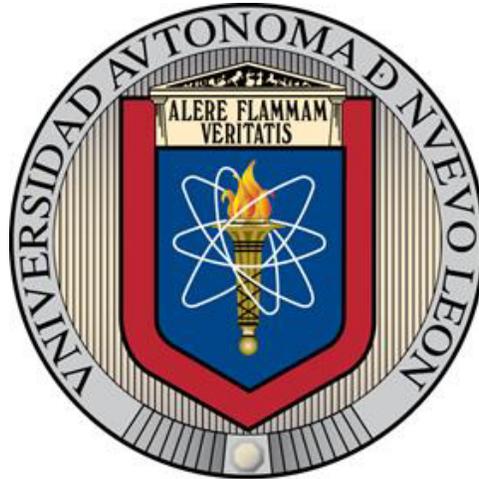


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



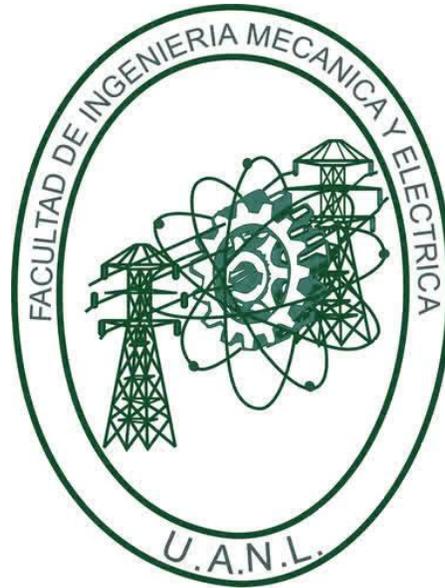
ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE VUELO DE
AERONAVES Y DISEÑO DE CONTROLADOR

POR
MARCO POLO TORRES REYNA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA AERONÁUTICA
CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO

AGOSTO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE VUELO DE
AERONAVES Y DISEÑO DE CONTROLADOR

POR
MARCO POLO TORRES REYNA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA AERONÁUTICA
CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO

AGOSTO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Análisis de la Dinámica de Vuelo de Aeronaves y Diseño de Controlador», realizada por el alumno Marco Polo Torres Reyna, con número de matrícula 1456823, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Aeronáutica con orientación en Dinámica de Vuelo.

El Comité de Tesis



Dr. Eduardo Liceaga Castro

Asesor

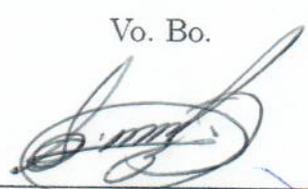

Dr. Jesús Ulises Liceaga Castro

Revisor


Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks

Revisor

Vo. Bo.


Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, agosto 2017

A mi familia que me apoyó incondicionalmente durante este proceso.

Look wide, beyond your immediate surroundings and limits, and you see things in their right proportion. Look above the level of things around you and see a higher aim and possibility to your work.

Robert Stephenson Smith Baden-Powell.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	XII
Resumen	XIII
1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Objetivo de la Tesis	2
1.3. Justificación	2
1.4. Descripción del Problema	3
1.5. Estado del Arte	4
1.6. Estructura de la Tesis	6
2. Sistemas Multivariable	8
2.1. Introducción	8
2.2. Justificación del uso del Análisis y Diseño por Canales Individuales	9
2.3. Representación del Sistema Multivariable en Canales Individuales	12
2.4. La Función de Estructura Multivariable	15

2.4.1. Similitud entre la Matriz de Ganancias Relativas (RGA) y la Función de Estructura Mutivariable (MSF)	17
2.5. La Estructura Dinámica	20
2.6. Precompensadores y Postcompensadores de la planta	21
2.6.1. Diseño de Precompensador bajo el marco de trabajo de ICAD	21
2.7. El Proceso de Diseño	25
3. Dinámica lateral direccional de una aeronave de ala fija.	27
3.1. Modelo de la Dinámica Lateral Direccional de una Aeronave de ala fija	27
3.2. Estructura dinámica de la dinámica lateral direccional de la aeronave.	28
3.2.1. Caso 1: Posición de alabeo ϕ y tasa de cambio de guiñada $\dot{\psi}$	28
3.2.2. Caso 2: Posición de alabeo ϕ y ángulo de derrape β	31
3.2.3. Caso 3: Tasa de cambio de guiñada $\dot{\psi}$ y ángulo de derrape β	33
4. Resultados	36
4.1. Caso 1: Posición de alabeo ϕ y tasa de cambio de guiñada $\dot{\psi}$	37
4.2. Diseño del Control del Caso 2: Posición de alabeo ϕ y ángulo de derrape β	38
4.2.1. Caso 2: Especificaciones de la maniobra	38
4.2.2. Caso 2: Análisis del acoplamiento del sistema	39
4.2.3. Caso 2: Diseño de Control	46
4.2.4. Caso 2: Desempeño de controladores	50

4.2.5. Caso 2: Simulación	57
4.2.6. Caso 2: Discusión	59
4.3. Diseño del Control del Caso 3: Tasa de cambio de guiñada $\dot{\psi}$ y ángulo de derrape β	60
4.3.1. Caso 3: Especificaciones de la maniobra	60
4.3.2. Caso 3: Análisis del Acoplamiento del sistema	61
4.3.3. Caso 3: Diseño de Control	65
4.3.4. Caso 3: Desempeño de controladores	70
4.3.5. Caso 3: Simulación	75
4.3.6. Caso 3: Discusión	77
5. Conclusiones	78
5.1. Recomendaciones y Trabajo futuro	80
A. Modelo Matemático de la Dinámica Lateral Direccional	82
A.1. Transformada de Laplace	83
A.2. Espacio de Estado	88
B. Características de la aeronave - Cessna T37	91
B.1. Modelo en Variables Reales	91
C. Demostraciones ICAD	93

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Sistema multivariable $n \times n$	10
2.2. Diagrama de bloques de un sistema TITO con un controlador diagonal.	13
2.3. Diagrama de bloques de un sistema multivariable TITO representado en canales individuales.	15
2.4. Diagrama de bloques de un control de prealimentación.	22
2.5. Diagrama de bloques con el control y el cálculo de la salida real.	23
2.6. Diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	23
2.7. Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	24
2.8. Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	24
3.1. Diagramas de la MSF del Caso 1.	30
3.2. Diagramas de la MSF del Caso 2.	32
3.3. Diagramas de la MSF del Caso 3.	35
4.1. Diagrama de Nyquist de la MSF del caso 2.	39

4.2. Diagrama de bloques de un control de prealimentación.	40
4.3. Diagrama de Nyquist comparativo de ambas funciones: $g_{12}(s)$ y $g_{12}(s)+$ $F(s)$	42
4.4. Diagrama de Nyquist comparativo de ambas MSF: $\gamma(s)$ y $\gamma_{FF}(s)$. . .	43
4.5. Canal-1 ($C_1(s)$).	48
4.6. Canal-2.	49
4.7. Diagrama de bloques en el control de prealimentación y el cálculo de la salida real.	50
4.8. Diagrama de Bode de ambos lazos abiertos ($LA_m(s)$ y $LA_r(s)$). . . .	51
4.9. Diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	52
4.10. Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	53
4.11. Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	53
4.12. Diagramas de Bode y Nyquist de los controles aplicados a la MSF. . . .	56
4.13. Caso 2 - Simulación del ángulo de alabeo (ϕ) vs tiempo.	57
4.14. Caso 2 - Simulación del ángulo de derrape (β) vs tiempo.	58
4.15. Caso 2 - Simulación de la deflexión del alerón (δ_A) vs tiempo.	58
4.16. Caso 2 - Simulación de la deflexión del timón (δ_R) vs tiempo.	58
4.17. Diagrama de Nyquist de la MSF del Caso 3.	61
4.18. Diagrama de bloques de un control de prealimentación.	63
4.19. Diagrama de Bode de ambas funciones de transferencia $g_{12}(s)$ y $gF_{12}(s)$.	63

4.20. Comparación de $\gamma(s)$ y $\gamma_{FF}(s)$ mediante un diagrama de Nyquist- . . .	64
4.21. Canal 1 ($C_1(s)$).	68
4.22. Canal-2 ($C_2(s)$).	69
4.23. Diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.	70
4.24. Diagrama de Bode de ambos lazos abiertos ($LA_m(s)$ y $LA_r(s)$). . . .	71
4.25. Diagramas de Bode y Nyquist de los controles aplicados a la MSF. . . .	74
4.26. Caso 3 - Simulación de la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) vs tiempo. . .	75
4.27. Caso 3 - Simulación del ángulo de derrape (β) vs tiempo.	75
4.28. Caso 3 - Simulación de la deflexión del alerón (δ_A) vs tiempo.	76
4.29. Caso 3 - Simulación de la deflexión del timón (δ_R) vs tiempo.	76

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Estructura dinámica de los canales en lazo abierto.	20
4.1. Especificaciones de la maniobra - vuelta coordinada. [28]	39
4.2. Robustez estructural del canal 1 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$	55
4.3. Robustez estructural del canal 2 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$	55
4.4. Valores de la Maniobra	60
4.5. Robustez estructural del canal 1 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$	73
4.6. Robustez estructural del canal 2 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$	73
A.1. Derivadas de la estabilidad lateral-direccional del Cessna T 37.	83
B.1. Condiciones de vuelo.	91
B.2. Datos de masa e inercia de aeronave.	92
B.3. Lateral-directional stability derivatives of the Cessna T 37.[24]	92

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a mi familia, a mis asesores y profesores de la maestría, así como a mis amigos que me alentaron a seguir adelante y nunca vencerme.

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo brindado por el *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACYT).

RESUMEN

Marco Polo Torres Reyna.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Aeronáutica con orientación en Dinámica de Vuelo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN.

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA.

Título del estudio: ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE VUELO DE AERONAVES Y DISEÑO DE CONTROLADOR.

Número de páginas: 100.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: El objetivo general de esta tesis es proponer la aplicación de una nueva estructura de control para la dinámica de aeronaves que permita un buen desempeño a través de la utilización de controles basados en la Función de Estructura Multivariable (MSF), Control Clásico y el Análisis y Diseño por Canales Individuales (ICAD).

Los objetivos específicos son:

1. Evaluar la robustez del sistema de control.
2. Evaluar el emparejamiento de la dinámica.
3. Mediante técnicas de simulación digital analizar el comportamiento del siste-

ma de control propuesto a distintas perturbaciones del sistema y variaciones paramétricas.

Para alcanzar estos objetivos, se analizará la dinámica de vuelo Lateral Direccional del Cessna T-37. La dinámica presenta 3 salidas (alabeo, tasa de cambio de guiñada y ángulo de derrape), pero solamente 2 entradas (deflexión en timón y deflexión en alerones). Es sabido que al tener 2 entradas de control, solamente es posible controlar 2 salidas. Por ello con el uso de ICAD es posible analizar la dinámica de cada emparejamiento de los 3 posibles para realizar un giro coordinado. La características de la maniobra se especifica para las aeronaves en la FAR 23. Basándose en las especificaciones de la FAR 23 se diseñará un control utilizando ICAD. El control se evaluará mediante ICAD y se determinará la robustez del mismo utilizando los márgenes de fase y ganancias. De la misma forma se evaluarán los otros emparejamientos y se analizará la fragilidad que puede presentar el sistema a un cambio paramétrico.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Una nueva de estructura de control es propuesta mediante el marco de trabajo de ICAD. Los controles propuestos están basados en el control clásico, además cuentan con buen desempeño a pesar de ser de bajo orden. Una alternativa para el control de la dinámica lateral-direccional de una aeronave es propuesto. Bajo el marco de trabajo de ICAD es posible el diseño de controles de sistemas multivariables.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 GENERALIDADES

Las aeronaves son de suma importancia en la economía y en la vida de las personas. Hoy en día, la industria aeronáutica se encuentra en gran crecimiento mundialmente. Las aeronaves son vehículos aéreos complejos al contar con muchas configuraciones y además se busca que presenten ciertas prestaciones. Las aeronaves suelen contar con sistemas de auto pilotaje para realizar ciertas maniobras (despegue y aterrizaje por ejemplo) o misiones específicas (seguir cierta trayectoria). Al ser sistemas automatizados es necesario contar con un sistema de control fiable.

Los sistemas de control de las aeronaves suelen ser complejos y multivariables (múltiples entradas y múltiples salidas - MIMO). Una aeronave convencional de ala fija suele contar con varias salidas (ángulos de alabeo, cabeceo, guiñada y derrape, así como velocidades angulares y de movimiento) y solo 4 entradas (deflexiones de alerones, timón y elevador, así como el empuje generado por el motor) por ello varias salidas suelen presentar acoplamiento con varias entradas. Por ello, los sistemas de control de las aeronaves son un gran campo de aplicación para la teoría de los sistemas multivariable.

Las técnicas de control aplicadas en las aeronaves son varias, pero deben tener

la fiabilidad y eficiencia que son dos condiciones esenciales en los sistemas. Los sistemas de control automático han ido cambiando desde los sistemas de una entrada y una salida (SISO por sus siglas en inglés *single input single output*) hasta los sistemas MIMO, pero en todos ellos siempre se debe asegurar la fiabilidad y eficiencia de los mismos.

Las técnicas de control para los sistemas MIMO son muchas y en este caso se utilizará el análisis y diseño por canales individuales (ICAD) para el diseño del controlador de la aeronave de ala fija. ICAD es una herramienta muy sencilla y es posible asegurar una fiabilidad del controlador.

1.2 OBJETIVO DE LA TESIS

GENERALES: Proponer la aplicación de una nueva estructura de control para la dinámica lateral direccional de una aeronave de ala fija que permita un buen desempeño a través de la utilización de controles basados en la Función de Estructura Multivariable, Control Clásico y el Diseño por Canales Individuales.

ESPECÍFICOS:

- Evaluar la robustez del sistema de control.
- Evaluar el emparejamiento de la dinámica.
- Mediante técnicas de simulación digital analizar el comportamiento del sistema de control propuesto para la realización de una maniobra determinada.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Utilizando ciertas estrategias de control de aeronaves, estas presentan ciertos problemas asociados. Los controles diseñados, suele emplear controladores sumamen-

te complejos y difíciles de emplear. A pesar de haber utilizado diversas herramientas de control, pocos son con control clásico y no miden la robustez del sistema. Por ello, en este trabajo se propone un novedoso esquema que utiliza las ventajas del Análisis y Diseño por Canales Individuales, así como el análisis de la Función de Estructura Multivariable. Adicionalmente con la Función de Estructura Multivariable es posible medir la fragilidad que puede presentar la planta.

1.4 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Los sistemas de control de las aeronaves suelen ser tratados como sistemas multivariables por su dinámica acoplada. Existen diversos controles para los sistemas MIMO y muchos de ellos aseguran robustez mediante métodos complejos, en otros casos, los sistemas son tratados como sistemas SISO, pero sin considerar el acoplamiento de las otras dinámicas. Al asumir que el sistema está desacoplado, el control diseñado es muy probable que no presente robustez y por ende fiabilidad.

La dinámica de vuelo de una aeronave, se suele dividir como la dinámica longitudinal y la dinámica lateral-direccional. La dinámica longitudinal solo contempla el plano $x-z$, es decir el ángulo de cabeceo, la velocidad en el eje x y la velocidad en el eje z y como entradas el empuje generado por los motores, así como la deflexión del elevador. Por otro lado, la dinámica lateral direccional contempla los planos $y-x$ y $y-z$ y las entradas de las deflexiones de los alerones y el timón de profundidad.

La dinámica longitudinal suele estar desacoplada de la dinámica lateral-direccional y por ello es posible trabajar como dinámicas desacopladas. La dinámica lateral-direccional presenta un gran acoplamiento entre los estados de la aeronave, por ello en este caso será la dinámica a controlar. La dinámica lateral-direccional suele presentar 3 salidas (ángulo de derrape, ángulo de alabeo y tasa de guiñada) y solo 2 entradas (deflexiones en el timón y alerones), por ende existe 3 emparejamientos que serán analizados.

Las técnicas de control empleadas actualmente suelen ser complejas y los controles empleados suelen ser difíciles de implementar. Para la implementación de dichos controles se suele necesitar una computadora de vuelo con grandes capacidades de cálculo, lo que lo vuelve costosa. Se pueden buscar nuevas técnicas de control que vuelvan los controles más sencillos de implementar, pero así mismo aseguren fiabilidad y robustez al sistema.

En este trabajo se propone una nueva manera de diseñar controles para la dinámica lateral-direccional y sean efectivos y sencillos. La fiabilidad y robustez de dichos controles será basada en el control clásico que están claramente definidas sus propiedades para asegurar robustez y fiabilidad.

1.5 ESTADO DEL ARTE

Desde el pilotaje por cables o fly by wire los sistemas hidráulicos y neumáticos fueron cambiados por sistemas eléctricos. Los movimientos de los mandos de vuelo fueron convertidos en señales eléctricas e introducidas las computadoras de control de vuelo para determinar las deflexiones de las superficies de control. [32]

Es sabido que las aeronaves convencionales de ala fija normalmente solo cuentan con 4 entradas al sistema: deflexiones en alerones, timón y elevador, así como la fuerza de empuje debido al motor. De la misma forma, una aeronave es un sistema de 6 grados de libertad (DOF) y por ellos es considerado como un sistema multi-entradas multi-salidas o por sus siglas en inglés MIMO. Así mismo el sistema MIMO en muchas ocasiones presenta acoplamiento entre los canales y suele ser muy difícil y complejo de controlar. [9, 24]

Para controlar una aeronave se utilizan herramientas de control multivariable y se han implementado diversas técnicas de control: planificación de ganancias (*gain scheduled*), inversión no-lineal (*nonlinear inversion*)[30], modos deslizantes (sliding modes) [3], variación de parámetros lineales (linear parameter-varying o LPV) [6],

regulador lineal cuadrático (linear quadratic regulator o LQR) y control óptimo H-inf [2, 21, 34].

Muchas de las técnicas mencionadas tienen muchos problemas para la implementación en aeronaves. Los métodos de control multivariable mencionados, presentan una complejidad en el diseño de la ley de control y emplean estructuras de controladores generalizadas, lo que no proporciona una visión en el proceso de diseño. Así mismo, las estructuras de los controladores presentan demasiados parámetros de diseño y suele resultar en una pérdida de perspicacia física. Finalmente, los los conceptos del control clásico han sido bien establecidos, más no así las técnicas de diseño de control modernas [31, 25].

En este trabajo se utilizará la técnica del análisis y diseño por canales individuales (ICAD) para analizar la dinámica y poder determinar el acoplamiento del sistema en cada canal, además de determinar el emparejamiento del sistema. Dicho emparejamiento suele ser medido con la matriz de ganancia relativa (*relative gain arrange* o RGA) pero está limitado a la estado estacionario o baja frecuencia y se determina el emparejamiento de los canales. Por otro lado, ICAD realiza una medición del acoplamiento a toda frecuencia a través de la Función de Estructura Multivariable (*Multi Structural Funcion* o MSF). Así mismo, entre la MSF y la RGA existe una gran similitud, misma que fue descrita en [5, 17]. La MSF al estar descrita en el dominio de la frecuencia, es posible utilizar los diagramas de Bode y Nyquist que son dos herramientas muy conocidas y utilizadas en sistemas de control para el cálculo de robustez del sistema. Dichos diagramas son de fácil lectura y análisis.

ICAD y la MSF son herramientas poco utilizadas y conocidas, pero posibilita el diseño de sistemas de control simple y altamente efectivo. ICAD ha sido implementado satisfactoriamente en controles de motor de inducción [4], submarinos [18] además de industria automotriz e industria aeronáutica [11, 33]

1.6 ESTRUCTURA DE LA TESIS

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

- Capítulo 2: Fundamentos de los sistemas mutivariable. Se hace una explicación sobre el Análisis y Diseño por Canales Individuales (ICAD), así como de la Función de Estructura Multivariable (MSF). De la misma forma, la relación existente entre la Matriz de Ganancia Relativa (RGA) y la MSF. Así mismo una justificación del uso de ICAD como herramienta para su uso en el diseño de los controladores para sistemas MIMO. En este capítulo igualmente el uso de precompensadores y poscompensadores en sistemas MIMO y un posible proceso de diseño de controladores con utilizando el ICAD.
- Capítulo 3: Se muestra la dinámica lateral direccional de una aeronave de ala fija y sus posibles emparejamientos en un sistema de dos entradas y dos salidas. De los tres posibles emparejamientos, se analiza su estructura dinámica mediante la función de estructura multivariable (MSF) y las eventuales características que cada uno de los casos presenta.
- Capítulo 4: Se analiza cada caso y mediante la MSF se evalúa la factibilidad de cada emparejamiento. En caso de ser posible el diseño del controlador, se diseña bajo la especificación de una maniobra y el marco de ICAD. El emparejamiento es analizado mediante la MSF y en caso de ser necesario es diseñado un precompensador para la matriz de transferencia. Un controlador es diseñado y es evaluada su robustez mediante el criterio de control clásico. Finalmente se realiza una simulación digital de la maniobra y son evaluadas la factibilidad de las entradas necesarias para la realización de la misma.
- Capítulo 5: Se muestran las conclusiones del trabajo, las aportaciones y son escritas algunas recomendaciones para trabajos futuros.
- Apéndices: En esta sección se incluye el modelo matemático de la aeronave y

la obtención detallada de la matriz de transferencia de cada emparejamiento posible (caso). De la misma forma, se incluyen las características de la aeronave a analizar (Cessna T37) y las demostraciones de ICAD.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS MULTIVARIABLE

2.1 INTRODUCCIÓN

Hoy en día muchos sistemas son de múltiples entradas y múltiples salidas o sistemas MIMO (por sus siglas en inglés *Multiple Input Multiple Output*). Los sistemas MIMO suelen ser muy complejos y presentan acoplamiento en sus dinámicas. Los sistemas MIMO tienen dos características que los definen: la dirección de cada entrada a cada salida y el acoplamiento entre los lazos de control. [2] Una manera de analizarlos es desacoplar el sistema y analizarlo como sistemas de una entrada y una salida o sistemas SISO (por sus siglas en inglés *Single Input Single Output*). En caso que los sistemas MIMO presentan un gran acoplamiento y no es posible desacoplar el sistema, es necesario analizarlos como un sistema multivariable. En ocasiones, se busca desacoplar el sistema MIMO empleando un precompensador [23, 35], pero debe ser evaluada su factibilidad ya que físicamente puede presentar un problema. Una vez desacoplado, simplifican el diseño de los controladores al ser diseñados con un sistema más sencillo.

Existen diversas investigaciones de diseño de controles robustos para sistemas MIMO.

El diseño del control para un sistema MIMO suele ser muy complejo, por ello

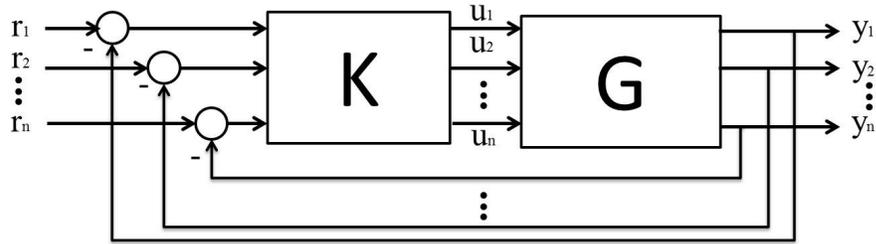
en ocasiones busca analizarse como sistemas SISO ya que es ampliamente conocido. Algunas de las técnicas utilizadas para controlar los sistemas MIMO son LQG (*Linear Quadratic Gaussian*), H_∞ y QFT (*Quantitative Feedback Theory*).

En el Reino Unido, O'Reilly y Leithead desarrollaron las bases de ICAD, anteriormente conocido como Diseño por Canales Individuales (ICD por sus siglas en inglés *Individual Channel design*)[27] en los 90s. O'Reilly establece la Función de Estructura Multivariable (MSF por su siglas en inglés *Multivariable Structure Function*) y con ella poder diseñar controles multivariables. La robustez está basada en las técnicas de control clásico de márgenes de fase y ganancia utilizando los diagramas de Bode y Nyquist. ICAD no es muy conocido pero los controles diseñados han sido implementados satisfactoriamente en submarinos [18], motores de inducción [4], control de helicópteros [11, 20, 33] y sistemas de combustión [14].

El modelo de la dinámica lateral direccional de una aeronave de ala fija se analizará utilizando la metodología de ICAD.

2.2 JUSTIFICACIÓN DEL USO DEL ANÁLISIS Y DISEÑO POR CANALES INDIVIDUALES

Cuando se diseña un controlador, se especifican las características de la salida a una entrada dada. En los sistemas SISO suele ser sencillo de obtener las especificaciones dadas. Por otro lado, en los sistemas MIMO, suelen tener un número determinado de entradas y salidas y debido al acoplamiento del sistema, puede ser complicado determinar la relación de entrada y salida. Por ello, es importante considerar la relación de cada entrada con cada salida en pares para tener claridad en el proceso de diseño del controlador [13]. En la figura 2.1 se muestra un diagrama de bloques de un sistema MIMO de lazo cerrado, donde K es la matriz de controladores y G la matriz de transferencia.

Figura 2.1: Sistema multivariable $n \times n$.

En el diagrama se asocia o empareja la salida y_i con la referencia r_i y forman el canal i C_i [27]. Es necesario conocer el acoplamiento entre cada canal para determinar si es posible trabajar como sistemas SISO cada canal. En caso de ser posible trabajar los canales como sistemas SISO, existen herramientas que facilitan el diseño del controlador.

Con el uso de los diagramas de Bode y Nyquist, es posible diseñar controladores que cumplen ciertas características y den robustez al sistema. El uso de los diagramas tiene muchas ventajas [8, 13, 26], algunas de ellas son:

1. Se puede evaluar el efecto del control en la planta en lazo cerrado.
2. Las restricciones físicas y el desempeño de los controles son incluidos en el análisis.
3. Es posible conocer el sistema de lazo cerrado analizando solamente el lazo abierto.
4. Se puede utilizar para diseñar el control de la planta.
5. Es posible determinar la respuesta en estado estacionario, el rechazo a las perturbaciones, la robustez y estabilidad del sistema en lazo cerrado.
6. La robustez del sistema puede ser medida en márgenes de fase y ganancia.

Los diagramas de Bode y Nyquist permiten tener una idea clara y sencilla para establecer robustez en los sistemas. De la misma forma, la dinámica del sistema

puede ser representada y observada en estos diagramas. Así mismo, la dinámica de los sistemas SISO está definida por los polos y ceros del sistema; el semiplano complejo derecho suele definir a un sistema, los RHPP (por sus siglas en inglés *Right Hand Plane Poles*) y los RHPZ (por sus siglas en inglés *Right Hand Plane Zeros*) influyen en la estabilidad y robustez del sistema.

