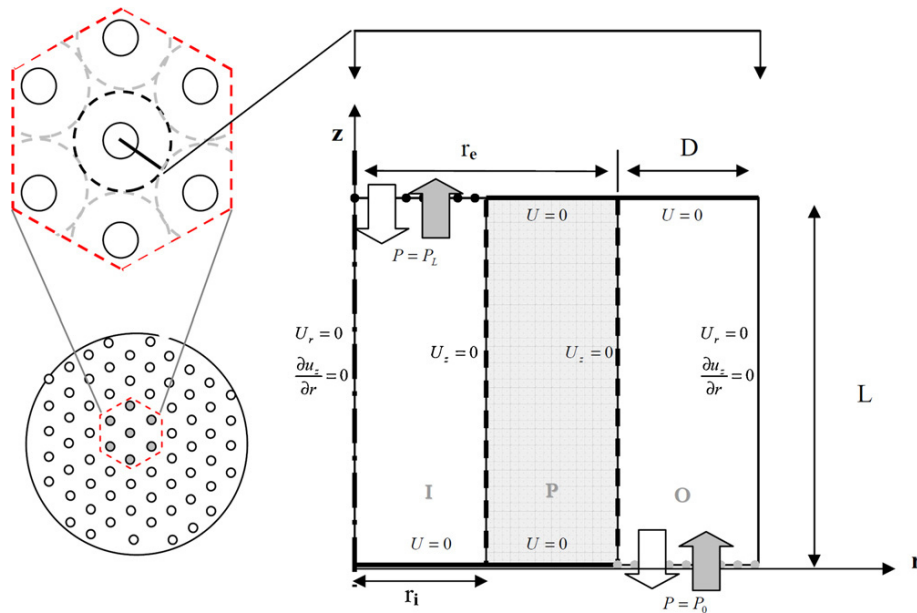


Figura 3.10: Modelando el efecto de la densidad

Uno de los usos de los modelos de empaquetamiento, más conocidos están focalizadas en las labores que desarrollan en las industrias madereras como textiles. En donde se requiere cortar cierta producto por ejemplo madera con la finalidad de maximizar la utilización del recurso. Los problemas de corte tienen una pequeña di-

ferencia a comparación de los problemas de empaquetamiento siendo está la división tipo guillotina en el recurso que se está seccionando [25].

En la figura 3.11, se presenta el corte de un material circular, en secciones rectangulares. En donde a) es la solución obtenida bajo una heurística y b) es el incumbente encontrado por medio de una metheurística.

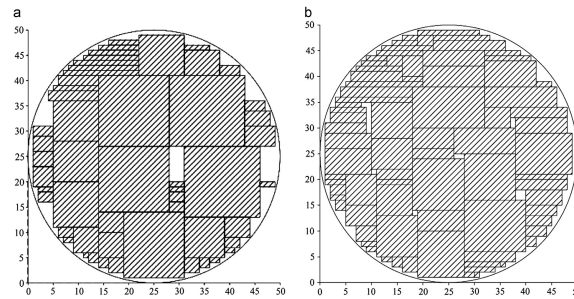


Figura 3.11: Corte de bloques de madera

Es claro que un modelo de empaquetamiento es posible usarlo en la construcción de edificaciones, por supuesto sería tridimensional. En [55], muestra un panorama general de las edificaciones arquitectónicas que están relacionadas con figuras poliédricas. La figura 3.12, presenta diferentes edificaciones actuales que son formadas bajo esquemas geométricos.



Figura 3.12: Arquitectura

Otra de las aplicaciones es el cubrimiento de zonas terrestres por torres de telecomunicación. En donde se tiene el objetivo de con el menor numero de torres posible abastecer al mayor numero posible de personas de una determinada localidad [56].

## CAPÍTULO 4

# FORMULACIÓN MATEMÁTICA

---

*Solo triunfa en el mundo quien se levanta y busca  
a las circunstancias y las crea si no las encuentra.*

**Bernard Shaw**

### Bosquejo

---

<b>4.1. Modelo matemático . . . . .</b>	<b>36</b>
4.1.1. Función Objetivo . . . . .	37
4.1.2. Restricciones . . . . .	37

---

Los parámetros del modelo son cantidad de objetos embalados en un contenedor rectangular, cantidad de objetos mínimos y máximos empaquetados, así una restricción que no permite que los círculos se salgan del contenedor y se intersecten entre ellos. Las cuales serán detalladas más adelante.

#### Indices de arreglos

- i. Número de puntos sobre el contenedor.
- k. Tipo de objetos iguales de escalas similares.

#### Parámetros

- $m_k$ . Cantidad de objetos mínimos que se deben embalar.
- $M_k$ . Cantidad de objetos máximos que se deben embalar.

$R_k$ . Radio del objeto  $k$ .

$N_{ik}$ . Cantidad de puntos totales en la malla siendo definidos

$j, l : i \neq j, d_{ij} \leq R_k + R_l$

### Parámetros de preprocesamiento

$d_{ij}$ . Distancia euclidiana entre el punto  $i$  y  $j$ .

$\alpha_{ij}^k$ , está definido según:

$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} d_{ij} < R_k & = 1 \\ d_{ij} \geq R_k & = 0 \end{cases}$$

### Variables de decisión

$x_i^k$ . Indica si en el punto  $x_i$  se coloca el objeto de dimensiones  $k$ .

$x_j^l$ . Indica si en el punto  $x_j$  se coloca el objeto de dimensiones  $l$ .

### La naturaleza de las variables

$x_i^k \in \{0, 1\}$ , Siendo un modelo de programación entera

## 4.1 MODELO MATEMÁTICO

Maximizar

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} R_k^2 x_i^k \quad (4.1)$$

Sujeto a:

$$m_k \leq \sum_{i \in I} x_i^k \leq M_k \quad k \in K \quad (4.2)$$

$$\sum_{k \in K} x_i^k \leq 1 \quad i \in I \setminus F \quad (4.3)$$

$$R_k x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{i,j} \quad i \in I, k \in K \quad (4.4)$$

$$x_i^k + x_j^l \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K (j, l) \in N_{ik} \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \alpha_{ij}^k x_j^k \leq 1 \quad i \in I \quad (4.6)$$

$$x_i^k + \sum_{j: d_{ij} \leq R_k} x_j^k \leq 1 \quad i \in I, k \in K \quad (4.7)$$

$$x_i^k \in \{0, 1\} \quad i \in I, k \in K \quad (4.8)$$

### 4.1.1 FUNCIÓN OBJETIVO

La función objetivo consta de una parte, en la cual se va sumando el area del objeto  $k$  embalado, en el punto  $i$ .

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} R_k^2 x_i^k$$

### 4.1.2 RESTRICCIONES

La primera restricción del modelo hace referencia a la cantidad mínima y máxima de objetos tipo  $k$ , empaquetados en el contenedor rectangular.

$$m_k \leq \sum_{i \in I} x_i^k \leq M_k \quad k \in K$$

La segunda restricción protege que a lo máximo para cada punto de malla se coloque un objeto de tipo  $k$ , se excluye de está posible asignación a los puntos ubicados en la frontera del contenedor.

$$\sum_{k \in K} x_i^k \leq 1 \quad i \in I \setminus F$$

La tercera restricción está vinculada al cuidado de que el objeto tipo  $k$ , no se salga por arriba, abajo, izquierda o derecha del contenedor. Está es una restricción

de frontera que varia en consideración de la estructura del contenedor

$$R_k x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{i,j} \quad i \in I, k \in K$$

La cuarta restricción es la que determina que forma tendrá el objeto embalado, considerando la normas euclidianas mostradas en la tabla 4.1. Dichas normas son usadas como un preprocesamiento, para darle las bondades de los modelos lineales enteros al modelo usado en está investigación además de impedir el translope entre objetos.

$$x_i^k + x_j^l \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K (j, l) \in N_{ik}$$

Objeto	Norma
Cuadrado	Max $\{  x ,  y  \}$
Rombo	$ x  +  y $
Círculo	$\sqrt{x^2 + y^2}$
Octágono	Max $\{  x ,  y , (1\sqrt{2})( z_1  +  z_2 ) \}$

Tabla 4.1: Normas de diferentes figuras

La quinta restricción es una desigualdad validad que conside

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \alpha_{ij}^k x_j^k \leq 1 \quad i \in I$$

Finalmente la sexta restricción es otra desigualdad validad; en [32], se realiza una detallada explicación de estas desigualdad.

