UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

TESIS

DISEÑO DE UN MODELO PARA UN PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN DE TUBERÍAS, CON ENTREGAS DIVIDIDAS Y FLOTA HETEROGÉNEA

POR

MIRIAM COBOS LEAL

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN LOGÍSTICA Y CADENA DE SUMINISTRO CON ORIENTACIÓN EN DISEÑO Y ANÁLISIS

FEBRERO 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

DISEÑO DE UN MODELO PARA UN PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN DE TUBERÍAS, CON ENTREGAS DIVIDIDAS Y FLOTA HETEROGÉNEA

POR

MIRIAM COBOS LEAL

EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRÍA EN LOGÍSTICA Y CADENA DE SUMINISTRO
CON ORIENTACIÓN EN DISEÑO Y ANÁLISIS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN FEBRERO 2016

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la tesis **"**Diseño de un modelo para un problema de distribución de tuberías, con entregas divididas y flota heterogénea**"** realizada por la alumna Miriam Cobos Leal con número de matrícula 1345645 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Logística y Cadena de Suministro con orientación en Diseño y Análisis.

El Comité de Tesis

Jania Astrid Saucedo

Dra. Jania Astrid Saucedo Martínez

Asesor

Dr. José Fernando Camacho Vallejo

Revisor

Dra. Edith Lucero Ozuna Espinosa

Revisor

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Febrero 2016

DEDICATORIA

Esta tesis la quiero dedicar a **mis padres y esposo** ya que aunque la espera fue mucha no perdieron la esperanza de ver esta etapa de mi vida profesional concluida, así como a **amigos y compañeros** que nos encontramos en la misma situación de desesperación por no ver el día que por fin pudiéramos culminar lo que un día empezamos en una hoja en blanco y muchas cosas e ideas en mente pero solo una importante…

¿¡¿¡Qué escribir!?!?

¿¡¿¡Por dónde empezar!?!? Y sobre todo…

¿¡¿¡Cómo terminar!?!?

Preguntas que cada día se hicieron más inciertas, aún y cuando en nuestras mentes las ideas rebotaban de un lado a otro. Pero que hoy por fin encontré (encontramos) la respuesta y éste es el resultado.

AGRADECIMIENTOS

Al culminar esta tesis existe una persona a la que debo mi total agradecimiento y respeto, ya que sin ella ésta sería un verdadero desastre al igual que Yo.

Esa persona que durante toda la maestría siempre tuvo el tiempo para escuchar y ayudar en cualquier situación ya fuera que estuviera directa o indirectamente involucrada.

A la persona que a pesar de estar viviendo una de las etapas más bonitas de la vida (ser madre) hizo el tiempo para estar al pendiente de los avances de la tesis.

Esa persona que tuvo toda la paciencia del mundo ya que no fui la mejor de los asesorados sino una de las más lentas y desidiosas para ponerse a trabajar.

Hoy le agradezco de todo corazón a la Dra. Jania Astrid Saucedo Martínez por ayudarme a hacer esto posible y a Dios por estar presente en cada momento.

De igual forma le agradezco al Dr. Fernando Camacho Vallejo por formar parte nuevamente de mi formación profesional y al Dr. Rodolfo Garza Morales por todo su apoyo durante la maestría, a la UANL y en especial a la FIME por formarme profesionalmente.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

Miriam Cobos Leal

En opción al grado de Maestro en Logística y Cadena de Suministro con orientación en Diseño y Análisis

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Título del estudio:

DISEÑO DE UN MODELO PARA UN PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN DE TUBERÍAS, CON ENTREGAS DIVIDIDAS Y FLOTA HETEROGÉNEA

Número de páginas: 89

OBJETIVO Y MÉTODO DE ESTUDIO

En esta tesis se describe el problema de ruteo de vehículos de una empresa regiomontana de tubería ligera. La empresa debe distribuir desde cualesquiera de sus 5 plantas sus productos a un grupo determinado de clientes que se encuentran dispersos en toda la República Mexicana, actividad que se realiza en base a la experiencia del encargado de ruteo y no en un sistema de optimización el cual evitaría el uso ineficiente de recursos y generaría grandes ahorros en el costo de transportación y por lo tanto en el costo logístico de la empresa.

El Problema de Ruteo de Vehículos (*VRP*) se refiere al grupo de problemas que abordan la distribución a un conjunto de clientes dispersos geográficamente utilizando una flota de vehículos. Su finalidad es encontrar un camino, o ruta, que recorra todos los clientes minimizando los costos relacionados con el recorrido satisfaciendo cierto número de restricciones. El *VRP* es un problema de optimización que se puede encontrar en diversas situaciones de la vida real, ya sea en la industria, en los servicios o en el mismo vivir de las personas.

Uno de los propósitos de esta tesis es presentar un modelo de optimización basado en las características particulares de la empresa y de su sistema de transporte como lo son: uso de flota heterogénea, múltiples productos, entregas divididas. Otro de los objetivos es probar con la ayuda del software de optimización los ahorros que se generarían al integrar dicho modelo como parte de sus operaciones en el ruteo de vehículos.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES

Se propone un modelo matemático de programación lineal para solucionar el problema de distribución de tuberías de una empresa con costo de transportación mínimo. Dicho modelo cuenta con las siguientes características generales:

- Permite la entrega de mercancía en “partes”, es decir, que la demanda fuera cubierta por más de un vehículo.
- Se hace uso de una flota de vehículos subcontratada la cual pone a disposición 4 tipos diferentes de vehículos.
- La ruta de cada vehículo está integrada hasta por 3 ciudades incluidas en el costo de renta, abriendo la posibilidad de tener ciudades adicionales en la ruta a un costo extra.

El modelo propuesto permite asignar eficientemente las rutas de los vehículos así como los clientes en cada ruta, además de aprovechar al máximo la capacidad de los vehículos y tomar en cuenta los costos por ciudades extra en las rutas.

Al considerar las características del modelo, minimizar el número de vehículos utilizados para satisfacer la demanda total de los clientes, lo cual genera un ahorro en el costo total de transportación.

El modelo aquí presentado es evaluado con ayuda del software General de Modelaje Algebraico (GAMS, por sus siglas en inglés) utilizando instancias y generar el costo para posteriormente compararlos con los costos tradicionales de la empresa.

Dra. Jania Astrid Saucedo Martínez

Asesor

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Hoy en día las empresas buscan obtener una ventaja competitiva en el mercado que los posicione como una empresa líder, es por eso que poco a poco la administración de la cadena de suministro ha ido tomando mayor importancia.

La cadena de suministro involucra varias actividades y elementos, uno de sus elementos clave es **el transporte**, el cual permite mover los productos terminados, las materias primas e insumos entre las empresas y los clientes, es decir, permite la distribución de éstos. Si bien el transporte juega un papel muy importante en la satisfacción del cliente y sabemos que éste desea su mercancía en tiempo y forma, no implica que como empresa necesitemos contar con un transporte veloz y de gran capacidad que nos permita realizar la distribución en el menor tiempo posible, ya que lo más seguro es que ésto nos genere un alto costo de transportación. Más bien el problema de distribución involucra una serie de toma de decisiones que afectan la eficiencia de la cadena de suministro al elevar los costos logísticos de manera directa si estas son tomadas de manera equivocada, entre estas decisiones podemos mencionar: la elección del tipo de transporte a utilizar, el uso de la capacidad del transporte, la planeación de las entregas, la creación de rutas, la compra de transporte o la evaluación de costos de transportación, etc.

Debido a la importancia del transporte en la cadena de suministro, en esta tesis se aborda la problemática de una empresa de tubería ligero (PVC) y se propone un modelo de distribución que permita a la empresa llevar a cabo este proceso a un costo de transportación mínimo.

Con lo anterior queda claro que para lograr una reducción en el costo de transportación se deben determinar las rutas que permitan satisfacer la demanda de los clientes de manera eficiente. Este problema ya han sido estudiado en la literatura y se le conoce como Problema de Ruteo de Vehículos (*VRP,* por sus siglas en inglés *Vehicle Routing Problem*).

El *VRP* es un problema clásico de ruteo pero para analizar problemas más apegados a la situación real de las empresas, éste ha sido modificado creando un sinfín de variantes. Algunos ejemplos en los que se han modelado y solucionado variantes de *VRP* pueden encontrarse en: (Archetti, Salvelsbergh, & Speranza, 2008), (Dror, Laporte, & Trudeau, Vehicle Routing with Split Deliveries, 1994), (Toth & Vigo, 2002), (Christofides, 1976), (Dantzing & Ramser, 1959), (Laporte G. , 1992), (Belfiore & Yoshizaki, 2009)

Para el desarrollo del modelo propuesto en este trabajo se tomaron como base los modelos planteados tanto para un *VRP* clásico (Hillier & Lieberman, 1994), así como los modelos propuestos para algunos de sus variantes, en especial el *VRP* con flota heterogénea (*MFVRP* por sus siglas en inglés Mix Fleet Vehicle Routing Problem) (Golden B. , Assad, Levy, & Gheysens, 1984), el cual es de gran ayuda cuando el problema de ruteo involucra vehículos que por alguna razón poseen características diferentes; y el *VRP* con entregas divididas (*SDVRP* por sus siglas en inglés Split Delivery Vehicle Routing Problem) (Dror & Trudeau, 1989) en el cual se puede abastecer a un cliente en más de una visita y por más de un vehículo. En los capítulos 2.2.3, 3.7 y 3.8 se analizaran a detalle el *VRP,* el *MFVRP* y el *SDVRP* respectivamente.

En las siguientes secciones se detalla lo qué es la cadena de suministro así como la función e importancia del transporte dentro de ésta, se enlistan las características de la empresa y de su sistema actual de transportación, y para concluir se exponer el objetivo y justificación de la tesis.

1.1 El transporte y la cadena de suministro

La cadena de suministro es la integración de las funciones principales del negocio desde el usuario final a través de proveedores originales que ofrecen productos, servicios e información que agregan valor para los clientes y otros interesados; integra los procesos de negocios de varias organizaciones para lograr mejorar los costos, la velocidad, calidad de servicio y rentabilidad de cada integrante.

Su capacidad de respuesta y eficiencia se logra a través del buen desempeño de las directrices logísticas e inter-funcionales: instalaciones, inventario, transportación, información, aprovisionamiento y fijación de precios (Chopra & Meindl, 2008).

Según (Ballou, 2004) el costo de transportación representa de uno a dos tercios los costos logísticos de una empresa y hasta el 20% del costo final de los bienes, siendo así el transporte una de las directrices logísticas en las que se pueden lograr ahorros significativos.

A través del transporte las empresas llevan los productos en tiempo y forma al sitio donde son requeridos, de modo que influye en el desempeño de la cadena de suministro y está presente en los dos extremos de los eslabone: el abastecimiento y la distribución. En el abastecimiento su función es garantizar la materia prima necesaria para la producción; y en la distribución, entregar el producto terminado a los consumidores finales. De esta forma, se requiere que el servicio de transporte sea de calidad en aspectos como: seguridad, regularidad, oportunidad, entregas a tiempo y costos.

El costo total de transportación está compuesto por costos fijos y variables, sin embargo; a pesar de esto pueden generarse costos extras considerados como despilfarros de dinero, debidos por ejemplo: a mantenerse detenidos mientras transportan carga convirtiéndose prácticamente en un almacén o cuando la capacidad de éstos no es aprovechada al máximo. Por consiguiente, una buena coordinación de las actividades de abastecimiento y distribución con los sistemas de transporte evitaría los llamados despilfarros de dinero y reduciría los costos para la empresa, logrando una mejor administración del dinero.

Aunque el objetivo del transporte es llevar los productos a donde son requeridos en tiempo y forma, la transportación no es una actividad única, pues la complejidad de ésta aumenta en medida que aumenta la red de transporte. El servicio de transporte está compuesto por un conjunto de servicios como información, comunicación sobre los productos en tránsito y de los productos entregados, entre otros; junto con varias actividades operacionales como manipulación, almacenamiento y participantes; y varios participantes como transportistas, aseguradoras, aduanas, etc.

Como se puede apreciar en lo anteriormente descrito, el transporte suele ser considerado como un gasto más para la empresa en lugar de ser visto como parte integral de la logística y buscar la manera en cómo éste puede ayudar a la empresa a reducir el costo logístico sin reducir su nivel de calidad.

1.2 Descripción del problema.

El problema que se aborda en esta tesis corresponde a una empresa regiomontana productora de tubería, líder en su ramo, la cual está compuesta por dos divisiones, la textil y la de plásticos, la cual a su vez está dividida en la sección de sistemas de riego y de tubería para construcción. Diariamente la división de plásticos debe tomar decisiones sobre el ruteo de los vehículos, consistentes en su mayoría en tubería tipo PVC.

Las variantes de tubos de PVC que se fabrican, cuentan con diferentes características, en cuanto a longitud (3, 6 y 9 metros), diámetro (13 configuraciones distintas) y calibre (4 grosores distintos). Estás características pueden observarse en la tabla 1.

Longitud	3, 6 y 9 metros
Diámetro	21.3, 26.7, 33.4, 48.3, 60.3, 73, 88.9, 114.3, 168.3, 219.1, 273.1, 323.8 y 355.6 milímetros
Calibre	3.5, 4, 5, 7 pulgadas

Tabla 1. Características de los tubos.

Para su fabricación, la empresa cuenta con 5 plantas de producción ubicadas estratégicamente para cubrir todo el territorio nacional, localizadas en: Monterrey, Los Mochis, Poncitlán, Ciudad de México y Mérida; las cuales se encargan satisfacer la demanda de los 48 centros de distribución con los que cuenta la empresa y que se encuentran distribuidos geográficamente en toda la República Mexicana. En la figura 1 se puede visualizar la red de distribución de la empresa.

Figura 1. Red de distribución
Fuente: Proporcionada por la empresa.

La manera en cómo se lleva a cabo la distribución de los tubos a las plantas inicia con la recepción de los pedidos, los cuales se hacen en forma de “partidas”. Cada partida consta de un tipo de tubo y una cantidad determinada de éstos; por ejemplo, si un cliente hace un pedido de 150 tubos de 60 mm de diámetro, 40 de 100mm de diámetro y 50 de 250mm de diámetro, su pedido está compuesto de 3 partidas y éstas pueden ser entregadas en uno o más vehículos.

Una vez que se reciben los pedidos, para hacer la entrega de ellos la empresa debe subcontratar el transporte que se va a utilizar, ya que la empresa no cuenta con una flotilla propia para realizar la distribución de sus productos. La empresa de transporte que le brinda este servicio cuenta con 4 diferentes vehículos que pone a su disposición: tortón, tráiler 42, tráiler 45 y tráiler 48, los cuales difieren tanto en las dimensiones como en el costo de disposición del mismo. En la Tabla 2 se puede visualizar las diferencias en cuanto a dimensión de los vehículos.

Transporte	Longitud	Altura	Ancho	Volumen
Tortón	6.5 m	3.3 m	3.6 m	77.22 m^3
Tráiler 42	12.8 m	3.6 m	2.45 m	112.9 m^3
Tráiler 45	13.72 m	3.75 m	2.5 m	128.62 m^3
Tráiler 48	14.63 m	4 m	2.5 m	146.3 m^3

Tabla 2. Descripción de cada vehículo.

Cada vehículo que se renta genera un costo de renta, el cual varía dependiendo del tipo de vehículo que se contrata y el destino que éste tendrá. Este costo de renta incluye entre otras cosas el costo por kilómetro recorrido y el costo por entrega hasta para 3 centros de distribución. Si un vehículo es programado para realizar más entregas de las incluidas en el costo de renta, siempre y cuando la capacidad del vehículo lo permita, se tendrá que pagar por cada entrega extra realizada.

Otro costo al que se incurre es el costo por carga y descarga de productos para maniobrar y realizar la entrega a algún centro que forma parte de la ruta, el cual es proporcional al volumen que ocupa la(s) carga(s) a maniobrar en la caja del vehículo.

Por lo que el costo de transportación que aquí se expone puede resumirse en: costo de renta más costo entrega extra más costo por cargar y descargar para maniobrar.

1.3 Problemáticas

Debido a las características de la empresa así como su catálogo de productos descritas en la sección anterior, podemos citar diferentes problemáticas a las que la empresa se tiene que enfrentar para realizar una distribución eficiente de sus productos.

El primer problema que se identifica, es la asignación de los pedidos a las plantas; ya que la empresa cuenta con regiones para cada planta, y cada centro ya está asignado a una región determinada. Pero esta asignación, no asegura la disminución de los costos de transportación, como ya se mencionó, este costo no sólo incluye el kilometraje recorrido; así que si esa es la manera en cómo se asignaron esas regiones no es posible reducir éste costo.

En la modelación propuesta se aborda esta problemática de manera general, es decir, no se consideran las 5 plantas ni las zonas establecidas, más bien una sola planta con capacidad infinita para satisfacer las demandas de todos los clientes.

Un segundo problema, es la elección del tipo de transporte y la ruta que éste seguirá, ¿cuál camión? y ¿cuál ruta? son interrogantes que la empresa debe resolver a la hora programar sus entregas. Hay dos aspectos importantes que se deben de cuidar a la hora de planear las rutas de cada vehículo: la cantidad de clientes que se asignan a cada ruta, para no generar altos costos por entregas extras; y la capacidad de cada vehículo, para tener un mejor aprovechamiento de ésta.

En la modelación se consideran los 4 tipos de vehículos disponibles para realizar las entregas, y se busca realizar la mejor asignación para minimizar el costo total de transportación, tomando en cuenta el costo de entregas extras, aprovechando al máximo la capacidad de cada uno de los vehículos.

Una vez asignada la ruta a cada vehículo, un tercer problema que se presenta es cómo deben de ser colocados los tubos dentro de la caja del vehículo. Como lo que se transporta es tubería ligera, existe la posibilidad no sólo de colocar tubos sobre tubos sino también tubos dentro de tubos lo que permite aprovechar al máximo la capacidad de cada vehículo. Pero si se retoma el costo de transportación que se planteó para este caso, uno de los costos involucrados es el relacionado con la carga y descarga para maniobrar; por lo que la cuestión no solo es aprovechar al máximo la capacidad sino minimizar el costo de transportación. Por lo tanto la ruta y el acomodo de los tubos dentro de la caja del tráiler, deben estar íntimamente relacionados.

Esta problemática tiene un alto grado de complejidad que agregado a la complejidad que en sí ya tiene el problema de ruteo, vuelve nuestro problema en un problema mucho más complejo. Por lo que el acomodo de los tubos dentro de las cajas de los tráileres no será considerado en la modelación, se tomará en cuenta solo el volumen de los tubos y la capacidad en volumen de la caja de los tráileres para hacer la asignación.

1.4 Objetivo

El objetivo de esta tesis, es modelar el problema de distribución de productos de la empresa en cuestión, tomando como base los modelos del *VRP*, *SDVRP* y *MFVRP*, que ayude a la toma de decisiones sobre la asignación de transporte, la carga y la ruta. Dichas asignaciones ayudarán a formar una red de transporte en la cual la demanda de cada cliente sea satisfecha al menor costo total de transportación posible y con un mejor aprovechamiento de los recursos.

1.5 Justificación

La cadena de suministro de cualquier empresa sin importar el rubro o el tipo a la que ésta pertenezca se caracteriza por estar compuesta de elementos claves que se relacionan entre sí para realizar determinados procesos. Uno de estos elementos clave es el sistema de transporte, el cual es uno de los más importantes y de mayor complejidad.