En caso de los sistemas MIMO, la estructura dinámica está definida por los RHPPs y RHPZs de la matriz de transferencia y definen su comportamiento [22, 29].

El marco de trabajo del Diseño y Análisis por Canales Individuales (ICAD) está basado en los fundamentos del control clásico y permite utilizar los diagramas de Bode y Nyquist a los sistemas multivariantes sin importar el nivel de acoplamiento del sistema [5, 4, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 27, 33]. El sistema MIMO es expresado en sistemas SISO equivalentes, donde cada sistema SISO es la relación del canal abierto r_i a y_i , así mismo con una retroalimentación de y_i y r_i . Este mismo fundamento ha sido considerado en otras técnicas de control, pero ICAD considera la estructura de la planta. La estructura de la planta es expresada mediante la Función de Estructura Multivariable (MSF por sus siglas en inglés *Multivariable Structural Function*), donde la transmitancia de cada canal es relacionada de una manera sencilla mediante la magnitud de la MSF. De esta forma, utilizando el marco de trabajo de ICAD, es preservada la naturaleza de la dinámica de la planta mediante la MSF y es expresado el sistema MIMO en sistemas SISO equivalentes sin la pérdida de información [27, 16].

Bajo el marco de trabajo de ICAD una de las consideraciones es el uso de un control diagonal para el sistema MIMO. La posibilidad de un controlador diagonal satisfaga las especificaciones de diseño, radica en gran medida en la estructura de la planta. Dado que la estructura de la planta es muy importante, con el uso de la MSF es posible identificar cuando la planta se encuentra cerca del punto (1,0) en el diagrama de Nyquist [27]. Si el diagrama de Nyquist de la MSF pasa cerca del (1,0) es señal de una planta pobre. En caso de contar con una estructura de la planta pobre

existen técnicas para mejorarla como lo es el uso de un control de prealimentación (o *feedforward* en inglés) para mejorarla. Una vez mejorada la planta con el control de antelación, es posible aplicar el marco de trabajo ICAD. Es así como ICAD puede ser aplicado a cualquier planta sin importar el acoplamiento de la misma [16, 27].

El marco de trabajo de ICAD permite el diseño de controladores sin importar el acoplamiento del sistema. Bajo ICAD es posible representar sistemas MIMO en sistemas SISO sin perder información de los canales, ya que son preservados con la MSF. Una vez formado un lazo de retroalimentación de cada canal con un compensador formado para cumplir las especificaciones, se simplifica el sistema a un sistema SISO. Así mismo los ceros de transmisión del sistema y el desempeño en lazo cerrado es fácilmente de apreciar [27].

Existen técnicas de control documentadas para aplicar los métodos de control clásico al control multivariable como: *Direct/Inverse Nyquist Array* y *Quantitative Feedback Theory*. Por otro lado ICAD se hace énfasis la estructura del sistema y es posible establecer la robustez con los márgenes de fase y ganancia [27].

2.3 REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA MULTIVARIABLE EN CANALES INDIVIDUALES

La dinámica lateral - direccional de una aeronave solo cuenta con dos entradas (deflexión de los alerones y deflexión del timón) y se pueden controlar dos salidas. Por ello, se considera un sistema de dos entradas y dos salidas (TITO por sus siglas en inglés *Two Input Two Output*), aunque también es posible desarrollarlo para un sistema de 3×3 [1] y 4×4 [20]. En la figura 2.2 se muestra un sistema TITO implementando un control diagonal con retroalimentación. Se considera un control diagonal ya que es más fácil de implementar y es posible analizar el efecto en cada canal.

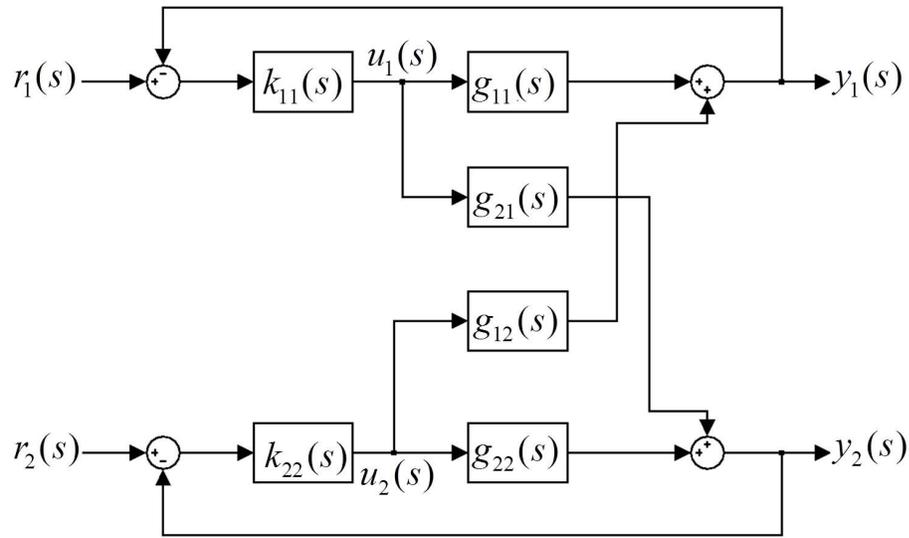


Figura 2.2: Diagrama de bloques de un sistema TITO con un controlador diagonal.

El diagrama de bloques de la figura 2.2 se puede expresar en forma matricial como:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \mathbf{GKR} \quad (2.1)$$

donde:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & 0 \\ 0 & k_{22}(s) \end{bmatrix}$$

En el Apéndice C se muestra la simplificación de la ec. (2.1) misma que es:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_1(s)}{1+C_1(s)} & \frac{g_{12}(s)}{g_{22}(s)} \frac{h_2(s)}{1+C_1(s)} \\ \frac{g_{21}(s)}{g_{11}(s)} \frac{h_1(s)}{1+C_2(s)} & \frac{C_2(s)}{1+C_2(s)} \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (2.2)$$

Donde $C_i(s)$ es la función de transferencia SISO de lazo abierto del canal i

y $h_i(s)$ describe el impacto del i -ésimo lazo de control. De esta forma es posible representar un sistema multivariable en dos sistemas SISO ($C_1(s)$ y $C_2(s)$), así como la respuestas de la referencia dada en cada canal [27].

La función de transferencia $C_i(s)$ se muestra en la ec. (2.3):

$$C_i(s) = g_{ii}(s)k_{ii}(s) \left(1 - \frac{g_{12}(s)g_{12}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \frac{g_{jj}(s)k_{jj}(s)}{1 + g_{jj}(s)k_{jj}(s)} \right) \quad (2.3)$$

donde $i = j = \{1, 2\}$, pero $i \neq j$. Igualmente es posible definir la *función de estructura multivariable*(MSF)($\gamma(s)$) que describe el acoplamiento de de los canales. La MSF se define en la ec. (2.4):

$$\gamma(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (2.4)$$

Así mismo es posible definir el impacto de controlador $k_{jj}(s)$ en el canal $C_i(s)$, el cual está definido como $h_j(s)$ y se muestra en la ec. (2.5)

$$h_j(s) = \frac{g_{jj}(s)k_{jj}(s)}{1 + g_{jj}(s)k_{jj}(s)} \quad (2.5)$$

Sustituyendo las ecs. (2.4) y (2.5) en la ec. (2.3), es posible definir la función de transferencia de lazo abierto del canal i en términos de la MSF y el impacto del controlador $k_{jj}(s)$:

$$C_i(s) = g_{ii}(s)k_{ii}(s) (1 - \gamma(s)h_j(s)) \quad (2.6)$$

En la fig. 2.3 se muestra el diagrama de bloques de un sistema TITO representado en canales individuales.

Como se observa en la fig. 2.3, el sistema MIMO se reduce a dos canales SISO y cada uno en un lazo cerrado con su respectivo controlador. El control debe estar

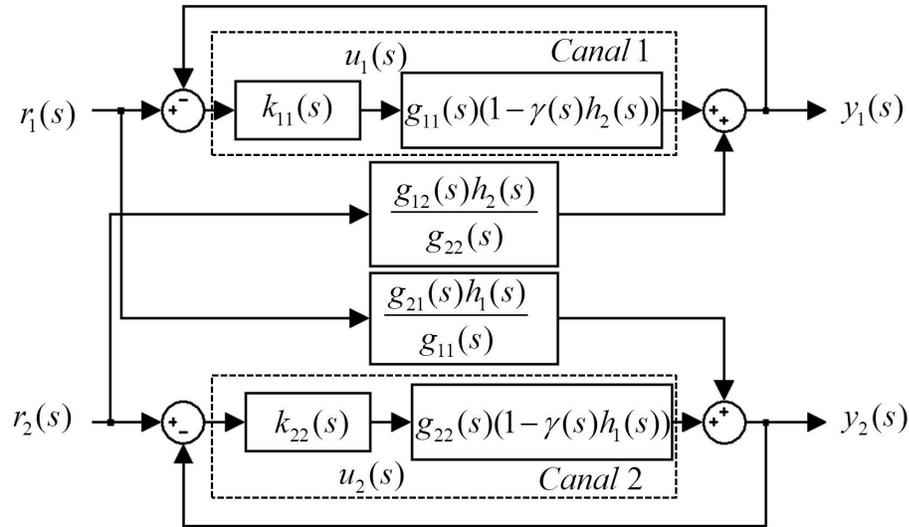


Figura 2.3: Diagrama de bloques de un sistema multivariable TITO representado en canales individuales.

diseñado para cumplir con las especificaciones dadas para cada canal. Cabe mencionar que el canal se verá afectado por el acoplamiento del otro canal y debe ser considerado. Así mismo, se puede observar que no se pierde información, al ser la misma representación que un sistema TITO con un control diagonal.

Si los control $k_{11}(s)$ y $k_{22}(s)$ estabilizan el canal 1 y 2 respectivamente, el canal será estable.

2.4 LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MULTIVARIABLE

La Función de Estructura Multivariable (MSF por sus siglas en inglés *Multi Structural Function*) define el acoplamiento del sistema multivariable en el dominio de la frecuencia. La MSF se define como:

$$\gamma(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (2.7)$$

La MSF es una función en dominio de la frecuencia y como tal debe ser trata-

da. La MSF contiene propiedades del sistema multivariable y al ser definidas en el dominio de la frecuencia es posible determinar las características del sistema en su rango de operación. Algunas de las características del sistema multivariable que son posibles conocer analizando la MSF son [5]:

- La magnitud exacta del acoplamiento del sistema.
- Determinar las características dinámicas de cada acoplamiento posible del sistema.
- Los ceros de transmisión del sistema están muy relacionados con los ceros de $1 - \gamma(s)$.
- La condición de fase no mínima es determinada por $\gamma(s) = 1$, esto debido al criterio de estabilidad de Nyquist.
- Dado que la condición de fase no mínima es determinada por $\gamma(s) = 1$, el punto (1,0) del diagrama de Nyquist de la MSF indica la sensibilidad del sistema a una incertidumbre en términos de márgenes de fase y ganancia. La sensibilidad del sistema es muy importante considerarla para el diseño de controles robustos.

El criterio de estabilidad de Nyquist, establece que la función de transferencia $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ (donde $L(s) = K(s)G(s)$ y $D(s) = 1 + L(s)$) es estable si y solo si el diagrama de Nyquist de $L(s)$ no pasa a través del punto $(-1, 0)$ y en caso de contar con RHPP en $L(s)$, el número de rodeos en dirección contraria a las manecillas del reloj a $(-1, 0)$ debe ser igual al número de RHPP de $L(s)$. [10]

La magnitud del acoplamiento del sistema puede ser medida con la magnitud de la MSF ($\gamma(s)$), misma que se puede observar en la ec. (2.8):

$$C_i(s) = g_{ii}(s)k_{ii}(s) (1 - \gamma(s)h_j(s)) \quad (2.8)$$

Es posible simplificar la ec. (2.8) si el sistema no presenta acoplamiento, es decir la magnitud de la MSF ($\gamma(s)$) tiende a cero. La simplificación de la ec. (2.8) debido al nulo acoplamiento ($\gamma(s) \approx 0$) se muestra en la ec. (2.6):

$$C'_i(s) = g_{ii}(s)k_{ii}(s) \quad (2.9)$$

De la misma forma de la ec. (2.8) se puede observar la interacción de la MSF con $h_j(s)$, el producto de $\gamma(s)h_j(s)$ debe ser evaluado, ya que la interacción entre ambos podría ser diferente de 0 y no es posible simplificar el canal. Así mismo, el producto de $\gamma(s)h_j(s)$ debe mantenerse alejado del punto (1,0) ya que eso significaría fragilidad del sistema, misma que se podría evaluar en términos de márgenes de fase y ganancia.

El análisis de la MSF debe tener mucha atención en el punto de operación de la dinámica multivariable, ya que es posible que en el punto de operación se tenga nulo acoplamiento o no. Es importante mencionar que es posible que los anchos de banda de los canales sean diferentes y deben analizarse individualmente.

2.4.1 SIMILITUD ENTRE LA MATRIZ DE GANANCIAS RELATIVAS (RGA) Y LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MUTIVARIABLE (MSF)

Una de las técnicas más utilizadas para definir las entradas con las salidas y evaluar el acoplamiento de las dinámicas para diseño de controladores descentralizados es la matriz de ganancias relativas (RGA por sus siglas en inglés *Relative Gain Array*) [7]. La RGA tiene algunas limitantes, pero es un método muy utilizado para la definición de los emparejamientos del sistema [13, 22]. Con la RGA es posible estimar el acoplamiento del sistema, pero solamente en $\omega = 0 \text{ rad/s}$. Por otro lado, la MSF al considerar todo el dominio de la frecuencia, existe una relación entre la RGA y la MSF [5, 17].

La ganancia relativa (λ) se define como la relación de la “ganancia en lazo abierto” y la “ganancia en lazo cerrado”.

$$\lambda_{ij} = \frac{\text{ganancia lazo abierto}}{\text{ganancia lazo cerrado}} = \frac{g_{ij}}{\hat{g}_{ij}} \quad (2.10)$$

Cada elemento de la matriz de ganancia relativa, asocia el impacto de cada entrada en cada salida. Si la ganancia relativa fuera 1, significa que ese elemento de la matriz mantiene la “ganancia en lazo abierto” igual que “ganancia en lazo cerrado”. Por otro lado, la “ganancia en lazo cerrado” considera la interacción cuando se cierran los lazos de control, no así la “ganancia en lazo abierto”.

La RGA de un sistema multivariable $G(s)$ está definida como:

$$RGA(G) = \Lambda(G) \triangleq G \times (G^{-1})^T \quad (2.11)$$

donde \times es la multiplicación elemento por elemento (el producto de Hamard o Schur). Para un sistema TITO, la RGA se define como:

$$\Lambda(G) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde:

$$\lambda_{11}(s) = \lambda_{22}(s) = \frac{1}{1 - \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)}} \quad (2.13)$$

$$\lambda_{12}(s) = \lambda_{21}(s) = \frac{-\frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)}}{1 - \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)}} \quad (2.14)$$

Si sustituimos la definición de la MSF en las ecs. (2.13) y (2.14), la RGA de un sistema TITO estaría definido como:

$$\Lambda(G) = \frac{1}{1 - \gamma(s)} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma(s) \\ -\gamma(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Si se analiza la matriz de ganancias relativas (RGA) es posible determinar varias características, siendo expresadas de la misma forma en términos de la función de estructura multivariable (MSF):

- No hay interacción entre las variables cuando $\lambda = 1$. Lo que significa que la MSF es 0, por ejemplo se puede observar esta condición en el término $\Lambda(G)(1, 1)$.
- La variable de entrada i no afecta esa salida j si el término $\lambda_{ji} = 0$, lo que significaría que las otras entradas afectan la salida j . Lo que significaría que la MSF es 0, por ejemplo se puede observar en el término $\Lambda(G)(1, 2)$.

Si la RGA es una identidad significa que no existe acoplamiento entre los canales. Para que la RGA sea una identidad la MSF debe ser 0, lo que significaría nulo acoplamiento. Al estar en el dominio de la frecuencia, la RGA cambia con respecto a la frecuencia de operación. Es posible que la RGA muestre que el emparejamiento no es el correcto a determinada frecuencia, pero evaluar la RGA en el ancho de banda del canal, obtendríamos el acoplamiento del sistema y podríamos determinar el acoplamiento del mismo.

Para el emparejamiento es necesario realizar la siguiente evaluación de la matriz de ganancias relativas:

- No formar lazos de control con ganancia relativa nula, con ganancias relativas negativas o ganancia relativa infinita.
- Cerrar los lazos de control con las ganancias relativas más próximas a uno.

Los puntos anteriores son igualmente posibles de determinar utilizando los diagramas de Bode y Nyquist de la MSF.

2.5 LA ESTRUCTURA DINÁMICA

El desempeño del control de lazo cerrado de un sistema SISO se verá afectado por las incertidumbres de la planta. La planta de la misma forma puede poseer polos en el plano derecho (RHPP por sus siglas en inglés *Right Hand Plane Poles*) y/o ceros en el plano derecho (RHPZ por sus siglas en inglés *Right Hand Plane Zeros*) que limitarán el desempeño del controlador. Los puntos anteriormente mencionados afectarán invariablemente el desempeño del controlador y por ende la dinámica del sistema en lazo cerrado [27].

Utilizando ICAD es posible simplificar el diseño de los controles del sistema MIMO, mismos que estarían descritos en criterios de polos y ceros de cada canal ($C_i(s)$) como un sistema SISO [15]. Asumiendo un controlador diagonal y sin tener cancelaciones polo-cero en $\gamma(s)$, $g_{ii}(s)$ o en $(1 - \gamma(s)h_j(s))$, es posible determinar la dinámica en lazo abierto, misma que se resumen en la tabla 2.1. En la tabla 2.1 se muestra la procedencia de los ceros y polos de cada canal.

Tabla 2.1: Estructura dinámica de los canales en lazo abierto.

Canal	Polos	Ceros
$C_1(s)$	Polos de $g_{11}(s), g_{12}(s).g_{21}(s), h_2(s)$	Ceros de $(1 - \gamma(s)h_2(s))$
$C_2(s)$	Polos de $g_{22}(s), g_{12}(s).g_{21}(s), h_1(s)$	Ceros de $(1 - \gamma(s)h_1(s))$

Es posible que ocurran algunas cancelación polo-cero, pero es importante mencionar que estas no tienen consecuencia si son polos del semi plano izquierdo (LHPZ - *Left Hand Plane Zero*; LHPP - *Left Hand Plane Poles*).

2.6 PRECOMPENSADORES Y POSTCOMPENSADORES DE LA PLANTA

El objetivo de los precompensadores y postcompensadores de la planta es buscar modificar la matriz de transferencia incluso hasta el desacoplamiento de la misma. El desacople de la misma consiste en transformar la matriz de transferencia del sistema en una diagonal o casi diagonal. El control de una matriz de transferencia desacoplada sería equivalente a un conjunto independiente de lazos de control. Realizar una realimentación de la planta, ha mostrado muy buenos resultados para un desacoplamiento de la planta [12]. Así mismo, diversos autores han realizado el diseño de precompensadores con la finalidad de mejorar la dinámica de sus sistema [23, 35].

El mejoramiento de la matriz de transferencia es un procedimiento donde primero se diseña un precompensador $P(s)$ que contrarresta las interacciones de la planta $G(s)$ y produce una planta modificada $G_d(s)$ ($G(s)P(s)$) que cuenta con las propiedades deseadas de la matriz de transferencia. Es posible diseñar el precompensador ($P(s)$) para que afecte solo a los elementos deseados de la matriz de transferencia original ($G(s)$) en la frecuencia deseada. Diseñar un precompensador ($P(s)$) que afecte solo en un rango de operación y solo a algunos elementos mantendría la estructura del sistema. El diseño de un precompensador modifica directamente el comportamiento de la MSF ($\gamma(s)$).

2.6.1 DISEÑO DE PRECOMPENSADOR BAJO EL MARCO DE TRABAJO DE ICAD

En esta sección se describirá un proceso para el diseño de un precompensador de un sistema TITO para mejorar la Función de Estructura Multivariable ($\gamma(s)$) con

la finalidad de facilitar el diseño de los controladores. Así mismo, se desarrollan las ecuaciones de cada canal respectivamente.

Usualmente se busca afectar solo en un rango de operación y consiste en el diseño de un control tipo *notch filter*. El control suele ser implementado como un control de prealimentación (FF) con la finalidad de eliminar los ceros de fase no mínima de la planta o ceros en el semi plano derecho (RHPZ - *Right Hand Plane Zeros*), pero no debe de afectar la dinámica del sistema en gran medida. El diagrama de bloque del un sistema con un control FF se muestra en la fig. 2.4.

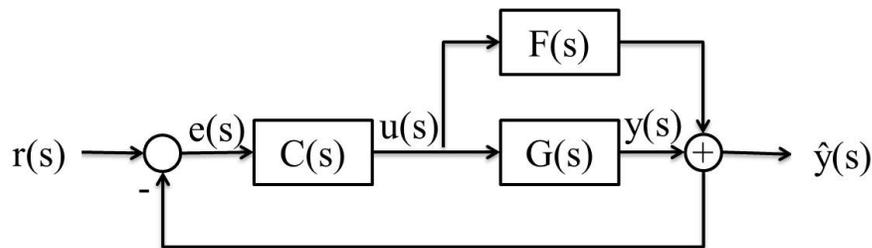


Figura 2.4: Diagrama de bloques de un control de prealimentación.

Donde $C(s)$ es el controlador, $G(s)$ es la planta del sistema, $F(s)$ el control de prealimentación.

Al implementarse un control de prealimentación se busca que la salida de la planta ($y(s)$) y la señal que se retroalimenta ($\hat{y}(s)$) deben ser lo más similar posible, con la finalidad de no afectar la estructura de la planta, es decir el control FF no afectaría la señal de retroalimentación. Mediante el trazo de los diagramas de Bode de ambas señales de salida ($y(s)$ y $\hat{y}(s)$) es posible establecer la similitud entre las mismas al ser casi iguales, salvo el elemento modificado.

Muchas veces el diseño del control es con la finalidad de eliminar algún cero de fase no mínima de la planta, una vez eliminado es posible diseñar el controlador diagonal ($C(s)$) del sistema. Así mismo, el diseño del control ($C(s)$) está en base a la salida de $\hat{y}(s)$ a pesar de no ser la del sistema ($y(s)$). Posteriormente será diseñado un precompensador ($P(s)$) en función de ambos controles diseñados ($F(s)$ y $C(s)$)

y controlará la salida real del sistema ($y(s)$) por ello los controles diagonales ($C(s)$) deben estar diseñados para la salida de $\hat{y}(s)$. El diagrama de bloques de la salida real del sistema con la integración de ambos controles se muestra en la fig. 2.5.

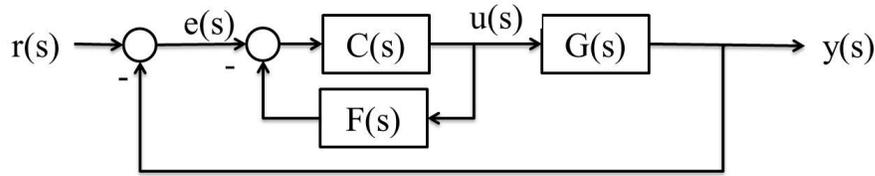


Figura 2.5: Diagrama de bloques con el control y el cálculo de la salida real.

Es posible evaluar la robustez de los canales mediante los márgenes de fase y ganancia. Dado que el sistema de control empleado ($C(s)$ con la retroalimentación de $F(s)$) contiene el control de prealimentación, el control empleado ya no sería diagonal y las ecuaciones de ICAD solo consideran el uso de un control puramente diagonal. Por ello, es necesario reescribir el diagrama de tal forma que sea posible analizar los márgenes de fase y ganancia y establecer un control puramente diagonal. El nuevo diagrama a utilizar se muestra en la fig. 2.6

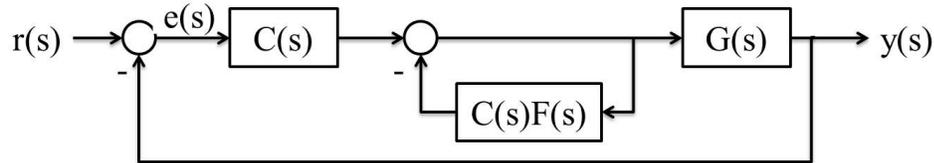


Figura 2.6: Diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

Como se muestra en la fig. 2.6, se considera el control diagonal $C(s)$. Así mismo, se observa que el lazo del control de prealimentación ($C(s)$ y $F(s)$) se puede simplificar generando un precompensador $P(s)$, mismo que se muestra en la fig. 2.7.

Donde $P(s) = (I + C(s)F(s))^{-1}$ e I es una matriz identidad de rango 2.

Finalmente el diagrama de bloques de la fig. 2.7 es simplificado y se muestra en la fig. 2.8. En la fig. 2.8 se muestra una matriz de transferencia $G(s)P(s)$, que es

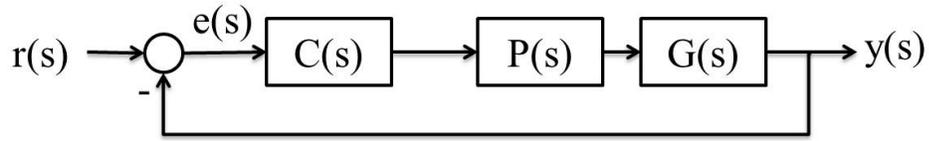


Figura 2.7: Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

la simplificación de los bloques $P(s)$ y $G(s)$ de la fig. 2.7.