$$x_i^k + \sum_{j: d_{ij} \leq R_k} x_j^k \leq 1 \quad i \in I, k \in K$$

#### 4.1.2.1 ANIDACIÓN

Hasta donde se ha descrito el modelo no se permite que un objeto, que se está empaquetando este contenido en otro objeto de menor escala. Para lo cual es necesario

cambiar el conjunto factibles de puntos candidatos  $N$ , Dado que la restricción dos solo permite por cada punto de malla o lo más un objeto suscripto en el, para permitir que se genere la anidación de los objetos se requiere adicionar un caso al preprocesamiento que se hace para formar la cuarta restricción.

$$\Omega_{ik} = \{j, l : i \neq j, R_k - g_k - R_l < d_{ij} < R_k + R_l, R_k - g_k > R_l\} \quad (4.9)$$

## CAPÍTULO 5

# MÉTODOLOGIA

---

*Todos los días Dios nos da un momento en el que es posible cambiar todo lo que nos hace infelices. El instante mágico es el momento en que un 'sí' o un 'no' pueden cambiar toda nuestra existencia.*

**Paulo Coelho**

### Bosquejo

---

<b>5.1. Equipo computacional</b>	<b>41</b>
<b>5.2. Implementación computacional</b>	<b>41</b>
<b>5.3. Supuestos considerados</b>	<b>41</b>
<b>5.4. Diseño de experimentos</b>	<b>42</b>
5.4.1. Sin telescopía	42
5.4.2. Telescopía	42
<b>5.5. Generación de diferentes objetos</b>	<b>42</b>

---

En el presente capítulo se describe los diferentes supuestos planteados para desarrollar el trabajo investigativo, así como las herramientas computacionales usadas para resolver el modelo de empaquetamiento.



## 5.1 EQUIPO COMPUTACIONAL

Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora con un procesador Intel (R) Xeon (R) CPU E3-1245 v3 @ 3.4GHz con 8 nucleos, con una memoria RAM de 16 GB en un sistema operativo Windows 7 de 64 bits.

## 5.2 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Para la implementación del modelo de empaquetamiento se uso el entorno de desarrollo integrador proporcionado por Microsoft Visual Studio 2012, en lenguaje de programación de C++, usando como optimizador la librería de CPLEX 12.61.

## 5.3 SUPUESTOS CONSIDERADOS

Para la generación de la estructura experimental de la investigación se asumio que los residuos generados por los factores:

1. Tamaño del contenedor entre 200 y 300 unidades metricas.
2. La cantidad de puntos en la malla entre 27 y 35.
3. La cantidad de objetos diferentes empaquetados entre 12 a 14.

Siguen una distribución normal  $(\mu, \sigma^2)$  [57].

## 5.4 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

### 5.4.1 SIN TELESCOPIA

Se uso un diseño factorial completo con dos factores de control y con dos replicas por tratamiento. Generando 24 diferentes tratamientos, En donde los factores de control son:

1. Tipo de objeto embalado con cuatro niveles (Circulos, cuadrados, Rombo y Obtagono).
2. Desigualdades validas con tres niveles (Quinta , sexta restricción y sin desigualdades validadas ).

### 5.4.2 TELESCOPIA

Para este caso solo se tuvo un factor con cuatro niveles siendo este el tipo de objeto empaquetado en el contenedor [57].

## 5.5 GENERACIÓN DE DIFERENTES OBJETOS

Para tener objetos de distintos tamaños se considero que el objeto de menor tamaño  $R_0$ , estuviera proporcionado para el tratamiento de acuerdo a:

$$R_0 = \frac{Ta}{6K} \quad (5.1)$$

Siendo  $Ta$  el tamaño del contenedor rectangular y  $K$  el numero de objetos diferentes a embalar para el tratamiento, dichos factores son generadas aleatoriamente

en los rangos especificados en la sección 4.3. Para los restantes objetos  $j$ , se uso una de las ideas expresadas en [www.packomania.com](http://www.packomania.com) .

$$T_j = (R_0)(j + 0.2) \quad (5.2)$$

Finalmente para asignar una cota a la cantidad existente de cada objeto, se tiene como minimo para todos los casos de un objeto de tamaño  $j$  sea colocado en el contenedor, pero la cantidad maxima del objeto  $j$  está limitada entre 50 y 200. Dicho cota es asignada aleatoriamente.

## CAPÍTULO 6

# EXPERIMENTACIÓN

---

*El hombre que tiene amigos ha mostrarse  
amigo; y amigo hay más unido que un hermano*

**Prov. 18:24**

### Bosquejo

---

<b>6.1. Telescopia . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>6.2. Sin telescopia . . . . .</b>	<b>48</b>

---

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos al embalaje de objetos regulares similares de diferente tamaño sobre un contenedor rectangular.

## 6.1 TELESCOPIA

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos del empaquetamiento de objetos permitiendo la telescopía, anidamiento o superposición de un objeto de menor tamaño en uno mayor. Se generaron seis experimentos independientes para ver cómo variaba el GAP a lo largo del tiempo (30, 60, 120, 240, 480 y 600 min) para el caso sin telescopía.

En la figura 6.1, se muestran los resultados de los tiempos obtenidos al momento

de hacer el embalaje de círculos, cuadrados, rombos y octágonos después de 600 minutos de ejecución del solver. En donde A) presenta la caja de bigotes de los resultados y B) la generación de intervalos de confianza (suponiendo normalidad) al 95%. Al estar los intervalos contenidos unos en otros (translapados), se espera encontrar que no exista diferencia estadística entre los diferentes objetos.

Pareciera existir diferencia en las medias de los grupos analizados, pero para estar más seguros se usó una ANOVA de una vía para comprobar dicha hipótesis. Con la cual por medio de la prueba F 0.747 y el valor P (0.421) de dicho estadígrafo, se puede afirmar con un 95 % de confianza que existe evidencia significativa para aceptar la hipótesis  $H_0$ , con lo cual se puede afirmar que después de 600 minutos de ejecución del solver al hacer el empaquetamiento de los objetos se obtendrán medias similares con un 95 % de confianza estadísticamente. Posteriormente se verificó si los residuos de esta ANOVA de una vía siguen una distribución normal, usando la prueba de Shapiro-Wilk obteniendo un valor P de 0.1909, con lo cual se puede afirmar que los residuos de los datos siguen una distribución normal.

Dicho fenómeno puede estar debido al considerable tiempo de trabajo del solver haciendo que estadísticamente los resultados sean similares para los tipos de objetos empaquetados y el crecimiento del modelo en el algoritmo ramificación y corte.

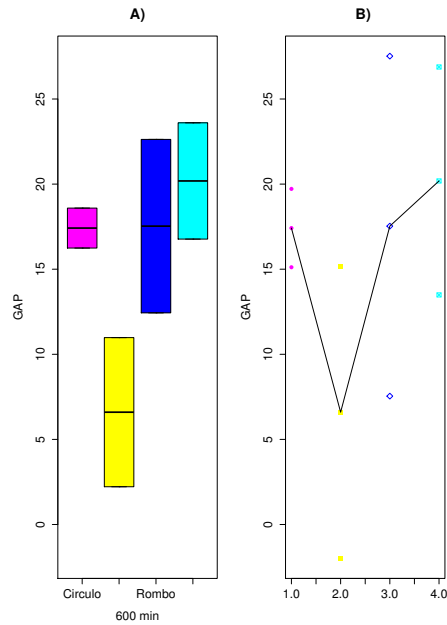


Figura 6.1: Resultados del empaquetamiento de diferentes objetos por 600 minutos

Las figuras 6.2 y 6.3, presentan los resultados obtenidos del embalaje de círculos y octágonos después de 600 minutos en procesamiento computacional. Los diferentes colores existentes en las figuras representan los distintos tamaños del objeto. Siendo el GAP obtenido para la figura 6.2 de 16.24 %.

El hecho de presentar muchos orificios es originado principalmente en el agotamiento de los círculos de menor tamaño, en los casos círculos, octágonos, rombos y cuadrados el solver satura el contenedor con todos los objetos existentes de menor tamaño, en donde ya no se puede colocar objetos de mayor tamaño y no existe objetos pequeños para ser colocados. Este fenómeno es debido a la existencia de unas débiles cuotas inferiores para cada objeto de tamaño  $j$ .

