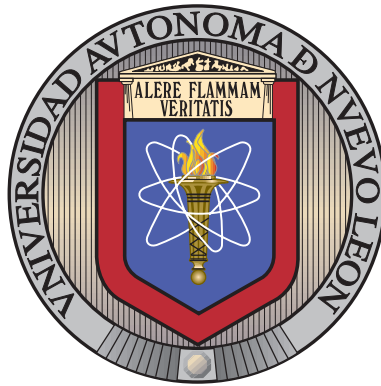


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



OBSERVACIÓN DE LA POSICIÓN DE UN MOTOR
SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES SIN SENSORES
MECÁNICOS

POR

JOSÉ BENEDICTO CASANOVA MANCIAS

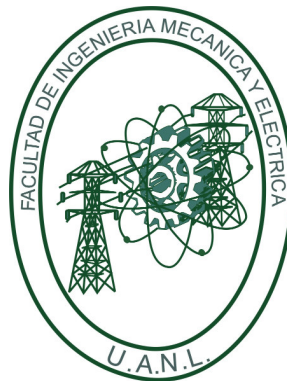
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SEPTIEMBRE, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



OBSERVACIÓN DE LA POSICIÓN DE UN MOTOR
SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES SIN SENSORES
MECÁNICOS

POR

JOSÉ BENEDICTO CASANOVA MANCIAS

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SEPTIEMBRE, 2017

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

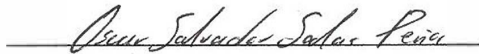
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Observación de la posición de un motor síncrono de imanes permanentes sin sensores mecánicos», realizada por el alumno José Benedicto Casanova Mancias, con número de matrícula 1479944, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis



Dr. Jesús De León Morales

Asesor



Dr. Oscar Salvador Salas Peña

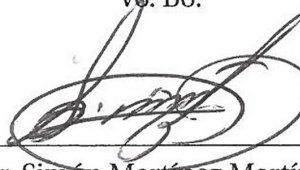
Revisor



Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

Revisor

Vº. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Septiembre, 2017

A mi familia y a mi novia Jenny por todo su apoyo.

Agradecimientos

A mi asesor de tesis el Dr. Jesús de León Morales por darme la guía, formación y apoyo necesario para lograr este trabajo.

A mis coasesores: Dr. Oscar Salvador Salas Peña y Dr. Marco Tulio Mata Jiménez por sus comentarios, muestras de apoyo y tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

A todos mis profesores del posgrado, por sus conocimientos brindados.

A mis compañeros: Susana, Cano y Gerardo, por los momentos de apoyo y compañía durante este viaje.

A mis compañeros de generación, por sus muestras de amistad.

Al CONACYT y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo económico, sin el cual no pudiera haber efectuado este trabajo.

RESUMEN

Publicación No. _____

José Benedicto Casanova Mancias, M.C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2017

Profesor asesor: Dr. Jesús De León Morales

Este trabajo trata el problema de estimación de la posición angular mecánica del motor síncrono de imanes permanentes (MSIP), la cual es difícil de medir y además es necesario conocer para implementar un algoritmo de control. Para resolver este problema, se propone el diseño de un observador que permita estimar la posición angular mecánica, a partir de las mediciones de corrientes y voltajes del estator. Para lograr nuestro objetivo se proponen dos observadores interconectados para el motor síncrono de imanes permanentes, los cuales están basados en el método de diseño de observadores Super Twisting.

El primer diseño es un observador interconectado, que permite primeramente estimar la velocidad angular mecánica, así como la resistencia del estator y el par de carga del motor. El segundo observador interconectado, permite estimar las magnitudes de los flujos del estator, con los cuales se puede obtener la posición angular mecánica. Además, las ventajas que presentan estos observadores interconectados, con respecto a los observadores de modos deslizantes Super Twisting estándar [1], es la facilidad al sintonizar las ganancias de observación, debido a que solamente se requiere de un solo parámetro a sintonizar por observador, y también se reduce el efecto de *chattering*¹.

Por otro lado, al utilizar las estrategias de observación y/o control por modos deslizantes, estos convergen en tiempo finito, así como, son robustos ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones. Sin embargo, el principal inconveniente de este enfoque, es el efecto indeseable de

¹El término *chattering* describe el fenómeno de señales oscilantes de alta frecuencia y amplitud finita, el cual se presenta en la implementación de controles y observadores por modos deslizantes.

chattering que aparece en el sistema. Una forma de evitar este problema, es utilizar algoritmos de modos deslizantes de alto orden.

Además, se propone una estrategia de control basada en los modos deslizantes de segundo orden Super Twisting [2], para mejorar el desempeño del motor de imanes permanentes. Una de las principales contribuciones de este algoritmo, es reducir el número de parámetros a sintonizar a uno, además de su robustez ante perturbaciones e incertidumbres.

Para validar el desempeño del esquema observador-control propuesto, se realiza un estudio comparativo en simulación con otro esquema observador-control, conformado por un observador asintótico y un control backstepping integral [3].

Índice General

Resumen	VI
Índice de Figuras	XI
Índice de Tablas	XIII
Lista de Símbolos	XIV
1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Antecedentes	5
1.3. Planteamiento del Problema y Estructura de la Tesis	7
1.4. Conclusiones	8
2. Modelo dinámico del MSIP	9
2.1. Introducción	9
2.2. Consideraciones del modelo dinámico del MSIP	11
2.3. Ecuaciones Eléctricas	12
2.3.1. Transformación de un marco de referencia fijo (a, b, c) a un marco de referen- cia rotatorio (d, q)	15
2.3.2. Transformación de marco de referencia rotatorio (d, q) a marco de referencia fijo (α, β)	18
2.4. Ecuaciones Mecánicas	20
2.4.1. Par electromagnético	21

2.5. Representación en espacio de estados	22
2.5.1. Modelo en marco de referencia (d, q)	23
2.5.2. Modelo en el marco de referencia (α, β)	24
2.6. Condiciones de operación y referencias deseadas	26
2.7. Conclusiones	29
3. Observabilidad del MSIPI	30
3.1. Introducción	30
3.2. Observabilidad	31
3.2.1. Observabilidad de Sistemas Lineales	32
3.2.2. Observabilidad de Sistemas No Lineales	33
3.3. Análisis de Observabilidad del MSIPI	37
3.3.1. Análisis de Observabilidad de posición θ_m en el marco (α, β)	38
3.3.2. Análisis de Observabilidad para la velocidad Ω , la Resistencia del Estator R_s y el par de carga T_l en el marco (d, q)	40
3.4. Conclusiones	42
4. Diseño de Observadores para el MSIPI	43
4.1. Introducción	43
4.2. Observadores para sistemas no lineales	44
4.2.1. Observador Luenberger	45
4.2.2. Observador de Alta Ganancia	46
4.2.3. Observador de Kalman extendido	49
4.2.4. Observador de Kalman extendido adaptativo	51
4.2.5. Observadores Interconectados	54
4.2.6. Observadores de Modos Deslizantes	58
4.3. Observadores interconectados para el MSIPI	71
4.3.1. Observadores para el modelo del MSIPI en el marco de referencia (d, q)	72
4.3.2. Observadores para el modelo del MSIPI en el marco de referencia (α, β)	78
4.4. Conclusiones	84

5. Diseño de Controles para el MSIPI	85
5.1. Introducción	85
5.2. Controlabilidad	86
5.2.1. Controlabilidad de sistemas lineales	86
5.2.2. Controlabilidad de sistemas no lineales	87
5.3. Controladores no lineales	87
5.3.1. Control Backstepping	87
5.3.2. Control por modos deslizantes de alto orden	90
5.4. Análisis de Controlabilidad del MSIPI	95
5.5. Diseño de controles no lineales para el MSIPI	96
5.5.1. Control Backstepping Integral para el MSIPI	97
5.5.2. Control Super Twisting para el MSIPI	100
5.6. Conclusiones	103
6. Resultados	104
6.1. Introducción	104
6.2. Esquema Observador-Control I	105
6.3. Esquema Observador-Control II	109
6.4. Resultados de Simulación	110
6.4.1. Simulación I	110
6.4.2. Simulación II	117
6.5. Conclusiones	122
Conclusiones	123
Bibliografía	125
A. Definiciones de Estabilidad Práctica	129

Índice de figuras

1.1. Esquema con las partes principales de un máquina eléctrica giratoria	1
1.2. Clasificación de las máquinas eléctricas giratorias según su entrehierro	2
1.3. Familias de las máquinas eléctricas	2
1.4. Configuraciones serie-paralelo de los vehículos eléctricos híbridos	4
1.5. Esquema de control de una máquina de CA sin sensores mecánicos	5
2.1. Tipos de MSIP: a) imanes en la superficie, b) imanes insertados, c) imanes interiores, d) concentración de flujo	11
2.2. Referencia de velocidad Ω^*	27
2.3. Par de Carga T_l	29
3.1. Esquema de implementación de un observador	32
6.1. Observadores Interconectados tipo Kalman en conjunto con el control backstepping para el MSIP	106
6.2. Observadores Interconectados Super Twisting en conjunto con el control Super Twis- ting para el MSIP	109
6.3. Seguimiento de referencia de velocidad Ω	112
6.4. Estimación de la velocidad Ω , utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting	112
6.5. Estimación de la resistencia del estator R_s utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting	113
6.6. Estimación del par de carga T_l , utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting	113
6.7. Estimación de la posición θ_m , utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting	114

6.8. Errores de estimación de velocidad Ω , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting 114

6.9. Errores de estimación de la resistencia del estator R_s , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting 115

6.10. Errores de estimación del par de carga T_l , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting 115

6.11. Errores de estimación de la posición θ_m , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting 116

6.12. Seguimiento de referencia de velocidad Ω , comparando el control backstepping integral vs. control Super Twisting 118

6.13. Errores de seguimiento de referencia de velocidad Ω , comparando el control backstepping integral vs. control Super Twisting 119

6.14. Seguimiento de referencia de corriente i_{sd} , utilizando el control backstepping integral 119

6.15. Seguimiento de referencia de corriente i_{sd} , utilizando el control backstepping integral 120

6.16. Leyes de control del esquema observador Super Twisting - control Super Twisting . 120

6.17. Leyes de control Super Twisting del esquema observador-control II 121

Índice de tablas

2.1. Parámetros nominales del MSIPI.	27
6.1. Parámetros de sintonización del control para la Simulación I.	111
6.2. Parámetros de sintonización de los observadores para la Simulación I.	111
6.3. Parámetros de sintonización de los controladores para la Simulación II.	117
6.4. Parámetros de sintonización del observador para la Simulación II.	117

Lista de Símbolos

$V_{sabc} = \begin{bmatrix} v_{sa} & v_{sb} & v_{sc} \end{bmatrix}^T$	Voltaje trifásico del estator
$I_{sabc} = \begin{bmatrix} i_{sa} & i_{sb} & i_{sc} \end{bmatrix}^T$	Corriente trifásica del estator
$I_{sabc} = \begin{bmatrix} i_{sa} & i_{sb} & i_{sc} \end{bmatrix}^T$	Flujos en cada fase del estator
$V_{s\alpha\beta} = \begin{bmatrix} v_{s\alpha} & v_{s\beta} \end{bmatrix}^T$	Voltaje bifásico en el marco de referencia (α, β)
$I_{s\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} & i_{s\beta} \end{bmatrix}^T$	Corriente bifásica en el marco de referencia (α, β)
$\Psi_{r\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \Psi_{r\alpha} & \Psi_{r\beta} \end{bmatrix}^T$	Flujos del estator en el marco de referencia (α, β)
$V_{sdq} = \begin{bmatrix} v_{sd} & v_{sq} \end{bmatrix}^T$	Voltaje bifásico en el marco de referencia (d, q)
$I_{sdq} = \begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} \end{bmatrix}^T$	Corriente bifásica en el marco de referencia (d, q)
$\Psi_{rdq} = \begin{bmatrix} \Psi_{rd} & \Psi_{rq} \end{bmatrix}^T$	Flujos del estator en el marco de referencia (d, q)
ψ_r	Flujo magnético del estator
Λ_{ss}	Matriz de inductancias
R_s	Resistencia del estator
f_v	Coefficiente de fricción viscosa
J	Inercia de la carga y del motor
T_l	Par de carga
T_e	Par electromagnético
p	Número de polos

Ω Velocidad angular mecánica

ω Velocidad angular eléctrica

θ_m Posición angular mecánica

θ_e Posición angular eléctrica

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

Una máquina eléctrica giratoria es un sistema electromecánico, el cual transforma la energía eléctrica en mecánica (funcionando como motor), y viceversa (funcionando como generador). Desde su invención en el siglo XIX hasta la actualidad, las máquinas eléctricas son casi omnipresentes en las industrias de producción de energía eléctrica, transporte (coches, trenes, aviones), robótica, productos del hogar, etc.

Las máquinas eléctricas giratorias están constituidas de una parte fija, denominada estator y una parte móvil, llamada rotor, como se ilustra en la Figura 1.1. Estas dos partes están separadas por un entrehierro. Las máquinas eléctricas que cuentan con un entrehierro constante, se denominan máquinas eléctricas de polos lisos, y las que tienen un entrehierro variable, se denominan máquinas eléctricas de polos salientes (Figura 1.2).

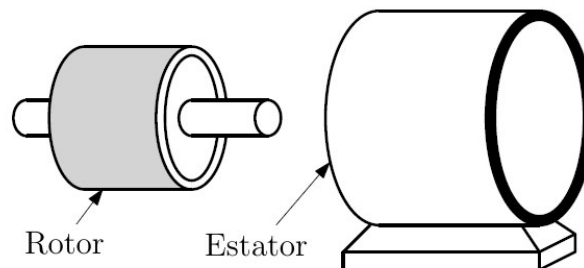


Figura 1.1: Esquema con las partes principales de un máquina eléctrica giratoria

Las máquinas eléctricas se clasifican como sigue dependiendo de:

- Si la alimentación del estator es de corriente continua o corriente alterna.
- Si el rotor esta constituido de imanes o bobinas.
- Si el entrehierro es de polos lisos o salientes.

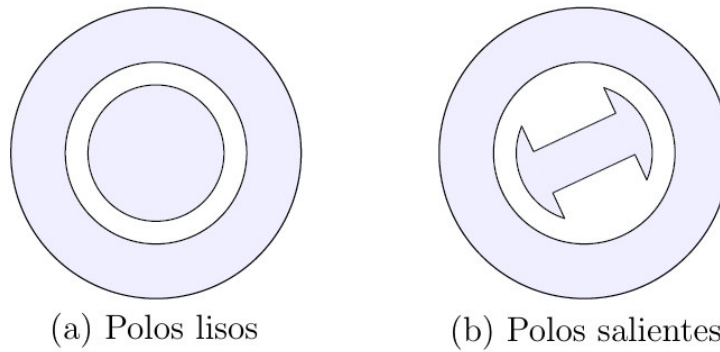


Figura 1.2: Clasificación de las máquinas eléctricas giratorias según su entrehierro

Las máquinas electricas se pueden clasificar como se muestra en la Figura 1.3.

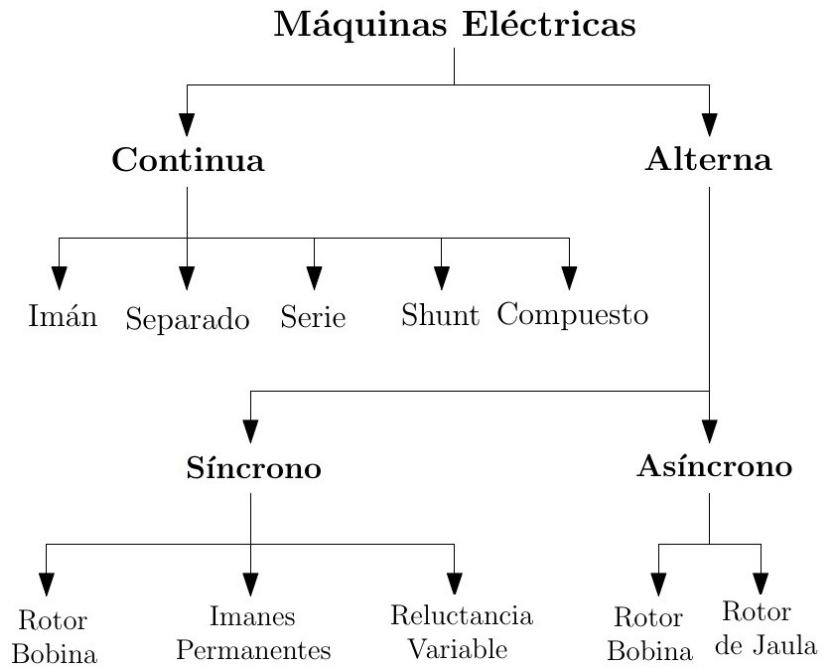


Figura 1.3: Familias de las máquinas eléctricas

Este trabajo se enfocará al estudio de máquinas eléctricas de corriente alterna, síncronas de imanes permanentes.

En la década de 1880, Nikola Tesla introduce el principio de funcionamiento de la máquina eléctrica [4]. Actualmente existen diferentes versiones de la máquina de Tesla. Sin embargo, el principio de funcionamiento es el mismo: el estator se alimenta de un sistema polifásico, creando un campo magnético en el entrehierro, el cual interactúa con el rotor generando un par en el eje de la máquina.

Las máquinas de corriente alterna (CA) se dividen en dos grandes familias:

- **Máquinas Síncronas:** El rotor puede contener imanes permanentes, un electroimán, o simplemente un material ferromagnético con una saliente. En todos los casos, giran a la misma velocidad que el campo giratorio (velocidad síncrona).
- **Máquinas Asíncronas:** Las bobinas del rotor se encuentran en cortocircuito y su velocidad es ligeramente diferente a la del campo giratorio.

La máquina eléctrica que se estudiará en esta tesis, es el motor síncrono de imanes permanentes (MSIP), el cual es utilizado ampliamente en aplicaciones como: la tracción (autos), generación de energía (eólica) y robótica.

El MSIP satisface un perfil de conducción, debido a que puede proporcionar rápidamente un par bidireccional en un amplio rango de velocidades. Una de las más importantes aplicaciones del MSIP es el sistema de tracción para vehículos eléctricos e híbridos, en sus configuraciones serie o paralelo como se muestra en la Figura 1.4 . En cuanto a la tracción eléctrica, el MSIP es más adecuado que el motor de inducción, debido a las ventajas que posee dicha máquina síncrona, entre las que se encuentran:

- El volumen y peso total se reducen significativamente para una cierta potencia de salida.
- Mayor eficiencia.
- El calor se disipa eficazmente, las pérdidas por efecto Joule son menores debido a la ausencia de corrientes en el rotor.

Sin embargo, el MSIP tiene una región de potencia-constante corta, debido a su capacidad limitada del debilitamiento del campo magnético, resultante de la presencia de los imanes en el rotor.

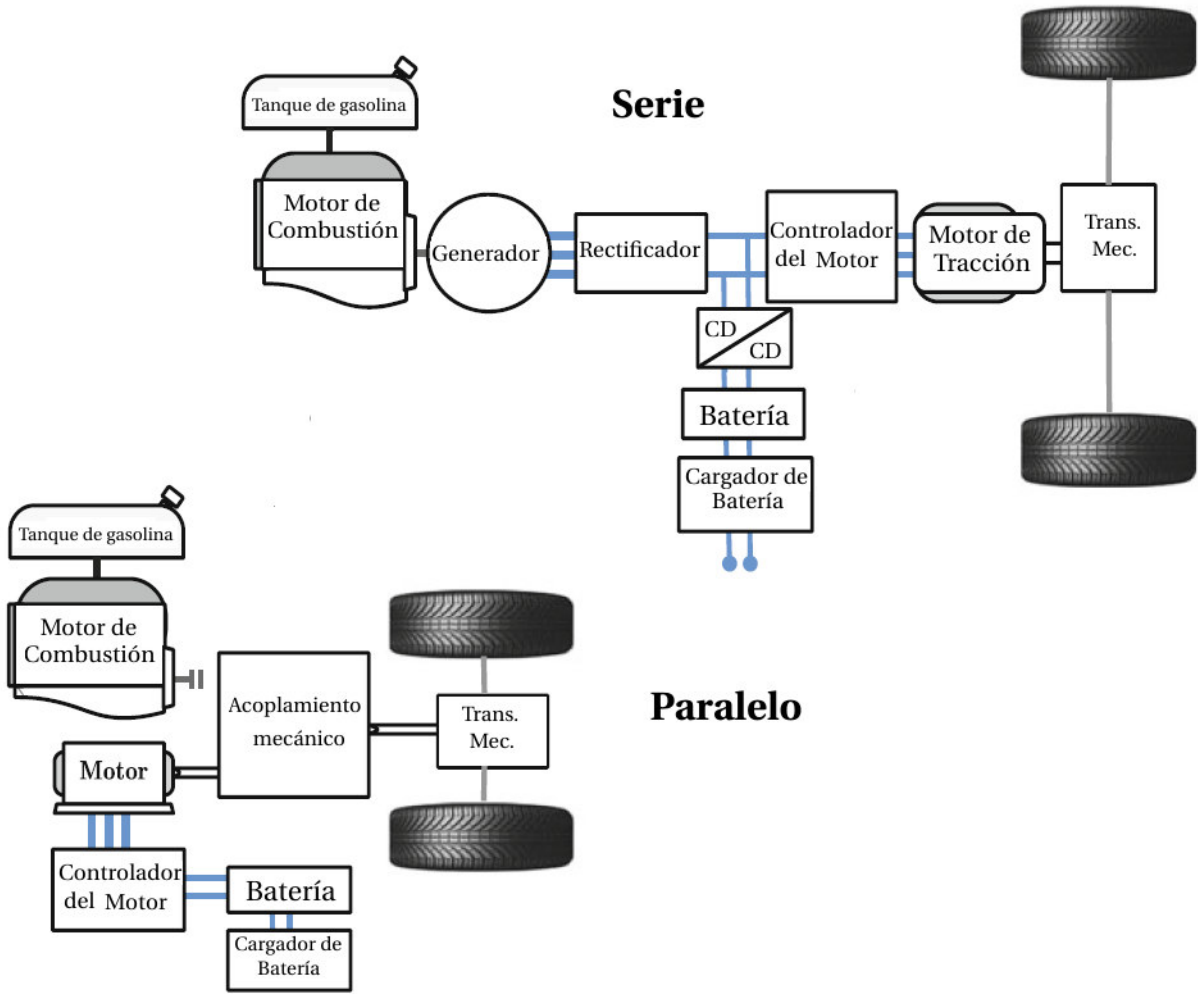


Figura 1.4: Configuraciones serie-paralelo de los vehículos eléctricos híbridos

Gracias a los avances tecnológicos hoy en día resulta atractivo utilizar técnicas de control no lineales robustas en el MSIP, esto con el fin de reducir el consumo de energía y mejorar su rendimiento.

1.2. Antecedentes

El uso de sensores mecánicos para medir la posición o velocidad del rotor de máquinas eléctricas, limita la implementación de estrategias de control. Por lo tanto, se ha buscado eliminar dicho sensor y continuar implementando estrategias de control [5]. La idea principal de este trabajo de investigación es, reemplazar los sensores mecánicos por algoritmos de estimación de posición y velocidad del rotor, a través de mediciones de las corrientes y voltajes del estator. La Figura 1.5 muestra la estructura general del control de máquinas de corriente alterna (CA) sin sensores mecánicos [6].

Este algoritmo de control sin sensores mecánicos a menudo se le llama, por abuso de lenguaje, control sin sensores. En la literatura anglosajona, se le conoce como *sensorless*.

De aquí en adelante, se empleará el término anglosajon *sensorless* para referirnos al diseño de control sin sensores mecánicos.

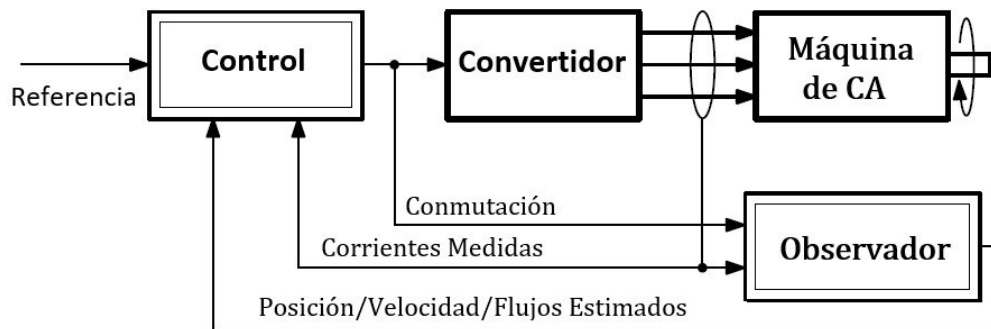


Figura 1.5: Esquema de control de una máquina de CA sin sensores mecánicos

En la década de 1990, el control *sensorless* experimentó un auge en sus técnicas. Actualmente, el control *sensorless* a cobrado auge a través de dos enfoques de estimación de estado [7]:

- **Estimación pasiva:** Está basada en el modelo de la máquina [8].
- **Estimación activa:** Inyecta corrientes (de alta frecuencia) en el estator, con el fin de detectar la posición del rotor, utilizando las asintropías magnéticas de la máquina [9].

Aquí se utilizará la técnica de estimación pasiva, de la cual existe una gran bibliografía de observadores de estado para el control *sensorless*. Ejemplos de ellos son el filtro de Kalman [10], los

observadores adaptativos [11], los observadores por modos deslizantes [12] y los observadores no lineales [13].

Hoy en día, existen dos enfoques de interés en el campo del control *sensorless*. El primer enfoque estudia la observabilidad de las máquinas eléctricas [14], para analizar el desempeño del esquema control-observador. El segundo enfoque [15], busca obtener un modelo unificado de máquinas de CA, para desarrollar estrategias de control y estimación unificados.

En [16] se propone un control de velocidad *sensorless* para el motor síncrono de imán permanente interior (MSIPI), el cual está basado en el control de campo orientado. Se realiza una modificación en el modelo matemático del MSIP en el marco de referencia (d, q) , el cual permite obtener la posición y velocidad en función de los flujos del rotor. La estimación de velocidad y posición del MSIP, se realiza a través de un observador basado en la técnica modos deslizantes de primer orden. Además de su robustez, la ventaja de este algoritmo radica en que solamente utiliza las mediciones de los voltajes en el estator para estimar la posición y velocidad del motor. Sin embargo, la acción de control se simplifica, debido a que el par de carga se considera conocido.

En [17], se propone un control robusto sin sensores mecánicos para el MSIPI, el cual está basado en la técnica de control por modos deslizantes de primer orden. Se realiza una comparación entre dos tipos de observadores, el observador adaptativo por modelo de referencia (OAMR), y un observador de Luenberger extendido. En este trabajo se estima la posición, velocidad y el par de carga aplicado al motor. La implementación del OAMR, requiere conocer la condición inicial tanto de la velocidad, como de la posición, lo cual limita su implementación física. Por otro lado, el observador de Luenberger extendido es sensible al ruido, por lo tanto, su implementación física es limitada.

Un control robusto *sensorless* basado en la técnica de control de campo orientado, se presenta en [18]. En este trabajo se realiza la observación de la velocidad y la posición combinando dos técnicas; la inyección de señal de baja frecuencia y el observador de Kalman extendido. La primera se utiliza en el arranque del motor, y a bajas velocidades. El observador de Kalman extendido entra en funcionamiento a media y alta velocidad. La estimación de la posición, se realiza mediante la estimación de la fuerza contraelectromotriz. Sin embargo, en este trabajo no se considera el par

de carga, es decir, se considera el caso no perturbado, el cual simplifica la acción de control.

En [19], se propone un control sin sensores mecánicos para el MSIPI, el cual está basado en un control de lógica difusa. En la parte de observación, este trabajo utiliza un observador de Luenberger adaptativo, el cual permite estimar la velocidad del motor por medio de una ley de adaptación. La posición angular se obtiene integrando la velocidad estimada obtenida del observador anterior. Cabe aclarar que en este trabajo se considera el caso no perturbado, es decir, el par de carga del motor es cero.

Un esquema de observadores en cascada sin sensores mecánicos para el MSIPI, se presenta en [20]. En este trabajo se estima la posición, velocidad y el par de carga, utilizando la técnica de modos deslizantes de segundo orden. La estimación de la posición, se realiza mediante la estimación de la fuerza electromotriz.

En [21], se propone un observador de modos deslizantes Super Twisting para el MSIPI. En este trabajo se presenta un observador Super Twisting, el cual estima la posición y velocidad, así como, se estima la resistencia del estator en línea. La posición del motor, se realiza mediante la estimación de la fuerza electromotriz. Para la estimación de la resistencia en línea, se utiliza una relación entre la resistencia del estator y la corriente i en el eje de cuadratura- q . Para mejorar el desempeño del observador se filtra la señal estimada mediante un filtro paso bajo. Sin embargo, en este trabajo no se considera el par de carga, es decir, se considera el caso no perturbado.

1.3. Planteamiento del Problema y Estructura de la Tesis

Este trabajo de tesis, tiene como objetivo general solucionar el problema de estimación de la posición angular mecánica del MSIP.

