UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

ASIGNACIÓN DE PAGOS DE PRÉSTAMOS

POR

RODRIGO XAVIER SAN MIGUEL BECERRA

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

DICIEMBRE, 2016

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

División de Estudios de Posgrado

Asignación de Pagos de Préstamos

por

Rodrigo Xavier San Miguel Becerra

en opción al grado de

Maestría en Ciencias

en Ingeniería de Sistemas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Diciembre 2016

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Asignación de Pagos de Préstamos», realizada por el alumno Rodrigo Xavier San Miguel Becerra, con número de matrícula 1770882, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dra. Yasmín Á. Ríos Solís

Director de Tesis

Dr. Romeo Sánchez Nigenda

Revisor

Dr. Mario Alberto Saucedo Espinosa

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Diciembre 2016

Este trabajo se lo quiero dedicar a todos los mexicanos y entidades que pagan impuestos, pues es gracias a la contribución fiscal de ustedes la razón por la que los alumnos de posgrado contamos con el apoyo económico.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Agradecimientos

Existen diversas personas, diferentes grupos y asimilares instituciones que me encantaría agradecer, así que he dividido esta sección en cuatro partes: Agradecimientos en la Academia, Agradecimientos a la Familia y Amigos, Agradecimientos a la Industria y por último Agradecimientos Espirituales y Egoístas.

0.1 Agradecimientos en la Academia:

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, me encuentro enormemente agradecido por el apoyo económico que me has brindado, sin la ayuda del CONACYT muchos mexicanos, investigadores, estudiantes, empresas y hasta extranjeros seguiríamos sin sobresalir, pero es gracias al CONACYT que nuestros sueños se hacen realidad. También es importante destacar que la Universidad Autónoma de Nuevo León ha colaborado de similar manera que el CONACYT, pues la Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica junto con la UANL me han otorgado beca completa durante mis estudios de maestría. Hablando de maestría, no puedo olvidar al Posgrado en Ingeniería de Sistemas, comúnmente llamado PISIS, pues son los profesores del posgrado quienes han contribuido en gran parte a mi formación académica. Dra. Ada Álvarez, Dr. Arturo Berrones, Dr. César Villarreal, Dr. Igor S. Litvinchev, Dra. Iris A. Martínez, Dr. Romeo Sánchez y por último a mi directora de tesis la Dra. Yasmín A. Ríos quien me brindó su conocimiento y guía en mi experiencia como alumno de maestría en PISIS.

0.2 Agradecimientos a Familia y Amigos:

Agradezco infinitamente a Jorge González, a Sajad Omidvar y a Francisco Banda, quienes siempre me animaron a iniciar esta aventura, en distintos tiempos y caminos me alentaron a seguir un sólo objetivo, iniciar la maestría. También es necesario mencionar y agradecer a mis amigos y compañeros del posgrado: Carlos Torres, José Morales, José Torres, Fernando Galván, César Leal, Carolina Riascos y Andrés Parra quienes siempre se encontraban disponibles a dedicar de su tiempo para apoyarme.

El poner en pausa la industria para mejorar la preparación académica fue una decisión muy difícil y quiero expresar mi eterno agradecimiento a mi familia, que me ha brindado apoyo incondicional, mis hermanos Rolando San Miguel y Diego San Miguel, pero en especial mi madre Lucina Becerra García y mi padre Rolando San Miguel Garza que me han aguantado en su hogar a pesar de que tengo ya casi los 29 años.

Para finalizar esta parte, quiero integrar aquí a mi casi esposa Karen Tijerina, a quien de igual manera agradezco su apoyo, comprensión y paciencia de lidiar con mi personalidad estocástica.

0.3 Agradecimientos a la Industria:

Mi intención en esta parte es mencionar a las personas que se encuentran en la industria y que pienso han contribuido en mi camino, ellos son: Agustín del Río, Ángeles Villarreal, Guillermo Ceballos, Lori Miller, Carlos Olivo, Michael O'Meara, Jorge Lozano y Elizabeth Cain. Creo que de alguna forma todos ellos me orillaron al punto de la preparación continua y es por eso que merecen ser resaltados.

0.4 Agradecimientos Espirituales y Egoistas:

Quiero agradecer a Dios por darme vida y libertad. Pero sobre todo debo agradecerme a mi mismo, ya que el camino fue recorrido por mi y solo yo podía decidir si enfrentaba los obstáculos o me retiraba. Yo Rodrigo Xavier San Miguel Becerra enfrenté a través de la libertad otorgada por Dios, elegí la ruta a seguir y claro que un sin fin de personas han cruzado por donde he pasado, unos deciden si acompañarme o no, pero no todos pasaron su tiempo luchando por mi. Quiero que todos recuerden que se les agradece, pero cuando alguien cumple sus objetivos es gracias a esa misma persona y a pesar de ser el protagonista de la historia, pocas veces recibe crédito de sus logros y existencia. Gracias Rodrigo Xavier San Miguel Becerra por completar y cerrar un capítulo importante en tu vida. Rodrigo, lo has logrado, con una historia de cambios en tu contra, que indica un promedio de duración de seis meses en un trabajo, vaya que resultó interesante y difícil completar el compromiso. Pero demostraste constancia y el resultado fue éxito.

Resumen

Rodrigo Xavier San Miguel Becerra.

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias
en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

Asignación de Pagos de Préstamos

Número de páginas: 55.

Objetivos y método de estudio: Los objetivos del presente estudio es el entender las alternativas existentes con las que cuentan los deudores, pues al comprender de una mejor manera las alternativas que tiene un deudor se puede crear un mejor modelo para cumplir con el objetivo específico de minimizar la cantidad total a destinar para el pago de una deuda. El método de estudio que se siguió fue el basarse primeramente en un ensayo que trata dicho problema de tesis, después de entender completamente el problema se investigó los escenarios de deuda más comunes según fuentes que tratan los países de México y de Estados Unidos de América.

Contribuciones y conclusiones: Se agregaron algunas contribuciones que cambian totalmente el resultado del problema, pero estas no hubiesen existido de no ser por la oportunidad que me otorgó la Universidad Autónoma de Nuevo León, dentro de estas cabe mencionar las siguientes: El ahorro es una pieza clave, el modelo propuesto tiene la ventaja de contar con este supuesto. Fechas finales estrictas, un supuesto muy importante que también ha sido agregado, pues dependiendo del contrato y reglas estas pueden surgir. Se modificó también un conjunto de restricciones para no perjudicar a la entidad que contaba con un balance menor al pago establecido mensual. Las tasas de interés cuasi-fijas también han sido incluidas. La principal conclusión es el entendimiento de los escenarios, pues no todos los casos de deuda harán el uso completo del modelo y no en todos los eventos el modelo será mejor que la estrategia de "Tasa de Interés más Alto", pero siempre llegará al óptimo.

Firma del Director de Tesis: ______________________________

Dra. Yasmín Á. Ríos Solís

Capítulo 1

Introducción

1.1 El Problema

Supongamos que una persona cuenta con un grupo de múltiples deudas, dicha persona cuenta con recursos limitados y tiene que optar por tomar una decisión mensual para poder decidir qué pagará y qué dejará de pagar cierto mes, para así cumplir con sus obligaciones sobre dichos pasivos adquiridos. Estos compromisos pueden surgir de varias maneras, las más comunes son: hipotecas, préstamos para estudiar universidad, tarjetas de crédito, sobregirar una cuenta y crédito para comprar un automóvil. Este individuo desea saber, dado cierta liquidez mensual y un conjunto de préstamos ¿Cuál es la mejor manera de asignar los recursos para poder subsanar las deudas?

Existen escenarios en los cuales una persona o entidad saben con antelación ciertos pagos que deberán cumplir, estos pueden ser puntuales como el pago de la luz o el de colegiatura, que se realizan mensualmente. Con tan solo contemplar el ejemplo anterior, el seguir una política de pago común, como depositar el dinero extra en la deuda que tiene un interés mayor se puede volver completamente irracional. Pues si imaginamos que la luz es primordial para llevar a cabo ciertas actividades de trabajo, debimos haber ahorrado para pagar primero este servicio. De tal manera tomando en cuenta supuestos reales que no se han visualizado en investigaciones anteriores, las políticas comunes de pago se desempeñan pobremente en el caso de que el deudor quiera minimizar la cantidad total destinada a pagar el total de sus deudas.

Diferentes personas se enfrentan a distintos casos, habrán quienes tengan un mayor poder adquisitivo al promedio de la población, quizás este tipo de personas cuentan con capital adicional y para un cierto mes podría preguntarse ¿Cómo podría asignar este dinero extra para minimizar la deuda de los préstamos obtenidos? Por supuesto, es más probable vivir un escenario inverso en el cual, el deudor no consiguió la cantidad esperada de ingresos para un mes en particular, dicha situación nos conlleva a cuestionarnos ¿Cuál es el orden de prioridad que el deudor debe seguir para pagar las deudas y a su vez minimizar estas mismas?

En la presente investigación se muestra que la selección de la mejor política a seguir para cubrir el pago de un conjunto de préstamos no es sencilla, ni siquiera para una familiar de clase social alta, esto debido a los diferentes instrumentos de deuda, ya que son regulados por diferentes instituciones, por lo tanto cada instrumento tendrá consigo reglas y supuestos desiguales. Como ejemplo los tiempos de inicio y de finalización, las tasas de interés ordinario y moratorio, penalidades por pagar ya sea una cantidad mayor o menor de la cantidad estipulada.

El problema previamente descrito, mejor conocido como "Política del Reembolso de Múltiples Préstamos" (PRMP), se puede volver aún más complejo cuando una entidad o persona cuenta con mayor número de deudas con distintas restricciones y además el asunto puede verse todavía peor si se consideran externalidades como la crisis la cual afecta a las organizaciones. En la presente investigación se propone un modelo de programación lineal entera mixta, el cual establece un plan de pagos óptimo, dicho plan ajustado a las condiciones previamente establecidas, minimiza la cantidad total de dinero necesario a destinar para liquidar los préstamos.

Algo sumamente importante es el demostrar que no existe una política simple o un plan que establezca que siempre se conseguirá de manera óptima liberarse del conjunto de deudas pagando lo mínimo posible.

1.2 Estrategias Populares

Actualmente existen dos estrategias populares para el pago de las deudas, estas son la estrategia "Deuda de Interés más Alto" y la modalidad "Deuda Bola de Nieve". En el presente trabajo se demuestra que dichas tácticas a pesar de ser métodos propuestos por expertos financieros muy prestigiosos a nivel mundial [23], son inapropiadas para conseguir el objetivo de minimizar el pago total por las deudas.

1.2.1 Deuda de Interés más Alto

La estrategia "Deuda de Interés más Alto" consta de ordenar descendentemente las deudas de acuerdo a la tasa de interés ordinaria. Una vez que los pagos mínimos fueron cubiertos para no generar intereses moratorios, el resto del capital es asignado a la deuda con mayor tasa de interés ordinario, la cual sería la primera deuda en la lista ordenada. Este proceso es realizado de manera continua hasta que el deudor haya completado el pago de sus deudas. Muchos expertos financieros afirmarían que dicha estrategia explicada anteriormente es la mejor para poder aminorar la cantidad total a pagar. Más adelante en el marco teórico en la sección llamada "La Idea Detrás la Estrategia de Interés más Alto que la metodología" se explicará la razón la cual la estrategia "Deuda de Interés más Alto" se posiciona lejos de ser la óptima.

1.2.2 Deuda Bola de Nieve

Las condiciones de la modalidad "Deuda Bola de Nieve" son muy parecidas a la "Deuda de Interés más Alto"solo que ahora las deudas se ordenan por tamaño de deuda y de manera ascendente. Una vez que los pagos mínimos han sido realizados, el resto del capital pasa a ser asignado a la deuda con el monto más pequeño, la cual sería la primera deuda en la lista ordenada. De manera semejante a la estrategia anterior, este proceso es realizado de manera continua hasta que el deudor haya terminado el pago de sus préstamos. Otro grupo de expertos financieros menciona que a pesar de que esta secuencia es sub-óptima, dicho hábito genera efectos psicológicos positivos [2], cuales efectos no son de nuestro interés, pues buscamos encontrar una solución racional en la presente investigación.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Generales

Los objetivos generales de la presente investigación es el entender las alternativas existentes con las que cuentan los deudores. Es necesario conocer a qué se enfrentan y qué tipo de soluciones pueden emplear. Además, el objetivo principal de esta investigación es el encontrar una solución óptima al problema especificado en el inicio.

1.3.2 Objetivos Particulares

Específicamente se busca encontrar una solución óptima para el problema mencionado en el inicio. Buscaremos la mejor manera de asignar los pagos destinados a un conjunto de deudas adquiridas, teniendo en cuenta que como óptimo nos referimos a minimizar el total de dinero empleado para subsanar dichos prestamos. Además, para poder encontrar un plan de pagos que minimice la suma total del dinero a utilizar para eliminar las deudas, es necesario conocer y entender la programación lineal entera mixta, ya que el modelo por presentar representa una aplicación de esta rama de las matemáticas discretas.