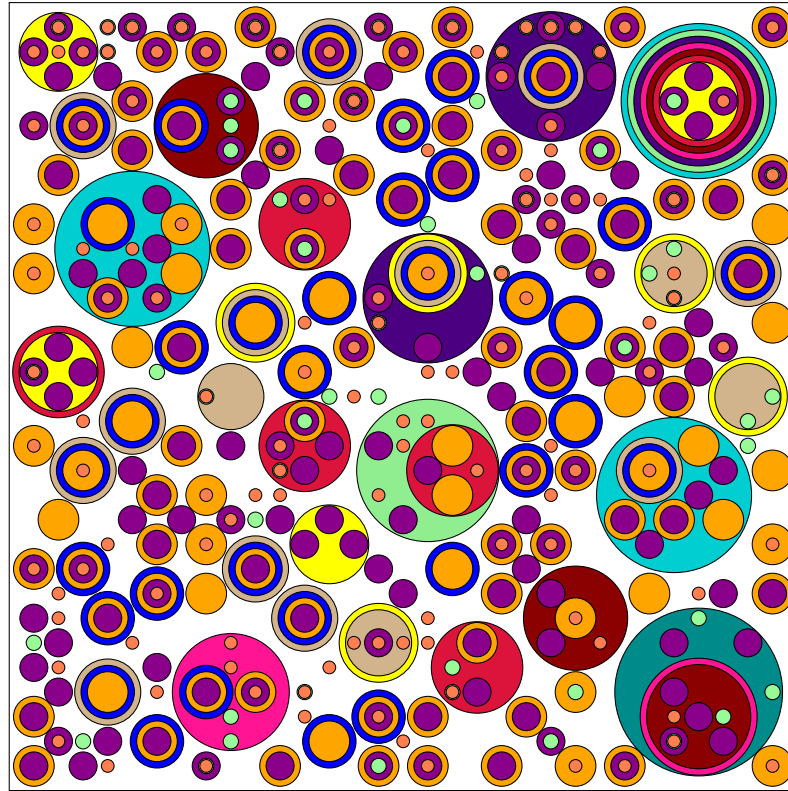


Figura 6.2: Empaquetamiento con telescopía de círculos

El GAP obtenido para la figura 6.3 es de 16.76%. Tanto los resultados obtenidos (GAP), como la presencia de zonas en blanco sin contener algún objeto en ella, puede ser debido al agotamiento del objeto con dimensiones idóneas para ser colocado en dicha ubicación y así no ser posible de mejorar los resultados. Es de esperarse que los resultados se han totalmente diferentes si la cantidad disponible del tamaño  $j$  por objeto, fuera infinito o al menos mayor al actual.

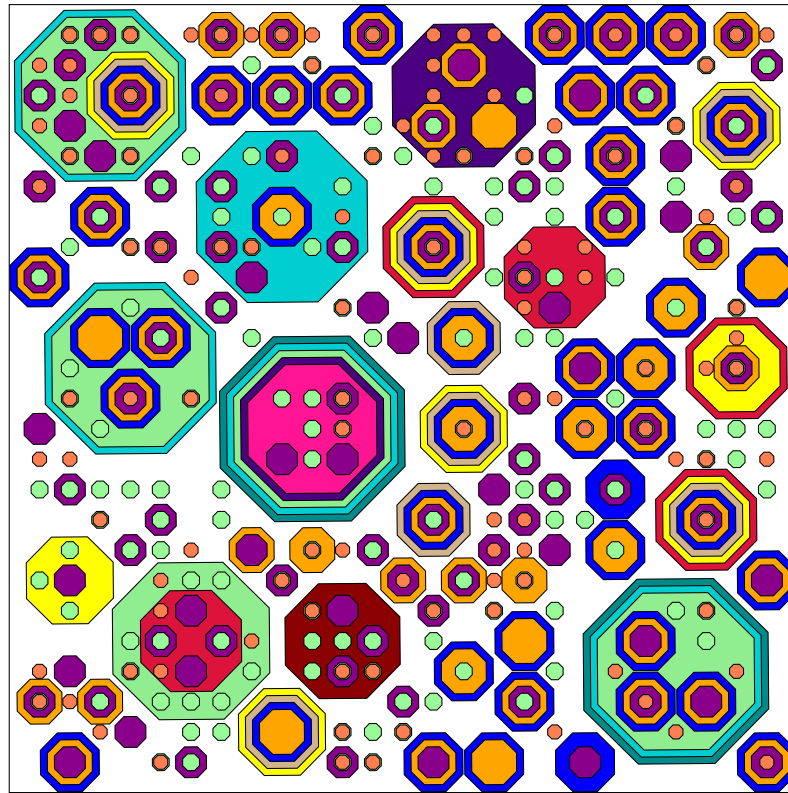


Figura 6.3: Empaquetamiento con telescopía de octagonos

## 6.2 SIN TELESCOPIA

La figura 6.4, muestra el embalaje de círculos diferentes después de 600 minutos usando el primer grupo de desigualdades validadas. Dicha figura presenta un GAP de 26.89 %.

La figura 6.5 A), muestra el acomodo de octagonos en el contenedor rectangular con un GAP de 11.52 % . El hecho de no permitir la telescopía permite obtener resultados mejores a comparación de cuando se permite, dado este fenómeno es debido principalmente por el crecimiento combinatorio del tratamiento  $i$  analizado. Mientras que la figura 6.5 B) , presenta el empaquetamiento de rombos dejando ejecutar el solver 600 minutos, dicha configuración presenta un GAP de 10.92 %.

La figura 6.6, muestra el empaquetamiento de cuadrados a los 600 min de



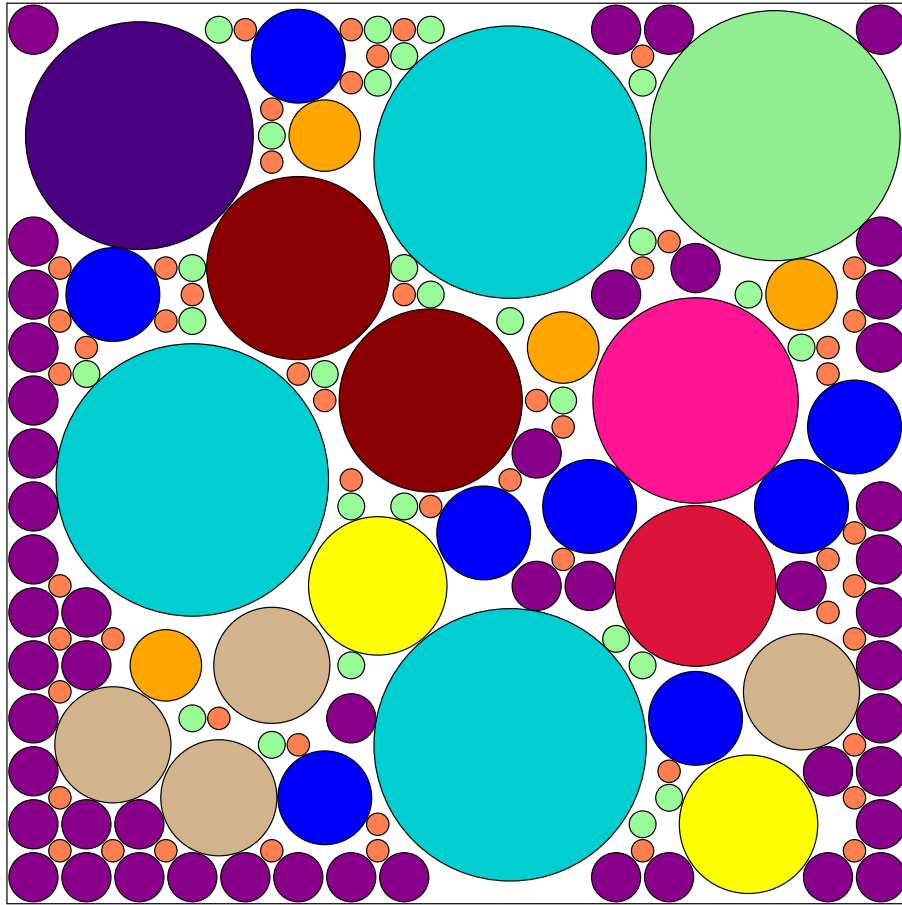


Figura 6.4: Empaquetamiento de círculos a 600 min

procesamiento del solver, obteniendo un GAP de 1.22 %.

En la figura 6.7, se presenta los resultados obtenidos en la experimentación para los diferentes objetos empaquetados en diferentes intervalos de tiempo. Para determinar el efecto existente en el tipo de objeto embalado y la estrategia de desigualdades validas usada por tratamiento, se usó una ANOVA para los instantes de tiempo en donde los residuos del modelo estadístico usado sigue una distribución normal.