El sistema de transporte es el componente más importante para la mayoría de las organizaciones, debido a que el éxito de una cadena de abastecimiento está estrechamente relacionado con su diseño y uso adecuados. Además que tiene un gran impacto en la capacidad de respuesta y eficiencia de la cadena de suministro.

Sin embargo, representa un costo logístico muy elevado y esto repercute en los precios de los productos que se desean transportar. Es por eso que este tema es de suma importancia ya que las empresas buscan minimizar el costo total, pero al mismo tiempo tener una mayor capacidad de respuesta con sus clientes.

1.6 Hipótesis

El diseño del modelo planteado para el problema de distribución de tubería permitirá generar una red de transporte que disminuya los costos de transportación al mismo tiempo que se satisfacen tanto las demandas de los clientes como las características particulares del problema.

1.7 Metodología

Se diseñará un modelo de distribución que involucra el llamado *SDVRP* ya que la demanda de cada cliente puede ser abastecida por uno o varios vehículos si esto minimiza el costo al que se incurre por realizar dicha entrega; también se tomará en cuenta el problema *MFVRP* debido a que la situación que presenta la empresa abre la posibilidad de rentar cuatro tipos de vehículos con capacidades y costos diferentes.

Para el planteamiento del modelo se analizarán y estudiarán los diferentes modelos propuestos y resueltos con anterioridad relacionados con estos dos tipos de problemas de ruteo de vehículos: entregas divididas y flota heterogénea. Para el diseño del modelo se tomarán en cuenta los siguientes supuestos:

- Se trabajará con sólo una planta, la ubicada en Monterrey, la cual se considerará con una capacidad infinita, esto por su estratégica ubicación geográfica que permite tener el menor rango de distancias entre la planta y el centro de distribución.
- Se considerará el producto en cajas tomando así como variable el volumen de un prisma cuadrangular, dejando fuera la posibilidad de introducir tubos dentro de tubos. El peso de éstos será despreciable por lo que se podrá colocar producto sobre producto sin que existan deformaciones o fisuras en los tubos.
- El costo de carga y descarga de productos para maniobrar mercancía no será tomado en cuenta, por lo que la manera en cómo se acomodarán los productos dentro de la caja de tráiler queda fuera de alcance de esta tesis.

- La capacidad de cada vehículo será el volumen que éste puede transportar.
- Todos los vehículos inician y terminan su viaje en la planta.

1.8 Estructura de la tesis

La organización de este trabajo se presenta en 8 capítulos que nos irán proporcionando en un inicio la información necesaria sobre el tema ruteo de vehículos para que posteriormente se proponga un modelo matemático adecuado para el problema en cuestión.

El primer capítulo nos da una introducción estableciendo la importancia del transporte en la cadena de suministro, se plantea la problemática a la cual se desea dar una solución a través de la modelación matemática, y se establecen también el objetivo, la hipótesis, metodología y resultados esperados de la modelación.

En el segundo capítulo, se analiza la relevancia del costo de transportación en el costo logístico de una empresa así como los problemas: *TSP*, *Truck Dispatching Problem* y *VRP,* los cuales proporcionarán la información básica necesaria para la modelación del problema abordado.

En el tercer capítulo se analizan algunas de las múltiples variantes del *VRP* desde las características particulares de cada problema hasta la modelación propuesta por algunos autores, esto con el objetivo de tratar de identificar las similitudes de nuestro problema con los problemas ya planteados en la literatura y tener así una base para la modelación del mismo.

En el cuarto capítulo, se analiza la complejidad de los problemas de optimización, particularmente de los *VRP* y sus variantes. Mientras que en el quinto capítulo se expondrán algunos de los métodos de solución para los mismos.

En el sexto capítulo se plantea el modelo matemático que ayudará a resolver la problemática de la empresa bajo análisis, considerando las restricciones del problema.

En el séptimo capítulo se exponen los resultados al utilizar el Sistema General de Modelaje Algebraico (GAMS) el cual nos permite obtener el costo de transportación de las instancias generadas y poder determinar la eficiencia del modelo.

A manera de cerrar y evaluar el modelo en el octavo capítulo se presentan las conclusiones y comentarios personales donde se analizan los resultados y dificultades que se obtuvieron durante el planteamiento, desarrollo e implementación del proyecto así como las líneas de trabajo futuro.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

En este capítulo primeramente se hará un análisis del papel que juega el transporte dentro de la cadena de suministro teniendo como objetivo recalcar la importancia del problema tratado en esta tesis. Así mismo, se expone una revisión sobre el problema de ruteo de vehículo hablando un poco sobre sus orígenes, variantes y algunos métodos de solución propuestos, con los cuáles podremos adentrarnos un poco en la temática que se abordará.

2.1 El transporte, un costo logístico.

La cadena de suministro abarca todas las actividades relacionadas con el flujo y transformación de bienes, desde la etapa de materia prima hasta el usuario final, así como los flujos de información relacionados (Ballou, 2004). Entre los eslabones de esta cadena tenemos a los proveedores, fabricantes, distribuidores y vendedores que están relacionados de manera tal que permitan la entrega de los productos al menor costo teniendo como único objetivo el maximizar el valor total generado.

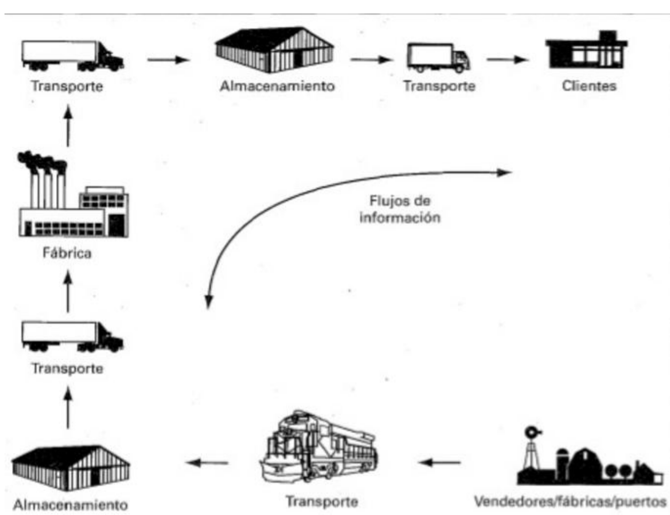


Figura 2. Cadena de suministro
Fuente: Ballou, Ronald, Pearson Education, 5ta edición, 2004.

Ésta juega un papel importante dentro del ámbito empresarial, inicia desde el proveedor y termina hasta que el cliente recibe el producto. La eficiencia de ésta requiere que todas las partes involucradas trabajen de manera coordinada para alcanzar un mismo objetivo. Las grandes partes que conforman la cadena de suministro son: el suministro, la fabricación y la distribución.

Uno de los problemas que diariamente enfrentan las empresas es el de precisamente la distribución de sus productos. Ésta consiste en asignar una ruta a cada vehículo de una flota para repartir o recoger mercancías, uno de los elementos clave de este sistema es ***el transporte***, el cual muchas veces no se valora ya que no agrega valor económico al producto. Sin embargo; el mal manejo de éste hace que represente uno de los costos logísticos más elevados y que el precio de los productos transportados aumenten.

La función del transporte dentro de una cadena de suministro es entregar los productos en tiempo y forma a sitio donde son requeridos. Su importancia se debe a que está presente en los dos extremos de los eslabones de la cadena de suministro, tanto en el abastecimiento como en la distribución. El primero, garantiza la materia prima necesaria para llevar a cabo la producción, mientras que el segundo, garantiza que los productos sean entregados al siguiente eslabón en la cadena de suministro. Siendo su función principal llevar los productos en tiempo y forma al lugar donde son requeridos.

Una buena administración del sistema de transporte puede llevar a tener un sistema de transporte más eficiente y a un menor costo, lo que llevaría a la empresa a obtener una mayor competitividad. En su ejecución diaria uno de los principales problemas en la optimización de las operaciones logísticas de transporte es la planificación de rutas, cuyo principal objetivo es reducir el costo total de transportación.

Las decisiones de transporte pueden incluir la selección del modo de transporte, el tamaño del envío y al establecimiento de rutas, así como la programación. Estas decisiones son influidas por la proximidad de los almacenes a los clientes y a las plantas, lo cual, a su vez, afecta la ubicación de almacenes.

Los niveles de inventario también responden a las decisiones de transporte mediante el tamaño del envío. (Ballou, 2004).

El costo total de transportación es de suma importancia en la industria ya que representa una parte importante del valor final del producto o servicio prestado. De acuerdo con (Ballou, 2004) el transporte es una de las actividades logísticas que más absorbe costos, llegando a representar entre el 50 y 66% de los costos logísticos totales. Menciona que el transporte añade valor de lugar a los productos y es esencial para cualquier empresa, ya que el movimiento de materia prima y/o productos terminados es una actividad imprescindible (Ballou, 2004).

En (Toth & Vigo, 2002), coinciden con (Ballou, 2004), en que el problema de distribuir productos desde ciertos depósitos a sus usuarios finales juega un papel central en la gestión de algunos sistemas logísticos, y su adecuada planificación puede representar entre el 10 y 20% del costo final de los bienes.

En el 2014 el estudio realizado por "*Logistics Cost and Service*" (Dainzú, 2013) dio a conocer que el costo de transportación llega a representar el 47% del costo logístico total promedio de una empresa. Más aún en México, el Banco Mundial comunicó que el costo de transporte representa aproximadamente el 40% del costo logístico total, lo que equivale al 6% del PIB (Producto Interno Bruto). Quedando México como el segundo lugar en generación de altos gastos logísticos como porcentaje del PIB.

2.2. Ruteo de vehículos

El Problema de Ruteo de Vehículos (*VRP* por sus siglas en inglés) es aquél en el cual se debe realizar la asignación del tipo de recurso a utilizar, la cantidad a transportar y las rutas a seguir por los vehículos. Éste fue introducido por (Dantzing & Ramser, 1959) en su artículo *"Truck Dispatching Problem"*, en el cual dieron la primera formulación de lo que hoy conocemos como *VRP*.

El problema de ruteo de vehículos se ha convertido en uno de los principales problemas de optimización que tiene su aplicación logística en el área de transporte enfocándose en la reducción de costos. Además de ser parte de los problemas más estudiados especialmente en las áreas de Investigación de

Operaciones y Logística. Entre las variaciones clásicas del problema del transporte están:

- **El problema del agente viajero** (*TSP*, por sus siglas en inglés Travelling Salesman Problem) donde un vendedor debe visitar una sola vez un número determinado de ciudades y ha de volver a la ciudad donde comenzó su viaje, de tal manera que la ruta minimice la distancia recorrida. (Applegate D. L., Bixby, Chvatal, & Cook, 2007)

- **El problema del cartero chino** (*CCP*, por sus siglas en inglés Chinese Postman Problem) fue definido en 1962 por Meigu Guan (Guan, 1962) como un problema en el que un cartero debe entregar el correo en las casas dentro de cierta área, partiendo y regresando a la oficina postal, la distancia recorrida debe ser mínima y se debe recorrer cada calle al menos una vez.

- **El problema de ruteo de vehículos** (*VRP*, por sus siglas en inglés Vehicle Routing Problem) el cual es una generalización del *TSP* donde existe una demanda asociada a cada ciudad y los vehículos tienen una capacidad limitada (Toth & Vigo, 2002).

Existen diversas variaciones del problema clásico del *VRP*, las cuales están determinadas por las características en cuanto a diversos parámetros, cómo lo son: el número de vehículos, la capacidad de los vehículos, los lugares o clientes a visitar así como las demandas de cada uno de éstos.

Para hacer un análisis del *VRP* y de sus variantes, primero revisemos dos problemas bases para la formulación de éste, el primero de ellos es el Problema del Agente Viajero y el segundo es el *Truck Dispatching Problem*. Éstos nos permitirán tener un panorama más amplio sobre el tema así como las conocer el problema base a resolver.

2.2.1 Problema del Agente Viajero (*TSP*).

El Problema del Agente Viajero, o simplemente *TSP*, es un problema clásico de optimización en el que su origen es un completo misterio pero se llega a considerar que fue introducido por (Flood, 1956). Este problema suele remontarse al siglo XIX en el que el matemático irlándes Sir William Rowam Hamilton y el matemático británico Thomas Penyngton Kirkman inventaron el famoso "Icosian Game". El juego, es un desafío matemático que está conformado por 20 puntos y el objetivo es encontrar un camino entre cada una de las aristas del dodecaedro en el que cada vértice sea visitado una única vez y el final del recorrido sea el vértice de origen (ahora conocido como Ciclo Hamiltoniano, en la figura 3 puede observarse el Icosian Game). Aunque este juego no busca el camino óptimo, si busca un camino en el que se visiten todos los vértices una única vez, por lo que está íntimamente relacionado con lo que hoy conocemos como el problema del agente viajero y podría decirse que este juego representa su antecedente. (Pegg, 2009).

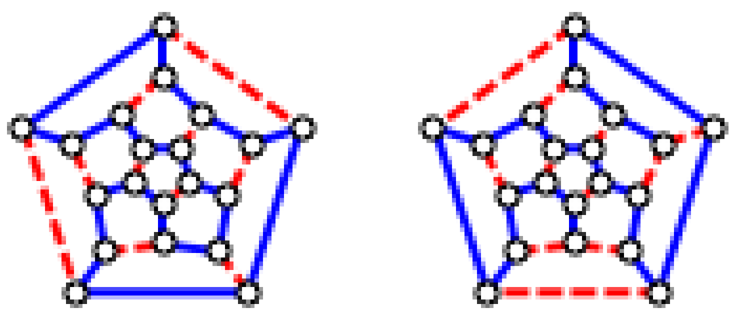


Figura 3. Icosian Game
Fuente: Pegg, Ed., *"Icosian Game, Revisited"*, The Mathematica Journal, Vol 11, 2009

El *TSP* puede ser definido como un problema que consiste en visitar un número finito de ciudades por un vendedor, el cual debe pasar por cada uno de sus clientes una única vez y regresar al lugar de partida. La solución consiste en construir una ruta que minimice la distancia que tiene que recorrer el agente. Entre las características principales del problema tenemos las siguientes:

- Existe un único agente viajero.

- Se debe partir de una ciudad y visitar todas las ciudades una sola vez y en una sola ruta.
- El viaje debe terminar en la ciudad de inicio.
- El costo de viajar de una ciudad a otra es conocido (distancia, costo de viaje, tiempo, etc.)
- No existe una restricción de capacidad ni una restricción de distancia total recorrida.

Dado que una de las restricciones es que todas las ciudades sean visitadas, el problema es encontrar **el orden** en que son visitadas. Este orden debe de cumplir el objetivo, que bien puede ser minimizar o maximizar la distancia recorrida, minimizar el costo o tiempo de viaje, maximizar el beneficio, etc.

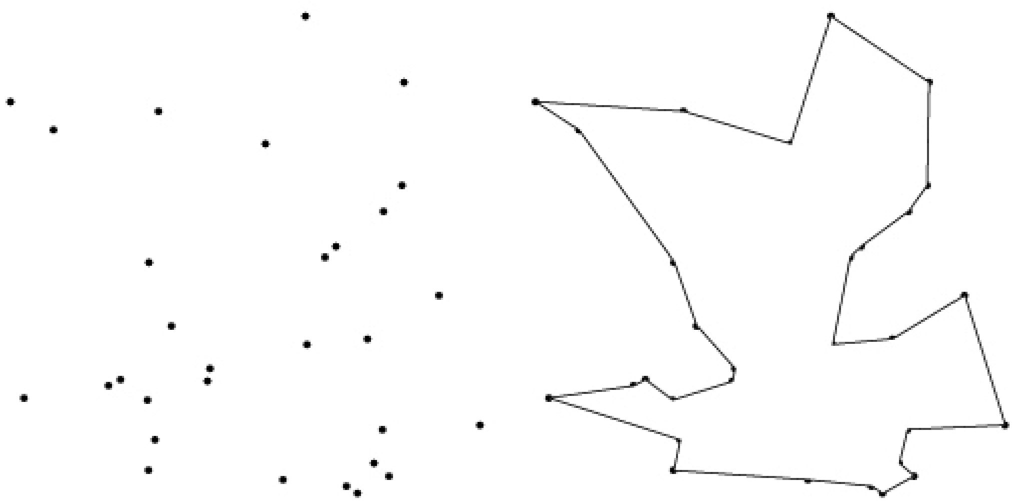


Figura 4. Una solución al TSP
Fuente: http://mathworld.wolfram.com/TravelingSalesmanProblem.html

El *TSP* puede formularse a partir de un grafo donde cada punto o nodo representa una ciudad y las ciudades están unidas por líneas a las cuales se les asocia una distancia o un costo conocido. Existen dos tipos de grafos: los grafos simétricos y grafos asimétricos. La diferencia es muy simple: en los primeros la distancia o costo es la misma si se va desde el cliente X hasta el cliente Y que si se va del Y al X; y en los segundos la distancia o costo es diferente en ambos casos.

Si tomamos en cuenta un grafo asimétrico y un conjunto finito K de clientes, y definimos nuestra variable x_{ij} como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, si\ el\ arco\ i \rightarrow j\ está\ en\ el\ tour \\ 0, \qquad si\ no\ lo\ está \end{cases}$$

Tomando como parámetro C_{ij}, que representa el costo de ir de la ciudad i a ciudad j, permitiendo que C_{ij}, sea diferente de C_{ji}. Donde por costo nos podemos referir ya sea a dinero, tiempo, distancia, etc. dependiendo del problema bajo estudio.

Una modelación sería la siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1 \qquad Para\ i = 1, \dots, m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \qquad Para\ j = 1, \dots, m \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in K}\sum_{j \in K} X_{ij} \leq |K| - 1 \qquad \forall K \subset (1, \dots, m) \qquad (3)$$

$$X_{ij} \in (0, 1) \qquad (4)$$

Donde la restricción (1) y (2) aseguran que cada cliente sea visitado una única vez. La restricción (3) elimina los llamados subtours que se puedan generar, un subtour es tour en un subconjunto de menos de K clientes. Mientras que (4) define la naturaleza de la variable. Teniendo como función objetivo minimizar el costo total de viaje.

A pesar de que el *TSP* tiene un planteamiento simple y es uno de los problemas más estudiados, no existe un algoritmo que lo resuelva de manera exacta, por lo que solo se pueden obtener aproximaciones que no garantizan ser la solución óptima. Por lo que el *TSP* es considerado como un problema *NP-duro*

(Lenstra & Rinnooy, 1981), es decir, es un problema en el que el esfuerzo computacional requerido para encontrar una solución óptima crece de manera exponencial con el número de ciudades del problema. Por lo que la complejidad del *TSP* es determinada a partir de las ciudades que forman la red, entre más ciudades, mayor será el número de rutas posibles, y por lo tanto el tiempo computacional requerido es mayor.

De manera general, dado una red de n ciudades se tendrán $n!$ rutas posibles. Para generar una solución al *TSP* se utilizan otros métodos que si bien no obtienen la solución óptima si ofrecen una solución aproximada que es aceptable. Estos métodos son los llamados algoritmos heurísticos o metaheurísticos, los cuales han logrado resolver *TSP* con un elevado número de nodos.

En (Dantzing, Fulkerson, & Johnson, 1954) se presentó el primer método de solución para el problema *TSP* con 49 ciudades. Este artículo fue de gran importancia debido a que resolvieron un *TSP* con un número alto de ciudades en ese momento a través de un algoritmo que sirvió de base e inspiración a muchos otros investigadores. Para la resolución se aplicaron diferentes técnicas de programación lineal dando lugar al método de los cortes de plano, que más tarde se convertiría en el algoritmo de ramificación y acotación. Probaron el método seleccionando 49 ciudades, una en cada uno de los 48 estados de Estados Unidos y Washigton, D.C., eligieron estas ciudades porque la distancia por carretera entre éstas era fácil de obtener con un mapa.