Para lograr dicho objetivo, se propone diseñar un observador de estado que estimará la posición angular mecánica, a partir de las corrientes y voltajes medidas del estator del motor. Más precisamente, se propone un observador interconectado que permite estimar los flujos magnéticos del estator, con los cuales se estimará la posición angular mecánica del motor. El observador propuesto, está basado en los observadores por modos deslizantes Super Twisting [?].

Para poder realizar este diseño se tomará en cuenta lo siguiente: no se dispone información de la posición angular mecánica del rotor, las corrientes y voltajes son las únicas mediciones disponibles, algunos parámetros en el modelo del motor son desconocidos pero se asumen constantes.

La estructura de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 2 se presenta el modelado dinámico del MSIP que será utilizado en el diseño del observador. En el Capítulo 3 se analiza la propiedad de observabilidad del motor síncrono de imán permanente interior (MSIPI). Se proponen los observadores interconectados basados en la técnica de los modos deslizantes Super Twisting en el Capítulo 4. En el Capítulo 5, se introducen algunos conceptos de control no lineal, así como se presentan estrategias de control que permiten realizar el seguimiento de una trayectoria deseada. Se presentan los resultados en simulación en donde se muestra la eficiencia de los esquemas de observación-control presentados en el Capítulo 6. Finalmente algunas conclusiones son dadas.

1.4. Conclusiones

En este capítulo el control *sensorless* de máquinas eléctricas ha sido introducido. Además, se presento un estado del arte sobre el control sin sensores mecánicos de las máquinas eléctricas.

Por otro lado, se estudió el problema de estimación de la posición angular mecánica del MSIP. Se presentaron los diferentes enfoques para tratar el problema de estimación de la posición.

Capítulo 2

Modelo dinámico del MSIP

2.1. Introducción

El motor síncrono de imanes permanentes es utilizado en la industria en aplicaciones: automotrices, robótica, aeronáutica y aeroespacial, por mencionar algunas; debido a su robustez, buena relación peso-potencia y par-inercia, y su diseño compacto con alto rendimiento.

En una máquina trifásica, en el estator es donde se genera la fuerza electromotriz (FEM) debido a la rotación del campo del rotor. La forma de onda que tiene la FEM, puede ser del tipo sinusoidal o trapezoidal.

Por otra parte, en una máquina síncrona el campo magnético es generado por las bobinas del rotor, en cambio en un motor de imanes permanentes dicho campo es generado por los imanes incrustados en el rotor. La ventaja del MSIP es que los imanes que pueden colocarse en diferentes partes del rotor, tienen la ventaja de eliminar pérdidas por efecto joule, tal es el caso de las bobinas. Una característica particular del rotor del MSIP es que la amplitud del flujo del rotor es constante.

Además, los motores de imanes permanentes se pueden clasificar en cuatro tipos, dependiendo de la posición de los imanes en el rotor:

- **Imanes montados en la superficie:** en este tipo de motores los imanes están colocados en la superficie del rotor, como se muestra en la Figura 2.1a. Las inductancias de este tipo de motor no dependen de la posición del rotor. Cabe mencionar que en este tipo de motor, la

inductancia del *eje-d* es igual a la inductancia en el *eje-q*. Sin embargo, la desventaja en este motor es que los imanes al estar en la superficie, están expuestos a un campo desmagnetizante. Además, están sometidos a fuerzas centrífugas, las cuales pueden provocar desprendimiento de los imanes en el rotor.

- **Imanes insertados:** los imanes están insertados en la superficie del rotor como se muestra en la Figura 2.1b. En este tipo de motor, la inductancia en el *eje-d* es ligeramente diferente de la inductancia en el *eje-q*.
- **Imanes interiores:** otro tipo de MSIP es el que se conoce como motor síncrono de imán permanente interior (MSIPI), en donde los imanes están integrados dentro del rotor como se ve en la Figura 2.1c. En este caso, el campo magnético generado por el rotor es anisotrópico, de modo que, las inductancias dependen de la posición del rotor. Los MSIPI tienen la ventaja de tener mayor durabilidad mecánica y robustez a altas velocidades. Sin embargo, tienen la desventaja de ser más difíciles de manufacturar y de controlar.
- **Concentración de flujo:** en este tipo de motores, los imanes se encuentran localizados en el interior del rotor como se ve en la Figura 2.1d. Los imanes se encuentran colocados de manera radial. Una de las principales ventajas de este tipo de MSIP es la concentración del flujo generado por los imanes y se obtiene una mayor inductancia.

Los MSIP se pueden clasificar en dos categorías, dependiendo de la forma de onda que tiene su FEM:

- **Trapezoidal**
- **Sinusoidal**

Además, los MSIP con FEM sinusoidal se clasifican de acuerdo con la posición en la cual están colocados los imanes:

- **Polos No Salientes:** se le conoce como Motor Síncrono de Imán Permanente Superficial (MSIPS).

- **Polos Salientes:** frecuentemente conocidos como Motor Síncrono de Imán Permanente Interior (MSIPI).

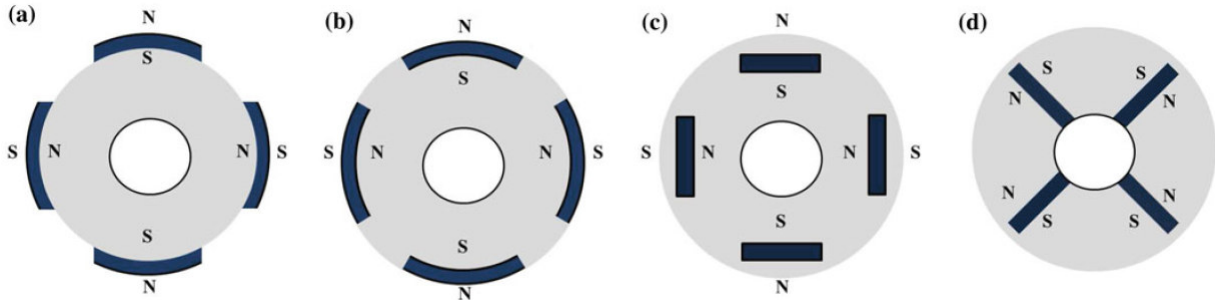


Figura 2.1: Tipos de MSIP: a) imanes en la superficie, b) imanes insertados, c) imanes interiores, d) concentración de flujo

2.2. Consideraciones del modelo dinámico del MSIP

La descripción dinámica de un MSIP es similar a una máquina síncrona clásica, bajo el hecho de que el flujo de los imanes es constante. Entonces, el modelo del MSIP se obtiene a partir del modelo dinámico de la máquina síncrona clásica [22].

Para obtener el modelo dinámico del MSIP, se considerará que la máquina tiene un estator y rotor con distribución simétrica con p número de polos.

Además, se introducen las siguientes suposiciones que permitirán simplificar el modelo de la máquina:

- El efecto de amortiguación del rotor se desprecia.
- El circuito magnético de la máquina no está saturado.
- La distribución de la fuerza magnetomotriz es sinusoidal.
- Los capacitores acoplados entre los bobinados se desprecian.
- Las corrientes de Foucault y la histéresis son despreciables
- Las irregularidades del entrehierro debido a las ranuras del rotor se desprecian.

Bajo las suposiciones anteriores y utilizando conceptos básicos, se obtendrán las ecuaciones tanto eléctricas como mecánicas que describen el comportamiento dinámico del MSIP. El modelo dinámico del MSIP es esencial debido a que, con este modelo se realizará el diseño e implementación de controles y observadores, los cuales serán introducidos en los siguientes capítulos.

2.3. Ecuaciones Eléctricas

Las ecuaciones del voltaje trifásico del estator, representadas en el marco estacionario trifásico (*eje-abc*), se pueden expresar de la siguiente manera

$$V_{sabc} = R_s[I_{sabc}] + \frac{d[\Psi_{sabc}]}{dt} \quad (2.1)$$

donde $[V_{sabc}] = [v_{sa} \ v_{sb} \ v_{sc}]^T$ son los voltajes en cada una de las fases del estator, R_s es la resistencia del estator, $[I_{sabc}] = [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T$ son las corrientes en cada fase y los flujos del estator están representados por $\Psi_{sabc} = [\Psi_{sa} \ \Psi_{sb} \ \Psi_{sc}]^T$, los cuales están dados por lo siguiente

$$[\Psi_{sabc}] = [L_{ss}][I_{sabc}] + [\Psi_{rabc}] \quad (2.2)$$

donde $[\Psi_{rabc}] = [\Psi_{ra} \ \Psi_{rb} \ \Psi_{rc}]^T$ está dado por:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ra} \\ \Psi_{rb} \\ \Psi_{rc} \end{bmatrix} = \psi_r \begin{bmatrix} \cos(p\theta_m) \\ \cos(p\theta_m - 2\pi/3) \\ \cos(p\theta_m + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

con ψ_r como la amplitud del flujo generado por los imanes permanentes, θ_m es la posición angular mecánica del rotor, y p es el número de polos. Ahora bien, para el MSIP, la inductancia mutua L_{ss} se expresa como sigue

$$[L_{ss}] = [L_{s0}] + [L_{sv}]$$

con

$$[L_{so}] = \begin{bmatrix} L_{so} & M_{so} & M_{so} \\ M_{so} & L_{so} & M_{so} \\ M_{so} & M_{so} & L_{so} \end{bmatrix}, \quad [L_{sv}] = L_{sv} \begin{bmatrix} \cos(2p\theta_m) & \cos(2p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(2p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\theta_m) \\ \cos(2p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\theta_m) & \cos(2p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

donde L_{so} , M_{so} y L_{sv} son parámetros positivos que dependen de la máquina.

Ahora, reemplazando (2.2) en (2.1), resulta que

$$[V_{sabc}] = R_s[I_{sabc}] + \frac{d}{dt} \{ [L_{ss}][I_{sabc}] + [\Psi_{rabc}] \} \quad (2.4)$$

Para representar la ecuación (2.4), que esta un marco de referencia estacionario trifásico (*eje-abc*) en un marco de referencia bifásico fijo (*eje- $\alpha\beta$*), se utiliza la transformación de Concordia (ver [6]), esto es

$$\begin{bmatrix} x_{s\alpha} \\ x_{s\beta} \end{bmatrix} = Co^T \begin{bmatrix} x_{sa} \\ x_{sb} \\ x_{sc} \end{bmatrix}$$

donde Co es la matriz de transformación de Concordia, la cual está dada por

$$Co = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Entonces, multiplicando por la izquierda por la matriz Co a la ec. (2.4), y utilizando la siguiente identidad $Co^T Co = I_{2 \times 2}$, siendo x la variable que representa ya sea el voltaje, flujo o corriente, se obtiene que

$$[V_{s\alpha\beta}] = R_s[I_{s\alpha\beta}] + \frac{d[\Lambda_{ss}]}{dt} [I_{s\alpha\beta}] + [\Lambda_{ss}] \frac{d[I_{s\alpha\beta}]}{dt} + \frac{d[\Psi_{r\alpha\beta}]}{dt} \quad (2.6)$$

donde

$$\Lambda_{ss} = \text{Co}^T [\Lambda_{ss}] \text{Co} = \frac{3}{2} L_{sv} \begin{bmatrix} \cos(2p\theta_m) & \sin(2p\theta_m) \\ \sin(2p\theta_m) & \cos(2p\theta_m) \end{bmatrix} + \frac{3}{2} L_{so} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Entonces, derivando la ec.(2.7) con respecto al tiempo, se tiene que

$$\frac{d[\Lambda_{ss}]}{dt} = L_{sv} p \Omega \begin{bmatrix} -\sin(2p\theta_m) & \cos(2p\theta_m) \\ \cos(2p\theta_m) & \sin(2p\theta_m) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ahora, para obtener el flujo en un marco de referencia bifásico fijo (*eje- $\alpha\beta$*), y utilizando la transformación de Concordia (2.5), resulta que

$$[\Psi_{r\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \Psi_{r\alpha} \\ \Psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \text{Co}^T \begin{bmatrix} \Psi_{ra} \\ \Psi_{rb} \\ \Psi_{rc} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_r \begin{bmatrix} \cos(p\theta_m) \\ \sin(p\theta_m) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación anterior, se tiene que

$$\frac{d[\Psi_{r\alpha\beta}]}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p\Omega\Psi_{r\beta} \\ p\Omega\Psi_{r\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Por otro lado, al escribir de manera compacta (2.10), se introduce la matriz antisimétrica J , definida de la siguiente manera $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, de modo que la ecuación (2.10) se expresa de la siguiente forma

$$\frac{d[\Psi_{r\alpha\beta}]}{dt} = -p\Omega J[\Psi_{r\alpha\beta}] \quad (2.11)$$

Entonces, a partir de (2.6) y (2.11), se tiene el modelo electromagnético completo del MSIP, que está dado por

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d[I_{s\alpha\beta}]}{dt} &= [\Lambda_{ss}]^{-1} \left\{ -R_s[I_{s\alpha\beta}] - \frac{d[\Lambda_{ss}]}{dt}[I_{s\alpha\beta}] + p\Omega J[\Psi_{r\alpha\beta}] + [V_{s\alpha\beta}] \right\} \\ \frac{d[\Psi_{r\alpha\beta}]}{dt} &= -p\Omega J[\Psi_{r\alpha\beta}] \end{aligned}} \quad (2.12)$$

2.3.1. Transformación de un marco de referencia fijo (a, b, c) a un marco de referencia rotatorio (d, q)

Para poder llevar a cabo la transformación de una variable representada en un marco de referencia fijo (a, b, c) a un marco de referencia rotatorio (d, q) , esta transformación se realiza de acuerdo con las siguientes dos etapas:

1. **Transformación trifásica a bifásica:** se realiza la transformación del marco de referencia estacionario trifásico (a, b, c) , al marco de referencia estacionario bifásico (α, β) , utilizando la transformación de Concordia (2.5).
2. **Transformación de marco de referencia fijo a uno rotatorio:** se realiza la transformación del marco de referencia estacionario bifásico (α, β) , a un marco de referencia bifásico rotatorio (d, q) , utilizando la transformación de Park, la cual se define a continuación.

La transformación de Park se define como sigue

$$\begin{bmatrix} x_{sd} \\ x_{sq} \end{bmatrix} = P(\theta_e)^T \begin{bmatrix} x_{s\alpha} \\ x_{s\beta} \end{bmatrix}$$

donde $P(\theta_e)$ es la matriz de transformación de Park, la cual está dada por

$$P(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) \\ \sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donde θ_e es la posición eléctrica del rotor, la cual está dada por $\theta_e = p\theta_m$.

Ahora bien, al combinar las transformaciones de Park y de Concordia, se puede pasar de un marco de referencia trifásico fijo (a, b, c) a un marco de referencia bifásico rotatorio (d, q) , esto es

$$\begin{bmatrix} x_{sd} \\ x_{sq} \end{bmatrix} = P(\theta_e)^T \begin{bmatrix} x_{s\alpha} \\ x_{s\beta} \end{bmatrix} = P(\theta_e)^T Co^T \begin{bmatrix} x_{sa} \\ x_{sb} \\ x_{sc} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Entonces, utilizando la ecuación (2.14) en (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \text{CoP}(\theta_e)\text{P}(\theta_e)^T\text{Co}^T[V_{sabc}] &= R_s\text{CoP}(\theta_e)\text{P}(\theta_e)^T\text{Co}^T[I_{sabc}] + \frac{d[\Psi_{rabc}]}{dt} \\ &+ \frac{d}{dt}\{[L_{ss}]\text{CoP}(\theta_e)\text{P}(\theta_e)^T\text{Co}^T[I_{sabc}]\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ahora, multiplicando ambos lados de la ecuación (2.15) por $\text{P}(\theta_e)^T\text{Co}^T$, y tomando en cuenta las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \text{P}(\theta_e)J\text{P}(\theta_e)^T &= J \\ \text{P}(\theta_e)\frac{d\text{P}(\theta_e)^T}{dt} &= J \end{aligned} \quad (2.16)$$

Después de realizar algunas operaciones, la ecuación (2.15) se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} [V_{sdq}] &= R_s[I_{sdq}] + \text{P}(\theta_e)^T\frac{d}{dt}\{[\Lambda_{ss}]\text{P}(\theta_e)\}[I_{sdq}] \\ &+ \text{P}(\theta_e)^T[\Lambda_{ss}]\text{P}(\theta_e)\frac{d[I_{sdq}]}{dt} - p\Omega J[\Psi_{rdq}] \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde la matriz $[\Lambda_{ss}]$ se expresa en términos de L_d y L_q de la siguiente manera

$$\Lambda_{ss} = \frac{L_d - L_q}{2} \begin{bmatrix} \cos(2p\theta_m) & \sin(2p\theta_m) \\ \sin(2p\theta_m) & \cos(2p\theta_m) \end{bmatrix} + \frac{L_d + L_q}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.18), se tiene que

$$\frac{d[\Lambda_{ss}]}{dt} = 3p\Omega\{L_d - L_q\} \begin{bmatrix} -\sin(2p\theta_m) & \cos(2p\theta_m) \\ \cos(2p\theta_m) & \sin(2p\theta_m) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Caso del MSIP

De la ec. (2.17) se puede obtener el modelo del MSIP. Para ello se definen las inductancias L_d y L_q , a partir de las inductancias L_{sv} y L_{so} de la siguiente manera

$$L_d = \frac{3(L_{so} + L_{sv})}{2} \quad (2.20)$$

$$L_q = \frac{3(L_{so} - L_{sv})}{2} \quad (2.21)$$

Además, suponiendo que la amplitud del flujo producido por los imanes permanentes es constante, la ecuación de voltaje en el marco de referencia bifásico rotatorio (d, q) del MSIP, es la siguiente

$$[V_{sdq}] = [R_s][I_{sdq}] - p\Omega [L_{dq}]J[I_{sdq}] + [L_{dq}]\frac{d[I_{sdq}]}{dt} - p\Omega J[\Psi_{rdq}] \quad (2.22)$$

donde

$$[L_{dq}] = P(\theta_e)^T \text{Co}^T [L_{ss}] \text{Co} P(\theta_e) = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}, [R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix}$$

Continuando con la obtención del modelo, considerando un valor de la posición eléctrica del rotor θ_e , la componente en el eje- q del flujo del rotor es igual a cero, es decir, $\Psi_{rq} = 0$. Entonces, la componente en el eje- d del flujo del rotor es igual a una constante ψ_r , es decir, $\Psi_{rd} = \psi_r$. De este modo se tiene que el voltaje en el marco de referencia bifásico rotatorio (d, q), es el siguiente

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_{sd}}{dt} \\ \frac{di_{sq}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p\Omega\psi_r \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Finalmente, el modelo electromagnético del MSIP en el marco de referencia rotatorio (d, q), es el siguiente

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{di_{sd}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} i_{sd} + p\Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} + \frac{v_{sd}}{L_d} \\ \frac{di_{sq}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q} i_{sq} - p\Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} + \frac{v_{sq}}{L_q} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} \end{aligned}} \quad (2.24)$$

Caso del MSIPS

En este tipo de motor, la inductancia en la componente en el eje- d y la componente en el eje- q son iguales, es decir, $L_d = L_q = L_s$. Entonces, partiendo de la ecuación de voltaje del MSIPS (2.22) y considerando el cambio en las inductancias, se tiene que

$$[V_{sdq}] = [R_s][I_{sdq}] - p\Omega [L_s]J[I_{sdq}] + [L_s] \frac{d[I_{sdq}]}{dt} - p\Omega J[\Psi_{rdq}] \quad (2.25)$$

donde

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix}$$

Expresando de manera compacta (2.25), tenemos que

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -p\Omega L_s \\ p\Omega L_s & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_{sd}}{dt} \\ \frac{di_{sq}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p\Omega \psi_r \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Entonces, el modelo electromagnético del MSIPS en el marco de referencia rotatorio (d, q), es el siguiente

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{di_{sd}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_{sd} + p\Omega i_{sq} + \frac{v_{sd}}{L_s} \\ \frac{di_{sq}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_{sq} - p\Omega i_{sd} + \frac{v_{sq}}{L_s} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_s} \end{aligned}} \quad (2.27)$$

2.3.2. Transformación de marco de referencia rotatorio (d, q) a marco de referencia fijo (α, β)

Para poder llevar a cabo la transformación del marco de referencia rotatorio (d, q) a marco de referencia fijo (α, β), se hace uso de la transformación de Park (2.13), como sigue

$$\begin{bmatrix} x_{s\alpha} \\ x_{s\beta} \end{bmatrix} = P(\theta_e) \begin{bmatrix} x_{sd} \\ x_{sq} \end{bmatrix}$$

Entonces, multiplicando por la izquierda la matriz $P(\theta_e)$ por (2.22), y utilizando la identidad $P(\theta_e)^T P(\theta_e) = I_{2 \times 2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} [V_{s\alpha\beta}] = & P(\theta_e) \{ [R_s] - p\Omega [L_{dq}] J \} P(\theta_e)^T [I_{s\alpha\beta}] \\ & + P(\theta_e) [L_{dq}] \frac{d}{dt} \{ P(\theta_e)^T [I_{s\alpha\beta}] \} \\ & - p\Omega P(\theta_e) J P(\theta_e)^T [\Psi_{r\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ahora tomando en cuenta las expresiones de (2.16), la ecuación anterior se puede expresar como sigue

$$[V_{s\alpha\beta}] = [R_s] [I_{s\alpha\beta}] + [L_{dq}] \frac{d[I_{s\alpha\beta}]}{dt} - p\Omega J [\Psi_{r\alpha\beta}] \quad (2.29)$$

Caso del MSIPI

Tomando en cuenta la matriz de inductancias $[L_{dq}] = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}$, (2.29) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_{s\alpha}}{dt} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p\Omega \Psi_{r\beta} \\ p\Omega \Psi_{r\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Entonces, el modelo electromagnético del MSIPI en el marco de referencia fijo (α, β) está conformado por (2.10) y (2.30) es el siguiente

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{di_{s\alpha}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} i_{s\alpha} + \frac{p}{L_d} \Omega \Psi_{r\beta} + \frac{v_{s\alpha}}{L_d} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q} i_{s\beta} - \frac{p}{L_q} \Omega \Psi_{r\alpha} + \frac{v_{s\beta}}{L_q} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} &= -p\Omega \Psi_{r\beta} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} &= p\Omega \Psi_{r\alpha} \end{aligned}} \quad (2.31)$$

Caso del MSIPS

En el MSIPS, las componentes de la inductancia en el eje- d y el eje- q son iguales. Entonces, definiendo la matriz $L_s = \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix}$, y sustituyendola por L_{dq} en (2.29), se obtiene

$$[V_{s\alpha\beta}] = [R_s][I_{s\alpha\beta}] + [L_s] \frac{d[I_{s\alpha\beta}]}{dt} - p\Omega J[\Psi_{r\alpha\beta}] \quad (2.32)$$

Expresando la ecuación (2.32) de manera compacta, se tiene

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_{s\alpha}}{dt} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p\Omega\Psi_{r\beta} \\ p\Omega\Psi_{r\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Finalmente, el modelo electromagnético del MSIPS en el marco de referencia fijo (α, β) , está dado por

$$\begin{array}{l} \frac{di_{s\alpha}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s}i_{s\alpha} + \frac{p}{L_s}\Omega\Psi_{r\beta} + \frac{v_{s\alpha}}{L_s} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s}i_{s\beta} - \frac{p}{L_s}\Omega\Psi_{r\alpha} + \frac{v_{s\beta}}{L_s} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = -p\Omega\Psi_{r\beta} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = p\Omega\Psi_{r\alpha} \end{array} \quad (2.34)$$

2.4. Ecuaciones Mecánicas

Ahora, introduciremos el modelo dinámico de la parte mecánica del MSIP. La posición angular mecánica del rotor θ_m , está dada por

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \Omega \quad (2.35)$$

Mientras que la dinámica de la velocidad angular el rotor Ω , resulta ser

$$J \frac{d\Omega}{dt} + f_v \Omega = T_e - T_l \quad (2.36)$$

donde Ω es la velocidad angular mecánica del rotor, f_v es el coeficiente de fricción viscosa, J es la inercia de la máquina más la inercia de la carga, T_l es el par de carga, y T_e es el par electromagnético.

Por otro lado, la dinámica de la posición angular eléctrica θ_e , está dada por

$$\frac{d\theta_e}{dt} = \omega \quad (2.37)$$

donde $\omega = p\Omega$ representa la velocidad angular eléctrica del motor.

2.4.1. Par electromagnético

Caso del MSIPI

El par electromagnético T_e es producido por la interacción entre los campos magnéticos de los polos de los imanes del rotor y los polos inducidos del entrehierro. Entonces, el par electromagnético para el MSIPI está dado por [22]

$$T_e = p(L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + p(\Psi_{rd} i_{sq} - \Psi_{rq} i_{sd}) \quad (2.38)$$

Al reemplazar (2.38) en (2.36), se tiene

$$J \frac{d\Omega}{dt} + f_v \Omega = p(L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + p(\Psi_{rd} i_{sq} - \Psi_{rq} i_{sd}) - T_l \quad (2.39)$$

En el marco de referencia (d, q) , la componente del flujo del rotor en el eje- q es considerada igual a cero, es decir, $\Psi_{rq} = 0$, y la componente en el flujo del rotor en el eje- d es igual a ψ_r , es decir, $\Psi_{rd} = \psi_r$. Entonces, la ecuación (2.39) resulta ser

$$J \frac{d\Omega}{dt} + f_v \Omega = p(L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + p\psi_r i_{sq} - T_l \quad (2.40)$$

Finalmente, la dinámica de velocidad del rotor del MSIP está dada por

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J}(L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + \frac{p}{J} \psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_l} \quad (2.41)$$

Caso del MSIPS

Puesto que las inductancias en el eje- d y en el eje- q son iguales, esto es $L_s = L_d = L_q$, el término $p(L_d - L_q) i_{sd} i_{sq}$ de (2.38) es igual a cero, entonces, el par electromagnético está dado por

$$T_e = p \psi_r i_{sq} \quad (2.42)$$

Reemplazando la ec.(2.42) en (2.36), resulta que

$$J \frac{d\Omega}{dt} + f_v \Omega = p \psi_r i_{sq} - T_l \quad (2.43)$$

Finalmente la dinámica de velocidad del rotor del MSIPS está dada por

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J} \psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_l} \quad (2.44)$$

2.5. Representación en espacio de estados

Un sistema dinámico no lineal está representado por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbb{F}(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.45)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema, \mathbb{F} es un campo vectorial suave y h es una función de clase C^∞ .

Generalmente, el sistema no lineal está representado de forma afín con la entrada, esto es

$$\Sigma_a: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.46)$$

Considerando lo anterior, se representará el modelo del MSIP en una representación en variables de estados.

2.5.1. Modelo en marco de referencia (d, q)

Caso del MSIP

Considerando las ecuaciones eléctricas definidas en (2.24), mecánicas de (2.35) y (2.41) del modelo completo del MSIP en el marco de referencia (d, q) . Entonces, el modelo del MSIP, representado en variables de estado, está dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{sd}}{dt} \\ \frac{di_{sq}}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\theta_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} i_{sd} + p\Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} \\ -\frac{R_s}{L_q} i_{sq} - p\Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} \\ \frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + \frac{p}{J} \psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J} \Omega \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ T_l \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

donde $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} & \Omega & \theta_m \end{bmatrix}$ es el vector de estados, los voltajes y el par de carga $\begin{bmatrix} v_{sd} & v_{sq} & T_l \end{bmatrix}$ son las entradas, y las salidas medibles son las corrientes $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} \end{bmatrix}$.

Se asume que el par de carga T_l será considerado como una entrada desconocida. Sin embargo, en un análisis posterior este parámetro será identificado utilizando estrategias de observación.

Caso del MSIPS

Considerando las ecuaciones eléctricas definidas en (2.27), mecánicas de (2.35) (2.44) del modelo completo del MSIPS en el marco de referencia (d, q) . Entonces, el modelo del MSIPS, representado en variables de estado, está dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{sd}}{dt} \\ \frac{di_{sq}}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\theta_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s}i_{sd} + p\Omega i_{sq} \\ -\frac{R_s}{L_s}i_{sq} - p\Omega i_{sd} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_s} \\ \frac{p}{J}\psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J}\Omega \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ T_l \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

donde $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} & \Omega & \theta_m \end{bmatrix}$ es el vector de estados, los voltajes y el par de carga $\begin{bmatrix} v_{sd} & v_{sq} & T_l \end{bmatrix}$ son las entradas, y las salidas medibles son las corrientes $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} \end{bmatrix}$.

El par de carga T_l es un parámetro desconocido que se pretende estimar.