Al momento de reportar el GAP para 30 min de procesamiento del solver, se obtuvo el estadístico  $F$  de 0.38 y 1.94 con valores  $P$  de 0.768 y 0.186 (tabla 6.1), para las diferentes estrategias de desigualdades validas usadas y los objetos empacados respectivamente. Con lo cual se puede afirmar que no existe evidencia suficiente para

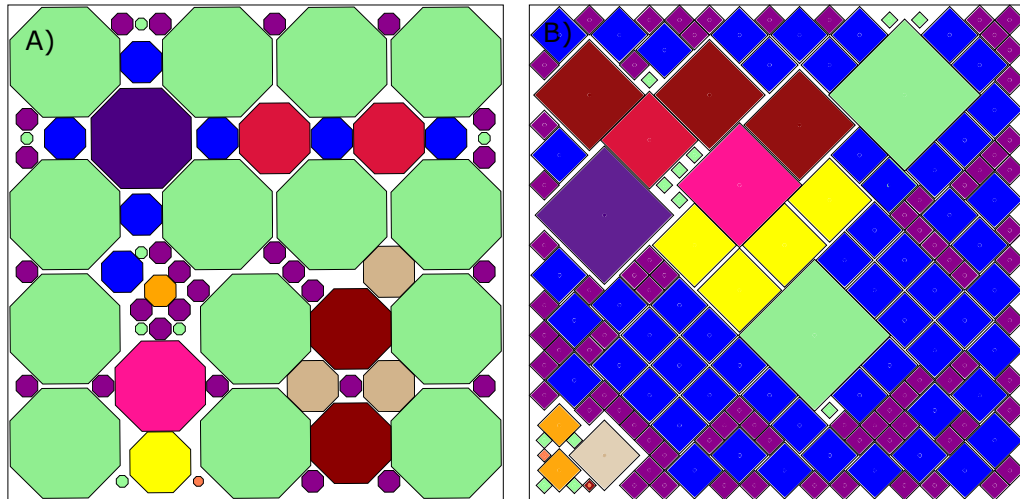


Figura 6.5: Embalaje de octagonos y rombos

aceptar  $H_a$ , por lo cual sin importar el factor de control usado la media del GAP obtenido estadísticamente será igual. Calculando la prueba de Anderson-Darling para los residuales, se obtuvo un estadístico de 0.114 y un valor P 0.990.

Tabla 6.1: ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 30 min

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
TipoObjeto	3	0.1303	0.04343	0.38	0.768
DesiValidas	2	0.4414	0.22072	1.94	0.186
Interacciones de 2	6	0.3937	0.06561	0.58	0.742
DesiValidas*TipoObjeto	6	0.3937	0.06561	0.58	0.742
Error	12	1.3656	0.1138		
Total	23	2.331			

GL: grados de libertad, SC Ajust: Suma de cuadrados ajustados

MC Ajust: cuadrado medio ajustado

En la tabla 6.2, describe la ANOVA realizada para un tiempo de ejecución de 60 min. El estadístico  $F$  para el tipo de objeto es de 1.12 mientras que para las de-

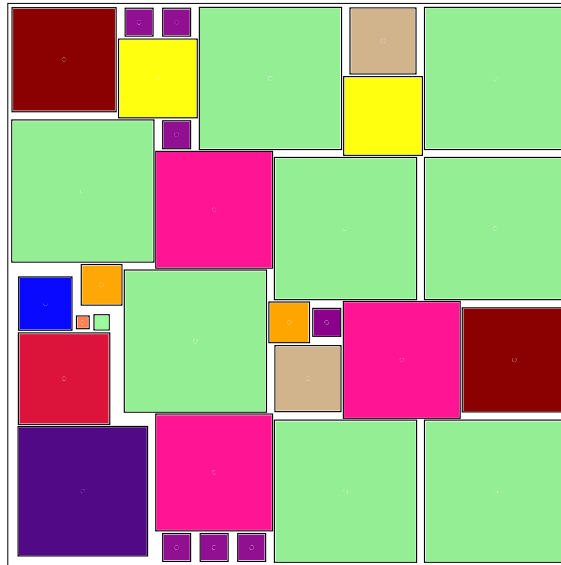


Figura 6.6: Empaquetamiento de cuadrados a los 600 min

sigualdades validas de 2.53 y la iteración de 0.38, teniendo un valor P de 0.378, 0.121 y 0.875 respectivamente. No existe evidencia suficiente para aceptar  $H_a$ , aceptando por consiguiente  $H_o$ , en donde ninguno de los factores analizados contribuye significativamente a la variables respuesta analizada (GAP). Comprobando la distribución de los residuos del modelo estadístico usado, se uso la prueba de Anderson-Darling obteniendo un estadístico de 0.267 y un valor P de 0.657, afirmando que los residuos siguen una distribución normal.

Tabla 6.2: ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 60 min

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
TipoObjeto	3	0.3807	0.1269	1.12	0.378
DesiValidas	2	0.5717	0.28583	2.53	0.121
Interacciones de 2	6	0.2605	0.04341	0.38	0.875
DesiValidas*Tipobjeto	6	0.2605	0.04341	0.38	0.875
Error	12	1.354	0.11283		
Total	23	2.5668			

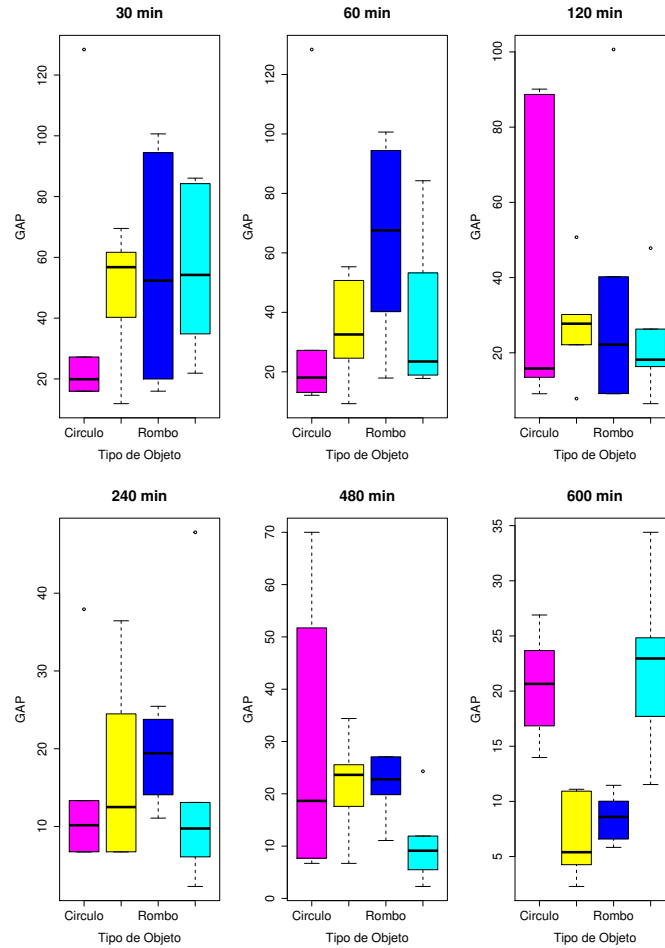


Figura 6.7: Caja de vigotes por objeto por diferentes tiempos

La tabla 6.3, muestra como ha sucedido a los 30 y 60 min, los factores de control desigualdades validas (estadístico 3.25, valor P 0.074) y tipo de objetos (estadístico 0.45, valor P 0.722), no son significativos estadísticamente para la variable respuesta (GAP). El estadístico de Anderson-Darling es 0.613 y valor P 0.098, afirmando que los residuos siguen una distribución normal.

Tabla 6.3: ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 120 min

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
TipoObjeto	3	0.09447	0.03149	0.45	0.722
DesiValidas	2	0.4559	0.22795	3.25	0.074
Interacciones de 2	6	0.29199	0.04867	0.69	0.659
DesiValidas*TipoObjeto	6	0.29199	0.04867	0.69	0.659
Error	12	0.84112	0.07009		
Total	23	1.68349			

La tabla 6.4, presenta concordancia a los análisis realizados a 30, 60 y 120 min , los factores de control desigualdades validas (estadístico 1.93, valor P 0.187) y tipo de objetos (estadístico 0.16, valor P 0.923), no son significativos estadísticamente para la variable respuesta (GAP) y tampoco la interacción entre estos dos factores de control. El estadístico de Anderson-Darling es 0.175 y valor P 0.914, afirmando que los residuos siguen una distribución normal.