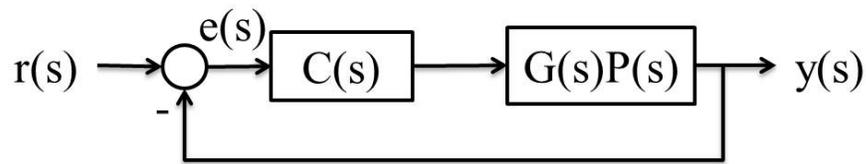


Figura 2.8: Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

En la ec. (2.16) se muestra el valor del producto $G(s)P(s)$ en términos de $C(s)$, $F(s)$ y $G(s)$.

$$G(s)P(s) = G(s)(I + C(s)F(s))^{-1} \quad (2.16)$$

El producto de $G(s)P(s)$ generarán una nueva matriz de transferencia $GP(s)$ que contempla el efecto del control de prealimentación. La matriz de transferencia $GP(s)$ se muestra en la ec. (2.17).

$$GP(s) = \begin{bmatrix} GP_{11}(s) & GP_{12}(s) \\ GP_{21}(s) & GP_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Así mismo, es necesario establecer una nueva MSF en función de los valores de la matriz de transferencia $GP(s)$. En la ec. (2.18) se muestra la función de estructura multivariable ($\gamma_{CFG}(s)$) de la matriz de transferencia $GP(s)$.

$$\gamma_{CFG}(s) = \frac{GP_{21}(s)GP_{12}(s)}{GP_{11}(s)GP_{22}(s)} \quad (2.18)$$

En función de la nueva MSF ($\gamma_{CFG}(s)$), es necesario establecer las ecuaciones de los canales ($C_1(s)$ y $C_2(s)$) que se muestra en las ec. (2.19) y (2.20) respectivamente

$$C_1(s) = k_{11}(s)g_{11}(s)(1 - \gamma_{CFG}(s)h_2(s)) \quad (2.19)$$

$$C_2(s) = k_{22}(s)g_{22}(s)(1 - \gamma_{CFG}(s)h_1(s)) \quad (2.20)$$

Las funciones de acoplamiento $h_1(s)$ y $h_2(s)$ son:

$$h_1(s) = \frac{k_{11}(s)g_{11}(s)}{1 + k_{11}(s)g_{11}(s)}; \quad h_2(s) = \frac{k_{22}(s)g_{22}(s)}{1 + k_{22}(s)g_{22}(s)}$$

Finalmente, será posible establecer la robustez del sistema en términos de márgenes de fase y ganancia una vez empleado el precompensador ($P(s)$).

2.7 EL PROCESO DE DISEÑO

En base al emparejamiento del sistema es determinada la estructura dinámica del sistema TITO. Dado el sistema de 2-entradas 2-salidas hay 2 emparejamientos posibles y se determina el mejor en función de la Función de Estructura Multivariable ($\gamma(s)$). Donde el canal $C_1(s)$ es el emparejamiento de la entrada $u_1(s)$ y la salida $y_1(s)$ y el canal $C_2(s)$ es el emparejamiento de la entrada $u_2(s)$ y la salida $y_2(s)$.

Para el diseño de los controladores, es posible establecer una serie de pasos:

1. Definir el modelo matemático y obtener la matriz de transferencia del sistema (dominio de la frecuencia).

2. Analizar la MSF ($\gamma(s)$) y evaluar el posible diseño de un precompensador o control de prealimentación para mejorar la MSF.
3. Se analiza la nueva MSF ($\gamma_{CFG}(s)$) con la interacción de precompensador o el control de prealimentación.
4. Se evalúa la MSF que se empleará para el diseño del controlador. En función de ello se inicia el proceso de diseño de los controladores.
5. Se realiza la primera aproximación en $C_i(s)$, donde la interacción con el otro canal se considera 1 ($h_j(s) = 1$); $i \neq j$.
6. Se diseña $k_{ii}(s)$ (controlador del canal $C_i(s)$).
7. Se define la interacción del canal i con el canal $C_j(s)$ es decir $h_i(s)$.
8. Se diseña $k_{jj}(s)$ (controlador del canal $C_j(s)$) considerando $h_i(s)$.
9. Se define la interacción del canal j con el canal $C_i(s)$ es decir $h_j(s)$.
10. Rediseño del controlador $k_{ii}(s)$ (controlador del canal $C_i(s)$) considerando $h_j(s)$.
11. Se evalúa la robustez de $C_i(s)$, $C_j(s)$, $k_{ii}(s)g_{ii}(s)$, $k_{jj}(s)g_{jj}(s)$, $\gamma(s)h_i(s)$ y $\gamma(s)h_j(s)$ y se repite el diseño de los controladores hasta garantizar la robustez estructural.

Dado que se necesita el diseño iterativo de los controladores con la finalidad de establecer la robustez deseada, es posible diseñarlos mediante los diagramas de Bode y Nyquist para garantizar la robustez de los mismos.

CAPÍTULO 3

DINÁMICA LATERAL DIRECCIONAL DE UNA AERONAVE DE ALA FIJA.

3.1 MODELO DE LA DINÁMICA LATERAL DIRECCIONAL DE UNA AERONAVE DE ALA FIJA

El modelo dinámico de tres grados de libertad (DOF por sus siglas en inglés degrees of freedom) están definidos por el siguiente conjunto de ecuaciones[24]:

$$\begin{aligned} V_{P1}\dot{\beta} + V_{P1}\dot{\psi} &= g\phi + Y_{\beta}\beta + Y_r\dot{\psi} + Y_p\dot{\phi} + Y_{\delta A}\delta_A + Y_{\delta R}\delta_R \\ \ddot{\phi} - \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\ddot{\psi} &= L_{\beta}\beta + L_r\dot{\psi} + L_p\dot{\phi} + L_{\delta A}\delta_A + L_{\delta R}\delta_R \\ \ddot{\psi} - \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\ddot{\phi} &= N_{\beta}\beta + N_r\dot{\psi} + N_p\dot{\phi} + N_{\delta A}\delta_A + N_{\delta R}\delta_R \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde V_{P1} es la velocidad crucero, β ángulo de derrape, ψ ángulo de guiñada, ϕ ángulo de alabeo, δ_A deflexión del alerón y δ_R deflexión del timón. Las derivadas de estabilidad y control están definidas por los coeficientes de Y_{β} , Y_r , Y_p , $Y_{\delta A}$, $Y_{\delta R}$, L_{β} , L_r , L_p , $L_{\delta A}$, $L_{\delta R}$, N_{β} , N_r , N_p , $N_{\delta A}$ y $N_{\delta R}$.

3.2 ESTRUCTURA DINÁMICA DE LA DINÁMICA LATERAL DIRECCIONAL DE LA AERONAVE.

La dinámica lateral direccional del Cessna T37 es analizada en el contexto de ICAD. Para realizar el análisis es necesario establecer los canales, los cuales son formados emparejando las deflexiones de las superficies de control (entradas del sistema δ_A y δ_R) con cada variable de la dinámica lateral direccional, definidas como: posición de alabeo (ϕ), tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) y ángulo de derrape (β). Debido a la diferencia entre el número de superficies de control (2) y variables de la dinámica lateral direccional (3), pueden formarse tres emparejamientos para controlar:

- Caso 1: Posición de alabeo ϕ y tasa de cambio de guiñada $\dot{\psi}$
- Caso 2: Posición de alabeo ϕ y ángulo de derrape β
- Caso 3: Tasa de cambio de guiñada $\dot{\psi}$ y ángulo de derrape β

Dado que cada caso son dos entradas y dos salidas, el sistema se analiza como un sistema TITO. Cada caso será analizado utilizando la función de estructura multivariable (MSF) para determinar la estructura dinámica de cada emparejamiento.

3.2.1 CASO 1: POSICIÓN DE ALABEO ϕ Y TASA DE CAMBIO DE GUIÑADA $\dot{\psi}$

Considerando un sistema multivariable (MIMO) de 2x2, donde las entradas y salidas están definidas como:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(s) \\ \dot{\psi}(s) \end{bmatrix}; \quad U(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_A(s) \\ \delta_R(s) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Y la matriz de transferencia $G(s)$ está definida cómo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Donde:

$$g_{11}(s) = \frac{12.9262(s^2+0.3025s + 4.969)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{12}(s) = \frac{1.0712(s - 2.639)(s + 2.306)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{21}(s) = \frac{-1.2952(s - 1.093)(s^2 + 2.786s+3.18)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

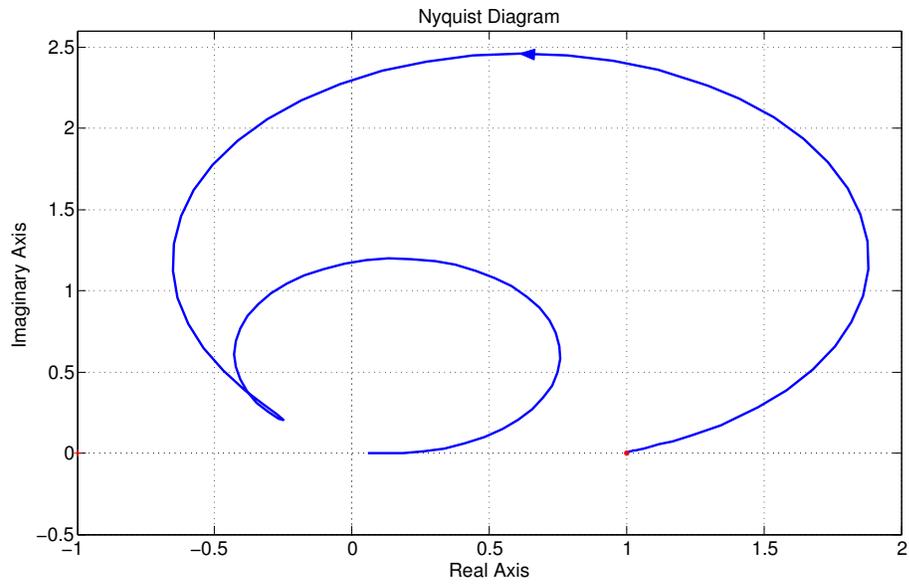
$$g_{22}(s) = \frac{-1.8612(s + 1.333)(s^2-0.1853s+0.184)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

Se calcula la MSF del sistema MIMO:

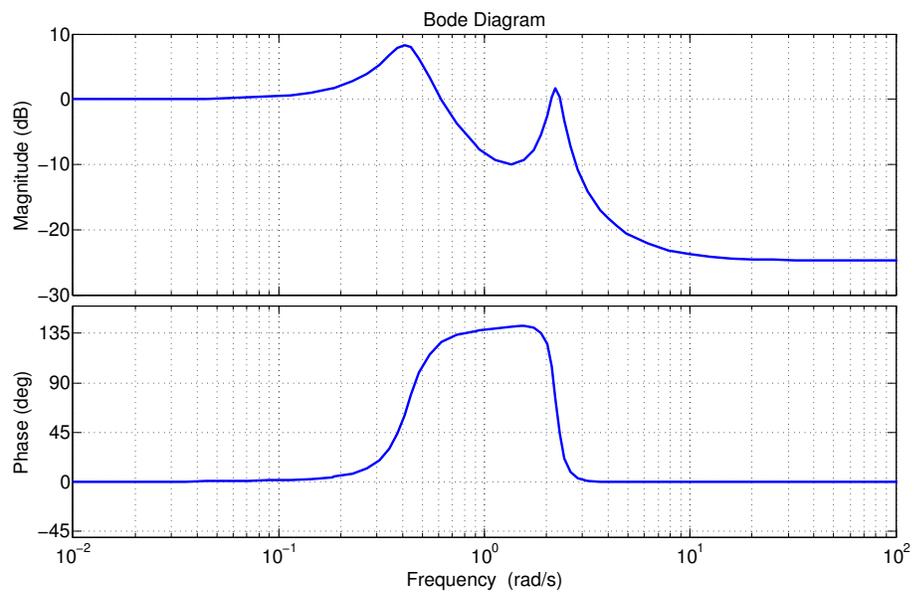
$$\gamma(s) = \frac{0.05767(s + 2.306)(s - 2.639)(s - 1.093)(s^2 + 2.786s + 3.18)}{(s + 1.333)(s^2 - 0.1853s + 0.184)(s^2 + 0.3025s + 4.969)} \quad (3.4)$$

En la figura 3.1 se muestran los diagramas de Bode y Nyquist de la MSF.

Como se puede observar en la figura 3.1 a baja frecuencia o estado estacionario ($\omega = 0rad/s$) la MSF es casi 1. Cuando la MSF es muy cercana a 1, lo que significa una fragilidad en el sistema (generar un giro al punto (1,0) produciría un cambio del número de polos del sistema). Esto mismo se debe a que físicamente la posición de alabeo (ϕ) y la tasa de guiñada ($\dot{\psi}$) están muy acopladas.



(a) Diagrama de Nyquist.



(b) Diagrama de Bode.

Figura 3.1: Diagramas de la MSF del Caso 1.

3.2.2 CASO 2: POSICIÓN DE ALABEO ϕ Y ÁNGULO DE DERRAPE

β

Considerando un sistema multivariable (MIMO) de 2x2, donde las entradas y salidas están definadas como:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(s) \\ \beta(s) \end{bmatrix}; \quad U(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_A(s) \\ \delta_R(s) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Y la matriz de transferencia $G(s)$ está definida cómo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Donde:

$$g_{11}(s) = \frac{12.9262(s^2+0.3025s + 4.969)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{12}(s) = \frac{1.0712(s - 2.639)(s + 2.306)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

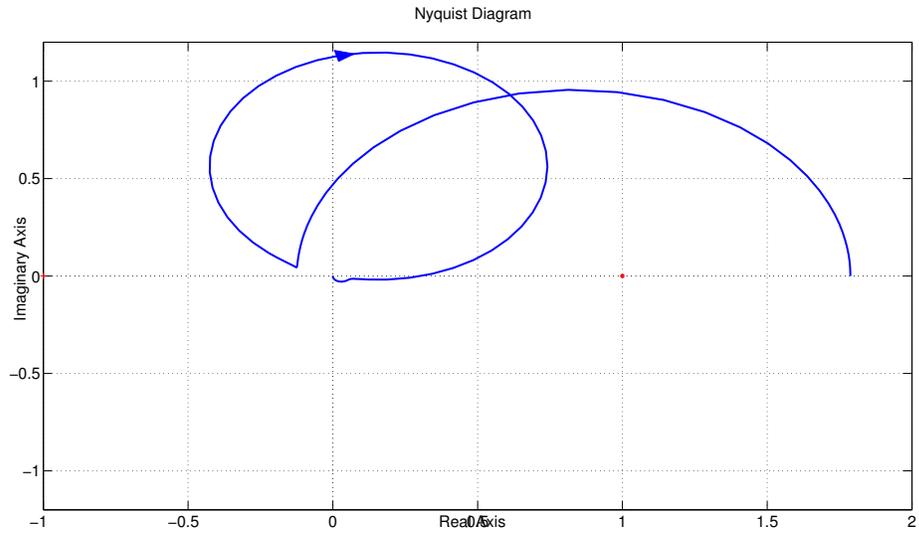
$$g_{21}(s) = \frac{1.2852(s + 2.268)(s + 0.07411)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{22}(s) = \frac{0.037231(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 0.005288)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

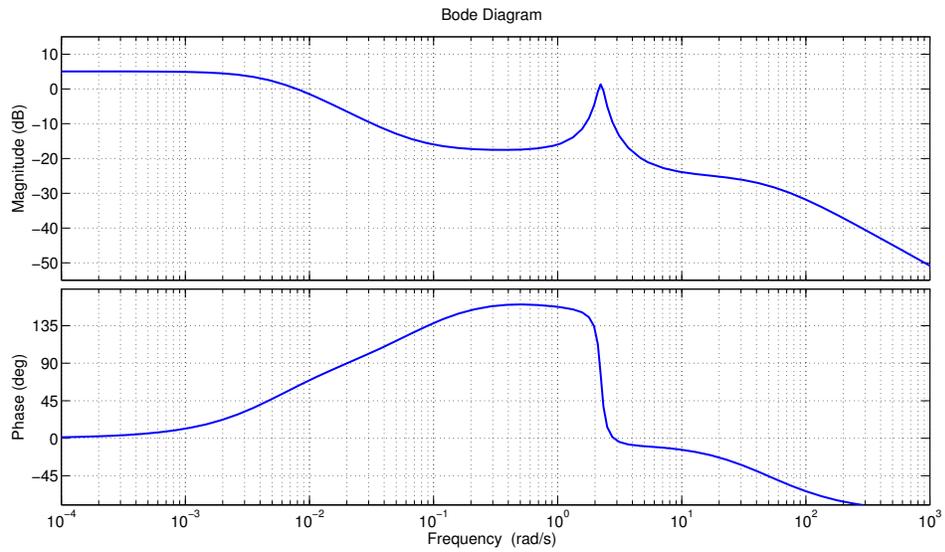
Se calcula la MSF del sistema MIMO:

$$\gamma(s) = \frac{2.8606(s - 2.639)(s + 2.306)(s + 2.268)(s + 0.07411)}{(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 0.005288)(s^2 + 0.3025s + 4.969)} \quad (3.7)$$

En la figura 3.2 se muestran los diagramas de Bode y Nyquist de la MSF.



(a) Diagrama de Nyquist.



(b) Diagrama de Bode.

Figura 3.2: Diagramas de la MSF del Caso 2.

Como se puede observar en la figura 3.2 la MSF se encuentra lejos del punto (1,0) para toda frecuencia (ω). Es importante mencionar que cuando la MSF pasa por (1,0) existe una singularidad en la matriz de transferencia a esa frecuencia. Cerca de $2rad/s$ es donde se presenta un aumento de la magnitud, dicho aumento se debe a la los ceros de la MSF ya que se encuentran en esa frecuencia. Es importante mencionar que los ceros de la MSF son los ceros de $g_{12}(s)$ y $g_{21}(s)$ como se muestra en la tabla 2.1. Disminuir o eliminar el aumento es posible con el diseño de un precompensador.

3.2.3 CASO 3: TASA DE CAMBIO DE GUIÑADA $\dot{\psi}$ Y ÁNGULO DE DERRAPE β

Considerando un sistema multivariable (MIMO) de 2x2, donde las entradas y salidas están definidas como:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}(s) \\ \beta(s) \end{bmatrix}; \quad U(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_A(s) \\ \delta_R(s) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Y la matriz de transferencia $G(s)$ está definida cómo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donde:

$$g_{11}(s) = \frac{-1.2952(s - 1.093)(s^2 + 2.786s + 3.18)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{12}(s) = \frac{-1.8612(s + 1.333)(s^2 - 0.1853s + 0.184)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{21}(s) = \frac{1.2852(s + 2.268)(s + 0.07411)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

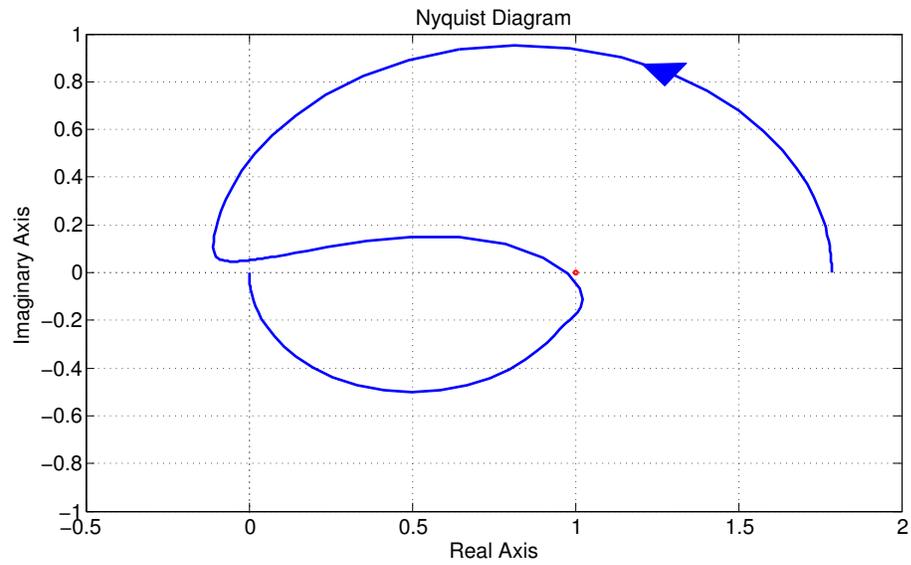
$$g_{22}(s) = \frac{0.037231(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 0.005288)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

Se calcula la MSF del sistema MIMO:

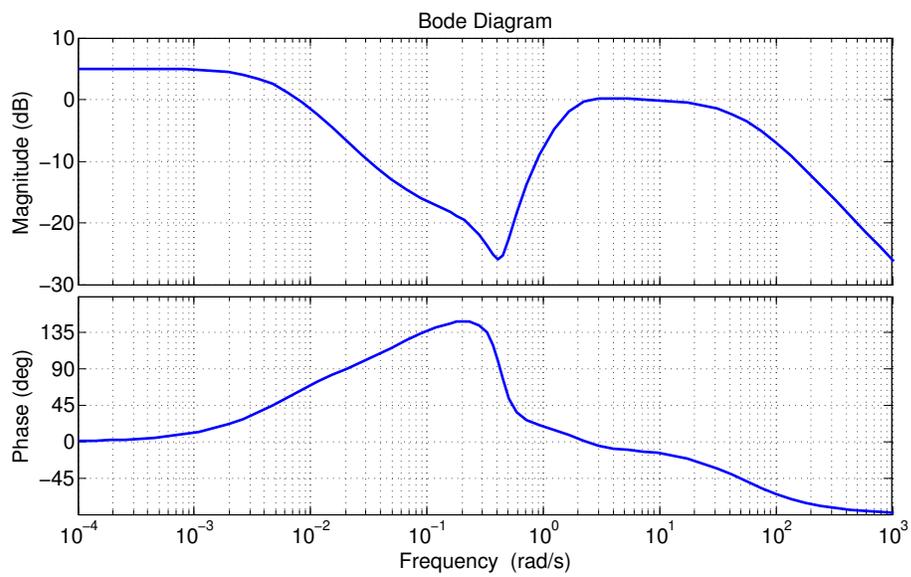
$$\gamma(s) = \frac{49.603(s + 2.268)(s + 1.333)(s + 0.07411)(s^2 - 0.1853s + 0.184)}{(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 1.093)(s - 0.005288)(s^2 + 2.786s + 3.18)} \quad (3.10)$$

En la figura 3.3 se muestran los diagramas de Bode y Nyquist de la MSF.

Como se puede observar en la figura 3.1 en cierto rango de frecuencia (2 rad/s a 12 rad/s) la MSF pasa cerca del punto (1,0). Tener un rango de frecuencia cercano a la magnitud de 1 (0 dB) indica cierta fragilidad (generar un giro al punto (1,0) produciría un cambio del número de polos del sistema) de la estructura dinámica. La fragilidad del sistema significa que con pequeños cambios paramétricos, el número de ceros en el plano derecho cambia. Es posible que al igual que en el caso 2, con el diseño de un precompensador modificar la respuesta de la MSF en ese rango de operación y aumentar la robustez del sistema.



(a) Diagrama de Nyquist.



(b) Diagrama de Bode.

Figura 3.3: Diagramas de la MSF del Caso 3.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En el Capítulo 3 se mostraron las MSF de los 3 casos posibles de emparejamiento del sistema. Las MSF mostraron distintos comportamientos en cada caso y es necesario evaluar la MSF para determinar la factibilidad de un controlador. En caso de ser factible, el controlador será diseñado bajo el marco de ICAD. En el diseño de los controles, se buscará que los canales presenten robustez en lazo cerrado, mismo que será evaluado bajo los criterios de estabilidad y robustez de los sistemas SISO. Finalmente, se realizará la simulación de una maniobra y se evaluará que el rango de operación de las entradas de control estén dentro de los valores de operación.

4.1 CASO 1: POSICIÓN DE ALABEO ϕ Y TASA DE CAMBIO DE GUIÑADA $\dot{\psi}$

Las dinámicas de posición de alabeo (ϕ) y tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) están cinemáticamente acopladas. Mediante la MSF (se mostró en la sección anterior, fig. 3.1) es posible observar el acoplamiento a baja frecuencia y no es posible controlar ambas dinámicas independientemente. En [24] se desarrollan las ecuaciones para el cálculo de la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) realizando una vuelta coordinada ($\beta = 0$) con un ángulo de alabeo constante. La ecuación es:

$$\dot{\psi} = \frac{g \tan(\phi)}{V_{P1}} \quad (4.1)$$

En la ec. (4.1) se observa como no es posible controlar ambas dinámicas independientemente ya que están acopladas. Si se busca desacoplar la dinámica, el ángulo de derrape (β) no sería nula y podría generar un daño estructural.

4.2 DISEÑO DEL CONTROL DEL CASO 2: POSICIÓN DE ALABEO ϕ Y ÁNGULO DE DERRAPE β

En esta sección se muestra el diseño del sistema de control para la posición de alabeo (ϕ) y el ángulo de derrape (β). Es importante mencionar que para realizar un viraje coordinado, un piloto se sirve de la observación de estas dos dinámicas (posición de alabeo ϕ y ángulo de derrape β). En la cabina del piloto se sitúa un instrumento llamado inclinómetro, el cual mide la inclinación de la aeronave mediante una esfera dentro de un tubo; si la esfera se encuentra centrada durante el giro, generaría una vuelta coordinada y para ello sería necesario el uso del timón. La maniobra de una vuelta coordinada supone un ángulo de derrape nulo.

4.2.1 CASO 2: ESPECIFICACIONES DE LA MANIOBRA

Al analizarse la dinámica lateral direccional, la maniobra que involucra dicha dinámica es la realización de un giro coordinado. La FAA (*Federal Aviation Administration* por sus siglas en inglés) organismo que certifica las aeronaves estadounidenses, en la FAR 23 sección 23.157, especifica los requerimientos por parte de la aeronave en la vuelta coordinada:

It must be possible, using a favourable combination of controls, to roll the airplane from a steady 30° banked turn through an angle of 60°, so as to reverse the direction of the turn within for an airplane of 6,000 pounds, or less maximum weight, 5 seconds from initiation of roll, and for an airplane of over 6,000 pounds maximum weight, $(W + 500)/1300$ seconds, but not more than 10 seconds, where W is the weight in pounds [28]

Las características de la maniobra se resumen en la tabla 4.1

Tabla 4.1: Especificaciones de la maniobra - vuelta coordinada. [28]

Peso de la Aeronave (lbs)	Tiempo para la maniobra
<6000	<5 segundos
>6000	<(W+500)/1300 (W: peso de la aeronave) pero también <10 segundos

4.2.2 CASO 2: ANÁLISIS DEL ACOPLAMIENTO DEL SISTEMA

Es importante primero analizar el acoplamiento del sistema, y para ello es necesario analizar la MSF del sistema. En la figura 4.1 se muestra el diagrama con algunos puntos importantes a analizar.