1.4 Hipótesis

Las estrategias populares utilizadas para subsanar un conjunto de deudas son ineficientes, pues estas funcionan de acuerdo a supuestos los cuales no se apegan a la realidad actual, ya que existen restricciones en la vida cotidiana que no son tomadas en cuenta en las estrategias populares como “Deuda de Interés más Alto” y “Deuda Bola de Nieve”. Algunos supuestos no considerados actualmente en las metodologías mencionadas son la posibilidad de ahorro y las fechas limites estrictas.

1.5 Justificación

1.5.1 Panorama en México

Cerca de 6 millones de empresas operan en México, donde aproximadamente el 94.3 % de estas son Microempresas [25], las cuales son catalogadas como tal ya que cuentan con menos de 10 empleados [5]. Este grupo compone el 15 % del Producto Interno Bruto (PIB) del país y además es el encargado de emplear casi el 41 % de la población económicamente activa. Muchas de estas empresas necesitan un crédito para poder realizar transacciones y competir, a la postre de esta manera escalar la jerarquía o al menos mantener su estatus de vida.

Aproximadamente el 50 % de las familias mexicanas tienen deudas y cerca del 12 % de estos hogares requerirá más de un año para liquidarlas. Es aún más preocupante saber que la suma de las deudas en los hogares mexicanos equivale a casi el 8 % del Producto Interno Bruto [11]. Por estos y otros saberes, es razonable mencionar que las financieras conocen la existente y creciente demanda de los créditos y microcréditos, semejantemente es entendible creer que existe un alto riesgo al autorizar préstamos a las Pequenãs y Mediana Empresas (PYMES), conociendo que la esperanza de vida de una de estas no supera los 2 años, al igual que es riesgoso prestar a una familia, teniendo en cuenta la información presentada anteriormente.

Algo todavía más impactante es la dueda pública de las entidades federativas, tema en el cual los estados como Quintana Roo, Nuevo León y Coahuila cuentan con deudas que superan el 100 % de los ingresos anuales que perciben las mismas entidades federativas [12].

Por los hechos mencionados, es importante encontrar una manera de aminorar los posibles apuros que se puedan adjudicar al préstamo del dinero, situación que beneficiaría a todos los integrantes del juego: al microempresario, a los bancos, a las financieras, a los municipios, a los estados de la nación y al país.

1.5.2 Panorama en Estados Unidos de América

En el caso Estadounidense la situación parece ser aún más grave, según Eri El Issa [19], una familia promedio cuenta con una deuda de 130, 992 dolaés anuales, los cuales 15, 762 corresponden a deudas adquiridas por el uso de tarjetas de crédito. Mientras que la mediana del salario anual correspondiente a una familia es 50, 502 dolarés anuales [1].

Si nos enfocamos en la deuda de los estudiantes y/o de los recién graduados de la universidad el paisaje es perturbador, ya que un estudio nos muestra como el 69 % de los graduados de universidades públicas y/o que completaron sus estudios en instituciones sin fines de lucro, cargan con una deuda de 28, 950 [17].

En cuanto al detalle de las empresas, de acuerdo a la Administración de Negocios Pequeños de los Estados Unidos de América, las empresas pequeñas que cuentan a lo mucho con 20 empleados, representan el 89.5 % y si nos vamos a más detalle, el 61.9 % de las empresas tienen a lo máximo 4 empleados. En el mismo reporte la Administración de Negocios Pequeños, mejor conocida como la “Small Business Administration” y por sus siglas en inglés “SBA” menciona que las empresas pequeñas tienen una participación del 63 % de los empleos en el mercado laboral nacional.

Las relaciones de las empresas pequeñas con los bancos y las instituciones financieras son fuertes, de acuerdo a un estudio realizado por Babson [8] la cantidad de aplicaciones para préstamos requeridas por empresas pequeñas son lideradas por las instituciones financieras y las tarjetas de crédito.

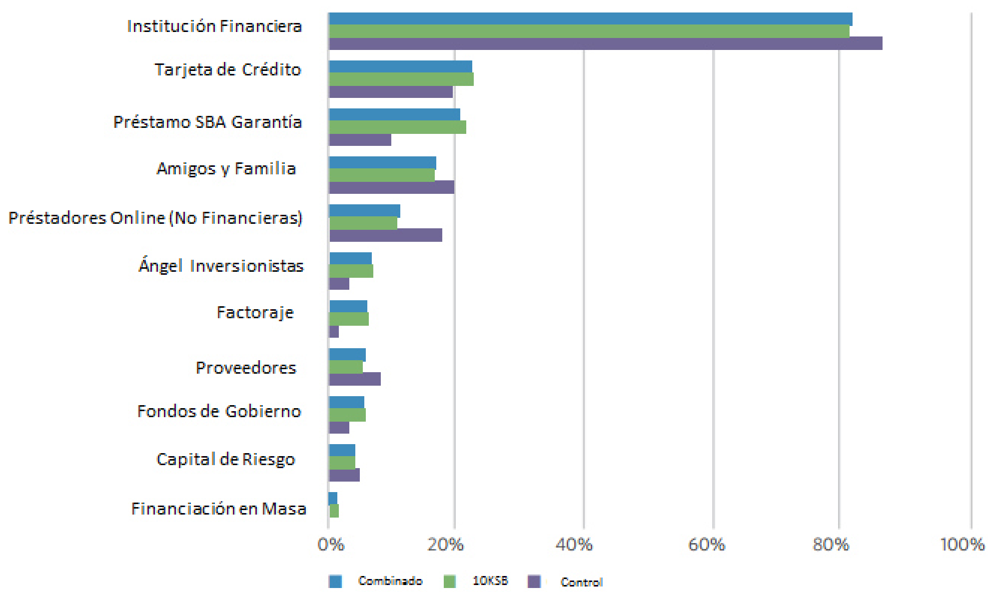

Figura 1.1: Porcentaje de aplicaciones solicitadas en diferentes entidades.

En la figura 1.1 podemos apreciar una gráfica que nos muestra el porcentaje de aplicaciones solicitadas por empresas pequeñas en los Estados Unidos de América, la imagen ha sido extraída del estudio conformado por Babson [8]. Se observa un orden de importancia decreciente siendo la fuente de financiamiento con más aplicaciones las instituciones financieras, seguido de las tarjetas de crédito y viendo en la última posición el financiamiento en masa, también llamado "crowdfunding".

Todos estos datos nos ayudan a observar algunas de las causas principales de las crisis económicas que si bien no inician en México, nos pegan por la dependencia extrema a E.U.A.

1.5.3 Comparación de Supuestos y Estrategias

La importancia y eficiencia de los modelos al igual que las soluciones recaen en el nivel de realismo de los supuestos considerados para estos.

Supuestos en las Estrategias Populares

Los supuestos manejados en las estrategias populares constan de ingresos variados, penalidad por el no cumplimiento del pago mínimo, la inexistencia de la oportunidad de ahorro, el contar con una tasa de interés fija, la falta de inclusión de penalidades por pago adelantado, la omisión de la integración de las fechas límites y la no importancia a las fechas iniciales de deuda.

Supuestos Presentados en el Modelo Matemático

Contrario a la mayoría de los supuestos de las estrategias populares, en el modelo matemático integraremos la oportunidad de ahorrar, al igual que consideraremos tasas cuasi-fijas, penalidades por adelantado, incluiremos también fechas límites e iniciales, semejantemente existirá penalidad por el no cumplimiento del pago mínimo y por el pago adelantado.

Tabla Comparativa de Supuestos

A continuación se presenta una tabla comparativa de los supuestos considerados para las Estrategias Populares y el Modelo Matemático.

Supuestos	Estrategias populares	Modelo matemático
Fecha inicial	X	X
Fecha límite		X
Tasa de interés variable		X
Ahorro		X
Pago mínimo (penalidad)	X	X
Pago máximo (penalidad)		X

Tabla 1.1: Tabla comparativa de supuestos.

La tabla anterior es importante de comprender, pues es de los supuestos donde parte la investigación. Observemos que tenemos una columna de supuestos, si para cierto concepto existe una marca "X" en la celda y columna correspondiente, significa que dicho supuesto es considerado para la metodología escrita en la cabecera de la columna. Ejemplo, el supuesto "Fecha límite" no es considerado en las "Estrategias populares", pero si es tomado en cuenta en el "Modelo matemático".

1.6 Metodología

La metodología seguida en la tesis, fue el revisar la primera versión de un documento de trabajo. Dicha investigación fue sometida a la revista científica "Operations Research Perspectives", el trabajo fue titulado "Integer linear programming for repaying loans", los autores de la publicación son: Yasmín Ríos, Mario Saucedo y Gabriel Caballero. Al realizar la revisión se encontró con que el modelo matemático sugerido no contemplaba supuestos necesarios como la opción de ahorro y las fechas límites estrictas. Para probar que estos supuestos sugeridos como improvisación agregaban valor, se utilizó GAMS para programar el problema PRMP. Los resultados del modelo programado en GAMS demostraron que efectivamente los supuestos mejoraban el resultado, pues se consiguió reducir la cantidad total a pagar por el conjunto de deudas. Posteriormente al comunicar esto a los autores, actualizarón su trabajo, cual trabajo fue revisado una vez más y se observó que en el tipo de deuda préstamo en el cual se establece una cantidad mensual a pagar, la parte de la modelación necesitaba un ajuste para poder hacer un modelo aún más real, dicha modificación también se realizó.

1.7 Estructura

La tesis se encuentra dividida en seis partes, en el primer capítulo se ha dado una introducción general del problema a analizar, se han detallado los objetivos generales y específicos de la tesis, al igual se ha establecido una hipótesis y se presenta también la justificación, por último se explica la metodología seguida en este trabajo de investigación. Para el segundo capítulo se muestra el marco teórico, se hace mención de trabajos que tocan el tema y se muestra un preámbulo necesario para el entendimiento de los capítulos posteriores. En el capítulo tres se muestra una detallada comparación de las ideas comúnmente usadas y los supuestos. Para el cuarto capítulo se explica detalladamente la modelación matemática aplicada para resolver el problema. Dentro del quinto capítulo podremos encontrar los resultados experimentales y se termina la tesis con conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 El Problema y las Estrategias Actuales

Retomemos el problema de estudio que hemos sugerido al inicio de la introducción. Una entidad que puede ser una persona o empresa, cuenta con una serie de deudas ya que ha solicitado préstamos en el pasado y además puede esta contar con deudas en el futuro, pues ya sea la compañía o el individuo podrían tener necesidad de adquirir un crédito. Dicho sujeto, requiere minimizar la cantidad total a destinar a los pagos de los préstamos. De acuerdo a la literatura, este problema trabajado primeramente por Gupta [16] y seguido por C.T. NG [24], es llamado "Política del Reembolso de Múltiples Préstamos" (PRMP).

Comúnmente se han empleado dos estrategias para atacar el problema comentado, estas son las estrategia "Deuda de Interés más Alto" y la técnica "Deuda Bola de Nieve".

Deuda de Interés más Alto

La primera metodología nos menciona que primero debemos de ordenar las deudas de mayor a menor de acuerdo a la tasa de interés, una vez habiendo ordenado las deudas se procede a la realización de los pagos mínimos, dando preferencia al orden que hemos obtenido. Terminando los pagos mínimos, en el caso de aún contar con disponibilidad de dinero, colocaríamos este en la deuda con interés más alto, es decir iría destinado a la primera deuda de nuestra lista según el orden sugerido previamente. Si la deuda ha sido subsanada, pasaríamos con la siguiente en la lista y así sucesivamente. En el escenario de no tener más fondos, esperaríamos al evento de obtención de capital e iniciaríamos el proceso especificado en esta misma metodología.

Deuda Bola de Nieve

La segunda estrategia propone un orden distinto, el cual se basa en el tamaño de deuda pendiente o balance. El orden es ascendente respecto al balance y se busca primero realizar los pagos mínimos requeridos siguiendo el orden obtenido. Al finalizar los pagos mínimos, en el supuesto de tener dinero restante, este se asignará a la deuda con mayor balance, es decir será destinado en la primera deuda de la lista según el orden recomendado anteriormente. En el caso de que la deuda quede ya subsanada, seguiríamos con la siguiente en la lista y así sucesivamente. En el escenario de no contar con más capital, se esperaría al evento de la adquisición de fondos y se comenzaría el proceso comentando es este mismo párrafo.

2.2 Estado del Arte

Existen miles de artículos no científicos, cuales tratan de metodologías sobre cómo realizar el pago de las deudas, todos los artículos mencionan que la mejor metodología a seguir es la de la “Deuda de Interés más Alto”, muchos expertos financieros respaldan la idea, es por eso que se concluye que el problema PRMP es un caso que se ha creído durante años estar en lo correcto. Se entiende que los financieros, actuarios y economistas hayan sugerido durante tanto tiempo el siempre seguir la regla de pagar primero la deuda con mayor tasa de interés, esto ha sido de esta manera ya que a lo largo de los años se han manejado supuestos los cuales a veces no concuerdan con las situaciones reales. La rápida evolución de las políticas e instituciones financieras nos han empujado a tomar otros supuestos, y a su vez otras condiciones surgen para modificar el problema entero.