Tabla 6.4: ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 240 min

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
TipoObjeto	3	0.0080	0.0027	0.160	0.923
DesiValidas	2	0.0653	0.0327	1.930	0.187
Interacciones de 2	6	0.0349	0.0058	0.340	0.900
DesiValidas*TipoObjeto	6	0.0349	0.0058	0.340	0.900
Error	12	0.2026	0.0169		
Total	23	0.3108			

GL: grados de libertad, SC Ajust: Suma de cuadrados ajustados

MC Ajust: cuadrado medio ajustado

En la tabla 6.5, presenta la ANOVA para el instante que el solver lleva 480 min de labor. El estadístico  $F$  calculado para el tipo de objeto es 18.18 mientras que para el factor de desigualdades validas, siendo los valores P para dichos estadísticos de 0.000 y 0.295 respectivamente. Con lo cual no hay evidencia suficiente para aceptar  $H_a$  para el tipo de objeto y  $H_o$  para las desigualdades. Usando una confianza del 95 %, se puede afirmar que solo la forma del objeto embalado contribuye significativamente en la variación del GAP a los 480 min. Utilizando la prueba de Shapiro-wilk se probó que los residuos generados del modelo estadístico presentan un valor P de 0.3011, Pudiendo afirmar con un 95 % que los residuos están distribuidos normalmente.

Tabla 6.5: ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 480 min

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
TipoObjeto	3.0000	0.1180	0.0393	18.1800	0.0000
DesiValidas	2.0000	0.0059	0.0029	1.3500	0.2950
Interacciones de 2	6.0000	0.0178	0.0030	1.3700	0.3010
DesiValidas*TipoObjeto	6.0000	0.0178	0.0030	1.3700	0.3010
Error	12.0000	0.0260	0.0022		
Total	23.0000	0.1677			

GL: grados de libertad, SC Ajust: Suma de cuadrados ajustados

MC Ajust: cuadrado medio ajustado

Para el instante cuando el solver lleva 600 min de ejecución, se obtuvo un valor para el estadístico  $F$  de 1.35 y 18.18 con valor P para dichos estadísticos de 0.295 y 0.000 respectivamente, dichos valores son mostrados en la tabla 6.6. Con los cuales se puede afirmar que las desigualdades validas no tienen efecto significativo en la variación del GAP, pero son los resultados contrarios para el tipo de objeto empaquetado, siendo significativo estadísticamente.

Tabla 6.6: ANOVA para tipos de objetos embalados y diferentes desigualdades validas para 600 min

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
DesiValidas	2	0.005861	0.002931	1.3500	0.2950
TipoObjeto	3	0.118008	0.039336	18.1800	0.0000
Interacciones de 2	6	0.017832	0.002972	1.3700	0.3010
DesiValidas*TipoObjeto	6	0.017832	0.002972	1.3700	0.3010
Error	12	0.025962	0.002163		
Total	23	0.167663			

GL: grados de libertad, SC Ajust: Suma de cuadrados ajustados

MC Ajust: cuadrado medio ajustado

En la figura 6.8, el acomodo de circulos en el contenedor rectangular en donde va cambiando el tiempo de ejecución de 30 min a 600 min. Además se ha colocado la función objetivo de acuerdo al embalaje.

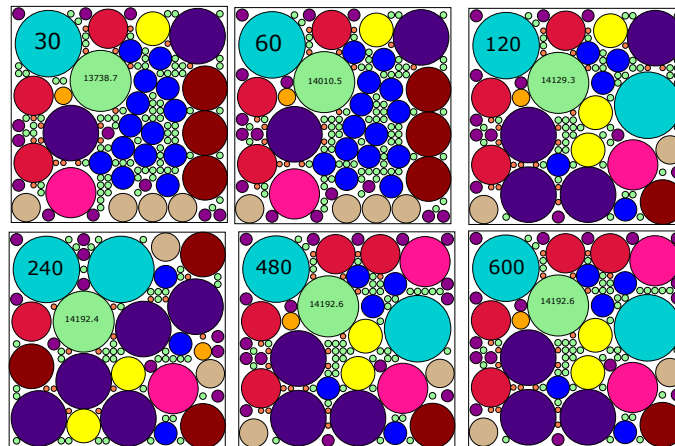


Figura 6.8: Variación del empaquetamiento a lo largo del tiempo

Una de las premisas fuertes del anterior análisis es que se considera el tiempo de visualización del fenómeno de empaquetamiento es independiente, es decir corridas por separado. En las siguientes paginas se muestra el analisis al momento de cambiar este supuesto es decir se hace toda la visualización en una corrida, por intervalos de una hora durante diez horas de corrida por instancia.

En la figura 6.9, se muestra como varia el GAP al momento de empaquetar circulos a lo largo de diez horas, discriminando el tipo de desigualdad validad usada. Siendo corte 1, la primera familia, corte 2 la segunda familia de desigualdades y finalmente sin ninguna de las anteriores usado como una muestra control. Siendo como fluctua la media pareciera que el no uso de desigualdades validas para el empaquetamiento de círculos presenta mejores resultados.

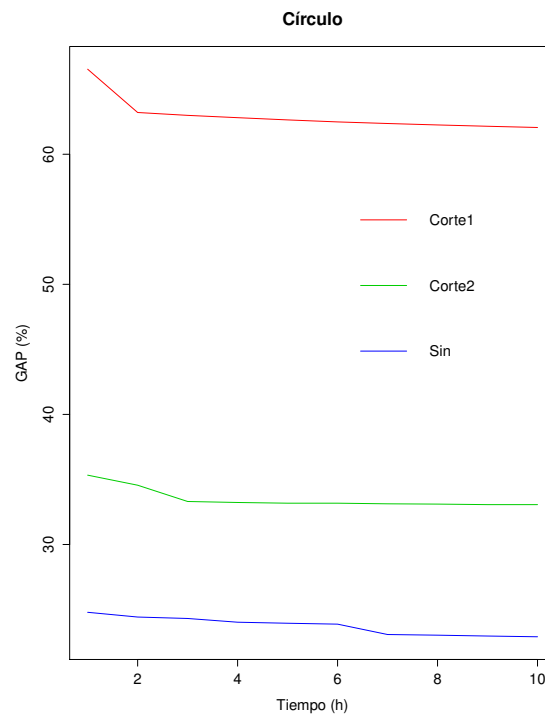


Figura 6.9: Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto círculo



En la figura 6.10, se muestra como varia el GAP al momento de empaquetar cuadrados a lo largo de diez horas, Para este objeto empaquetado la desigualdad validad dos presenta mejor desempeño medio en el GAP obtenido que las otras estrategias estudiadas.

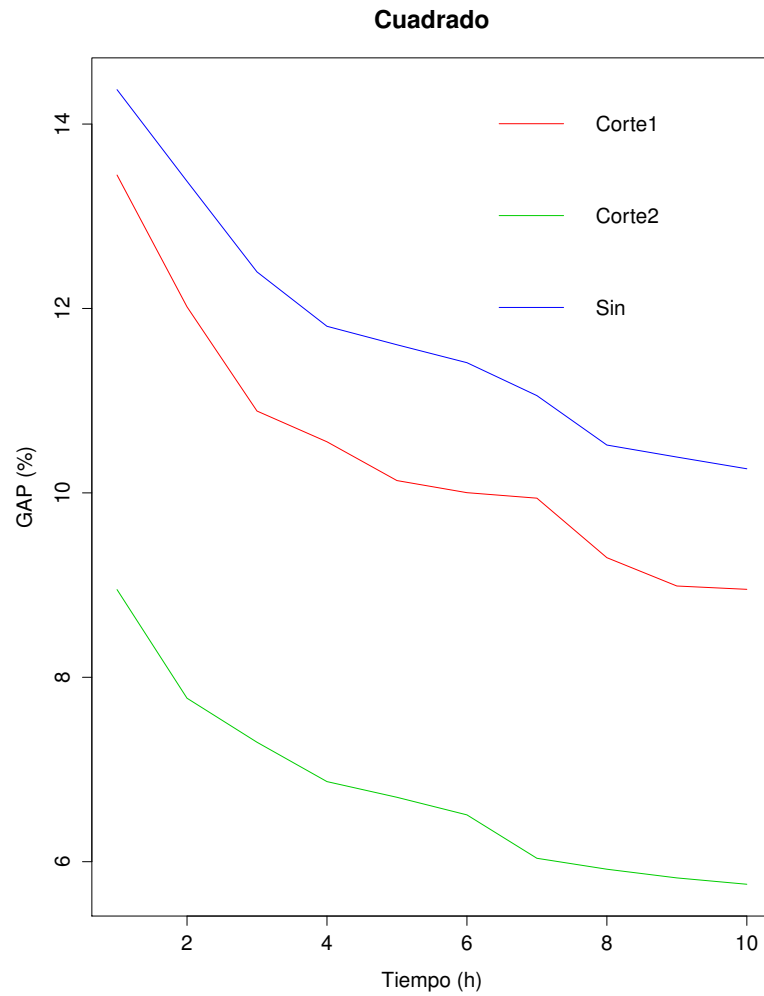


Figura 6.10: Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto cuadrado

En la figura 6.11, se muestra como varia el GAP al momento de empaquetar rombos a lo largo de diez horas, En donde la desigualdad 2 y el no uso de las desigualdades validas, presentan más proximidad en el desempeño medio obtenido.