Posteriormente se solucionaron problemas con un número de ciudades más elevado por distintos métodos. En (Cook, 2007) y (Pérez, 2011) se enlistan algunos de los algoritmos más relevantes para resolver el *TSP*.

Año	Núm. de cd.	Método	Artículo
1954	49	Algoritmo de ramificación y acotación.	Solution of a large-scale traveling-salesman problem (Dantzing, Fulkerson, & Johnson, 1954)
1971	64	Relajación lagrangiana	The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II. (Held & Karp, 1971)

1975	67	Relajación, técnica del gradiente	On improving relaxation methods by modified gradient techniques. (Camerini, Fratta, & Maffioli, 1975)
1980	120	Método de planos de corte	On the symmetric travelling salesman problem: Solution of a 120-city problem. (Grötschel, On the symmetric travelling salesman problem: Solution of a 120-city problem, 1980)
1980	318	Método de planos de corte y ramificación y acotamiento	Solving large-scale symmetric travelling salesman problems to optimal-Ity (Crowder & Padberg, 1980)
1985	200	Recocido simulado, Método Montecarlo	Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. (Cerny, 1985)
1987	532	Método Ramificación y acotamiento	Optimization of a 532-city symmetric travelling salesman problem by branch and cut (Padberg & Rinaldi, Optimization of a 532-city symmetric travelling salesman problem by branch and cut, 1987)
1987	666	Método de planos de corte	A cutting plane algorithm for minimum perfect 2-matchings (Grötschel & Holland, A cutting plane algorithm for minimum perfect 2-matchings, 1987)
1991	1002,2392	Método de ramificación y acotamiento	A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems (Padberg & Rinaldi, A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems, 1991)
1991	1000	Método de planos de corte	Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems (Grötschel & Holland, Solution of large-scale symmetric travelling, 1991)
1992	1000000	Inserción	Fast algorithms for geometric traveling salesman problems. (Bentley, 1992)
1993	1000	Programación evolutiva	Applying evolutionary programming to selected traveling salesman problems. (Fogel, 1993)
1995	7397	Método de planos de corte	Finding cuts in the TSP. (Applegate D. , Bixby, Chvatal, & Cook, 1995)
1997	1577	Sistema colonia de hormigas	Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem. (Dorigo & Gambardella, 1997)
1997	783	Sistema de	MAX-MIN Ant System and local search for the

		hormigas	traveling salesman problem. (Stuetzle & Hoos, 1997)
1999	48	Algoritmo genético	Genetic Algorithms for the Travelling Salesman Problem: A Review of Representations and Operators. (Larrañaga, Kuijpers, Murga, Inza, & Dizdarevic, 1999)

Tabla 3. Métodos de solución del *TSP*.

Una generalización del *TSP* es el *m-TSP* en el cual se cuenta con varios agentes de ventas que tienen que visitar un número finito de ciudades. El objetivo ahora no es sólo construir una ruta sino *m-rutas*, una por cada agente, donde al igual que el TSP cada cliente tiene que ser visitado una sola vez y cada ruta debe iniciar y terminar en un mismo lugar, denominado depósito.

La búsqueda de soluciones para un *TSP* se limita a tres estrategias:

1) Buscar casos particulares del problema que permitan la utilización de algoritmos eficientes.
2) Buscar buenos algoritmos, lo cual puede consumir mucho tiempo.
3) Buscar soluciones rápidas, las cuales tienen la posibilidad de que no sean óptimas.

2.2.2 *The Truck Dispatching Problem* *(Problema de distribución de combustible)*

The Truck Dispatching Problem es una extensión del Problema del Agente Viajero, en el que se agrega la condición que a cada cliente se le hace una entrega específica, excepto en el llamado depósito.

En (Dantzing & Ramser, 1959) se introdujo este problema, en dicho artículo se describe una aplicación en el mundo real relacionada con la entrega de combustible a estaciones de servicio desde una terminal o depósito, y proponen la primer formulación matemática y un algoritmo para darle solución. En este problema se busca encontrar una ruta óptima para la entrega de combustible entre una terminal a granel y un número de estaciones de servicio, buscando la manera en cómo se asignarán las estaciones a los vehículos para que se cubra cierta demanda y la distancia total recorrida por los vehículos sea mínima (o bien el costo total sea el mínimo).

La formulación de este problema parte de un conjunto de *n* estaciones, que deben ser abastecidas desde un punto inicial (terminal a granel); una matriz de distancias, la cual especifica la distancia entre las estaciones; un vector de demandas, que especifica la demanda de cada estación; una flota de vehículos con idéntica capacidad, la cual debe ser mayor que la máxima demanda; donde el problema es encontrar las estaciones que formarán parte de la ruta de cada vehículo de la flota minimizando la distancia total recorrida (Dantzing & Ramser, 1959). Enlistando sus características son:

- Todos los vehículos con los que se cuentan poseen la misma capacidad.
- Cada cliente debe ser visitado una única vez.
- La demanda de cada cliente debe ser satisfecha.
- La capacidad del vehículo no debe ser sobrepasada en cada ruta.
- Los vehículos inician y terminan su ruta en el depósito.

El modelo matemático propuesto fue el siguiente. Dado:

1) Un conjunto de n estaciones P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que se abastecen del punto P_0, llamada punto final.
2) Una matriz de distancias $[D] = [d_{ij}]$ la cual especifica la distancia entre cada par de puntos $(i = 1, 2, \ldots, n)$ donde $d_{ij} = d_{ji}$
3) Un vector de demandas $(Q) = (q_i)$ el cual especifica la demanda q_i que deberá ser entregada al punto P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$
4) La capacidad de los vehículos C, donde $C > \max q_i$
5) Si $x_{ij} = x_{ji} = 1$ el P_i y el P_j están asociados $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ y si $x_{ij} = x_{ji} = 0$ los puntos no están asociados, de donde se deduce que

$$\sum_{j=0}^{n} X_{ij} = 1 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Y tomando en cuenta que cada punto P_i está conectado con P_0 o con al menos un punto P_j, tenemos que $x_{ii} = 0$ para cada$(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

6) El problema es encontrar los valores para x_{ij} tal que la distancia total recorrida sea mínima bajo las condiciones ya mencionadas.

$$D = \sum_{i,j=0}^{n} d_{ij} X_{ij}$$

Cabe destacar que aunque en el artículo (Dantzing & Ramser, 1959), los autores enfatizan más en un problema con flota heterogénea y un solo producto, se hace mención sobre la variante a éste, es decir, en la formulación sí se contará con más de un producto a distribuir y/o una flota heterogénea. Situaciones que son más comunes en la práctica, ya que la mayoría de las empresas no sólo manejan un tipo de producto y por lo regular su flota tiene diferentes características.

Posteriormente (Clarke & Wright, 1964) propusieron el primer algoritmo eficiente para la resolución de este problema, el llamado algoritmo de los ahorros (Savings algorithm). Este algoritmo consiste en partir de una solución inicial e ir añadiendo uniones que generen mayores ahorros sin quebrantar las restricciones del problema.

Este problema es de suma importancia ya que es la base de lo que hoy llamamos Problema de Ruteo de Vehículos o VRP, siendo (Christofides, 1976) el primero en usar este nombre.

2.2.3 Problema de ruteo de vehículos (VRP)

Un problema de ruteo de vehículos o simplemente *VRP* es el problema central en los campos de transporte, distribución y logística, es un problema de optimización en el que una empresa debe determinar las rutas que generen el menor costo posible, para repartir ciertos productos entre sus clientes. El *VRP* puede ser considerado como el *m-TSP*, en donde a cada cliente se le asocia una demanda, puede definirse a partir de un determinado periodo de tiempo, un conjunto de clientes, uno o más depósitos, una flota de vehículos y una red de transporte. Su solución consiste en un conjunto de rutas, donde cada ruta es realizada por un vehículo y éstas empiezan y terminan en el depósito correspondiente, tal que todos los requerimientos de los clientes así como las restricciones operacionales son satisfechas, y el costo total de transportación minimizado (Toth & Vigo, 2002). En la figura 4 se puede observar la solución a un problema general de *VRP* en el que a cada vehículo se le asigna una ruta y ésta comienza y termina en el llamado depósito.

Cabe destacar que aunque lo más usual al plantearse un *VRP* sea minimizar el costo total de transportación, no es el único objetivo de un *VRP*. Ya que puede también buscarse minimizar la distancia total recorrida, el número de vehículos utilizados, el tiempo de servicio, las penalizaciones, etc. o por otro lado puede tenerse como objetivo maximizar el beneficio, servicio al cliente, nivel de utilización de los vehículos, etc. todo depende de la situación que se presente y de los objetivos del análisis.

Este tipo de problemas tiene entre otras características las siguientes:

- Cada cliente tiene una demanda conocida que debe ser satisfecha.
- Se cuenta con una flota homogénea de vehículos, es decir, todos los vehículos tienen las mismas características.
- Cada vehículo debe iniciar y terminar su ruta en el llamado depósito.
- Cada cliente debe ser visitado una única vez y por un solo vehículo.
- Se tiene una red de comunicación entre los clientes.
- Se cuenta con un solo depósito para abastecer las demandas.
- Existe un costo asociado en cada arco de la red de comunicación entre clientes.

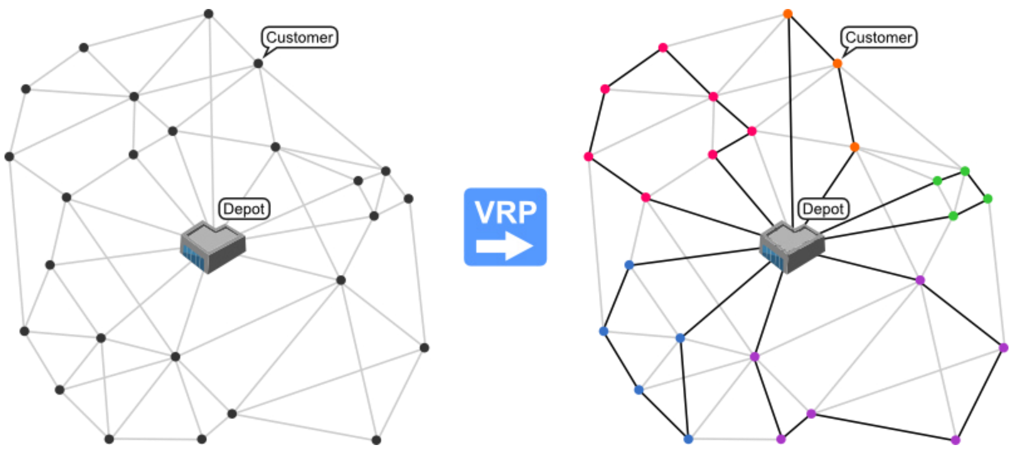


Figura 5. Una solución al VRP
Fuente: http://neo.lcc.uma.es/vrp/vehicle-routing-problem/

La modelación matemática para el *VRP* clásico es como la presentada en (Hillier & Lieberman, 1994), esta modelación parte de los siguientes parámetros y variables:

- Origen i $(i = 1,2, \dots , m)$
- Unidades disponibles para distribuir S_i
- Destino j $(j = 1,2, \dots , n)$
- Demanda del cliente j, d_j
- Costo de transportación del origen i al destino j, C_{ij}
- Costo total de distribución, z
- Número de unidades que se distribuyen del origen i al destino j, X_{ij}

El modelo propuesto es el siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$sujeto\ a: \quad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = S_i \qquad Para\ i = 1, 2, \dots , m$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = d_j \qquad Para\ j = 1, 2, \dots , n$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j$$

Donde la restricción (5) limita las unidades entregas a la cantidad de unidades disponibles, la restricción (6) nos asegura que la demanda de cada cliente sea satisfecha; y la restricción (7) nos establece la naturaleza de la variable x_{ij} . Teniendo como objetivo minimizar el costo total de transportación.

Dado que el *VRP* es uno de los problemas más importantes de optimización combinatoria y uno de los más estudiados debido a su importancia es el sector empresarial para reducir los costos de transportación, en (Toth & Vigo, 2002) se asegura que el uso de métodos computarizados en procesos de distribución genera ahorros de entre el 5% y el 20%.

El *VRP* se centra principalmente en dos cosas: la asignación de los clientes y la secuencia en la que éstos serán visitados en la ruta de cada vehículo; teniendo como objetivo el ya mencionado: encontrar un conjunto de rutas tal que se satisfagan todas las restricciones operativas y se minimice el costo total de transportación.

Sin duda es uno de los problemas de optimización combinatoria más estudiados en la literatura debido a su alta complejidad y aplicación, muchos autores han trabajado en este problema de ruteo. Como ya se mencionó los primeros que propusieron una formulación matemática fueron (Dantzing & Ramser, 1959), años después (Clarke & Wright, 1964) propusieron el primer algoritmo heurístico efectivo para resolverlo, dicho algoritmo es conocido como el algoritmo de Clarke y Wright o bien algoritmos de los ahorros, el cual entrega soluciones aceptables y es muy utilizado por el tiempo computacional requerido y por la facilidad con la que sea aplica. A partir de estos trabajos el problema de ruteo de vehículos ha crecido enormemente, tanto en la parte de modelación como en la búsqueda de algoritmos eficientes que permitan su resolución.

El algoritmo de Clarke y Wright consiste en conectar todos los clientes de dos en dos con el almacén y se calculan los ahorros obtenidos en costo de transporte, se clasifican alternativas de unión por ahorros decrecientes; se toma la alternativa de unión de máximo ahorro y que a la vez sea consistente con el número de vehículos y sus capacidades; se procede iterando hasta que no exista mejora alguna (Antón Robusté, 2005).

Aunque existe un extenso trabajo en cuanto a la resolución del *VRP*, los problemas reales poseen características adicionales que ésta modelación no toma en cuenta. Las diferentes variaciones y restricciones adicionales al problema generan una familia de *VRP*, ya que tanto las empresas como los clientes tienen requerimientos diferentes a los que maneja un *VRP* clásico como lo son el número de vehículos, las ventanas de tiempo, las características de los vehículos, el tipo de demanda (estocástica o determinística), etc.

- **El número de vehículos.** Se refiere a la cantidad de vehículos con los que se cuenta para realizar las entregas.
- **Las ventanas de tiempo.** Es el período en el que se debe visitar a un cliente delimitado por una hora de inicio y una hora de finalización. Muchas

empresas establecen sus ventanas de tiempo para tener una mejor logística y establece penalizaciones a quienes no cumplan con ésta.

- **Características de los vehículos.** Ya sea que la empresa cuente con una flota propia o subcontratada, podemos hablar de dos tipos de flotas de vehículos: homogénea o heterogénea. Una flota homogénea es aquélla en la que todos los vehículos utilizados poseen las mismas características y una flota heterogénea es aquella en la que los vehículos poseen diferentes características.

Entre estas características podemos mencionar: la capacidad ya sea en volumen o peso, el costo de renta, el costo de kilometraje recorrido, el costo de entrega extra, las regiones en las que se puede utilizar, etc. Estas variantes serán analizadas en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

VARIANTES DEL VRP

En el presente capítulo se analizarán algunas de las variantes del *VRP* que se mencionaron en el capítulo anterior, donde éstas están basadas en el *VRP* clásico. En otras palabras, son un problema de ruteo de vehículos en el que se cuenta con un número finito de clientes a los cuales hay que abastecer desde un depósito a través de una flota de vehículos homogénea. Donde cada cliente debe ser visitado por un único vehículo y los vehículos deben partir y finalizar su ruta en el depósito. Teniendo como objetivo minimizar el costo total de transportación.

Las variantes son una simplificación o generalización de este problema para dar respuesta a los problemas del mundo real. En muchas de las aplicaciones del ruteo de vehículos se debe considerar un flota heterogénea, varios depósitos, ventanas de tiempo, orden de visitas, entregar y recoger, etc.

3.1 VRP Capacitado

Un *VRP* capacitado o *CVRP* (por sus siglas en inglés, Capacitated Vehicle Routing Problem) es un *VRP* más general, en el cual se le agrega una restricción, que hace que el *VRP* se apegue más a la realidad, ésta es la restricción de la capacidad de los vehículos. Un *CVRP* consiste en un conjunto de clientes con demandas conocidas que deben ser abastecidas desde un único depósito. Para hacer la distribución se cuenta con una flota homogénea de vehículo, es decir, la flota tiene una capacidad determinada e igual para todos los vehículos (la cual es una limitante tanto en la asignación de carga y ruta), los cuales deben iniciar y terminar su viaje en el depósito establecido. Cada cliente debe ser visitado exactamente por un único vehículo y una única vez y la demanda de cada cliente debe ser menor que la capacidad de los vehículos.

Dado que todos los vehículos son idénticos, se puede determinar el número de vehículos necesarios para realizar el ruteo dividiendo la demanda total entre la capacidad de los vehículos.

El problema es encontrar las rutas que deben realizar los vehículos con el objetivo minimizar el costo total, ya sea distancia, tiempo, número de vehículos, etc. sin violar la capacidad de los vehículos, es decir, que la suma de las demandas de los clientes que se visitan en cada ruta no deben exceder la capacidad del vehículo.

Esta capacidad de los vehículos que se establece como restricción adicional al *VRP* puede ser el número de piezas que pueden transportar los vehículos, el volumen total que cabe dentro de la caja, el peso que los vehículos pueden soportar, lo límites establecidos por gobierno, entre otras particularidades. Esta restricción dependerá de la situación particular para cada empresa.

Un modelo matemático para el *CVRP* es el propuesto en (Restrepo & Medina, 2008).

En el que se consideran los siguientes índices:

- $i = nodo\ de\ partida\ (1, 2, \dots n)$
- $j = nodo\ de\ llegada\ (1, 2, \dots, n)$
- $n = nodo\ totales$
- $k = vehículos\ (1, 2, \dots, K)$

Se definen las siguientes variables:

- $X_{ij}^{k} = \begin{Bmatrix} 1\ Si\ el\ vehículo\ k\ recorre\ el\ arco\ del\ nodo\ i\ al\ nodo\ j \\ 0\ En\ cualquier\ otro\ caso \end{Bmatrix}$
- $Y_{ij} = \begin{Bmatrix} 1\ Si\ el\ recorrido\ se\ realiza\ desde\ i\ hasta\ j \\ 0\ En\ cualquier\ otro\ caso \end{Bmatrix}$
- $K\ =\ Número\ de\ vehículos\ a\ utilizar$

Y se consideran los siguientes parametros:

- $C_{ij} = Costo\ de\ transporte\ del\ nodo\ i\ al\ nodo\ j$
- $d_i = Demanda\ en\ el\ nodo\ j$
- $u = Capacidad\ del\ recurso\ k$
- $n = Número\ de\ clientes$

Para llegar a la formulación matemática que sería la siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{(i,j)\in A} C_{ij} Y_{ij}$$

$$sujeto\ a\!: \quad \sum_{1\le j\le n} X_{ij}^{k} = Y_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (8)$$

$$\sum_{1\le j\le n} Y_{ij} = 1 \qquad \forall i \qquad (9)$$

$$\sum_{1\le j\le n} Y_{ij} = 1 \qquad \forall j \qquad (10)$$

$$\sum_{1 \le j \le n} Y_{0j} = k \qquad (11)$$

$$\sum_{1 \le i \le n} Y_{i0} = k \qquad (12)$$

$$\sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le n} d_i X_{ij}^k \le u \qquad \forall k \qquad (13)$$

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in Q} Y_{ij} \le |Q| \qquad \forall Subconjunto\ Q\ de\ (1, 2, \dots, n)\ k \le K \qquad (14)$$

$$Y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (15)$$

$$X_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A, \forall k \qquad (16)$$

Donde el conjunto de arcos A se define como $A = \{(i,j): Y_{ij} = 1\}$, la restricción (8) asigna un vehículo a la ruta (i,j), (9) y (10) aseguran que todos los nodos sean visitados, (11) y (12) aseguran que todos los vehículos partan y regresen al depósito y establece que se utilizaron k vehículos. Y la restricción que hace característico al *CVRP* es la (13), ya que garantiza que la capacidad de los vehículos no sea sobrepasada. La eliminación de los subtours se garantiza con la restricción (14), es decir, evitar tours en un subconjunto de clientes en el que el depósito no forma parte de éste. Y por último (15) y (16) definen la naturaleza de las variables.