El Dr. Sushil K. Gupta, ha trabajado con una versión simplificada del problema PRMP, en el cual consideró supuestos no apegados a la realidad. La razón por la cual los supuestos no son aplicables a un caso real es porque Gupta en su trabajo [16] modeló el escenario como si fuese este un problema de “scheduling” con una máquina, cual objetivo es recortar el tiempo, donde los procesos por tarea incrementan en funciones de los tiempos iniciales. Es importante destacar que por lo mismo que el modelo considera una “máquina”, las deudas son consideradas como no preferenciales, lo que significa que si el deudor inicia el pago de una deuda, este no puede parar hasta haber completado de pagar los montos de la deuda. El escenario descrito anteriormente es irreal, la contribución realizada por Gupta implica restricciones sujetas a supuestos no viables, pues el deudor en el caso de que tenga más deudas que subsanar puede decidir en donde depositar el dinero. Además de que el escenario descrito por Gupta es utópico también podríamos decir que la función objetivo que implica recortar el tiempo, es no necesariamente la más adecuada, pues en la versión realista del problema PRMP lo que nos interesa es minimizar el dinero total destinado a pagar un conjunto de deudas, además de que la función objetivo se encuentra sujeta a restricciones antes no contempladas.

Se encontró un caso expuesto por Ng [24], donde de nuevo se asume una versión simplificada del problema PRMP, la misma versión que manejó Gupta, y lo transforma también en un problema de “scheduling” con deudas preferenciales en los tiempos de pago, esto es a su vez aproximado con un modelo continuo de optimización no lineal. El modelo propuesto provee soluciones aproximadas a la versión simplificada del problema de “Política del Reembolso de Múltiples Préstamos”. En la presente investigación, el modelo matemático resuelve de manera exacta el problema de PRMP. Los autores justifican dicho algoritmo, comentando sobre la complejidad del problema PRMP; es recomendable leer a Papadmitriou, para entender el tema de la complejidad computacional [26]. Podría ser un tema de interés, el estudio de la complejidad computacional del problema general del Reembolso de Múltiples

Préstamos.

Un factor clave que se debe mencionar y que es de gran ayuda para resolver el problema de PRMP, es el saber que en realidad no hay necesidad de conocer a priori o de suponer fechas límites de pago de las deudas, al menos que estas deudas sufran de fechas límites estrictas. Lo trascendental en este problema a considerar es el minimizar el total a pagar. Con los resultados presentados se cierran casi 20 años de la pregunta sobre la complejidad de su versión simplificada que resultó ser un problema fácil, mientras que su contraparte el problema PRMP realista reflejó ser difícil. Cabe señalar que las fechas límites estrictas se pueden manejar en el modelo realista del problema PRMP, pues existen casos especiales en los cuales si un deudor no paga a tiempo, este puede perder su casa, auto y propiedades entre otras cosas, ya sea a través de un banco o de una casa de empeño.

El problema PRMP no sugiere, ni organiza un plan de préstamos que el deudor debe conseguir, caso contrario de los problemas de Flujo de Efectivo, en los cuales se busca maximizar el valor presente neto, Barbosa y Pimentel [3]; Russel [28]; Hartmann y Briskorn [30]; Weglarz [33]. El problema PRMP trata con un conjunto de deudas ya previamente adquiridas donde el objetivo es minimizar la cantidad total requerida para pagar los préstamos.

Un factor importante a destacar en cuanto al estudio del estado del arte, es que no se observó la existencia de un autor que tomase en cuenta la opción de ahorrar capital, de igual manera en la búsqueda tampoco se encontró algún documento que indicará la inclusión de restricciones de penalización por pronto pre-pago, ni de la consideración de las fechas límites extremas, todos estos supuestos mencionados son los que hacen que el problema PRMP sea interesante, pues se apegan al caso real del mismo problema.

En los modelos innovadores por presentar en la presente investigación, observaremos la interesante alternativa de ahorrar en lugar de pagar, concepto el cual ha sido tomado prestado de los problemas de inventario. A pesar de que en teoría siempre se ha recomendado lo contrario a tener el dinero parado, en el presente estudio podremos visualizar que precisamente hay veces que el modelo formulado nos recomendará tener nuestro capital guardado, ya que existen escenarios en los cuales las personas conocen que deberán destinar cierta cantidad de dinero para algo en específico que no es una deuda necesariamente.

Para entender la mención de que el concepto fue extraído de los problemas de inventario, basta con ilustrar un ejemplo sin necesidad de llegar a la modelación de un problema de este tipo. Suponga que tiene que satisfacer una cantidad de demanda de cierto producto para los siguientes cinco meses. Imagine también que al pedir al proveedor este producto, el proveedor se tarda dos meses en entregar los productos y usted se encuentra en el inicio del segundo mes. Es lógico pensar que usted optará por realizar un pedido que incluya la demanda del quinto mes, pues si no lo hace de esta manera, perderá la oportunidad de satisfacer dicha demanda por la cuestión de los tiempos de entrega. Para poder leer más sobre este tipo de problemas consulte [31].

En este trabajo, se hace uso de la modelación de programación lineal entera mixta, la cual es una herramienta poderosa en las matemáticas discretas para modelar el problema de PRMP y así resolverlo en un tiempo razonable, utilizando instancias promedio de un hogar meramente mexicano.

2.3 Modelación Matemática

En la sección anterior se hizo mención de la programación lineal entera mixta, en esta sección se recordarán algunas ramas de la modelación matemática.

2.3.1 Programación Lineal

El desarrollo de la programación lineal ha sido catalogado como uno de los avances científicos más importantes del siglo 20. Su impacto ha sido asombroso, desde el año 1950 al presente [15]. Pues la aplicación de la programación lineal ha estado presente en varios temas como en problemas de nutrición, manufactura, transporte, calendarización, entre otros.

La programación lineal consta de problemas que buscan maximizar o minimizar una función lineal, la cual es sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Las restricciones pueden ser de igualdad o de desigualdad [13].

Más adelante en el capítulo de "Modelación Matemática del Problema de Múltiples Préstamos" observaremos el caso complejo y realista de este tipo de problemas, por ahora sería una buena practica iniciar por lo sencillo para pasar a lo complejo. Es por ello que en esta subsección se explicará un problema general de maximización y otro de minimización, esto con el fin de entender la funcionalidad de la programación lineal, la cual es la base del presente trabajo.

Ejemplos Generales de Maximización y Minimización

A continuación se presentan ejemplos generales de programación lineal, los cuales son de utilidad para posteriormente entender el modelo matemático que presentaremos.

Ejemplo General de Maximización de un Problema de Programación Lineal

$$\text{Maximizar: } c^T x$$
$$\text{Sujeto a: } Ax \leq b; x \geq 0.$$

La función objetivo $c^T x$ en el modelo general nos dice que se busca maximizar, al caso general que busca la maximización se le llama problema primal. Una explicación sencilla sería suponer que c representa un vector de parámetros conocidos, los cuales podríamos decir que son "Utilidades" por producto y x podrían ser las "unidades vendidas" por producto, donde x es un vector de variables por determinar. Entonces queremos maximizar las utilidades de acuerdo a las unidades vendidas, función que se encuentra sujeta a ciertas restricciones. Las ecuaciones por satisfacer nos dibujarán un politopo convexo el cual contiene todas las soluciones posibles, es decir óptimas y no óptimas. En cuanto a las restricciones, A es una matriz con coeficientes conocidos y b al igual que c, es un vector de coeficientes conocidos [7].

Ejemplo General de Minimización de un Problema de Programación Lineal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & b^T y \\ \text{Sujeto a: } & A^T y \geq c; y \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En el caso de la minimización, comúnmente llamado el problema dual [6] del problema de maximización, los términos son muy similares, solo que ahora invertimos los coeficientes, dejando en incognita el vector de variables y e intercambiamos los vectores b por c y viceversa. Pongamos atención en que también es necesario ajustar las desigualdades, siguiendo la lógica mostrada en el ejemplo de arriba.

2.3.2 Programación Entera

El caso general de un problema de maximización de programación entera, se puede modelar casi similarmente al general de la programación lineal, sólo debemos tomar en cuenta una restricción extra la cual define que x contemplará solamente valores enteros. El modelo matemático quedaría de la siguiente manera [35]:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & c^T x \\ \text{Sujeto a: } & A^T x \leq b; x \geq 0; x \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3.3 Programación Lineal Entera Mixta

La programación lineal entera mixta es muy parecida a la programación lineal y consecuentemente a la programación entera, de igual manera se considera que contiene solamente un conjunto de restricciones lineales, las cuales buscan maximizar o minimizar una función dada. Lo que hace diferente a este tipo de modelación es la integración de componentes enteros y no enteros [34].

2.4 Modelación Usada Actualmente

Anteriormente se mencionó que tanto los financieros como los economistas han optado por creer aplicables algunos supuestos, generalmente los supuestos aceptados son: el contar con una tasa de interés fija, la inexistencia de las fechas límites, la omisión de penalizaciones por pagar de más y la imposibilidad de optar por ahorrar. En esta investigación los supuestos cambian, se manejan fechas de inicio y límites distintas, al igual que deudas sin límites, existen penalizaciones por no cumplir con un pago mínimo y por sobrepasar un pago máximo, las tasas de interés pueden ser fijas o cuasi-fijas, y por último el ahorro si es una opción a considerar ya que los mismos supuestos empujan a tomar en cuenta acciones antes no vistas lógicas. Para poder comprender la razón del uso de los supuestos anteriores durante tanto tiempo, es importante entender la teoría del valor del dinero en el tiempo, y la existencia de diferentes productos financieros.

2.4.1 Teoría del Valor del Dinero en el Tiempo

En el mundo de las finanzas existen dos principales formulas, de las cuales nuestro trabajo se deriva y es exactamente de ahí donde queremos mejorar el pensamiento financiero. Estas formulas son llamadas “Valor Presente” y “Valor Futuro”, cuales formulas financieras tienen como parámetros el valor de la tasa de interés i, el número de tiempos medidos en la unidad deseada n, la cantidad de dinero en valor presente VP y por último la cantidad en dinero en su valor futuro VF.

La teoría del Valor del dinero en el tiempo nos dice que cualquier cantidad de dinero en el tiempo presente, cuenta con un mayor valor ahora mismo que esa misma cantidad en el futuro [21] y esto se debe al supuesto de que el dinero puede generar intereses siempre y cuando este se invierta en un instrumento que tenga la cualidad de generar intereses, los cuales harían que tu capital aumentará y al final la suma del capital generado por la tasa de interés más la cantidad inicial sea mayor comparado solamente con la cantidad inicial. Si seguimos esta lógica, observaremos que tener el dinero no invertido, sería irracional, pues es preferible generar intereses a no generarlos siempre y cuando hablamos del lado de las inversiones.

Valor Presente

La ecuación del "Valor Presente" nos explica que cierta cantidad que se tendrá en el futuro, es traída hacia el presente, descontando los intereses generados por una tasa de interés específica [18].

La formulación es la siguiente:

$$VP = VF(1+i)^{-n}. \tag{2.3}$$

Valor Futuro

La ecuación del "Valor Futuro" muestra como una cantidad con la cual se cuenta hoy, esta puede ser una cantidad mayor, añadiendo los intereses generados con el tiempo [14].

La formulación es la siguiente

$$VF = VP(1+i)^{n}. \tag{2.4}$$

2.4.2 Amortización

Es importante destacar que en el presente trabajo se toman en cuenta los préstamos en los cuales la amortización entra en juego, para esto se debe detallar las clases de amortizaciones más comunes y a la vez la que se estará considerando en este trabajo, pero antes que nada se debe explicar la amortización. La amortización de acuerdo a el artículo publicado en finanzas prácticas [27] es una deuda en la cual el deudor liquida el total del préstamo del capital suministrado, cumpliendo con periodos establecidos y con tasas de interés predefinidas. Veremos también que cada abono realizado se compone de dos partes, pues como menciona Luis Martínez en su artículo [22], cada importe contiene un porcentaje destinado al capital de la deuda y el otro porcentaje restante va a pagar los intereses.

En esta sección detallaremos los siguientes tipos de amortización: "Amortización Gradual", "Amortización Constante" y "Amortización de Renta Variable".

Amortización Gradual

En este sistema existen cuotas de valor constante, es decir que todos los pagos son iguales [10]. Lo que hace único a este sistema es que los intereses son aplicados sobre los saldos. Este es el tipo de amortización que utilizaremos durante la tesis, pues es de acuerdo a la experiencia el más utilizado en México.

A continuación se muestra la ecuación para realizar los cálculos referidos a este sistema [32]:

$$C = R * (1 - (1 + i/p)^{-np})/(i/p), \tag{2.5}$$

donde C representa a la deuda original, R es la renta o abono periódico, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos anuales y np es la cantidad de abonos.

Amortización Constante

Este sistema cuenta con una peculiaridad, siempre irá una misma cantidad del abono destinado al capital [32]. Es decir que la renta mensual es variable decreciente, ya que los intereses también decrecen. Las ecuaciones de este sistema son las siguientes:

Amortización con Renta Variable

Por último tenemos la amortización de renta variable, que de acuerdo a [29], este sistema tiene como variables tanto la renta como la amortización, de hecho se puede observar que estas crecen en con el tiempo.