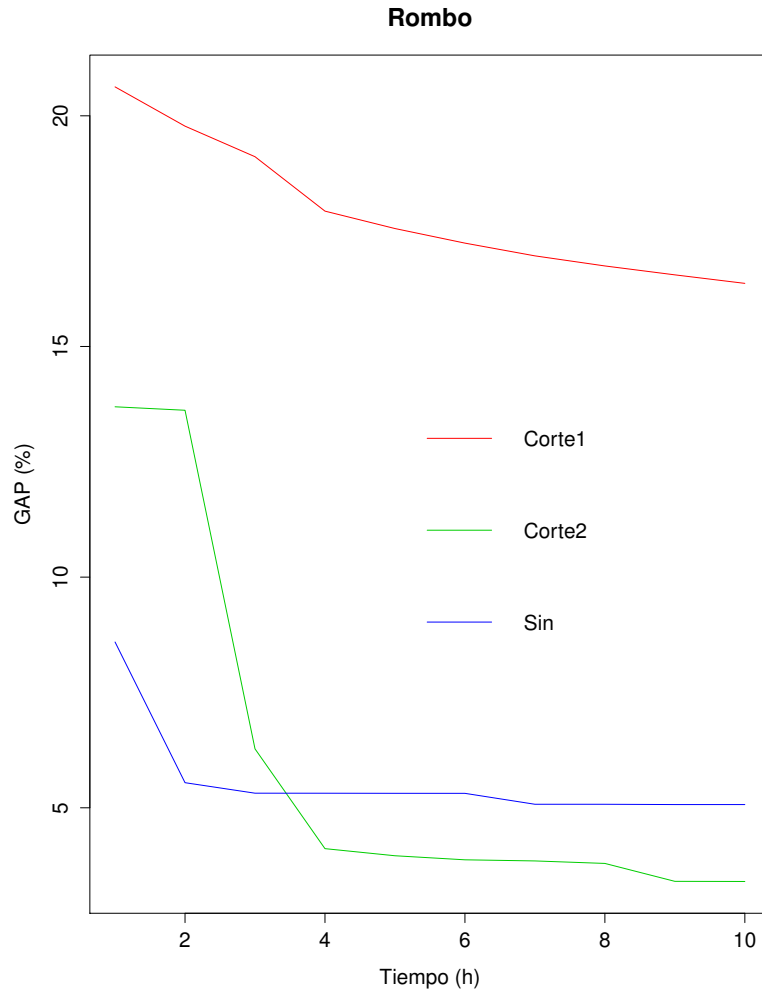


Figura 6.11: Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto rombo

En la figura 6.12, se muestra como varia el GAP al momento de empaquetar octogonos a lo largo de diez horas, En donde la desigualdad 1 y el no uso de las desigualdades validas, presentan más proximidad en el desempeño medio obtenido. Siendo la de mejor desempeño medio la no utilización de estrategias de desigualdades validas para el modelo de empaquetamiento.

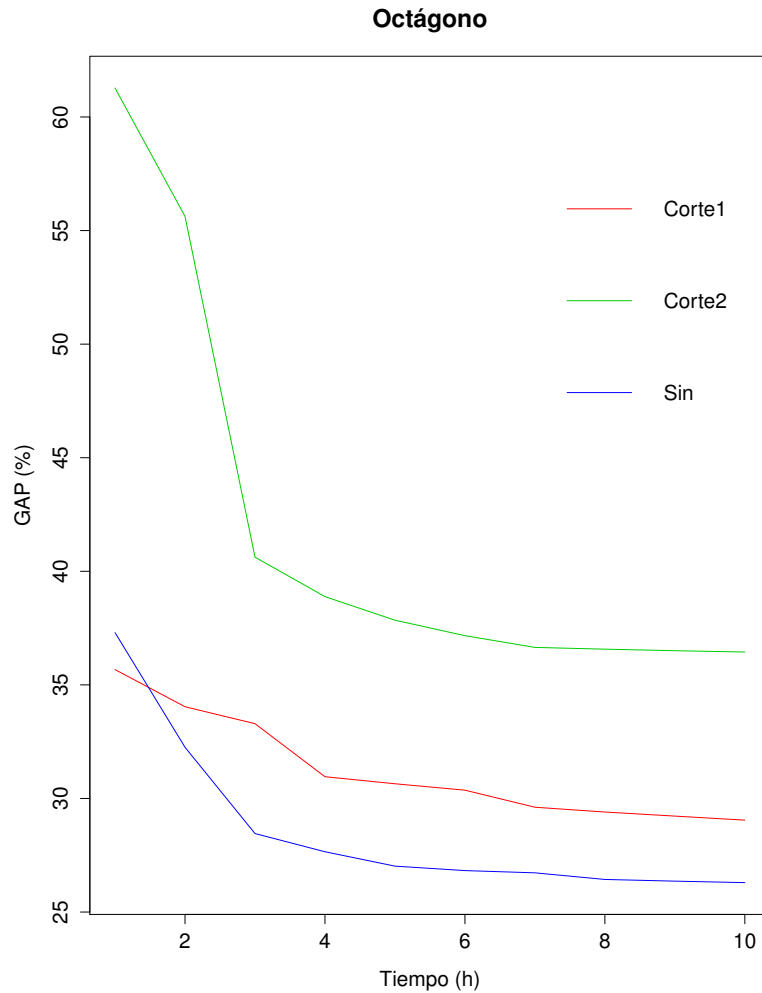


Figura 6.12: Relación del GAP a lo largo del tiempo para el objeto octágonos

En la tabla 6.7, se presenta la prueba de análisis de varianza para las primeras cinco horas de ejecución del solver. En donde en las cinco horas el tipo de objeto tiene efecto significativo en el GAP ( Valor  $P < 0.05$ ), mientras que los diferentes desigualdades validas usadas no presentan significancia estadística (Valor  $p > 0.05$ ). Esta conclusión es contraria a la mostrada anteriormente pues la media, es un parametro sesgado, pero usando pruebas estadísticas se puede concluir con mayor confiabilidad sobre el proceso analizado.

Tabla 6.7: Analisis de Varianzas para la hora 1,2,3,4 y 5

1 hora					
Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
to	3	0.551	0.184	4.550	0.024
Cut	2	0.068	0.034	0.840	0.454
to*Cut	6	0.221	0.037	0.910	0.519
Error	12	0.484	0.040		
Total	23	1.323			
2 horas					
to	3	0.494	0.165	4.630	0.022
Cut	2	0.074	0.037	1.040	0.382
to*Cut	6	0.179	0.030	0.840	0.563
Error	12	0.426	0.036		
Total	23	1.174			
3 horas					
Modelo	11	0.652	0.059	2.330	0.081
Lineal	5	0.529	0.106	4.150	0.020
to	3	0.447	0.149	5.850	0.011
Cut	2	0.082	0.041	1.610	0.241
to*Cut	6	0.124	0.021	0.810	0.583
Error	12	0.306	0.025		
Total	23	0.958			
4 horas					
to	3	0.449	0.150	5.900	0.010
Cut	2	0.077	0.038	1.510	0.260
to*Cut	6	0.127	0.021	0.840	0.565
Error	12	0.304	0.025		
Total	23	0.957			
5 horas					
to	3	0.446	0.149	5.910	0.010
Cut	2	0.076	0.038	1.510	0.261
to*Cut	6	0.125	0.021	0.820	0.572
Error	12	0.302	0.025		
Total	23	0.949			

En la tabla 6.8, presenta las restante ANOVA. En donde las conclusiones siguen siendo las mismas, Con una confianza del 95 %, se puede afirmar que solo el tipo de objeto contribuye significativamente en la variación del GAP (valor  $P < 0.05$ ), mientras que el factor de desigualdades validas no presenta significancia estadística en ningún momento analizado. Para todo el tiempo analizado los residuos generados por el modelo estadístico siguen una distribución normal (Valor  $P > 0.05$ ).