Algunos métodos de solución como ramificación y acotamiento, set-covering, heurísticas y metaheurísticas son algunos de los que podemos encontrar en (Toth & Vigo, 2002); una recopilación de algoritmos exactos y heurísticos en (Laporte G. , 1992); un algoritmo exacto para una red de dos flujos en (Baldacci, Hadjiconstantinou, & Mingozzi, 2004); un algoritmo genético (Machado, Pereira, Tavares, & Costa, 2002) y (Tavares, Baptista, Machado, & Ernesto, 2003); y (Olivera, 2004).

3.2 VRP con visitas periódicas

El *VRP* con visitas periódicas es comúnmente llamado *PVRP* (por sus siglas en inglés, Periodic Vehicle Routing Problem) y es una generalización del *VRP* en el cual se extiende el periodo de planeación de 1 día a M días. Las fechas en las que los vehículos visitan a cada uno de los clientes no están establecida a priori, por lo que se realiza una lista de las posibles fechas en las que se realizarán dichas visitas. Y cada cliente tiene una frecuencia de visita, dentro de este periodo de M días, que indica con qué frecuencia debe ser visitado este cliente. Esta frecuencia de visita no necesariamente es la misma para todos los clientes.

Al igual que en *CVRP* en el *PVRP* se cuenta con una flota de vehículos homogénea, los cuales parten del depósito para satisfacer las demandas de los clientes y al terminar su jornada laboral o entregada toda su carga éstos regresan al depósito. En el caso del *PVRP* el día de partida y retorno al depósito no necesariamente es el mismo ya que se cuenta con un periodo de planeación de M días.

El objetivo de este problema es establecer un conjunto de M rutas que satisfagan las restricciones operacionales, entre ellas la restricción particular del número de visitas, que minimice el costo de la suma total de los costos de las rutas establecidas en el periodo de planeación.

La solución de un *PVRP* asigna un programa de visitas a cada uno de los clientes y uno a cada día del horizonte de tiempo, definiendo así las rutas de los vehículos en las cuales se visite a todos los clientes y se establezca el día en el que son servidos. La figura 6 nos muestra un ejemplo de lo que sería una solución para el *PVRP.*

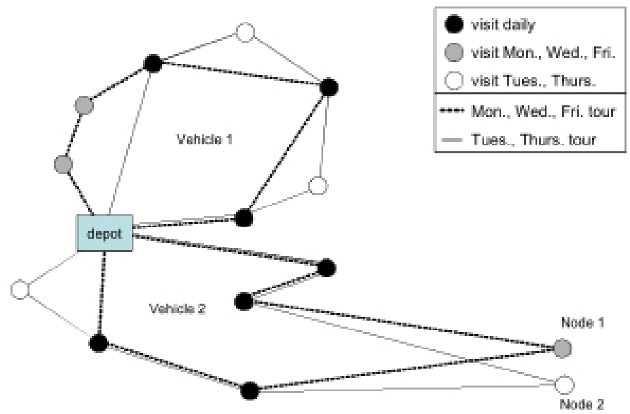


Figura 6. Diagrama de un ruteo para un PVRP

El *PVRP* fue introducido por (Beltramin & Bodin, 1974) y (Russell & Igo, 1979) quienes propusieron la primer formulación y una heurística para este problema.

Un modelo planteado para este problema es el propuesto por (Francis, Smilowitz, & Tzur, 2008) el cual se expone a continuación:

Dado un grafo $G = (N, A)$, una red completa con costo de viaje conocidos para el conjunto de arcos A. Donde el conjunto de nodos, N, incluye el depósito y los clientes que son visitados con predeterminada frecuencia durante un período de planeación. El objetivo es determinar un conjunto de rutas, una para que cada vehículo tal que se minimice el costo total de viaje satisfaciendo las restricciones operacionales.

Sea M el conjunto de días, donde $d \in M$ constituye el período de planeación.

Si se define itinerario como el conjunto de días dentro del período de planeación en el cual los nodos son visitados.

Sea S como el conjunto de todos los itinerarios $(s \in S)$. Donde cada itinerario en S es completamente descrito por un vector a_{sd} tal que:

$$a_{sd} = \begin{Bmatrix} 1 \; Si \; el \; día \; d \in M \; pertenece \; al \; itinerario \;\; s \in S \\ 0 \; En \; cualquier \; otro \; caso \end{Bmatrix}$$

A cada arco se le asocia un costo $c_{ij}, \forall i, j \in A$; un período de planeación de $|D|$ días; un nodo depósito $i = 0$; un conjunto de nodos $N_c = N \backslash \{0\}$ donde cada nodo $i \in N_c$ se le asocia una demanda total $W_i$en el periodo de planeación, y requiriendo un número de visitas f_i; un conjunto de vehículos V con capacidad C; y un conjunto de itinerarios S.

Cada nodo requiere de un número de visitas f_i durante el período de planeación. Para cada nodo $i \in N_c$, se debe seleccionar un itinerario de un subconjunto no vacío de itinerarios candidatos $S_i \subseteq S$ tal como se describe a continuación.

$$S_i = \left\{ s \in S \colon \sum_{d \in M} a_{sd} = f_i \right\}$$

El modelo planteado para el PVRP es el siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{i,j \in N_c} \sum_{k \in K} \sum_{d \in M} x_{ijkd} c_{ij}$$

$$sujeto\ a: \quad \sum_{S \in S_i} z_i^s \geq 1 \qquad \forall i \in N_c \qquad (17)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik}^d = \sum_{S \in S_i} a_{sd} z_i^s \qquad \forall i \in N_c, d \in M \qquad (18)$$

$$\sum_{i \in N_c} W_i\, x_{ik}^d \leq C \qquad \forall k \in K, d \in M \qquad (19)$$

$$\sum_{i,j \in Q} x_{ijk}^d \leq |Q| - 1 \qquad \forall Q \in N_c, k \in K, d \in M \qquad (20)$$

Donde la restricción (17) asigna a cada nodo un itinerario, la (18) asegura que los vehículos estén en ruta en el día apropiado para visitar el itinerario correspondiente y la (19) asegura las asignaciones a los vehículos no sobrepasan las restricciones de capacidad. La eliminación de los subtours se realiza con la restricción (20).

En (Francis, Smilowitz, & Tzur, 2008) se muestra un resumen de algunos métodos de solución, incluyendo heurísticas y metaheurísticas, en (Cordeau, Gendreau, & Laporte, 1997) se propone un método de búsqueda tabú para su resolución, (Gulczynski, Golden, & Wasil, 2011) desarrollan una heurística utilizando programación entera y el algoritmo RRT (Record-to-Record Travel), y en (Drummond, Ochi, & Vianna, 2001) se presenta un metaheurística basada en algoritmos genéticos y una heurística búsqueda local.

3.3 VRP con ventanas de tiempo

El *VRPTW* (por sus siglas en inglés, VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows) es una generalización del *VRP* que cuenta con una restricción adicional, ésta es que cada cliente tiene un intervalo de tiempo en el cual debe ser visitado, llamado ventana de tiempo. Si el vehículo llega fuera de esta ventana de tiempo, es decir, llega antes o después de los límites establecidos se tendrá que pagar un costo adicional por no cumplir con dicho intervalo de tiempo, a esto se le suele llamar penalización.

El problema es encontrar las rutas que deben realizar los vehículos con el objetivo de minimizar el costo total, ya sea distancia, número de vehículos, etc., pero sobre todo el tiempo de espera necesario para abastecer a todos los clientes respetando las ventanas de tiempo. Es necesario conocer la ventana de tiempo de cada uno de los clientes, el momento en el que se comienzan las rutas, el tiempo necesario para viajar de un cliente a otro y para servir a cada uno de ellos.

Una solución factible para este problema se considera cuando los vehículos realizan sus actividades dentro de los límites de la ventana de tiempo, es decir, que no abastecen después del límite superior de la ventana ni aumenta el tiempo de espera por llegar antes del límite inferior. En la figura 7 se muestra el ruteo de *VRPTW* en el cual se puede observar la ventana de tiempo establecida para cada cliente y posteriormente el lapso en el que se abastece.

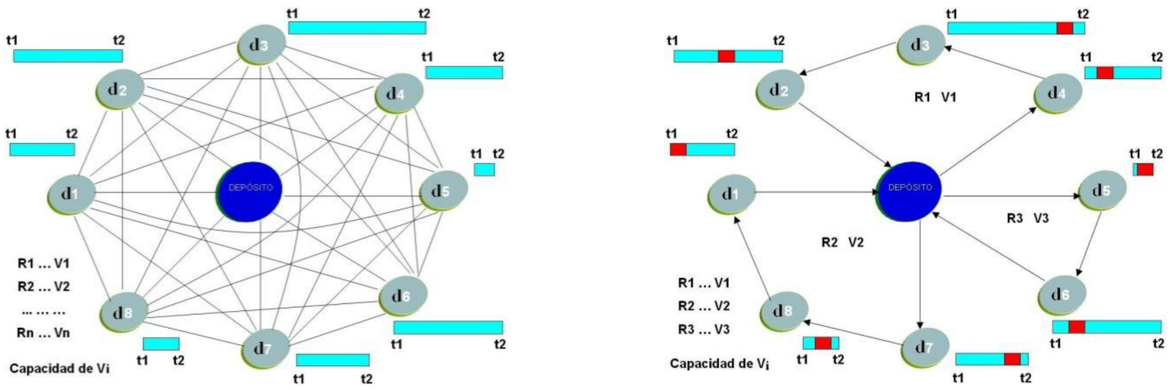


Figura 7. Diagrama de VRPTW

Un modelo planteado para este problema es el presentado en (Azi, Gendreau, & Potvin, 2007) en el cual dado un grafo dirigido con un conjunto de arcos A donde se cuenta con una flota de vehículos homogénea con capacidad Q se debe realizar entregas desde un depósito a un conjunto de clientes $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Donde a cada arco $(i,j) \in A$ se le asocia una distancia d_{ij} y un tiempo de viaje t_{ij}, cada cliente $i \in N$ tiene una demanda asociada q_i, se tiene un tiempo de servicio s_i y una ventana de tiempo $[a_i, b_i]$, donde a_i es la hora de inicio en la que el vehículo puede realizar la entrega y b_i la hora final. Por consiguiente si el vehículo llega al cliente i antes de la hora a_i éste debe esperarse para poder realizar la entrega y si llega después de la hora b_i ya no podrá realizar la entrega. La jornada de trabajo del vehículo está conformada por un conjunto de rutas $K = \{1,2,\ldots k\}$ donde cada ruta inicia y termina en el depósito. En este modelo se asume que las rutas son realizadas en orden $1, 2, \ldots, k$. Cada cliente en la ruta debe ser visitado antes de un plazo determinado asociado a esa ruta, lo cual se realiza mediante la adición de una constante t_{max} a la hora de inicio de la ruta. Además, un tiempo de preparación (*setup time)* σ^r para cargar el vehículo es asociado a cada ruta. El objetivo es minimizar la distancia total de viaje para servir a todos los clientes al mismo tiempo que satisface las restricciones de capacidad, ventanas de tiempo y plazo.

Tomando en cuenta las siguientes variables:

- x_{ij}^r = Variable binaria que toma el valor de 1 si el arco $(i,j) \in A^+$ está en la ruta r y el valor de 0 en cualquier otro caso.
- y_i^r = Variable binaria que toma el valor de 1 si el cliente i está en la ruta r y el valor de 0 en cualquier otro caso.
- t_i^r = Tiempo de inicio del servicio del cliente i en la ruta r.
- t_0^r = Tiempo de inicio de la ruta r.
- t_{n+1}^r = Tiempo de final de la ruta r.

La formulación matemática sería la siguiente, usando M con una constante arbitraria:

$$minimizar\ z = \sum_{r \epsilon K} \sum_{(i,j) \epsilon A} d_{ij} x_{ij}^r$$

$sujeto\ a$:

$$\sum_{j \in N^+} x_{ij}^r = y_i^r \qquad \forall i \in N, j \in K \qquad (21)$$

$$\sum_{r \in K} y_i^r = 1 \qquad \forall i \in N \qquad (22)$$

$$\sum_{i \in N^+} x_{ih}^r - \sum_{j \in N^+} x_{hj}^r = 0 \qquad \forall h \in N, r \in K \qquad (23)$$

$$\sum_{i \in N^+} x_{0i}^r = 1 \qquad \forall r \in K \qquad (24)$$

$$\sum_{i \in N^+} x_{i(n+1)}^r = 1 \qquad \forall r \in K \qquad (25)$$

$$\sum_{i \in N} q_i y_i^r \leq Q \qquad \forall r \in K \qquad (26)$$

$$t_i^r + s_i + t_{ij} - M\left(1 - x_{ij}^r\right) \leq t_j^r, (i,j) \in A^+ \qquad \forall r \in K \qquad (27)$$

$$a_i y_i^r \leq t_i^r \leq b_i y_i^r \qquad \forall i \in N, r \in K \qquad (28)$$

$$t_0^1 \geq \sigma^1 \qquad (29)$$

$$t_{n+1}^r + \sigma^{r+1} \leq t_0^{r+1}, r = 1, \dots, k-1 \qquad (30)$$

$$\sigma^r = \beta \sum s_i y_i^r \qquad \forall r \in K \qquad (31)$$

$$t_i^r \leq t_0^r + t_{max}, i \in N \qquad \forall r \in K \qquad (32)$$

$$x_{ij}^r \in \{0,1\}, (i,j) \in A^+ \qquad \forall r \in K \qquad (33)$$

$$y_i^r \in \{0,1\}, i \in N \qquad \forall r \in K \qquad (34)$$

Donde la restricción (21) y (22) establecen que cada cliente debe ser visitado una única vez, de la restricción (23) a la (25) realizan la función de conservar el flujo de la trayectoria del vehículo, la restricción (26) establece que la demanda total en cada ruta no debe exceder la capacidad del vehículo, de la restricción (27) a la (30) se garantiza la viabilidad del horario, mientras que la restricción (31) define el *vehicle setup time* como la suma del tiempo de servicio de todos los clientes en la ruta multiplicada por el parámetro β y por último la restricción (32) garantiza que el plazo para servir al cliente se cumpla. La restricción (28) asigna a la variable t_i^r el valor de 0 cuando el cliente i no pertenece a la ruta r lo que lleva a que la (32) se satisfaga. Y la naturaleza de las variables es declara en (33) y (34).

Varios algoritmos han sido propuestos para la solución de esta variante del *VRP*, por ejemplo: en (Blanton & Wainwright, 1993) se aplica por primera vez el algoritmo genético, en (Cordeau, Gendreau, & Laporte, 1997) se propone una búsqueda tabú como un método heurístico para su resolución, en (Doerner, Hartl, & Reimann, 2001) se propone un algoritmo de colonia de hormigas, en (Tan & Zhang, 2006) se propone también un algoritmo de colonia de hormigas pero incorporando el método heurístico de inserción secuencial, en (Gendreau, Hertz, Laporte, & Stan, 1998) se desarrolla una heurística de inserción, en (Vacic & Sobh, 2002) se desarrolla un algoritmo genético.

3.4 VRP con entregas y recogidas

El *VRPPD* (por sus siglas en inglés, Vehicle Routing Problem with Pickups and Delivery) es un *VRP* en el cual no sólo se abastece a los clientes, sino que se contempla la posibilidad de que los clientes puedan regresar algún tipo de mercancía. En este tipo de problemas se debe de tomar en cuenta que los artículos que los clientes regresen deben caber dentro del vehículo, y que la capacidad de los vehículos no puede ser sobrepasada, lo cual hace más difícil el problema de ruteo y puede no aprovecharse al cien las capacidades de los vehículos, incrementando así la distancia del vehículo y/o la necesidad de necesitar más de éstos.

De acuerdo con (Savelsbergh & Sol, 1995) cada vehículo requiere un tamaño específico de la carga que será transportada, los lugares donde éstas serán recogidas y donde serán entregadas. Cada carga debe ser transportada por uno vehículo desde su origen hasta su destino sin transbordos a otras locaciones.

El *VRPPD* puede definirse como un *TSP* en el cual una ciudad se establece como el depósito mientras las demás ciudades son consideras como los clientes, estos clientes son divididos en dos categorías dependiendo del tipo de servicio requerido: distribuidor o receptor. Cada cliente que distribuye productos también requiere una cantidad determinada; y viceversa, cada cliente que recibe productos también proporciona una cantidad determinada. De esta manera la cantidad de productos proporcionada por el cliente que distribuye puede ser utilizada para satisfacer la demanda de un cliente receptor. Los vehículos al igual que en un *CVRP* tienen una capacidad limitada y deben comenzar y terminar su ruta en el depósito.

El objetivo es minimizar la distancia total recorrida por los vehículos al cumplir con los requerimientos de los clientes sin exceder la capacidad de los vehículos.

En la figura 8 se puede observar el ruteo de un *VRPPD* en el cual se cuenta con planea la ruta para entre los clientes receptores y distribuidores.

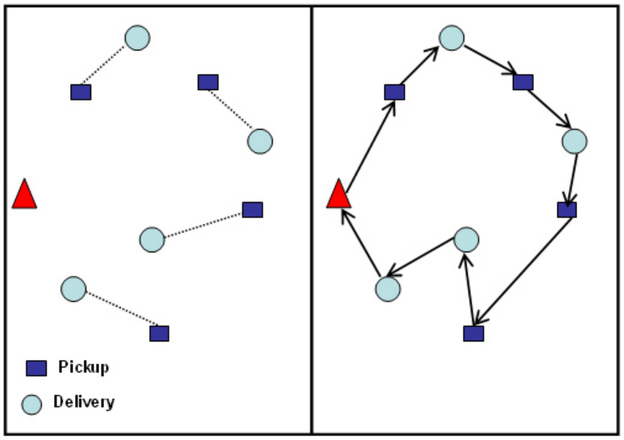


Figura 8. Diagrama de VRPPD

Fuente: https://users.cs.cf.ac.uk/C.L.Mumford/Research%20Topics/PDPTW/Outline.html

Para un estudio sobre este tipo de problemas se puede referir a los trabajos de (Xu, CHen, Rajagopal, & Arunapuram, 2003) y (Lin, 2008), en los cuales se encuentra una información más amplia sobre este tipo de problemas.

Para fines de esta tesis, consideraremos el modelo para el *VRPPD* presentado en (Liong, Wan Rosmanira, Khairuddin, & Zirour, 2008) el cual se muestra a continuación.