Capítulo 3

Comparación de Ideas y Supuestos

3.1 La Idea Detrás la Estrategia de Interés más Alto

La idea de creer que la estrategia de interés más alto es la modalidad óptima se basa en matemáticas financieras básicas. En el siguiente ejemplo usaremos la formula de Valor Presente ilustrada en la sección anterior, en el cual observaremos como la estrategia de Deuda de interés más alto resulta pagando menos que su técnica contrincante Deuda Bola de Nieve, ya que la tasa de interés es la que define el crecimiento de la deuda.

Una manera sencilla de entender la razón por la que la estrategia de Deuda de interés más alto siempre ganará a la de Deuda Bola de Nieve, es ilustrando un ejemplo a la inversa. Consideremos dos posibles inversiones, una con una tasa de interés de 5 % y otra de 7 %, sin importar el tamaño de inversión ¿En cuál inversión depositaría el dinero? La respuesta es obvia, en la que me genera más y esa es la de 7 %. Pues funciona igual en el sentido de deudas, de acuerdo a la lógica señalada, primero trataríamos de subsanar la deuda con mayor tasa de interés.

Imaginemos un conjunto de deudas y que se dispone mensualmente de 500 pesos para destinarlos a los pagos de los pasivos obtenidos, además contemplemos que no existen los pagos mínimos, es decir que se explicará un ejemplo utilizando el modelo simple de PRMP, donde las únicas reglas son liquidar las deudas teniendo en cuenta las tasas de interés ordinarias. Los escenarios presentados a continuación reflejan las estrategias populares.

Préstamo	Monto	Tasa de Interés
Deuda A	1000	11 %
Deuda B	500	10 %
Deuda C	700	12 %

Tabla 3.1: Esta tabla muestra un conjunto de deudas con sus respectivas características a considerar en los escenarios presentados en esta misma sección.

3.1.1 Escenario 1: Deuda Bola de Nieve

Se cuenta con las deudas de la tabla de arriba, las deudas A, B y C. Las deudas tienen diferentes balances y distintas tasas de interés. En este escenario se mostrará cuanto pagaría un individuo que sigue la estrategia de Deuda Bola de Nieve. Lo primero que hace la entidad es ordenar los montos de manera ascendente, así que le quedaría el siguiente orden: Deuda B con un monto de $500, Deuda C con un balance de $700 y Deuda A con un valor de $1000. Los resultados son los siguientes.

Deuda total	Libre de deudas hasta el mes 5	Total de interés pagado $58.04
Deuda B	Se liquida hasta el mes 2	Total de interés pagado $4.20
Deuda C	Se liquida hasta el mes 3	Total de interés pagado $16.32
Deuda A	Se liquida hasta el mes 5	Total de interés pagado $37.51

Tabla 3.2: Tabla de resultados aplicando la metodología “Deuda Bola de Nieve”, considerando las deudas de la tabla 3.1.

3.1.2 Escenario 2: Deuda Interés más Alto

Se tienen las deudas consideradas en el escenario 1. En este escenario se observará cuanto pagaría una persona que sigue la modalidad Deuda Interés más Alto. Lo primero que realiza este es ordenar los préstamos por tamaño de la tasa de interés, esto lo hace de manera descendente. El orden sugerido es el siguiente: Deuda C con una cantidad de $700, Deuda A con el balance de $1000 y Deuda B con un monto de $500. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

Deuda total	Libre de deudas hasta el mes 5	Total de interés pagado $55.68
Deuda C	Se liquida hasta el mes 2	Total de interés pagado $9.07
Deuda A	Se liquida hasta el mes 4	Total de interés pagado $27.40
Deuda B	Se liquida hasta el mes 5	Total de interés pagado $19.21

Tabla 3.3: Tabla de resultados aplicando la metodología "Deuda Interés más Alto", considerando las deudas de la tabla 3.1.

Comparación de Escenarios

Para observar de mejor manera las diferencias en los pagos realizados y el impacto de las tasas de interés, se muestran dos imágenes comparativas de las estrategias, una nos ayuda a visualizar los pagos generados por las tasas de interés para cada deuda y la otra nos ilustra los pagos realizados a cada deuda por cada mes.

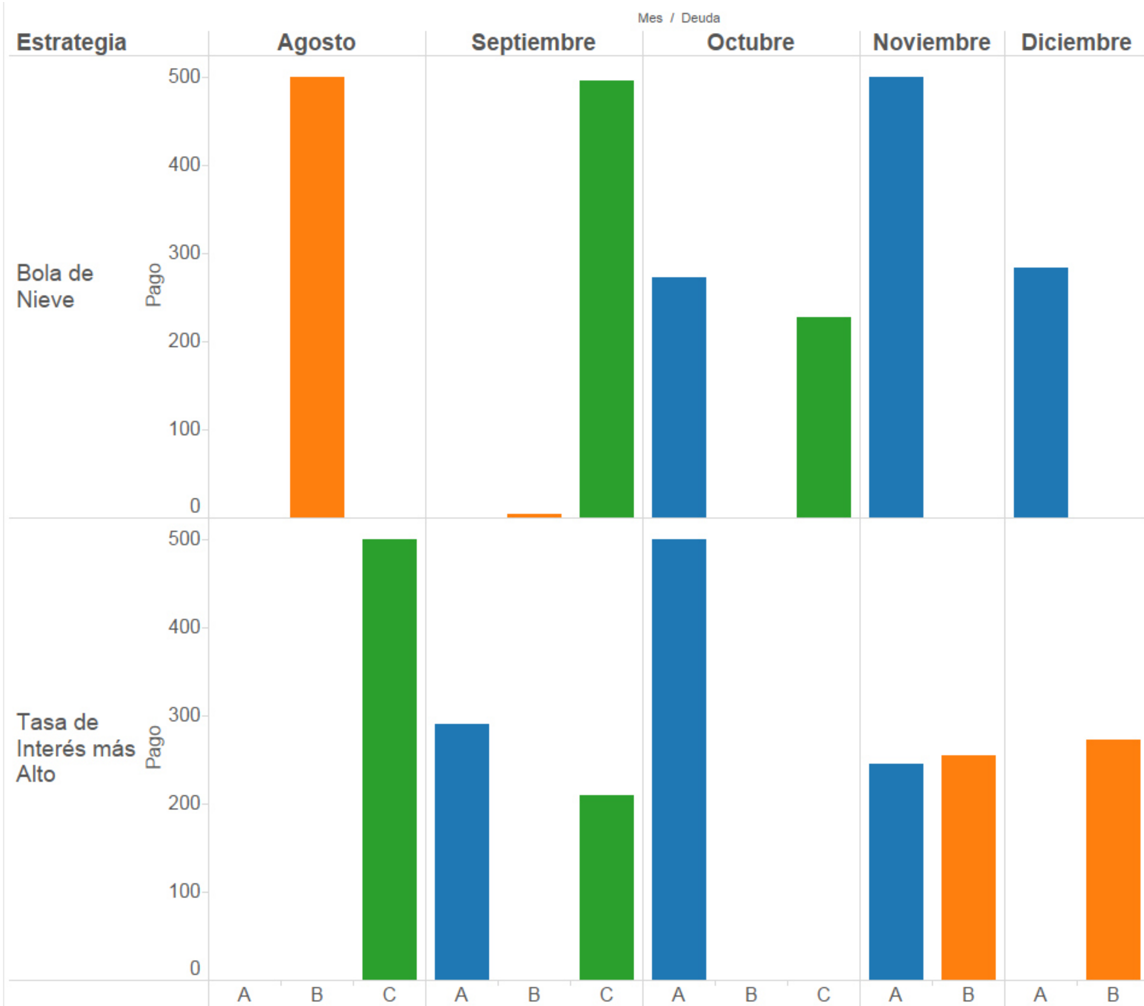

Figura 3.1: Gráfica comparativa de pagos

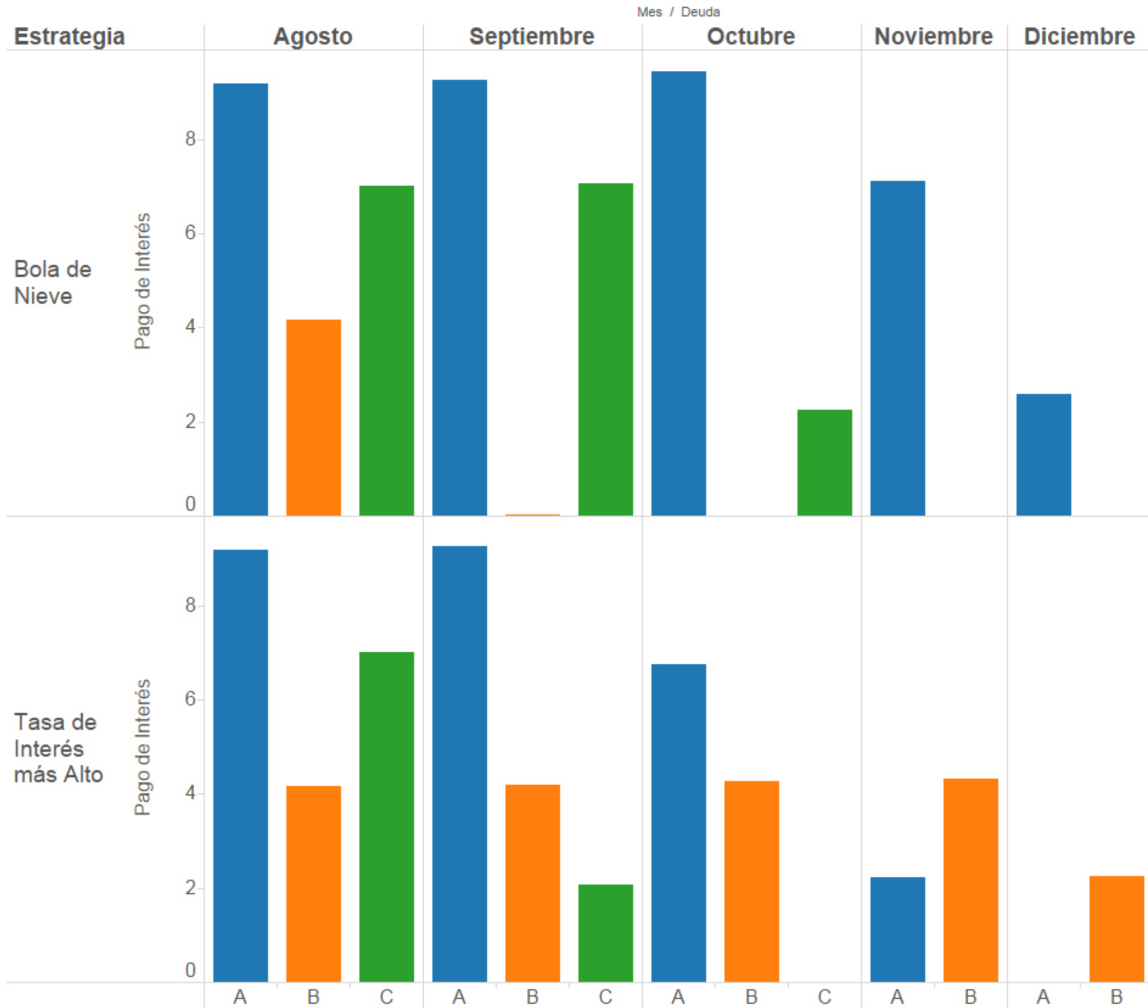

Figura 3.2: Gráfica comparativa de pagos por interés

3.2 ¿Qué Sucede al Considerar Supuestos Antes no Tomados en Cuenta?

Los dos ejemplos anteriores, nos muestran escenarios simples con supuestos no realistas y claro bajo esos supuestos no existe necesidad de realizar un modelo matemático ya que como se explicó, siempre será mejor destinar el dinero en aquella deuda o inversión que tenga una mayor tasa de interés ordinaria. Ya que hemos comenzado de un caso simple, vayamos paso a paso a lo complejo.

3.2.1 Escenario Simple con Tasa de Interés Moratoria

Consideremos ahora la existencia de los pagos mínimos, las tasas de interés ordinarias y moratorias. En este escenario la gente suele tomar decisiones incorrectas cuando no disponen del dinero suficiente para realizar los pagos mínimos del conjunto de deudas existentes. Ilustremos un ejemplo:

Préstamo	Monto	Tasa Ordinaria	Tasa Moratoria
Deuda A	1000	10 %	8 %
Deuda B	500	8 %	10 %
Deuda C	700	6 %	20 %

Tabla 3.4: Tabla con ejemplo de interés moratorio.

En la tabla de anterior, se observan tres diferentes deudas, digamos que el pago mínimo es la misma cantidad para las tres distintas deudas, y también supongamos que el individuo solamente cuenta con recursos para realizar un pago mínimo, puede ser cualquiera de las tres deudas de la tabla. Lo mejor sería contar con dinero para poder realizar los pagos mínimos y destinar el dinero restante a la “Deuda A”, la cual en teoría crece más rápido si solo se toma en cuenta la tasa de interés ordinaria. Lastimosamente no siempre se cuenta con recursos suficientes para pagar los mínimos establecidos, es aquí donde algunos individuos pierden el control de lo racional e inician tomando decisiones equivocadas, pues muchos seguirían destinando lo poco que tienen a la “Deuda A”, cuando realmente en ese escenario se debería sumar la tasa ordinaria con la moratoria y así elegir en cual pagar el mínimo, se seleccionaría la deuda con la suma mayor, en este caso la “Deuda C”, la cual crece a un 26 % en el caso de que no se pague el mínimo, mientras que las otras dos crecen a un 18 %.