Tabla 6.8: Analisis de Varianzas para la hora 6,7,8,9 y 10

6 horas					
Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
to	3	0.44546	0.14849	5.9	0.01
Cut	2	0.07501	0.0375	1.49	0.264
to*Cut	6	0.12254	0.02042	0.81	0.58
Error	12	0.30183	0.02515		
Total	23	0.94484			
7 horas					
to	3	0.44128	0.14709	5.8	0.011
Cut	2	0.0755	0.03775	1.49	0.265
to*Cut	6	0.12528	0.02088	0.82	0.573
Error	12	0.30447	0.02537		
Total	23	0.94653			
8 horas					
to	3	0.44621	0.14874	5.84	0.011
Cut	2	0.07407	0.03703	1.45	0.272
to*Cut	6	0.12542	0.0209	0.82	0.575
Error	12	0.30586	0.02549		
Total	23	0.95155			
9 horas					
to	3	0.44955	0.14985	5.86	0.011
Cut	2	0.07279	0.0364	1.42	0.279
to*Cut	6	0.12642	0.02107	0.82	0.573
Error	12	0.3071	0.02559		
Total	23	0.95587			
10 horas					
Lineal	5	0.52161	0.10432	4.06	0.022
to	3	0.44964	0.14988	5.83	0.011
Cut	2	0.07197	0.03599	1.4	0.284
to*Cut	6	0.12621	0.02103	0.82	0.576
Error	12	0.30834	0.0257		
Total	23	0.95616			

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSIONES

---

*Nunca consideres el estudio como una obligación,  
sino como una oportunidad para penetrar  
en el bello y maravilloso mundo del sabe.*

**Albert Einstein**

### Bosquejo

---

<b>7.1. Conclusiones</b>	<b>62</b>
<b>7.2. Trabajo futuro</b>	<b>63</b>

---

## 7.1 CONCLUSIONES

En esta investigación se puede concluir que para el caso analizado de los diferentes objetos empaquetados ( círculos, cuadrados, rombos y octagonos), permitiendo la telescopia para un tiempo computacional de 600 minutos no se encuentra diferencias estadísticas en la media del GAP. Dicha afirmación se sustenta al valor P obtenido 0.421 por medio de un analisis de varianza de una via.

En el embalaje sin permitir la telescopia se notó que en los primeros 240 minutos de ejecución del solver (30,60,120 y 240), tanto las desigualdades validas usadas

como los diferentes objetos no presentan significancia estadística al 95 %, para la variable respuesta GAP (valor  $P > 0.05$ ). Dicho fenómeno no es similar a los 480 y 600 minutos en donde el tipo de objeto sí afecta significativamente al GAP (valor  $P < 0.05$ ), pudiéndose dar este patrón principalmente al crecimiento combinatorio del problema en esos instantes.

Los resultados aquí presentados son los primeros en donde se empaqueta más de 10 objetos similares de diferentes tamaño en un contenedor rectangular, dado que la gran mayoría de los trabajos restringen la cantidad de tamaños diferentes a empaquetar a 8 aunado al análisis de fluctuación del GAP a lo largo del tiempo.

## 7.2 TRABAJO FUTURO

Se espera en el futuro implementar estrategias matemáticas que permitan decomponer el problema en subproblemas y así disminuir los tiempos de ejecución necesarios para obtener el óptimo o incumbentes de alta calidad.

Usar algoritmos de inteligencia artificial para clasificar los puntos de malla con mayor probabilidad de ser usados por el objeto de tamaño  $j$  a lo largo del tiempo.

Implementar una metaheurística al problema de empaquetamiento de diferentes objetos para ser comparados con las soluciones obtenidas por las estrategias exactas.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] CO López and John E Beasley. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers. *European Journal of Operational Research*, 214(3):512–525, 2011.
- [2] Ignacio Castillo, Frank J Kampas, and János D Pintér. Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications. *European Journal of Operational Research*, 191(3):786–802, 2008.
- [3] Shuhei Morinaga, Hidenori Ohta, and Mario Nakamori. An algorithm for the circle-packing problem via extended sequence-pair with nonlinear optimization. In *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, volume 2, 2013.
- [4] Péter Gábor Szabó, Mihály Csaba Markót, and Tibor Csendes. Global optimization in geometry circle packing into the square. In *Essays and Surveys in Global Optimization*, pages 233–265. Springer, 2005.
- [5] Harald Dyckhoff. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2):145–159, 1990.
- [6] Gerhard Wäscher, Heike Haußner, and Holger Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130, 2007.
- [7] Tony Wauters, Jannes Verstichel, and Greet Vanden Berghe. An effective sha-



- king procedure for 2d and 3d strip packing problems. *Computers & Operations Research*, 40(11):2662–2669, 2013.
- [8] Stephen CH Leung, Yangbin Lin, and Defu Zhang. Extended local search algorithm based on nonlinear programming for two-dimensional irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research*, 39(3):678–686, 2012.
- [9] Andreas Bortfeldt. A reduction approach for solving the rectangle packing area minimization problem. *European Journal of Operational Research*, 224(3):486–496, 2013.
- [10] Silvano Martello and Paolo Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [11] Lijun Wei and Andrew Lim. A bidirectional building approach for the 2d constrained guillotine knapsack packing problem. *European Journal of Operational Research*, 242(1):63–71, 2015.
- [12] Glaydston Mattos Ribeiro and Luiz Antonio Nogueira Lorena. Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacturer’s pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, 34(9):2695–2708, 2007.
- [13] John A George, Jennifer M George, and Bruce W Lamar. Packing different-sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*, 84(3):693–712, 1995.
- [14] Ronald L Graham, Boris D Lubachevsky, Kari J Nurmela, and Patric RJ Östergård. Dense packings of congruent circles in a circle. *Discrete Mathematics*, 181(1):139–154, 1998.
- [15] Huaiqing Wang, Wenqi Huang, Quan Zhang, and Dongming Xu. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle. *European Journal of Operational Research*, 141(2):440–453, 2002.

- 
- [16] De-fu Zhang and An-sheng Deng. An effective hybrid algorithm for the problem of packing circles into a larger containing circle. *Computers & Operations Research*, 32(8):1941–1951, 2005.
- [17] Wenqi Huang, Yu Li, Hakim Akeb, and ChuMin Li. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container. *Journal of the Operational Research Society*, 56(5):539–548, 2005.
- [18] AF Bollen, CP Riden, and NR Cox. Agricultural supply system traceability, part i: Role of packing procedures and effects of fruit mixing. *Biosystems engineering*, 98(4):391–400, 2007.
- [19] Kathryn A Dowsland, Maxime Gilbert, and Graham Kendall. A local search approach to a circle cutting problem arising in the motor cycle industry. *Journal of the Operational Research Society*, 58(4):429–438, 2007.
- [20] Eliana Mirledy Toro, Alejandro Garcés, and Hugo Ruiz. Solución al problema de empaquetamiento bidimensional usando un algoritmo híbrido constructivo de búsqueda en vecindad variable y recocido simulado. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, (46):119–131, 2008.
- [21] David Mauricio Sánchez, Ana Rojas, and Gonzalo Calderón. Un algoritmo grasp con dos parámetros de relajación para el problema 3d-bin packing con restricciones de estabilidad. *Revista de investigación de Sistemas e Informática*, 5(1):75–85, 2014.
- [22] M LOCATELLI, A ADDIS, and F SCHOEN. Efficiently packing unequal disks in a circle: a computational approach which exploits the continuous and combinatorial structure of the problem. *OPERATIONS RESEARCH LETTERS*, 36:37–42, 2008.
- [23] Wenqi Huang and Tao Ye. Global optimization method for finding dense packings of equal circles in a circle. *European Journal of Operational Research*, 210(3):474–481, 2011.