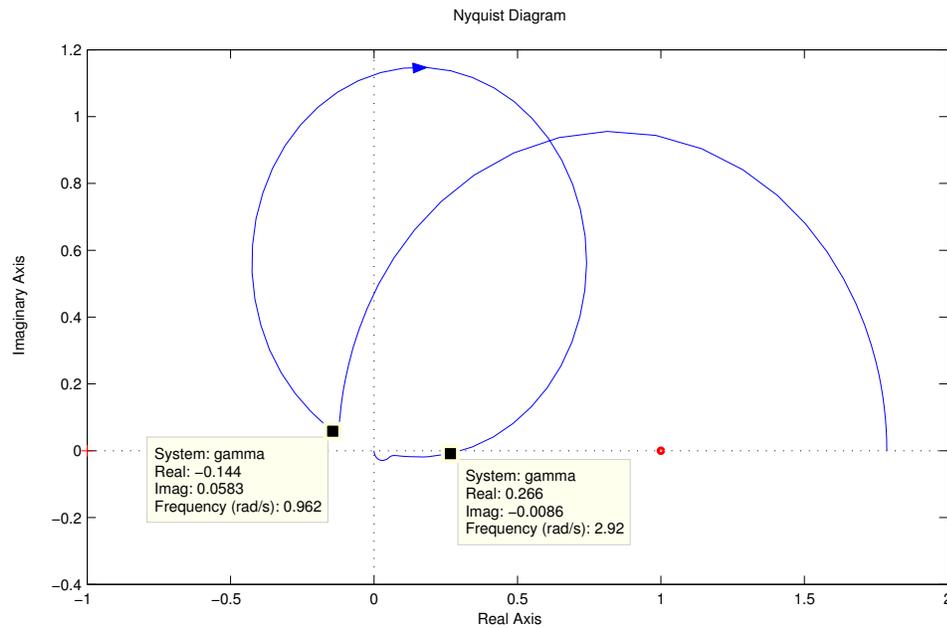


Figura 4.1: Diagrama de Nyquist de la MSF del caso 2.

Como se puede observar en la Fig. 4.1 el acoplamiento ($\gamma(s)$) aumentar cuando la frecuencia (ω) es mayor a 0.962rad/s y el sistema muestra desacoplamiento hasta

$2.92rad/s$. Es necesario conocer la procedencia de ese aumento del acoplamiento y evaluar la posibilidad de reducirlo. De la sección anterior, la matriz de transferencia $G(s)$ está definida cómo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Donde:

$$g_{11}(s) = \frac{12.9262(s^2+0.3025s + 4.969)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{12}(s) = \frac{1.0712(s - 2.639)(s + 2.306)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{21}(s) = \frac{1.2852(s + 2.268)(s + 0.07411)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{22}(s) = \frac{0.037231(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 0.005288)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2+0.2139s + 5.756)}$$

Se calcula la MSF del sistema MIMO:

$$\gamma(s) = \frac{2.8606(s - 2.639)(s + 2.306)(s + 2.268)(s + 0.07411)}{(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 0.005288)(s^2 + 0.3025s + 4.969)} \quad (4.3)$$

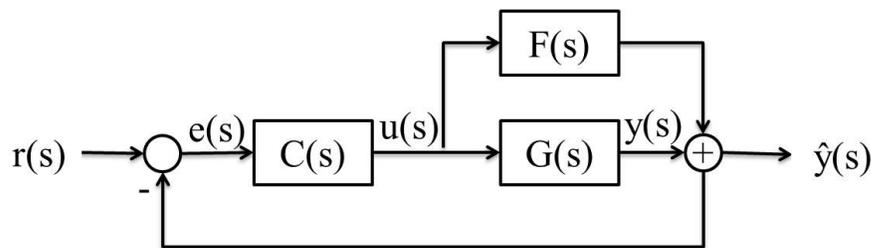


Figura 4.2: Diagrama de bloques de un control de prealimentación.

De la MSF es posible observar que el incremento del acoplamiento es debido a la fase no mínima presente en la función de transferencia $g_{12}(s)$ (entrada de la

deflexión del timón (δ_R) y la salida del ángulo de alabeo (ϕ). Una de las técnicas empleadas para la eliminación de un cero de fase no mínima, es el diseño de un control de prealimentación o *feedforward* (FF). En la fig. 4.2 se muestra el diagrama de bloques de un control de prealimentación. Dicho diagrama puede ser aplicado para sistemas TITO.

Donde:

- $C(s)$ es el controlador diagonal.
- $G(s)$ es la matriz de transferencia del sistema.
- $F(s)$ el control de prealimentación que solo afecta en la función de transferencia deseada. En este caso la función de transferencia $g_{12}(s)$.

Se diseña el controlador de prealimentación para modificar el cero de fase no mínima. El control de prealimentación se muestra en la ec. (4.4).

$$F(s) = \frac{-2.33s(s + 1.236)(s + 0.55)}{(s + 2)(s + 0.85)(s + 0.36)(s^2 + 0.2139s + 5.756)} \quad (4.4)$$

La suma de las funciones de transferencia $g_{12}(s)$ y $F(s)$ daría como resultado una función de transferencia de fase mínima. Asumiendo que :

$$gF_{12}(s) = g_{12}(s) + F(s) \quad (4.5)$$

$$gF_{12}(s) = \frac{-1.2588(s + 1.652)(s + 0.877)(s^2 + 0.3341s + 5.923)}{(s + 2)(s + 1.279)(s + 0.85)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)} \quad (4.6)$$

Una de las condiciones del control de prealimentación es que no se vea afectado en gran medida la función de transferencia, en este caso $g_{12}(s)$. En la fig. 4.3 se muestra el diagrama de bode de ambas funciones ($g_{12}(s)$ y $g_{12}(s) + F(s)$).

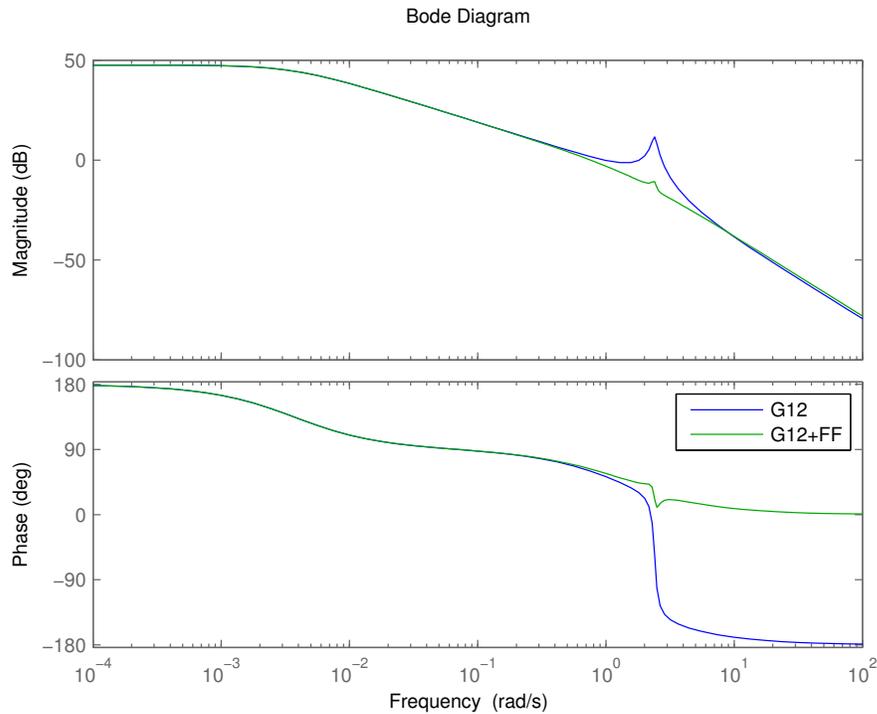


Figura 4.3: Diagrama de Nyquist comparativo de ambas funciones: $g_{12}(s)$ y $g_{12}(s) + F(s)$.

Como se puede observar en la figura 4.3, no se ve afectado en gran medida la función, solo se elimina la fase no mínima y ello conlleva a una pendiente más constante en la frecuencia de corte, así como un cambio de 180° debido a la fase mínima.

Una vez aplicado dicho control, es necesario volver a analizar la MSF y asegurar:

1. La estructura de la MSF no se vio afectada en gran medida.
2. Solo afectó en el rango de operación deseado ($\omega > 0.962 \text{ rad/s}$).

Es necesario volver a calcular la MSF aplicando el control $F(s)$, se procede a calcular la nueva función de estructura multivariable (MSF) (γ). Se sustituye $g_{12}(s)$

por $gF_{12}(s)$ que fue definido en la ec. (4.5), la nueva MSF se define cómo $\gamma_{FF}(s)$ y se define como:

$$\gamma_{FF}(s) = \frac{g_{21}(s)gF_{12}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (4.7)$$

En la ec. (4.8) se muestra la MSF resultante ($\gamma_{FF}(s)$):

$$\gamma_{FF}(s) = \frac{-1.2588(s + 1.652)(s + 0.877)(s + 0.3692)(s^2 + 0.3341s + 5.923)}{(s + 2)(s + 1.279)(s + 0.85)(s + 0.36)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)} \quad (4.8)$$

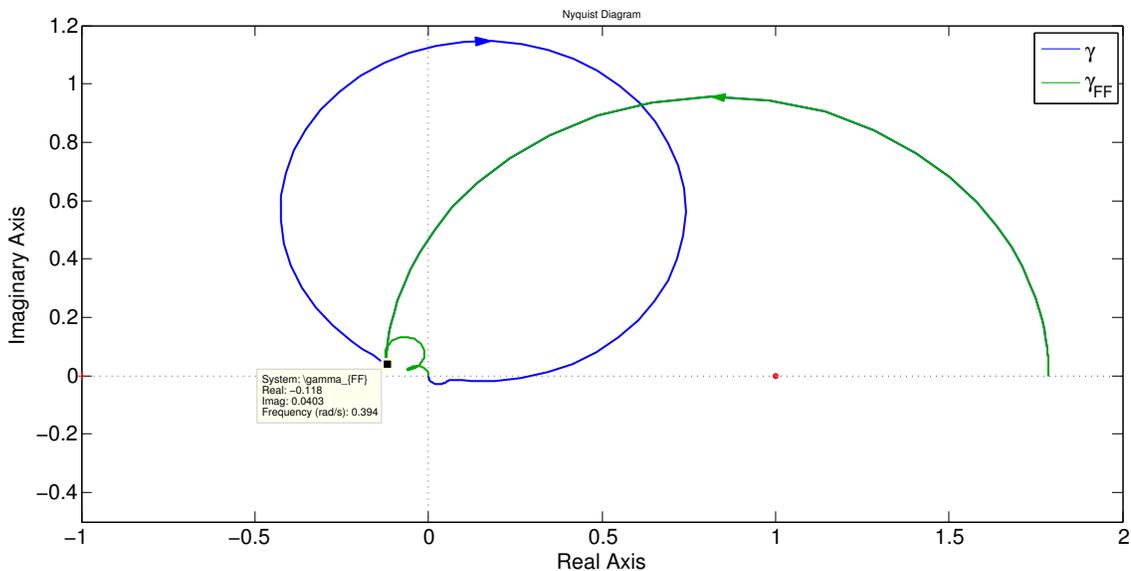


Figura 4.4: Diagrama de Nyquist comparativo de ambas MSF: $\gamma(s)$ y $\gamma_{FF}(s)$.

En la fig. 4.4 se comparan ambas funciones antes y después del control de prealimentación. Se puede observar en el diagrama que no se ve afectada la estructura fuera del rango deseado ($\omega > 0.962rad/s$) y el sistema ahora se encuentra desacoplado en el punto de operación ($\omega = 4rad/s$). La influencia del cero de fase no mínima en la MSF se muestra que era el cambio de giro y aumento de acoplamiento cuando la frecuencia (ω) era mayor a $0.962rad/s$ como se observa en la fig. 4.1. El efecto que causaba el cero de fase no mínima es eliminado utilizando el control de prealimentación como se muestra en la MSF modificada ($\gamma_{FF}(s)$) (ec. 4.8).

4.2.2.1 ANÁLISIS DEL ACOPLAMIENTO UTILIZANDO EL RGA.

Se calcula el arreglo por ganancias relativas (RGA) de la matriz de transferencia:

$$\Lambda(G) = \begin{bmatrix} -1.2701 & 2.2701 \\ 2.2701 & -1.2701 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Como se puede observar en la ec. (4.9), el RGA se calcula en el estado estacionario ($\omega = 0rad/s$) y si nos basamos en los conceptos tendríamos que cambiar el emparejamiento. Por otro lado, se calcula el RGA cuando $\omega = 4rad/s$, mismo que se muestra en la ec. (4.10).

$$\Lambda_4(G) = \begin{bmatrix} 1.1179 & -0.1179 \\ -0.1179 & 1.1179 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Como se puede observar en la ec. (4.10), el RGA indica que el emparejamiento es correcto, pero no describe el comportamiento de la dinámica en otros puntos de operación. En la ec. (4.11) se muestra el RGA cuando ω es igual a $2.5rad/s$.

$$\Lambda_{2.5}(G) = \begin{bmatrix} 3.2823 & -2.2823 \\ -2.2823 & 3.2823 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Si nos basamos en el análisis utilizando el RGA del sistema, este se vuelve muy complejo al tener que considerar diversos puntos. De los RGA anteriores se puede observar la complejidad que representar trabajar con el RGA, no así con la MSF (γ). Así mismo es posible calcular el RGA una vez aplicado el control para la MSF modificada por el control (γ_{FF}). La matriz de transferencia una vez modificada la función de transferencia $g_{12}(s)$ se expresará como $G_{FF}(s)$. Se calcula el RGA para $G_{FF}(s)$:

$$\Lambda(G_{FF}) = \begin{bmatrix} -1.2701 & 2.2701 \\ 2.2701 & -1.2701 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Como se puede observar en la ec. (4.12), el RGA se calcula en el estado estacionario ($\omega = 0rad/s$) y es la misma que la matriz de transferencia sin modificar ($G(s)$). Tener el misma RGA tanto de $G(s)$ y de $G_{FF}(s)$ en $0rad/s$ significa que el control de prealimentación solo afectó a la frecuencia deseada. Por otro lado, a $\omega = 4rad/s$ es diferente y por ello es necesario calcular el RGA. En la ec. (4.13) se muestra el RGA cuando $\omega = 4rad/s$ para $G_{FF}(s)$.

$$\Lambda_4(G_{FF}) = \begin{bmatrix} 1.0473 & -0.0473 \\ -0.0473 & 1.0473 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Como se puede observar en las ecs. (4.10) y (4.13), el RGA es muy similar, lo que nos indica que el emparejamiento es correcto. De la misma forma, no se describe el comportamiento de la dinámica en otros puntos de operación. Así como se calculó el RGA cuando el punto de operación era $2.5rad/s$ de $G(s)$ y se mostró en la ec. (4.11), el RGA de $G_{FF}(s)$ en el mismo punto de operación se muestra en la ec. (4.14).

$$\Lambda_{2.5}(G_{FF}) = \begin{bmatrix} 1.0105 & -0.0105 \\ -0.0105 & 1.0105 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

La diferencia entre ambos RGA cuando el punto de operación es de $2.5rad/s$ es muestra clara de como el control de prealimentación solo afectó el rango deseado. Es importante presentar poco acoplamiento para dar más robustez a la estructura dinámica y con ello diseñar los controladores.

4.2.3 CASO 2: DISEÑO DE CONTROL

Los controles se diseñarán para la matriz de transferencia con el control de prealimentación, para ello haremos uso de la MSF con el control de prealimentación (γ_{FF}). Se propone un control diagonal:

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & 0 \\ 0 & k_{22}(s) \end{bmatrix}$$

El control debe de asegurar robustez y tener un ancho de banda aproximadamente de 4 rad/s que es la frecuencia donde las dinámicas muestran poco acoplamiento. Así mismo es necesario evaluar los canales en lazo abierto ($C_1(s)$ y $C_2(s)$) para asegurar robustez. Los canales se muestran en la eq. (4.38).

$$\begin{aligned} C_1(s) &= k_{11}(s)g_{11}(s)(1 - \gamma_{FF}(s)h_2(s)) \\ C_2(s) &= k_{22}(s)g_{22}(s)(1 - \gamma_{FF}(s)h_1(s)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Donde, $h_1(s)$ es el impacto del controlador $k_{11}(s)$ en el canal-2 ($C_2(s)$) y $h_2(s)$ es el impacto del controlador $k_{22}(s)$ en el canal-1 ($C_1(s)$):

$$h_1(s) = \frac{k_{11}(s)g_{11}(s)}{1 + k_{11}(s)g_{11}(s)}; \quad h_2(s) = \frac{k_{22}(s)g_{22}(s)}{1 + k_{22}(s)g_{22}(s)}$$

Es importante mencionar cómo las funciones de impacto de los controles ($h_1(s)$ y $h_2(s)$) se ven multiplicadas por la MSF. Si la MSF es pequeña, la afectación de un control al otro canal será poco. El poco efecto de un canal en el otro es importante ya que con ello las dinámicas estarían desacopladas y sería más fácil el diseño del controlador.

En base a lo anteriormente mencionado son diseñados los controles $k_{11}(s)$ y $k_{22}(s)$. El control $k_{11}(s)$ se muestra en la ec. (4.16) y $k_{22}(s)$ en la ec. (4.17).

$$k_{11}(s) = \frac{15.4724(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}{s(s + 50)(s^2 + 0.3025s + 4.969)} \quad (4.16)$$

$$k_{22}(s) = \frac{110(s^2 + 0.245s + 5.78)}{s(s + 50)} \quad (4.17)$$

Así mismo, los controles en base a los diagramas de Bode de cada canal en lazo abierto y las respuestas al escalón de cada canal en lazo cerrado ($T(s)$). Donde $T(s)$:

$$T_n(s) = \frac{C_n(s)}{1 + C_n(s)} \quad (4.18)$$

4.2.3.1 CANAL 1

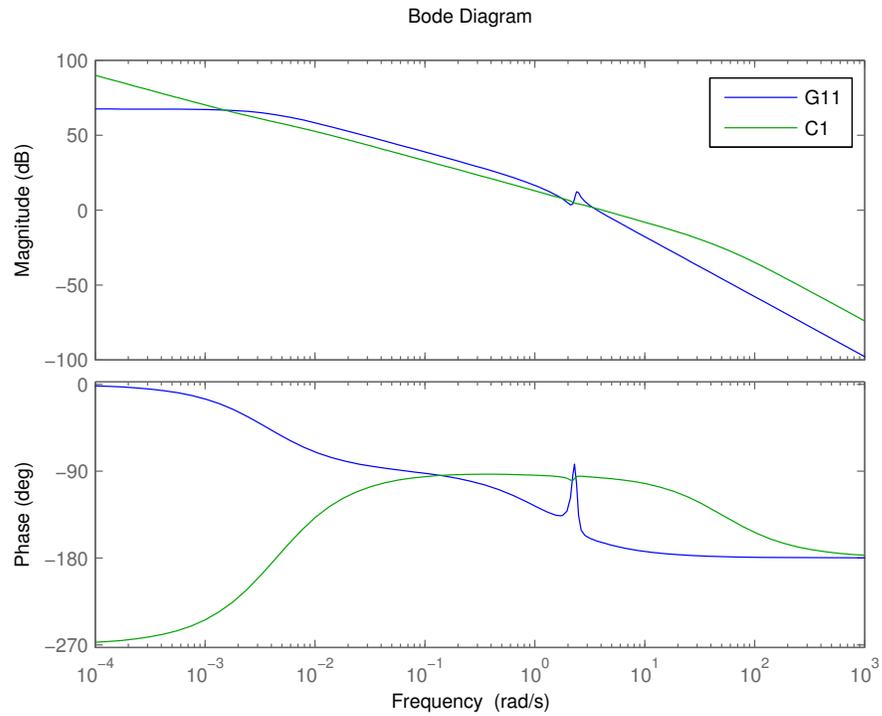
Se analiza el canal-1 (C_1), el diagrama de bode del canal-1, se muestra en la fig.4.5a y la respuesta al escalón de Ten la fig. 4.5b

En la fig. 4.5a se muestra el ancho de banda de 4 *rad/s* y se busca eliminar con el control los picos generados por los zeros y polos con poco amortiguamiento.

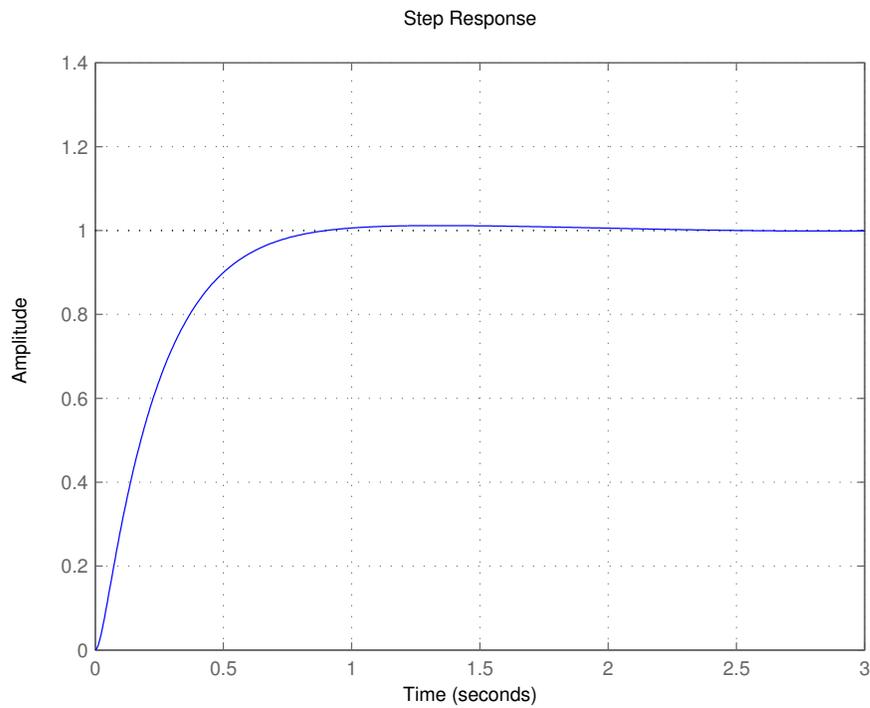
4.2.3.2 CANAL 2

Se analiza el canal-2 ($C_2(s)$), el diagrama de bode del canal-2, se muestra en la fig.4.6a y la respuesta al escalón en la fig. 4.6b.

A diferencia del canal-1, el canal-2 tiene un ancho de banda de 10 *rad/s*, esto con la finalidad de tener mayor rechazo a las perturbaciones. El rechazo a las perturbaciones se observa con claridad en la fig. 4.6b en la respuesta al escalón.

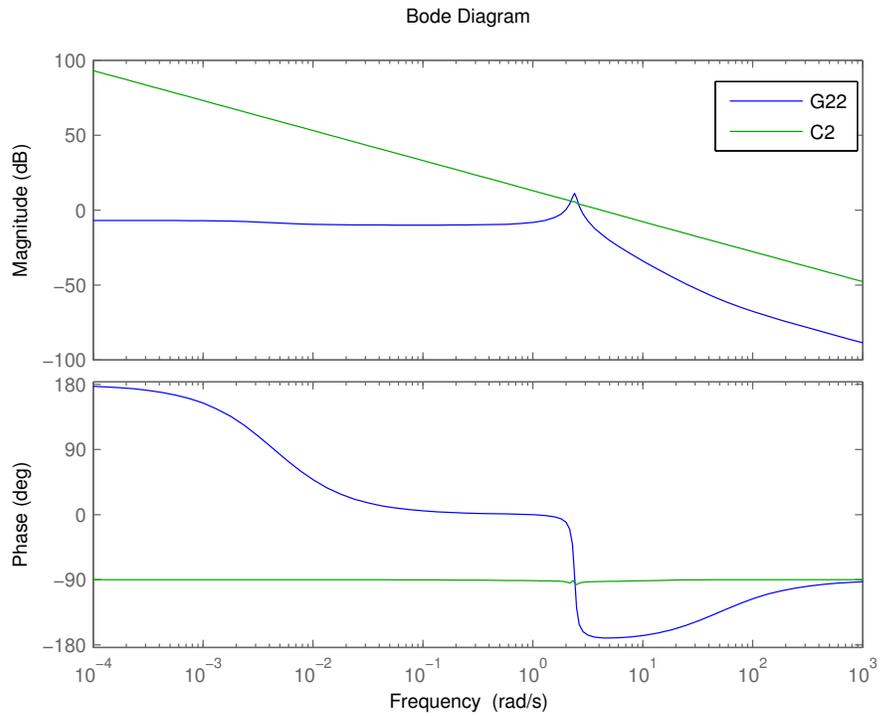


(a) Diagrama de Bode de la planta $g_{11}(s)$ y el canal-1 ($C_1(s)$).

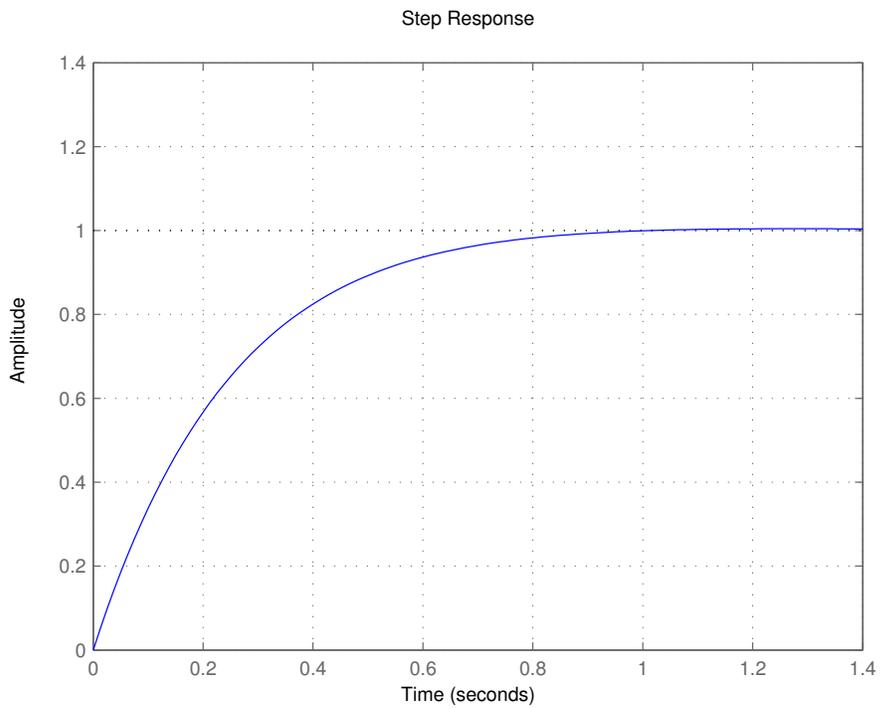


(b) Respuesta al escalón del canal-1 ($T_1(s)$).

Figura 4.5: Canal-1 ($C_1(s)$).



(a) Diagrama de Bode de la planta $g_{22}(s)$ y el canal-2 ($C_2(s)$).



(b) Respuesta al escalón del canal-2 ($T_2(s)$).

Figura 4.6: Canal-2.

4.2.4 CASO 2: DESEMPEÑO DE CONTROLADORES

Para el diseño de los controladores fue empleada la γ_{FF} , que es la MSF con el control de prealimentación. Uno de los problemas para la evaluación del desempeño de los controladores, es que se retroalimenta la señal real del sistema (y). Para poder calcular el desempeño de los controladores, es necesario convertir el control de prealimentación en un precompensador de la planta.