Digamos que sabemos que el siguiente mes recibiremos un dinero, supongamos que la mitad de lo que recibimos el mes pasado y que esta misma cantidad la recibiremos durante dos meses. ¿Qué haría con el dinero? Siempre se ha dicho que es mejor echarlo a andar, es decir ponerlo en alguna deuda, pero en realidad no es lo mejor pues no pagaríamos ni el mínimo, en este caso la mejor opción es ahorrar y esperar al siguiente mes para ahora si completar el mínimo a pagar.

3.2.2 Escenario Simple con Penalización por Pago Adelantado

Ahora tomemos el escenario simple de nuevo pero ahora supongamos que existen penalizaciones por realizar pagos adelantados. Generalmente estas penalizaciones son fuertes, ya que muchas veces son aplicadas en casos de financiamiento de sumas de dinero muy grandes, según el Buró de Protección al Consumidor Financiero [4]. Aquí el proceso a seguir se complica un poco más.

Veamos como ejemplo el caso con una deuda, la cual tiene una tasa de interés ordinaria de 7 % y una penalización de cierta cantidad por pronto pago. Primeramente debemos obtener el porcentaje del castigo por pagar por adelantado, digamos que obtuvimos un 5 %. Como observamos, la deuda crece a un 7 % anualmente y si pagamos por adelantado, nos cobrarán un 5 %, lo mejor que podemos realizar en este escenario es ubicar en que mes del año nos encontramos, digamos que es el primer mes del año, de la tasa de interés nos corresponde pagar en ese mes 7 %/12, esta cantidad es la equivalente a un mes. La manera para determinar la cantidad de tasa de interés de un mes es simple, debemos primero conocer la tasa de interés anual y después dividirla entre 12, el resultado es la tasa de interés mensual. Si sumamos a esto la cantidad de 5 %, la suma sigue siendo menor a 7 %, lo cual significa que efectivamente es mejor adquirir la penalización en el caso de contar con el dinero suficiente de pagar completamente la deuda. En el caso de localizarnos en el sexto mes, las cosas hubiesen sido diferentes, pues a mitad de año hemos ya pagado 7 %/12 multiplicado por seis meses que es igual a 3.5 % y sumando la penalización de pronto pago nos quedaría un 8.5 %, en este caso es mejor seguir pagando sin sobre pasar el pago máximo, lo cual en algunos escenarios implicaría ahorrar.

3.2.3 Escenario simple con Fechas Estrictas de pago

Este escenario cambia totalmente las reglas del juego, pues al considerar fechas estrictas, la tasa de interés pierde relativamente el nivel de importancia, el objetivo es el mismo, minimizar la cantidad total de dinero destinado a pagar un conjunto de deudas, pero ahora tenemos que cumplir con ciertas fechas, es decir que debemos pagar las deudas antes de ciertos períodos.

Como ejemplo podríamos decir que si no se paga a tiempo perderemos el derecho a algunos servicios, como agua, luz o que nos privarán de la oportunidad de tener de nuevo, algún objeto que hemos empeñado, o peor aún nos echarán de la casa. Es entonces en este tipo de escenarios donde podemos encontrar que las restricciones de este tipo son realistas y a la vez muy importantes de considerar.

3.2.4 El Conjunto de los Supuestos y la Necesidad de un Modelo Matemático

Después de entender como funcionaría cada escenario con sus diversos supuestos, ¿Qué pasaría si los supuestos son juntados todos en un mismo escenario?. Es aquí donde se observó la necesidad de construir un modelo matemático para resolver cualquier escenario, incluyendo uno con la mezcla de supuestos.

Capítulo 4

Modelación Matemática del problema PRMP

4.1 El Problema de Política de Reembolso de Múltiples Préstamos

El problema PRMP, busca una solución que minimice la cantidad de dinero total destinada a pagar cierto conjunto de pasivos obtenidos en un período. Tomando en cuenta los supuestos: distintas fechas iniciales, diferentes fechas limites estrictas, pagos máximos, pagos mínimos, oportunidad de ahorro, penalizaciones por no cumplir con pagos mínimos o por sobrepasar los pagos máximos, tasa de interés ordinario y tasa de interés moratorio, ingresos variables y tasas cuasi-fijas.

4.2 No Hay Necesidad de Fijar una Fecha Límite para que el Deudor Pagué su Deuda

Un concepto esencial para solucionar el PRMP es entender que el conocer las fechas límites de pago es innecesario, al menos que estas sean estrictas como en el marco teórico se mencionó. A continuación se explica esto utilizando como ejemplo el caso sencillo del problema PRMP.

Consideremos primero un conjunto de n préstamos, $J = \{1, \ldots, n\}$. Todo préstamo j se encuentra compuesto por cierta suma de dinero inicial m_j a saldar, también cuenta con una fecha inicial r_j la cual corresponde al mes en el cual dicha deuda fue adquirida, de igual manera contiene una fecha límite d_j que indica cuando dicha deuda tendría que a más tardar ya estar pagada, y por último una tasa de interés mensual ordinario i_j^t en el mes t. Observaremos que el considerar una tasa de interés variable es totalmente viable en el modelo, además un modelo con tal característica ejemplificaría casos más realistas, pues recordemos que aunque en México se ha casi erradicado el tipo de interés totalmente variable, aún existen practicas bancarias con tasas de interés introductorias, las cuales generalmente duran 6 meses o 12 meses.

Partamos del supuesto que el deudor dispone una cantidad máxima de dinero f^t para cada mes t para distribuirlo entre los préstamos. Dicha cantidad de dinero puede variar dependiendo de la naturalidad del trabajo o negocio de la persona, por ejemplo al considerar las prestaciones, beneficios, compensaciones, bonos de productividad; el ingreso esperado pudiese ser mayor. De la misma manera si consideramos bajas ventas, faltas al trabajo, pagos cuasi-obligatorios; el ingreso esperado pudiese ser menor a las expectativas.

Dado a nuestra función objetivo que busca minimizar la cantidad total requerida para pagar los préstamos, representaremos como X_j^t la suma de dinero destinado a pagar el préstamo j en el mes t. Finalmente, simbolizaremos C_j^t y P_j^t como las penalidades que surgen al realizar un pago inferior al pago mínimo requerido para el préstamo j o en caso contrario, cuando se establece un pago mayor al pago j, respectivamente en el tiempo t.

Consideremos el escenario sin penalidades, es decir el problema sencillo del caso PRMP; mostraremos la modelación de la tabla de amortización, la cual refleja el balance de la deuda a través del tiempo, cuyos pagos son representados como X_j^t cantidad utilizada para pagar el préstamo j en el tiempo $t \geq r_j$. si cantidad X_j^t es utilizada para pagar el préstamo j en el tiempo $t \geq r_j$.

$$
\begin{aligned}
t &= 0, & & m_j, \\
t &= 1, & & m_j(1+i_j^1) - X_j^1, \\
t &= 2, & & \left[m_j(1+i_j^1) - X_j^1\right](1+i_j^2) - X_j^2, \\
t &= 3, & & \left[\left[m_j(1+i_j^1) - X_j^1\right](1+i_j^2) - X_j^2\right](1+i_j^3) - X_j^3 \\
& & & = m_j(1+i_j^1)(1+i_j^2)(1+i_j^3) \\
& & & -X_j^1(1+i_j^2)(1+i_j^3) - X_j^2(1+i_j^3) - X_j^3, \qquad (4.1) \\
t &= 4 & & \cdots
\end{aligned}
$$

En el tiempo $t = 0$ al deudor le es otorgado un préstamo j. Al siguiente mes, la cantidad inicial de la deuda m_j es multiplicada por su tasa de interés ordinaria, simultáneamente la suma de X_j^1 es pagada. En el tiempo $t = 2$, el balance de la deuda j del es $t = 1$ es multiplicado por su tasa de interés ordinario y a la vez la cantidad X_j^2 es pagada, y así sucesivamente. Si la fecha límite para subsanar la deuda j es $d_j = 3$, entonces la ecuación (1) debe ser igual a cero. Es importante recordar que aunque existan fechas límites, las deudas pueden ser pagadas antes pero no después del tiempo.

Recordemos primero la formula del Valor Futuro:

$$VF = VP(1+i)^n. \qquad (4.2)$$

Una vez recordando lo anterior, expliquemos de una manera más sencilla las ecuaciones ilustradas arriba. Cualquier monto que tengamos como deuda se multiplicará por n periodos la tasa de interés más uno, es decir que aquí se aplicaría la ecuación de “Valor Futuro”, nos llevaremos a futuro el monto inicial. Esta cantidad llevada a futuro debe ser igual al total de los pagos realizados. Cada pago realizado X, se llevará igualmente a tiempo futuro, multiplicando cada uno por la suma de la tasa de interés de la deuda más uno, por la cantidad de periodos correspondientes. A continuación veremos un ejemplo en términos financieros del valor del dinero en el tiempo.

Imaginemos un caso el cual cada período es igual a cada mes, el total de períodos son cinco meses. El monto inicial será representado por VP y los pagos dicho monto inicial fue adquirido en el período cero, este debe ser llevado a futuro hasta el último período, que viene siendo el quinto período,por esta razón se multiplicará el monto por $(1+i)^5$ donde i figura como la tasa de interés y el número 5 representa la cantidad de períodos por los que tiene que pasar para llevar dicho monto a valor futuro. Consideremos para este ejemplo que se realizarán dos pagos, uno en el primer mes y otro en el tercer período. Estos dos pagos también se trasladarán a futuro el primero se realiza en el primer período, quedando entonces cuatro períodos restantes. El segundo pago se realiza en el tercer mes quedando restantes el cuarto y quinto período. Las siguiente ecuaciónes muestran el ejemplo modelado matematicamente:

Monto inicial llevado a futuro:

$$VP(1+i)^5. \tag{4.3}$$

Pagos llevados a futuro:

$$X^1(1+i)^4 + X^2(1+i)^2. \tag{4.4}$$

Como se especificó anteriormente, el monto inicial llevado a futuro debe ser igual al valor de los pagos en futuro, siguiendo el ejemplo previo, nos quedaría la ecuación

$$VP(1+i)^5 = X^1(1+i)^4 + X^2(1+i)^2. \tag{4.5}$$

Lo que a su vez nos indica que al restarle a la primera parte de la ecuación “Monto inicial en valor futuro” a la segunda parte de la ecuación “Pagos llevados en valor futuro” obtendríamos

$$VP(1+i)^5 - [X^1(1+i)^4 + X^2(1+i)^2] = 0. \tag{4.6}$$

¿Cómo es determinado el tiempo de una deuda?

Como se había explicado anteriormente, no es necesario fijar una fecha límite para el pago de los préstamos, al menos que estos cuenten con una fecha estricta. En el caso de que no se cuenten con fechas estrictas, la deuda tardará tanto como el modelo matemático sugiera. Como se observó en las ecuaciones anteriores, no importa cuándo se hacen los pagos, ni cuándo inició la deuda, lo importante es que al final la cantidad de dinero de los pagos realizados multiplicados por las tasas de interés correspondientes y las veces necesarias, debe ser igual a la cantidad de los montos iniciales llevados a futuro. A continuación se muestra un ejemplo sobre esto.

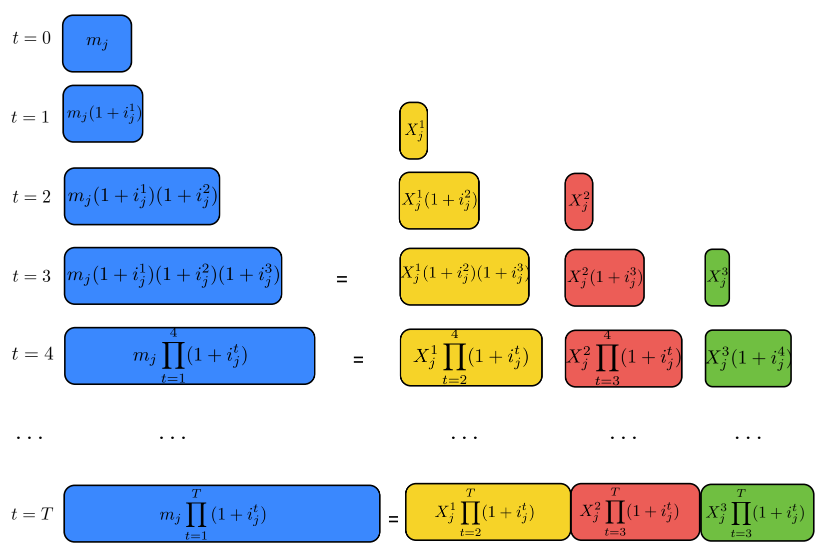

Figura 4.1: Ilustración del teorema 4.1.