2.5.2. Modelo en el marco de referencia (α, β)

Caso del MSIPI

Para obtener el modelo completo del MSIPI en el marco de referencia (α, β) , se aplica la transforman de Park como sigue

$$\begin{bmatrix} x_{sd} \\ x_{sq} \end{bmatrix} = P(\theta_e)^T \begin{bmatrix} x_{s\alpha} \\ x_{s\beta} \end{bmatrix}$$

donde $P(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) \\ \sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) \end{bmatrix}$, a la ecuación (2.41), obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = & \frac{p}{J}(L_d - L_q) \left\{ i_{s\beta} i_{s\alpha} [\cos^2(\theta_e) - \sin^2(\theta_e)] + \cos(\theta_e) \sin(\theta_e) [i_{s\beta}^2 - i_{s\alpha}^2] \right\} \\ & + \frac{p}{J}\psi_r [i_{s\beta} \cos(\theta_e) - i_{s\alpha} \sin(\theta_e)] - \frac{f_v}{J}\Omega - \frac{1}{J}T_l \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde

$$\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \cos(\theta_e) + i_{s\beta} \sin(\theta_e) \\ i_{s\beta} \cos(\theta_e) - i_{s\alpha} \sin(\theta_e) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

A partir de las ecuaciones (2.31), (2.35) y (2.49), finalmente, se tiene el modelo completo del MSIP en el marco de referencia (α, β) , esto es

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{s\alpha}}{dt} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\theta_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} i_{s\alpha} + \frac{p}{L_d} \Omega \Psi_{r\beta} \\ -\frac{R_s}{L_q} i_{s\beta} - \frac{p}{L_q} \Omega \Psi_{r\alpha} \\ -p\Omega \Psi_{r\beta} \\ p\Omega \Psi_{r\alpha} \\ a_1^* \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \\ T_l \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$a_1^* = \frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{s\beta} i_{s\alpha} \cos(2\theta_e) + \frac{p}{J} (L_d - L_q) \cos(\theta_e) \sin(\theta_e) (a^*) + \frac{p}{J} \psi_r [i_{s\beta} \cos(\theta_e) - i_{s\alpha} \sin(\theta_e)] - \frac{f_v}{J} \Omega$$

donde $a^* = i_{s\beta}^2 - i_{s\alpha}^2$, $[i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ \Psi_{r\alpha} \ \Psi_{r\beta} \ \Omega \ \theta_m]$ es el vector de estados, $[v_{s\alpha} \ v_{s\beta} \ T_l]$ es el vector de entradas, las salidas medibles del sistema son las corrientes $[i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]$. El par de carga T_l es un parámetro desconocido que se pretende estimar.

Caso del MSIPS

Para representar el modelo del MSIPS en el marco de referencia (α, β) , se aplica la transformación de Park a la ecuación (2.44).

Entonces, tomando en cuenta (2.50) se puede reescribir (2.44) como sigue

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J} \psi_r [i_{s\beta} \cos(\theta_e) - i_{s\alpha} \sin(\theta_e)] - \frac{f_v}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_l \quad (2.52)$$

A partir de (2.34), (2.35) y (2.52), finalmente, se tiene el modelo completo del MSIPS en el marco de referencia (α, β) , esto es

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{s\alpha}}{dt} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\theta_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s}i_{s\alpha} + \frac{p}{L_s}\Omega\Psi_{r\beta} \\ -\frac{R_s}{L_s}i_{s\beta} - \frac{p}{L_s}\Omega\Psi_{r\alpha} \\ -p\Omega\Psi_{r\beta} \\ p\Omega\Psi_{r\alpha} \\ \frac{p}{J}\psi_r [i_{s\beta}\cos(\theta_e) - i_{s\alpha}\sin(\theta_e)] - \frac{f_v}{J}\Omega \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \\ T_l \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

donde $[i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ \Psi_{r\alpha} \ \Psi_{r\beta} \ \Omega \ \theta_m]$ es el vector de estados, $[v_{s\alpha} \ v_{s\beta} \ T_l]$ es el vector de entradas, las salidas medibles del sistema son las corrientes $[i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]$. El par de carga T_l es un parámetro desconocido que se pretende estimar.

Cabe señalar que el modelo del MSIP se utilizará posteriormente para el diseño de observadores de posición.

2.6. Condiciones de operación y referencias deseadas

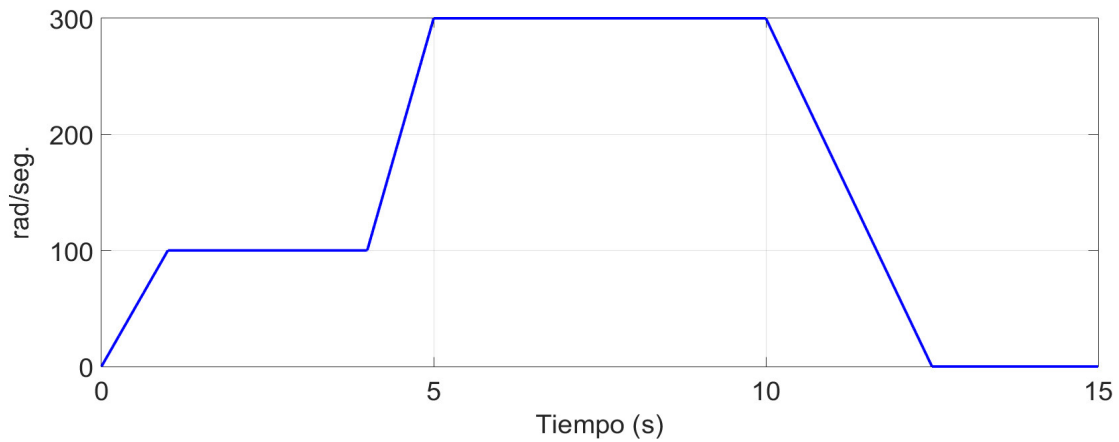
El objetivo es diseñar un control robusto para el seguimiento de velocidad Ω , y de corriente i_{sd} del MSIP, utilizando únicamente mediciones de las corrientes y voltajes.

Además, los parámetros nominales del MSIP que serán utilizados en esta tesis, se encuentran en la Tabla (2.1).

Párametro	Magnitud	Unidad
Corriente	6	A
Velocidad	3000	rpm
R_s	3.25	ohm
L_d	0.018	H
J	0.00417	kg-m ²
Par	9	N-m
ψ_r	0.341	Wb
p	3	
L_q	0.034	H
f_v	0.0034	kg-m ²

Tabla 2.1: Parámetros nominales del MSIP.

Por otro lado, para realizar el control de velocidad, se considera una trayectoria de referencia de velocidad Ω^* definida como se muestra en la Figura 2.2, donde se pueden apreciar los diferentes cambios de velocidad, en diferentes tiempos.

Figura 2.2: Referencia de velocidad Ω^*

La señal de referencia para la corriente i_{sd} , se determina a partir del método de *máximo par por amper* (MPPA) [23], con el fin de aumentar la eficiencia del MSIP.

El método de MPPA busca maximizar el par electromagnético del MSIP

$$T_e = p(L_d - L_q)i_{sd}i_{sq} + p\psi_r i_{sq} \quad (2.54)$$

Para lograr esto, se busca maximizar el par en función de la corriente. Para ello se calcula la derivada con respecto de i_{sd} de la ecuación (2.54), e igualarse a cero. Tomando en cuenta la relación existente entre las corrientes del estator i_{sd} , i_{sq} y la corriente de fase del estator I_a , la cual está dada por

$$I_a^2 = i_{sd}^2 + i_{sq}^2 \quad (2.55)$$

Entonces, utilizando (2.55) y reemplazando i_{sq} en la ecuación (2.54), se tiene

$$T_e = p[\psi_r + (L_d - L_q)]\sqrt{I_a^2 - i_{sd}^2}$$

La variación del par con respecto de la corriente i_{sd} , está dada por

$$\frac{\partial T_e}{\partial i_{sd}} = \frac{p[-\psi_r i_{sd} + (L_d - L_q)(I_a^2 - i_{sd}^2) - (L_d - L_q)i_{sd}^2]}{\sqrt{I_a^2 - i_{sd}^2}} \quad (2.56)$$

Al igualar a cero la ecuación anterior, se tiene que

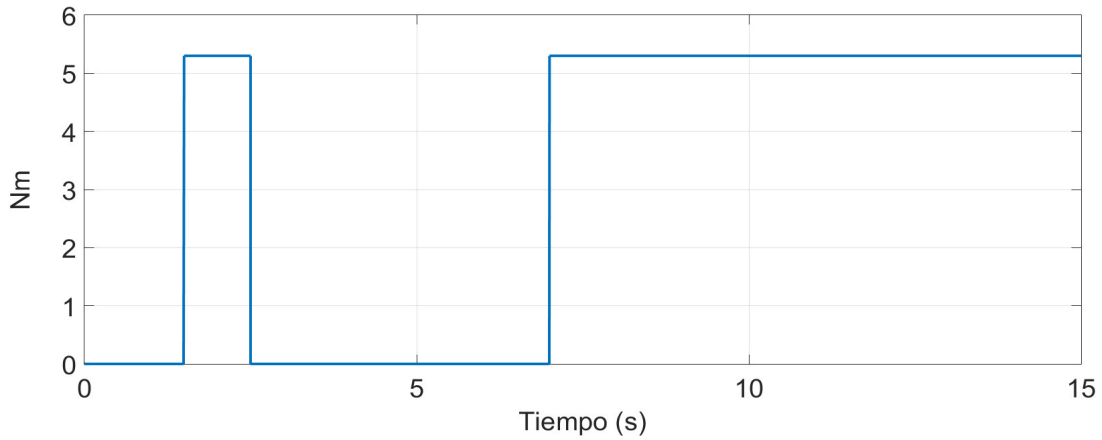
$$2i_{sd}^2 + \frac{\psi_r}{(L_d - L_q)}i_{sd} - I_a^2 = 0$$

Por último, reemplazando (2.55) en la expresión anterior, y despejando la referencia i_{sd}^* se obtiene que

$$i_{sd}^* = -\frac{\psi_r}{2(L_d - L_q)} - \sqrt{\frac{\psi_r^2}{4(L_d - L_q)^2} + i_{sq}^2} \quad (2.57)$$

Entonces, (2.57), representa la referencia deseada de corriente i_{sd} que será utilizada para el objetivo de control de corriente del MSIP.

Finalmente, el par de carga aplicado al motor para la realización de las simulaciones se muestra en la Figura 2.3.

Figura 2.3: Par de Carga T_l

2.7. Conclusiones

En este capítulo se obtuvo el modelo electromagnético completo del MSIP representado en variables de estados. Este modelo será utilizado para estudiar las propiedades de observabilidad y controlabilidad del motor. Una vez realizado este estudio, se diseñarán los observadores y controladores para alcanzar los objetivos de control.

Por último, se presentaron las condiciones de operación del motor, así como las referencias deseadas de velocidad y de corriente que se considerarán en los algoritmos de control y observación en presencia de cambios en el par de carga, el cual será considerado como perturbación.

Capítulo 3

Observabilidad del MSIPI

3.1. Introducción

En este capítulo se introducirán definiciones y conceptos acerca de la teoría de observadores para sistemas no lineales, para estimar la posición, velocidad, resistencia del estator e identificar el par de carga del MSIPI. Además, se determinan las condiciones de operación bajo las cuales la máquina es observable.

A diferencia de los sistemas lineales, la observabilidad de los sistemas no lineales puede depender de la entrada aplicada. Tomando en cuenta esta propiedad, se introducirán definiciones y conceptos para determinar la observabilidad de los sistemas no lineales, con el fin de conocer si es posible reconstruir el vector de estado del sistema, a partir de las entradas y de las salidas del sistema original [24].

Por otro lado, para construir el estado de un sistema, se utiliza un sistema dinámico llamado observador (también llamado sensor computacional), el cual es capaz de reconstruir el vector de estado de un sistema, únicamente a partir de mediciones de la salida y la entrada del sistema [3].

El objetivo de este capítulo es analizar la propiedad de observabilidad del MSIPI, y establecer las condiciones bajo las cuales es posible reconstruir el vector de estado para este tipo de máquina.

3.2. Observabilidad

La propiedad de observabilidad permite conocer si es posible reconstruir la trayectoria completa de un sistema (vector de estado), a partir de la información obtenida de las entradas y salidas medibles. Una vez que el sistema resulte ser observable, la siguiente etapa es reconstruir el estado. Para ello, considere el siguiente sistema dinámico

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \mathbb{F}(\hat{x}, u, y) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Entonces, el sistema (3.1) es un observador para el sistema no lineal de la forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = F(x, u, y) \\ y = h(x) \end{cases}$$

tal que, el error de estimación $e = x - \hat{x}$, satisface la siguiente condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| \rightarrow 0$$

Generalmente, los observadores se pueden utilizar en las siguientes aplicaciones:

- El monitoreo en línea de variables de interés, esto con el fin de detectar problemas operacionales en el sistema.
- La retroalimentación de los estados estimados a un lazo de control.

En la Figura 3.1 se muestra el esquema de como se implementa un observador, que mediante las mediciones de la salida y la entrada y el modelo matemático del proceso, se realiza la estimación de variables y parámetros no medibles.

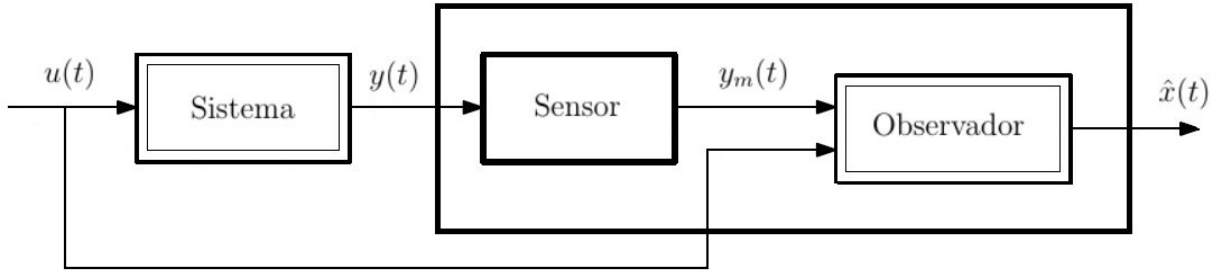


Figura 3.1: Esquema de implementación de un observador

3.2.1. Observabilidad de Sistemas Lineales

Consideremos primero el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ la entrada, $y \in \mathbb{R}^p$ la salida y las matrices A , B , C y D son matrices de dimensiones compatibles.

DEFINICIÓN 3.1. *El sistema (3.2) es observable si para cualquier estado inicial $x(0)$, existe un tiempo finito t_1 , tal que a partir del conocimiento de la entrada u y de la salida y sobre el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar en forma única el estado inicial $x(0)$. En caso contrario el sistema es no observable [24].*

Un resultado frecuentemente utilizado para verificar si el sistema (3.2) cumple con la propiedad de observabilidad, es el criterio de Kalman de observabilidad [25]. Entonces, de acuerdo con el criterio de Kalman, se dice que el sistema (3.2) es observable, sí y solo sí, la matriz $[\mathcal{O}_{A,C}]$ es de rango completo, i.e., $rank([\mathcal{O}_{A,C}]) = n$, donde n es la dimensión del sistema.

$$\mathcal{O}_{A,C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta lo anterior se puede concluir que la observabilidad de un sistema lineal no depende de la entrada aplicada al sistema. Además, este resultado se puede extender a sistemas lineales variantes en el tiempo.

3.2.2. Observabilidad de Sistemas No Lineales

En esta sección, la propiedad de observabilidad de sistemas no lineales será estudiada. Para ello, se introducirán las definiciones que permiten determinar bajo que condiciones el sistema no lineal es observable.

Contrario a los sistemas lineales, la propiedad de observabilidad para sistemas no lineales, depende de la entrada aplicada al sistema. Puesto que el observador depende de la entrada, se requiere un estudio para la clasificación de entradas aplicadas al sistema. Está claro que hay unas entradas para las cuales la propiedad de observabilidad se pierde, a dichas entradas se les conoce como entradas singulares.

Por otro lado, para los sistemas en los cuales la propiedad de observabilidad no depende de la entrada, se le llaman *sistemas uniformemente observables*.

No existe una metodología general para el diseño de observadores no lineales, muchas de ellas están diseñados a partir de formas canónicas, para las cuales la construcción de un observador es posible. Una de las metodologías clásicas de diseño de observadores, consiste en diseñar los observadores linealizando el sistema no lineal en un punto de equilibrio para estimar los estados del sistema. Considerando que el desempeño dicho observador sólo será eficiente en una vecindad del punto de equilibrio.

A continuación, se presentan algunos clases de observadores utilizados en sistemas no lineales:

- **Observador de Kalman extendido:** dicho algoritmo es ampliamente utilizado debido a su facilidad de implementación y su buen desempeño. Además, dicho observador opera en una vecindad de un punto particular del sistema, lo cual limita su dinámica. No es robusto ante incertidumbres paramétricas. La convergencia del observador es del tipo asintótica [26].

- **Observador de Luenberger generalizado:** este observador se utiliza en sistemas linealizados en un punto de equilibrio. La sintonización de las ganancias de las ganancias del observador, se realiza considerando la metodología del lugar geométrico de las raíces. La convergencia del observador es del tipo asintótica. No es robusto ante incertidumbres paramétricas [27].
- **Observador de alta ganancia:** en este observador el sistema no lineal se transforma en una representación canónica, para la cual la condición de observabilidad se satisface para cualquier entrada. A partir de dicha representación canónica tipo *feedback linealizante* se diseña el observador. La sintonización de las ganancias del observador, generalmente se obtienen a partir de la solución de la ecuación algebraica de Riccati. Su convergencia es del tipo asintótica. Este observador no es robusto ante incertidumbres paramétricas, además, de amplificar ruido en la señales del sistema con la ganancia [28].
- **Observador por modos deslizantes:** este tipo de observador es robusto ante incertidumbres paramétricas y cierta clase perturbaciones. Su convergencia es en tiempo finito. No existe una metodología para determinar las ganancias del observador. La desventaja principal de este observador, es el efecto indeseable de *chattering* en la señal estimada [29].

Conceptos de Observabilidad

Ahora se estudiará la propiedad de observabilidad, para la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbb{F}(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema, \mathbb{F} es un campo vectorial suave y h es una función de clase C^∞ .

La definición de observabilidad, parte de la siguiente definición de distinguibilidad

DEFINICIÓN 3.2 (Distinguibilidad). Sea $u(t)$ una entrada, $\forall T > 0$, $x(0)$ y $\bar{x}(0)$ dos condiciones iniciales distintas y sus correspondientes trayectorias de salida $y(t, x(0), u(t))$ y $\bar{y}(t, \bar{x}(0), u(t))$, también distintas. Entonces, se dice que $u(t)$ distingue a $x(0)$ y $\bar{x}(0)$ en el intervalo de $[0, T]$ [30].

La definición anterior es muy general, entonces, partiremos del caso particular en donde se buscan aquellas parejas de condiciones iniciales que no se pueden distinguir en un intervalo de tiempo.

DEFINICIÓN 3.3 (Indistinguibilidad). *Para el sistema (3.3), dos puntos x y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ son indistinguibles si para toda entrada aplicada $u(t)$, $\forall T > 0$, las salidas $y(t, x(0), u(t))$ y $\bar{y}(t, \bar{x}(0), u(t))$ son idénticas en el intervalo $[0, T]$, donde x y \bar{x} son trayectorias del sistema.*

Definiendo el conjunto de todos los puntos que son indistinguibles de x_0 , esto es $\mathbb{l}(x_0)$

A continuación, se definirán los diferentes conjuntos de entradas que hacen al sistema observable.

DEFINICIÓN 3.4 (Entrada universal). *Una función de entrada $u(t)$ es universal para un sistema en el intervalo $[0, T]$, si cualesquiera dos estados iniciales distintos $x(0)$ y $\bar{x}(0)$ son distinguibles [31].*

El caso contrario al anterior, se define a continuación

DEFINICIÓN 3.5 (Entrada singular). *Una entrada $u(t)$ se dice que es singular para un sistema en el intervalo $[0, T]$, si cualesquiera dos estados iniciales distintos $x(0)$ y $\bar{x}(0)$ son indistinguibles [31].*

A continuación, se define una clase de sistemas que son observables para cualquier entrada universal.

DEFINICIÓN 3.6 (Observabilidad uniforme). *Un sistema en el que todas las entradas son universales, se le conoce como uniformemente observable [31].*

DEFINICIÓN 3.7 (Observabilidad).

- i) *El sistema (3.3) es observable en x_0 , si su conjunto de puntos indistinguibles $\mathbb{l}(x_0) = x_0$*
- ii) *El sistema (3.3) es observable, si $\mathbb{l}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$*
- iii) *El sistema (3.3) es observable, si no tiene algún par de estados indistinguibles.*

DEFINICIÓN 3.8 (Matriz de Observabilidad). *El espacio de observación de un sistema, se define como el espacio vectorial más pequeño, definido por \mathcal{O} , el cual está conformado por funciones de clase C^∞ , conteniendo componentes de la salida h y también, de la derivada de Lie de la función de salida del sistema h en la dirección del campo $\mathbb{F}(x, u)$, para cualquier entrada u .*

$$\mathcal{O} = \text{Span} \left\{ h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x) \right\} \quad (3.4)$$

El sistema (3.3) se dice que es observable si la matriz $d\mathcal{O}$

$$d\mathcal{O} = \begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \dots \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

es de rango completo, i.e.

$$\text{rank} \{d\mathcal{O}\} = n$$

DEFINICIÓN 3.9. *Sea $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ y sea $\mathbb{V} \subset \mathfrak{R}^n$ una vecindad de x_0 . Entonces, $x_1 \in \mathbb{V}$ se dice que \mathbb{V} -**indistinguible** de x_0 si x_1 es indistinguible de x_0*

DEFINICIÓN 3.10 (Observabilidad débil). *El sistema (3.3), se dice que es **débilmente observable** si $\forall x_0 \in \mathbb{W}$, existe una vecindad \mathbb{V} de x_0 tal que $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, y además $\mathbb{I}(x_0) = x_0$*

Para sistemas lineales, las definiciones (3.7) y (3.10) son equivalentes y dan como resultado el criterio de Kalman de observabilidad, previamente ya mencionado.

Ahora, considere la siguiente clase de sistemas no lineales con múltiples salidas

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) & x \in \mathfrak{R}^n \\ y = h(x) & y \in \mathfrak{R}^p \end{cases} \quad (3.5)$$

donde f es un campo vectorial suave, h_1, \dots, h_p son funciones suaves y sus diferenciales dh_1, \dots, dh_p son vectores linealmente independientes en \mathfrak{R}^n .

DEFINICIÓN 3.11. *Un sistema es **localmente observable**, si cada estado x_0 puede ser distinguible de otros estados vecinos, al utilizar las trayectorias del sistema que permanecen cerca de x_0*

Ahora se establece el siguiente resultado

TEOREMA 3.1. *El sistema (3.5) es **localmente observable** en x_0 , si*

$$\text{rank} \{dh_i, \dots, dL_f^j h_i\} = n \quad \forall x \in U_0 \subset \mathbb{R}^n \quad i = 1, \dots, p; j \geq 0 \quad (3.6)$$

3.3. Análisis de Observabilidad del MSIPI

Uno de los problemas más importantes del control de motores síncronos, surge cuando la velocidad y la posición no son medibles. Debido a que la propiedad de observabilidad del motor se pierde, principalmente a bajas velocidades lo que provoca que la implementación de cualquier ley de control sea limitada. Entonces, se debe verificar si la propiedad de observabilidad del motor se cumple para el caso del MSIPI.

Por otro parte, la estimación de la posición resulta ser más difícil que la estimación de la velocidad del rotor, debido a que no siempre se conoce la condición inicial del rotor. Aunque, la posición se puede obtener al integrar la velocidad. Sin embargo, desde el punto de vista práctico no se obtiene un buen resultado debido a que no siempre se conoce la condición inicial de la posición del rotor, y además la señal está contaminada por ruido introducido debido a los sensores (tacómetros).

Antes de diseñar un observador, es necesario verificar que el MSIPI es observable. Para ello se considera que el flujo magnético no está saturado, la forma del campo magnético es sinusoidal, y la influencia de la histeresis magnética es despreciable.

Objetivo para dar solución al problema de Observación del MSIPI: diseñar un observador que permita estimar la posición θ_m , velocidad Ω del rotor, el par de carga T_l y la resistencia del estator R_s , a partir de las corrientes y voltajes del MSIPI.

Ahora el análisis de observabilidad para el MSIPI se realizará de la siguiente manera

- 1) Para determinar si la posición θ_m es observable, se analiza el modelo del MSIPI en el marco de referencia (α, β) , a partir de la medición de las corrientes y voltajes del estator.
- 2) Para determinar si la velocidad Ω es observable, se analiza el modelo del MSIPI en el marco de referencia (d, q) , tomando en cuenta que las únicas mediciones disponibles son las corrientes y voltajes del estator.

3.3.1. Análisis de Observabilidad de posición θ_m en el marco (α, β)

En esta sección se analizará la propiedad de observabilidad del MSIPI, asumiendo que todos los parámetros son conocidos.

A partir de (2.29) del Capítulo 2, el modelo electromagnético del MSIPI en el marco de referencia (α, β) es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{s\alpha}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{s\alpha} + \frac{p}{L_d} \Omega \Psi_{r\beta} + \frac{v_{s\alpha}}{L_d} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{s\beta} - \frac{p}{L_q} \Omega \Psi_{r\alpha} + \frac{v_{s\beta}}{L_d} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = -p\Omega \Psi_{r\beta} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = p\Omega \Psi_{r\alpha} \end{array} \right.$$

el cual en forma general se representa como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_{\alpha,\beta}}{dt} = \mathbb{F}(X_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}) \\ y = h(X_{\alpha,\beta}) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

donde

$$X_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \Psi_{r\alpha} \\ \Psi_{r\beta} \end{bmatrix}, \quad v_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} v_{s\alpha} \\ v_{s\beta} \end{bmatrix}, \quad h(X_{\alpha,\beta}) = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}$$

con $X_{\alpha,\beta}$ como el vector de estado, $v_{\alpha,\beta}$ la entrada del sistema, y $h(X_{\alpha,\beta})$ la salida medible.

Entonces, a partir de la definición (3.8) se construye el espacio de observación, definido por $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta})$, el cual contiene funciones h_1, h_2 así como sus derivadas de Lie a lo largo del campo F , dando como resultado la siguiente estructura

$$\mathcal{O}_{\alpha,\beta} = \left[h_1 \quad h_2 \quad L_{\mathbb{F}}h_1 \quad L_{\mathbb{F}}h_2 \right]^T$$

La observabilidad del MSIPI se verifica al determinar que

$$d\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta}) = \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{\mathbb{F}}h_1 \\ dL_{\mathbb{F}}h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 & \frac{p}{L_d}\Omega \\ 0 & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{p}{L_q}\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz $d\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta})$ es de rango igual a 4.

Por lo tanto, para que la matriz $d\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta})$ sea de rango completo, entonces, basta con evaluar el determinante de la matriz $d\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta})$, el cual esta dado por

$$\text{Det} [d\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta})] = \frac{p^2\Omega^2}{L_d L_q}$$

Claramente se ve que el $\text{Det} [d\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(X_{\alpha,\beta})] \neq 0$, si $\Omega \neq 0$. Entonces, podemos concluir que el MSIPI es observable si $\Omega \neq 0$.

Para el caso en el cual $\Omega = 0$, esto significa que desde el punto de vista práctico el motor se encuentra en reposo. Por lo tanto, no es posible observar la posición del rotor. Tal es el caso del sistema de propulsión de un carro eléctrico, el cual se encuentra en reposo sobre una pendiente, donde el motor genera un par mecánico el cual debe compensar el peso del auto. Entonces, en este caso la posición no es observable.

3.3.2. Análisis de Observabilidad para la velocidad Ω , la Resistencia del Estator R_s y el par de carga T_l en el marco (d, q)

Considerando el modelo dinámico del MSIPI en el marco de referencia (d, q) y asumiendo que todos los parámetros son conocidos, se realizará un análisis de la observabilidad del motor.

A partir de (2.22) y (2.39), se introducen como componentes del vector de estado, la resistencia del estator R_s y el par de carga T_l . Entonces, el sistema extendido es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{sd} + p\Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} + \frac{1}{L_d} v_{sd} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{sq} - p\Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} + \frac{1}{L_q} v_s - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + \frac{p}{J} \psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_l \\ \frac{dR_s}{dt} = 0 \\ \frac{dT_l}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

que en forma compacta se expresa como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_{d,q}}{dt} = \mathbb{F}(X_{d,q}, v_{d,q}) \\ y = h(X_{d,q}) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

donde

$$X_{d,q} = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \Omega \\ R_s \\ T_l \end{bmatrix}, \quad v_{d,q} = \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix}, \quad h(X_{d,q}) = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix}$$

con $X_{d,q}$ como el vector de estado, $v_{d,q}$ la entrada del sistema, y $h(X_{d,q})$ la salida medible.