Sea $v = \{1,2,\ldots,V\}$ el conjunto de los vehículos; $n = \{1,2,\ldots,N\}$ el conjunto de los clientes; C_n el costo de asignar un vehículo al cliente n $(\forall n \in N)$; u_n la carga máxima que tendrá que ser entregada al cliente n y t_v la capacidad restante parcial para el vehículo v.

$$X_{vn} = \begin{Bmatrix} 1 \; Si \; el \; vehículo \; v \; es \; asignado \; al \; cliente \; n \\ 0 \; En \; cualquier \; otro \; caso \end{Bmatrix}$$

La formulación matemática para el *VRPPD* es la siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{v \in V} \sum_{n \in N} C_n X_{vn}$$

$$sujeto\ a: \quad \sum_{v \in V} X_{nv} = 1 \qquad \forall n \in N \qquad (35)$$

$$\sum_{n \in N} u_n X_{nv} \leq t_v \qquad \forall v \in V \qquad (36)$$

$$X_{nv} \in \{0,1\} \qquad \forall n \in N, \ \forall v \in V \qquad (37)$$

Donde la restricción (35) asegura que cada cliente es asignado a exactamente un vehículo, la (36) que la carga máxima asignada a un cliente no exceda la capacidad del vehículo y la (37) determina la naturaleza de las variables.

En (Berbeglia, Cordeau, Gribkovskaia, & Laporte, 2007) se puede obtener información más amplia sobre el tema de ruteo de vehículos con entrega y recogida, además se exponen algunos de los métodos de solución planteados para este problema. Algunos métodos de solución pueden ser analizados: en (Hernandez & Salazar, 2003) y (Hernandez & Salazar, 2004) se propone un algoritmo de ramificación y corte.

3.5 VRP estocástico

El *VRPS* (por sus siglas en inglés, Vehicle Routing Problem Stochastic) es un *VRP* en el cual uno o más parámetros son aleatorios, es decir, se puede tener la situación en la que se establecen los clientes a través de la probabilidad de presencia o de ausencia, la demanda de los clientes es una variable al azar, y/o el tiempo de servicio son variables aleatorias, lo cual dificulta más la obtención de una solución óptima.

Debido a que determinadas variantes en este tipo de problema son aleatorias no se exige que todas las restricciones se cumplan para la obtención de la solución, si no solo algunas de éstas.

Tanto la formulación como el algoritmo para el *VRPS* fueron introducidos por (Tillman, 1969) basado en el algoritmo de los ahorros de Clarke y Wright, posteriormente ha sido resuelto en (Biachi & Gambardella, 2002), (Bianchi, Birattari, & Chiarandini, 2004) y en (Gendreau, Laporte, & Seguin, 1996) se realiza un estudio sobre los métodos y las técnicas de solución.

Muchos de los trabajos realizados sobre el *VRPS* asumen que cuando una ruta planeada llega a fallar, el vehículo regresa al depósito para descargar o cargar, y luego vuelve a la ruta especificada.

Dependiendo de cuál parámetro es el aleatorio el *VRPS* puede tener diferentes parámetros aleatorios, por lo que clasifica en:

- ***VRP* con demanda estocástica (*VRPSD*).**

  Problema de ruteo en el que cada cliente necesita una cantidad específica de producto, la cual es una variable aleatoria.
- ***VRP* con clientes estocásticos (*VRPSC*).**

  A cada cliente se le asigna una determinada probabilidad de requerimiento de visita.
- ***VRP* con tiempo de viaje estocástico (*VRPSTT).***

  El tiempo de viaje necesario para desplazarse de un cliente a otro o el tiempo de servicio son variables aleatorias.

Hablando del caso más común, *VRP* con demandas estocásticas, éste causa incertidumbre (con posible riesgo asociado, *penalización*) ya que se presentarán situaciones durante el tour en el que no se cuente con la mercancía necesaria para satisfacer la demanda del siguiente cliente a visitar y se tendrá que hacer una reprogramación de esta visita para poder cumplir con su demanda. Aunque el ruteo no se hace con demandas aleatorias sino que para hacerlo se cuenta con el histórico de las demandas de cada uno de los clientes con el que se puede especificar la distribución de probabilidad para las demandas de cada uno y así realizar un mejor ruteo.

Lo usual es que el *VRPSD* se modele en dos fases. En la primera etapa se asigna a cada vehículo una ruta. Los vehículos siguen esta ruta y conforme va visitando a cada cliente, éste le da a conocer su demanda. Cuando esta estrategia (ruta) falla se implementa un plan de contingencia para cubrir las demandas faltantes. La segunda etapa específica la ruta actual de cada vehículo tomando en cuenta el plan de contingencia seguido. El objetivo es generar un conjunto de rutas planeadas que minimice la suma de los costos de las rutas planeadas y el costo de los planes de contingencia.

3.6 VRP con múltiples depósitos

El *MDVRP* (por sus siglas en inglés, Vehicle Routing Problem with Multi-Depot) *e*s un *VRP* generalizado en el cual se cuenta con más de un depósito para satisfacer la demanda de cada cliente, por lo que como problema principal se tiene la asignación de los clientes a los depósitos. La flota con la que se cuenta es una flota homogénea y al igual que en el *VRP* cada vehículo debe de partir de cada depósito, visitar a los clientes asignados y posteriormente regresar a dicho depósito. Si los clientes se asocian únicamente a un solo centro de distribución, entonces este problema se puede modelar como varios *VRP* independientes.

El objetivo de este problema, además de los de un *VRP*, es minimizar la flota de vehículos asignados a cada depósito.

Un modelo matemático para este tipo de problema es el propuesto en (Surekha & Sumathi, 2011) el cual se expone a continuación.

Dados los siguientes conjuntos:

- $I = Conjunto\ de\ los\ depósitos$
- $J = Conjunto\ de\ los\ clientes$
- $K = Conjunto\ de\ los\ vehículos$

Tomando en cuenta los siguientes índices:

- $i = Depósito$
- $j = Clientes$
- $k = Ruta$

Considerando los siguientes parámetros:

- $N = Número\ de\ vehículos$
- $C_{ij} = Distancia\ entre\ los\ puntos\ i\ y\ j, i \in I, j \in \cup J$
- $V_i = Capacidad\ máxima\ del\ depósito\ i$
- $d_i = Demanda\ del\ cliente\ j$
- $Q_k = Capacidad\ del\ vehículo\ k$

Definiendo las siguientes variables:

- $X_{ijk} = \begin{Bmatrix} 1\ Si\ el\ cliente\ j\ es\ visitado\ después\ de\ i\ en\ la\ ruta\ k \\ 0\ En\ cualquier\ otro\ caso \end{Bmatrix}$
- $Z_{ij} = \begin{Bmatrix} 1\ Si\ el\ cliente\ j\ asignado\ al\ depósito\ i \\ 0\ En\ cualquier\ otro\ caso \end{Bmatrix}$
- $U_{ik} = Variable\ auxiliar\ para\ la\ restricción\ de\ no\ subtours\ en\ la\ ruta\ k$

La formulación matemática es la siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{i\in I\cup J}\sum_{j\in I\cup J}\sum_{k\in K} C_{ij}X_{ijk}$$

$$sujeto\ a: \quad \sum_{k\in K}\sum_{i\in I\cup J} X_{ijk} = 1 \qquad j\in J \qquad (38)$$

$$\sum_{j\in J} d_j \sum_{i\in I\cup J} X_{ijk} \le Q_k \qquad k\in K \qquad (39)$$

$$U_{lk} - U_{jk} + NX_{ijk} \le N-1 \qquad l,j\in J,\ k\in K \qquad (40)$$

$$\sum_{j\in I\cup J} X_{ijk} - \sum_{j\in I\cup J} X_{jik} = 0 \qquad k\in K, i\in I\cup J \qquad (41)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} X_{ijk} \le 1 \qquad k\in K \qquad (42)$$

$$\sum_{j\in J} d_i Z_{ij} \le V_i \qquad i\in I \qquad (43)$$

$$-Z_{ij} + \sum_{i\in I\cup J}\left(X_{iuk} + X_{ujk}\right) \le 1 \qquad i\in I, j\in J, k\in K \qquad (44)$$

$$X_{ijk} \in (0,1) \qquad i\in I, j\in J, k\in K \qquad (45)$$

$$Z_{ij} \in (0,1) \qquad i\in I, j\in J \qquad (46)$$

$$U_{lk} \ge 0 \qquad l\in J, k\in K \qquad (47)$$

En la que la restricción (38) asegura que cada cliente tiene que ser asignado a una única ruta, la (39) limita la capacidad de los vehículos. La eliminación de los subtours se realiza con (40) y la conservación del flujo con (41). En (42) se establece que cada cliente solo puede ser visitado una única vez en cada ruta y con (43) se limita la capacidad de los depósitos. La restricción (44) establece que un cliente puede ser asignado a un depósito solo si hay una ruta desde ese depósito que pase por ese cliente. Y las restricciones (45) a (47) determinan la naturaleza de las variables $X_{ijk}, Z_{ij}\ y\ U_{lk}$

Algunos algoritmos propuestos pueden ser analizados en: (Renaud, Laporte, & Boctor, 1996) y (Cordeau, Gendreau, & Laporte, 1997) se propone un método de búsqueda tabú en (Thangiah & Salhi, 2001) se propone una generalización del método cluster basado en algoritmo genético.

3.7 VRP con flota heterogénea

En un *VRP* clásico la flota que se utiliza para la distribución es una flota homogénea, es decir, todos los vehículos poseen las mismas características. Un *MFVRP* (por sus siglas en inglés, Mix Fleet Vehicle Routing Problem) o también llamado *HVRP* (Heterogeneous Vehicle Routing Problem) son una generalización del *VRP* en el que se consideran diferentes tipos de vehículos, los cuales pueden diferir en la capacidad, en los costos fijos y/o variables, rapidez, capacidades físicas, velocidad, tiempo de viaje, equipo, número máximo de tiempo de viaje, capacidad de carga, disponibilidad, etc. Ambos problemas conservan la restricción del *VRP* de que cada cliente debe ser visitado por un solo vehículo, lo que obliga a que la demanda de cada uno debe ser menor o igual a la máxima capacidad de los vehículos. El objetivo es determinar cuáles vehículos utilizar para minimizar el costo total de transportación.

Entre los primeros artículos en los que fue estudiado este tipo de problema está (Liu & Shen, 1999) en el cual se plantea el modelo para un problema de ruteo de vehículo con una flota heterogénea y ventanas de tiempo.

Un modelo propuesto para este problema es el expuesto en (Gheysens, Golden, & Assad, 1984), en el cual solo se toma en cuenta la capacidad del vehículo y no el tiempo que le toma realizar la ruta. Se consideran n clientes que deben ser servidos por una flota de vehículos heterogénea desde un depósito, donde el depósito es denotado por 0 y los clientes por $i = 1, \dots, n$.

Los parámetros utilizados son:

- T = Cantidad de vehículos
- Q_k = Capacidad del vehículo k $(Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_T)$
- f_k = Costo fijo por el uso de los vehículos k $(f_1 < f_2 < \cdots < f_T)$
- d_j = Demanda del cliente j
- C_{ij} = Costo de viajar del cliente i al cliente j $\left(C_{ij} = C_{ji}\right)$

Declaramos las variables de decisión como:

- $x_{ij}^{k} = \begin{cases} 1\ Si\ el\ vehículo\ k\ viaja\ desde\ el\ cliente\ i\ al\ cliente\ j \\ 0\ En\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$
- $y_{ij} = Flujo\ de\ mercancía\ del\ cliente\ i\ al\ cliente\ j$

La formulación matemática es la siguiente:

$$minimizar\ z = \sum_{k\in M} F_k \sum_{j\in V'} x_{0j}^{k} + \sum_{k\in M} \sum_{i,j\in V(i\neq j)} C_{ij}x_{ij}^{k}$$

$sujeto\ a$:

$$\sum_{k\in M}\sum_{i\in V} x_{ij}^{k} = 1 \qquad \forall j \in V' \qquad (48)$$

$$\sum_{i\in V} x_{ip}^{k} - \sum_{j\in V} x_{pj}^{k} = 0 \qquad \forall p \in V', \forall k \in M \qquad (49)$$

$$\sum_{j\in V'} x_{0j}^{k} \leq m_k \qquad \forall k \in M \qquad (50)$$

$$\sum_{i\in V} y_{ij} - \sum_{i\in V} y_{ji} = q_j \qquad \forall j \in V' \qquad (51)$$

$$q_j x_{ij}^{k} \leq y_{ij} \leq (Q_k - q_i)x_{ij}^{k} \qquad \forall i,j \in V, i \neq j, \forall k \in M \qquad (52)$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,j \in V, i \neq j \qquad (53)$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \in V, i \neq j, \forall k \in M \qquad (54)$$

Donde la restricción (48) y (49) aseguran que cada cliente sea visitado exactamente una vez y que cada vehículo que visite a dicho cliente debe partir desde éste. En (50) se establece el número máximo de vehículos disponibles de cada tipo. La restricción (51) específica la diferencia entre la cantidad de productos que transportaba antes y después de visitar a un cliente es igual a la demanda de ese cliente manteniendo así el flujo de los productos. Y (52) asegura que la capacidad de cada uno de los vehículos no sea excedida. La declaración de la naturaleza de las variables se hace con (53) y (54).

Se puede obtener más información en (Wassan & Osman, 2002) donde se desarrolla un algoritmo de búsqueda tabú en (Golden B. , Assad, Levy, & Gheysens, 1984) y (Salhi, Sari, Saidi, & Touati, 1992) se analizan las modificaciones de algunas heurísticas realizando la relajación para el *MFVRP*, en (Liu & Shen, 1999) se presenta una heurística de ahorro,

En (Burchett & Campion, 2002) se realiza una aplicación a la industria del suministro de comestibles utilizando el algoritmo búsqueda tabú,

3.8 VRP con entregas divididas

El *SDVRP* (por sus siglas en inglés Split Delivery Vehicle Routing Problem) es una relajación del *VRP*, en el cual se elimina la restricción de que cada cliente sea visitado una sola vez por un vehículo, permitiendo así que cada cliente pueda ser visitado por distintos vehículos reduciendo los costos totales. Es decir, que la demanda del cliente puede ser partida de tal forma que sea satisfecha por varios vehículos, ya sea porque el pedido sobrepasa la capacidad, porque éste será abastecido desde diferentes plantas debido a que es la mejor opción. Además la condición de que cada cliente tiene una demanda menor que la capacidad del vehículo no es necesaria en este problema. El objetivo del *SDVRP* de cierta forma es reducir al mínimo la flota de vehículos y la suma del tiempo de los recorridos para satisfacer a todos los clientes.

Fue introducido en (Dror & Trudeau, 1989), en el cual se analizan algunas propiedades de la solución óptima del *SDVRP* y se demuestra empíricamente que el hecho de permitir que la demanda de los clientes sea satisfecha por varios vehículos puede llegar a generar grandes ahorros en el costo total de transportación a comparación de un *VRP* clásico. En (Archetti, Salvelsbergh, & Speranza, 2008), (Dror, Laporte, & Trudeau, 1994) se llegan a las mismas conclusiones y se proporciona más información sobre el *SDVRP* y sus soluciones.

De la misma forma se demuestra que si la matriz de costos satisface la desigualdad del triángulo $\left(C_{ij} \leq C_{iz} + C_{zj}\right)$ entonces ningún par de rutas en la solución óptima de un *SDVRP* tiene más de un punto en común.

En (Archetti, Speranza, & Hertz, 2006) y (Archetti, Savelsbergh, & Speranza, 2006) se demuestran dos cosas: la primera que la solución del *SDVRP* llega a representar la mitad del costo de la solución óptima del *VRP,* es decir, se generan ahorros del 50%; y la segunda que la cantidad de rutas para la solución de un *SDVRP* es mucho menor que las rutas necesarias para la solución de un *VRP*. Esto se debe a que la reducción en el costo total de transportación se debe a la posibilidad de reducir la cantidad de rutas, ya que la flota de vehículos necesaria es más pequeña. Además los beneficios dependen de la demanda promedio y la capacidad de los <vehículos y no de la ubicación geográfica de los clientes como normalmente se piensa.

Permitir entregas divididas permite un ahorro de hasta el 50% del costo total, lo cual se debe a la reducción de la cantidad de rutas. Esto debido a que el costo no depende íntegramente de la ubicación geográfica de los clientes sino también de la relación entre la demanda y la capacidad de los vehículos. (Archetti, Savelsbergh, & Speranza, 2006)

Un modelo planteado para el *SDVRP* es el propuesto en (Archetti, Speranza, & Hertz, 2006), en el cual se toma como parámetro c_{ij} el cual representa el costo de realizar el recorrido desde la ciudad i hasta la ciudad j y d_i que representa la demanda del cliente i.

$$minimizar\ z = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{v=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^{v}$$

$$sujeto\ a: \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{v=1}^{m} x_{ij}^{v} \geq 1\,, j = 0, \dots n \tag{55}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ip}^{v} - \sum_{j=0}^{n} x_{pj}^{v} = 0, p = 0, \dots n; v = 1, \dots, m \tag{56}$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij}^{v} \leq |S| - 1, v = 1, \dots, m; S \subseteq V - \{0\} \tag{57}$$

$$y_{iv} \leq d_i \sum_{j=0}^{n} x_{ij}^{v}\,, i = 1, \dots n; v = 1, \dots, m \tag{58}$$

$$\sum_{v=1}^{m} y_{iv} = d_i, i = 1, \dots, n \tag{59}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{iv} \leq Q, v = 1, \dots, m \tag{60}$$

$$x_{ij}^{v} \in \{0,1\}, i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n; v = 1, \dots, m \qquad (61)$$

$$y_{iv} \geq 0, i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, m \qquad (62)$$

Donde las restricciones (55) – (57) son clásicas de los problemas de ruteo de vehículos, la (55) asegura que cada cliente sea visitado, la (56) conserva el flujo en cada ruta y la (57) elimina los subtours que se pueden generar en cada ruta. La restricción (58) obliga que el cliente i es atendido por el vehículo v solo si v visita a i, la (59) asegura que la demanda de cada cliente es satisfecha mientras que la restricción (60) garantiza que la capacidad del vehículo no es sobrepasada. Y la restricción (61) y (62) establecen la naturaleza de las variables, siendo x_{ij}^{v} una variable binaria que toma el valor de 1 cuando el vehículo v realiza su recorrido directamente desde la ciudad i hasta la ciudad j y 0 en cualquier otro caso; y y_{iv} una variable real que indica la cantidad de demanda entregada al cliente i por el vehículo v.

El *SDVRP* es un problema analizado y aplicado a problemas reales, ejemplo: (Mullaseril, Dror, & Leung, 1997) aborda un problema de distribución de alimentación del estado de Arizona, (Schmid, 2007) un problema de distribución de una industria de concreto, (Sierksma & Tijssen, 1998) un problema de enrutamiento de helicópteros para encontrar los vuelos de helicópteros hacia las plataformas marinas.

Algunos métodos de soluciones se pueden analizar en: (Archetti, Speranza, & Hertz, 2006) donde se presenta un algoritmo de búsqueda tabú llamado SPLITABU, en (Ho & Haugland, 2004) también se propone un algoritmo de búsqueda tabú para un *VRP* no sólo con entregas divididas sino también con ventanas de tiempo, en (Dejax, Gendreau, & Gueguen, 2003) se desarrolla un algoritmo de ramificación y precio, en (Lee, Epelman, White, & Bozer, 2006) se desarrollo un algoritmo de programación dinámica.

CAPÍTULO 4

COMPLEJIDAD DEL VRP

En este capítulo se analizará la complejidad del *VRP* así como algunos de los métodos de solución propuestos para resolverlo.

El *VRP* es uno de los problemas de optimización combinatoria de gran importancia en la logística debido a su gran impacto en el costo logístico al que incurren las empresas al realizar sus actividades comerciales como: mensajería, transporte de personal, mercancía, recolección de basura, movimiento de maquinaría, entre otras.