Realizando álgebra de bloques, es posible calcular las salidas del sistema reales con la aplicación del control de prealimentación como se muestra en la fig. 4.7.

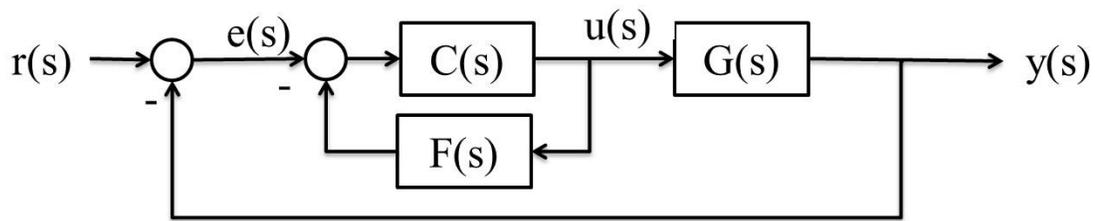


Figura 4.7: Diagrama de bloques en el control de prealimentación y el cálculo de la salida real.

Al ser un sistema MIMO, para calcular el lazo abierto del sistema, es necesario aplicar álgebra matricial. Los controles fueron diseñados en función de la salida estimada o modificada, y la aplicación del control de prealimentación como se muestra en la fig. 4.2. Por ello es necesario analizar y comparar los diagramas de Bode con respecto a ambas salidas y verificar la poca diferencia que debe haber entre ambas salidas (la modificada \hat{y} y la real y).

Realizando álgebra matricial es posible calcular el lazo abierto con respecto a la salida estimada o modificada (\hat{y}) como se muestra en la fig. 4.2. La ecuación de lazo abierto de la fig. 4.2 es con respecto a la salida modificada ($LA_m(s)$) y se muestra en la ec. (4.19), donde $G(s)$ es la matriz de transferencia, $F(s)$ el control de prealimentación y $C(s)$ el control diagonal.

$$LA_m(s) = (G(s) + F(s))C(s) \quad (4.19)$$

Por otro lado, la ecuación de lazo abierto con respecto a la salida real (y) y aplicando el control como se muestra en la fig. 4.7, se muestra en la ec. (4.20). Donde $LA_r(s)$ es el lazo abierto con respecto a la salida real.

$$LA_r(s) = G(s)(I + C(s)F(s))^{-1}C(s) \quad (4.20)$$

Es necesario realizar una comparación de ambos lazos abiertos ($LA_m(s)$ y $LA_r(s)$) para asegurar la poca modificación que existe entre ambas salidas del sistema. La forma más sencilla para realizar dicha comparación es realizando el diagrama de Bode de ambos lazos abiertos, dicho diagrama de Bode se muestra en la fig. 4.8.

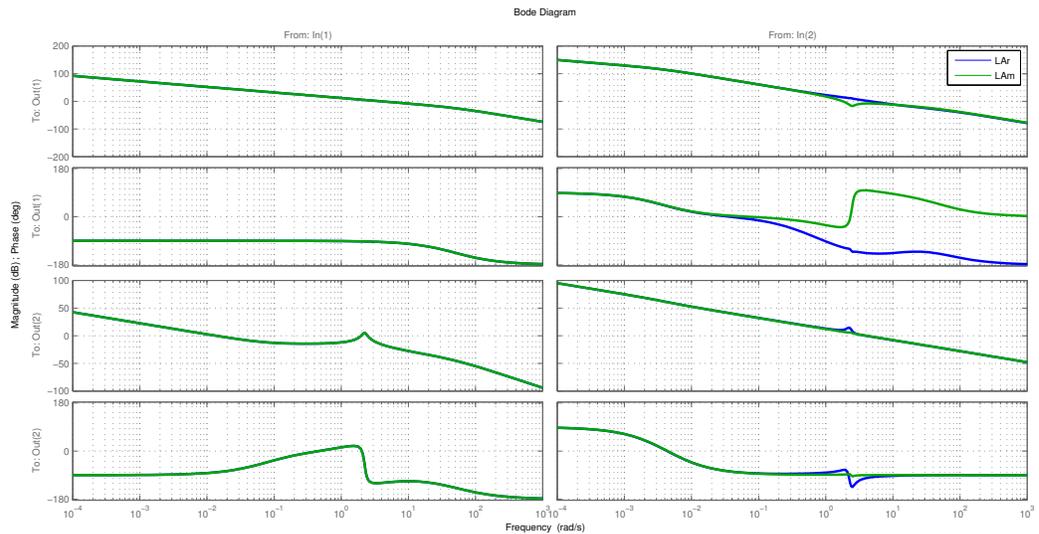


Figura 4.8: Diagrama de Bode de ambos lazos abiertos ($LA_m(s)$ y $LA_r(s)$).

Como se muestra en la fig. 4.8 existe una diferencia significativa en la fase de $g_{12}(s)$ ya que fue la planta que es modificada con el control de prealimentación para la modificación del cero de fase no mínima. Los elementos de la diagonal ($g_{11}(s)$ y $g_{22}(s)$) no muestran mucha diferencia entre ambos lazos abiertos, lo que nos lleva a la

conclusión que los elementos de la diagonal no están siendo modificadas o afectadas en gran medida por el control de prealimentación.

Para evaluar la robustez de los canales mediante los márgenes de fase y ganancia. Dado que el sistema de control empleado contiene el control de prealimentación, el control ya no sería diagonal y las ecuaciones solo consideran el uso de un control diagonal. Por ello, es necesario reescribir el diagrama de tal forma de poder analizar los márgenes de fase y ganancia. El nuevo diagrama a utilizar se muestra en la fig. 4.9.

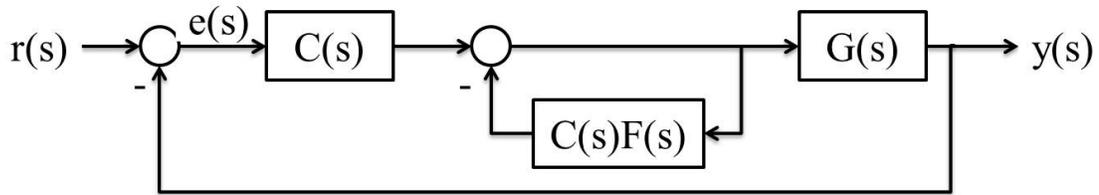


Figura 4.9: Diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

Como se muestra en la fig. 4.9, se considera el control diagonal $C(s)$. Así mismo, se observa que el lazo del control de prealimentación ($C(s)$ y $F(s)$) se puede simplificar, generando la matriz de transferencia $P(s)$, se muestra en la fig. 4.10. La matriz de transferencia $P(s)$ fungiría como un precompensador de la planta. Las matrices de transferencias de los controladores $C(s)$ y $F(s)$ se muestran en las ec. (4.21) y (4.22) respectivamente.

$$C(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & 0 \\ 0 & k_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$F(s) = \begin{bmatrix} 0 & F(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Como se puede observar, es posible calcular la matriz del precompensador $P(s)$.

$$P(s) = (I + C(s)F(s))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & k_{11}(s)F(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{11}(s)F(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde I es una matriz identidad de rango 2. El diagrama de bloques simplificado se muestra en la fig. 4.10.

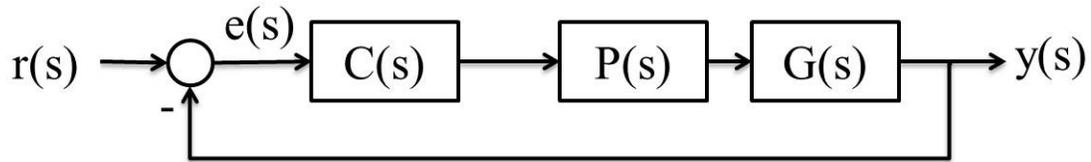


Figura 4.10: Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

Finalmente el diagrama de bloques de la fig. 4.10 es simplificado y se muestra en la fig. 4.11. En la fig. 4.10 se muestra el producto de las matrices de transferencia $G(s)P(s)$, que es la simplificación de los bloques $P(s)$ y $G(s)$ de la fig. 4.10. En la ec. (4.23) se muestra el valor de $G(s)P(s)$ en términos de $C(s)$, $F(s)$ y $G(s)$.

$$G(s)P(s) = G(s)(I + C(s)F(s))^{-1} \quad (4.23)$$

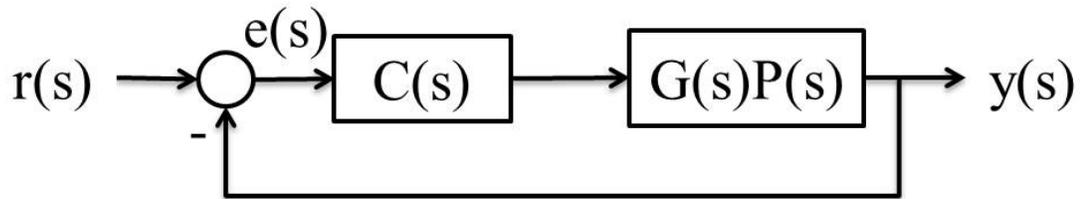


Figura 4.11: Simplificación del diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

Una vez calculado el producto de $G(s)P(s)$, es posible establecer una nueva

matriz de transferencia con el efecto del control de prealimentación. La matriz de transferencia $GP(s)$ se muestra en la ec. (4.25).

$$GP(s) = G(s)P(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -k_{11}(s)F(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$GP(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & -k_{11}(s)g_{11}(s)F(s) + g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$GP(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & GP_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Así mismo, es necesario establecer una nueva MSF en función de los valores de la matriz de transferencia $GP(s)$. En la ec. (4.44) se muestra la función de estructura multivariable (γ_{CFG}) de la matriz de transferencia $GP(s)$.

$$\gamma_{CFG}(s) = \frac{g_{21}(s)GP_{12}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (4.27)$$

En función de la nueva MSF ($\gamma_{CFG}(s)$), es necesario establecer las ecuaciones de los canales ($C_1(s)$ y $C_2(s)$) que se muestra en las ec. (4.28) y (4.29) respectivamente:

$$C_1(s) = k_{11}(s)g_{11}(s)(1 - \gamma_{CFG}(s)h_2(s)) \quad (4.28)$$

$$C_2(s) = k_{22}(s)g_{22}(s)(1 - \gamma_{CFG}(s)h_1(s)) \quad (4.29)$$

Las funciones de acomplamiento h_1 y h_2 son:

$$h_1(s) = \frac{k_{11}(s)g_{11}(s)}{1 + k_{11}(s)g_{11}(s)}; \quad h_2(s) = \frac{k_{22}(s)g_{22}(s)}{1 + k_{22}(s)g_{22}(s)}$$

En las tablas 4.5 y 4.6 se muestran los márgenes de fase y ganancia de los canales 1 y 2. Así mismo, el acoplamiento que presenta el sistema TITO en cada

canal en el término de $\gamma_{CFG}(s)h_2(s)$ para el canal-1 y $\gamma_{CFG}(s)h_1(s)$ para el canal-2, se muestra con el diagrama de Bode (fig. 4.12a) y Nyquist (4.12b) respectivo. De la misma forma, en la fig. 4.12 se muestra la MSF sin los controles aplicados ($\gamma(s)$) y es posible observar el cambio que presentó la MSF con el uso del precompensador ($P(s)$) y los controles respectivamente ($C(s)$) ($\gamma_{CFG}(s)$).

Tabla 4.2: Robustez estructural del canal 1 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$.

Medida	$C_1(s)$	$k_{11}(s)g_{11}(s)$	$\gamma_{CFG}(s)h_2(s)$
Ancho de Banda (rad/s)	4.1926	3.9870	0.0079
Margen de Ganancia (dB)	-58.5884	∞	-5.0441
Margen de Fase (deg)	85.5572	85.4409	62.0424

Tabla 4.3: Robustez estructural del canal 2 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$.

Medida	$C_2(s)$	$k_{22}(s)g_{22}(s)$	$\gamma_{CFG}(s)h_1(s)$
Ancho de Banda (rad/s)	8.9296	8.9368	0.0079
Margen de Ganancia (dB)	∞	∞	-5.0441
Margen de Fase (deg)	90.2818	92.1632	61.9846

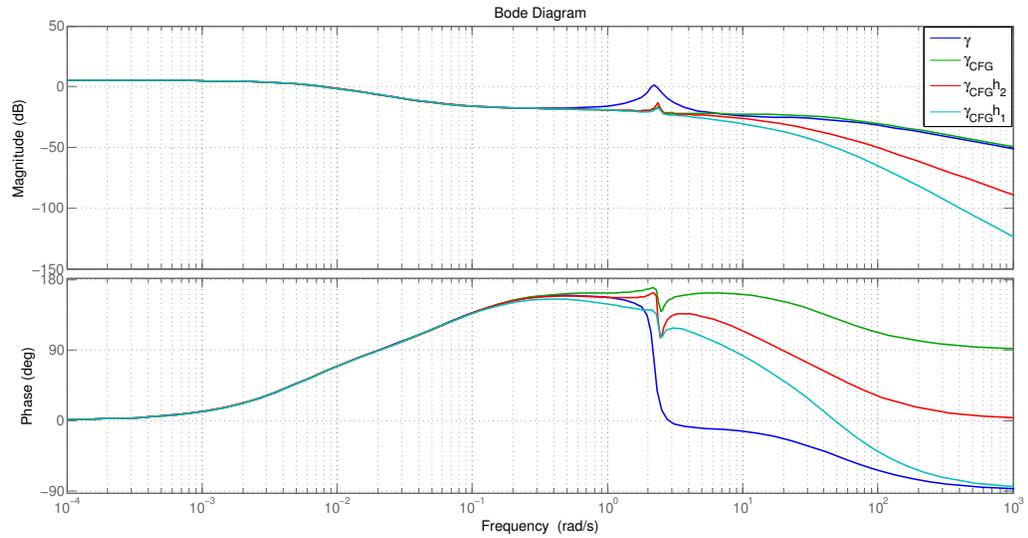
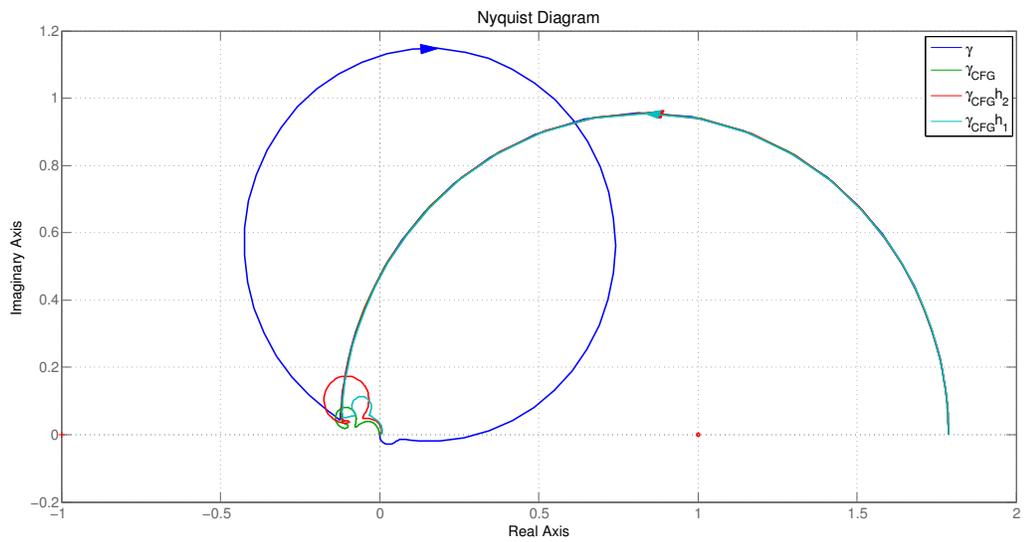
(a) Diagrama de Bode de $\gamma(s)$, $\gamma_{CFG}(s)$, $\gamma(s)h_2(s)$ y $\gamma(s)h_1(s)$.(b) Diagrama de Nyquist de $\gamma(s)$, $\gamma_{CFG}(s)$, $\gamma(s)h_2(s)$ y $\gamma(s)h_1(s)$.

Figura 4.12: Diagramas de Bode y Nyquist de los controles aplicados a la MSF.

4.2.5 CASO 2: SIMULACIÓN

Como ya se mencionó en la descripción de la maniobra, se busca realizar un cambio en el ángulo de alabeo (ϕ) de -30° a 60° en menos de 5.2767 segundos y con un ángulo de derrape (β) nulo o 0° en todo momento. Dada la forma de la referencia del ángulo de alabeo (ϕ) es necesario un prefiltro. El prefiltro utilizado se muestra en la ec. (4.30).

$$\frac{\phi(s)}{r_1(s)} = \frac{10}{s + 10} \quad (4.30)$$

En la fig. 4.13 se muestra el modelo de referencia del ángulo de alabeo (ϕ), así mismo en la fig. 4.14 el modelo del ángulo de derrape (β). En ambas figuras se muestra cómo fue el desarrollo de la aeronave a lo largo de la maniobra. Los esfuerzos de control empleados durante la maniobra se muestran en las figs. 4.15 (deflexión del alerón δ_A) y 4.16 (deflexión del timón de profundidad δ_R).

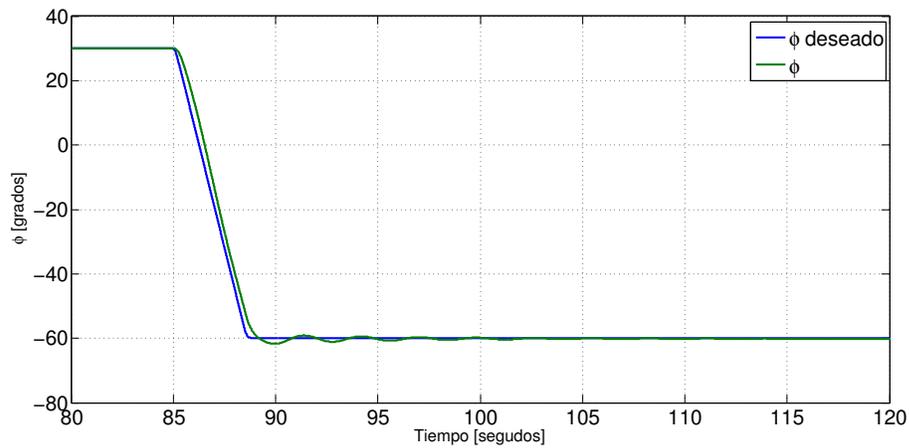
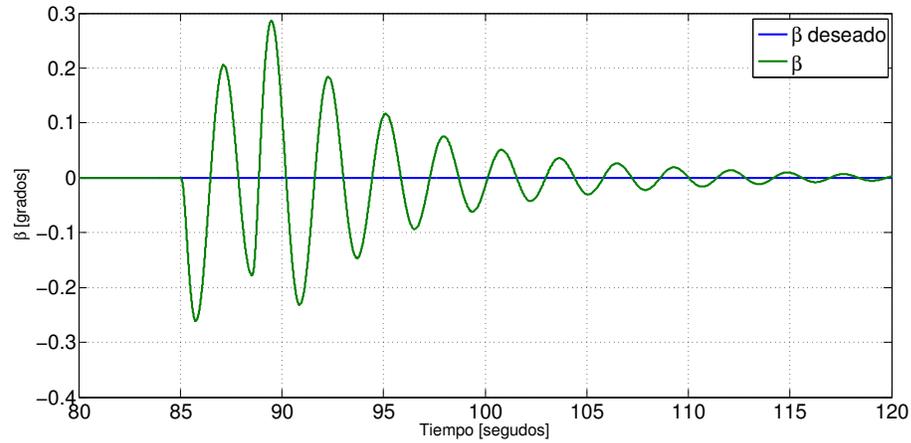
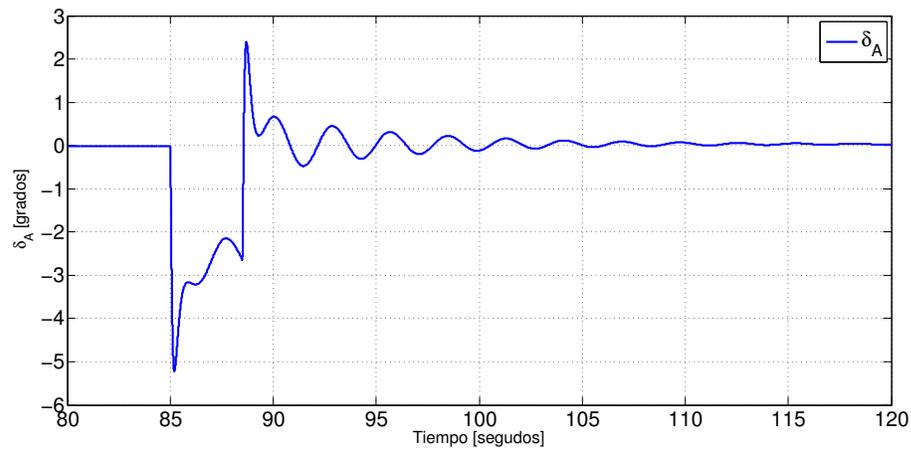
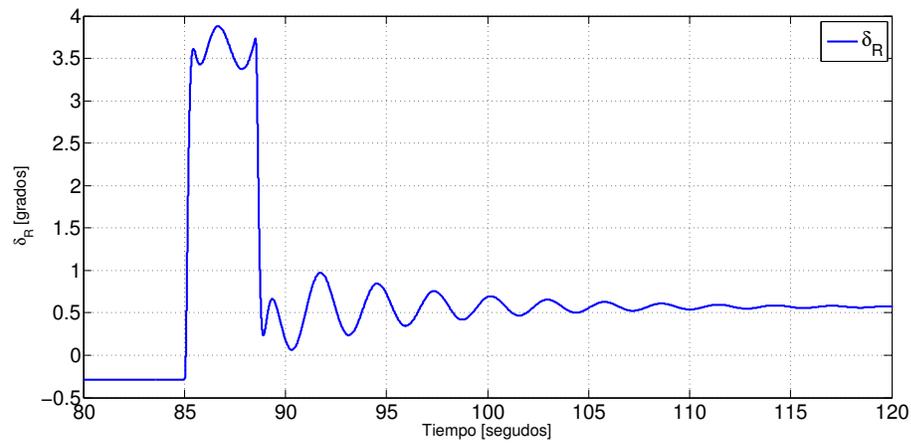


Figura 4.13: Caso 2 - Simulación del ángulo de alabeo (ϕ) vs tiempo.

Figura 4.14: Caso 2 - Simulación del ángulo de derrape (β) vs tiempo.Figura 4.15: Caso 2 - Simulación de la deflexión del alerón (δ_A) vs tiempo.Figura 4.16: Caso 2 - Simulación de la deflexión del timón (δ_R) vs tiempo.

4.2.6 CASO 2: DISCUSIÓN

Se ha realizado la simulación de una de las maniobras requeridas por la FAA. Se puede observar en la fig. 4.13 el cambio de alabeo especificado en la sección 23.157 [28] para la aeronave Cessna T37, así como el ángulo de alabeo (ϕ) por parte de la aeronave. En la misma figura se observa como llega en tiempo y con un poco de oscilación, pero el tiempo de establecimiento es el indicado en la especificación. Por otro lado, en la fig. 4.14 el ángulo de derrape (β) se puede considerar como nulo al ser menor a 0.3 grados durante toda la maniobra. Finalmente, en las figs. 4.15 y 4.16 que describen el esfuerzo de control de las deflexiones del alerón (δ_A) y del timón (δ_R), se puede observar que los ángulos necesarios no son muy grandes (deflexiones menores a 5°). Por otro lado, el cambio de las deflexiones son posibles para un servomotor y solo un piloto con una gran experiencia sería posible de realizar la maniobra.

4.3 DISEÑO DEL CONTROL DEL CASO 3: TASA DE CAMBIO DE GUIÑADA $\dot{\psi}$ Y ÁNGULO DE DERRAPE β

En esta sección se diseñará el sistema de control para la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) y el ángulo de derrape (β). En ocasiones es necesario cuidar la tasa de cambio de guiñada cuando se busca girar cierta cantidad de grados. Las unidades de medición inercial o IMU (por sus siglas en inglés *inertial measure unit*) suelen ser instrumentos que calculan las aceleraciones de la aeronave y es posible medir la tasa de cambio de guiñada en ese momento.

4.3.1 CASO 3: ESPECIFICACIONES DE LA MANIOBRA

Dado que la dinámica de la posición de alabeo (ϕ) y la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) están cinemáticamente acopladas, se utiliza la formula establecida en [24] para convertir la maniobra de posición de alabeo (ϕ) establecida en la sección anterior a tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$). La relación entre ambas está dada por:

$$\dot{\psi} = \frac{g \tan(\phi)}{V_{P1}} \quad (4.31)$$

Considerando la velocidad de la aeronave de 456 ft/s (139 m/s), en la tabla 4.4 se muestra la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) correspondiente para 30° y -60° .

Tabla 4.4: Valores de la Maniobra

ϕ (grados)	$\dot{\psi}$ (rad/s)	$\dot{\psi}$ (deg/s)
30°	0.0409	2.3346
-60°	-0.1222	-7.0039

4.3.2 CASO 3: ANÁLISIS DEL ACOPLAMIENTO DEL SISTEMA

De la misma forma que en el caso anterior, es necesario analizar mediante la MSF el acoplamiento del sistema. En la fig. 4.17 se muestra la MSF de la matriz de transferencia del caso 3, así como algunos puntos importantes.

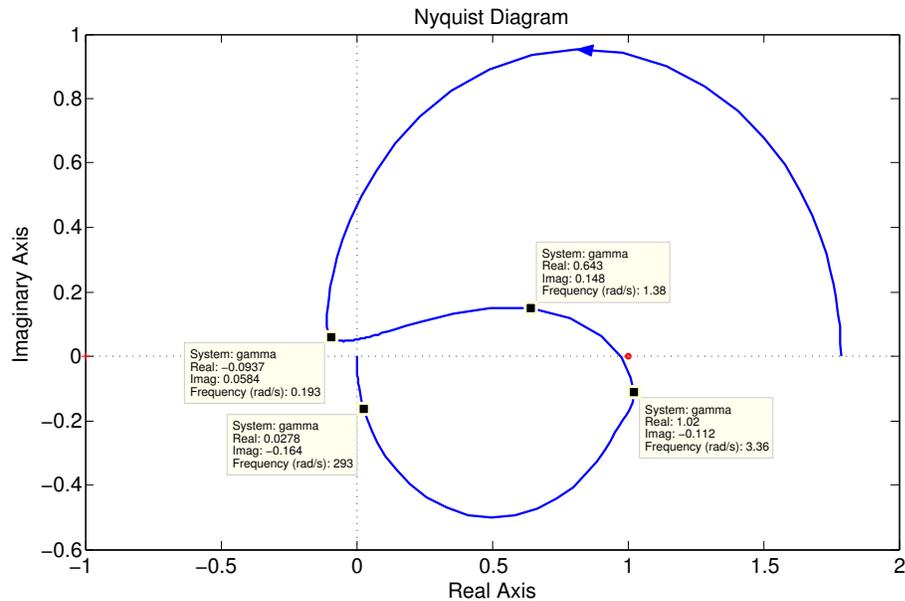


Figura 4.17: Diagrama de Nyquist de la MSF del Caso 3.