Entonces, a partir de la definición (3.8), se construye el espacio de observación $\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q})$, el cual está dado por

$$\mathcal{O}_{d,q} = \left[h_1 \quad h_2 \quad L_{\mathbb{F}} h_1 \quad L_{\mathbb{F}} h_2 \quad L_{\mathbb{F}}^2 h_2 \right]^T$$

La observabilidad del MSIPI se verifica al determinar que la matriz $d\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q})$ es de rango igual a 5.

$$d\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q}) = \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{\mathbb{F}} h_1 \\ dL_{\mathbb{F}} h_2 \\ dL_{\mathbb{F}}^2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_s}{L_d} & p\frac{L_q}{L_d}\Omega & p\frac{L_q}{L_d}i_{sq} & -\frac{i_{sd}}{L_d} & 0 \\ -p\frac{L_d}{L_q}\Omega & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{p}{L_q}(L_d i_{sd} + \psi_r) & -\frac{i_{sq}}{L_q} & 0 \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde

$$a = \left(\frac{pL_d}{L_q^2} - \frac{p}{L_q} \right) \Omega R_s - \left(\frac{pL_d\psi_r}{L_q J} + \frac{p^2\psi_r}{L_q J} (L_d - L_q) \right) i_{sq} - \frac{2p^2L_d}{L_q J} (L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} + \frac{pL_d f_v}{L_q J} \Omega + \frac{pL_d}{L_q J} T_1$$

$$b = \frac{R_s^2}{L_q^2} - \left(\frac{pL_d\psi_r}{L_q J} + \frac{p^2\psi_r}{L_q J} (L_d - L_q) \right) i_{sd} - p^2 \Omega^2 - \frac{p^2L_d}{L_q J} (L_d - L_q) i_{sd}^2 - \frac{p^2\psi_r^2}{L_q J}$$

$$c = \left(\frac{pL_d}{L_q^2} - \frac{p}{L_q} \right) i_{sd} R_s + \frac{p\psi_r f_v}{L_q J} - \frac{p\psi_r}{L_q^2} - 2p^2 \Omega i_{sq} + \frac{p f_v L_d}{L_q J} i_{sd}$$

$$d = \left(\frac{pL_d}{L_q^2} - \frac{p}{L_q} \right) i_{sd} \Omega + \frac{2}{L_q^2} i_{sq} R_s$$

$$e = \frac{pL_d}{L_q J} i_{sd} + \frac{p\psi_r}{L_q J}$$

Por lo tanto, para que la matriz $d\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q})$ sea de rango completo, entonces, basta con evaluar el determinante de la matriz $d\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q})$, el cual esta dado por

$$\text{Det} [d\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q})] = -\frac{1}{JL_dL_q^2} \left(L_dL_qp^2 i_{sd}i_{sq}^2 + p^2\psi_r^2 i_{sd} + 2L_dp^2\psi_r i_{sd}^2 + L_qp^2\psi_r i_{sq}^2 + L_d^2p^2 i_{sd}^3 \right)$$

Claramente se ve que el $\text{Det} [d\mathcal{O}_{d,q}(X_{d,q})] \neq 0$, si las corrientes $i_{sd}, i_{sq} \neq 0$ Entonces, podemos concluir que el MSIPI es observable si las corrientes $i_{sd}, i_{sq} \neq 0$.

Para el caso en el que las corrientes $i_{sd}, i_{sq} = 0$, esto es que desde el punto de vista práctico el motor se encuentra en reposo. Por lo tanto, no es posible realizar la observación del vector de estado.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se analizó la propiedad de observabilidad del MSIPI, en donde se obtuvieron las condiciones bajo las cuales el motor es observable. Para estimar la posición se utilizó el modelo del MSIPI en el marco de referencia (α, β) , donde el modelo resultó ser observable siempre y cuando la velocidad $\Omega \neq 0$. De manera similar, para la estimación de la velocidad Ω , se utilizó el modelo del MSIPI en el marco de referencia (d, q) , resultó que el modelo es observable si las corrientes $i_{sd}, i_{sq} \neq 0$.

Capítulo 4

Diseño de Observadores para el MSIPI

4.1. Introducción

En este capítulo se presentará el diseño de diferentes observadores para estimar la posición y velocidad del MSIPI, asumiendo que se dispone únicamente de las mediciones de las corrientes y voltajes del estator.

Por otro lado, los parámetros del motor se asume que son todos conocidos, excepto la resistencia del estator R_s , la cual depende de la temperatura y el par de carga T_l , considerado como una perturbación al sistema. Entonces, el modelo resultante del motor MISPI es un sistema con incertidumbres paramétricas y perturbaciones, para el cual es necesario diseñar tanto observadores como controles robustos.

En este capítulo se introducirá el diseño de observadores para una clase de subsistemas interconectados, para estimar la velocidad del rotor Ω , la resistencia del estator R_s , identificar el par de carga T_l y los flujos del estator. Además, con la estimación de estas variables, de manera indirecta, se estima la posición angular mecánica del rotor θ_m .

Para el diseño de ambos observadores interconectados, se utilizarán dos técnicas de diseño, cuyas convergencias son asintótica y en tiempo finito.

4.2. Observadores para sistemas no lineales

El problema de observación consiste en estimar el estado del sistema $x(t)$, a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ del sistema.

El observador también conocido como sensor computacional, tiene diversas aplicaciones por ejemplo: nos sirve para identificar fallas en el sistema, vigilar la evolución de un sistema, incluso permite estimar una variable del sistema para la cual aún no exista un sensor que pueda medirla.

Para el diseño de un observador de estado es necesario tomar en cuenta lo siguiente:

- **Observabilidad del sistema:** primero se debe verificar que el sistema cumpla con la propiedad de observabilidad.
- **Estructura del sistema:** dependiendo de la estructura del sistema, se debe determinar a que clase pertenece el sistema, para el cual verificar si es posible diseñar un observador.
- **Convergencia del observador:** una vez diseñado el observador, se determina bajo que condiciones se garantiza su convergencia, la cual puede ser exponencial, asintótica y en tiempo finito.
- **Estabilidad del sistema en lazo cerrado:** cuando se utiliza un observador combinado con un control, es necesario analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Por otro lado, en el año de 1963 Luenberger, introdujo la teoría de observadores para reconstruir el estado en sistemas lineales invariantes en el tiempo. Posteriormente, Kalman desarrolla una solución aproximada del problema de observación para sistemas no lineales, el cual es conocido como el Filtro de Kalman.

Es bien sabido que no existe una metodología general, para el diseño de observadores para sistemas no lineales, a continuación se introducirán algunos diseños de observadores para sistemas no lineales. En este capítulo se presentan el diseño de observadores de Luenberger, Alta Ganancia, tipo Kalman y por modos deslizantes.

4.2.1. Observador Luenberger

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo definido en la ecuación (3.1) del Capítulo 3, entonces un observador para esa clase de sistema, es el siguiente

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu - K(Cz - y) \\ \hat{y} = Cz \end{cases} \quad (4.1)$$

donde z es el estado estimado y la matriz K es la ganancia del observador.

Obviamente el error de estimación tiende a cero siempre y cuando la matriz K se seleccione adecuadamente, tal que los eigenvalores de la matriz $(A - BK)$ deben tener parte real negativa. Una manera para obtener los valores óptimos para la ganancia K , es resolviendo la ecuación diferencial de Riccati, definida como sigue

$$\frac{dP(t)}{dt} = -A^T P(t) - P(t)A - P(t)QP(t) + C^T R^{-1}C \quad (4.2)$$

donde R y Q son matrices simétricas y definidas positivas, la $P(t)$ representa la solución a dicha ecuación. Entonces, la ganancia K se obtiene de $K = P(t)^{-1}C^T R^{-1}$.

Una extensión de este resultado para la clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.3)$$

el cual por medio de un cambio de coordenadas, se llega al siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + \phi(u, y) \\ y = C\xi \end{cases} \quad (4.4)$$

donde el par (A, C) es observable y el término $\phi(u, y)$ es llamado inyección de entrada-salida.

Entonces, el observador para el sistema (4.4) sería el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \phi(u, y) - K(C\hat{\xi} - y) \\ \hat{y} = C\hat{\xi} \end{cases} \quad (4.5)$$

donde K es la ganancia del observador, la cual se elige tal que la matriz $(A - KC)$ tiene sus eigenvalores con parte real negativa.

En el siguiente teorema se resume el resultado anterior.

TEOREMA 4.1. *Considerando el sistema (4.4), y que las siguientes suposiciones se mantienen:*

- *El sistema no tiene un escape en tiempo finito.*
- *El termino $\phi(u, y)$ es acotado.*

Entonces, el sistema (4.5) es un observador para el sistema (4.4), el cual hace que el error de estimación tiende a cero, cuando t tiende a infinito.

4.2.2. Observador de Alta Ganancia

A continuación se presenta el diseño del observador de alta ganancia, para la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + \phi(u, \xi) \\ y = C\xi \end{cases} \quad (4.6)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad \cdots \quad 0], \quad \phi(u, \xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(u, \xi_1) \\ \phi_2(u, \xi_1, \xi_2) \\ \cdots \\ \phi_n(u, \xi_1, \cdots, \xi_n) \end{bmatrix}$$

donde $u \in U_{adm}$ que representa el conjunto de entradas admisibles, y es la salida medible.

Hipótesis A1 El vector $\phi(u, \xi)$ se considera que es Lipschitz, compacto y tiene una estructura triangular [32].

Entonces, el observador de alta ganancia para el sistema (4.6) está dado por

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \phi(u, \hat{\xi}) - \Delta_p^{-1}KC(\hat{\xi} - \xi) \\ \hat{y} = C\hat{\xi} \end{cases} \quad (4.7)$$

donde la ganancia del observador es $\Delta_p^{-1}K$, con $\Delta_p = \text{diag}(1/p, \dots, 1/p^n)$ y K contiene k_n componentes, los cuales son los coeficientes de un polinomio característico (4.8) con parte real negativa.

$$s^n + k_1s^{n-1} + k_2s^{n-2} + \dots + k_n = 0 \quad (4.8)$$

El parámetro p es una constante positiva, la cual es seleccionada de tal manera que fija la convergencia del observador.

En el siguiente teorema se prueba la convergencia de este observador.

TEOREMA 4.2. *Considerando el sistema (4.6), y satisfaciendo la hipótesis A1, existe una constante p suficientemente grande, tal que, para toda condición inicial $(\xi_o, \hat{\xi}_o)$ pertenece a $(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}) \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, hace que el error de estimación converja exponencialmente a cero, i.e.,*

$$\|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\|^2 < M(p)e^{-pt}\|\hat{\xi}_o - \xi_o\|^2$$

donde $M(p)$ es una constante positiva que depende de p .

Demostración: Definiendo el error de estimación como $e = \hat{\xi} - \xi$, cuya dinámica está dada por

$$\dot{e} = \left[A - \Delta_p^{-1}KC \right] e + \phi(u, \hat{\xi}) - \phi(u, \xi) \quad (4.9)$$

Ahora, introduciendo el siguiente cambio de coordenadas $\varepsilon = \Delta_p e$, donde $\Delta_p^{-1}S_1\Delta_p = S_p$, y S_p es solución a la siguiente ecuación

$$pS_p + A^T S_p + S_p A - C^T C = 0 \quad (4.10)$$

con S_1 , como la evaluación de S_p para $p = 1$. Para analizar la convergencia del observador se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{p} e^T S_p e = \varepsilon^T S_1 \varepsilon$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \varepsilon^T S_1 \Delta_p \left[\left\{ A - \Delta_p^{-1} K C \right\} \Delta_p^{-1} \varepsilon + \phi(u, \hat{\xi}) - \phi(u, \xi) \right] \\ &\quad + \left[\varepsilon^T \Delta_p^{-1} \left\{ A^T - C^T K^T \Delta_p^{-1} \right\} + \phi^T(u, \hat{\xi}) - \phi^T(u, \xi) \right] \Delta_p S_1 \varepsilon \\ &= \varepsilon^T S_1 \Delta_p \left\{ A - \Delta_p^{-1} K C \right\} \Delta_p^{-1} \varepsilon + \varepsilon^T \Delta_p^{-1} \left\{ A^T - C^T K^T \Delta_p^{-1} \right\} \Delta_p S_1 \varepsilon \\ &\quad + 2\varepsilon^T S_1 \Delta_p \left[\phi(u, \hat{\xi}) - \phi(u, \xi) \right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Considerando la hipótesis A1, es decir,

$$\|\Delta_p [\phi(u, \hat{\xi}) - \phi(u, \xi)]\| \leq \eta \|\varepsilon\|$$

Además, tomando en cuenta las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} \Delta_p \left\{ A - \Delta_p^{-1} K C \right\} \Delta_p^{-1} &= p \{ A - K C \} \\ P \tilde{A} + \tilde{A}^T P &= -Q \end{aligned}$$

donde P y Q son matrices simétricas y definidas positivas. Entonces, reemplazando las ecuaciones anteriores en (4.11), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2p\lambda_{\min}(S_1)\lambda_{\min}(Q)\|\varepsilon\|^2 + 2\eta\lambda_{\max}(S_1)\|\varepsilon\|^2 \\ &= -\left[2p\lambda_{\min}(S_1)\lambda_{\min}(Q) - 2\eta\lambda_{\max}(S_1)\right]\|\varepsilon\|^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Seleccionando $\delta \geq p > \frac{\eta\lambda_{\max}(S_1)}{\lambda_{\min}(S_1)\lambda_{\min}(Q)}$, tenemos

$$\dot{V} < -\delta\|\varepsilon\|^2$$

Finalmente, el error de estimación converge exponencialmente a cero.

4.2.3. Observador de Kalman extendido

Considere la siguiente clase de sistemas afines en el estado de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.13)$$

donde

$$A(u) = \begin{bmatrix} a_{11}(u) & \cdots & a_{1n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(u) & \cdots & a_{nn}(u) \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad \dots \quad 0]$$

Es claro que la estructura de la matriz $A(u)$ no es única. Puesto que la observabilidad del sistema (4.13) depende de la entrada, entonces, introducimos la siguiente definición de clase de entradas llamadas persistentes.

DEFINICIÓN 4.1. *Una entrada es persistente para el sistema (4.13), si para cualquier condición inicial x_0 , existen β_1, β_2, T' constantes positivas y $t_0 > 0$ tal que*

$$\beta_1 I_d \leq \int_t^{t+T'} \Psi_{u,x_0}^T(\tau, t) C^T C \Psi_{u,x_0}^T(\tau, t) d\tau \leq \beta_2 I_d \quad \forall t > t_0$$

donde Ψ_{u,x_0} es la matriz de transición del sistema (4.13) y la matriz I_d representa la matriz identidad.

Ahora introducimos la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + \phi(u, y) \\ y = Cx = x_1 \end{cases} \quad (4.14)$$

donde $A(u)$ y $\phi(u, y)$ son funciones continuas de la entrada.

Entonces, considerando que las entradas son persistentes,

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + \phi(u, y) - S^{-1}C^T(\hat{x} - x) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.15)$$

el sistema (4.15) es un observador que converge exponencialmente, donde el término $S^{-1}C^T$ representan la ganancia del observador, con S siendo matriz simétrica y definida positiva, la cual es solución a la ecuación diferencial de Riccati

$$\dot{S} = -\rho S(t) - A^T(u)S - SA(u) + C^T C \quad (4.16)$$

donde ρ es un parámetro positivo utilizado para sintonizar el observador.

La prueba de convergencia del observador de Kalman extendido requiere del siguiente lema.

LEMA 4.1. *Suponiendo que u es una entrada persistente para el sistema (4.14), y considerando la siguiente ecuación diferencial de Lyapunov:*

$$\dot{S}(t) = -\rho S(t) - A^T(u)S(t) - S(t)A(u) + C^T C$$

con $S(0) > 0$. Entonces, $\exists \rho_o > 0$, $\forall \rho \geq \rho_o$, $\bar{\alpha} > \bar{\beta} > 0$, $t_o > 0$, tal que

$$\bar{\alpha} I_d \leq S(t) \leq \bar{\beta} I_d, \quad \forall t \geq t_o$$

donde I_d es la matriz identidad.

La demostración de este lema se encuentra en [4]. Ahora, la convergencia del observador (4.15) se demuestra como sigue

Demostración: Para demostrar la convergencia definimos el error de estimación $e = \hat{x} - x$, cuya dinámica es la siguiente

$$\dot{e} = [A(u) - S^{-1}C^T C] e \quad (4.17)$$

Tomando en cuenta que la entrada u es persistente, y que la matriz S es definida positiva $\forall t \geq t_o$. Entonces, se define la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e) = e^T S e$$

Derivando con respecto al tiempo la función de Lyapunov se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) = & e^T S [A(u) - S^{-1} C^T C] e + e^T [A^T(u) - C^T C S^{-1}] S e \\ & + e^T [-\rho S(t) - A^T(u) S - S A(u) + C^T C] e\end{aligned}$$

Resultando que

$$\dot{V}(e) < -\rho e^T S(t) e = -\rho V(e)$$

Entonces, después de ciertos cálculos se puede ver que el error de estimación converge exponencialmente a cero.

4.2.4. Observador de Kalman extendido adaptativo

En los observadores presentados anteriormente se consideró que los parámetros del sistema eran conocidos. Sin embargo, una de las ventajas del observador de Kalman extendido adaptativo es que permite identificar un parámetro del sistema bajo ciertas condiciones.

Considere la siguiente clase de sistema no lineal, en donde el parámetro aparece de manera afín en el sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + \Psi(u, y)\theta + \phi(u, y) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.18)$$

donde $A(u)$ es una función continua de la entrada, $\Psi(u, y)$, $\phi(u, y)$ son funciones continuas de la entrada y la salida, θ es el vector del parámetro desconocido.

Para diseñar el observador de Kalman extendido adaptativo, se tiene que tomar en cuenta la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.2. Sea Λ una matriz solución a la siguiente ecuación:

$$\dot{\Lambda} = (A(u) - S_x^{-1} C^T C) \Lambda + \Psi(u, y) \quad (4.19)$$

Existen β_3, β_4, T' constantes positivas y $t_0 > 0$ tal que:

$$\beta_3 I_d \leq \int_t^{t+T'} \Lambda^T(\tau, t) C^T C \Lambda^T(\tau, t) d\tau \leq \beta_4 I_d, \quad \forall t > t_0$$

donde I_d es la matriz identidad.

Si la entrada u es persistente y la Definción (4.2) se satisface, entonces, el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + \Psi(u, y)\hat{\theta} + \phi(u, y) - S_x^{-1}C^T C(\hat{x} - x) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T C(\hat{x} - x) \\ \dot{S}_x = -\rho_x S_x - A^T S_x - S_x A(u) + C^T C \\ \dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T C \Lambda \\ \dot{\Lambda} = [A(u) - S_x^{-1}C^T C] \Lambda + \Psi(u, y) \\ \dot{\hat{\theta}} = -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T C(\hat{x} - x) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

es el observador de Kalman extendido adaptativo para el sistema (4.18), donde $\rho_x > 0$, $\rho_\theta > 0$, el término $S_x^{-1}C^T$ representa la ganancia del observador asociada al estado, y el término $\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T$ representa la ganancia asociada a la identificación del parámetro desconocido. Las matrices S_x y S_θ son simétricas y definidas positivas.

La convergencia del obsevador (4.20) se puede demostrar como sigue.

Definiendo el error de estimación del estado $e_x = \hat{x} - x$, y el error de identificación del parámetro $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$, cuyas dinámicas están dadas en las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= [A(u) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T C - S_x^{-1} C^T C] e_x + \Psi(u, y) e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T C e_x \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ahora, introduciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$\epsilon_x = e_x - \Lambda e_\theta \quad (4.22)$$

y tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación anterior, tenemos que

$$\dot{\epsilon}_x = [A(u) - S_x^{-1}C^T C] \epsilon_x \quad (4.23)$$

Ahora para demostrar la convergencia del observador, considere la siguiente función de Lyapunov

$$V = \epsilon_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta \quad (4.24)$$

Derivando con respecto al tiempo la función de Lyapunov, y sustituyendo las ecuaciones adecuadas se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta - \epsilon_x^T C^T C \epsilon_x \\ & - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T C \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T C \Lambda \epsilon_\theta \end{aligned}$$

se puede ver que la siguiente expresión se cumple

$$\begin{aligned} & -\epsilon_x^T C^T C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T C \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T C \Lambda \epsilon_\theta \\ & = -[\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta]^T C^T C [\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta] < 0 \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que

$$\dot{V} = -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta \quad (4.25)$$

Seleccionando $\rho = \min(\rho_x, \rho_\theta)$, resulta que

$$\dot{V} \leq -\rho V \quad (4.26)$$

Finalmente, después de ciertas operaciones se puede ver que ϵ_x y ϵ_θ convergen exponencialmente a cero.

4.2.5. Observadores Interconectados

Puesto que no existe una forma canónica para el diseño de observadores para los sistemas no lineales, resulta que es necesario analizar la estructura del sistema para diseñar el observador. Una estrategia para poder diseñar un observador es particionar el sistema original, en una serie de subsistemas interconectados, los cuales son observables y es posible diseñar un observador para cada subsistema.

Entonces, sin pérdida de generalidad consideremos la siguiente clase de subsistemas interconectados:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{X}_1 = A_1 X_1 + \Phi_1(u, X_1, X_2) \\ y_1 = C_1 X_1 \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{X}_2 = A_2 X_2 + \Phi_2(u, X_1, X_2) \\ y_2 = C_2 X_2 \end{cases} \quad (4.28)$$

Para poder diseñar un observador para los sistemas (4.27) y (4.28), se introducen las siguientes hipótesis.

1. La función Φ_1 (Φ_2) debe ser globalmente Lipschitz con respecto de X_1 (X_2) y uniformemente con respecto a la entrada u , y uniformemente globalmente con respecto de X_2 (X_1).
2. El vector de estados X_2 (X_1) es considerado como entrada al subsistema Σ_1 (Σ_2).

Entonces, si los subsistemas (4.27) y (4.28) cumplen las suposiciones anteriores, el siguiente sistema,

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_1 = A_1 \hat{X}_1 + \Phi_1(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - S_1^{-1} C_1^T (\hat{y}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{X}}_2 = A_2 \hat{X}_2 + \Phi_2(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - S_2^{-1} C_2^T (\hat{y}_2 - y_2) \\ \rho_{x_1} S_1 + S_1 A_1 + A_1^T S_1 - C_1^T C_1 = 0 \\ \rho_{x_2} S_2 + S_2 A_2 + A_2^T S_2 - C_2^T C_2 = 0 \\ \hat{y}_1 = C_1 \hat{X}_1 \\ \hat{y}_2 = C_2 \hat{X}_2 \end{cases} \quad (4.29)$$

es un observador para los subsistemas (4.27) y (4.28), donde \hat{X}_1 y \hat{X}_2 son los estados estimados, ρ_{x_1} y ρ_{x_2} son constantes definidas positivas, y S_1 y S_2 son solución a la ecuación de Lyapunov.

El resultado anterior se puede extender a la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\tilde{\Sigma}_1 : \begin{cases} \dot{X}_1 = A_1(u, y)X_1 + \Phi_1(u, X_1, X_2) \\ y_1 = C_1 X_1 \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\tilde{\Sigma}_2 : \begin{cases} \dot{X}_2 = A_2(u, y)X_2 + \Phi_2(u, X_1, X_2) \\ y_2 = C_2 X_2 \end{cases} \quad (4.31)$$

Para poder diseñar un observador interconectado para los subsistemas (4.30) y (4.31), se deben cumplir las siguientes suposiciones:

- A1.** La función Φ_1 (Φ_2) debe ser globalmente Lipschitz con respecto de X_2 (X_1), además, debe ser uniformemente con respecto de X_1 (X_2), y uniformemente con respecto de (u, y) .
- A2.** El par (u, y) debe ser regularmente persistente para $A_1(u, y)$ y $A_2(u, y)$.
- A3.** El vector de estado X_2 (X_1) es considerado como una entrada al subsistema $\tilde{\Sigma}_1$ ($\tilde{\Sigma}_2$).

Si los subsistemas (4.30) y (4.31) satisfacen las hipótesis anteriores, entonces, es posible diseñar un observador de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{X}}_1 = A_1(u, y)\hat{X}_1 + \Phi_1(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - S_1^{-1}C_1^T(\hat{y}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{X}}_2 = A_2(u, y)\hat{X}_2 + \Phi_2(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - S_2^{-1}C_2^T(\hat{y}_2 - y_2) \\ \dot{S}_1 = -\rho_{x_1}S_1 - S_1A_1(u, y) - A_1^T(u, y)S_1 + C_1^TC_1 \\ \dot{S}_2 = -\rho_{x_2}S_2 - S_2A_2(u, y) - A_2^T(u, y)S_2 + C_2^TC_2 \\ \hat{y}_1 = C_1\hat{X}_1 \\ \hat{y}_2 = C_2\hat{X}_2 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

donde \hat{X}_1 y \hat{X}_2 son los estados estimados de cada uno de los subsistemas, ρ_{x_1} y ρ_{x_2} son constantes definidas positivas, S_1 y S_2 son matrices simétricas y definidas positivas, y son solución a la ecuación diferencial de Riccati.

La convergencia del observador interconectado se establece en el siguiente teorema

TEOREMA 4.3. *Considere el sistema interconectado (4.30) y (4.31), y asuma que las hipótesis A1, A2 y A3 se satisfacen. Entonces, el sistema (4.32) es un observador interconectado que converge asintóticamente a cero.*

Demostración: Definiendo $e_1 = \hat{X}_1 - X_1$ y $e_2 = \hat{X}_2 - X_2$ como los errores de estimación de cada subsistema, cuyas dinámicas están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= [A_1(u, y) - S_1^{-1} C_1^T C_1] e_1 + \Phi_1(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - \Phi_1(u, X_1, X_2) \\ \dot{e}_2 &= [A_2(u, y) - S_2^{-1} C_2^T C_2] e_2 + \Phi_2(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - \Phi_2(u, X_1, X_2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para demostrar la convergencia de los errores de estimación, considere las siguientes funciones candidatas de Luapunov

$$V_1 = e_1^T S_1 e_1, \quad V_2 = e_2^T S_2 e_2 \quad (4.34)$$

Entonces, la función de Lyapunov de todo el sistema, resulta como sigue

$$V_T = V_1 + V_2 = e_1^T S_1 e_1 + e_2^T S_2 e_2 \quad (4.35)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo la ecuación anterior y sustituyendo las ecuaciones adecuadas, se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_T &= -\rho_{x_1} e_1^T S_1 e_1 + 2e_1^T S_1 [\Phi_1(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - \Phi_1(u, X_1, X_2)] \\ &\quad -\rho_{x_2} e_2^T S_2 e_2 + 2e_2^T S_2 [\Phi_2(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - \Phi_2(u, X_1, X_2)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Considerando que la hipótesis **A1** se satisface, y utilizando las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - \Phi_1(u, X_1, X_2)\| &\leq K_1 \|e_2\| \\ \|\Phi_2(u, \hat{X}_1, \hat{X}_2) - \Phi_2(u, X_1, X_2)\| &\leq K_2 \|e_1\| \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde $K_1, K_2 > 0$. Entonces, la ecuación (4.36), resulta que

$$\begin{aligned} \dot{V}_T &\leq -\rho_{x_1} e_1^T S_1 e_1 + 2\lambda_{\max}(S_1) K_1 \|e_1\| \|e_2\| \\ &\quad -\rho_{x_2} e_2^T S_2 e_2 + 2\lambda_{\max}(S_2) K_2 \|e_1\| \|e_2\| \end{aligned} \quad (4.38)$$

Después de realizar algunos cálculos se obtiene lo siguiente

$$\dot{V}_T \leq -\rho_{x_1} V_1 - \rho_{x_2} V_2 + \mu_1 \sqrt{V_1} \sqrt{V_2} \quad (4.39)$$

donde $\mu_1 > 0$. Tomando en cuenta la siguiente desigualdad

$$\sqrt{V_1} \sqrt{V_2} \leq \frac{\rho_1}{2} V_1 + \frac{1}{2\rho_1} V_2$$

donde $\rho_1 \in (0, 1)$, la ecuación (4.39) se escribe como

$$\dot{V}_T \leq -\left(\rho_{x_1} - \frac{\mu_1 \rho_1}{2}\right) V_1 - \left(\rho_{x_2} - \frac{\mu_1}{2\rho_1}\right) V_2$$

Seleccionando las ganancias ρ_{x_1} y ρ_{x_2} , tal que

$$\delta = \min \left[\left(\rho_{x_1} - \frac{\mu_1 \rho_1}{2}\right), \left(\rho_{x_2} - \frac{\mu_1}{2\rho_1}\right) \right] > 0$$

Resultando que

$$\dot{V}_T \leq -\delta V_T \quad (4.40)$$

Finalmente, después de algunas operaciones se puede ver que el error de estimación del observador interconectado converge exponencialmente a cero cuando t tiende al infinito.

4.2.6. Observadores de Modos Deslizantes

Los observadores de modos deslizantes son ampliamente utilizados debido a sus características de robustez ante perturbaciones y/o incertidumbres, además, de su convergencia en tiempo finito. Sin embargo, tienen una gran desventaja, debido a las discontinuidades se presenta el efecto de *chattering*, cuyo defecto indeseable es que daña al sistema.

Recientemente se han propuesto nuevas estrategias para evitar o reducir el efecto de *chattering*, como son los modos deslizantes de segundo orden, así como, los modos deslizantes de alto orden.