Al igual que el *TSP*, el tiempo y esfuerzo computacional que se requiere para resolver el *VRP* aumenta exponencialmente respecto al tamaño del problema, es decir, con la cantidad de clientes a ser visitados. Para establecer la complejidad del *VRP* es necesario hablar de la optimización combinatoria y de la teoría de la complejidad.

- **Optimización combinatoria:** Es la rama de la optimización relacionada con la investigación de operaciones, teoría de algoritmos y teoría de la complejidad computacional. Se centra en los problemas de decisión, estudia el modelado y solución algorítmica de problemas. (Papadimitriou & Steiglitz, 1998)
- **Teoría de la complejidad:** Es la rama de la teoría de la computación que trata de clasificar los problemas que pueden o no ser resueltos con una cantidad determinada de recursos, es decir, clasifica los problemas de acuerdo a su dificultad para resolverlos. Estudia los recursos requeridos para la resolución de un problema: el **tiempo** que se refiere al número de pasos de ejecución del algoritmo; y el **espacio** que es la cantidad de memoria utilizada para resolver un problema. (Glenn, 1993)

Al ser el tiempo uno de los recursos para la resolución de un problema de optimización, éste no se mide en términos de la máquina con la que se está operando sino del tamaño de entrada de los datos, es decir, en términos del número de operaciones básicas (suma, resta, división, multiplicación, asignación, comparación, etc.) necesarias para obtener la solución del mismo. (Canales, 2004)

De acuerdo a estos recursos los problemas se pueden clasificar en: P (polinomial), NP (No polinomial), NP completo y NP duro. (Garey & Johnson, 2003)**.** En la figura 9 se puede observar la relación existente entre estos problemas.

- La clase de problemas **P** son aquellos que pueden ser resueltos por un algoritmo polinómico en un tiempo de ejecución razonable.
- La clase **NP** son los problemas que pueden ser resueltos por algoritmos no determinísticos en tiempo polinómico.
- La clase **NP duro** se les da a los problemas que son computacionalmente equivalentes, es decir, que si existiera un algoritmo que resolviera a uno de ellos en un tiempo polinómico, éste puede utilizarse para resolver los demás problemas en un tiempo polinómico también.
- La clase **NP completo** son un subconjunto de la clase NP, la componen todos los problemas que son tan fáciles (o difíciles) como todos los demás que pertenecen a esta misma clase. Lo conforman los problemas que se encuentran en la intersección de los NP y los NP duros.

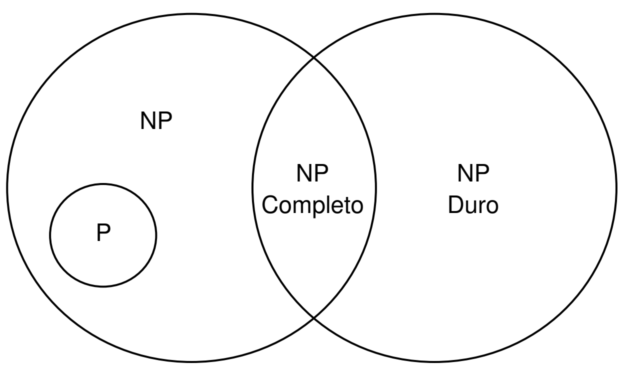


Figura 9. Clasificación de problemas de optimización.
Fuente: Basada en descripción (Garey & Johnson, 2003)

Donde un algoritmo se dice que es polinomial si la complejidad es una función polinomial en la dimensión del problema, es decir, tiene un orden $O(n^x)$. En (Edmonds, 1965) define un "buen o eficiente" algoritmo como aquél en el que su tiempo de ejecución es acotado por un polinomio, es decir, con un tiempo de ejecución polinomial.

La pregunta aquí es ¿El *VRP* NP, NP-Duro o NP-Completo?. La respuesta se obtuvo en (Lenstra & Rinnooy, 1981), quienes analizaron y demostraron que el *VRP* es un problema NP-Duro.

CAPÍTULO 5

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA EL VRP

Dado a la complejidad del *VRP* existen diferentes métodos de solución que se han propuesto para solucionarlo a él y a sus variantes. Estos diferentes métodos de solución se pueden catalogar en tres clases: métodos exactos, heurísticas y metaheurísticas. (Laporte G. , 2007)

5.1 Métodos exactos

Son aquellos que parten de una formulación como modelos de programación lineal (enteros) o similares, y llegan a una solución factible (entera) gracias a algoritmos de acotamiento del conjunto de soluciones factibles. En (Laporte G. , 1992) se puede consultar sobre algunas técnicas de solución exactas existentes para el *VRP.* Entre las que podemos citar están ramificación y acotamiento, ramificación y corte, programación dinámica, programación entera, entre otras.

En (Baldacci & Mingozzi, 2009) se muestra una recopilación de los métodos exactos más importantes.

5.2 Heurísticas

Son algoritmos que realizan una exploración limitada del espacio de búsqueda permitiendo obtener soluciones de buena calidad para un problema dado que permite tener menores tiempos de ejecución, pero sin asegurar la optimalidad de la solución. El término *heurística* proviene del griego *"heuriskein"*, que significa encontrar o descubrir, se usan para resolver problemas de optimización a través de la aproximación intuitiva. Son usados cuando no existe un algoritmo exacto que proporcione una solución o cuando las restricciones del problema son difíciles de modelar (Díaz, Glover, & Ghaziri, 1996). Las heurísticas se dividen en:

- *Constructiva.* La solución factible se va generando de manera constructiva paso a paso.
- *De mejora o búsqueda local.* Dada una solución factible se hace una mejora de la misma o una búsqueda que arranca precisamente con esta solución, llamada generalmente como solución inicial.
- *De relajación.* Métodos asociados a la programación lineal entera. En los cuales se genera una solución factible mediante la relajación de la naturaleza de las variables para encontrar cotas del problema.

Una recopilación de las heurísticas más importantes puede ser revisada en (Cordeau J.-F. , Gendreau, Laporte, Potvin, & Semet, 2002).

5.3 Metaheurísticas

Las metaheurísticas son una familia de algoritmos que se derivan de las heurísticas, éstas buscan una solución aproximada al problema sin necesidad de recorrer todo el espacio de búsqueda, son consideradas para aquellos problemas que por su complejidad o por la falta de información sobre el tipo de problemas no existe un algoritmo que lo resuelva, los llamados problemas NP, algunas son inspiradas en la observación de la naturaleza. Entre las metaheurísticas tenemos: algoritmo de colonia de hormigas, programación restringida, recocido simulado, algoritmos genéticos, búsqueda tabú y redes neuronales.

Estos algoritmos realizan una exploración más profunda en el espacio de búsqueda y por consiguiente requieren un mayor tiempo computacional para brindar una solución.

Una recopilación de las metaheurísticas más importantes (Gendreau, Potvin, Braysy, & Hasle, 2008).

CAPÍTULO 6

MODELO MATEMÁTICO

En este capítulo se describe a detalle el modelo propuesto para el problema de tubería planteado en la introducción, para el cual se tomaron como base los modelos analizados en el capítulo 3, en especial los del *VRP, CVRP, SDVRP y MFVRP* los cuales comparten características semejantes al problema analizado.

Un modelo matemático puede definirse según el diccionario de la Real Academia Española como:

"Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento"

Se podría decir que es una representación simplificada de una realidad compleja que sirve como herramienta para la toma de decisiones. Para llegar a esta representación simplificada lo primero será identificar las características propias del problema, tomando en cuenta los supuestos planteados con anterioridad, éstas se enlistan a continuación:

- Se cuenta con una flota heterogénea para la distribución de la tubería. En especial 4 tipos de vehículos: Torton, Tráiler 42, Tráiler 45 y Tráiler 48. Los cuales difieren en la capacidad (volumen) que puede transportar, el costo de renta y costo por cada entrega extra realiza. Donde la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo no es una limitante del problema, ya que éstos son subcontratados y suponemos que contamos con toda la cantidad de vehículos necesarios.
- La empresa distribuyen 180 diferentes tipos de tubos en cuanto a su diámetro, calibre y longitud. Dentro de nuestro modelo tomaremos únicamente los tubos de mayor demanda, es decir, los de 6 metros de longitud, lo que nos da un total de 13 diferentes tipos de tubos.
- Se deben abastecer las demandas de 48 clientes que están distribuidos en toda la República Mexicana.

- Las demandas de cada cliente pueden ser satisfechas por más de un vehículo, es decir, se permiten entregas divididas.
- Los vehículos deben iniciar y terminar su ruta en la planta.
- Se tomará en cuenta una sola planta, la de Monterrey. La capacidad de esta planta es considerada como infinita, ya que suponemos que la producción de las otras 4 plantas restantes se concentra en ésta. La elección de esta planta también se debe a que es la que posee una mayor producción y es la que se encuentra a una menor distancia media de las 48 ciudades.
- En cada una de las rutas se pueden visitar hasta 3 clientes, en caso de excederse en dicho número se deberá pagar un costo por cada entrega extra realizada. Este costo es diferente para cada uno de los vehículos y para cada ciudad que sea considerada como extra en la ruta. El costo extra de cada ciudad es el 80% del costo normal de visita a dicha ciudad desde la planta.
- Se debe respetar el volumen (capacidad) que cada uno de los vehículos puede transportar, por lo que la demanda total que será repartida por cada vehículo debe ser menor o igual a la capacidad de éste.
- El costo de renta que se debe pagar por cada uno de los vehículos es el costo máximo de rentar el vehículo para ir desde la planta hasta cada una de las ciudades en la ruta.

Los **conjuntos** que integran la modelación son los siguientes:

- El conjunto de los clientes denotado por N al cual se le asocian los índices i y j. La planta forma parte de este conjunto mediante el índice 0.
- El conjunto de los vehículos disponibles para la distribución denotado por K al cual se le asocia el índice k .
- El conjunto del catalogo de tubos denotado por T al cual se le asocia el índice t .

Los **parámetros**, es decir, los valores conocidos dentro del problema son:

- cr_i^k Costo de rentar un determinado vehículo para hacer el recorrido desde la planta hasta una ciudad en específica.
- ce_i^k Costo por realizar una entrega extra a una ciudad por cada uno de los vehículos. Equivale al 80% del cr_i^k para cada ciudad.
- d_{it} Demanda de los diferentes tipos de tubos realizada por cada uno de los clientes.
- v_t Volumen de cada tipo de tubo.
- q^k Capacidad en volumen de los vehículos.

Las **variables** declaradas para la modelación del problema son las siguientes:

- x_{it}^k Variable entera que representa la cantidad de cada tipo de tubo entregado a un determinado cliente a través de cierto vehículo.
- y_{ij}^k Variable binaria que toma para cada vehículo el valor de 1 si éste hace su recorrido desde el cliente i hasta el cliente j; y 0 en cualquier otro caso.
- c^k Variable positiva que indica el pago que se debe hacer por la renta de cada vehículo.
- p^k Variable binaria que indica si una ciudad es considerada como una ciudad extra en la ruta de los vehículos.
- u_i^k Variable entera auxiliar para la eliminación de los subtours y que además indica el orden en que las ciudades son visitadas en la ruta de los vehículos.

Por lo que nuestra **función objetivo** para el problema de distribución es:

$$Minimizar\ z = \sum_{k}^{K} c^k + \sum_{k}^{K} \sum_{i}^{N} ce_i^k p^k$$

Es decir, la suma de todos los costos de renta de los vehículos más la suma de los costos de entregas extras que realizaron cada uno de ellos para cumplir con la demanda de los clientes.

Las restricciones necesarias para la modelación del problema son las siguientes:

1. **Capacidad de los vehículos:** el volumen de tubos total que transporta cada vehículo no puede sobrepasar su capacidad.

$$\sum_{t}^{T}\sum_{i}^{N} x_{it}^{k} v_t \leq q_k \text{ ,} \forall k \in K$$

2. **Satisfacción de todas las demandas:** todas las partidas de los clientes deben ser satisfechas, sin importar que éstas sean satisfechas por diferentes vehículos. Es decir, la cantidad de tubos de cada tipo que reciba cada uno de los clientes debe satisfacer la demanda del cliente de dicho tubo.

$$\sum_{k}^{K} x_{it}^{k} = d_{it} \text{ ,} \forall i \in N, \forall t \in T$$

3. **Todas las rutas deben de iniciar su recorrido desde la planta:** si un vehículo es usado para visitar al menos a un cliente entonces éste debió haber iniciado su ruta desde la planta hacia ese cliente o hacia alguno otro.

$$\sum_{i}^{N} y_{0i}^{k} \ |N| \geq \sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} y_{ij}^{k} \text{ ,} \forall k \in K$$

4. **Asignar entregas sólo a clientes con demanda:** la cantidad de tubos entregados a un cliente por cada uno de los vehículos no debe sobrepasar la cantidad total de tubos solicitados por éste, esto nos llevará a no asignarle entregas a los clientes cuya demanda es cero y que a los clientes a los cuales se les hará una entrega a través de un vehículo estén en la ruta de dicho vehículo.

$$\sum_{t}^{T} x_{it}^{k} \leq \sum_{t}^{T} d_{it} \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} \text{ ,} \forall i \in N, \forall k \in K$$

5. **Evitar las visitas innecesarias:** en cada una de las rutas sólo se visita a los clientes a los que se les hará entrega de alguna cantidad de demanda, dejando fuera la posibilidad de que un cliente esté en la ruta de algún vehículo y a éste no se le asignó ninguna entrega por parte de dicho vehículo.

$$\sum_{t}^{T} x_{it}^{k} \geq \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k}, \ \forall i \in N - \{0\}, \forall k \in K$$

6. **Conservación del flujo:** si un vehículo visita a un cliente debe realizar la entrega y posteriormente abandonarlo partiendo hacia otro cliente, o bien regresar al depósito.

$$\sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} - \sum_{j}^{N} y_{ij}^{k} = 0, \forall i \in N, \forall k \in K$$

7. **Costo de renta a pagar por la ruta de cada vehículo:** el costo a pagar por la renta de cada vehículo es el mayor costo al que se incurre por visitar las ciudades que conforman la ruta de cada uno, es decir, de las ciudades visitadas se elige el monto más alto y éste es el costo a pagar por el uso del vehículo.

$$c^{k} \geq \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} cr_{i}^{k}, \forall i \in N, \forall k \in K$$

8. **Una única ciudad destino:** en cada una de las rutas sólo puede existir una ciudad que sea sucesora a la ciudad actual que visita el vehículo.

$$\sum_{j}^{N} y_{ij}^{k} \leq 1, \forall i \in N, \forall k \in K$$

9. **Una única ciudad origen:** en cada una de las rutas sólo puede existir una ciudad que sea antecesora a la ciudad actual que visita el vehículo.

$$\sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} \leq 1, \forall i \in N, \forall k \in K$$

10. **No subtours en las rutas:** restricción que no permite que se generen tours entre ciudades sin que la planta forme parte de éstos. Aunque esta restricción lleva a cabo su objetivo es sustituida por la restricción 10.1 de no subtours propuesta por (Miller, Tucker, & Zemlin, 1960) dado que se reduce el número de restricciones que se tienen que resolver.

$$\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} y_{ij}^{k} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq N - \{0\}, \forall k \in K$$

$$10.1.\ u_i^k - u_j^k + |N| y_{ij}^k \leq |N| - 1, \forall i, j \in N - \{0\}, i \neq j, \forall k \in K$$

11. **Entregas extras:** el costo total de transportación (función objetivo) está integrado por el costo de renta más el costo de entregas extras, esta restricción determina qué ciudades son extras en la ruta de cada vehículo para poder hacer este cargo. Recordando que una ciudad se considera extra en la ruta de un vehículo si ésta es la cuarta, quinta, etc. ciudad en la ruta de dicho vehículo.

$$u_i^k \leq |N| p_i^k + 3\sum_{j}^{N} y_{ji}^k, \forall i \in N - \{0\}, \forall k \in K$$

Con esta formulación se abarcan las características más importantes del problema bajo los supuestos que aquí se definieron llegando a una modelación que nos permita a partir de instancias generadas encontrar la ruta óptima que satisface todas y cada una de las restricciones propias del problema.

A continuación se enlistan las características importantes de la modelación y su relación con dichas variantes del *VRP*:

- En un *VRP* clásico la demanda de los clientes está constituida por un solo producto, en nuestra modelación está integrada por 13 productos (tubos) diferentes denotada por $\boldsymbol{d_{it}}$ en donde cada producto ($\boldsymbol{t}$) tiene una característica propia (el volumen) denotado por $\boldsymbol{v_t}$.
- En un *VRP* clásico los vehículos no cuentan con la limitante de la capacidad, en nuestro problema cada vehículo tiene la limitante del volumen que pueden transportar. ***CVRP* - restricción 1**

$$\sum_{t}^{T}\sum_{i}^{N} x_{it}^{k} v_t \leq \ q_k \ , \forall k \in K$$

- En un *VRP* clásico la demanda es cubierta por la visita de un único vehículo por lo que al ser visitada por uno de éstos la demanda se considera satisfecha, en esta modelación la demanda puede ser cubierta por más de un vehículo y se debe de asegurar que ésta sea satisfecha. ***SDVRP-*** **restricción 2** y la **restricción 4-5** garantizan la congruencia entre las rutas y la demanda a satisfacer por cada vehículo.

$$\sum_{k}^{K} x_{it}^{k} = \ d_{it} \, , \forall i \in N, \forall t \in T$$

$$\sum_{t}^{T} x_{it}^{k} \ \leq \ \sum_{t}^{T} d_{it} \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} \, , \forall i \in N, \forall k \in K$$

$$\sum_{t}^{T} x_{it}^{k} \ \geq \ \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} \, , \ \forall i \in N - \{0\}, \forall k \in K$$

- En un *VRP* clásico los vehículos poseen las mismas características, en este caso estamos incluyendo en la modelación vehículos tanto con volumen como con costos diferentes denotado por $\boldsymbol{q_k}$ y $\boldsymbol{cr_i^k}$ respectivamente. ***MFVRP.***
- Las **restricciones 3, 6, 8 y 9** son clásicas de un *VRP* con ligeras modificaciones en los índices: las rutas deben iniciar en el depósito, cada ruta tiene una única ciudad destino y origen y no se deben generar subtours.
- Las **restricciones 7 y 11** cubren las características particulares del problema como lo son el cálculo del costo de renta de cada vehículo dependiendo de la ruta y la asignación de las ciudades extras en dicha ruta.

$$c^k \ \geq \ \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} cr_i^k \, , \forall i \in N, \forall k \in K$$

$$u_i^k \leq |N| p_i^k + 3 \sum_{j}^{N} y_{ji}^{k} \ \, , \forall i \in N - \{0\}, \forall k \in K$$

Como se mencionó en el capítulo 3 existen muchas variantes del *VRP*, pero para la modelación de nuestro problema las variantes claves en las que se fundamentó la propuesta fueron: *CVRP, SDVRP* y *MFVRP*. Una vez propuesto el modelo matemático lo siguiente será analizar los costos obtenidos al utilizar la dicha propuesta y compararlos con los del método tradicional haciendo una comparación de los resultados obtenidos para destacar las contribuciones del modelo.

CAPÍTULO 7

EXPERIMENTACIÓN

En esta sección se muestra la parte experimental del modelo matemático para analizar los resultados, es decir, comparar el costo total utilizando el modelo propuesto con el costo total obtenido bajo el método tradicional de asignación de rutas. Una vez analizados estos resultados se estipula el beneficio (ahorro) aportado por el modelo propuesto.