En la figura 4.1, se muestra como en el tiempo T, m_j es multiplicado por todas sus tasas de interés hasta T. La cantidad X_j^1 pagada en el tiempo 1 es multiplicado por sus tasas de interés, hasta el tiempo T. La suma obtenida representa los intereses que el deudor evade al pagar X_j^1 en el tiempo $t = 1$. La misma situación ocurre para X_j^2 y X_j^3. Cuando las cantidades ahorradas (amarillo, rojo y verde) son iguales a la cantidad total de la deuda (azul) en el tiempo T, es entonces cuando el préstamo ha sido pagado completamente.

Ya dejando en claro la función del dinero en el tiempo, denotemos $T \gg \max_{j'}(d_{j'})$ un horizonte arbitrario de tiempo largo. Basado en las ecuaciones de amortización, note en la Figura 4.1 que en el tiempo T, m_j es multiplicado por todas las tasas de interés hasta T, sin tomar en cuenta la fecha límite. Similarmente, la cantidad X_j^1 pagada en el tiempo $t = 1$ es multiplicada por sus intereses hasta el tiempo T. La cantidad obtenida representa los intereses que el deudor evade al pagar X_j^1 en el tiempo $t = 1$. Semejantemente sucede el mismo fenómeno para X_j^2 y X_j^3. Cuando las cantidades ahorradas (amarillo, rojo y verde) son iguales a la cantidad total de la deuda incluyendo intereses (azul), sabemos que el préstamo ha sido completamente reembolsado. En este ejemplo, la deuda j ha sido completamente subsanada en el tiempo $t = 3$. Pero la igualdad para ambas cantidades se cumplen para $t = 4$, $t = 5$,..., hasta el tiempo T. El modelo matemático sigue la misma lógica; si las cantidades ahorradas son iguales a la deuda total en el tiempo t, significa que estas serán iguales en cualquier tiempo futuro. De acuerdo a esta noción, podemos establecer la condición que nos asegura que la deuda será completamente pagada sin saber su fecha límite. Esta condición es formalmente establecida en el Teorema 4.2, el cual puede ser sencillamente probado por inducción matemática.

Para cualquier tiempo en el horizonte $T \gg \max_{j'}(d_{j'})$, un préstamo j es completamente pagado si

$$m_j \prod_{r_j \leq t \leq T} (1 + i_j^t) = \sum_{r_j \leq t \leq T} (X_j^t - C_j^t - P_j^t) \prod_{t+1 \leq t' \leq T} (1 + i_j^{t'}). \tag{4.7}$$

Pongamos atención en que la ecuación estamos ya contando las penalizaciones por el no cumplimiento del pago mínimo y por el sobrepasar una cantidad estipulada, pagar más del máximo acordado. Al igual que las otras cantidades de dinero, estas también se llevan a futuro y se multiplica cuantos periodos de dicha deuda resten.

4.3 Programación Lineal Entera para el Problema PRMP

Ahora que el Teorema 4.2 ha sido concretado, formularemos un modelo de programación lineal entera para poder solucionar de manera óptima el problema de PRMP.

En el mercado financiero existen distintos instrumentos de deuda, pero en este trabajo nos concentraremos en dos tipos, los cuales son suficientes para demostrar que el modelo matemático es superior a las opciones populares. Tenemos las tarjetas de crédito y los préstamos llamados financiamientos, ambos instrumentos tienen parámetros comúnes como lo son las tasas de interés ordinarias y las tasas de interés moratorias.

La *tasa de interés moratorio*, h_j^t entra en juego de diferente manera entre los instrumentos de deuda ya mencionados. En el caso de las tarjetas de crédito, existen los *pagos mínimos* de periocidad mensual, estos indican que como mínimo el banco espera que el individuo realice un pago de esa mínima cantidad estipulada, si este no lo hace, entrará la tasa de interés moratorio, la cual es mayor a la tasa ordinaria, esta a su vez se multiplicaría por la cantidad restante a pagar para completar el pago mínimo. Generalmente el pago mínimo que los bancos establecen a sus productos crediticios corresponde a cierto porcentaje pm_j del balance sobre el préstamo. Para el caso de contemplar un financiamiento, la financiera fija una cantidad a pagar mensual durante ciertos períodos, si el individuo realiza un pago menor a lo establecido mensualmente, similarmente se castiga a la persona con una tasa de interés moratoria. De igual manera algunos instrumentos de deuda imponen una sanción pc_j cuando el deudor realiza un pago por encima de lo acordado inicialmente por el prestamista E_j^t. De acuerdo a un artículo del "Buró de Protección Financiera del Consumidor" el tipo de penalización por pagar por adelantado sucede principalmente con préstamos de cantidades grandes como los créditos hipotecarios.

Para modelar el problema PRMP con "Programación Lineal Entera" (PLE), es necesario introducir algunos otros conjuntos de variables. Definamos el balance del préstamo j en el tiempo t como B_j^t, y supongamos también la posibilidad de que el deudor pueda realizar ahorros S^t, cual supuesto es considerado una idea que no ha sido tomada en cuenta, al menos en la investigación académica. Para cada una de las deudas establecemos las variables binarias.

$$Z_j^t = \begin{cases} 1 & \text{Si el préstamo } j \text{ tiene una balance positivo en el tiempo } t, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4.8}$$

Otro conjunto de variables binarias es necesario para los instrumentos de deuda que pueden llevar al moroso a incurrir en sanciones, cuando la cantidad pagada supera a lo estipulado anteriormente:

$$Y_j^t = \begin{cases} 1 & \text{si el pago del préstamo } j \text{ en el tiempo } t \text{ es mayor} \\ & \text{que la cantidad previamente establecida } E_j^t, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4.9}$$

La función objetivo del problema PRMP es el minimizar la cantidad total de dinero utilizado para pagar un conjunto de préstamos, es decir reducir a lo mínimo la suma de todos los pagos:

$$\text{mín} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} X_j^t. \tag{4.10}$$

Las primeras restricciones del problema PRMP indican que cada mes t, el deudor cuenta con una cantidad de dinero f^t disponible para pagar el porcentaje que pueda de todas sus deudas. Observemos que a comparación del caso sencillo del problema PRMP, en el escenario realista, damos oportunidad al ahorro, el cual si existió en un tiempo pasado $t-1$ se da la opción a utilizarse en el tiempo t:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^1 + S^1 \leq f^1. \tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^t + S^t \leq f^t + S^{t-1} \quad t = 2, \ldots, T. \tag{4.12}$$

Para garantizar que todos los instrumentos de deuda serán completamente pagados, es importante introducir las condiciones necesarias. Retomaremos la ecuación (4.7) y aplicaremos el mismo proceso que se siguió en la formulación (4.6)

$$\sum_{r_j \leq t \leq T} (C_j^t + P_j^t - X_j^t) \prod_{t+1 \leq t' \leq T} (1 + i_j^{t'}) + m_j \prod_{r_j \leq t \leq T} (1 + i_j^t) = 0 \quad j \in L. \tag{4.13}$$

Recordando el ejemplo de la ecuación (4.6), la restricción anterior nos indica que si a un monto inicial llevado a futuro le restamos un conjunto de pagos llevado de igual manera a futuro junto con las penalidades adquiridas, el resultado debe ser igual a cero para que esto signifique que se ha ya subsanado el grupo de deudas.

Las siguientes restricciones definen el balance B_j^t de un préstamo j en el tiempo t. Estas ecuaciones nos permiten saber la cantidad de dinero que al deudor le falta por pagar en cada tiempo t para cada préstamo j (estas son derivadas de (4.7)):

$$B_j^{r_j} = m_j \quad \forall j \in L. \tag{4.14}$$

La ecuación anterior nos dice que el balance de una deuda j en el tiempo inicial es igual al monto total adquirido en términos de la deuda j.

$$B_j^t = \sum_{r_j \le t' \le t-1} (C_j^{t'} + P_j^{t'} - X_j^{t'}) \prod_{t'+1 \le t'' \le t} (1 + i_j^{t''})$$
$$+ m_j \prod_{r_j \le t' \le t} (1 + i_j^{t'}) \quad j \in L, r_j < t \le T. \quad (4.15)$$

De acuerdo a lo mencionado por [35] en el capítulo 9 del libro de Programación Entera, en la programación lineal entera, la manera más eficiente de trabajar con ciertas variables es a través de las desigualdades. En el caso de las variables dicotómicas determinadas en la ecuación (4.20) introducimos una constante muy grande M y escribimos las desigualdades que hacen las variables $Z_j^t = 1$ si el préstamo j tiene un balance positivo para el tiempo t.

$$B_j^{t-1}(1 + i_j^t) \le MZ_j^t \quad j \in L, r_j < t \le T. \quad (4.16)$$

Si la deuda no esta ligada a una tarjeta de crédito, en su mayoría estos productos establecen una cantidad de dinero E_j^t que debe ser pagada cada mes. Si X_j^t no es suficiente para poder cubrir la cantidad acordada, entonces las variables C_j^t registran la penalidad ha pagar $r_j < t \le T$:

$$(Z_j^t E_j^t - X_j^t)(1 + h_j^t) \le C_j^t. \quad (4.17)$$

Para deudas de tarjetas de crédito, el pago mínimo es un porcentaje pm_j del balance B_j^t y la penalización C_j^t es computada de la siguiente manera para $r_j < t \le T$:

$$\left(pm_j B_j^{t-1}(1 + i_j^t) - X_j^t\right)(1 + h_j^t) \le C_j^t. \quad (4.18)$$

De manera parecida, también pueden aplicarse penalidades si el deudor paga una cantidad mayor a la suma mensual definida. En este caso, la cantidad establecida es usualmente fija pc_j. Las variables binarias señaladas en la ecuación (4.9) determinan si la penalidad P_j^t aplica, y también estas trabajan a través de desigualdades usando la constante M:

$$X_j^t - Z_t^j E_j^t \leq Y_j^t M, \quad P_j^t = Y_j^t pc_j \quad j \in L, r_j < t \leq T. \tag{4.19}$$

Imagine un préstamo con un balance de \$100 pero a su vez con una cantidad establecida a pagar mensualmente de \$500. Nuestro modelo computaría la penalidad correspondiente al mes pasado, que este préstamo ha adquirido, ya que el deudor ha pagado una cantidad menor a la suma establecida. Para que no suceda dicho evento que es irreal e injusto hacia el individuo debemos agregar un conjunto de variables dicotómicas extra:

$$W_j^t = \begin{cases} 1 & \text{Si el balance } B_j^t \text{ es mayor a la cantidad establecida } E_j^t, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4.20}$$

Una vez contando con las variables W_j^t podemos definir las restricciones que harán evitar que se cargue una penalización inadecuada de la siguiente manera: al balance le restamos la cantidad estipulada, si el resultado es positivo este hará que W_j^t sea igual a 1, en caso contrario tomará el valor de 0 ya que el modelo busca minimizar, al tener un valor de 0, veremos que en la restricción (4.23) la variable C_j^t tomaría también el valor de cero.

$$W_j^t M \geq B_j^t - E_j^t. \tag{4.21}$$

Debemos ahora omitir la ecuación (4.17) y remplazarla por una muy parecida pero que ahora contempla las variables W_j^t.

$$(W_j^t E_j^t - X_j^t)(1 + h_j^t) \leq C_j^t. \tag{4.22}$$

Agregamos la siguiente restricción para poder acotar el espacio de resultados que puede ontener C_j^t

$$W_j^t E_j^t \geq C_j^t. \tag{4.23}$$

Observe que el problema de tener un balance menor a un pago mensual establecido, no se presenta en las tarjetas de crédito.

Finalmente, establecemos las variables naturales de la siguiente manera: Las variables siguientes deben ser iguales a cero si se encuentran antes del inicio del préstamo

$$X_j^t = C_j^t = P_j^t = 0 \qquad j \in L, t < r_j, \tag{4.24}$$

Igualmente las variables siguientes deben ser iguales a cero si estas pertenecen a un tiempo mayor al límite

$$X_j^t = C_j^t = P_j^t = 0 \qquad j \in L, t > d_j, \tag{4.25}$$

Naturalmente las variables pueden tomar valores de cero en adelante si se encuentran en un tiempo mayor o igual a la fecha inicial y menor o igual a la fecha límite

$$X_j^t, C_j^t, P_j^t, B_j^t \geq 0 \qquad j \in L, t = 0, \ldots, T, \tag{4.26}$$

Por último definimos que las variables binarias solo pueden tomar valores 0 o 1

$$Z_j^t, Y_j^t, W_j^t \in \{0, 1\} \qquad j \in L, t = 0, \ldots, T. \tag{4.27}$$

El PLE del problema PRMP es compuesto usando la función objetivo (4.10) y restricciones (4.11)-(4.27). El problema PRMP es clasificado como NP-difícil, debido a su complejidad computacional, ya que las restricciones (4.16), (4.19), y (4.22) pueden ser vistas como condiciones del problema de mochila múltiple, el cual pertenece a la clasificación de NP-difícil [20].