Por otro lado, los observadores de modos deslizantes de primer orden requieren que el sistema sea de grado relativo 1. Sin embargo, uno de los métodos más populares para el diseño de observadores, es el observador de modos deslizantes de segundo orden conocido como Super Twisting, el cual fue introducido en [1], cuyas características son reducir el efecto de *chattering*, además de su robustez y su convergencia en tiempo finito.

Observador Super Twisting

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2, u) + \delta(t, x_1, x_2, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.41)$$

donde $f(t, x_1, x_2, u)$, $\delta(t, x_1, x_2, u)$ son funciones suaves desconocidas y acotadas.

Entonces, el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \delta(t, x_1, \hat{x}_2, u) + k_2 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{y} = \hat{x}_1 \end{cases} \quad (4.42)$$

es un observador Super Twisting, donde \hat{x}_1 , \hat{x}_2 son los estados estimados, k_1 , k_2 son las ganancias

del observador, las cuales son constantes definidas positivas.

Ahora bien, para sintonizar este observador es necesario seleccionar adecuadamente las ganancias (k_1 y k_2), lo cual no es evidente. Por lo tanto, se propone una modificación de este algoritmo para sintonizar el observador, haciendo que su implementación sea más sencilla.

Observador Super Twisting Modificado

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, u) + \rho \\ y = Cx = x_1 \end{cases} \quad (4.43)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^2$ es el vector de estado, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada, $y \in \mathfrak{R}$ es la salida del sistema, $f(x_1, x_2, u)$ es el término no lineal, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, y ρ representa las incertidumbres paramétricas y las perturbaciones en el sistema.

Considere que el sistema (4.43) cumple con las siguientes hipótesis:

- B1.** La función $f(x_1, x_2, u)$ es continuamente Lipschitz con respecto de x , y uniformemente con respecto de u , es decir, existe una constante positiva C_0 , tal que $\|\Phi(x, u)\| \leq C_0 \|x\|$.
- B2.** La perturbación ρ , y su primera derivada $\dot{\rho} = \delta$ son acotadas, es decir, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que, $|\rho| \leq C_1$ y $|\delta| \leq C_2$.

Entonces, el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + k_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_2 = f(z_2, z_2, u) + k_2 \text{sign}(e_1) \\ \hat{y}_1 = z_1 \end{cases} \quad (4.44)$$

es un observador Super Twisting modificado, donde los parámetros $k_1 = 2\theta$ y $k_2 = \frac{\theta^2}{2}$, con θ como una constante positiva arbitrariamente grande.

Cabe mencionar que la ganancia de este observador, depende únicamente de un parámetro θ , a diferencia del observador (4.42) que utiliza dos parámetros para su sintonización.

Ahora, para analizar la convergencia en tiempo finito del observador propuesto, se define el error de estimación como sigue

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - z_1 \\ e_2 = x_2 - z_2 \end{cases} \quad (4.45)$$

cuya dinámica del error está dada por

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - 2\theta|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 = \tilde{f}(x, z, u) + \rho - \frac{\theta^2}{2}\text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (4.46)$$

donde $\tilde{f}(x, z, u) = f(x_1, x_2, u) - f(z_1, z_2, u)$.

La convergencia de este observador queda demostrada en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.1. *Considere el sistema (4.43) y que las hipótesis B1 y B2 se satisfacen. Entonces, el sistema (4.44) es un observador Super Twisting para el sistema (4.43), el cual converge en tiempo finito.*

Demostración: Primero introduciremos el siguiente cambio de coordenadas, el cual es un homeomorfismo global [33].

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ \xi_2 &= e_2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Entonces, la dinámica de la ec. (4.46) en las nuevas coordenadas está dada por

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \left\{ \begin{bmatrix} -2\theta & 1 \\ -\theta^2 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 2|e_1|^{1/2}(\tilde{f}(x, z, u) + \rho) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.48)$$

donde $\xi = [\xi_1 \quad \xi_2]^T$, la ecuación anterior se expresa de manera compacta como sigue

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \{(A - KC)\xi + \Phi\} \quad (4.49)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad KC = \begin{bmatrix} 2\theta & 0 \\ \theta^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 2|e_1|^{1/2}(\tilde{f}(x, z, u) + \rho) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para analizar la convergencia de la dinámica del error de estimación (4.49), considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\xi) = \xi^T S_\theta \xi \quad (4.50)$$

Note que la función de Lyapunov $V(\xi)$ es continuamente diferenciable excepto en el conjunto $\Gamma = \{\xi_1 = 0\}$ donde no está definida. Además, la matriz S_θ es simétrica y definida positiva, y es solución a la ecuación Algebraica de Lyapunov

$$-\theta S_\theta - A^T S_\theta - S_\theta A + C^T C = 0 \quad (4.51)$$

Puesto que las trayectorias del sistema no pueden permanecer en el conjunto Γ antes que alcancen el origen, la derivada con respecto del tiempo de $V(\xi)$ puede ser calculada de manera usual en cualquier lugar, excepto cuando las trayectorias intersectan el conjunto Γ .

Entonces, tomando la derivada con respecto del tiempo de $V(\xi)$, a lo largo de las trayectorias de (4.49), se tiene que

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [-\theta \xi^T S_\theta \xi + 2\xi^T S_\theta \Phi] \quad (4.52)$$

Se tomará la norma al término no lineal $2\xi^T S_\theta \Phi$, y a partir de la hipótesis **B1**, es decir, $\|\Phi\| \leq \vartheta \|\xi\|$, donde $\vartheta > 0$, reescribiendo la expresión (4.52) tenemos

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{\theta}{2|e_1|^{1/2}} V(\xi) + \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \|S_\theta\| \vartheta \|\xi\|^2 \quad (4.53)$$

Tomando en cuenta que

$$\lambda_{\min}(S_\theta)\|\xi\|^2 \leq V(\xi) \leq \lambda_{\max}(S_\theta)\|\xi\|^2$$

donde $\lambda_{\min}(S_\theta)$, $\lambda_{\max}(S_\theta)$ son los eigenvalores máximos y mínimos de S_θ . Entonces, la ecuación (4.53) se reescribe como sigue

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{\theta - \eta}{2|e_1|^{1/2}} V(\xi) \quad (4.54)$$

donde $\eta = \frac{2\|S_\theta\|\theta}{\lambda_{\max}(S_\theta)}$. Considerando que se satisface la siguiente desigualdad

$$|e_1|^{1/2} \leq \|\xi\| \leq \left\{ \frac{V(\xi)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right\}^{1/2}$$

Resulta que

$$\dot{V}(\xi) \leq -\gamma V(\xi)^{1/2} \quad (4.55)$$

donde $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{\min}(S_\theta)}(\theta - \eta)$. Seleccionando θ lo suficientemente grande, tal que γ sea positiva, entonces, $\dot{V}(\xi)$ es negativa definida.

Para demostrar la convergencia del observador en tiempo finito es necesario resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\gamma v^{1/2} \quad v(0) = v_0$$

cuya solución es

$$v(t) = \left\{ v_0^{1/2} - \frac{1}{2}\gamma t \right\}^2$$

Ahora bien, del principio de comparación [34], tenemos que $V(\xi) < v(t)$ cuando $V(\xi(0)) < v_0$. Entonces, ξ converge a cero en tiempo finito, y este valor se logra en el siguiente tiempo

$$T = \frac{2V(\xi(0))^{1/2}}{\gamma}$$

Observación. A diferencia del observador Super Twisting clásico, este observador requiere de un parámetro θ para sintonizar el observador.

Observador Super Twisting de estado afín

Ahora se presenta una extensión del observador anterior para la clase de sistemas no lineales afines en el estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ux_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, u) + \rho \\ y = Cx = x_1 \end{cases} \quad (4.56)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^2$ es el vector de estado, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada, $y \in \mathfrak{R}$ es la salida del sistema, $f(x_1, x_2, u)$ es el término no lineal, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, y ρ representa las incertidumbres paramétricas y las perturbaciones en el sistema.

Se supone que el sistema (4.56) cumple las siguientes hipótesis

- C1.** La función $f(x_1, x_2, u)$ es continuamente Lipschitz con respecto de x , y uniformemente con respecto de u , es decir, existe una constante positiva C_0 , tal que $\|\Phi(x, u)\| \leq C_0\|x\|$.
- C2.** La perturbación ρ , y su primera derivada $\dot{\rho} = \delta$ son acotadas, es decir, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que, $|\rho| \leq C_1$ y $|\delta| \leq C_2$.
- C3.** La entrada u debe ser persistente, es decir, debe satisfacer la Definición (4.1).

Entonces, un observador para el sistema (4.56) está dado por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = uz_2 + k_1(u)|e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_2 = f(z_2, z_2, u) + \frac{k_2(u)}{2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{S}_\theta = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [-\theta S_\theta - A(u)^T S_\theta - S_\theta A(u) + C^T C] \\ \hat{y} = z_1 \end{cases} \quad (4.57)$$

donde θ es una constante positiva, S_θ es una matriz simétrica y definida positiva, y $k_1(u), k_2(u)$ se obtienen de la siguiente expresión:

$$K = S_{\theta}^{-1} C^T = \begin{bmatrix} k_1(u) \\ k_2(u) \end{bmatrix}$$

Para analizar la convergencia en tiempo finito del observador Super Twisting de estado afín, se define el error de estimación como sigue

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - z_1 \\ e_2 = x_2 - z_2 \end{cases} \quad (4.58)$$

cuya dinámica es la siguiente

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ue_2 - k_1(u)|e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 = \tilde{f}(x, z, u) + \rho - \frac{k_2(u)}{2} \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (4.59)$$

donde $\tilde{f}(x, z, u) = f(x_1, x_2, u) - f(z_1, z_2, u)$

La convergencia de este observador se demuestra en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.2. *Considere el sistema (4.56) y las hipótesis C1, C2 y C3 se satisfacen. Entonces, el sistema (4.57) es un observador Super Twisting de estado afín para el sistema (4.56), el cual converge en tiempo finito.*

Demostración: Introduciendo el siguiente cambio de coordenadas, el cual es un homeomorfismo global.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \xi_2 &= e_2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Entonces, la dinámica de (4.59) en las nuevas coordenadas está dada por

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \left\{ \begin{bmatrix} -k_1(u) & u \\ -k_2(u) & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 2|e_1|^{1/2}(\tilde{f}(x, z, u) + \rho) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.61)$$

donde $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^T$, la ecuación anterior se representa de manera compacta como sigue

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \{(A - KC)\xi + \Phi\} \quad (4.62)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad KC = \begin{bmatrix} k_1(u) & 0 \\ k_2(u) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 2|e_1|^{1/2}(\tilde{f}(x, z, u) + \rho) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para analizar la convergencia de la dinámica del error de estimación (4.62), considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\xi) = \xi^T S_\theta \xi \quad (4.63)$$

Entonces, tomando la derivada con respecto del tiempo de $V(\xi)$, a lo largo de las trayectorias de (4.62), se tiene que

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [-\theta \xi^T S_\theta \xi + 2\xi^T S_\theta \Phi] \quad (4.64)$$

Tomando la norma al término no lineal $2\xi^T S_\theta \Phi$, y a partir de la hipótesis **C1**, es decir, $\|\Phi\| \leq \vartheta \|\xi\|$, donde $\vartheta > 0$, reescribiendo la expresión (4.64) resulta que

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{\theta}{2|e_1|^{1/2}} V(\xi) + \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \|S_\theta\| \vartheta \|\xi\|^2 \quad (4.65)$$

Además, la función de Lyapunov satisface la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(S_\theta) \|\xi\|^2 \leq V(\xi) \leq \lambda_{\max}(S_\theta) \|\xi\|^2$$

donde $\lambda_{\min}(S_\theta)$, $\lambda_{\max}(S_\theta)$ son los eigenvalores máximos y mínimos de S_θ . Entonces, la ecuación (4.65) se reescribe como sigue

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{\theta - \eta}{2|e_1|^{1/2}} V(\xi) \quad (4.66)$$

donde $\eta = \frac{2\|S_\theta\|\vartheta}{\lambda_{\max}(S_\theta)}$. Ahora bien, considerando que la siguiente desigualdad se satisface

$$|e_1|^{1/2} \leq \|\xi\| \leq \left\{ \frac{V(\xi)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right\}^{1/2}$$

Resulta que

$$\dot{V}(\xi) \leq -\gamma V(\xi)^{1/2} \quad (4.67)$$

donde $\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_{\min}(S_\theta)} (\theta - \eta)$. Seleccionando θ lo suficientemente grande, tal que γ sea positiva, entonces, $\dot{V}(\xi)$ es negativa definida.

Para demostrar la convergencia del observador en tiempo finito es necesario resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\gamma v^{1/2}, \quad v(0) = v_0$$

cuya solución es

$$v(t) = \left\{ v_0^{1/2} - \frac{1}{2} \gamma t \right\}^2$$

Ahora bien, del principio de comparación [34], tenemos que $V(\xi) < v(t)$ cuando $V(\xi(0)) < v_0$, entonces ξ converge a cero en tiempo finito y este tiempo se alcanza en

$$T = \frac{2V(\xi(0))^{1/2}}{\gamma}$$

Observador Super Twisting adaptativo de estado afín

Considere la siguiente clase de sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ux_2 + \phi_1(u, y)\theta + \psi_1(u, y) \\ \dot{x}_2 = \phi_2(u, y)\theta + \psi_2(u, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.68)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^2$ es el vector de estado, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada del sistema, $y \in \mathfrak{R}$ es la salida del sistema, $\theta \in \mathfrak{R}$ representa el parámetro desconocido. El vector $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Se considera que el sistema (4.68) cumple las siguientes hipótesis

- D1.** Las funciones $\phi_1(u, y)$, $\phi_2(u, y)$ y $\psi_1(u, y)$ son continuas con respecto de u e y .
- D2.** La función $\psi_2(u, x)$ es Lipschitz con respecto de x , y uniformemente con respecto de u .
- D3.** La entrada u debe ser persistente, es decir, debe satisfacer la Definición (4.1).
- D4.** El parámetro θ se supone constante y acotado.

Entonces, un observador para el sistema (4.68) es el siguiente

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = uz_2 + \phi_1(u, y)\hat{\theta} + \psi_1(u, y) + k_1(u)|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) + S_\theta^{-1}\Lambda_1^2|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_2 = \phi_2(u, y)\hat{\theta} + \psi_2(u, z) + \frac{k_2(u)}{2}\text{sign}(e_1) + \frac{1}{2}S_\theta^{-1}\Lambda_1\Lambda_2\text{sign}(e_1) \\ \dot{S}_x = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [-\rho_x S_x - A(u)^T S_x - S_x A(u) + C^T C] \\ \dot{S}_\theta = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [-2|e_1|^{1/2}\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T C \Lambda] \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \{ [A(u) - S_x^{-1} C^T C] \Lambda + \Phi(u, y) \} \\ \dot{\hat{\theta}} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T C \xi] \\ \hat{y} = Cz \end{cases} \quad (4.69)$$

donde $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ es el vector de estado estimado, \hat{y} es la salida del observador, ρ_x, ρ_θ son constantes positivas, las matrices S_x, S_θ son simétricas y definidas positivas. El parámetro a identificar esta representado como $\hat{\theta}$. Además:

$$\xi = \begin{bmatrix} |e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}, \quad \Phi(u, y) = \begin{bmatrix} \phi_1(u, y) \\ 2|e_1|^{1/2}\phi_2(u, y) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}, \quad S_x^{-1} C^T = \begin{bmatrix} k_1(u) \\ k_2(u) \end{bmatrix}$$

Para analizar la convergencia en tiempo finito del observador Super Twisting adaptativo de estado afín, se define el error de estimación del estado, y el error de identificación del parámetro como sigue:

$$e = x - z = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

cuyas dinámicas son

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ue_2 + \phi_1(u, y)\tilde{\theta} - k_1(u)|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) - S_\theta^{-1}\Lambda_1^2|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ \phi_2(u, y)\tilde{\theta} + \Delta\Psi(u, x, z) - \frac{k_2(u)}{2}\text{sign}(e_1) - \frac{1}{2}S_\theta^{-1}\Lambda_1\Lambda_2\text{sign}(e_1) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\frac{1}{2|e_1|^{1/2}} [S_\theta\Lambda^T C^T C\xi]$$

donde $\Delta\Psi(u, x, z) = \Psi(u, x, y) - \Psi(u, z, y)$

La convergencia del observador se demuestra en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.3. *Considere el sistema (4.68), y que las hipótesis D1, D2, D3 y D4 se satisfacen. Entonces, el sistema (4.69) es un observador Super Twisting adaptativo de estado afín para el sistema (4.68), el cual converge en tiempo finito.*

Demostración: Introduciendo el siguiente cambio de coordenadas, el cual es un homeomorfismo global

$$\xi = \begin{bmatrix} |e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Entonces, la dinámica del error de estimación del estado en las nuevas coordenadas está dada por

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \left\{ \begin{bmatrix} -k_1(u) & u \\ -k_2(u) & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \phi_1(u, y) \\ 2|e_1|^{1/2}\phi_2(u, y) \end{bmatrix} \tilde{\theta} \right\} \quad (4.73)$$

$$+ \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2|e_1|^{1/2}\Delta\Psi_2(u, x, z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_\theta^{-1}\Lambda_1^2|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \\ -S_\theta^{-1}\Lambda_1\Lambda_2|e_1|^{1/2}\text{sign}(e_1) \end{bmatrix} \right\}$$

donde $\xi = [\xi_1 \quad \xi_2]^T$. La ecuación anterior puede ser representada de manera compacta como

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \{ [A(u) - S_x^{-1} C^T C] \xi + \bar{\Phi} + \bar{\Psi} - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T C \xi \} \quad (4.74)$$

con

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_x^{-1} C^T = \begin{bmatrix} k_1(u) & 0 \\ k_2(u) & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1(u, y) \\ 2|e_1|^{1/2} \phi_2(u, y) \end{bmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2|e_1|^{1/2} \Delta\psi_2(u, x, z) \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta\psi_2(u, x, z) = \psi_2(u, x) - \psi_2(u, z)$$

Ahora, introduciendo el siguiente cambio de variable

$$\sigma = \xi - \Lambda \tilde{\theta} \quad (4.75)$$

Entonces, la derivada con respecto del tiempo de σ está dada por

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \{ [A(u) - S_x^{-1} C^T C] \sigma + \bar{\Psi} \} \quad (4.76)$$

Para verificar la convergencia del observador, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\sigma, \tilde{\theta}) = \sigma^T S_x \sigma + \tilde{\theta}^T S_\theta \tilde{\theta} \quad (4.77)$$

Tomando la derivada con respecto del tiempo de $V(\sigma, \tilde{\theta})$, a lo largo de las trayectorias de (4.71) y (4.76), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma, \tilde{\theta}) = & -\alpha \rho_x \sigma^T S_x \sigma - \rho_\theta \tilde{\theta}^T S_\theta \tilde{\theta} - \alpha \sigma^T C^T C \sigma + 2\sigma^T S_x \bar{\Psi} \\ & - \alpha \tilde{\theta}^T \Lambda^T C^T C \sigma - \alpha \sigma^T C^T C \Lambda \tilde{\theta} - \alpha \tilde{\theta}^T \Lambda^T C^T C \Lambda \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (4.78)$$

donde $\alpha = \frac{1}{2|e_1|^{1/2}}$, además, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 & -\alpha\sigma^T C^T C\sigma - \alpha\tilde{\theta}^T \Lambda^T C^T C\sigma - \alpha\sigma^T C^T C\Lambda\tilde{\theta} - \alpha\tilde{\theta}^T \Lambda^T C^T C\Lambda\tilde{\theta} \\
 & = -\alpha[\sigma + \Lambda\tilde{\theta}]^T C^T C[\sigma + \Lambda\tilde{\theta}] < 0
 \end{aligned}$$

Tomando la norma al término no lineal $2\sigma^T S_x \tilde{\Psi}$, y a partir de la hipótesis **D1**, es decir, $\|\tilde{\Psi}\| \leq \vartheta\|\sigma\|$, donde $\vartheta > 0$, reescribiendo la expresión (4.78), resulta que

$$\dot{V}(\sigma, \tilde{\theta}) < -\alpha(\rho_x \sigma^T S_x \sigma + \alpha^{-1} \rho_\theta \tilde{\theta}^T S_\theta \tilde{\theta} - \|S_x\| \vartheta \|\sigma\|^2) \quad (4.79)$$

Además, la función de Lyapunov $V(\sigma)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(S_x) \|\sigma\|^2 \leq V(\sigma) \leq \lambda_{\max}(S_x) \|\sigma\|^2$$

donde $\lambda_{\min}(S_x)$, $\lambda_{\max}(S_x)$ son los eigenvalores máximos y mínimos de S_x . Entonces, la ecuación (4.79) resulta ser de la forma

$$\dot{V}(\sigma, \tilde{\theta}) < -\alpha((\rho_x - \omega)\sigma^T S_x \sigma + \alpha^{-1} \rho_\theta \tilde{\theta}^T S_\theta \tilde{\theta}) \quad (4.80)$$

donde $\omega = \frac{2\|S_x\|\vartheta}{\lambda_{\max}(S_x)}$. Definiendo el vector η como $\eta = \begin{bmatrix} \sigma^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}^T$, el cual nos permite reescribir la función de Lyapunov $V(\sigma, \tilde{\theta})$, en forma compacta como sigue

$$V(\sigma, \tilde{\theta}) = V(\eta) = \eta^T S \eta \quad (4.81)$$

donde $S = \text{diag}(S_x, S_\theta)$, satisfaciendo la siguiente expresión

$$\lambda_{\min}(S) \|\eta\|^2 \leq V(\eta) \leq \lambda_{\max}(S) \|\eta\|^2$$

Entonces, la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov dada en (4.80), resulta que

$$\dot{V}(\eta) < -\alpha\delta V(\eta) \quad (4.82)$$

donde $\delta = \min((\rho_x - \omega), |\alpha^{-1}|^{1/2} \rho_\theta)$.

Ahora bien, considerando que se satisface la siguiente desigualdad

$$|e_1|^{1/2} \leq \|\eta\| \leq \left\{ \frac{V(\eta)}{\lambda_{\min}(S)} \right\}^{1/2}$$

Entonces, se tiene que

$$\dot{V}(\eta) \leq -\gamma V(\eta)^{1/2} \quad (4.83)$$

donde $\gamma = \frac{1}{2}\delta\sqrt{\lambda_{\min}(S)}$. Seleccionando ρ_x lo suficientemente grande, tal que sea mayor que ω , y escogiendo ρ_θ sea positiva, entonces, $\dot{V}(\sigma, \tilde{\theta})$ es negativa definida.

Para demostrar la convergencia del observador en tiempo finito es necesario resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\gamma v^{1/2} \quad v(0) = v_o$$

su solución sería la siguiente:

$$v(t) = \left\{ v_o^{1/2} - \frac{1}{2}\gamma t \right\}^2$$

Considerando el principio de comparación [34], tenemos que $V(\eta) < v(t)$ cuando $V(\eta(0)) < v_o$, entonces η converge a cero en tiempo finito y alcanza dicho valor en el siguiente tiempo:

$$T = \frac{2V(\eta(0))^{1/2}}{\gamma}$$

Con esto, nos lleva a la conclusión que el estado $\eta = \left[\sigma^T \quad \tilde{\theta}^T \right]^T$ converge a cero en tiempo finito.

4.3. Observadores interconectados para el MSIPI

En esta sección, se diseñarán dos observadores interconectados para estimar la posición angular mecánica θ , la velocidad angular mecánica Ω , la resistencia del estator R_s y el par de carga T_l del MSIPI.

4.3.1. Observadores para el modelo del MSIPI en el marco de referencia (d, q)

A continuación, se presenta el diseño observadores no lineales para estimar la resistencia del estator R_s , la velocidad angular mecánica Ω y el par de carga T_l , a partir del modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (d, q) .

Considere el siguiente modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (d, q) , obtenido en el Capítulo 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{sd} + \frac{L_q}{L_d} p\Omega i_{sq} + \frac{v_{sd}}{L_d} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{sq} - \frac{L_d}{L_q} p\Omega i_{sd} + \frac{v_{sq}}{L_q} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} \\ \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{f_v}{J} \Omega + \frac{1}{J} p\psi_r i_{sq} + \frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{sd} i_{sq} - \frac{1}{J} T_l \\ \frac{d\theta_m}{dt} = \Omega \end{array} \right. \quad (4.84)$$

Ahora bien, para el diseño del observador interconectado para el MSIPI en el marco de referencia (d, q) , se considera que

$$\frac{dT_l}{dt} = 0, \quad \frac{dR_s}{dt} = 0 \quad (4.85)$$

esto es que T_l y R_s se asume que son constantes. Además, la resistencia del estator presenta variaciones que son función de la temperatura del estator.

Considerando R_s como componente del vector de estado, entonces, el modelo extendido del MSIPI se puede expresar como dos subsistemas interconectados entre sí, como sigue

$$\Sigma_1 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{sd} + \frac{L_q}{L_d} p\Omega i_{sq} + \frac{v_{sd}}{L_d} \\ \frac{dR_s}{dt} = 0 \\ y_1 = i_{sd} \end{array} \right. \quad (4.86)$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q}i_{sq} - \frac{L_d}{L_q}p\Omega i_{sd} + \frac{v_{sq}}{L_q} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} \\ \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{f_v}{J}\Omega + \frac{1}{J}p\psi_r i_{sq} + \frac{p}{J}(L_d - L_q)i_{sd}i_{sq} - \frac{1}{J}T_l \\ y_2 = i_{sq} \end{cases} \quad (4.87)$$

Los subsistemas (4.86) y (4.87) se pueden escribir en forma compacta como sigue

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{X}_1 = A_1(y)X_1 + g_1(X_2) + \Phi_1 u \\ y_1 = C_1 X_1 \end{cases} \quad (4.88)$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{X}_2 = A_2(y)X_2 + g_2(X_1, X_2) + \Phi_2 u + \Phi T_l \\ y_2 = C_2 X_2 \end{cases} \quad (4.89)$$

donde $X_1 = [i_{sd} \ R_s]^T$, $X_2 = [i_{sq}, \Omega]^T$ es el vector de estados de cada subsistema, $u = [v_{sd} \ v_{sq}]^T$ representa los voltajes del estator, $y = [i_{sd} \ i_{sq}]^T$ representa las corrientes del estator del MSIPI, el parámetro T_l es considerado como una perturbación desconocida y acotada. Además

$$A_1(y) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i_{sd}}{L_d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1(X_2) = \begin{bmatrix} \frac{L_q}{L_d}p\Omega i_{sq} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2(y) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_d}{L_q}p i_{sd} - p \frac{\psi_r}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_q} \\ \frac{p}{J}\psi_r i_{sq} + \frac{p}{J}(L_d - L_q)i_{sd}i_{sq} - \frac{f_v}{J}\Omega \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = [1 \ 0]$$

donde g_1 y g_2 son los términos de interconexión entre ambos subsistemas. El dominio de operación para el MSIPI se define como

DEFINICIÓN 4.3. *El dominio físico de operación del MSIPI, está definido por el conjunto \mathcal{D}_f , el cual es*

$$\mathcal{D}_f = \left\{ X \in \mathbb{R}^5 \mid |i_{sd}| \leq I_d^{max}, |i_{sq}| \leq I_q^{max}, |\Omega| \leq \Omega^{max}, |T_l| \leq T_l^{max}, |R_s| \leq R_s^{max} \right\}$$

donde $X = [i_{sd} \ i_{sq} \ \Omega \ R_s]^T$, I_d^{max} , I_q^{max} , Ω^{max} , T_l^{max} y R_s^{max} son los valores máximos que tienen las corrientes del estator, la velocidad angular mecánica, el par de carga y la resistencia del estator, respectivamente.

Para diseñar los observadores de estado para el motor, primero se definirán algunas características del modelo del motor:

- El vector de estado X_1 (X_2) será considerado como entrada para el subsistema Σ_2 (Σ_1).
- Cuando el motor está dentro del área observable, eso implica que, X_1 y X_2 satisfacen la condición de persistencia.

Además, para el modelo del MSIPI se debe considerar lo siguientes hipótesis:

- F1.** $A_1(y)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_2
- F2.** $A_2(y)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_1
- F3.** $g_1(X_2)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_2 .
- F4.** $g_2(X_1, X_2)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_1, X_2 .
- F5.** El parámetro T_l es constante y acotado.
- F6.** Los subsistemas cumplen con la definición de persistencia.

Una vez establecido lo anterior, se procede a diseñar los observadores para los subsistemas (4.88) y (4.89). Posteriormente en el Capítulo 6 se realizará un estudio comparativo entre observadores de convergencia asintótica (observadores tipo Kalman), contra los observadores de convergencia en tiempo finito (observadores de modos deslizantes).