Ya que se cuenta con el modelo de distribución propuesto para el problema, lo siguiente será la obtención de resultados para lo cual se utilizó el Sistema General de Modelaje Algebraico (GAMS por sus siglas en inglés) con CPLEX versión 12. GAMS permite modelar, analizar y resolver diversos problemas de optimización tanto lineales, no lineales o enteros mixtos de manera sencilla con un lenguaje simple. Se utilizó dicho software ya que su lenguaje permite describir el modelo en él es muy similar a la manera a la manera en la que una persona lo describe y lo estructura en una hoja de papel a mano, proporcionando la ventaja de que no es necesario conocer o seleccionar un algoritmo para resolver el modelo ya que el mismo software cuenta con un programa optimizador encargado de ésto. Además dado que el modelo es el mismo para cada una de las instancia a correr no es necesario realizar muchos en cambios en GAMS al archivo para estar obteniendo los resultados.

GAMS se corrió en una computadora intel XeonE5-2697v2 2.7GHz con 12 cores cada uno, una memoria ram de al menos 64 Gb, y disco duro de 1 Tb, es por eso que fue seleccionado el servidor DELLPoweEdge T620.

Se generaron 19 instancias aleatorias de diferentes tamaños que van desde 4 clientes hasta 24 clientes y con demanda total desde 3.29m^3 hasta 821.49m^3 mediante un programa en C++, éstas representan una colección de pedidos de los diferentes clientes. El programa fue creado para generar instancias a través de la información histórica que se tiene sobre las demandas de cada una de las ciudades a las cuales abastece la empresa en cuestión. El programa funciona a través de un número proporcionado y éste genera un número aleatorio de productos para cada ciudad creando así las instancias.

Para poder medir la eficiencia del modelo propuesto, se hace una comparación contra el costo obtenido al realizar los procedimientos empíricos que sigue la empresa. Es decir:

1) Se calculó el volumen total de demanda de cada una de las ciudades.
2) Se le asignó a cada ciudad un vehículo de acuerdo a este volumen.
3) Si con la asignación de dicho vehículo la demanda no era satisfecha se le asignó un nuevo vehículo con el volumen necesario para realizar la entrega de la demanda faltante.
4) El costo total de transportación la suma de los costos de rentar dichos vehículos en las rutas asignadas.

Los resultados obtenidos de cada una de las instancias a través de la aplicación del modelo matemático propuesto y del método tradicional para hacer un comparativo de los beneficios generados se exponen en la tabla 4. En esta tabla podemos visualizar la demanda total de cada instancia, la cantidad de vehículos así como el costo total respectivamente. También, en el caso de los resultados a través de la aplicación del modelo, se presentan el total de ciudades extras consideradas en cada instancia.

			APLICACIÓN DEL MODELO			MÉTODO TRADICIONAL	
Instancia	Número de ciudades	Demanda total (m^3)	Vehículos utilizados	Ciudades extras	Costo total	Vehículos utilizados	Costo total
1	21	616.31	9	0	40,863.13	21	76,644.00
2	24	821.42	12	0	65,349.79	24	100,174.67
3	10	221.51	4	0	14,474.74	10	33,417.88
4	17	358.68	6	0	34,534.18	17	79,757.18
5	19	428.97	7	2	33,290.69	19	77,703.19
6	23	622.16	9	1	60,152.72	23	98,286.30
7	23	543.11	10	0	40,596.80	23	84,542.32
8	8	114.96	3	0	8,451.98	8	19,609.61
9	14	365.02	6	0	30,821.10	14	63,404.05
10	7	211.71	3	1	10,348.68	7	20,009.87
11	4	3.83	1	1	6,446.73	4	14,896.22
12	6	5.6	2	0	6,215.17	6	14,877.80

13	6	11.17	2	0	9,610.20	6	20,240.07
14	5	3.71	2	0	7,828.04	5	16,242.81
15	5	9.81	2	0	7,828.04	5	13,285.82
16	4	34.93	1	1	8,337.44	4	17,249.03
17	7	14.1	2	1	12,108.79	7	27,743.38
18	7	16.21	2	1	10,313.28	7	26,044.74
19	8	26.16	3	0	6,962.23	8	19,680.17

Tabla 4. Resultados aplicación del modelo vs método tradicional.

Instancia	Número de ciudades	Demanda total (m^3)	Diferencia en costo	%	Diferencia Vehículos	%
1	21	616.31	-35,780.87	-46.68%	-12	-57.14%
2	24	821.42	-34,824.88	-34.76%	-12	-50.00%
3	10	221.51	-18,943.14	-56.69%	-6	-60.00%
4	17	358.68	-45,223.00	-56.70%	-11	-64.71%
5	19	428.97	-44,412.50	-57.16%	-12	-63.16%
6	23	622.16	-38,133.58	-38.80%	-14	-60.87%
7	23	543.11	-43,945.52	-51.98%	-13	-56.52%
8	8	114.96	-11,157.63	-56.90%	-5	-62.50%
9	14	365.02	-32,582.95	-51.39%	-8	-57.14%
10	7	211.71	-9,661.19	-48.28%	-4	-57.14%
11	4	3.83	-8,449.49	-56.72%	-3	-75.00%
12	6	5.6	-8,662.63	-58.23%	-4	-66.67%
13	6	11.17	-10,629.87	-52.52%	-4	-66.67%
14	5	3.71	-8,414.77	-51.81%	-3	-60.00%
15	5	9.81	-5,457.78	-41.08%	-3	-60.00%
16	4	34.93	-37,665.58	-81.88%	-3	-75.00%
17	7	14.1	-15,634.59	-56.35%	-5	-71.43%
18	7	16.21	-15,731.46	-60.40%	-5	-71.43%
19	8	26.16	-12,717.94	-64.62%	-5	-62.50%

Tabla 5. Comparativo modelo vs método tradicional.

En la tabla 5 se puede observar, al comparar los valores del costo total utilizando el modelo planteado y el costo total por el método tradicional, que se logró con el modelo una reducción mínima en la instancia 2 cuyo costo a través del uso del modelo genero un ahorro de $35,780.87 lo que representa una disminución en el costo del 35%; y en la instancia 19 se logró la mayor reducción ya que con el uso del modelo se ahorro $12,717.94, es decir, una reducción del 65% del costo total. En promedio el modelo genera un ahorro del 52.25%.

Por otra parte analizando el número de vehículos utilizados, éste fue mucho menor con el modelo llegando a ser desde un 50% hasta un 75% menor la cantidad de vehículos necesarios en las rutas generadas con la aplicación del modelo, es decir, en promedio lo logró una disminución de vehículos del 63.05%

En la instancia 16 que es donde se obtuvo una mayor disminución del número de vehículos fue debido a que la demanda era muy pequeña y podía ser transportada por **un único vehículo** además de que sólo incluía 4 ciudades, si se hubieran planeado dos rutas el costo sería de $9,725.59 un aumento del 14.27%. En el caso de la instancia 2 en la cual se presentó la menor disminución en vehículos fue debido a que es la instancia con mayor demanda y mayor cantidad de ciudades a visitar, dicha ruta se programo con 10 vehículos Tortón, un Tráiler 42 y un Tráiler 45. Esta asignación permite transportar un total 1,041.4m^3, siendo utilizada el 78.87% de ésta con el 58% de los vehículos a máxima capacidad.

Instancia	Vehículo	Capacidad utilizada	% Capacidad utilizada	Ruta	Porcentaje de capacidad	
1	Tor1	64.51	83.54%	Tampico-Mérida-Tuxtla	<50%	1
	Tor3	37.92	49.11%	Cd.Valles	50-75%	3
	Tor4	56.00	72.53%	Cuernavaca-León-Guadalajara	75-100%	5
	Tor5	76.63	99.24%	Monclova-Querétaro-SanLuis		
	Tor6	77.00	99.72%	Cd.Valles-Acapulco-Chihuahua		
	Tor8	42.16	54.60%	Mochis-Campeche-Tepic		
	Tor9	76.84	99.51%	Celaya-Cuauhtémoc-Monclova		
	Tor10	40.79	52.82%	Jimenez-Casagrande-SanLuis		
	Tr48-3	114.43	78.22%	Saltillo-Reynosa-Monclova		
2	Tor1	42.12	54.55%	Culiacán-Querétaro-Juarez	<50%	1
	Tor4	77.16	99.93%	Puebla-Monclova-Toluca	50-75%	4
	Tor5	77.21	100.00%	Puebla-Monclova-Guadalajara	75-100%	7
	Tor6	65.73	85.12%	Pto.Vallarta-Cd.Valles-León		
	Tor8	25.53	33.07%	ElRosario-Veracruz-Casagrande		
	Tor9	51.27	66.40%	Reynosa		
	Tor10	77.17	99.94%	Monclova-Chihuahua-Cuauhtémoc		
	Tor12	54.92	71.13%	Reynosa-Morelia-Monclova		
	Tor14	73.10	94.68%	Reynosa-Monclova-Cd.Valles		
	Tor15	59.06	76.49%	SanLuis-Tampico-Monclova		
	Tr42-3	91.85	74.74%	Huatulco-Mérida-Acapulco		
	Tr48-14	126.26	86.30%	Cuernavaca-Campeche-Querétaro		
3	Tor1	55.20	71.49%	Monclova-Cd.Valles-Caborca	<50%	1

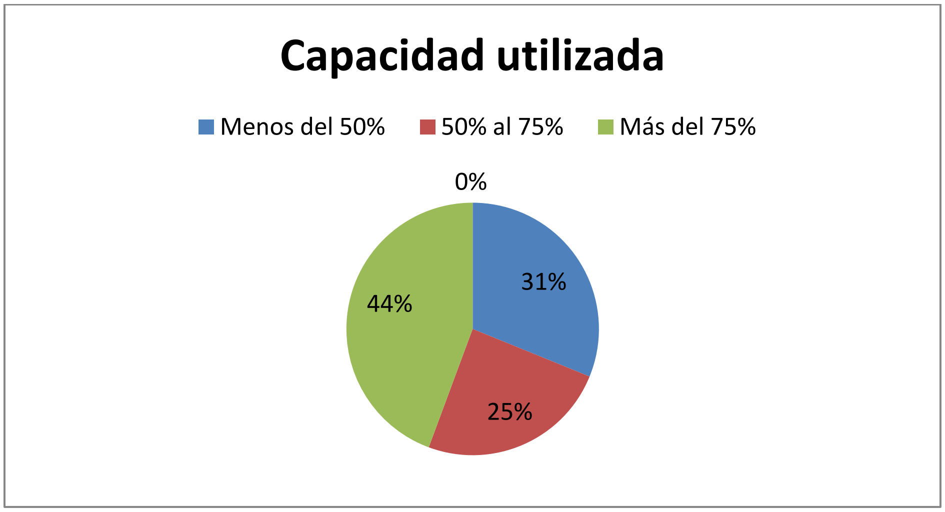
	Tor7	34.98	45.30%	Acapulco-Hermosillo-Veracruz	50-75%	2
	Tor9	55.34	71.67%	Monclova-Reynosa	75-100%	1
	Tor10	75.98	98.40%	Culiacán-Toluca-Querétaro		
4	Tor5	50.31	65.16%	Celaya-León-Querétaro	<50%	0
	Tor6	58.01	75.13%	Caborca-Durango-Tampico	50-75%	2
	Tor7	64.38	83.38%	Veracruz-Chihuahua-Cd.Valles	75-100%	4
	Tor8	74.99	97.11%	Reynosa-SanLuis		
	Tor9	46.46	60.17%	Casagrande-Campeche-Huatulco		
	Tor10	64.51	83.54%	Tapachula-Cd.Constitución-Mérida		
5	Tor1	59.70	77.31%	Tuxtla-Campeche-Mérida	<50%	1
	Tor2	17.02	22.05%	Delicias-Chihuahua-Culiacán	50-75%	1
	Tor3	69.81	90.41%	México-Morelia-Huatulco-Monclova	75-100%	5
	Tor4	75.23	97.43%	Tepic-Pto.Vallarta-Veracruz-Reynosa		
	Tor5	77.19	99.97%	Poncitlan-Querétaro-Cd.Valles		
	Tor6	56.05	72.59%	Reynosa-Monclova		
	Tor10	73.94	95.76%	Cd.Valles-Tampico-Durango		
6	Tor1	71.56	92.68%	Caborca-Delicias-Monclova	<50%	0
	Tor4	61.58	79.76%	Veracruz-Culiacán-Mérida	50-75%	4
	Tor5	76.07	98.52%	SanLuis-Cd.Valles-Reynosa	75-100%	5
	Tor6	56.45	73.11%	Pto.Vallarta-Tapachula-Cuernavaca-Querétaro		
	Tor8	46.09	59.70%	Jimenez-Cd.Constitución-Chihuahua		
	Tor9	76.78	99.43%	León-Querétaro-Aguascalientes		
	Tor10	77.21	99.99%	Toluca-Aguascalientes-Hermosillo		
	Tr42-9	77.30	62.90%	Cd.Obregón-Poncitlan-Casagrande		
	Tr48-10	79.08	61.50%	Monclova-Reynosa		
7	Tor1	77.21	99.99%	Querétaro-Durango-Caborca	<50%	4
	Tor2	19.62	25.42%	Morelia-Tapachula-Tuxtla	50-75%	0
	Tor3	77.21	99.99%	Caborca-Cd.Valles-Cuernavaca	75-100%	6
	Tor4	76.94	99.65%	Reynosa-Monclova		
	Tor5	64.94	84.10%	Chihuahua-Guadalajara-Caborca		
	Tor6	66.536	86.16%	Cd.Victoria-Monclova-SanLuis		
	Tor7	29.52	38.23%	Reynosa		
	Tor8	64.88	84.02%	Delicias-Tampico-Mérida		
	Tor9	28.49	36.91%	Celaya-Varacruz-Mochis		
	Tor10	32.82	42.51%	Juarez-Culiacán-Puebla		
8	Tor2	37.03	47.96%	Celaya-Querétaro-Pto.Vallarta	<50%	2
	Tor3	44.05	57.05%	Monclova-Reynosa	50-75%	1
	Tor4	33.87	43.87%	Cd.Valles-León-SanLuis		
9	Tor1	64.44	83.46%	Cd.Constitución-Cuauhtémoc-Casagrande	<50%	0
	Tor4	57.72	74.76%	Monclova-Reynosa	50-75%	3
	Tor5	49.20	63.72%	Guadalajara-Morelia-Aguascalientes	75-100%	3

	Tor7	60.30	78.09%	León-Cd.Valles-Querétaro		
	Tor9	56.13	72.70%	Mérida-Campeche-Juarez		
	Tor10	77.21	99.99%	Reynosa-Monclova		
10	Tor1	57.39	74.33%	Veracruz-Casagrande-Tuxtla-Saltillo	<50%	0
	Tor2	77.19	99.97%	Reynosa-Monclova-Cd.Valles	50-75%	1
	Tor3	77.11	99.87%	Saltillo-Monclova-Reynosa	75-100%	2
11	Tor1	3.83	4.96%	Oaxaca-Querétaro-Cd.Obregón-Querétaro	<50%	1
12	Tor3	3.30	4.28%	Monclova-Cd.Valles-Reynosa	<50%	2
	Tor4	2.30	2.99%	Cuernavaca-Poncitlan-Monclova		
13	Tor1	3.52	4.56%	Celaya-Culiacán-Hermosillo	<50%	2
	Tor5	7.65	9.91%	Reynosa-Querétaro-Cd.Valles		
14	Tor1	2.05	2.67%	Tuxtla-Cd.Obregon-Tampico		
	Tor2	1.65	2.15%	Saltillo-Reynosa		
15	Tor1	6.13	7.95%	Monclova-Tepic-Tuxtla	<50%	2
	Tor5	3.68	4.77%	Reynosa-Saltillo		
16	Tor1	3.29	4.27%	Cd.Obregon-Culiacán-Cuernavaca-Celaya	<50%	1
17	Tor2	7.13	9.25%	Tapachula-Tuxtla-Pto.Vallarta-Reynosa	<50%	2
	Tor5	6.96	9.01%	Monclova-Celaya-Querétaro		
18	Tor2	13.92	18.03%	Hermosillo-Cd.Obregon-Acapulco-Monclova	<50%	2
	Tor7	2.29	2.97%	Querétaro-Cd.Valles-Tampico		
19	Tor1	8.87	11.50%	Poncitlan-Aguascalientes-Delicias	<50%	3
	Tor3	5.16	6.69%	Monclova-Reynosa		
	Tor4	12.12	15.70%	Caborca-Cd.Victoria-Querétaro		

Tabla 6. Análisis de las rutas generadas al aplicar el modelo propuesto.

En la tabla 6 muestra los tipos de vehículos utilizados en cada instancia, la demanda total transportada por cada vehículo, el porcentaje de la capacidad utilizada en cada y la ruta propuesta con la aplicación del modelo matemático, de la cual podemos destacar:

- Un 44% de los vehículos utilizados fueron usados con una carga que ocupa más de ¾ de la capacidad del vehículo. Es decir, que en las rutas planeadas el uso de los vehículos fue eficiente.



- Un 45% de las rutas propuestas están integradas por ciudades que serán visitadas por más de un vehículo, es decir, que se permitió entregas dividas en un 45% de las rutas siendo de 2 a 3 visitas necesarias para satisfacer la demanda de los ciudades.
- Al analizar el tipo de vehículo más utilizado para realizar la entrega de mercancía se llega a un resultado que pareciera ser contradictorio a lo que nuestro inconsciente pudiera llegar a pensar, resulta ser que el vehículo más utilizado no es el de mayor capacidad sino más bien el de menor. Un 91.18% de la instancias utilizaron el vehículo de menor capacidad, el Tortón.
- El Tortón con capacidad de 77.22m^2 es el vehículo que está presente en cada una de los rutas programas para cada instancia. Aunque algunas de las instancias tienen una demanda total muy alta también incluyen una gran cantidad de clientes, por consiguiente utilizar un vehículo de mayor capacidad pensando en disminuir el número de vehículos necesarios realmente no asegura una disminución en el costo total de transportación, sino todo lo contrario ya que cada ruta incluiría un número de ciudades extras por las que hay que pagar. En estas instancias lo conveniente fue dividir la mercancía en vehículos de tal manera que el número de ciudades extra en cada ruta no aumentará demasiado, lo cual llevo a que en las rutas propuestas se utilizan los vehículos de menor capacidad y cuyo costo es menor que los demás tipos de vehículos.

Instancia	Vehículos utilizados				Capacidad utilizada en los vehículos					
	Tortón	Tr42	Tr45	Tr48	<10%	<20%	<30%	<40%	<50%	>50%
1	19	2	0	0	3	5	3	3	3	4
2	20	4	0	0	2	6	4	4	1	7
3	10	0	0	0	3	1	3	0	0	3
4	17	0	0	0	4	2	5	1	3	2
5	18	1	0	0	6	4	3	1	1	4
6	22	0	0	1	6	4	5	1	2	5
7	22	1	0	0	8	4	4	2	0	5
8	8	0	0	0	2	4	1	0	1	0
9	13	1	0	0	2	4	2	1	3	3
0	7	0	0	0	1	1	1	1	0	3
11	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0
12	6	0	0	0	6	0	0	0	0	0
13	6	0	0	0	6	0	0	0	0	0
14	5	0	0	0	5	0	0	0	0	0
15	5	0	0	0	5	0	0	0	0	0
16	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0
17	7	0	0	0	7	0	0	0	0	0
18	7	0	0	0	6	1	0	0	0	0
19	8	0	0	0	8	0	0	0	0	0

Tabla 7. Aplicación del método tradicional.