En la fig. 4.17 se muestran puntos importantes del diagrama de Nyquist, donde es posible resaltar:

- Existe poco acoplamiento del sistema a 0.193 rad/s , pero posteriormente comienza a aumentar.
- El punto $(1,0)$ del diagrama de Nyquist es crítico, ya que puede volver singular la matriz de transferencia.
- Entre 1.38 rad/s y 3.36 rad/s se encuentra muy cercano al punto $(1,0)$, señal de una estructura dinámica frágil (generar un giro al punto $(1,0)$ produciría un cambio del número de polos del sistema) y cualquier perturbación paramétrica provocaría un cambio.

- Poco acoplamiento en altas frecuencias.

De la sección anterior, la matriz de transferencia $G(s)$ está definida cómo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Donde:

$$g_{11}(s) = \frac{-1.2952(s - 1.093)(s^2 + 2.786s + 3.18)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{12}(s) = \frac{-1.8612(s + 1.333)(s^2 - 0.1853s + 0.184)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{21}(s) = \frac{1.2852(s + 2.268)(s + 0.07411)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

$$g_{22}(s) = \frac{0.037231(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 0.005288)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)}$$

Y la MSF del sistema es:

$$\gamma(s) = \frac{49.603(s + 2.268)(s + 1.333)(s + 0.07411)(s^2 - 0.1853s + 0.184)}{(s + 50.06)(s + 1.244)(s - 1.093)(s - 0.005288)(s^2 + 2.786s + 3.18)} \quad (4.33)$$

Similar al caso anterior, la fase no mínima del elemento $g_{12}(s)$ provoca el aumento del acoplamiento ($\omega > 0.193 \text{ rad/s}$) y con un control de prealimentación es posible reducir dicho valor. Se propone un control de prealimentación con la estructura mostrada en la fig. 4.18.

El control de prealimentación empleado se muestra en la ec. (4.34).

$$F(s) = \frac{1.8612(s + 1.334)(s - 0.1832)(s - 0.002509)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)} \quad (4.34)$$

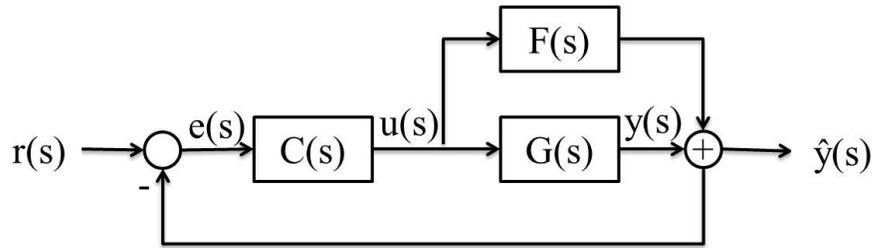


Figura 4.18: Diagrama de bloques de un control de prealimentación.

El producto de la suma de la función de transferencia ($g_{12}(s)$) y el control de prealimentación ($F(s)$):

$$gF_{12}(s) = g_{12}(s) + F(s) \quad (4.35)$$

$$gF_{12}(s) = \frac{-0.0000429(s + 7982)(s + 1.33)}{(s + 1.279)(s + 0.003704)(s^2 + 0.2139s + 5.756)} \quad (4.36)$$

Dado que el control de prealimentación se busca que solo afecte en el rango deseado, el comparativo de ambas funciones de transferencia ($g_{12}(s)$ y $gF_{12}(s)$) se muestra en la fig. 4.19 mediante el diagrama de bode.

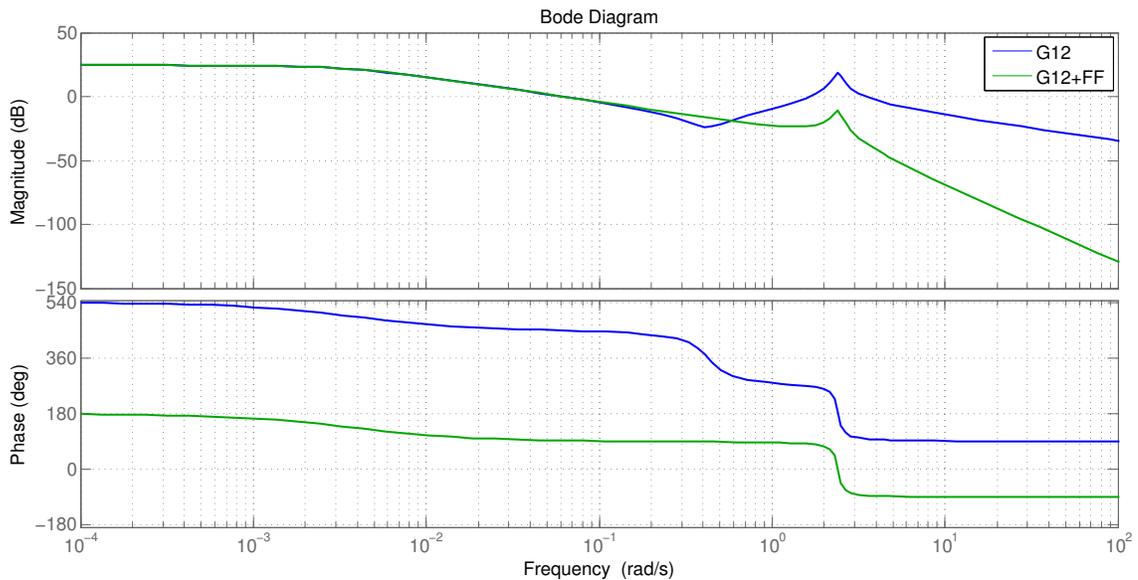


Figura 4.19: Diagrama de Bode de ambas funciones de transferencia $g_{12}(s)$ y $gF_{12}(s)$.

De la fig. 4.19 se observa cómo el control de prealimentación solo afecta el rango deseado (1.38 y 3.36 rad/s) al disminuir la magnitud. De la misma forma, es necesario calcular la MSF con el control aplicado (γ_{FF}), donde se sustituye $g_{12}(s)$ de la ecuación de $\gamma(s)$ por $gF_{12}(s)$. En la ec. (4.37) se muestra el $\gamma_{FF}(s)$ en términos de matriz de transferencia:

$$\gamma_{FF}(s) = \frac{g_{21}(s)gF_{12}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (4.37)$$

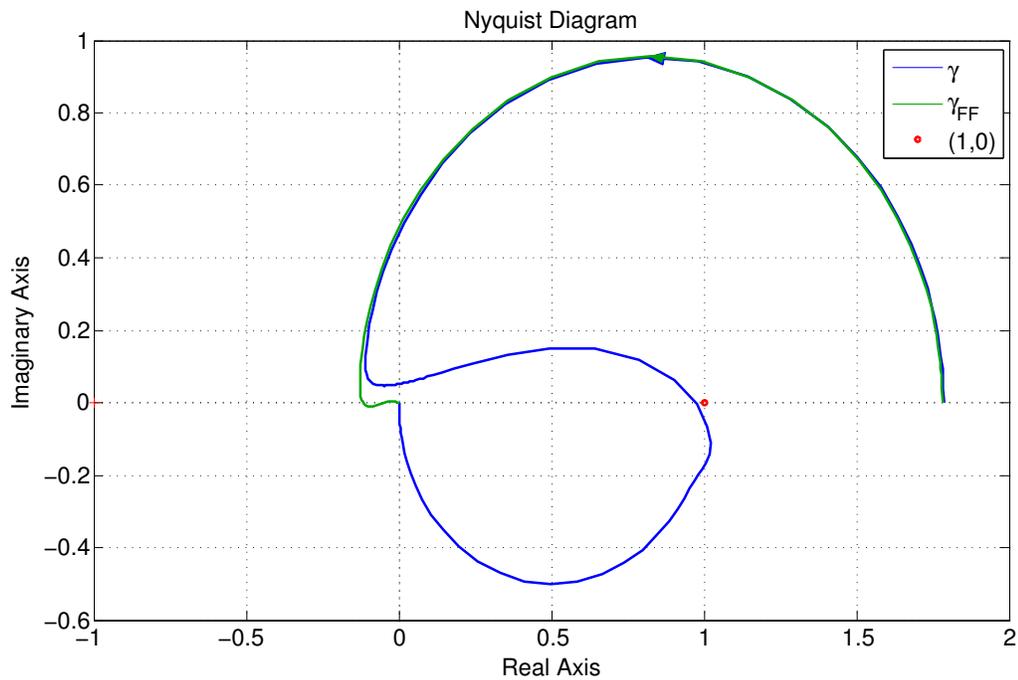


Figura 4.20: Comparación de $\gamma(s)$ y $\gamma_{FF}(s)$ mediante un diagrama de Nyquist-

En la fig. 4.20 se comparan ambas funciones antes y después del control de prealimentación. Se observa como disminuye el acoplamiento y el aumento que sucedía en el rango de 1.38 a 3.36 rad/s y se acercaba al punto (1,0) fue eliminado. La MSF ya no presenta una fragilidad estructural al pasar cerca del punto (1,0).

4.3.3 CASO 3: DISEÑO DE CONTROL

Los controles se diseñarán para la matriz de transferencia con el control de prealimentación, para ello haremos uso de la MSF con el control de prealimentación (γ_{FF}). Se propone un control diagonal:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & 0 \\ 0 & k_{22}(s) \end{bmatrix}$$

El control debe de asegurar robustez al evaluarlos en los canales en lazo abierto ($C_1(s)$ y $C_2(s)$). Los canales se muestran en la eq. (4.38).

$$\begin{aligned} C_1(s) &= k_{11}(s)g_{11}(s)(1 - \gamma_{FF}(s)h_2(s)) \\ C_2(s) &= k_{22}(s)g_{22}(s)(1 - \gamma_{FF}(s)h_1(s)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Donde, $h_1(s)$ es el impacto del controlador $k_{11}(s)$ en el canal-2 ($C_2(s)$) y $h_2(s)$ es el impacto del controlador $k_{22}(s)$ en el canal-1 ($C_1(s)$):

$$h_1(s) = \frac{k_{11}(s)g_{11}(s)}{1 + k_{11}(s)g_{11}(s)}; \quad h_2(s) = \frac{k_{22}(s)g_{22}(s)}{1 + k_{22}(s)g_{22}(s)}$$

Las funciones del impacto de los controladores ($h_1(s)$ y $h_2(s)$) al ser multiplicadas por la MSF; si hay poco acoplamiento ($\gamma(s) \approx 0$), significa que el control de un canal no tiene impacto en el otro canal.

En base a lo anteriormente mencionado son diseñados los controles $k_{11}(s)$ y $k_{22}(s)$. El control $k_{11}(s)$ se muestra en la ec. (4.39) y k_{22} en la ec. (4.40).

$$k_{11}(s) = \frac{0.29(s + 1.28)(s + 0.0037)(s^2 + 0.2147s + 5.76)}{s(s + 1.09)(s^2 + 2.79s + 3.18)} \quad (4.39)$$

$$k_{22}(s) = \frac{110(s^2 + 0.245s + 5.78)}{s(s + 50)} \quad (4.40)$$

Así mismo, los controles en base a los diagramas de Bode de cada canal en lazo abierto y las respuestas al escalón de cada canal en lazo cerrado ($T(s)$). Donde $T(s)$:

$$T_n(s) = \frac{C_n(s)}{1 + C_n(s)} \quad (4.41)$$

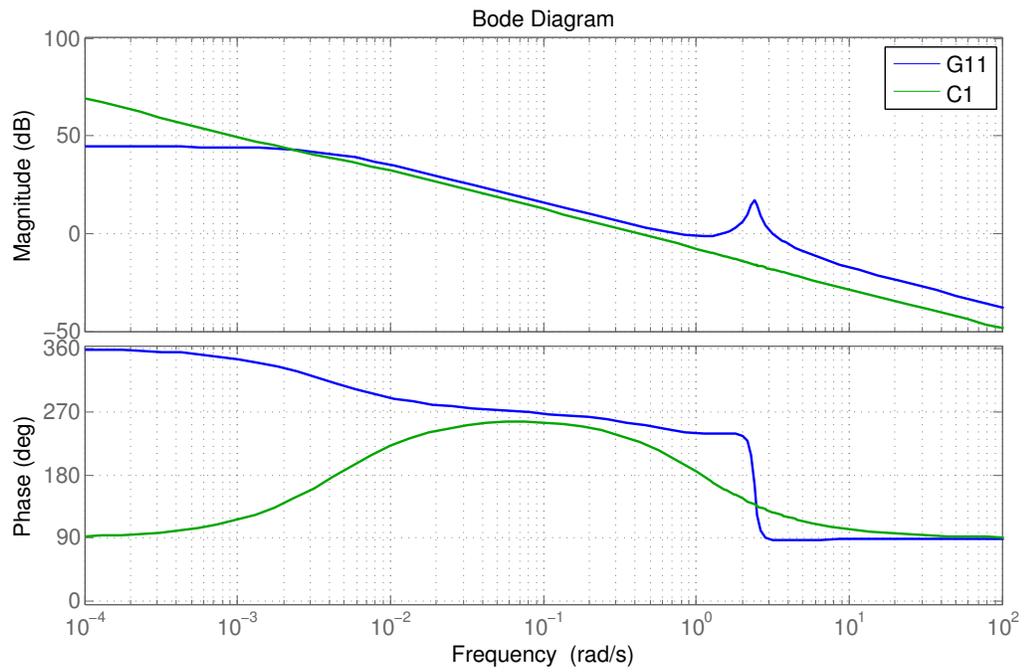
4.3.3.1 CANAL 1

Se analiza el canal-1 ($C_1(s)$), el diagrama de bode del canal-1, se muestra en la fig.4.21a. Así mismo, en la fig. 4.21b la respuesta al escalón del canal-1.

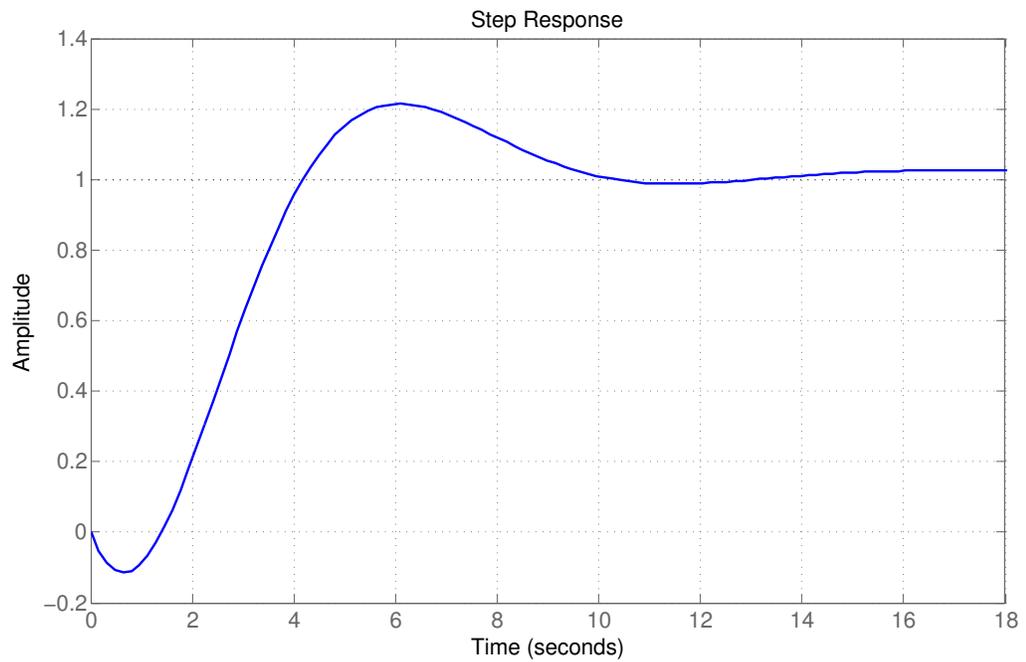
En las fig. 4.21 se observa un como se elimina la pico de $g_{11}(s)$, por otro lado, el ancho de banda no es tan alto. Si el ancho de banda es cercano a el cero de fase no mínima, este no responderá.

4.3.3.2 CANAL 2

En las fig. 4.22 se observa un como se elimina la pico de $g_{22}(s)$ para producir el *roll-off* deseado en la frecuencia de corte; además, el ancho de banda se incrementa, esto con la finalidad de tener una mejor respuesta al escalón. Se analiza el canal-2 ($C_2(s)$), el diagrama de bode del canal-2, se muestra en la fig.4.22a.

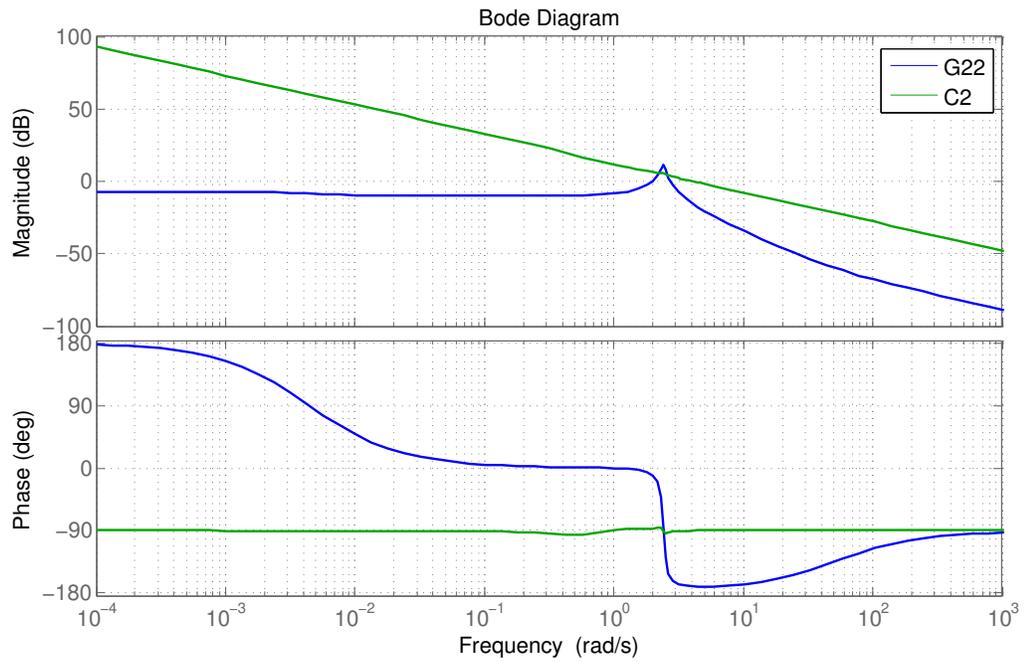


(a) Diagrama de Bode de la planta $g_{11}(s)$ y el canal-1 ($C_1(s)$).

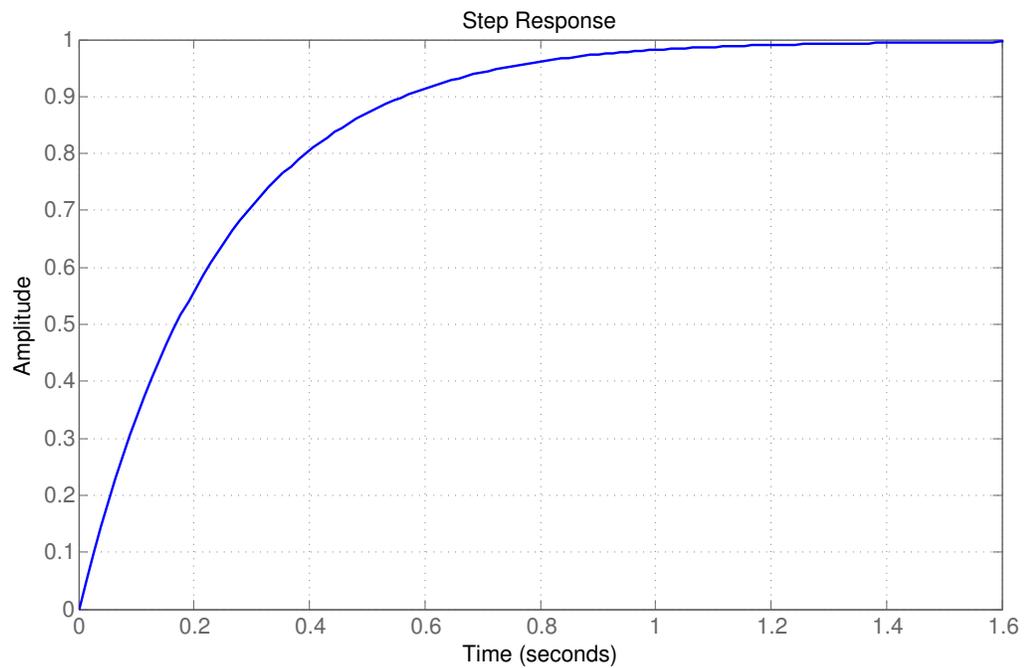


(b) Respuesta al escalón del canal-1 $T_1(s)$.

Figura 4.21: Canal 1 ($C_1(s)$).



(a) Diagrama de Bode de la planta $g_{22}(s)$ y el canal-2 ($C_2(s)$).



(b) Respuesta al escalón del canal-2 ($T_2(s)$).

Figura 4.22: Canal-2 ($C_2(s)$).

4.3.4 CASO 3: DESEMPEÑO DE CONTROLADORES

Así como en el caso 2, fue empleada la MSF con el de prealimentación ($\gamma_{FF}(s)$) para el diseño de los controles, pero no se retroalimenta el sistema con la salida real (y). Es necesario evaluar los controles para la salida real. Por ello, el control de prealimentación se considera para el diseño del precompensador de la planta ($P(s)$). En el caso 2 se muestra el desarrollo para el diseño del precompensador ($P(s)$) en base al álgebra de bloques.

Para el diseño de los controladores fue empleada la γ_{FF} , que es la MSF con el control de prealimentación. Uno de los problemas para la evaluación del desempeño de los controladores, es que no retroalimenta el sistema con la señal real del sistema (y). Para poder calcular el desempeño de los controladores, es necesario convertir el control de prealimentación en un precompensador de la planta. En la fig. 4.23 se muestra el diagrama con el control de prealimentación empleado como precompensador.

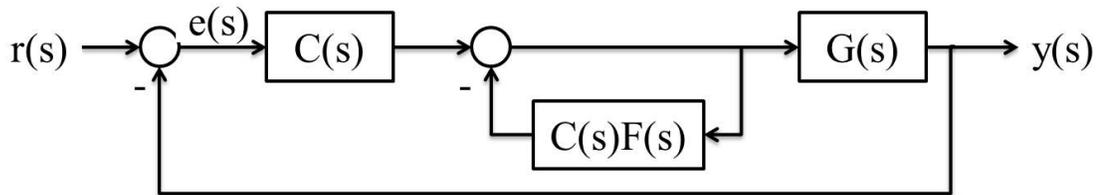


Figura 4.23: Diagrama de bloques para el análisis de los márgenes de fase y ganancia.

Así como en el caso 2, es necesario evaluar los controles ya que fueron diseñados en función de la salida estimada o modificada, y la aplicación del control de prealimentación y mediante los diagramas de bode con respecto a ambas salidas es posible establecer si existe poca diferencia entre ambas salidas (la modificada $\hat{y}(s)$ y la real $y(s)$).

La ecuación de lazo abierto con respecto a la salida modificada ($LA_m(s)$) y con respecto a la salida real ($LA_r(s)$) se muestra en la ecs. (4.42) y (4.43) respectiva-

mente.

$$LA_m(s) = (G(s) + F(s))C(s) \quad (4.42)$$

$$LA_r(s) = G(s)(I + C(s)F(s))^{-1}C(s) \quad (4.43)$$

El diagrama de Bode de ambos lazos abiertos $(LA_m(s)$ y $LA_r(s))$ se muestran en la fig. 4.24 donde es posible asegurar la poca modificación que existe entre ambas salidas del sistema.

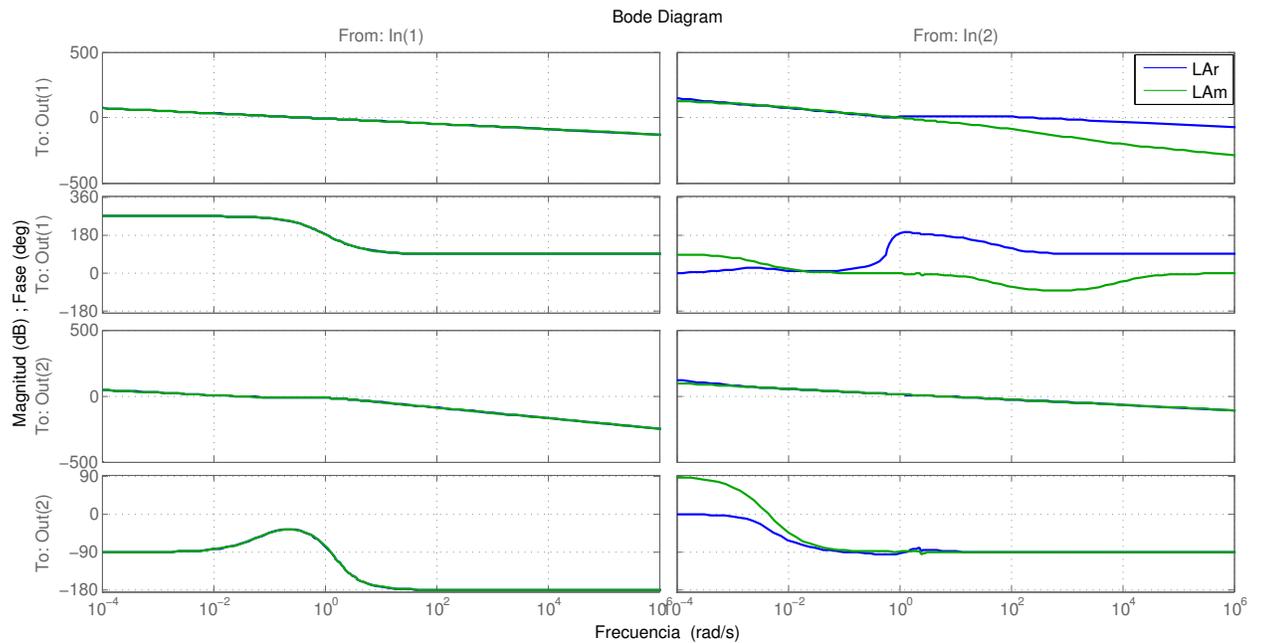


Figura 4.24: Diagrama de Bode de ambos lazos abiertos $(LA_m(s)$ y $LA_r(s))$.