Observadores interconectados tipo Kalman

Para la estimación de la resistencia del estator R_s , la velocidad angular mecánica Ω y el par de carga T_l , se diseñará un observador interconectado tipo Kalman para los subsistemas (4.88) y (4.89), el cual tiene la siguiente estructura

$$\mathcal{O}_{1,KE} = \begin{cases} \dot{Z}_1 = A_1(y)Z_1 + g_1(Z_2) + \Phi_1 u - S_1^{-1}C_1^T(\hat{y}_1 - y_1) \\ \dot{S}_1 = -\rho_1 S_1 - A_1^T(y)S_1 - S_1 A_1(y) + C_1^T C_1 \\ \hat{y}_1 = C_1 Z_1 \end{cases} \quad (4.90)$$

$$\mathcal{O}_{2,KA} = \begin{cases} \dot{Z}_2 = A_2(y)Z_2 + g_2(Z_1, Z_2) + \Phi_2 u + \Phi \hat{T}_l - S_2^{-1}C_2^T(\hat{y}_2 - y_2) - \Lambda S_3^{-1}\Lambda^T C_2^T(\hat{y}_2 - y_2) \\ \dot{S}_2 = -\rho_2 S_2 - A_2^T(y)S_2 - S_2 A_2(y) + C_2^T C_2 \\ \dot{S}_3 = -\rho_3 S_3 + \Lambda^T C_2^T C_2 \Lambda \\ \dot{\Lambda} = [A_2(y) - S_2^{-1}C_2^T C_2] \Lambda + \Phi \\ \dot{\hat{T}}_l = -S_3^{-1}\Lambda^T C_2^T(\hat{y}_2 - y_2) \\ \hat{y}_2 = C_2 Z_2 \end{cases} \quad (4.91)$$

donde $Z_1 = [\hat{i}_{sd} \quad \hat{R}_s]^T$, $Z_2 = [\hat{i}_{sq} \quad \hat{\Omega}]^T$ es el vector de estado estimado, respectivamente de X_1 y X_2 , ρ_i para $i = 1, 2, 3$ son constantes definidas positivas, S_j de $j = 1, 2, 3$ son matrices simétricas definidas positivas, con $S_j(0) > 0$. El término $S_1^{-1}C_1^T$ es la ganancia del observador para el subsistema (4.88), ahora bien, el término $S_2^{-1}C_2^T$ es la ganancia del observador, y el término $\Lambda S_3^{-1}\Lambda^T C_2^T$ es la ganancia de adaptación para el subsistema (4.89).

La convergencia del observador adaptativo interconectado se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4. *Considere el modelo dinámico del MSUPI compuesto por los subsistemas (4.88) y (4.89). Entonces, los sistemas (4.90) y (4.91) conforman un observador adaptativo interconectado para los subsistemas (4.88) y (4.89), cuya estabilidad práctica uniformemente fuerte de la dinámica del error de estimación es establecida.*

La demostración del teorema anterior se encuentra detallada en [35].

Observadores interconectados de modos deslizantes

Considerando el modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (d, q) , el cual fue dividido en dos subsistemas Σ_1 dado por (4.88), y Σ_2 expresado en (4.89) con sus respectivas consideraciones, se procede a diseñar un observador del tipo Super Twisting de estado afín para el subsistema (4.88), y un observador de tipo Super Twisting adaptativo de estado afín para el subsistema (4.89). Entonces, tenemos que ambos observadores tendrán la siguiente estructura

$$\mathcal{O}_{1,STEA} = \begin{cases} \dot{Z}_1 = A_1(y)Z_1 + g_1(Z_2) + \Phi_1 u - \bar{\xi}_1 F S_{\theta_1}^{-1} C_1^T \\ \dot{S}_{\theta_1} = \frac{1}{2|e_{1,1}|^{1/2}} [-\theta_1 S_{\theta_1} - A_1^T(y)S_{\theta_1} - S_{\theta_1} A_1(y) + C_1^T C_1] \\ \hat{y}_1 = C_1 Z_1 \end{cases} \quad (4.92)$$

$$\mathcal{O}_{2,STA} = \begin{cases} \dot{Z}_2 = A_2(y)Z_2 + g_2(Z_1, Z_2) + \Phi_2 u + \Phi \hat{T}_l - \bar{\xi}_2 F S_{\theta_2}^{-1} C_2^T - \bar{\xi}_2 F \Lambda S_{\theta_3}^{-1} \Lambda^T C_2^T \\ \dot{S}_{\theta_2} = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}} [-\theta_2 S_{\theta_2} - A_2^T(y)S_{\theta_2} - S_{\theta_2} A_2(y) + C_2^T C_2] \\ \dot{S}_{\theta_3} = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}} [-2|e_{2,1}|^{1/2} \theta_3 S_{\theta_3} + \Lambda^T C_2^T C_2 \Lambda] \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}} \left\{ \left[A_2(y) - S_{\theta_2}^{-1} C_2^T C_2 \right] \Lambda + \bar{\Phi} \right\} \\ \dot{\hat{T}}_l = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}} \left[-S_{\theta_3}^{-1} \Lambda^T C_2^T C_2 \xi_2 \right] \\ \hat{y}_2 = C_2 Z_2 \end{cases} \quad (4.93)$$

donde $Z_1 = [\hat{i}_{sd} \quad \hat{R}_s]^T$, $Z_2 = [\hat{i}_{sq} \quad \hat{\Omega}]^T$ son las variables de estado estimadas, respectivamente de X_1 y X_2 , θ_i para $i = 1, 2, 3$ son constantes definidas positivas; S_{θ_j} de $j = 1, 2$ son matrices simétricas definidas positivas, con $S_{\theta_3}(0) > 0$. El término $S_{\theta_1}^{-1} C_1^T$ es la ganancia del observador para el subsistema (4.88), $S_{\theta_2}^{-1} C_2^T$ es la ganancia del observador, y el término $\Lambda S_{\theta_3}^{-1} \Lambda^T C_2^T$ es la ganancia de adaptación para el subsistema (4.89). Los errores de observación se definen como $e_{1,1} = y_1 - \hat{y}_1$ y $e_{2,1} = y_2 - \hat{y}_2$. La matriz $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, además

$$\bar{\xi}_i = \begin{bmatrix} |e_{i,1}|^{1/2} \text{sign}(e_{i,1}) & 0 \\ 0 & \text{sign}(e_{i,1}) \end{bmatrix}, \quad \xi_i = \begin{bmatrix} |e_{i,1}|^{1/2} \text{sign}(e_{i,1}) \\ \text{sign}(e_{i,1}) \end{bmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2$$

La convergencia del observador Super Twisting adaptativo interconectado de estado afín se establece en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.4. *Considere el modelo dinámico del MSIPI compuesto por los subsistemas (4.88) y (4.89), y además las hipótesis **F1**, **F2**, **F3**, **F4**, **F5** y **F6** se satisfacen. Entonces, los sistemas (4.92) y (4.93) conforman un observador Super Twisting adaptativo interconectado de estado afín para los subsistemas (4.88) y (4.89), el cual converge en tiempo finito.*

Demostración: Para demostrar la convergencia del observador, considere las siguientes funciones de Lyapunov

$$V_1(\xi_1) = \xi_1^T S_{\theta_1} \xi_1, \quad V_2(\sigma, \tilde{\theta}) = \sigma^T S_{\theta_2} \sigma + \tilde{T}_l^T S_{\theta_3} \tilde{T}_l \quad (4.94)$$

donde ξ_1 es un vector en función de los errores de estimación del estado del subsistema (4.92), \tilde{T}_l es el error de identificación del parámetro para el sistema (4.93), $\sigma = \xi_2 - \Lambda \tilde{T}_l$.

La función $V_1(\xi_1)$ representa la función de Lyapunov para el subsistema (4.92), y $V_2(\sigma, \tilde{\theta})$ representa la función de Lyapunov para el subsistema (4.93). Entonces, la función de Lyapunov para el sistema completo está dada por

$$V_T(\xi_1, \sigma, \tilde{T}_l) = \xi_1^T S_{\theta_1} \xi_1 + \sigma^T S_{\theta_2} \sigma + \tilde{T}_l^T S_{\theta_3} \tilde{T}_l \quad (4.95)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo la función de Lyapunov, realizando las operaciones correspondientes (ver Sección 4.2.4), resulta que

$$\dot{V}_T(\xi_1, \sigma, \tilde{T}_l) \leq -\alpha_1 \theta_1 V_1(\xi_1) - \alpha_2 \delta V_2(\sigma, \tilde{T}_l) \quad (4.96)$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2|e_{1,1}|^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}}, \quad \delta = \min(\theta_2, \theta_3)$$

Definiendo el vector $\eta = \left[\sigma^T \quad \tilde{T}_l^T \right]^T$, $S = \text{diag}(S_{\theta_2}, S_{\theta_3})$, y considerando que se satisfacen las siguientes desigualdades

$$|e_{1,1}|^{1/2} \leq \|\xi_1\| \leq \left\{ \frac{V(\xi_1)}{\lambda_{\min}(S_{\theta_1})} \right\}^{1/2}, \quad |e_{2,1}|^{1/2} \leq \|\eta\| \leq \left\{ \frac{V(\eta)}{\lambda_{\min}(S)} \right\}^{1/2}$$

Entonces, (4.96), tiene la siguiente forma

$$\dot{V}_T(\xi_1, \eta) \leq -\gamma_1 V(\xi_1)^{1/2} - \gamma_2 V(\eta)^{1/2} \quad (4.97)$$

donde $\gamma_1 = \frac{1}{2}\theta_1 \sqrt{\lambda_{\min}(S_{\theta_1})}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2}\delta \sqrt{\lambda_{\min}(S)}$. Definiendo $\vartheta = \min(\gamma_1, \gamma_2)$, la ecuación (4.97) se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{V}_T(\xi_1, \sigma, \tilde{T}_l) \leq -\vartheta V_T(\xi_1, \sigma, \tilde{T}_l)^{1/2} \quad (4.98)$$

Para demostrar la convergencia del observador en tiempo finito, considere la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\vartheta v^{1/2} \quad v(0) = v_0$$

su solución sería la siguiente

$$v(t) = \left\{ v_0^{1/2} - \frac{1}{2}\vartheta t \right\}^2$$

Considerando el principio de comparación [34], tenemos que la función $V_T(\xi_1, \sigma, \tilde{\theta}) < v(t)$ cuando $V_T(\xi_1(0), \sigma(0), \tilde{\theta}(0)) < v_0$, entonces, tanto ξ_1 como σ y $\tilde{\theta}$ convergen a cero en tiempo finito y alcanzan dicho valor en el siguiente tiempo

$$T = \frac{2V_T(\xi_1(0), \sigma(0), \tilde{\theta}(0))^{1/2}}{\vartheta}$$

Se concluye que los errores de estimación del estado para ambos subsistemas convergen a cero en tiempo finito, así como, el error de identificación del parámetro del segundo subsistema.

4.3.2. Observadores para el modelo del MSIPI en el marco de referencia (α, β)

En esta sección se utilizarán observadores no lineales para estimar la posición angular mecánica θ_m , a partir de los flujos del estator del modelo del MSIPI en el marco (α, β) . Para estimar la

posición, se consideran la relación que existe entre la posición y los flujos del rotor en el marco de referencia (α, β) , como sigue

$$\begin{bmatrix} \Psi_{r\alpha} \\ \Psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_r \begin{bmatrix} \cos(p\theta_m) \\ \sin(p\theta_m) \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

donde ψ_r es la constante de flujo del rotor y p es el número de polos del motor. Dividiendo $\Psi_{r\beta}$ entre $\Psi_{r\alpha}$, se tiene que

$$\frac{\Psi_{r\beta}}{\Psi_{r\alpha}} = \tan(p\theta_m)$$

Entonces, de la ecuación anterior despejamos el ángulo θ_m , de donde se obtiene que

$$\theta_m = \frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{\Psi_{r\beta}}{\Psi_{r\alpha}} \right) \quad (4.100)$$

Para estimar la posición angular mecánica del rotor, primero considere el modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (α, β) , obtenido en el Capítulo 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{s\alpha}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{s\alpha} + \frac{p}{L_d} \Omega \Psi_{r\beta} + \frac{v_{s\alpha}}{L_d} \\ \frac{di_{s\beta}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{s\beta} - \frac{p}{L_q} \Omega \Psi_{r\alpha} + \frac{v_{s\beta}}{L_q} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = -p \Omega \Psi_{r\beta} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = p \Omega \Psi_{r\alpha} \end{array} \right. \quad (4.101)$$

El modelo anterior se puede expresar como la interconexión de dos subsistemas, de la siguiente manera

$$\Sigma_3 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{s\alpha}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{s\alpha} + \frac{p}{L_d} \Omega \Psi_{r\beta} + \frac{v_{s\alpha}}{L_d} \\ \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = p \Omega \Psi_{r\alpha} \\ y_1 = i_{\alpha} \end{array} \right. \quad (4.102)$$

$$\Sigma_4 : \begin{cases} \frac{di_{s\beta}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{s\beta} - \frac{p}{L_q} \Omega \Psi_{r\alpha} + \frac{v_{s\beta}}{L_q} \\ \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = -p\Omega \Psi_{r\beta} \\ y_2 = i_\beta \end{cases} \quad (4.103)$$

Los subsistemas (4.102) y (4.103) se pueden representar en forma compacta como sigue

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{X}_1 = A_1(y)X_1 + g_1(X_1, X_2) + \Phi_1 u \\ y_1 = C_1 X_1 \end{cases} \quad (4.104)$$

$$\Sigma_4 : \begin{cases} \dot{X}_2 = A_2(y)X_2 + g_2(X_1, X_2) + \Phi_2 u \\ y_2 = C_2 X_2 \end{cases} \quad (4.105)$$

donde $X_1 = [i_{s\alpha} \ \Psi_{r\beta}]^T$, $X_2 = [i_{s\beta}, \Psi_{r\alpha}]^T$ son los estados de cada subsistema, $u = [v_{s\alpha} \ v_{s\beta}]^T$ como la entrada, $y = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]^T$ representa la salida del modelo. Además

$$A_1(y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p}{L_d} \Omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} i_{s\alpha} \\ p\Omega \Psi_{r\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2(y) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{p}{L_q} \Omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_q} i_{s\beta} \\ -p\Omega \Psi_{r\beta} \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde g_1 y g_2 son los términos de interconexión entre ambos subsistemas.

Para diseñar el observador interconectado, se deben tomar en cuenta las siguientes hipótesis

- G1.** $A_1(y)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_2
- G2.** $A_2(y)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_1
- G3.** $g_1(X_1, X_2)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_1, X_2 .
- G4.** $g_2(X_1, X_2)$ es globalmente Lipschitz con respecto de X_1, X_2 .
- G5.** Los subsistemas cumplen con la definición de persistencia.

Una vez definido lo anterior, se procede a diseñar los observadores para los subsistemas (4.104) y (4.105). Posteriormente en el Capítulo 6 se realizará un estudio comparativo entre observadores de convergencia asintótica (observadores tipo Kalman), contra los observadores de convergencia en tiempo finito (observadores de modos deslizantes).

Observadores interconectados tipo Kalman

Considerando que las hipótesis **G1-G5** se cumplen para los subsistemas (4.104) y (4.105), se diseñará un observador interconectado de Kalman extendido. Entonces, tenemos que ambos observadores tendrán la siguiente estructura

$$\mathcal{O}_{3,KE} = \begin{cases} \dot{Z}_1 = A_1(y)Z_1 + g_1(Z_1, Z_2) + \Phi_1 u - S_1^{-1}C_1^T(\hat{y}_1 - y_1) \\ \dot{S}_1 = -\rho_1 S_1 - A_1^T(y)S_1 - S_1 A_1(y) + C_1^T C_1 \\ \hat{y}_1 = C_1 Z_1 \end{cases} \quad (4.106)$$

$$\mathcal{O}_{4,KE} = \begin{cases} \dot{Z}_2 = A_2(y)Z_2 + g_2(Z_1, Z_2) + \Phi_2 u - S_2^{-1}C_2^T(\hat{y}_2 - y_2) \\ \dot{S}_2 = -\rho_2 S_2 - A_2^T(y)S_2 - S_2 A_2(y) + C_2^T C_2 \\ \hat{y}_2 = C_2 Z_2 \end{cases} \quad (4.107)$$

donde $Z_1 = [\hat{i}_{s\alpha} \quad \hat{\Psi}_{r\beta}]^T$, $Z_2 = [\hat{i}_{s\beta} \quad \hat{\Psi}_{r\alpha}]^T$ son los vectores de estado estimadas, ρ_i para $i = 1, 2$ son constantes definidas positivas, S_j de $j = 1, 2$ son matrices simétricas definidas positivas, con $S_j(0) > 0$. El término $S_j^{-1}C^T$ representa la ganancia del observador, para ambos subsistemas (4.104) y (4.105).

La demostración de convergencia de este observador interconectado, se encuentra en el Teorema (4.4).

Observadores interconectados de modos deslizantes

Considerando el modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (α, β) , el cual fue dividido en dos subsistemas: Σ_3 dado por la ecuación (4.104), y Σ_4 expresado en (4.105) satisfaciendo las hipótesis **G1-G5**. Entonces, un observador Super Twisting interconectado de estado afín para

los subsistemas Σ_3 y Σ_4 , está dado por

$$\mathcal{O}_{3,STE} = \begin{cases} \dot{Z}_1 = A_1(y)Z_1 + g_1(Z_1, Z_2) + \Phi_1 u - \bar{\xi}_1 F S_{\theta_1}^{-1} C_1^T \\ \dot{S}_{\theta_1} = \frac{1}{2|e_{1,1}|^{1/2}} [-\theta_1 S_{\theta_1} - A_1^T(y)S_{\theta_1} - S_{\theta_1} A_1(y) + C_1^T C_1] \\ \hat{y}_1 = C_1 Z_1 \end{cases} \quad (4.108)$$

$$\mathcal{O}_{4,STE} = \begin{cases} \dot{Z}_2 = A_2(y)Z_2 + g_2(Z_1, Z_2) + \Phi_2 u - \bar{\xi}_2 F S_{\theta_2}^{-1} C_2^T \\ \dot{S}_{\theta_2} = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}} [-\theta_2 S_{\theta_2} - A_2^T(y)S_{\theta_2} - S_{\theta_2} A_2(y) + C_2^T C_2] \\ \hat{y}_2 = C_2 Z_2 \end{cases} \quad (4.109)$$

donde $Z_1 = [\hat{i}_{s\alpha} \quad \hat{\Psi}_{r\beta}]^T$, $Z_2 = [\hat{i}_{s\beta} \quad \hat{\Psi}_{r\alpha}]^T$ son las variables de estado estimadas, θ_i para $i = 1, 2$ son constantes definidas positivas, S_{θ_j} ; $j = 1, 2$ son matrices simétricas definidas positivas, con $S_{\theta_j}(0) > 0$. El término $S_{\theta_j}^{-1} C^T$ representa la ganancia del observador para ambos subsistemas (4.104) y (4.105). Los errores de observación se definen como $e_{1,1} = y_1 - \hat{y}_1$ y $e_{2,1} = y_2 - \hat{y}_2$. La matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ además}$$

$$\bar{\xi}_i = \begin{bmatrix} |e_{i,1}|^{1/2} \text{sign}(e_{i,1}) & 0 \\ 0 & \text{sign}(e_{i,1}) \end{bmatrix}, \quad \xi_i = \begin{bmatrix} |e_{i,1}|^{1/2} \text{sign}(e_{i,1}) \\ \text{sign}(e_{i,1}) \end{bmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2$$

La convergencia del observador adaptativo interconectado de estado afín se establece en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.5. *Considere el modelo dinámico del MSIPI compuesto por los subsistemas (4.104) y (4.105), y además las hipótesis **G1**, **G2**, **G3**, **G4** y **G5** se satisfacen. Entonces, los sistemas (4.108) y (4.109) conforman un observador Super Twisting interconectado de estado afín para los subsistemas (4.104) y (4.105), el cual converge en tiempo finito.*

Demostración: Para demostrar la convergencia del observador, considere las siguientes funciones de Lyapunov

$$V_1(\xi_1) = \xi_1^T S_{\theta_1} \xi_1, \quad V_2(\xi_2) = \xi_2^T S_{\theta_2} \xi_2 \quad (4.110)$$

donde $V_1(\xi_1)$ representa la función de Lyapunov para el sistema (4.108), y $V_2(\xi_2)$ representa la función de Lyapunov para el sistema (4.109). Entonces, la función de Lyapunov para el sistema completo está dada por

$$V_T(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^T S_{\theta_1} \xi_1 + \xi_2^T S_{\theta_2} \xi_2 \quad (4.111)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo la función de Lyapunov, y realizando las operaciones correspondientes (ver Sección 4.2.4), resulta que

$$\dot{V}_T(\xi_1, \xi_2) \leq -\alpha_1 \theta_1 V_1(\xi_1) - \alpha_2 \theta_2 V_2(\xi_2) \quad (4.112)$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2|e_{1,1}|^{1/2}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2|e_{2,1}|^{1/2}}$$

Suponga que las siguientes desigualdades se cumplen

$$|e_{1,1}|^{1/2} \leq \|\xi_1\| \leq \left\{ \frac{V(\xi_1)}{\lambda_{\min}(S_{\theta_1})} \right\}^{1/2}, \quad |e_{2,1}|^{1/2} \leq \|\xi_2\| \leq \left\{ \frac{V(\xi_2)}{\lambda_{\min}(S_{\theta_2})} \right\}^{1/2}$$

Entonces, la ecuación (4.112), tiene la siguiente forma

$$\dot{V}_T(\xi_1, \xi_2) \leq -\gamma_1 V(\xi_1)^{1/2} - \gamma_2 V(\xi_2)^{1/2} \quad (4.113)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{\theta_1}{2} \sqrt{\lambda_{\min}(S_{\theta_1})}, \quad \gamma_2 = \frac{\theta_2}{2} \sqrt{\lambda_{\min}(S_{\theta_1})}$$

Definiendo $\vartheta = \min(\gamma_1, \gamma_2)$, la ecuación (4.113) se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{V}_T(\xi_1, \xi_2) \leq -\vartheta V_T(\xi_1, \xi_2)^{1/2} \quad (4.114)$$

Para demostrar la convergencia del observador en tiempo finito, considere la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\vartheta v^{1/2} \quad v(0) = v_0$$

su solución sería la siguiente

$$v(t) = \left\{ v_0^{1/2} - \frac{1}{2} \vartheta t \right\}^2$$

Tomando en cuenta el principio de comparación [34], tenemos que $V_T(\xi_1, \xi_2) < v(t)$ cuando $V_T(\xi_1(0), \xi_2(0)) < v_0$, entonces, tanto ξ_1 como ξ_2 convergerán a cero en tiempo finito y alcanzan dicho valor en el siguiente tiempo

$$T = \frac{2V_T(\xi_1(0), \xi_2(0))^{1/2}}{\vartheta}$$

Se concluye que los errores de estimación del estado para ambos subsistemas convergen a cero en tiempo finito.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se presentaron diversos diseños de observadores de estado, para estimar variables no medibles en ciertas clases de sistemas no lineales. Se propuso una nueva metodología de sintonización para los observadores de modos deslizantes Super Twisting.

Se propusieron observadores interconectados utilizando la técnica de modos deslizantes Super Twisting, para los modelos matemáticos del MISPI introducidos en el Capítulo 2. Así como, se diseñaron observadores tipo Kalman, para los mismos modelos con el fin de realizar un estudio comparativo entre los observadores de convergencia asintótica (observadores tipo Kalman), y los de convergencia en tiempo finito (observadores Super Twisting).

Capítulo 5

Diseño de Controles para el MSUPI

5.1. Introducción

En este capítulo, se introducirán definiciones y conceptos acerca de la teoría de control no lineal. Se presentarán de manera breve algunos algoritmos de control no lineal. Esto con el fin de utilizar dicha teoría y aplicarla directamente en el MSUPI.

Por otra parte, debido a que la resistencia del estator R_s depende de la temperatura, entonces, dicha variación introduce una pequeña perturbación paramétrica al sistema, lo cual nos obliga a diseñar un control que sea robusto ante este tipo de perturbación.

Para el diseño de estrategias de control se utilizará el modelo matemático del MSUPI en el marco de referencia (d, q) .

El objetivo de control consiste en controlar la velocidad del rotor Ω y la corriente i_{sd} , de acuerdo a una referencia deseada, bajo los efectos de las variaciones en la resistencia y el par de carga.

Para alcanzar estos objetivos, se aplicarán técnicas de control no lineal tales como, el control Backstepping integral, el cual asegura convergencia asintótica, y el control por modos deslizantes Super Twisting, el cual asegura convergencia en tiempo finito.

5.2. Controlabilidad

La controlabilidad es una propiedad de los sistemas que nos permite saber si es posible llevar al sistema, de un estado inicial $x_0(t)$ a cualquier estado final $x_f(t)$, en tiempo finito al aplicar una entrada durante un intervalo de tiempo.

A continuación, se estudiará esta propiedad tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales.

5.2.1. Controlabilidad de sistemas lineales

Considere el siguiente sistema invariante en el tiempo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ la entrada, $y \in \mathbb{R}^p$ la salida, las matrices A , B , C y D son matrices de dimensiones compatibles.

DEFINICIÓN 5.1. *El sistema (5.1) es controlable, si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0$ y cualquier estado final x_f , existe una entrada que transfiere el estado x , desde x_0 hasta x_f , en un tiempo finito. En caso contrario, el sistema es no controlable [24].*

Otra metodología utilizada para verificar la propiedad de controlabilidad en sistemas lineales, está basada en el criterio de Kalman de controlabilidad. De acuerdo con el criterio de Kalman de controlabilidad, se dice que el sistema (5.1) es controlable, sí y solo sí, la matriz $[\mathcal{C}_{A,B}]$

$$\mathcal{C}_{A,B} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

es de rango completo, i.e., $rank([\mathcal{C}_{A,B}]) = n$, donde n es la dimensión del sistema.

5.2.2. Controlabilidad de sistemas no lineales

Considere la siguiente clase de sistema no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ la entrada, $y \in \mathbb{R}^p$ la salida, las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son funciones suaves.

DEFINICIÓN 5.2. *El sistema (5.2), es controlable si la matriz $[\mathcal{C}_{f,g}]$*

$$\mathcal{C}_{f,g} = \begin{bmatrix} g(x) & ad_f g(x) & ad_f^2 g(x) & \cdots & ad_f^{n-1} g(x) \end{bmatrix}$$

donde

$$ad_f g = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x)$$

es de rango completo, i.e., $rank([\mathcal{C}_{f,g}]) = n$, donde n es la dimensión del sistema.

5.3. Controladores no lineales

A continuación, se introduce el control backstepping y el control por modos deslizantes Super Twisting.

5.3.1. Control Backstepping

El control backstepping es una técnica sistemática y recursiva, su principio de control se basa en seleccionar de manera adecuada, funciones compuestas de las variables de estado como controles virtuales, para un subsistema de primer orden. Después dicho control virtual se diseña de tal manera que, la estabilidad del subsistema se garantice mediante una función de Lyapunov.

Luego de cada etapa del backstepping, obtenemos un nuevo control virtual en función del control anterior. La última etapa del diseño del controlador se obtiene cuando el control real aparece en el subsistema. Entonces, para demostrar la estabilidad de todo el sistema basta con sumar todas las funciones de Lyapunov propuestas en cada etapa del backstepping.

A continuación, se presenta el desarrollo del control backstepping mediante un ejemplo:

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2 + c + F \cos(t) + u\end{aligned}\tag{5.3}$$

el cual representa la dinámica de la parte mecánica de un generador, donde los valores de los parámetros son $a = 1$, $b = 0.02$, $c = 0.2$ y $F = 0.2593$.

Entonces, el objetivo de control para este sistema es resolver el problema de seguimiento de x_1 , utilizando la metodología del control backstepping.

Definiendo el error de seguimiento como sigue

$$z_1 = x_1 - x_1^*\tag{5.4}$$

e introduciendo las nuevas variables

$$\xi_1 = x_1, \quad \alpha_0 = x_1^*\tag{5.5}$$

donde x_1^* representa la referencia deseada para el estado x_1 . Tomando la derivada con respecto al tiempo de z_1 , tenemos que

$$\dot{z}_1 = x_2 - \dot{\alpha}_0$$

Si definimos las siguientes variables

$$\xi_2 = x_2, \quad \alpha_1 = -\dot{\alpha}_0\tag{5.6}$$

La dinámica de z_1 se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{z}_1 = \xi_2 + \alpha_1$$

Para analizar la dinámica del error de seguimiento z_1 , se considera la siguiente función candidata de Lyapunov, $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$, y se definen las siguientes variables

$$\beta_1 = -k_1 z_1 - \alpha_1, \quad z_2 = \xi_2 - \beta_1 \quad (5.7)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de V_1 , y sustituyendo lo anterior en la dinámica de z_1 , se tiene que

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - k_1 z_1^2$$

donde $k_1 > 0$. Continuando con la metodología del control backstepping, se calcula la derivada con respecto al tiempo de z_2 , resultando que

$$\dot{z}_2 = -a \sin(\xi_1) - b \xi_2 + c + F \cos(t) + u - \dot{\beta}_1$$

Definiendo $\beta_2 = -a \sin(\xi_1) - b \xi_2 + c + F \cos(t) - \dot{\beta}_1$. Entonces, la ecuación anterior se reescribe como sigue

$$\dot{z}_2 = \beta_2 + u$$

Considerando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (5.8)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de $V(z_1, z_2)$, se tiene que

$$\dot{V}(z_1, z_2) = z_1 z_2 - k_1 z_1^2 + z_2 (\beta_2 + u) \quad (5.9)$$

Para asegurar que la función de Lyapunov sea negativa definida, la ley de control u , se debe seleccionar como sigue

$$u = -\beta_2 - z_1 - k_2 z_2 \quad (5.10)$$

Utilizando la ley de control anterior, reescribimos (5.9) como sigue

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 < 0 \quad (5.11)$$

Entonces, bajo la acción de control u de (5.10), el estado x_1 seguirá la referencia deseada x_1^* .