Este PLE puede ser solucionado usando el algoritmo de ramificación y acotamiento, como se muestra en la sección de Experimentación y Resultados, dicho PLE es suficientemente elegante para obtener soluciones de alta calidad y a un tiempo razonable. Se ha probado la funcionalidad del algoritmo con instancias reales de una familia promedio. Note que el PLE para el problema PRMP es una herramienta de planeación. Por lo tanto, al inicio del año un deudor tiene la posibilidad de saber o estimar la suma de dinero, de la cual dispondrá mensualmente para pagar sus deudas. En este ejemplo tomaremos como referencia la cantidad de \$3,000 . Este deudor también sabe que podría contar con algunas compensaciones de ley como lo son el aguinaldo y las utilidades, este dinero extra puede ser administrado para pagar sus deudas. Asimismo, en Julio el deudor podría tener planeado unas vacaciones o quizás tiene otro gasto como el seguro de gastos médicos mayores, cual sea la razón sabe que necesita cierta cantidad de dinero para poder cubrir estos gastos, lo cual significa que es probable que el sujeto de nuestro ejemplo no tendrá la suma requerida para pagar lo estipulado para estos meses. La metodología PRMP provee al deudor un plan anual, óptimo para minimizar la cantidad de dinero total destinada a pagar por los conjuntos de préstamos, incluyendo aquí las penalidades y las tasas de interés moratorias. Si el ingreso planeado cambia o si las tasas de interés no son lo como esperado, el deudor deberá usar la metodología PRMP para computar un nuevo plan considerando los cambios realizados.

La versión simplificada del problema PRMP considerado en las referencias [16] y [24] corresponden a un modelo de programación lineal que conlleva una misma función objetivo (4.10) pero que considera solamente las restricciones (4.11) y (4.13). Note que las únicas variables que se necesitan para este caso son variables positivas reales. Mientras que el problema PRMP es un un problema NP-difícil, el cual podría tomar un tiempo exponencial para solucionarlo, esta versión simplificada pertenece a la clase de complejidad polinomial. Consiguientemente, inclusive para esta versión simplificada, instancias muy grandes pueden ser resueltas en un tiempo razonable en la práctica. [26].

Capítulo 5

Resultados Experimentales

En esta sección se presentan los resultados de la experimentación y se analizan, además se realiza una comparación con el trabajo en el cual esta tesis ha sido basada, como se especificó en el primer capítulo, la investigación en la cual ha sido basada, es llamada "Integer linear programming for repaying loans" y participan los autores del trabajo son Yasmín Ríos, Mario Saucedo y Gabriel Caballero.

5.1 Resultados Experimentales

Más que realizar una comparación de la eficiencia de la formulación del problema PRMP, como lo han realizado los investigadores del artículo arriba mencionado, es importante mostrar que efectivamente como lo han sugerido en el trabajo de "Integer linear programming for repaying loans" el pagar siempre primero la deuda con la tasa de interés más alta no es siempre la mejor opción a seguir.

Se generado una instancia la cual contiene cinco deudas, todas con diferentes reglas, es decir, distintas tasas de interés ordinarias y moratorias. Esta instancia fue basada en información de $CONDUSEF$ [9] que a su vez se ha basado en un estudio de mercado de las tasas de interés que las diferentes instituciones ofrecen.

Por la misma naturaleza de la investigación, se ha decidido solamente aplicar el modelo matemático presentado en el capítulo anterior. La instancia a analizar contiene un pago mínimo de 1.25 % para todo préstamo y además los siguientes parámetros:

Préstamo	Monto Inicial	Interés Ordinario	Interés Moratorio	Fecha Final Estricta
j1	$\$8,000$	1.7 %	1.5 %	Mes 6
j2	$\$16,000$	1 %	1 %	Mes 4
j3	$\$6,000$	1.5 %	7 %	Mes 8
j4	$\$5,000$	2.5 %	3 %	Mes 10
j5	$\$10,000$	3.5 %	8 %	Mes 9

Tabla 5.1: Conjunto de parámetros para cada deuda de la instancia generada.

Como se había comentado en secciones anteriores, también se consideran ingresos variables, los establecidos para la presente instancia son los siguientes:

t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	t11	t12
$\$8,000$	$0	$\$8,000$	$\$8,000$	$0	$\$7,000$	$\$5,000$	$\$10,000$	$\$5,000$	$0	$0	$0

Tabla 5.2: Ingresos mensuales esperados de la instancia creada.

Comúnmente se acostumbra a reportar resultados promedios de varias instancias, el objetivo del problema en este caso no es ese, sino el de comprender que es lo que sucede al aplicar la modelación matemática propuesta. Pues el dar a conocer promedios de diferentes instancias no tiene importancia, ya que estas son distintas entre si. Como han mencionado ya los autores del artículo "Integer linear programming for repaying loans" en algunos casos podríamos obtener ahorros de quizás hasta 40 % si comparamos contra la metodología de "Tasa de Interés más Alto" o "Bola de Nieve", sin embargo es posible que en otros casos no obtengamos diferencias entre las estrategias populares. Para entender esto, a continuación veremos los resultados obtenidos de la instancia detallada arriba, se muestra tres tablas, la primera tabla es sobre el plan de pagos, o pagos realizados por el modelo propuesto, la segunda figura nos ilustra los ahorros sugeridos y la tercera tabla contiene los pagos mínimos que se deberían respetar para evadir intereses moratorios.

---- 104 VARIABLE X.L Pagos realizados

	j1	j2	j3	j4	j5
t1	1589.600	1241.144	75.000	62.500	4552.502
t2	81.830	186.486	75.187	63.281	72.469
t3	82.198	7704.255	75.375	64.072	74.099
t4	82.568	7399.380	75.564	64.873	75.767
t5	82.940		75.753	65.684	77.471
t6	6778.338		75.942	66.505	79.214
t7			76.132	67.336	4856.531
t8			6197.378	1887.879	1914.743
t9				3795.297	

Figura 5.1: Tabla de pagos realizados a cada deuda por periodo

Si observamos detalladamente entenderemos el funcionamiento del modelo al establecer el plan de pagos. Veamos que en el primer periodo recomienda pagar solamente los mínimos para las deudas $j3$ y $j4$, también es posible apreciar que el dinero restante es destinado para las otras tres deudas pero el plan decide no realizar solamente un pago mínimo para estas sino que desembolsa cantidades sustanciales para el resto de los préstamos, cuando la regla de "Tasa de Interés más Alto" hubiese destinado el restante a la deuda $j5$ que es la que cuenta con una tasa de interés mayor.

---- 104 VARIABLE A.L Ahorro mensual

	j1	j2	j4
t1		479.253	
t4	301.848		

Figura 5.2: Tabla de ahorros mensuales

Miremos ahora la tabla de ahorro mensual, nos indica que en el primer mes ha ahorrado 479.253 cantidad que vemos que usa en el siguiente periodo $t2$ para pagar los mínimos, ya que en el segundo mes no cuenta con ingresos el modelo ha optado por ahorrar esta cantidad. El mismo efecto sucede en el periodo cuatro, se aprecia un ahorro de 301.848 y en la tabla de pagos realizados se puede observar que paga solamente los mínimos en el periodo cinco.

---- 104 VARIABLE Pmin.L Pago minimo

	j1	j2	j3	j4	j5
t1	100.000	200.000	75.000	62.500	125.000
t2	81.830	186.486	75.187	63.281	72.469
t3	82.198	186.019	75.375	64.072	74.099
t4	82.568	91.576	75.564	64.873	75.767
t5	82.940		75.753	65.684	77.471
t6	83.313		75.942	66.505	79.214
t7			76.132	67.336	80.997
t8			76.322	68.178	23.125
t9				46.284	

Figura 5.3: Tabla de pagos mínimos

Por último vemos de igual manera que las fechas finales estrictas vienen a cambiar completamente los ordenes de pago que sugiere la literatura, pues de nuevo se puede observar que la deuda con mayor tasa de interés no es la primera en ser subsanada, ya que estas restricciones nos condicionan fuertemente. De hecho podemos notar que la primera deuda en ser pagada completamente es la $j2$, este préstamos es el que conlleva le menor tasa de interés tanto ordinaria como moratoria, pero contiene una fecha final estricta que indica que debe ser subsanada a más tardar en el cuarto periodo.

Pasemos a otro ejemplo usando una instancia muy parecida, donde los únicos cambios son el considerar un pago mínimo de 2 % para cada deuda y los ingresos que cambian son para $t1$ y $t2$, con salario de \$300 para el primer periodo y de \$8,000 para el segundo periodo. Este caso es interesante, pues para el primer mes forzamos a la persona o empresa a que esta asigne racionalmente el dinero disponible para ese periodo, la formulación matemática nos arroja un resultado aconsejando lo siguiente:

	j1	j2	j3	j4	j5
t1	100.000				200.000
t2	1655.889	2350.651	124.368	104.560	3764.532
t3	131.573	7504.784	123.746	105.083	134.814
t4	131.178	7004.927	123.127	105.608	136.837
t5	130.785		122.512	106.136	138.889
t6	6630.461		121.899	106.667	140.972
t7			121.290	107.200	4771.510
t8			6124.677	1149.915	2725.408
t9				4480.858	

Figura 5.4: Tabla de pagos mínimos

Veamos que el modelo nos propone depositar \$200 a la deuda $j5$ la cual tiene la tasa de interés más alta entre las deudas presentadas, pero a su vez también nos muestra que debemos asignar la cantidad de \$100 al préstamo $j1$ que tiene una tasa de 1.7 %. Observemos que estas dos deudas no son las que se deben pagar primero en cuestión de fechas limites estrictas y la deuda $j1$ no es la que cuenta con las mayores tasas de interés, esto es impactante ya que esta lógica es díficil de empatar sin la ayuda de la modelación de programación lineal entera mixta.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1 Conclusiones

El modelo matemático propuesto utiliza técnicas de la programación lineal entera mixta, este es aplicado para establecer la política óptima de pago para los préstamos múltiples. Se muestra que la formulación sugerida prueba ser superior a las reglas sencillas recomendadas por expertos financieros, como lo son la regla "Bola de Nieve" y la metodología "Tasa de Interés más Alto".

Un punto importante a destacar en el estudio del problema, es que las reglas de pago populares, son simplemente reglas heurísticas que no son eficientes en los distintos escenarios posibles, pues a pesar de tener pensamiento matemático integrado, estas no contemplan casos realistas. El modelo matemático sugerido demuestra siempre llegar al óptimo, contrario a las metodologías ya conocidas.

Es fundamental mencionar que la modelación matemática sugerida demuestra que este tipo de problema para determinar la política óptima de pago para los préstamos múltiples, es perteneciente a la categoría de problemas denominados NP-difícil debido a su clase de complejidad. En el caso de la versión simplificada del problema PRMP, se observa que utilizando la misma lógica empleada en el caso complejo del problema PRMP, este puede ser resuelto en tiempo polinomial. Los resultados experimentales indican que la metodología propuesta nos provee en un tiempo razonable, soluciones de alta calidad para las instancias reales. Una comparación con otras metodologías que para algunos sirven como unas reglas, demuestran la complejidad de estimar la política óptima de pago para los préstamos múltiples, lo cual da soporte a la relevancia de la modelación propuesta en esta tesis para resolver el problema.

Para formular el problema PRMP, se ha pensado en casos reales, considerando supuestos no mencionados en la literatura como lo son: fechas límites, opción a ahorro, distintos tipos de deuda, tasas cuasi-fijas. Por la naturalidad del problema se trabajó en fortalecer el modelo de programación lineal entera mixta, al punto de resolver instancias consideradas difíciles, hasta casi el punto de conseguir el valor óptimo en menos de 30 minutos.

Por último, es de suma importancia entender que no todos los escenarios que puedan existir sacarán provecho al modelo propuesto en la tesis. Pues depende de los factores que se toman en cuenta, en algunas ocasiones podría bastar con aplicar la lógica que siempre se ha recomendado, atacar primeramente las deudas con mayor tasa de interés. Con la evolución de los productos financieros hemos visto como unos productos entran y otros salen, es muy probable que con el paso del tiempo, el modelo presentado deberá ser actualizado conforme a las nuevas herramientas de financiamiento.

6.2 Trabajo Futuro

Existen varias ideas que se podrían trabajar tomando como base lo presentado en esta investigación, algunas de estas son:

- Realizar modelos del problema PRMP considerando escenarios más reales.
- Crear un modelo inverso, en lugar de trabajar con deuda, considerar modelos de inversiones solamente.
- Diseãr un modelo matemático que contemple tanto deudas como inversiones.

Bibliografía

[1] 360, M. B., «How much do Americans earn? What is the average US income and other income figures. Fiscal cliff talks only useful in context of incomes.», artículo disponible en http://www.mybudget360.com/how-much-do-americans-earn-what-is-the-average-us-income/, 2012.

[2] Amar, M., «Winning the Battle but Losing the Wat: The Psychology of Debt Management», *Journal of Marketing Research*, **48**(SPL), págs. S38 – S50, 2011.

[3] Barbosa, P. S. y P. R. Pimentel, «A linear programming model for cash flow management in the Brazilian construction industry», *Construction management and Economics*, **19**(5), págs. 469 – 479, 2001.

[4] Bureau, C. F. P., «Can I be charged a penalty for paying off my mortgage early?», libro disponible en http://www.consumerfinance.gov/askcfpb/204/can-i-be-charged-a-penalty-for-paying-off-my-mortgage-early.html.

[5] Camacho, J. C., «¿Qué son las Microempresas?», artículo disponible en http://www.mexicoemprende.org.mx/que-es-una-microempresa/, 2014.