Como se muestra en la fig. 4.24 existe una diferencia significativa en la fase de $g_{12}(s)$ ya que fue la planta que es modificada con el control de prealimentación para la modificación del cero de fase no mínima. Por otro lado, el elemento de la diagonal $g_{11}(s)$ no muestran mucha diferencia, más o no así $g_{22}(s)$, lo que nos lleva a la conclusión parcialmente las plantas de la diagonal están siendo modificadas o afectadas por el control de prealimentación.

Para evaluar la robustez de los canales mediante los márgenes de fase y ganancia es necesario realizar un re-ordenamiento. Dado que el sistema de control empleado contiene el control de prealimentación, el control ya no sería diagonal y las ecuaciones solo consideran el uso de un control diagonal. En el caso 2 fue determinada la MSF del precompensador ($P(s)$) y la matriz de transferencia ($G(s)$), a la cual fue declarada como $\gamma_{CFG}(s)$:

$$\gamma_{CFG}(s) = \frac{g_{21}(s)GP_{12}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (4.44)$$

donde $GP_{12}(s)$ es:

$$GP_{12}(s) = -k_{11}(s)g_{11}(s)F(s) + g_{12}(s) \quad (4.45)$$

Las ecuaciones de los canales (C_1 y C_2) en función de $\gamma_{CFG}(s)$ se muestra en las ec. (4.46) y (4.47) respectivamente:

$$C_1(s) = k_{11}(s)g_{11}(s)(1 - \gamma_{CFG}(s)h_2(s)) \quad (4.46)$$

$$C_2(s) = k_{22}(s)g_{22}(s)(1 - \gamma_{CFG}(s)h_1(s)) \quad (4.47)$$

Las funciones de acoplamiento h_1 y h_2 son:

$$h_1(s) = \frac{k_{11}(s)g_{11}(s)}{1 + k_{11}(s)g_{11}(s)}; \quad h_2(s) = \frac{k_{22}(s)g_{22}(s)}{1 + k_{22}(s)g_{22}(s)}$$

En las tablas 4.5 y 4.6 se muestran los márgenes de fase y ganancia para la robustez de los canales 1 y 2. Así mismo, el acoplamiento se puede apreciar en términos de $\gamma_{CFG}(s)h_2(s)$ para el canal 1 y $\gamma_{CFG}(s)h_1(s)$ para el canal 2. En las figs. 4.25a y 4.25b se muestran los diagramas de Bode y Nyquist de las funciones $\gamma_{CFG}(s)h_2(s)$ y $\gamma_{CFG}(s)h_1(s)$. De la misma forma, en la fig. 4.25 se muestra la MSF sin los controles aplicados ($\gamma(s)$) y es posible observar el cambio que presentó la

MSF con el uso del precompensador ($P(s)$) y los controles respectivamente ($C(s)$) ($\gamma_{CFG}(s)$).

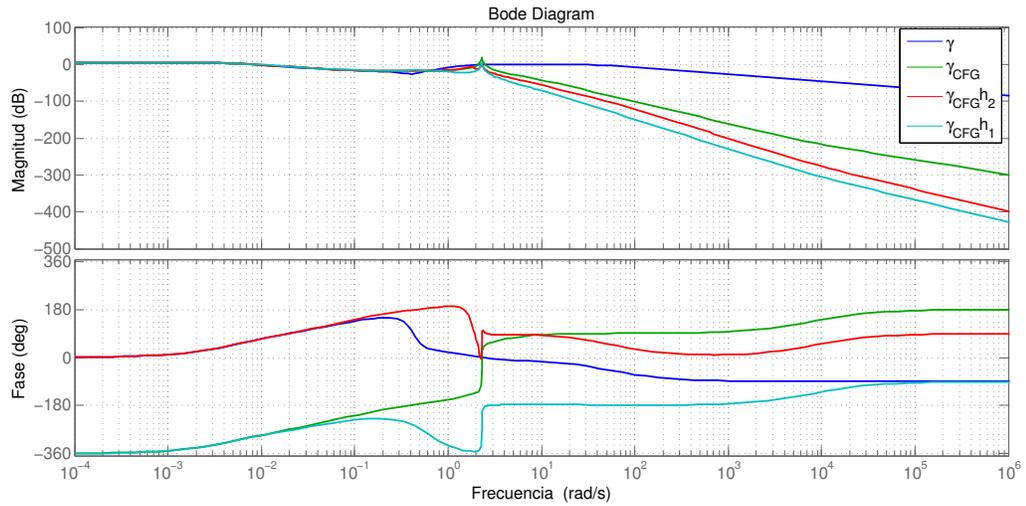
Tabla 4.5: Robustez estructural del canal 1 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$.

Medida	$C_1(s)$	$k_{11}(s)g_{11}(s)$	$\gamma_{CFG}(s)h_2(s)$
Ancho de Banda (rad/s)	0.4282	0.3770	0.0079
Margen de Ganancia (dB)	8.0774	9.2474	-5.0537
Margen de Fase (deg)	46.9666	51.8707	62.5272

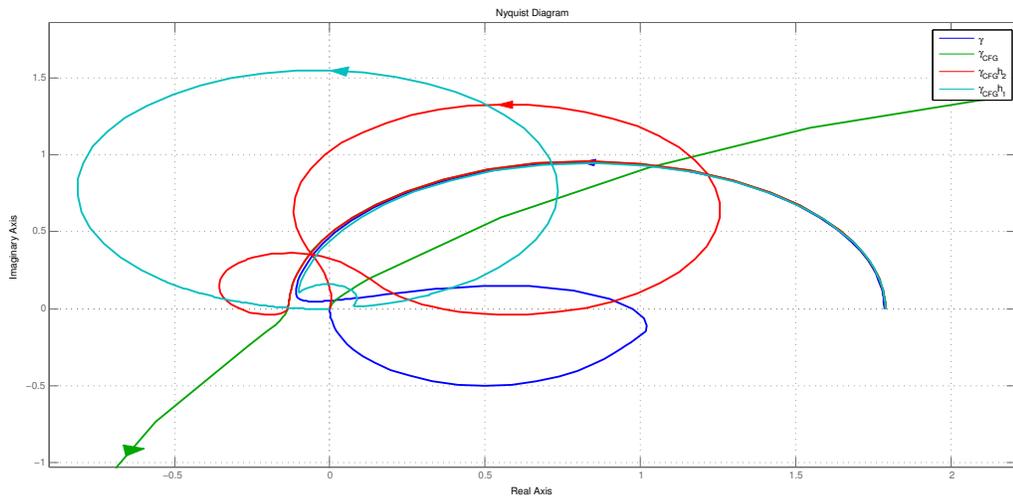
Tabla 4.6: Robustez estructural del canal 2 y los controladores empleados en $\gamma_{CFG}(s)$.

Medida	$C_2(s)$	$k_{22}(s)g_{22}(s)$	$\gamma_{CFG}(s)h_1(s)$
Ancho de Banda (rad/s)	1.6858	1.7169	2.2660
Margen de Ganancia (dB)	28.8370	29.7947	-5.0537
Margen de Fase (deg)	51.9314	51.7999	43.1156

En la tabla 4.5 se muestran los márgenes del canal 1, donde no es posible cumplir con los márgenes de ganancia, pero los de fase se cumple en cierta medida. Por otro lado, en la tabla 4.6, correspondiente a los márgenes del canal 2, se cumplen los márgenes de fase y ganancia.



(a) Diagrama de Bode de $\gamma(s)$, $\gamma_{CFG}(s)$, $\gamma(s)h_2(s)$ y $\gamma(s)h_1(s)$.



(b) Diagrama de Nyquist de $\gamma(s)$, $\gamma_{CFG}(s)$, $\gamma(s)h_2(s)$ y $\gamma(s)h_1(s)$.

Figura 4.25: Diagramas de Bode y Nyquist de los controles aplicados a la MSF.

4.3.5 CASO 3: SIMULACIÓN

Como ya se describió la maniobra a realizar, se busca pasar de una tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) de $0.0409rad/s$ a $-0.1222rad/s$, con un ángulo de derrape (β) nulo o 0. Se realiza la simulación con la maniobra a realizar y se observa el resultado en la siguientes gráficas.

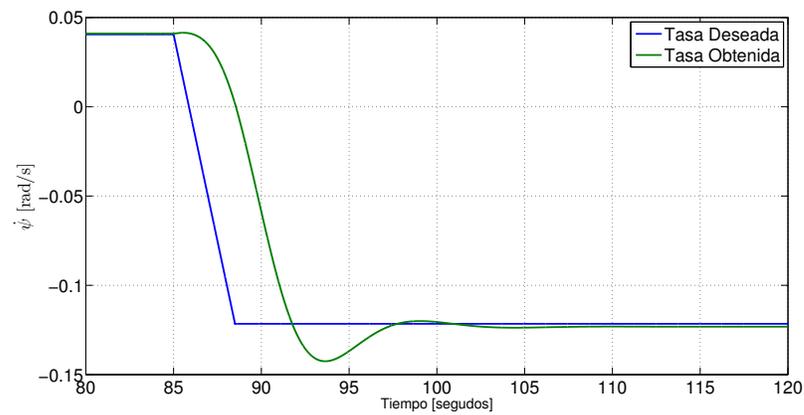


Figura 4.26: Caso 3 - Simulación de la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) vs tiempo.

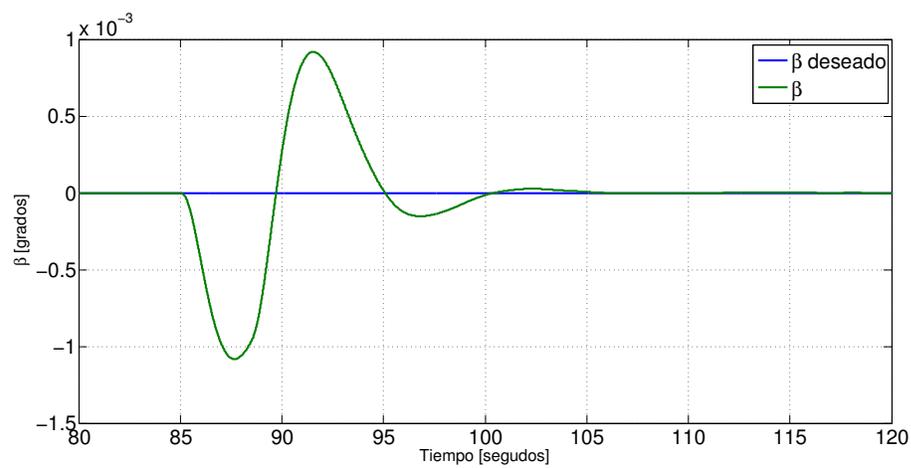


Figura 4.27: Caso 3 - Simulación del ángulo de derrape (β) vs tiempo.

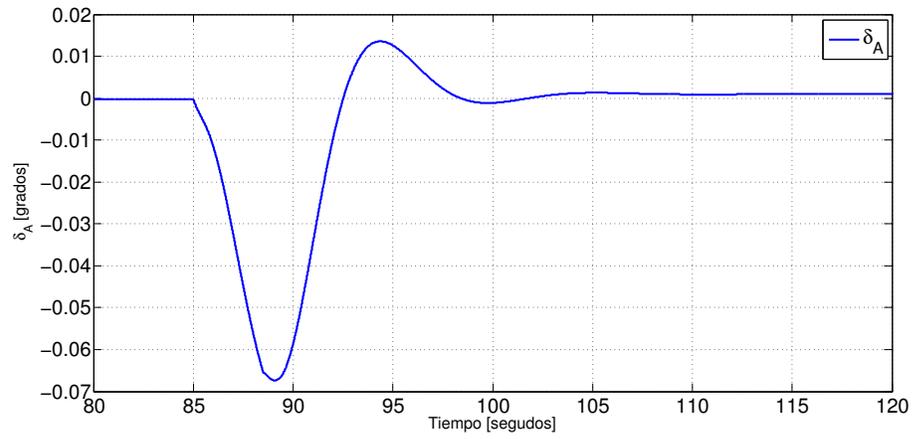


Figura 4.28: Caso 3 - Simulación de la deflexión del alerón (δ_A) vs tiempo.

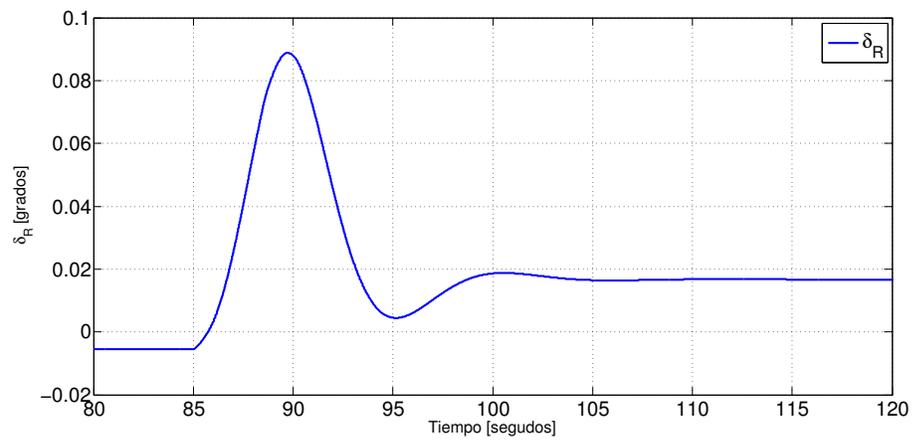


Figura 4.29: Caso 3 - Simulación de la deflexión del timón (δ_R) vs tiempo.

4.3.6 CASO 3: DISCUSIÓN

Se realiza la simulación del cambio de tasa de cambio de guiñada. Se puede observar en la fig. 4.26 el cambio de la tasa de guiñada especificado en la sección 4.3.1 para la aeronave Cessna T37, así como la tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) por parte de la aeronave. En la misma figura se observa como la aeronave llega a la tasa de cambio deseada en un tiempo muy superior de lo requerido, pero es compensado con las entradas de control necesarias que son más suaves a comparación del Caso 2. Así mismo, en la fig. 4.27 el ángulo de derrape (β) se puede considerar como nulo al ser menor a 0.001 grados durante toda la maniobra. Finalmente, en las figs. 4.28 y 4.29 que describen el esfuerzo de control de las deflexiones del alerón (δ_A) y del timón (δ_R), se puede observar que los ángulos necesarios son muy pequeños. Por otro lado, el cambio de las deflexiones son posibles para un servomotor y un piloto podría realizar la maniobra sin problemas.

Es verdad que el sistema responde mucho más lento que en el caso 2, pero es debido a el acoplamiento que presenta el sistema y no fue posible de eliminar completamente con el uso de un precompensador. De la misma forma, la MSF del sistema sin el precompensador muestra una fragilidad al estar muy cerca del punto (1,0) (fig. 4.17) en la frecuencia de operación.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se realiza el modelo, diseño, análisis y la simulación digital de un nuevo esquema de control para la realización de un giro coordinado por parte de una aeronave. Bajo el marco de trabajo del análisis y diseño por canales individuales (ICAD) se diseñaron los controladores utilizando control clásico y empleando los diagramas de Nyquist y Bode para sus diseños. Mediante la función de estructura multivariable (MSF - $\gamma(s)$) fue posible establecer la factibilidad de un control diagonal.

Se muestra una metodología para el diseño de un precompensador que modifique la dinámica de algún elemento de la matriz de transferencia volviéndolo de fase mínima o aumentando los márgenes de fase y ganancia. Esta modificación a la matriz de transferencia se verá reflejado en la función de estructura multivariable.

En el esquema de control propuesto es posible establecer una robustez en márgenes de fase y ganancia, mismos que están debidamente establecidos en los sistemas de una-entrada una-salida (SISO). El control multivariable propuesto es lineal, de bajo orden, estable, robusto y de fase mínima. El control es posible establecerlo en una aeronave para su análisis en vuelo real. En la práctica es necesaria la medición de los ángulos y las tasas de cambio, mismos que son posibles de medir mediante giroscopios y acelerómetros eléctricos.

Algunas de las características de la estructura de control propuesta son: el desacoplamiento entre los canales propuestos mediante un precompensador, robustez en los controladores propuestos y entradas de control físicamente posibles.

En los casos propuestos se analiza la función de estructura multivariable y se determina el diseño de un precompensador para mejorar la dinámica, sin afectar la estructura dinámica de la planta. En el caso-1 no es posible determinar un control al estar físicamente muy acopladas las dinámicas. Por otro lado, en el caso-2 la función de estructura multivariable muestra un incremento del acoplamiento en el punto de operación, mismo que es posible reducir mediante la eliminación de un cero de fase mínima con un precompensador. Finalmente en el caso-3, la función de estructura multivariable muestra fragilidad en el punto de operación, misma que es reducida mediante un precompensador.

Mediante la aplicación de ICAD, el esquema de control presenta algunas características:

1. La robustez de los controladores fue establecida mediante márgenes de fase y ganancia.
2. Mediante el diseño de un precompensador es posible mejorar la estructura de la función de estructura multivariable.
3. La estructura del control es de bajo orden y su implementación es factible.
4. El correcto análisis de la MSF permite establecer el mejor emparejamiento posible en el punto de operación y en una estructura de control, a diferencia del RGA.
5. A través de la MSF es posible identificar los casos y las frecuencias cuando el sistema está desacoplado o no.
6. Los requerimientos de estabilidad y robustez del controlador fueron claramente establecidos.

7. La estabilidad de un sistema TITO es posible con un control diagonal si cada canal es estabilizado.
8. Existen ciertos emparejamientos que son más sencillos de establecer.
9. El diseño de los controles mediante el marco de trabajo de ICAD no es posible generalizar.
10. El buen desempeño de los controles en lazo cerrado radica en el diseño apropiado de controladores SISO, los cuales se pueden obtener con cualquier método.
11. El esquema de control propuesto fue diseñado específicamente para una condición de vuelo del Cessna T-37.

Es importante mencionar que los controles propuestos son lineales y de bajo orden, además de garantizar robustez en el punto de operación. El correcto funcionamiento del control en el punto de operación es debido a la correcta interpretación de la MSF y el proceso de diseño del mismo.

En conclusión, una nueva de estructura de control es propuesta mediante el marco de trabajo de ICAD. El diseño de los controles basado en el Control Clásico es simple y transparente bajo el uso de los diagramas de Bode y Nyquist. Se propone una alternativa para el control de la dinámica lateral-direccional de una aeronave. No es necesario el uso de controles de alto orden o complejos para obtener un desempeño satisfactorio. Bajo el marco de trabajo de ICAD es posible el diseño de controles de sistemas Multivariables.

5.1 RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO

Algunas de las recomendaciones y trabajo futuro derivados de este trabajo son:

- Considerar fenómenos aerodinámicos durante la maniobra.

-
- Considerar un modelo no lineal de la maniobra.
 - Diseñar los controles para la dinámica longitudinal de la aeronave y evaluar una trayectoria completa.
 - Evaluar otras dinámicas de aeronaves con otras misiones.
 - Emplear el control en una computadora de vuelo y realizar un vuelo real.
 - Considerar la pérdida de peso de una aeronave durante una misión.
 - Realizar simulaciones de maniobras reales de la aeronave.
 - Identificar los parámetros aerodinámicos de una aeronave y diseñar el control de la misma.

APÉNDICE A

MODELO MATEMÁTICO DE LA DINÁMICA LATERAL DIRECCIONAL

La dinámica lateral direccional de una aeronave se puede describir con la siguiente ecuación [24]:

$$\begin{aligned}
 (V_{P1}\dot{\beta} + V_{P1}\dot{\psi}) &= g\phi + \frac{q_1 S}{m} \left[c_{Y\beta}\beta + c_{Yp}\frac{b}{2V_{P1}}\dot{\phi} + c_{Yr}\frac{b}{2V_{P1}}\dot{\psi} + c_{Y\delta A}\delta_A + c_{Y\delta R}\delta_R \right] \\
 \ddot{\phi} - \frac{I_{XZ}}{I_{XX}}\ddot{\psi} &= \frac{q_1 S b}{I_{xx}} \left[c_{l\beta}\beta + c_{lp}\frac{b}{2V_{P1}}\dot{\phi} + c_{lr}\frac{b}{2V_{P1}}\dot{\psi} + c_{l\delta A}\delta_A + c_{l\delta R}\delta_R \right] \\
 \ddot{\psi} - \frac{I_{XZ}}{I_{ZZ}}\ddot{\phi} &= \frac{q_1 S b}{I_{ZZ}} \left[c_{n\beta}\beta + c_{np}\frac{b}{2V_{P1}}\dot{\phi} + c_{nr}\frac{b}{2V_{P1}}\dot{\psi} + c_{n\delta A}\delta_A + c_{n\delta R}\delta_R \right]
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

En la siguiente tabla se muestran los coeficientes de la dinámica lateral dirección en función de la forma geométrica del ala (envergadura (b) y área (S)), los parámetros de la inercia (I_{xx} , I_{zz} e I_{xz}) y la condición de vuelo (presión dinámica (q_1) y velocidad de la aeronave (V_{P1})).

Usando los coeficientes de la tabla (A.1), las ecuaciones de la dinámica lateral direccional pueden ser reescritas como:

Tabla A.1: Derivadas de la estabilidad lateral-direccional del Cessna T 37.

Y_β	$= \frac{q_1 S c_{Y\beta}}{m}$	L_β	$= \frac{q_1 S c_{l\beta} b}{I_{XX}}$	N_β	$= \frac{q_1 S c_{n\beta} b}{I_{ZZ}}$
Y_p	$= \frac{q_1 S c_{Yp}}{m} \frac{b}{2V_{P1}}$	L_p	$= \frac{q_1 S c_{lp} b}{I_{XX}} \frac{b}{2V_{P1}}$	N_p	$= \frac{q_1 S c_{np} b}{I_{ZZ}} \frac{b}{2V_{P1}}$
Y_r	$= \frac{q_1 S c_{Yr}}{m} \frac{b}{2V_{P1}}$	L_r	$= \frac{q_1 S c_{lr} b}{I_{XX}} \frac{b}{2V_{P1}}$	N_r	$= \frac{q_1 S c_{nr} b}{I_{ZZ}} \frac{b}{2V_{P1}}$
$Y_{\delta A}$	$= \frac{q_1 S c_{Y\delta A}}{m}$	$L_{\delta A}$	$= \frac{q_1 S c_{l\delta A} b}{I_{XX}}$	$N_{\delta A}$	$= \frac{q_1 S c_{n\delta A} b}{I_{ZZ}}$
$Y_{\delta R}$	$= \frac{q_1 S c_{Y\delta R}}{m}$	$L_{\delta R}$	$= \frac{q_1 S c_{l\delta R} b}{I_{XX}}$	$N_{\delta R}$	$= \frac{q_1 S c_{n\delta R} b}{I_{ZZ}}$

$$\begin{aligned}
 V_{P1}\dot{\beta} + V_{P1}\dot{\psi} &= g\phi + Y_\beta\beta + Y_r\dot{\psi} + Y_p\dot{\phi} + Y_{\delta A}\delta_A + Y_{\delta R}\delta_R \\
 \ddot{\phi} - \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\ddot{\psi} &= L_\beta\beta + L_r\dot{\psi} + L_p\dot{\phi} + L_{\delta A}\delta_A + L_{\delta R}\delta_R \\
 \ddot{\psi} - \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\ddot{\phi} &= N_\beta\beta + N_r\dot{\psi} + N_p\dot{\phi} + N_{\delta A}\delta_A + N_{\delta R}\delta_R
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se realiza la transformada de Laplace de la ec. (A.2) para $\beta(s)$, $\phi(s)$, $\dot{\psi}(s)$, $\delta_A(s)$ y $\delta_R(s)$ y se sustituyen las expresiones I_{xz}/I_{xx} e I_{xz}/I_{zz} por I_1 e I_2 respectivamente. El resultado se muestra en la ec. (A.3).

$$\begin{aligned}
 sV_{P1}\beta(s) + V_{P1}\dot{\psi}(s) &= g\phi(s) + Y_\beta\beta(s) + Y_r\dot{\psi}(s) + sY_p\phi(s) + sY_{\delta A}\delta_A(s) + sY_{\delta R}\delta_R(s) \\
 s^2\phi(s) - sI_1\dot{\psi}(s) &= L_\beta\beta(s) + L_r\dot{\psi}(s) + sL_p\phi(s) + L_{\delta A}\delta_A(s) + L_{\delta R}\delta_R(s) \\
 s\dot{\psi}(s) - s^2I_2\phi(s) &= N_\beta\beta(s) + N_r\dot{\psi}(s) + sN_p\phi(s) + N_{\delta A}\delta_A(s) + N_{\delta R}\delta_R(s)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Se realiza el acomodo en forma matricial para el cálculo de la matriz de transferencia $G(s)$.

$$\begin{bmatrix} sV_{P1} - Y_\beta & -(sY_p + g) & V_{P1} - Y_r \\ -L_\beta & s^2 - sL_p & -(sI_1 + L_r) \\ -N_\beta & -(s^2I_2 + sN_p) & s - N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(s) \\ \phi(s) \\ \dot{\psi}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\delta A} & Y_{\delta R} \\ L_{\delta A} & L_{\delta R} \\ N_{\delta A} & N_{\delta R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A(s) \\ \delta_R(s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Realizando álgebra lineal es posible calcular la matriz de transferencia $G(s)$:

$$G(s) = A_{MT}^{-1}B_{MT}$$

donde:

$$A_{MT} = \begin{bmatrix} sV_{P1} - Y_\beta & -(sY_p + g) & V_{P1} - Y_r \\ -L_\beta & s^2 - sL_p & -(sI_1 + L_r) \\ -N_\beta & -(s^2I_2 + sN_p) & s - N_r \end{bmatrix}; \quad B_{MT} = \begin{bmatrix} Y_{\delta A} & Y_{\delta R} \\ L_{\delta A} & L_{\delta R} \\ N_{\delta A} & N_{\delta R} \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia $G(s)$ está definida:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta_A(s)} & \frac{\beta(s)}{\delta_R(s)} \\ \frac{\phi(s)}{\delta_A(s)} & \frac{\phi(s)}{\delta_R(s)} \\ \frac{\dot{\psi}(s)}{\delta_A(s)} & \frac{\dot{\psi}(s)}{\delta_R(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\beta A}(s) & g_{\beta R}(s) \\ g_{\phi A}(s) & g_{\phi R}(s) \\ g_{\dot{\psi} A}(s) & g_{\dot{\psi} R}(s) \end{bmatrix}$$

Dado que $num(G(s)) = adj(A_{MT})B_{MT}$ y $den(G(s)) = det(A_{MT})$, el denominador de todas las funciones de transferencia de $G(s)$ será el mismo, es decir $det(A_{MT})$.