Ahora bien, para mejorar la robustez del control backstepping, se agrega una acción de control integral a cada etapa de diseño. Entonces, al añadir dicha etapa nos permite obtener un control backstepping robusto, el cual permite rechazar términos con incertidumbre en el sistema, así como, rechazar cierta clase de perturbaciones. A este tipo de control backstepping, se le conoce como *control backstepping integral*.

5.3.2. Control por modos deslizantes de alto orden

En esta sección se introduce una metodología de control robusto basada en técnicas de modos deslizantes. La principal característica de este tipo de control, es la convergencia en tiempo finito a pesar de la presencia de cierta clase de perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Sin embargo, una de sus principales desventajas es el efecto de *chattering* en la señal de control. Recientemente se han realizado diversos trabajos, en los cuales se trata solucionar este problema mediante el uso de modos deslizantes de alto orden, logrando reducir considerablemente dicho efecto indeseable [36].

A continuación, se propone un control basado en el modos deslizantes Super Twisting, el cual tiene propiedades atractivas como: robustez, convergencia en tiempo finito y además reducción del efecto de *chattering*. Este control es una modificación del control Super Twisting propuesto en [2]. La principal diferencia que existe entre el control que se propondrá en la siguiente sección, y el propuesto en [2], es que el control que se propondrá en la siguiente sección requiere únicamente de un parámetro para sintonizar, lo cual facilita la implementación y sintonización de dicho control en un sistema físico.

Control Super Twisting Modificado

Consideremos la siguiente clase de sistemas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u + \rho \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.12)$$

donde x_1, x_2 representan los estados del sistema, u es la entrada, y representa la salida, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones no lineales suaves conocidas, ρ es la perturbación y el vector $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Se asume que el sistema cumple con las siguientes hipótesis

- A1.** Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuamente Lipschitz con respecto de x .
- A2.** La perturbación ρ y su primer derivada $\dot{\rho} = \gamma$ son acotadas, i.e., existen constantes positivas conocidas C_1 y C_2 tal que, $|\rho| \leq C_1$, $|\gamma| \leq C_2$

Entonces, para el diseño del control Super Twisting, definimos la siguiente superficie deslizante que esta en función de los errores de seguimiento, como sigue

$$s = c_1 e_1 + e_2 \quad (5.13)$$

donde $c_1 > 0$, $e_1 = x_1 - x_1^*$ y $e_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^*$, con x_1^* como la referencia deseada para el estado x_1 . Derivando con respecto del tiempo de la superficie deslizante, y realizando las sustituciones adecuadas, se tiene

$$\dot{s} = c_1 e_2 + f(x) + g(x)u + \rho - \dot{x}_1^* \quad (5.14)$$

Seleccionando la ley de control u como sigue

$$u = \frac{1}{g(x)} \left\{ -c_1 e_2 - f(x) + \dot{x}_1^* - k_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) - k_2 \int_0^t \text{sign}(s) d\tau \right\} \quad (5.15)$$

donde $k_1 = 2L$, $k_2 = \frac{L^2}{2}$ con $L > 0$ y $g(x) \neq 0$.

Entonces, sustituyendo la ley de control anterior, en la dinámica de la superficie deslizante, tenemos que

$$\dot{s} = -2L|s|^{1/2} \text{sign}(s) - \frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau + \rho \quad (5.16)$$

Para analizar la convergencia en tiempo finito del Control Super Twisting, considere el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= s \\ z_2 &= -\frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau + \rho \end{aligned} \quad (5.17)$$

Derivando con respecto del tiempo las ecuaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2L|z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{L^2}{2} \text{sign}(z_1) + \gamma \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde $\gamma = \dot{\rho}$

La convergencia de este control queda demostrada en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.1. *Considere el sistema (5.12), y además las suposiciones **A1** y **A2** se satisfacen. Entonces, la ley de control propuesta en (5.15) es un control Super Twisting para el sistema (5.12), el cual hace que el sistema en lazo cerrado converja a la referencia deseada en tiempo finito en presencia de perturbaciones.*

Demostración: Introduciendo el siguiente cambio de coordenadas,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) \\ \xi_2 &= z_2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

el cual es un homeomorfismo global.

Entonces, la dinámica de (5.18) en las nuevas coordenadas está dada por

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|z_1|^{1/2}} \left\{ \begin{bmatrix} -2L & 1 \\ -L^2 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 2|z_1|^{1/2}\gamma \end{bmatrix} \right\} \quad (5.20)$$

donde $\xi = [\xi_1 \quad \xi_2]^T$, la cual de manera compacta se representa como sigue

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|z_1|^{1/2}} [(A - S_x^{-1}C^T C)\xi + \Gamma] \quad (5.21)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 2|z_1|^{1/2}\gamma \end{bmatrix}, \quad S_x^{-1}C^T C = \begin{bmatrix} -2L & 0 \\ -L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz S_x es definida positiva, solución de la siguiente ecuación

$$LS_x + A^T S_x + S_x A - C^T C = 0 \quad (5.22)$$

donde L es una constante positiva. Para analizar la convergencia de la dinámica del error de seguimiento (5.21), considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\xi) = \xi^T S_x \xi \quad (5.23)$$

Tomando la derivada con respecto del tiempo de $V(\xi)$ a lo largo de las trayectorias de (5.21), se tiene que

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{1}{2|z_1|^{1/2}} [-L\xi^T S_x \xi + 2\xi^T S_x \Gamma] \quad (5.24)$$

Considerando la norma del término no lineal $2\xi^T S_x \Gamma$, y a partir de la hipótesis **A2**, es decir, $\|\Gamma\| \leq \vartheta\|\xi\|$, donde $\vartheta > 0$, la ecuación (5.24) resulta ser

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{L}{2|z_1|^{1/2}} V(\xi) + \frac{1}{2|z_1|^{1/2}} 2\|S_x\| \vartheta \|\xi\|^2 \quad (5.25)$$

Además, la función de Lyapunov satisface la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(S_x)\|\xi\|^2 \leq V(\xi) \leq \lambda_{\max}(S_x)\|\xi\|^2$$

donde $\lambda_{\min}(S_x)$, $\lambda_{\max}(S_x)$ son los eigenvalores máximos y mínimos de S_x . Entonces, la ecuación (5.25) se reescribe como sigue

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{(L-\eta)}{2|z_1|^{1/2}} V(\xi) \quad (5.26)$$

donde $\eta = \frac{2\|S_x\|\theta}{\lambda_{\max}(S_x)}$. Ahora bien, considerando que la siguiente desigualdad se satisface

$$|z_1|^{1/2} \leq \|\xi\| \leq \left\{ \frac{V(\xi)}{\lambda_{\min}(S_x)} \right\}^{1/2}$$

Resulta que

$$\dot{V}(\xi) \leq -\delta V(\xi)^{1/2} \quad (5.27)$$

donde $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{\min}(S_x)}(L-\eta)$. Seleccionando L lo suficientemente grande, tal que δ sea positiva, entonces, resulta que $\dot{V}(\xi)$ es negativa definida.

Para demostrar la convergencia del control en tiempo finito, considere la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\delta v^{1/2} \quad v(0) = v_0$$

cuya solución es

$$v(t) = \left\{ v_0^{1/2} - \frac{1}{2}\delta t \right\}^2$$

Tomando en cuenta el principio de comparación [34], tenemos que $V(\xi) < v(t)$, cuando $V(\xi(0)) < v_0$, entonces ξ converge a cero en tiempo finito y alcanza dicho valor en

$$T = \frac{2V(\xi(0))^{1/2}}{\delta}$$

Observación. Note que a diferencia del control Super Twisting propuesto en [2], este control requiere de un solo parámetro L para sintonizar el control.

5.4. Análisis de Controlabilidad del MSIPI

Ahora se analizará la propiedad de controlabilidad para el modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (d, q) , presentado en el Capítulo 2.

$$\begin{cases} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d}i_{sd} + p\Omega \frac{L_q}{L_d}i_{sq} + \frac{1}{L_d}v_{sd} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q}i_{sq} - p\Omega \frac{L_d}{L_q}i_{sd} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} + \frac{1}{L_q}v_{sq} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J}(L_d - L_q)i_{sd}i_{sq} + \frac{p}{J}\psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J}\Omega - \frac{1}{J}T_l \end{cases} \quad (5.28)$$

donde $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} & \Omega \end{bmatrix}^T$ representa el vector de estados, $\begin{bmatrix} v_{sd} & v_{sq} \end{bmatrix}^T$ son las entradas del sistema, $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} \end{bmatrix}^T$ son las corrientes de salida medibles del motor.

El sistema definido por la ecuación (5.28), se dividirá en dos subsistemas interconectados, que en forma general, se representan como

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{dX_d}{dt} = f_1(X_d, X_q) + g_1(X_d)v_{sd} \\ y = h_1(X_d) \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \frac{dX_q}{dt} = f_2(X_q, X_d) + g_2(X_q)v_{sq} \\ y = h_2(X_q) \end{cases} \quad (5.29)$$

donde

$$f_1(X_d, X_q) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d}i_{sd} + p\Omega \frac{L_q}{L_d}i_{sq} \end{bmatrix}, \quad g_1(X_d) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} \end{bmatrix}$$

$$f_2(X_q, X_d) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_q}i_{sq} - p\Omega \frac{L_d}{L_q}i_{sd} - p\Omega \frac{\psi_r}{L_q} \\ \frac{p}{J}(L_d - L_q)i_{sd}i_{sq} + \frac{p}{J}\psi_r i_{sq} - \frac{f_v}{J}\Omega - \frac{1}{J}T_l \end{bmatrix}, \quad g_2(X_q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_d = \begin{bmatrix} i_{sd} \end{bmatrix}, \quad X_q = \begin{bmatrix} i_{sq} \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad h_1(X_d) = \begin{bmatrix} i_{sd} \end{bmatrix}, \quad h_2(X_q) = \begin{bmatrix} i_{sq} \end{bmatrix}$$

Para determinar si ambos subsistemas Σ_1 y Σ_2 cumplen con la propiedad de controlabilidad, se utilizará la Definición (5.2).

Ahora bien, verificar la propiedad de controlabilidad para el sistema Σ_1 se puede calcular directamente. Entonces, solo se presentará el análisis de controlabilidad para el sistema Σ_2 . Para ello se construye la matriz de controlabilidad \mathcal{C}_q a partir de la Definición (5.2), la cual está dada por

$$\mathcal{C}_q = \begin{bmatrix} g_2(X_q) & ad_{f_2} g_2(X_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} \\ 0 & -\frac{p}{J} [(L_d - L_q) i_{sd} + \psi_r] \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}$$

La controlabilidad del sistema Σ_2 , se verifica al determinar que la matriz \mathcal{C}_q es de rango igual a 2.

Por lo tanto, para que la matriz \mathcal{C}_q sea de rango completo, basta con evaluar el determinante de la matriz \mathcal{C}_q , el cual está dado por

$$Det[\mathcal{C}_q] = -\frac{p}{JL_q^2} [(L_d - L_q) i_{sd} + \psi_r]$$

Claramente se ve que el $Det[\mathcal{C}_q] \neq 0$, si la corriente $i_{sd} \neq 0$. Entonces, podemos concluir que Σ_2 es controlable si $i_{sd} \neq 0$.

Desde el punto de vista práctico, cuando $i_{sd} = 0$ el motor se encuentra en reposo. Lo cual, no tiene interés práctico para el control del MSUPI.

De lo anterior, se concluye que el modelo del MSUPI satisface la propiedad de controlabilidad. A continuación se presenta el diseño de controladores para el MSUPI

5.5. Diseño de controles no lineales para el MSUPI

El propósito de esta sección consiste en diseñar estrategias de control no lineal, que sean robustas ante incertidumbres paramétricas, con el fin de alcanzar los objetivos de control deseados.

Ahora bien, en este trabajo de investigación se utilizará el control del tipo *sensorless*, es decir,

las variables como velocidad angular mecánica Ω , resistencia del estator R_s y el par de carga T_l , se obtendrán a partir del uso de los observadores propuestos en el Capítulo 4.

Para diseñar las estrategias de control, se considera el modelo matemático del MSIPI en el marco de referencia (d, q) expresado en la ecuación (5.28), que permitirán lograr los siguientes objetivos de control.

Objetivos de control

- Diseñar estrategias de control, que permitan el seguimiento de una referencia deseada de corriente i_{sd}^* .
- Diseñar estrategias de control, que permitan el seguimiento de una referencia deseada de velocidad angular mecánica Ω^* .

Tomando en cuenta los objetivos de control, se procede a diseñar los controles para los subsistemas Σ_1 y Σ_2 de la ecuación (5.29). Debido a que el sistema posee incertidumbres paramétricas, se propone realizar un control backstepping integral cuya convergencia es asintótica, así como, un control por modos deslizantes Super Twisting cuya convergencia es en tiempo finito.

5.5.1. Control Backstepping Integral para el MSIPI

El diseño del controlador backstepping integral es un método recursivo, el cual se desarrollará en tres etapas:

Etapas 1: Lazo de velocidad angular mecánica Ω

Para resolver el problema de seguimiento de referencia de velocidad angular mecánica Ω , se definirá la siguiente variable

$$z_{\Omega} = \Omega^* - \Omega + k_1 \int_0^t (\Omega^* - \Omega) dt \quad (5.30)$$

donde k_1 es una ganancia que permite mejorar el desempeño del control, la cual es positiva. Continuando con el control de velocidad, la entrada v_{sq} se diseñará de tal manera que la corriente del

estator i_{sq} alcance una referencia que denominaremos i_{sq}^* . Entonces, tomando la derivada con respecto al tiempo de (5.30), y reemplazando i_{sq} por la señal de referencia i_{sq}^* , tenemos que

$$\dot{z}_\Omega = \dot{\Omega}^* - \frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{sd} i_{sq}^* + \frac{f_v}{J} \Omega - \frac{p}{J} \psi_r i_{sq}^* - \frac{1}{J} T_l + k_1 (\Omega^* - \Omega) \quad (5.31)$$

Cabe mencionar que i_{sq}^* será considerada como la nueva entrada virtual para la siguiente etapa del subsistema. Entonces, para analizar la estabilidad de este lazo, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_\Omega = \frac{1}{2} z_\Omega^2$$

Derivando con respecto al tiempo de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias de (5.31), resulta que

$$\dot{V}_\Omega = z_\Omega \left\{ \dot{\Omega}^* + \frac{f_v}{J} \Omega - \frac{1}{J} T_l + k_1 (\Omega^* - \Omega) + i_{sq}^* \left[-\frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{sd} - \frac{p}{J} \psi_r \right] \right\} \quad (5.32)$$

Siguiendo la metodología del backstepping, el control virtual i_{sq}^* se seleccionará como sigue

$$i_{sq}^* = \left[\frac{1}{-\frac{p}{J} (L_d - L_q) i_{sd} - \frac{p}{J} \psi_r} \right] \left[-k_2 z_\Omega - \dot{\Omega}^* - \frac{f_v}{J} \Omega + \frac{1}{J} T_l - k_1 (\Omega^* - \Omega) \right] \quad (5.33)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación anterior en (5.32), se tiene que

$$\dot{V}_\Omega = -k_2 z_\Omega^2$$

donde $k_2 > 0$. De la ecuación anterior, es fácil ver que z_Ω convergerá a cero exponencialmente.

Etapas 2: Lazo de corriente i_{sq}

Considerando la etapa anterior, está claro que la entrada virtual del lazo anterior i_{sq}^* estabiliza la dinámica de (5.31). Entonces, en esta segunda etapa se diseñará el control v_{sq} tal que la corriente i_{sq} realice el seguimiento de referencia i_{sq}^* . Para ello, se define la siguiente variable

$$z_{sq} = i_{sq}^* - i_{sq} + k_3 \int_0^t (i_{sq}^* - i_{sq}) dt \quad (5.34)$$

donde $k_3 > 0$. Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior, tenemos que

$$\dot{z}_{sq} = \dot{i}_{sq}^* + \frac{R_s}{L_q} i_{sq} + p \Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} + p \Omega \frac{\psi_r}{L_q} - \frac{1}{L_q} v_{sq} + k_3 (i_{sq}^* - i_{sq})$$

Para analizar la estabilidad de este lazo, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{sq} = V_{\Omega} + \frac{1}{2} z_{sq}^2$$

Derivando con respecto del tiempo de V_{sq} , resulta que

$$\dot{V}_{sq} = -k_2 z_{\Omega}^2 + z_{sq} \left\{ \dot{i}_{sq}^* + \frac{R_s}{L_q} i_{sq} + p \Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} - p \Omega \frac{\psi_r}{L_q} - \frac{1}{L_q} v_{sq} + k_3 (i_{sq}^* - i_{sq}) \right\} \quad (5.35)$$

Seleccionando el control v_{sq} como sigue

$$v_{sq} = -L_q \left[-k_4 z_{sq} - \dot{i}_{sq}^* - \frac{R_s}{L_q} i_{sq} - p \Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} + p \Omega \frac{\psi_r}{L_q} - k_3 (i_{sq}^* - i_{sq}) \right] \quad (5.36)$$

y sustituyéndolo en la ec. (5.35), tenemos que

$$\dot{V}_{sq} = -k_2 z_{\Omega}^2 - k_4 z_{sq}^2$$

donde $k_4 > 0$. La ecuación anterior implica que tanto z_{sq} como z_{Ω} convergerán a cero exponencialmente. Por lo tanto, se garantiza que la velocidad Ω del motor, siga la referencia de velocidad Ω^* .

Etapas 3: Lazo de corriente i_{sd}

Finalmente, para resolver el problema de seguimiento de referencia de la componente corriente de estator i_{sd} , se definirá la siguiente variable

$$z_{sd} = i_{sd}^* - i_{sd} + k_5 \int_0^t (i_{sd}^* - i_{sd}) dt \quad (5.37)$$

donde $k_5 > 0$. Tomando la derivada con respecto al tiempo la ecuación anterior, se tiene

$$\dot{z}_{sd} = \dot{i}_{sd}^* + \frac{R_s}{L_d} i_{sd} - p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} - \frac{1}{L_d} v_{sd} + k_5 (i_{sd}^* - i_{sd})$$

Para analizar la estabilidad del sistema del lazo, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{sd} = \frac{1}{2} z_{sd}^2$$

Derivando con respecto al tiempo V_{sd} , resulta que

$$\dot{V}_{sd} = z_{sd} \left[\dot{i}_{sd}^* + \frac{R_s}{L_d} i_{sd} + p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} - \frac{1}{L_d} v_{sd} + k_5 (i_{sd}^* - i_{sd}) \right] \quad (5.38)$$

Seleccionando el control v_{sd} como sigue

$$v_{sd} = -L_d \left[-k_6 z_{sd} - \dot{i}_{sd}^* - \frac{R_s}{L_d} i_{sd} - p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} - k_5 (i_{sd}^* - i_{sd}) \right] \quad (5.39)$$

y sustituyéndolo en la ec. (5.38), tenemos que

$$\dot{V}_{sd} = -k_6 z_{sd}^2$$

donde $k_6 > 0$. La ecuación anterior implica que z_{sd} convergerá a cero exponencialmente. Por lo tanto, se garantiza que la corriente i_{sd} del motor, siga la referencia de corriente i_{sd}^* .

Finalmente, combinando las acciones de control i_{sq}^* , v_{sq} y v_{sd} , se logrará nuestro objetivo de control de manera asintótica para el MSIPI.

5.5.2. Control Super Twisting para el MSIPI

El controlador por modos deslizantes Super Twisting, se desarrollará en dos etapas:

Etapa 1: Lazo de velocidad angular mecánica Ω

Para resolver el problema de seguimiento de referencia de velocidad angular mecánica Ω , se definirá siguiente superficie deslizante, la cual está en función del errores de seguimiento

$$s_{\Omega} = k_{\Omega,1} e_1 + e_2 \quad (5.40)$$

donde $k_{\Omega,1} > 0$, $e_1 = \Omega - \Omega^*$ y $e_2 = \dot{\Omega} - \dot{\Omega}^*$. Derivando con respecto del tiempo la ecuación anterior, tenemos que

$$\dot{s}_{\Omega} = k_{\Omega,1} e_2 + \dot{e}_2 \quad (5.41)$$

donde el término \dot{e}_2 , está dado por

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = & d_1 i_{sd} i_{sq} + d_2 \Omega i_{sd} + d_3 i_{sq} + d_4 \Omega + d_5 v_{sq} + c_2 c_4 T_l \\ & + c_1 a_2 \Omega i_{sq}^2 + c_1 b_2 \Omega i_{sd}^2 + c_1 a_3 i_{sq} v_{sd} - \ddot{\Omega}^* \end{aligned} \quad (5.42)$$

con

$$\begin{aligned} a_1 = & -\frac{R_s}{L_d}, & a_2 = & p \frac{L_q}{L_d}, & a_3 = & \frac{1}{L_d} \\ b_1 = & -\frac{R_s}{L_q}, & b_2 = & -p \frac{L_d}{L_q}, & b_3 = & -p \frac{\psi_r}{L_q}, & b_4 = & \frac{1}{L_q} \\ c_1 = & \frac{p}{J} (L_d - L_q), & c_2 = & -\frac{f_v}{J}, & c_3 = & \frac{p}{J} \psi_r, & c_4 = & -\frac{1}{J} \end{aligned}$$

$$d_1 = a_1 c_1 + c_1 b_1 + c_1 c_2, \quad d_2 = b_3 c_1 + c_3 b_2, \quad d_3 = c_2 c_3 + c_3 b_1$$

$$d_4 = c_2 c_2 + b_3 c_3, \quad d_5 = c_1 b_4 i_{sd} + c_3 b_4$$

Ahora bien, siguiendo la metodología del control Super Twisting propuesto, descrita en la Sección 5.3.2, la ley de control v_{sq} se selecciona como sigue

$$v_{sq} = \frac{1}{d_5} \left\{ -d_1 i_{sd} i_{sq} - d_2 \Omega i_{sd} - d_3 i_{sq} - d_4 \Omega + c_2 c_4 T_l - c_1 a_2 \Omega i_{sq}^2 - c_1 b_2 \Omega i_{sd}^2 - c_1 a_3 i_{sq} v_{sd} + \ddot{\Omega}^* - k_{\Omega,1} e_2 - k_{\Omega,2} |s_{\Omega}|^{1/2} - k_{\Omega,3} \int_0^t \text{sign}(s_{\Omega}) d\tau \right\} \quad (5.43)$$

donde

$$k_{\Omega,2} = 2L_{\Omega}, \quad k_{\Omega,3} = \frac{L_{\Omega}^2}{2}, \quad L_{\Omega} > 0$$

Etap 2: Lazo de corriente i_{sd}

Ahora, para que la corriente del estator i_{sd} siga una referencia deseada i_{sd}^* , se definirá la siguiente superficie deslizante, la cual está en función del error de seguimiento

$$s_{sd} = k_{sd,1} e_1 + \int_0^t e_1 dt \quad (5.44)$$

donde $k_{sd,1} > 0$ y $e_1 = i_{sd} - i_{sd}^*$. Derivando con respecto del tiempo la ecuación, tenemos que

$$\dot{s}_{sd} = k_{sd,1} \dot{e}_1 + e_1$$

Reemplazando los términos adecuados en la dinámica de la superficie deslizante, se tiene

$$\dot{s}_{sd} = -k_{sd,1} \frac{R_s}{L_d} i_{sd} + k_{sd,1} p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} + \frac{k_{sd,1}}{L_d} v_{sd} - k_{sd,1} \dot{i}_{sd}^* + e_1 \quad (5.45)$$

Tomando en cuenta, la metodología del control Super Twisting propuesto, descrita en la Sección 5.3.2, la ley de control v_{sd} se selecciona como sigue

$$v_{sd} = \frac{L_d}{k_{sd,1}} \left\{ k_{sd,1} \frac{R_s}{L_d} i_{sd} - k_{sd,1} p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} + k_{sd,1} \dot{i}_{sd}^* - e_1 - k_{sd,2} |s_{sd}|^{1/2} \text{sign}(s_{sd}) - k_{sd,3} \int_0^t \text{sign}(s_{sd}) dt \right\} \quad (5.46)$$

donde

$$k_{sd,2} = 2L_{sd}, \quad k_{sd,3} = \frac{L_{sd}^2}{2}, \quad L_{sd} > 0$$

Finalmente, combinando las acciones de control v_{sd} y v_{sq} , se logrará nuestro objetivo de control en tiempo finito para el MSUPI.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se realizó un análisis de la propiedad de observabilidad para el modelo matemático del MSUPI. Posteriormente se diseñaron dos estrategias de control para el MSUPI, la primera se basa en el control backstepping integral cuya convergencia es asintótica, y la segunda tiene como base el control por modos deslizantes de segundo orden Super Twisting, el cual converge en tiempo finito. La segunda estrategia de control propuesta es una modificación del control Super Twisting clásico, la cual nos permite sintonizar el control utilizando únicamente un parámetro, permitiéndonos facilitar su implementación.

Para el diseño de estos algoritmos de control, se considera que se tiene total conocimiento de las variables del sistema, es decir, todas las variables son medibles. Sin embargo, de acuerdo con las hipótesis de este trabajo de tesis, esto no es posible ya que no todas las variables se pueden medir. Entonces, para implementar los controles deseados, es necesario implementar los observadores propuestos en el Capítulo 4, para estimar dichas variables no medibles del motor.

Capítulo 6

Resultados

6.1. Introducción

En este capítulo, se aplicarán dos esquemas observador-control para lograr el control del MSI-PI sin sensores mecánicos. Se asume que, solamente se tiene mediciones de las corrientes y voltajes para el esquema observador-control.

El capítulo se divide en dos partes principales, la primera corresponde a un esquema observador-control, constituido por dos observadores interconectados tipo Kalman en lazo cerrado con un control backstepping integral. En la segunda parte de este capítulo, se presenta un esquema observador-control, donde se diseñan dos observadores interconectados del tipo Super Twisting en lazo cerrado, con un control por modos deslizantes Super Twisting.

Para ambos esquemas, se obtendrán las condiciones suficientes para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Además, se presentarán resultados en simulación para ilustrar el desempeño de los esquemas observador-control propuestos.

Finalmente, se realizará un estudio comparativo para evaluar los esquemas de observación-control propuestos.

6.2. Esquema Observador-Control I

En esta sección se presenta la implementación de un esquema observador-control para el MSI-PI. En este esquema se implementan dos observadores interconectados, que han sido presentados en las Secciones 4.3.1 y 4.3.2, los cuales están en lazo cerrado con un control backstepping integral presentado en la Sección 5.5.1. El esquema completo de observador-control se muestra en la Figura 6.1

En este esquema, los observadores interconectados requieren únicamente mediciones eléctricas del MSIPI, es decir, a partir de la medición de las corrientes y voltajes del estator se estiman: la velocidad angular mecánica Ω , la resistencia del estator R_s , el par de carga T_l , y los flujos del estator $\Psi_{r\alpha}$ y $\Psi_{r\beta}$ con el fin de obtener la posición angular mecánica del rotor θ_m .