La tabla 7 nos muestra la cantidad de vehículos de cada tipo utilizados en cada instancia y un análisis general sobre la capacidad utilizada. De la cual podemos destacar:

- El 40.37% de los vehículos fueron utilizados con a lo mucho un 10% de capacidad utilizada desaprovechando la capacidad restante.
- El 95.41% de los vehículos utilizados fueron de los menor capacidad, es decir, el Tortón. Aunque esta cifra concuerda con los resultados obtenidos a través del modelo en este caso se debe a que las rutas están integradas por una única ciudad y la mayoría de las demandas son menores a la capacidad del Tortón.
- El número de vehículos total utilizados aumento hasta un 153.48% esto debido a que se planea una ruta para cada una de las ciudades con demanda.

A través de la experimentación podemos concluir que el método tradicional que utiliza la empresa para hacer la asignación de rutas resulta ser una manera muy práctica de llevar a cabo la operación, de hecho podríamos generalizar y decir que muchas empresas hoy en día cuentan con su propio “método” de realizar la asignación de rutas y que éste está basado en la experiencia que tiene la persona a cargo. Un método matemático como lo es la aplicación del modelo propuesto le permite a la empresa disminuir el número de vehículos utilizados aprovechando al máximo su capacidad y planear rutas óptimas para reducir el costo total de transportación.

Además podemos concluir que aunque la capacidad de los vehículos utilizados y/o disponibles es un gran factor, éste no es determinante para la disminución del costo total de transportación sino la ruta asignada y la manera en la que se lleva a cabo el cobro del servicio.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTUTO

En esta tesis se abordó la problemática de distribución de una empresa regiomontana de tubería, la cual distribuye entre otros productos tubos de PVC a 48 centros de distribución dispersos geográficamente en toda la República Mexicana buscando minimizar el costo total de transportación al que incurren al realizar sus entregas.

La empresa cuenta con un método tradicional de asignación de rutas muy rudimental, el proceso consiste en una vez que se cuenta con las demandas de cada centro de distribución se le asigna un vehículo que cubra con dicha demanda y si éste no es suficiente se le asigna un nuevo vehículo que permita cubrir la demanda de dicho cliente. Este proceso aunque es rápido no garantiza que el costo al que se incurra sea mínimo y que tanto la asignación de rutas como el uso de los vehículos sea eficiente.

Una vez analizada la situación de la empresa se encontró con un área de oportunidad muy grande en el sistema de distribución de la empresa y se propuso hacer asignaciones eficientes haciendo uso de las Matemáticas diseñando un modelo matemático que permita optimizar los recursos, haciendo asignaciones eficientes de clientes y vehículos en las rutas que minimicen el costo total de transportación.

8.1. Conclusiones

En esta tesis se propuso un modelo matemático para el problema de distribución basado en el *CVRP, SDVRP* y *MFVRP* el cual permitió el uso eficiente de los vehículos aprovechando la capacidad de los mismos.

Finalmente podemos concluir que se obtuvieron los resultados esperados generando una disminución en el número de vehículos utilizados y por consiguiente un ahorro significativo en el costo de transporte. Además de reconocer la importancia de la ruta asignada más allá de la capacidad de los vehículos, llegando a estar éstas relacionadas íntimamente con el proceso para establecer el costo de alquilar los vehículos.

Aunque la implementación del modelo generó un ahorro económico, el uso del modelo presenta una desventaja importante con el uso del método tradicional, **el tiempo empleado.** Nuestra instancia con mayor número de clientes (24 clientes) requirió un tiempo computacional de 604,800sec, lo cual representaría un inconveniente para la empresa si decidiera utilizar el modelo para programar sus entregas diarias, es decir, nos encontraríamos en una situación costo vs tiempo. Sin embargo la empresa podría optar por utilizar el modelo para planear las rutas en base a los pronósticos de la demanda de sus clientes y llegado el momento realizar los cambios necesarios para que esta planeación cumpla con las demandas reales.

8.2. Trabajo futuro

El problema abordado en esta tesis ofrece una gran variedad de líneas futuras de investigación tal como se describió en el capítulo. Un trabajo futuro sería ampliar el modelo a un *MDVRP* y con esto apegarse un poco más a la realidad de la empresa y asignar rutas tomando en cuenta las 5 plantas que la conforman. Otra línea de investigación sería determinar la manera en la que la se distribuirá la carga de cada vehículo una vez conocida la ruta, buscando minimizar el costo que implica cargar y descargar la carga para realizar cada una de las entregas.

Estos trabajos futuros harían que el modelo matemático se volviera poco a poco más realista cumpliendo con un mayor número de cualidades propias de la situación que sufre la empresa al realizar la distribución de sus productos.

BIBLIOGRAFÍA

Antón Robusté, F. (2005). *Logística del transporte.* Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.

Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvatal, V., & Cook, W. J. (2007). *The Traveling Salesman Problem: A computational Study.* Princeton: Princeton University Press.

Applegate, D., Bixby, R., Chvatal, V., & Cook, W. (1995). Finding cuts in the TSP. *Technical Report* .

Archetti, C., Salvelsbergh, M. W., & Speranza, M. G. (2008). To split or not to split: That is the question. *Transportation Research: Part E , 44*, 114-123.

Archetti, C., Savelsbergh, M., & Speranza, M. (2006). Worst-Case Analysis for Split Delivery Vehicle Routing Problems. *Transportation Science* , 226-234.

Archetti, C., Speranza, M., & Hertz, A. (2006). A Tabu Search Algorithm for the Split Delivery Vehicle Routing Problem. *Transportation Science* , 64-73.

Azi, N., Gendreau, M., & Potvin, J.-Y. (2007). An exact algorithm for a single-vehicle routing problem with time windows and multiple routes. *European Journal of Operational Research , 178*, 755-766.

Baldacci, R., & Mingozzi, A. (2009). A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems. *Mathematical Programming* , 347-380.

Baldacci, R., Hadjiconstantinou, & Mingozzi, A. (2004). An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. *Operations Research , 52*, 723-738.

Ballou, R. H. (2004). *Logística. Administración de la cadena de suministro.* México: Pearson Educación.

Belfiore, P., & Yoshizaki, H. (2009). Scatter search for a real-life heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows and split deliveries in Brazil. *European Journal of Operational Research , 199*, 750-758.

Beltramin, E., & Bodin, L. (1974). Networks and vehicle routing for municipal waste collection. *Networks* , 65-94.

Bentley, J. J. (1992). Fast algorithms for geometric traveling salesman problems. *ORSA Journal on Computing , 4*, 387-411.

Berbeglia, G., Cordeau, J.-F., Gribkovskaia, I., & Laporte, G. (2007). Static pickup and delivery problems: a classification scheme and survey. *TOP* , 1-31.

Biachi, L., & Gambardella, L. M. (2002). An Ant Colony Optimization Approach to the Probabilistic Traveling Salesman Problem. En J. J. Merelo, P. Adamidis, & H.-G. Beyer, *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VII* (págs. 883-892). Springer Berlin Heidelberg.

Bianchi, L., Birattari, M., & Chiarandini, M. (2004). Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands. En X. Yao, E. K. Burke, & J. A. Lozano, *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII* (págs. 450-460). Springer Berlin Heidelberg.

Blanton, J. L., & Wainwright, R. L. (1993). Multiple vehicle routing with time and capacity constraints using genetic algorithms. *5th International Conference on Genetic Algorithms* (págs. 452-459). San Francisco, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc. .

Burchett, D., & Campion, E. (2002). *Mix fleet vehicle routing problem –An application of Tabu search in the grocery delivery industry*. Recuperado el 7 de 12 de 2013, de http://www.mang.canterbury.ac.nz/courseinfo/msci/msci680/webpage.htm

Camerini, P., Fratta, L., & Maffioli, F. (1975). On improving relaxation methods by modified gradient techniques. *Mathematical Programming Studies , 3*, 26-34.

Canales, S. (2004). Métodos Heurísticos en Problemas Geométricos: Visibilidad, Iluminación y VIgilancia. *Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. Fac. de Informática* . Madrid, España.

Cerny, V. (1985). Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications , 45*, 41-51.

Chopra, S., & Meindl, P. (2008). *Administración de la Cadena de Suministros: Estrategia, Planeación y Operación* . México: Pearson Education .

Christofides, N. (1976). The Vehicle Routing Problem. *RAIRO , 10*, 55-70.

Clarke, G., & Wright, J. W. (1964). Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. *Operations Research , 12*, 568-581.

Cook, W. (junio de 2007). *The Traveling Salesman Problem*. Recuperado el 10 de Diciembre de 2012, de http://www.tsp.gatech.edu/index.html

Cordeau, J., Gendreau, M., & Laporte, G. (1997). A tabu search heuristic for the multi-depot vehicle routing problem. *Networks* , 105-119.

Cordeau, J.-F., Gendreau, M., Laporte, G., Potvin, J.-Y., & Semet, F. (2002). A guide to Vehicle Routing Problem. *Journal of the Operational Research Society* , 512-522.

Crowder, H., & Padberg, M. (1980). Solving large-scale symmetric travellong salesman problems to optimality. *Management Science , 26*, 495-509.

Dainzú, P. (23 de 01 de 2013). *T21*. Recuperado el 2015, de http://t21.com.mx/logistica/2013/01/23/transporte-representa-49-costo-logistico

Dantzing, G., & Ramser, J. (1959). The Truck Dispatching Problem. *Management Science , 6*, 80-91.

Dantzing, G., Fulkerson, R., & Johnson, S. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Operations Research , 3*, 393-410.

Dejax, P., Gendreau, M., & Gueguen, C. (2003). Vehicle Routing with Time Windows and Split Deliveries. *CiteSeer* .

Díaz, A., Glover, F., & Ghaziri, H. (1996). *Optimización Heurística y Redes Neuronales.* Madrid: Paraninfo.

Doerner, K., Hartl, R., & Reimann, M. (2001). A hybrid ACO algorithm for the full truckload transportation problem. Universidad de Vienna, Austria.

Dorigo, M., & Gambardella, L. M. (1997). Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation , 1*, 53-66.

Dror, M., & Trudeau, P. (1989). Savings by Split Delivery Routing. *Transportation Science* , 141-145.

Dror, M., Laporte, G., & Trudeau, P. (1994). Vehicle Routing with Split Deliveries. *Discrete Applied Mathematics , 50*, 239-254.

Drummond, L., Ochi, L., & Vianna, D. (2001). An asynchronous parallel metaheuristic for the period vehicle routing problem. *Future Generation Computer System* , 379-386.

Edmonds, J. (1965). Paths, trees and flowers. *Canadian Journal of Marhematics* , 449-467.

Flood, M. M. (1956). The Traveling Salesman Problem. *Operations Research* , 61-75.

Fogel, D. B. (1993). Applying evolutionary programming to selected traveling salesman problems. *Cybernetics and Systems , 24*, 27-36.

Francis, P. M., Smilowitz, K. R., & Tzur, M. (2008). The Period Vehicle Routing Problem and its Extensions. En T. V. Challenges, *Golden,Bruce; Raghavan,S.;Wasil, Edward* (págs. 73-102). Springer.

Francis, P., Smilowitz, K., & Tzur, M. (2008). The Period Vehicle Routing Problem and its Extensions. En B. Golden, S. Raghavan, & E. Wasil, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges* (págs. 73-102). US: Springer US.

Garey, M. R., & Johnson, D. S. (2003). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* New York, USA: W.H. Freeman y Cía.

Gendreau, M., Hertz, A., Laporte, G., & Stan, M. (1998). A Generalized Insertion Heuristic for the Traveling Salesman Problem with Time Windows. *Operations Research* , 330 - 335.

Gendreau, M., Laporte, G., & Seguin, R. (1996). Invited Review: Stochastic Vehicle Routing. *European Journal of Operational Research , 88*, 3-12.

Gendreau, M., Potvin, J.-Y., Braysy, O., & Hasle, G. L. (2008). Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem and its Extensions: A Categorized Bibliography. En B. Golden, S. Raghavn, & E. Wasil, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges* (págs. 143-169). USA: Springer.

Gheysens, F., Golden, B., & Assad, A. (1984). A Comparison of Techniques for Solving the Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem. *OR Spektrum* , 207-216.

Glenn, B. (1993). *Teoría de la computación. Lenguajes formales, autómatas y complejidad.* México, D.F.: Addison Wesley.

Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research* , 533-549.

Golden, B., Assad, A., Levy, L., & Gheysens, F. (1984). The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research , 11*, 49-66.

Golden, B., Assad, A., Levy, L., & Gheysens, F. (1984). The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research* , 49-66.

Grötschel, M. (1980). On the symmetric travelling salesman problem: Solution of a 120-city problem. *Mathematical Programming Studies , 12*, 61-77.

Grötschel, M., & Holland, O. (1987). A cutting plane algorithm for minimum perfect 2-matchings. *Computing , 39*, 327-344.

Grötschel, M., & Holland, O. (1991). Solution of large-scale symmetric travelling. *Mathematical Programming , 51*, 141-202.

Guan, M. (1962). Graphic programming using odd and even points. En *Chinese math* (págs. 273-277).

Gulczynski, D., Golden, B., & Wasil, E. (2011). The period vehicle routing problem: New heuristics and real-world variants. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* , 648-668.

Held, M., & Karp, R. M. (1971). The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II. *Mathematical Programming , 1* (1), 6-25.

Hernandez, H., & Salazar, J. J. (2004). A branch-and cut algorithm for the traveling salesman problem with pickup and delivery. *Discrete Applied Mathematics* , 126-139.

Hernandez, H., & Salazar, J. J. (2003). The One-Commodity Pickup-and-Delivery Travelling Salesman Problem. *Combinatorial Optimization* , 89-104.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (1994). *Introducción a la Investigación de Operaciones.* México: McGraw-Hill.

Ho, S., & Haugland, D. (2004). A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and split deliveries. *Computers & Operations Research* , 1947–1964.

Laporte, G. (1992). The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research* , 345-358.

Laporte, G. (1992). The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research , 59*, 345-358.

Laporte, G. (1992). The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research , 59*, 345-358.

Laporte, G. (2007). What you should know about the vehicle routing problem. *Naval Research Logistics (NRL)* , 811-819.

Larrañaga, P., Kuijpers, C., Murga, R., Inza, I., & Dizdarevic, S. (1999). Genetic Algorithms for the Travelling Salesman Problem: A Review of Representations and Operators. *Artificial Intelligence , 13*, 129-170.

Lee, C.-G., Epelman, M., White, C., & Bozer, Y. (2006). A shortest path approach to the multiple-vehicle routing problem with split pick-ups. *Transportation Research Part B: Methodological* , 265–284.

Lenstra, J., & Rinnooy, K. (1981). Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problem. *Networks , 11*, 221-227.

Lenstra, J., & Rinnooy, K. (1981). Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problem. *Networks , 11*, 221-227.

Lin, C. (2008). A cooperative strategy for a vehicle routing problem with pickup and delivery time windows. *Computers and Industrial Engineering , 55*, 766-782.

Liong, C., Wan Rosmanira, I., Khairuddin, O., & Zirour, M. (2008). Vehicle Routing Problem: Models and Solutions. *Journal of Quality Measurement and Analysis* , 205-218.

Liu, F.-H., & Shen, S.-Y. (1999). A Method for Vehicle Routing Problem with Multiple. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)* , 526-536.

Machado, P., Pereira, F., Tavares, J., & Costa, E. (2002). GVR: A new genetic representation for the vehicle routing probelm. En M. O'Neill, R. Sutcliffe, C. Ryan, & M. Eaton, *Artificial Intelligence and Cognitive Science* (págs. 95-102). Springer Berlín Heidelberg.

Miller, C., Tucker, A., & Zemlin, R. (1960). Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *Journal of the ACM (JACM)* , 326-329 .

Mullaseril, P., Dror, M., & Leung, J. (1997). Split-delivery routeing heuristics in livestock feed distribution. *Journal of the Operational Research Society* , 107-116.

Olivera, A. (2004). Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos. Montevideo, Uruguay: Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la Republica.

Padberg, M., & Rinaldi, G. (1991). A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM , 33*, 60-100.

Padberg, M., & Rinaldi, G. (1987). Optimization of a 532-city symmetric travelling salesman problem by branch and cut. *Operations Research , 6*, 1-7.

Papadimitriou, C., & Steiglitz, K. (1998). *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity .* New York: Dover Publications.

Pegg, E. (2009). The Icosian Game, Revisited. *The Mathematica Journal* , 310-314.

Pérez, J. I. (2011). Heurística inspirada en el análisis sistémico del "Vecino más cercano", para solucionar instancias simétricas TSP, empleando una base comparativa multicriterio. *Tesis* . Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Renaud, J., Laporte, G., & Boctor, F. (1996). A tabu search heuristic for the multi-depot vehicle routing problem. *Computers & Operations Research* , 229-235.

Restrepo, J., & Medina, P. D. (2008). Un problema logístico de programación de vehículos con capacidad finita. *Redalyc , 14*, 253-258.

Russell, R., & Igo, W. (1979). An assignment routing problem. *Networks* , 1-17.

Salhi, S., Sari, M., Saidi, D., & Touati, N. (1992). Adaptation of some vehicle fleet mix heuristics. *OMEGA* , 653-660.

Savelsbergh, M., & Sol, M. (1995). The general pickup and delivery problem. *Transportation Science* , 17-29.

Schmid, V. (2007). Trucks in Movement: Hybridization of Exact Approaches and Variable Neighborhood Search for the Delivery of Ready-Mixed Concrete. *Tesis* . Universidad de Viena.

Sierksma, G., & Tijssen, G. A. (1998). Routing helicopters for crew exchanges on off-shore locations. *Annals of Operations Research* , 261-286.

Soto, D., Wilson, S., & Pinzón, Y. (2008). Una metaheurística híbrida aplicada a un problema de planificación de rutas. *Avances en Sistemas de Informática* , 135-154.

Stuetzle, T., & Hoos, H. (1997). MAX-MIN Ant system and local search for the traveling salesman. *Evolutionary Computation* , 309-314.

Surekha, P., & Sumathi, D. (2011). Solution To Multi-Depot Vehicle Routing Problem . *World Applied Programming* , 118-131.

Tan, X., & Zhang, J. (2006). Ant Colony System for Optimizing Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW). En S. Huang, K. Li, & G. W. Irwin, *Computational Intelligence and Bioinformatics* (págs. 33-38). New York: Springer Berlin Heidelberg.

Tavares, J., Baptista, F., Machado, P., & Ernesto, C. (2003). Crossover and Diversity: A Study about GVR. Chicago, Illinois, USA.

Thangiah, S., & Salhi, S. (2001). Genetic clustering: An adaptive heuristic for the multidepot vehicle routing problem. *Applied Artificial Intelligence: An International Journal* , 361-383.

Tillman, F. (1969). The Multiple Terminal Delivery Problem with Probabilistic Demands. *Transportation Science , 3*, 192-204.

Toscano, G. (2001). Optimización Multiobjetivo usando un Micro Algoritmo Genético. *Tesis de Maestría. Universidad Veracruzana* . México.

Toth, P., & Vigo, D. (2002). *The Vehicle Routing Problem.* Philadelphia: Siam.

Vacic, V., & Sobh, T. M. (2002). Vehicle Routing Problem with Time Windows. *CiteSeer* .

Wassan, N., & Osman, I. (2002). Tabu search variants for the mix fleet vehicle routing. *Journal of the Operational Research Society* , 768-782.

Xu, H., CHen, Z.-L., Rajagopal, S., & Arunapuram, S. (2003). Solving a Practical Pickup and Delivery Problem. *Transportation Science , 37*, 347-364.