[6] Chvatal, V., «The Duality Theorem», en *Linear Programming*, capítulo 5, W.H.Freeman Co Ltd, págs. 54 – 70, 1983.

[7] Chvatal, V., «Introduction», en *Linear Programming*, capítulo 1, W.H.Freeman Co Ltd, págs. 3 – 12, 1983.

[8] College, B., «The State of Small Business in America 2016», revista disponible http://www.babson.edu/executive-education/custom-

programs/entrepreneurship/10k-small-business/Documents/goldman-10ksb-report-2016.pdf, 2016.

[9] CONDUSEF, «Conoce y compara: el CAT, las comisiones, la tasa de interés, los beneficios y los seguros de las diferentes tarjetas de crédito.», artículo disponible en, http://phpapps.condusef.gob.mx/micrositio/index.php.

[10] Contabilidad, S., «Sistemas de Amortización», artículo disponible en, http://www.solocontabilidad.com/amortizacion-fondos-de-amortizacion/sistemas-de-amortizacion.

[11] de la Rosa, G., «Mexicanos deben 1.07 bdp a los bancos», artículo disponible en http://expansion.mx/economia/2013/08/28/deuda-de-hogares-pesa-7-del-pib, 2013.

[12] El Financiero, S. E., «Cinco gráficas que explican el endeudamiento de los estados», artículo disponible en http://www.elfinanciero.com.mx/economia/cinco-graficas-que-explican-el-endeudamiento-de-los-estados.html, 2015.

[13] Ferguson, T. S., «Linear Programming», libro disponible en https://www.math.ucla.edu/ tom/LP.pdf.

[14] Formulas, F., «Future Value», artículo disponible en, http://www.financeformulas.net/Future-Value.html.

[15] Frederick S. Hiller, G. J. L., *Introduction to Linear Programming*, McGraw Hill Higher Education, 2010.

[16] Gupta, S. K., «Optimal Repayment Policies for Multiple Loans», *Omega*, **15**(4), págs. 323 – 330, 1987.

[17] institute for college access, T. y success, «Project on student debt», artículo disponible en http://ticas.org/posd/map-state-data-2015, 2015.

[18] Investopedia, «Time Value of Money», artículo disponible en http://www.investopedia.com/terms/t/timevalueofmoney.asp.

[19] Issa, E. E., «2015 AMERICAN HOUSEHOLD CREDIT CARD DEBT STUDY», artículo disponible en https://www.nerdwallet.com/blog/credit-card-data/average-credit-card-debt-household/, 2015.

[20] Kellerer, H., «Introduction», en Springer (editor), *Knapsack Problems*, Springer, págs. 1 – 14, 2004.

[21] Maglof, L., «Define – Time Value of Money», artículo disponible en, http://smallbusiness.chron.com/define-time-value-money-876.html.

[22] Martínez Laguna, L., «Amortización Financiera», artículo disponible en, http://www.expansion.com/diccionario-economico/amortizacion-financiera.html.

[23] Mutual, N., «7 Tips For Managing Your Debt», recurso libre en, http://www.forbes.com/sites/northwesternmutual/2015/04/21/7-tips-for-managing-your-debt/#98d342e755fe, 2015.

[24] Ng, C., «Preemptive repayment policy for multiple loans», *Annals of Operations Research*, **192**(1), págs. 141 – 150, 2012.

[25] Notimex, «Crecen comercios en México, 94microempresas: INEGI», artículo disponible en http://www.jornada.unam.mx/ultimas/2015/07/28/aumentan-comercios-en-mexico-el-94-son-microempresas-inegi-9993.html, 2015.

[26] Papadimitriou, C. M., «Computational complexity», en *Computational complexity*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

[27] Prácticas, F., «¿Qué es Amortización?», artículo disponible en http://www.finanzaspracticas.com.co/finanzaspersonales/entienda/que__-es/8.php.

[28] Russell, A., «Cash flows in networks», *Management Science*, **16**(5), págs. 357 – 373, 1970.

[29] Segovia, K., «Amortización de Renta Variable», artículo disponible en, http://amortizaciones3rob.blogspot.mx/2015/02/amortizacion-de-renta-variable.html.

[30] Sonke, H. y D. Briskorn, «A survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem», *European Journal of operational research*, **207**(1), págs. 1 – 14, 2010.

[31] Torres, H., «Modelos de Inventario», artículo disponible en http://invop2.blogspot.mx/p/modelos-de-inventario.html.

[32] Villalobos, J. L., «Amortización de créditos», en P. P. Hall (editor), *Matemáticas Financieras*, capítulo 6, Pearson Printence Hall, págs. 303 – 362, 2007.

[33] Weglarz, J., «Project scheduling with finite or infinite number of activity processing modes - A survey», *European Journal of Operational Research*, **208**(3), págs. 177 – 205, 2011.

[34] Wolsey, L. A., «Formulations», en J. Wiley y I. Sons (editores), *Integer Programming*, capítulo 1, John Wiley and Sons, Inc, págs. 1 – 22, 1998.

[35] Wolsey, L. A., «Strong Valid Inequalities», en J. Wiley y I. Sons (editores), *Integer Programming*, capítulo 9, John Wiley and Sons, Inc, págs. 169 – 166, 1998.

Ficha autobiográfica

Rodrigo Xavier San Miguel Becerra

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

Asignación de Pagos de Préstamos

Yo Rodrigo Xavier San Miguel Becerra, nací el 25 de Enero de 1988 en el estado de Louisiana de los Estados Unidos de América. A los dos años de edad me mude junto con mi familia a Monterrey, Nuevo León, México. Inicié la primaria en el año 1994, en el Instituto Franco Méxicano, escuela que me enseño a estar agradecido y valorar todo momento de la vida. En el 2000 pasé al Centro Universitario Franco Mexicano de Monterrey, Secundaria en la cual adquirí gran porcentaje del vocabulario inglés con el que cuento.

Al terminar la secundaria tuve la oportunidad de entrar a la Universidad Regiomontana, en dicha Universidad realicé mis estudios de bachillerato y comencé la licenciatura en negocios internacionales. En realidad yo quería ser luchador profesional, había iniciado la práctica del deporte de lucha greco-romana cuando cursaba la preparatoria y quería seguir con el deporte, no solo tomarlo como un pasatiempo, sino hacerlo mi forma de vida. Mis padres me indicaron que mientras yo viviera en casa de ellos, debía elegir una carrera y seguir las reglas del hogar. Fue así como escogí estudiar negocios internacionales. La lucha libre seguía en mi agenda, yo la practicaba y mi debut se aproximaba. A los cinco meses sufrí una grave lesión en los ligamentos de ambas piernas, un sin fin de preguntas volaban por mi cabeza, una de ellas era respecto a la carrera que había elegido, pues al conversar con el traumatólogo este me recomendó dejar la lucha libre. Fue a finales del año del 2006 que presenté un examen vocacional, la lista de licenciaturas e ingenierías recomendadas era algo larga, decidí escoger una carrera que no se encontrará en la lista, mi manera de pensar era que si no aparecía una carrera en la lista significaba una área de oportunidad, así que creí que debía superarme en aquellas secciones no recomendadas, y fue así que elegí cambiarme a la licenciatura en economía.

La economía abrió mis ojos y me mostró las miles de aplicaciones que tiene en la vida. Durante mis estudios de economía tuve la oportunidad de conocer al Dr. Leoncio Gastón Durandeau Palma, profesor que influyó mucho en mi preparación académica, ya que fue con él donde aprendí a pensar , y vaya que no es que siempre lo haga de manera correcta, pero considero que sus enseñanzas impactaron mi manera de visualizar los problemas económicos.

Me gradué de la licenciatura en economía a finales del 2009, la industría se estaba apenas recuperando y me era difícil conseguir empleo, aún y contando con experiencia como practicante en Secretaría de Economía, Banxico, INEGI, Grupo Senda y en el Centro de Investigación de la UR, por alguna razón batallé en el mercado laboral y tomé la decisión de probar terreno extranjero, me dirigí a McAllen, TX, una decisión extraña, pero creía que tenía todo para conseguir un trabajo en el tierras Tejanas. En Texas también sufrí un poco pero por razones diferentes, resulta que decían que necesitaba un automóvil para que me pudiesen contratar, una política que seguían al menos todos los bancos a los que acudí. Por necesidad me volví voluntario en el Hospital de McAllen, por ayudar cuatro horas al día me daban la comida gratis. Del Hospital salieron algunos clientes a los que les cortaba el césped o hacía el aseo. Mi dinero ahorrado se agotaba así que pedí trabajo en McDonalds, franquicia que me otorgo la oportunidad de trabajar, en menos de seis meses ya había yo ascendido tres puestos y mi inglés había mejorado, un día me toco atender a una persona que me había entrevistado y me mencionó que necesitaban a alguien con mi perfil, y a la vez me preguntó si ya había adquirido un carro, fue entonces cuando pensé en mejor regresar a Monterrey, N.L.

Para finales de Noviembre del 2010 regresé a Monterrey, afortunadamente conseguí trabajo rápidamente en AutoZone, donde desempeñe el puesto de Especialista en Compensaciones y Beneficios. En Enero del 2011 comencé a realizar un diplomado de estadística aplicada en la Universidad Autónoma de Nuevo León. Mi estancia en AutoZone fue corta pues renuncié en Julio del 2011 para integrarme a Binbit en Septiembre del mismo año, la vacante que llené era llamada Analista Estratégico, después de unos meses en Marzo del 2012 sentí la primera atracción por un posgrado en ciencias, tenía en la mira a la Universidad de West Virginia, WVU. Rompí mis lazos con Binbit y viajé a Morgantown, WV.

El viaje fue prematuro, pues sucedió en Abril del 2012, las inscripciones al posgrado de Econometría Espacial eran hasta dentro de un unos meses, así que decidí buscar empleo, me acerqué al departamento de economía y conocí al Dr. Dongwoo Yoo, quien me dió la oportunidad de colaborar para un proyecto de investigación económica, lo hice de manera gratuita pues no habían fondos presupuestados para dicha actividad, mi trabajo de tiempo completo en el cual si recibía dinero era de intendente, en ese puesto conocí a Bryan Hudson y Nicholas Greenberg dos grandes amigos de aquellos lugares.

Todo parecía marchar bien, ya me había inscrito y tenía un trabajo. De vez en cuando iba a Pittsburgh, PA, en especial porque había pasado ya por algunas entrevistas para ingresar a BNY Mellon, la última llamada que recibí de ellos fue una oferta de empleo, la rechacé pues creía que iba a ser aceptado en el posgrado y además creía que me otorgarían beca. Un par de meses después llegó una carta de aceptación al posgrado pero no encontré una que hablará de la beca, me sentí frustrado. Después de unos meses Jamie Thomas mi entonces jefe me recomendó para un puesto de vigilante de un dormitorio, fui aceptado en dicho puesto y conocí a Tony Richardson, otra gran persona que me extendió su mano. Como el sueldo era un poco mejor decidí dejar el cuarto horrible que rentaba y me mudé con dos amables personas de Irán, Sajad Omidvar y Roya Bazargani.

Ciertos lujos tienen sus sacrificios, la renta y el ahorro eran los lujos que tomaba, los sacrificios fueron buscar comida gratuitamente. Me dí la tarea de recorrer los locales de comida rápida, anotaba las horas en las que recién depositaban la comida en los basureros, desconozco en México, pero en Estados Unidos de América existen reglas que deben cumplir los restaurantes, pues la comida debe de ir en ciertas bolsas, al menos que esta se encuentre ya procesada. Conseguía pizza recién hecha, verduras, frutas, pan, carnes frías, etc. De ahí comía y cenaba varios días. Todo parecía marchar bien, Tony Richardson me había comentado de unas becas especiales para las personas que trabajaban como vigilantes, así que el sueño seguía con vida, inclusive el Dr. Gerard D'Souza me había recomendado para dar clases de Economía y Estadística como tutor. Ayudé a varios alumnos y el trabajo como vigilante también iba bien, estaba seguro de que conseguiría la beca para principios del 2013.

De nueva cuenta recibí malas noticias, pues por haber tenido un problema con un alumno que no quería seguir indicaciones, la beca fue otorgada a otra persona. Regresé a Monterrey en Enero del 2013 y en Marzo empecé a trabajar en Xerox como Analista de Compensaciones y Beneficios, a los seis meses renuncié para integrarme a Steelcase como Analista de Datos de Precios, amé esa empresa pues Michael O'Meara me indicó que yo hiciera lo que quiera siempre y cuando presentará resultados todo iba a estar perfecto. Resulta que en Steelcase brillé, pues desarrollé dos herramientas de precios y por dicho trabajo me invitaron a Grand Rapids, Michigan a entrenar a los gerentes de precios. Allá conocí a un grupo interno de Análisis Avanzado y observé que todos tenían al menos maestría, al terminar el entrenamiento, más unos cuantos meses después decidí seguir con mi preparación académica, después de durar un año y unos meses en Steelcase, entré a este programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, posgrado del cual me siento enormemente agradecido, pues he aprendido a aplicar las herramientas y técnicas que me han enseñado durante mi preparación en la Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.