El $den(G(s))$ es:

$$den(G(s)) = A_n s^4 + B_n s^3 + C_n s^2 + D_n s + E_n \quad (\text{A.5})$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_n &= V_{P1} - I_1 I_2 V_{P1} \\
 B_n &= -N_r V_{P1} - Y_\beta - L_p V_{P1} + I_1 I_2 Y_\beta - I_2 L_r V_{P1} - I_1 N_p V_{P1} \\
 C_n &= N_\beta V_{P1} - L_\beta Y_p + L_p Y_\beta + I_2 L_\beta V_{P1} + I_2 L_r Y_\beta - I_1 N_\beta Y_p \\
 &\quad + I_1 N_p Y_\beta - I_2 L_\beta Y_r + N_r Y_\beta - N_\beta Y_p + L_p N_r V_{P1} - L_r N_p V_{P1} \\
 D_n &= -L_\beta g - L_p N_\beta V_{P1} - L_\beta N_p Y_r + L_\beta N_r Y_p + L_\beta N_p V_{P1} \\
 &\quad + L_p N_\beta Y_r - L_p N_r Y_\beta - L_r N_\beta Y_p + L_r N_p Y_\beta - I_1 N_\beta g \\
 E_n &= L_\beta N_r g - L_r N_\beta g
 \end{aligned}$$

Dado que el denominador de las funciones de transferencia de $G(s)$ es el mismo, solo será necesario calcular el numerador de $G(s)$.

$$num(G(s)) = adj(A_{MT})B_{MT} = \begin{bmatrix} num_{\beta A}(s) & num_{\beta R}(s) \\ num_{\phi A}(s) & num_{\phi R}(s) \\ num_{\dot{\psi} A}(s) & num_{\dot{\psi} R}(s) \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

La matriz de transferencia está definida como:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{\beta A}(s) & g_{\beta R}(s) \\ g_{\phi A}(s) & g_{\phi R}(s) \\ g_{\dot{\psi} A}(s) & g_{\dot{\psi} R}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A_{MT})} \begin{bmatrix} num_{\beta A}(s) & num_{\beta R}(s) \\ num_{\phi A}(s) & num_{\phi R}(s) \\ num_{\dot{\psi} A}(s) & num_{\dot{\psi} R}(s) \end{bmatrix}$$

El numerador del ángulo de derrape y alerón ($num_{\beta A}(s)$):

$$num_{\beta A}(s) = A_{\beta A} s^3 + B_{\beta A} s^2 + C_{\beta A} s + D_{\beta A}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{\beta A} &= Y_{\delta A} - I_1 I_2 Y_{\delta A} \\
 B_{\beta A} &= -N_{\delta A} V_{P1} + L_{\delta A} Y_p - L_p Y_{\delta A} + N_{\delta A} Y_r - N_r Y_{\delta A} \\
 &\quad - I_2 L_{\delta A} V_{P1} + I_2 L_{\delta A} Y_r - I_2 L_r Y_{\delta A} + I_1 N_{\delta A} Y_p - I_1 N_p Y_{\delta A} \\
 C_{\beta A} &= g L_{\delta A} - L_{\delta A} N_p V_{P1} + L_p N_{\delta A} V_{P1} + L_{\delta A} N_p Y_r - L_{\delta A} N_r Y_p - L_p N_{\delta A} Y_r \\
 &\quad + L_p N_r Y_{\delta A} + L_r N_{\delta A} Y_p - L_r N_p Y_{\delta A} + g I_1 N_{\delta A} \\
 D_{\beta A} &= -g L_{\delta A} N_r + g L_r N_{\delta A}
 \end{aligned}$$

El numerador del ángulo de derrape y timón ($num_{\beta R}(s)$):

$$num_{\beta R}(s) = A_{\beta R} s^3 + B_{\beta R} s^2 + C_{\beta R} s + D_{\beta R}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{\beta R} &= Y_{\delta R} - I_1 I_2 Y_{\delta R} \\
 B_{\beta R} &= -N_{\delta R} V_{P1} + L_{\delta R} Y_p - L_p Y_{\delta R} + N_{\delta R} Y_r - N_r Y_{\delta R} \\
 &\quad - I_2 L_{\delta R} V_{P1} + I_2 L_{\delta R} Y_r - I_2 L_r Y_{\delta R} + I_1 N_{\delta R} Y_p - I_1 N_p Y_{\delta R} \\
 C_{\beta R} &= g L_{\delta R} - L_{\delta R} N_p V_{P1} + L_p N_{\delta R} V_{P1} + L_{\delta R} N_p Y_r - L_{\delta R} N_r Y_p - L_p N_{\delta R} Y_r \\
 &\quad + L_p N_r Y_{\delta R} + L_r N_{\delta R} Y_p - L_r N_p Y_{\delta R} + g I_1 N_{\delta R} \\
 D_{\beta R} &= -g L_{\delta R} N_r + g L_r N_{\delta R}
 \end{aligned}$$

El numerador del ángulo de alabeo y alerón ($num_{\phi A}(s)$):

$$num_{\phi A}(s) = A_{\phi A} s^2 + B_{\phi A} s + C_{\phi A}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{\phi A} &= L_{\delta A} V_{P1} + I_1 N_{\delta A} V_{P1} \\
 B_{\phi A} &= L_B Y_{\delta A} - L_{\delta A} Y_B + I_1 N_B Y_{\delta A} - I_1 N_{\delta A} Y_B - L_{\delta A} N_r V_{P1} \\
 &\quad + L_r N_{\delta A} V_{P1} \\
 C_{\phi A} &= L_{\delta A} N_B V_{P1} - L_B N_{\delta A} V_{P1} + L_B N_{\delta A} Y_r - L_B N_r Y_{\delta A} \\
 &\quad - L_{\delta A} N_B Y_r + L_{\delta A} N_r Y_B + L_r N_B Y_{\delta A} - L_r N_{\delta A} Y_B
 \end{aligned}$$

El numerador del ángulo de alabeo y timón ($num_{\phi R}(s)$):

$$num_{\phi R}(s) = A_{\phi R} s^2 + B_{\phi R} s + C_{\phi R}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{\phi R} &= L_{\delta R} V_{P1} + I_1 N_{\delta R} V_{P1} \\
 B_{\phi R} &= L_B Y_{\delta R} - L_{\delta R} Y_B + I_1 N_B Y_{\delta R} - I_1 N_{\delta R} Y_B - L_{\delta R} N_r V_{P1} \\
 &\quad + L_r N_{\delta R} V_{P1} \\
 C_{\phi R} &= L_{\delta R} N_B V_{P1} - L_B N_{\delta R} V_{P1} + L_B N_{\delta R} Y_r - L_B N_r Y_{\delta R} \\
 &\quad - L_{\delta R} N_B Y_r + L_{\delta R} N_r Y_B + L_r N_B Y_{\delta R} - L_r N_{\delta R} Y_B
 \end{aligned}$$

El numerador del ángulo de alabeo y alerón ($num_{\psi A}(s)$):

$$num_{\psi A}(s) = A_{\psi A} s^3 + B_{\psi A} s^2 + C_{\psi A} s + D_{\psi A}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{\psi A} &= N_{\delta A} V_{P1} + I_2 L_{\delta A} V_{P1} + I_2 L_B Y_{\delta A} \\
 B_{\psi A} &= N_B Y_{\delta A} - N_{\delta A} Y_B - I_2 L_{\delta A} Y_B + L_{\delta A} N_p V_{P1} - L_p N_{\delta A} V_{P1} \\
 C_{\psi A} &= L_B N_p Y_{\delta A} - L_B N_{\delta A} Y_p + L_{\delta A} N_B Y_p - L_{\delta A} N_p Y_B \\
 &\quad - L_p N_B Y_{\delta A} + L_p N_{\delta A} Y_B \\
 D_{\psi A} &= L_{\delta A} N_B g - L_B N_{\delta A} g
 \end{aligned}$$

El numerador del ángulo de alabeo y timón ($num_{\dot{\psi}_R}(s)$):

$$num_{\dot{\psi}_R}(s) = A_{\dot{\psi}_R}s^3 + B_{\dot{\psi}_R}s^2 + C_{\dot{\psi}_R}s + D_{\dot{\psi}_R}$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{\dot{\psi}_R} &= N_{\delta R}V_{P1} + I_2L_{\delta R}V_{P1} + I_2L_B Y_{\delta R} \\ B_{\dot{\psi}_R} &= N_B Y_{\delta R} - N_{\delta A} Y_B - I_2L_{\delta R} Y_B + L_{\delta R}N_p V_{P1} - L_p N_{\delta R} V_{P1} \\ C_{\dot{\psi}_R} &= L_B N_p Y_{\delta R} - L_B N_{\delta R} Y_p + L_{\delta R}N_B Y_p - L_{\delta R}N_p Y_B \\ &\quad - L_p N_B Y_{\delta R} + L_p N_{\delta R} Y_B \\ D_{\dot{\psi}_R} &= L_{\delta R}N_B g - L_B N_{\delta R} g \end{aligned}$$

A.2 ESPACIO DE ESTADO

Otra forma de calcular las funciones de transferencia es representar la dinámica lateral direccional en un modelo lineal en espacio de estado, para posteriormente calcular la matriz de transferencia. En la ec. (A.7) se muestra la ecuación de estados.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde:

$$X = \begin{bmatrix} \phi & \dot{\phi} & \psi & \dot{\psi} & \beta \end{bmatrix}^T$$

Y las entradas están definidas como:

$$U = \begin{bmatrix} \delta A & \delta R \end{bmatrix}^T$$

La matriz A está en función de todos los parámetros de la aeronave, así mismo la matriz B .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{xx}I_{zz}L_p + I_{xz}I_{zz}N_p}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} & 0 & -\frac{I_{xx}I_{zz}L_r + I_{xz}I_{zz}N_r}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} & -\frac{I_{xx}I_{zz}L_\beta + I_{xz}I_{zz}N_\beta}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{xx}I_{xz}L_p + I_{xx}I_{zz}N_p}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} & 0 & -\frac{I_{xx}I_{xz}L_r + I_{xx}I_{zz}N_r}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} & -\frac{I_{xx}I_{xz}L_\beta + I_{xx}I_{zz}N_\beta}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} \\ \frac{g}{V_{P1}} & \frac{Y_p}{V_{P1}} & 0 & \frac{Y_r}{V_{P1}} - 1 & \frac{Y_\beta}{V_{P1}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{I_{xx}I_{zz}L_{\delta A} + I_{xz}I_{zz}N_{\delta A}}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} & -\frac{I_{xx}I_{zz}L_{\delta R} + I_{xz}I_{zz}N_{\delta R}}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} \\ 0 & 0 \\ -\frac{I_{xz}I_{zz}L_{\delta A} + I_{xx}I_{zz}N_{\delta A}}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} & -\frac{I_{xz}I_{zz}L_{\delta R} + I_{xx}I_{zz}N_{\delta R}}{I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz}} \\ \frac{Y_{\delta A}}{V_{P1}} & \frac{Y_{\delta R}}{V_{P1}} \end{bmatrix}$$

Debido a la posibilidad de 3 emparejamientos de salidas y entradas, se establecen 3 posibles matrices C . Los 3 emparejamientos posibles de salidas con entradas se establecen como 3 casos:

- Caso 1: Ángulo de alabeo (ϕ) y tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$).
- Caso 2: Ángulo de alabeo (ϕ) y ángulo de derrape (β).
- Caso 3: Tasa de cambio de guiñada ($\dot{\psi}$) y ángulo de derrape (β).

La matriz C de cada caso se define como C_{Cn} , donde n es el número de caso. La matrix C de cada caso son definidas.

$$C_{C1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{C2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{C3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez definidas las matrices de los espacios de estado, es posible calcular las matrices de transferencia G , donde de la misma forma que la matriz C , es definida como G_{Cn} donde n es el número de caso.

$$G_{C1} = C_{C1}(sI - A)^{-1}B$$

$$G_{C2} = C_{C2}(sI - A)^{-1}B$$

$$G_{C3} = C_{C3}(sI - A)^{-1}B$$

APÉNDICE B

CARACTERÍSTICAS DE LA AERONAVE - CESSNA T37

El modelo matemática de la dinámica lateral direccional

B.1 MODELO EN VARIABLES REALES

Las condiciones de vuelo y los datos del Cessna T37 fueron tomados de [24] y se muestran en las tablas B.1 y B.2.

En la tabla B.3 se muestran los valores de las derivadas de estabilidad lateral-direccional del Cessna T-37 en las condiciones de vuelo de la tabla B.1.

Tabla B.1: Condiciones de vuelo.

Altitud (h)	= 30,000 <i>ft</i>
Presión dinámica (q)	= 92.7 <i>psf</i>
Número de Mach	= 0.459
Ángulo de ataque (α)	= 2 <i>deg</i>
Velocidad verdadera (V_{P1})	= 456 <i>ft/s</i>
Aceleración de la gravedad (g)	= 32.174 <i>ft/s²</i>

Tabla B.2: Datos de masa e inercia de aeronave.

Masa (m)	= 6,360 <i>lbs</i>
Momento de inercia eje x (I_{xx})	= 7,985 <i>slugs ft²</i>
Momento de inercia eje z (I_{zz})	= 11,185 <i>slugs ft²</i>
Momento de inercia plano xz (I_{xz})	= 0 <i>slugs ft²</i>

Tabla B.3: Lateral-directional stability derivatives of the Cessna T 37.[24]

Y_β	= -29.217	L_β	= -6.73	N_β	= 5.6345
Y_p	= -0.258	L_p	= -1.168	N_p	= -0.0459
Y_r	= 0.939	L_r	= 0.245	N_r	= -0.2625
$Y_{\delta A}$	= 0	$L_{\delta A}$	= 12.903	$N_{\delta A}$	= -1.294
$Y_{\delta R}$	= 16.889	$L_{\delta R}$	= 1.069	$N_{\delta R}$	= -1.859

APÉNDICE C

DEMOSTRACIONES ICAD

Demostración de:

$$Y(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)\mathbf{R}(s) \quad (\text{C.1})$$

donde:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & 0 \\ 0 & k_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Se sustituyen las ecs. (C.2), (C.3), (C.4) y (C.5) en la ec. (C.1). (Se omiten los términos (s) por espacio).

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{R} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11}k_{11} & g_{12}k_{22} \\ g_{21}k_{11} & g_{22}k_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} g_{11}k_{11} & g_{12}k_{22} \\ g_{21}k_{11} & g_{22}k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{R} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 + g_{11}k_{11} & g_{12}k_{22} \\ g_{21}k_{11} & 1 + g_{22}k_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} g_{11}k_{11} & g_{12}k_{22} \\ g_{21}k_{11} & g_{22}k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{R} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} 1 + g_{22}k_{22} & -g_{12}k_{22} \\ -g_{21}k_{11} & 1 + g_{11}k_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}k_{11} & g_{12}k_{22} \\ g_{21}k_{11} & g_{22}k_{22} \end{bmatrix}}{(1 + g_{11}k_{11})(1 + g_{22}k_{22}) - (g_{12}k_{22})(g_{21}k_{11})} \mathbf{R} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(1+g_{22}k_{22})(g_{11}k_{11})-(g_{12}k_{22})(g_{21}k_{11})}{(1+g_{11}k_{11})(1+g_{22}k_{22})-(g_{12}k_{22})(g_{21}k_{11})} & \frac{(1+g_{22}k_{22})(g_{12}k_{22})-(g_{12}k_{22})(g_{22}k_{22})}{(1+g_{11}k_{11})(1+g_{22}k_{22})-(g_{12}k_{22})(g_{21}k_{11})} \\ \frac{(1+g_{11}k_{11})(g_{21}k_{11})-(g_{21}k_{11})(g_{11}k_{11})}{(1+g_{11}k_{11})(1+g_{22}k_{22})-(g_{12}k_{22})(g_{21}k_{11})} & \frac{(1+g_{11}k_{11})(g_{22}k_{22})-(g_{21}k_{11})(g_{12}k_{22})}{(1+g_{11}k_{11})(1+g_{22}k_{22})-(g_{12}k_{22})(g_{21}k_{11})} \end{bmatrix} \mathbf{R} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(1+g_{22}k_{22})(g_{11}k_{11}-\frac{g_{12}k_{22}g_{21}k_{11}}{1+g_{22}k_{22}})}{(1+g_{22}k_{22})(1+g_{11}k_{11}-\frac{g_{12}k_{22}g_{21}k_{11}}{1+g_{22}k_{22}})} & \frac{g_{12}k_{22}}{(1+g_{22}k_{22})(1+g_{11}k_{11}-\frac{g_{12}k_{22}g_{21}k_{11}}{1+g_{22}k_{22}})} \\ \frac{g_{21}k_{11}}{(1+g_{11}k_{11})(1+g_{22}k_{22}-\frac{g_{12}k_{22}g_{21}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}})} & \frac{(1+g_{11}k_{11})(g_{22}k_{22}-\frac{g_{12}k_{22}g_{21}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}})}{(1+g_{11}k_{11})(1+g_{22}k_{22}-\frac{g_{12}k_{22}g_{21}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}})} \end{bmatrix} \mathbf{R} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{g_{11}k_{11}\left(1-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\frac{g_{22}k_{22}}{1+g_{22}k_{22}}\right)}{1+g_{11}k_{11}\left(1-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\frac{g_{22}k_{22}}{1+g_{22}k_{22}}\right)} & \frac{g_{12}}{g_{22}}\frac{g_{22}k_{22}}{1+g_{22}k_{22}}\frac{1}{\left(1+g_{11}k_{11}\left(1-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\frac{g_{22}k_{22}}{1+g_{22}k_{22}}\right)\right)} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}}\frac{g_{11}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}}\frac{1}{\left(1+g_{22}k_{22}\left(1-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\frac{g_{11}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}}\right)\right)} & \frac{g_{22}k_{22}\left(1-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\frac{g_{11}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}}\right)}{1+g_{22}k_{22}\left(1-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\frac{g_{11}k_{11}}{1+g_{11}k_{11}}\right)} \end{bmatrix} \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

Se sustituye el término $\gamma(s)$ que es la Función de Estructura Multivariable (MSF), que está dada por:

$$\gamma(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (\text{C.6})$$

Así mismo el acoplamiento del sistema $h_1(s)$ y $h_2(s)$:

$$h_1(s) = \frac{k_{11}(s)g_{11}(s)}{1 + k_{11}(s)g_{11}(s)}; \quad h_2(s) = \frac{k_{22}(s)g_{22}(s)}{1 + k_{22}(s)g_{22}(s)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{g_{11}(s)k_{11}(s)(1-\gamma(s)h_2(s))}{1+g_{11}(s)k_{11}(s)(1-\gamma(s)h_2(s))} & \frac{g_{12}(s)}{g_{22}(s)} \frac{h_2(s)}{(1+g_{11}(s)k_{11}(s)(1-\gamma(s)h_2(s)))} \\ \frac{g_{21}(s)}{g_{11}(s)} \frac{h_1(s)}{(1+g_{22}(s)k_{22}(s)(1-\gamma(s)h_1(s)))} & \frac{g_{22}(s)k_{22}(s)(1-\gamma(s)h_1(s))}{1+g_{22}(s)k_{22}(s)(1-\gamma(s)h_1(s))} \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

Finalmente se introduce el término de el lazo abierto del canal 1 ($C_1(s)$) y canal 2 ($C_2(s)$) y están dado por:

$$C_1(s) = k_{11}(s)g_{11}(s)(1 - \gamma(s)h_2(s))$$

$$C_2(s) = k_{22}(s)g_{22}(s)(1 - \gamma(s)h_1(s))$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{C_1(s)}{1+C_1(s)} & \frac{g_{12}(s)}{g_{22}(s)} \frac{h_2(s)}{1+C_1(s)} \\ \frac{g_{21}(s)}{g_{11}(s)} \frac{h_1(s)}{1+C_2(s)} & \frac{C_2(s)}{1+C_2(s)} \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] AKBAR, M., W. LEITHEAD, J. O'REILLY y S. ROBERTSON, «Design of robust controllers for a 3-input 3-output supersonic aircraft powerplant using ICD», en *Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Control Applications*, tomo 1, págs. 95–99, 1994.
- [2] ALI, H. I. y M. F. HADI, «ROBUST DIAGONAL AND NONDIAGONAL CONTROLLERS DESIGN FOR MIMO SYSTEMS», , 2015.
- [3] ALI, S. U., R. SAMAR, M. Z. SHAH, A. I. BHATTI, K. MUNAWAR y U. M. AL-SGGAF, «Lateral guidance and control of UAVs using second-order sliding modes», *Aerospace Science and Technology*, **49**, págs. 88–100, 2016.
- [4] AMÉZQUITA-BROOKS, L. A., J. LICÉAGA-CASTRO, E. LICÉAGA-CASTRO y C. E. UGALDE-LOO, «Induction Motor Control: Multivariable Analysis and Effective Decentralized Control of Stator Currents for High-Performance Applications», *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **62**(11), págs. 6818–6832, 2015.
- [5] AMÉZQUITA-BROOKS, L. A., C. E. UGALDE LOO, E. LICÉAGA-CASTRO y J. LICEAGA-CASTRO, «The multivariable structure function as an extension of the RGA matrix: relationship and advantages», *Cybernetics and Physics*, **2**(2), págs. 53–62, 2013.

-
- [6] BALAS, G. J., I. FIALHO, A. PACKARD, J. RENFROW y C. MULLANEY, «On the design of LPV controllers for the F-14 aircraft lateral-directional axis during powered approach», **1**, págs. 123–127, 1997.
- [7] BRISTOL, E., «On a new measure of interaction for multivariable process control», *IEEE transactions on automatic control*, **11**(1), págs. 133–134, 1966.
- [8] CHEN, C.-T., *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*, Oxford University Press, Inc., 1995.
- [9] COOK, M. V., *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*, Butterworth-Heinemann, 2012.
- [10] DESOER, C. y Y.-T. WANG, «On the generalized Nyquist stability criterion», *IEEE Transactions on Automatic Control*, **25**(2), págs. 187–196, 1980.
- [11] DUDGEON, G., J. GRIBBLE y J. O'REILLY, «Individual channel analysis and helicopter flight control in moderate-and large-amplitude manoeuvres», *Control Engineering Practice*, **5**(1), págs. 33–38, 1997.
- [12] FALB, P. y W. WOLOVICH, «Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems», *IEEE transactions on automatic control*, **12**(6), págs. 651–659, 1967.
- [13] GOODWIN, G. C., S. F. GRAEBE y M. E. SALGADO, «Control system design», *Upper Saddle River*, 2001.
- [14] KOCIJAN, J., «An approach to multivariable combustion control design», *Journal of Process Control*, **7**(4), págs. 291–301, 1997.
- [15] LEITHEAD, W. y J. O'REILLY, «Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems Part 1. Structural issues», *International Journal of Control*, **54**(1), págs. 47–82, 1991.

- [16] LEITHEAD, W., S. ROBERTSON y J. O'REILLY, «Design of controllers within the framework of ICAD», en *Symposium on Quantitative Feedback Theory and Other Frequency-Based Methods and Applications*, págs. 219–225, 1997.
- [17] LICÉAGA-CASTRO, E., J. LICÉAGA-CASTRO y C. E. UGALDE-LOO, «Beyond the existence of diagonal controllers: from the relative gain array to the multivariable structure function», en *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, IEEE, págs. 7150–7156, 2005.
- [18] LICÉAGA-CASTRO, E., J. LICÉAGA-CASTRO, C. E. UGALDE-LOO y E. M. NAVARRO-LÓPEZ, «Efficient multivariable submarine depth-control system design», *Ocean Engineering*, **35**(17), págs. 1747–1758, 2008.
- [19] LICÉAGA-CASTRO, E., C. E. UGALDE-LOO, J. LICÉAGA-CASTRO y P. PONCE, «An efficient controller for SV-PWM VSI based on the multivariable structure function», en *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, IEEE, págs. 4754–4759, 2005.
- [20] LICÉAGA-CASTRO, J., C. VERDE, J. O'REILLY y W. LEITHEAD, «Helicopter flight control using individual channel design», *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, **142**(1), págs. 58–72, 1995.
- [21] LUNGU, R. y M. LUNGU, «Control of the Aircraft Lateral-Directional Motion during Landing using the H-inf Control and the Dynamic Inversion», *Proceedings of the Romanian Academy, Series A: Mathematics, Physics, Technical Sciences, Information Science*, **16**(4), págs. 547–555, 2015.
- [22] MACIEJOWSKI, J. M., «Multivariable feedback design», *Electronic Systems Engineering Series, Wokingham, England: Addison-Wesley, — c1989*, 1989.
- [23] MONESS, M. y B. LANTOS, «A precompensator design to achieve the decoupling condition in the frequency domain», *International Journal of Control*, **39**(1), págs. 189–200, 1984.

-
- [24] NAPOLITANO, M. R., *Aircraft dynamics: From modeling to simulation*, J. Wiley, 2012.
- [25] NATO, R., «Flight Control Design—Best Practices», *Informe técnico*, RTO-TR-029, December, 2003.
- [26] OGATA, K. y Y. YANG, «Modern control engineering», , 1970.
- [27] O'REILLY, J. y W. LEITHEAD, «Multivariable control by 'individual channel design'», *International Journal of Control*, **54**(1), págs. 1–46, 1991.
- [28] REGULATIONS, F. A., «Part 23 Airworthiness Standards: Normal, Utility, Acrobatic and Commuter Category Airplanes», , 1991.
- [29] SKOGESTAD, S. y I. POSTLETHWAITE, *Multivariable feedback control: analysis and design*, tomo 2, Wiley New York, 2007.
- [30] SNELL, S. A., W. L. GARRARD y D. F. ENNS, «Nonlinear control of a supermaneuverable aircraft», , 1989.
- [31] SRINATHKUMAR, S. y SRINATHANKUMAR, *Eigenstructure control algorithms: applications to aircraft/rotorcraft handling qualities design*, Institution of Engineering and Technology, 2011.
- [32] TOMAYKO, J. E., «Computers take flight: A history of NASA's pioneering digital Fly-by-wire project», , 2000.
- [33] W. DUDGEON, G. J. y J. J. GRIBBLE, «Helicopter attitude command attitude hold using individual channel analysis and design», *Journal of guidance, control, and dynamics*, **20**(5), págs. 962–971, 1997.
- [34] WALKER, D., «Multivariable control of the longitudinal and lateral dynamics of a fly-by-wire helicopter», *Control Engineering Practice*, **11**(7), págs. 781–795, 2003.

-
- [35] WAN, Y., S. ROY y A. SABERI, «Explicit precompensator design for invariant-zero cancellation», *International Journal of Control*, **82**(5), págs. 808–811, 2009.