- 
- [24] Yuriy Stoyan and Georgiy Yaskov. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(10):1355–1369, 2012.
- [25] Ignacio Hinostroza, Lorena Pradenas, and Víctor Parada. Board cutting from logs: Optimal and heuristic approaches for the problem of packing rectangles in a circle. *International Journal of Production Economics*, 145(2):541–546, 2013.
- [26] Shamil I Galiev and Maria S Lisafina. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain. *European Journal of Operational Research*, 230(3):505–514, 2013.
- [27] Bai-Xiang Xu, Yang Gao, and Min-Zhong Wang. Particle packing and the mean theory. *Physics Letters A*, 377(3):145–147, 2013.
- [28] Peng Wang, Shuai Huang, and ZhouQuan Zhu. Swarm intelligence algorithms for circles packing problem with equilibrium constraints. In *Distributed Computing and Applications to Business, Engineering & Science (DCABES), 2013 12th International Symposium on*, pages 55–60. IEEE, 2013.
- [29] I Litvinchev and EL Ozuna. Approximate packing circles in a rectangular container: valid inequalities and nesting. *Journal of applied research and technology*, 12(4):716–723, 2014.
- [30] Shaohui Hong, Defu Zhang, Hoong Chuin Lau, XiangXiang Zeng, and Yain-Whar Si. A hybrid heuristic algorithm for the 2d variable-sized bin packing problem. *European Journal of Operational Research*, 238(1):95–103, 2014.
- [31] Nadia Dahmani, François Clautiaux, Saoussen Krichen, and El-Ghazali Talbi. Self-adaptive metaheuristics for solving a multi-objective 2-dimensional vector packing problem. *Applied Soft Computing*, 16:124–136, 2014.
- [32] Igor Litvinchev, Luis Infante, and Edith Lucero Ozuna Espinosa. Approximate circle packing in a rectangular container: Integer programming formulations and valid inequalities. In *Computational Logistics*, pages 47–60. Springer, 2014.

- 
- [33] Igor Litvinchev and Edith Lucero Ozuna Espinosa. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014.
- [34] Igor Litvinchev, Luis Infante, and Lucero Ozuna. Using different norms in packing circular objects. In *Intelligent Information and Database Systems*, pages 540–548. Springer, 2015.
- [35] Qian Hu, Andrew Lim, and Wenbin Zhu. The two-dimensional vector packing problem with piecewise linear cost function. *Omega*, 50:43–53, 2015.
- [36] Marcela Quiroz-Castellanos, Laura Cruz-Reyes, Jose Torres-Jimenez, Claudia Gómez, Héctor J Fraire Huacuja, and Adriana CF Alvim. A grouping genetic algorithm with controlled gene transmission for the bin packing problem. *Computers & Operations Research*, 55:52–64, 2015.
- [37] Kun He, Menglong Huang, and Chenkai Yang. An action-space-based global optimization algorithm for packing circles into a square container. *Computers & Operations Research*, 58:67–74, 2015.
- [38] Kun He, Pengli Ji, and Chumin Li. Dynamic reduction heuristics for the rectangle packing area minimization problem. *European Journal of Operational Research*, 241(3):674–685, 2015.
- [39] I Litvinchev, L Infante, and L Ozuna. Packing circular-like objects in a rectangular container. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 54(2):259–267, 2015.
- [40] Edmund Burke, Robert Hellier, Graham Kendall, and Glenn Whitwell. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem. *Operations Research*, 54(3):587–601, 2006.
- [41] A Miguel Gomes and José F Oliveira. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171(3):811–829, 2006.

- [42] Leandro Resende Mundim and Thiago Alves de Queiroz. A hybrid heuristic for the 0–1 knapsack problem with items of irregular shape. In *Informatica (CLEI), 2012 XXXVIII Conferencia Latinoamericana En*, pages 1–6. IEEE, 2012.
- [43] B Junior, P Pinheiro, and R Saraiva. A hybrid methodology for nesting irregular shapes: Case study on a textile industry. In *6th IFAC Conference on Management and Control of Production and Logistics, Fortaleza*, 2013.
- [44] Franklina MB Toledo, Maria Antónia Carravilla, Cristina Ribeiro, José F Oliveira, and A Miguel Gomes. The dotted-board model: A new mip model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2):478–487, 2013.
- [45] Bonfim Amaro Júnior, Plácido Rogério Pinheiro, Rommel Dias Saraiva, and Pedro Gabriel Calíope Dantas Pinheiro. Dealing with nonregular shapes packing. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014.
- [46] Doraid Dalalah, Samir Khrais, and Khaled Bataineh. Waste minimization in irregular stock cutting. *Journal of Manufacturing Systems*, 33(1):27–40, 2014.
- [47] Aline AS Leao, Franklina MB Toledo, José Fernando Oliveira, and Maria Antónia Carravilla. A semi-continuous mip model for the irregular strip packing problem. *International Journal of Production Research*, (ahead-of-print):1–10, 2015.
- [48] Uğur Köklü. *International journal of computer integrated manufacturing*. 2013.
- [49] SA MirHassani and A Jalaeian Bashirzadeh. A grasp meta-heuristic for two-dimensional irregular cutting stock problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pages 1–10, 2015.
- [50] Xuehang Wang, Haitao Zhou, Edel Sheridan, John Charles Walmsley, Dingding Ren, and De Chen. Geometrically confined favourable ion packing for high gravimetric capacitance in carbon–ionic liquid supercapacitors. *Energy & Environmental Science*, 2016.

- 
- [51] Gregory M Grason. Colloquium: Geometry and optimal packing of twisted columns and filaments. *Reviews of Modern Physics*, 87(2):401, 2015.
- [52] Peifen Zhu and Nelson Tansu. Effect of packing density and packing geometry on light extraction of iii-nitride light-emitting diodes with microsphere arrays. *Photonics Research*, 3(4):184–191, 2015.
- [53] Masako Tamada and Jennifer A Zallen. Square cell packing in the drosophila embryo through spatiotemporally regulated egf receptor signaling. *Developmental cell*, 35(2):151–161, 2015.
- [54] Jan Günther, Daniel Hobbs, Claire Albasi, Christine Lafforgue, Arnaud Cockx, and Philippe Schmitz. Modeling the effect of packing density on filtration performances in hollow fiber microfiltration module: a spatial study of cake growth. *Journal of Membrane Science*, 389:126–136, 2012.
- [55] Helmut Pottmann, Caigui Jiang, Mathias Höbinger, Jun Wang, Philippe Bompas, and Johannes Wallner. Cell packing structures. *Computer-Aided Design*, 60:70–83, 2015.
- [56] Silvano Martello. Two-dimensional packing problems in telecommunications. *Pesquisa Operacional*, 34(1):31–38, 2014.
- [57] Douglas C Montgomery. *Diseño y análisis de experimentos*. 1991.
- [58] CO Lopez and JE Beasley. Packing unequal circles using formulation space search. *Computers & Operations Research*, 40(5):1276–1288, 2013.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

José Daniel Mosquera Artamonov

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias en  
Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS REGULARES  
EN UN CONTENEDOR RECTANGULAR

Nací el 16 de agosto de 1987 en la ciudad de Moscú, Rusia. En el año 2005 ingrese a la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira en donde realice mis estudios de pregrado obteniendo en el año 2010, el título de Ingeniero Industrial con el trabajo titulado: "Viabilidad económica y mecánica para la conversión de motores de combustión interna en sistemas total flex o flex fuel". De enero 2012 a Septiembre 2013 fui estudiante en el posgrado la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro en donde realicé el trabajo "Determinación de los parámetros de operación de una extractora de higuera usando diseño de experimentos para la generación de biocombustibles" para obtener el grado de maestro en Ingeniería de Calidad 2014. Simultáneamente ingrese al

---

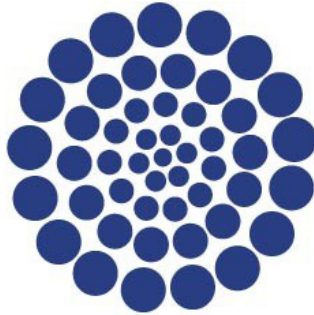
posgrado de Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León, con los cuales desarrolle estudios de Maestría en Ciencias generando la tesis titulada "Empaquetamiento de objetos regulares en un contenedor rectangular".



## AUSPISIADORES

---

El presente trabajo investigativo "Empaquetamiento de objetos regulares en un contenedor rectangular", fue apoyado con la beca numero XXXXX, del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, así como el apoyo a una estancia de investigación en instalaciones de la Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho".



**CONACYT**

*Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*



Posgrado de Ingeniería de Sistemas