Posteriormente, se analizará la estabilidad del sistema en lazo cerrado, considerando que la variables estimadas obtenidas del observador, se reemplazarán en la ley de control backstepping integral. La dinámica del esquema completo será analizada utilizando teoría de Lyapunov. Entonces, para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{oc} = V_o + V_c \quad (6.1)$$

donde V_o es la función de Lyapunov asociada a la dinámica del observador interconectado, y V_c es la función de Lyapunov asociada a la dinámica del control backstepping integral, donde la función de Lyapunov V_o , está dada por

$$V_o = V_{o,1} + V_{o,2} \quad (6.2)$$

donde $V_{o,1}$ es la función de Lyapunov asociada a la dinámica del observador interconectado tipo Kalman de la Sección 4.3.1, y $V_{o,2}$ como la función de Lyapunov asociada a la dinámica del observador interconectado tipo Kalman de la Sección 4.3.2, las cuales están dadas por

$$V_{o,1} = \epsilon_1^T S_1 \epsilon_1 + \epsilon_2^T S_2 \epsilon_2 + \epsilon_3^T S_3 \epsilon_3, \quad V_{o,2} = e_1 S_1 e_1 + e_2 S_2 e_2$$

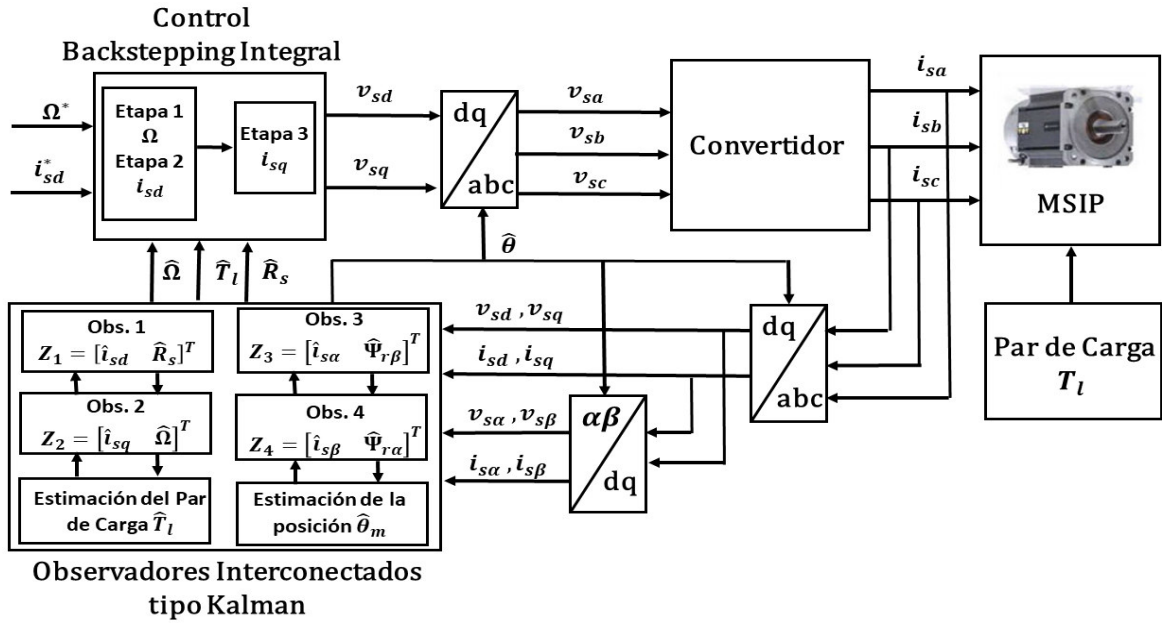


Figura 6.1: Observadores Interconectados tipo Kalman en conjunto con el control backstepping para el MSIP

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (6.2), se tiene

$$\dot{V}_o \leq -\delta_1 V_{o,1} + \mu_1 \psi_o \sqrt{V_{o,1}} - \delta_2 V_{o,2} + \mu_2 \sqrt{V_{o,2}} \quad (6.3)$$

donde δ_1, μ_1, ψ_o son constantes positivas, seleccionadas de cierta manera adecuada (ver [35]), y δ_2, μ_2 son constantes positivas (ver Sección 4.3.2).

Definiendo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ y $\mu = \max(\mu_1 \psi_o, \mu_2)$, la ecuación (6.3) se puede reescribir como sigue

$$\dot{V}_o \leq -\delta V_o + \mu \sqrt{V_o} \quad (6.4)$$

Por otro lado, considerando la función de Lyapunov asociada a la dinámica del control V_c , de la ecuación (6.1), la cual está definida por

$$V_c = V_{sq} + V_{sd} = \frac{1}{2} \left[z_{\Omega}^2 + z_{sq}^2 + z_{sd}^2 \right] \quad (6.5)$$

Derivando con respecto al tiempo (6.5), y expresando las leyes de control en términos de las variables estimadas por el observador, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & -k_2 z_\Omega^2 + z_{sq} \left[\dot{i}_{sq} + \frac{R_s}{L_q} i_{sq} + p \Omega \frac{L_d}{L_q} i_{sd} + p \Omega \frac{\psi_r}{L_q} - \frac{1}{L_q} v_{sq}(\hat{X}) + k_3 (i_{sq}^* - i_{sq}) \right] \\ & + z_{sd} \left[\dot{i}_{sd} + \frac{R_s}{L_d} i_{sd} - p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_{sq} - \frac{1}{L_d} v_{sd}(\hat{X}) + k_5 (i_{sd}^* - i_{sd}) \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v_{sq}(\hat{X}) = & -L_q \left[-k_4 z_{sq} - \dot{i}_{sq}^* - \frac{\hat{R}_s}{L_q} i_{sq} - p \hat{\Omega} \frac{L_d}{L_q} i_{sd} - p \hat{\Omega} \frac{\psi_r}{L_q} - k_3 (i_{sq}^* - i_{sq}) \right] \\ v_{sd}(\hat{X}) = & -L_d \left[-k_6 z_{sd} - \dot{i}_{sd}^* - \frac{\hat{R}_s}{L_d} i_{sd} + p \hat{\Omega} \frac{L_q}{L_d} i_{sq} - k_5 (i_{sd}^* - i_{sd}) \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Añadiendo los términos $\pm v_{sq}(X)$ y $\pm v_{sd}(X)$ en la ecuación anterior, se llega a lo siguiente

$$\dot{V}_c = -k_2 z_\Omega^2 - k_4 z_{sq}^2 - \frac{1}{L_q} z_{sq} [v_{sq}(\hat{X}) - v_{sq}(X)] - k_6 z_{sd}^2 - \frac{1}{L_d} [v_{sd}(\hat{X}) - v_{sd}(X)] \quad (6.7)$$

Considerando que las siguientes desigualdades se satisfacen

$$\begin{aligned} |z_j| \|\epsilon_1\|_{s_1} & \leq \frac{\xi_{j1}}{2} \|\epsilon_1\|_{s_1}^2 + \frac{1}{2\xi_{j1}} |z_j|^2 \\ |z_j| \|\epsilon_2\|_{s_2} & \leq \frac{\xi_{j2}}{2} \|\epsilon_2\|_{s_2}^2 + \frac{1}{2\xi_{j2}} |z_j|^2 \\ |z_j| \|\epsilon_3\|_{s_3} & \leq \frac{\xi_{j2}}{3} \|\epsilon_3\|_{s_3}^2 + \frac{1}{2\xi_{j3}} |z_j|^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$|v_{sq}(\hat{X}) - v_{sq}(X)| \leq L_1 [\|\epsilon_1\|_{s_1} + \|\epsilon_2\|_{s_2} + \|\epsilon_3\|_{s_3}]$$

$$|v_{sd}(\hat{X}) - v_{sd}(X)| \leq L_2 [\|\epsilon_1\|_{s_1} + \|\epsilon_2\|_{s_2} + \|\epsilon_3\|_{s_3}]$$

donde $\xi_{j1}, \xi_{j2}, \xi_{j3} \in [0, 1]$, con $j = sq, sd$, y además L_1 y L_2 son constantes positivas.

Entonces, tomando la derivada con respecto al tiempo de la ec. (6.1), sustituyendo (6.4), (6.7), y considerando las desigualdades anteriores, se tiene que

$$\dot{V}_{oc} \leq -\delta V_o + \mu \sqrt{V_o} + \vartheta_1 \|\epsilon_1\|_{s_1}^2 + \vartheta_2 \|\epsilon_2\|_{s_2}^2 + \vartheta_3 \|\epsilon_3\|_{s_3}^2 - \vartheta_4 z_\Omega^2 - \vartheta_5 z_{sq}^2 - \vartheta_6 z_{sd}^2 \quad (6.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{L_1 \xi_{sq1}}{2L_q} + \frac{L_2 \xi_{sd1}}{2L_d}, & \vartheta_2 &= \frac{L_1 \xi_{sq2}}{2L_q} + \frac{L_2 \xi_{sd2}}{2L_d}, & \vartheta_3 &= \frac{L_1 \xi_{sq3}}{2L_q} + \frac{L_2 \xi_{sd3}}{2L_d} \\ \vartheta_4 &= k_2, & \vartheta_5 &= k_4 - \frac{L_1}{2L_q} \left[\frac{1}{\xi_{sq1}} + \frac{1}{\xi_{sq2}} + \frac{1}{\xi_{sq3}} \right], & \vartheta_6 &= k_6 - \frac{L_2}{2L_d} \left[\frac{1}{\xi_{sd1}} + \frac{1}{\xi_{sd2}} + \frac{1}{\xi_{sd3}} \right] \end{aligned}$$

Seleccionando $\vartheta_O = \max(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ y $\vartheta_C = \min(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$, entonces, la ecuación (6.9) se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{V}_{oc} \leq -(\delta - \vartheta_O) V_o + \mu \sqrt{V_o} - \vartheta_C (z_{\Omega}^2 + z_{sq}^2 + z_{sd}^2) \quad (6.10)$$

Eligiendo $\eta = \min(\delta - \vartheta_O, \vartheta_C)$, resulta que

$$\dot{V}_{oc} \leq -\eta V_{oc} + \mu \sqrt{V_{oc}} \quad (6.11)$$

Ahora, definiendo el siguiente cambio de variable $v_{oc} = 2\sqrt{V_{oc}}$, y calculando su derivada con respecto al tiempo, se tiene que

$$\dot{v}_{oc} \leq -\eta v_{oc} + \mu$$

cuya solución es

$$v_{oc} \leq v_{oc}(t_0) e^{-\eta(t-t_0)} + \frac{\mu}{\eta} (1 - e^{-\eta(t-t_0)}) \quad (6.12)$$

De acuerdo con lo anterior, la dinámica del error de estimación del sistema en lazo cerrado, converge a una bola $\mathcal{B}_{h_{oc}}$ de radio h_{oc} , donde $h_{oc} = \frac{\mu}{\eta}$.

El resultado anterior se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1. *Considere el modelo dinámico del MSIPI (3.45) con señales de referencia (Ω^*, i_{sd}^*) diferenciables y acotadas. Entonces, al aplicar los observadores interconectados tipo Kalman conformados por las ecuaciones (4.90), (4.91), (4.106) y (4.107), en lazo cerrado con el control backstepping integral diseñado definido en las ecuaciones (6.6), el error de seguimiento del sistema en lazo cerrado, es uniformemente prácticamente estable.*

La estabilidad práctica se introduce en el Apéndice A. "Definiciones de Estabilidad Práctica".

6.3. Esquema Observador-Control II

En esta sección se introduce un esquema observador-control basado en la técnica de modos deslizantes para el MSIP. En este esquema se implementan dos observadores interconectados basados en los modos deslizantes Super Twisting, que han sido presentados en las Secciones 4.3.1 y 4.3.2, los cuales permiten estimar las variables que serán utilizadas en la ley de control de modos deslizantes Super Twisting presentada en la Sección 5.5.2. El esquema completo de observador-control se muestra en la Figura 6.2.

Al utilizar técnicas de modos deslizantes Super Twisting se tiene las siguientes ventajas: la robustez, la convergencia en tiempo finito y el rechazo de cierta clase de perturbaciones. En los observadores interconectados se realizará una estimación de las siguientes variables: los flujos del estator $\Psi_{r\alpha}$ y $\Psi_{r\beta}$, con el fin de obtener la posición angular mecánica θ_m , la velocidad angular mecánica Ω , la resistencia del estator R_s y el par de carga T_l .

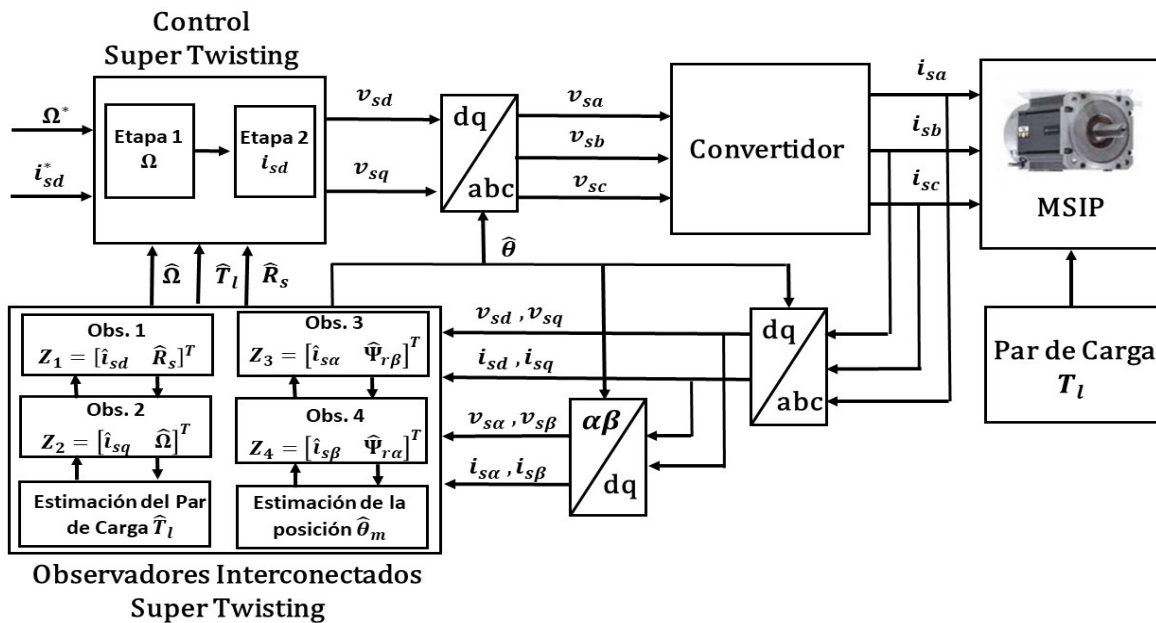


Figura 6.2: Observadores Interconectados Super Twisting en conjunto con el control Super Twisting para el MSIP

El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado del esquema observador-control basado en el algoritmo Super Twisting, resulta ser más sencillo, debido a la convergencia en tiempo finito tanto del observador interconectado como del algoritmo de control. Entonces, el principio de

separación se cumple, lo cual permite seleccionar de manera independiente las ganancias de los observadores, así como, del control.

6.4. Resultados de Simulación

A continuación se presentan los resultados obtenidos a partir de los esquemas de observación-control I y II. Además se realizará un estudio comparativo del desempeño entre ambos esquemas.

Esta sección se dividirá en dos subsecciones; la primera tiene como propósito comparar el desempeño de los observadores propuestos Super Twisting cuya convergencia es en tiempo finito, contra los observadores tipo Kalman cuya convergencia es asintótica. En la segunda subsección, se realiza una comparación entre el control backstepping integral, contra el control por modos deslizantes Super Twisting.

Para realizar las simulaciones de los esquemas de observación-control propuestos se utilizará el entorno de Matlab/Simulink, y para ello se considerarán las condiciones de operación y referencias deseadas del MSIPI, las cuales se presentaron en la Sección 2.6 del Capítulo 2.

6.4.1. Simulación I

En esta sección se analizará el desempeño de los observadores de los dos esquemas propuestos. Para ello, se utilizará el control backstepping integral como control para estudiar las dos clases de observadores. Para comparar el desempeño de ambos observadores, se utilizaron las mismas condiciones iniciales. Además, los parámetros de sintonización del control y observadores, se encuentran en las Tablas 6.1 y 6.2, respectivamente.

Las condiciones iniciales de los observadores son las siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(0) = 2 \text{ rad/s}, \quad \hat{\theta}_m(0) = 2 \text{ rad}, \quad \hat{T}_l(0) = 1 \text{ N-m}, \quad \hat{R}_s(0) = 2 \text{ ohm} \\ \hat{i}_{sd}(0) = 2 \text{ A}, \quad \hat{i}_{sq}(0) = 1 \text{ A}, \quad \hat{i}_{sa}(0) = 0 \text{ A}, \quad \hat{i}_{s\beta}(0) = 0 \text{ A} \end{aligned}$$

Ganancias del control Backstepping Integral	
k_1	150
k_2	12
k_3	200
k_4	20
k_5	500
k_6	40

Tabla 6.1: Parámetros de sintonización del control para la Simulación I.

Ganancias de los observadores							
Tipo Kalman				Super Twisting			
Marco (d, q)		Marco (α, β)		Marco (d, q)		Marco (α, β)	
ρ_1	3.5	ρ_1	15	θ_1	100	θ_1	300
ρ_2	50	ρ_2	15	θ_2	150	θ_2	300
ρ_3	200			θ_3	180		

Tabla 6.2: Parámetros de sintonización de los observadores para la Simulación I.

Los resultados de las simulaciones se presentan a continuación.

En la Figura 6.3 se aprecia la convergencia de la señal de velocidad angular mecánica Ω a la referencia deseada de velocidad Ω^* .

La Figura 6.4 muestra la velocidad real medida, y la velocidad angular estimada por ambos observadores. La estimación de la resistencia del estator R_s de ambos observadores se muestra en la Figura 6.5. En la Figura 6.6 se presenta el par de carga real medido y sus estimados. Por último, en la Figura 6.7 se expone la posición angular medida, y la posición angular estimada de ambos observadores.

Las Figuras 6.8, 6.9, 6.10 y 6.11 muestran la comparación entre los errores de estimación de los dos observadores propuestos, para la velocidad Ω , la resistencia R_s , el par de carga T_l y la posición θ_m , respectivamente.

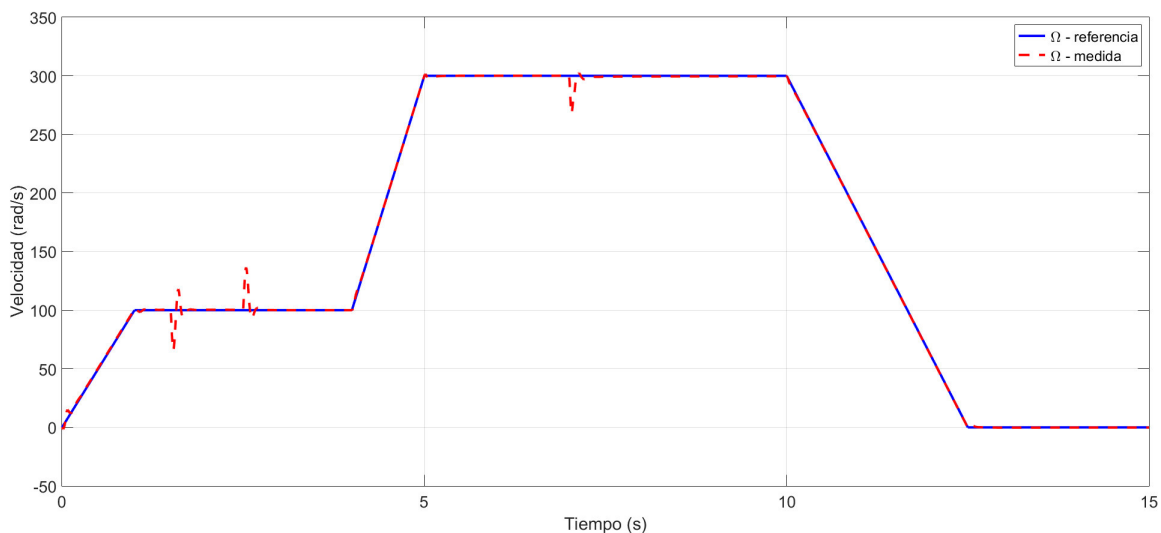


Figura 6.3: Seguimiento de referencia de velocidad Ω

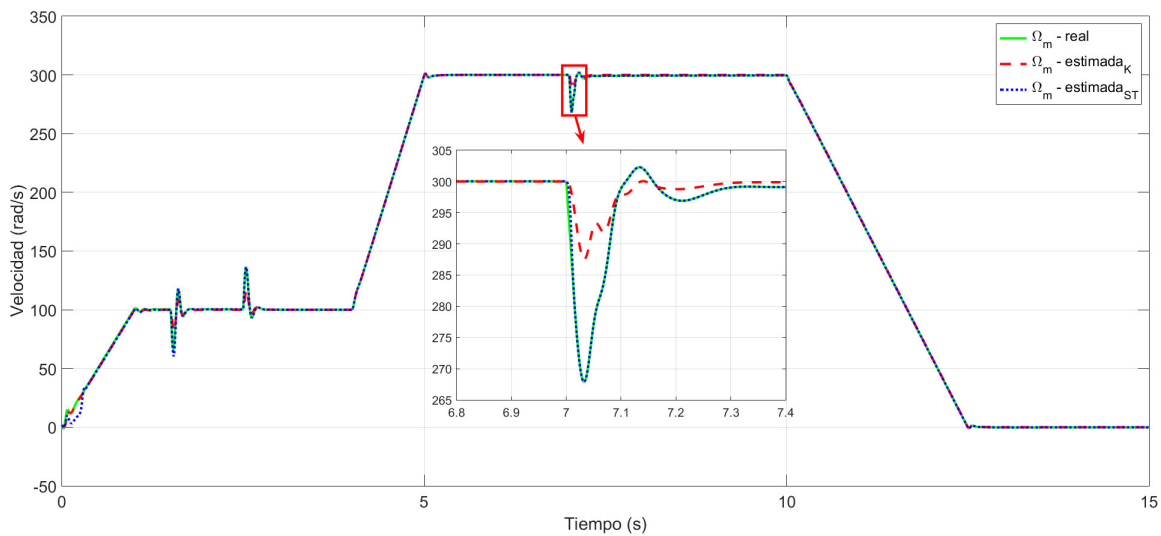


Figura 6.4: Estimación de la velocidad Ω , utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

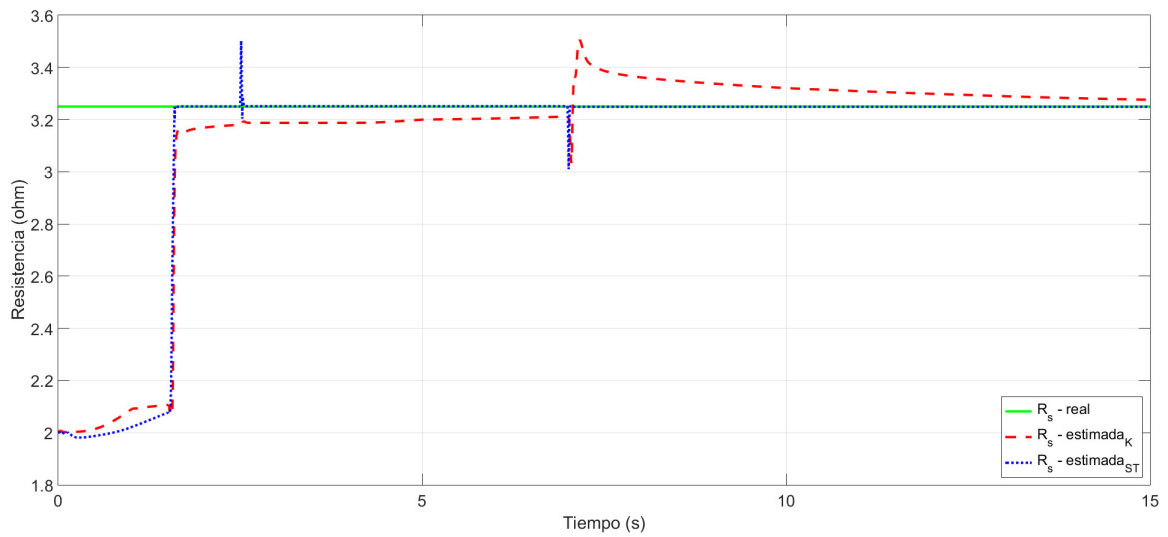


Figura 6.5: Estimación de la resistencia del estator R_s utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

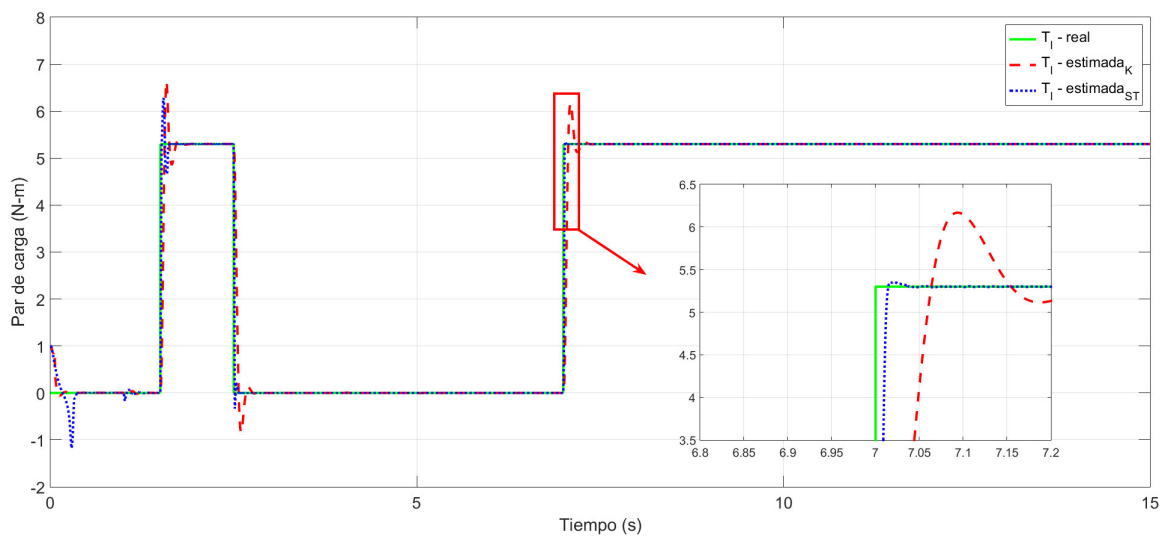


Figura 6.6: Estimación del par de carga T_l , utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

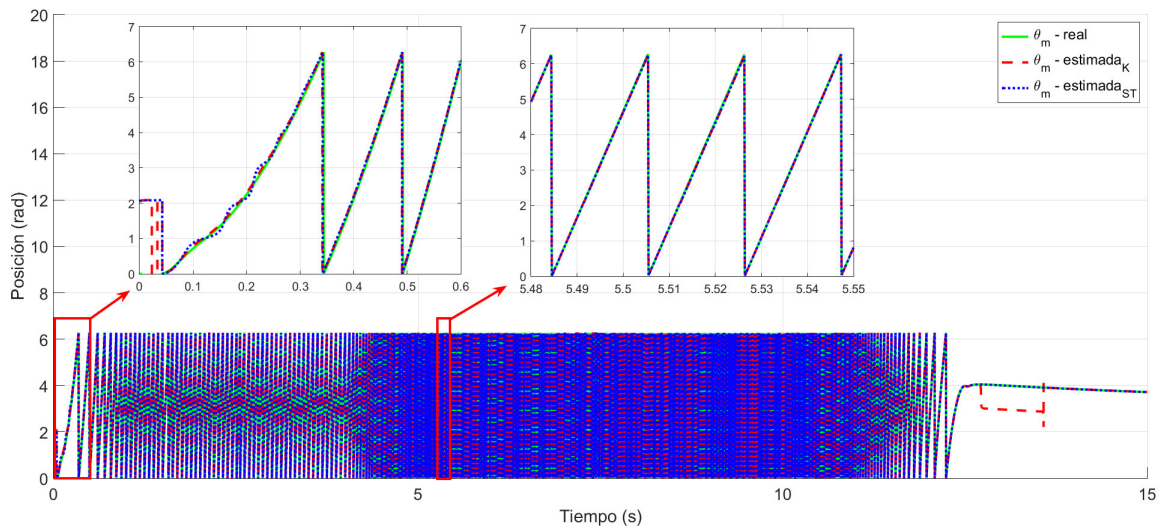


Figura 6.7: Estimación de la posición θ_m , utilizando observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

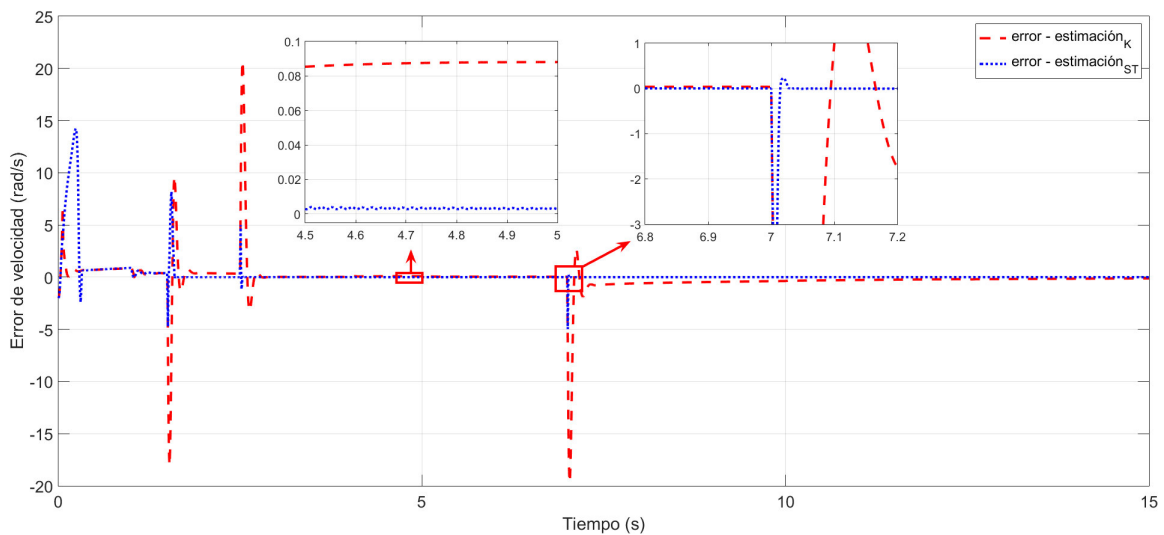


Figura 6.8: Errores de estimación de velocidad Ω , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

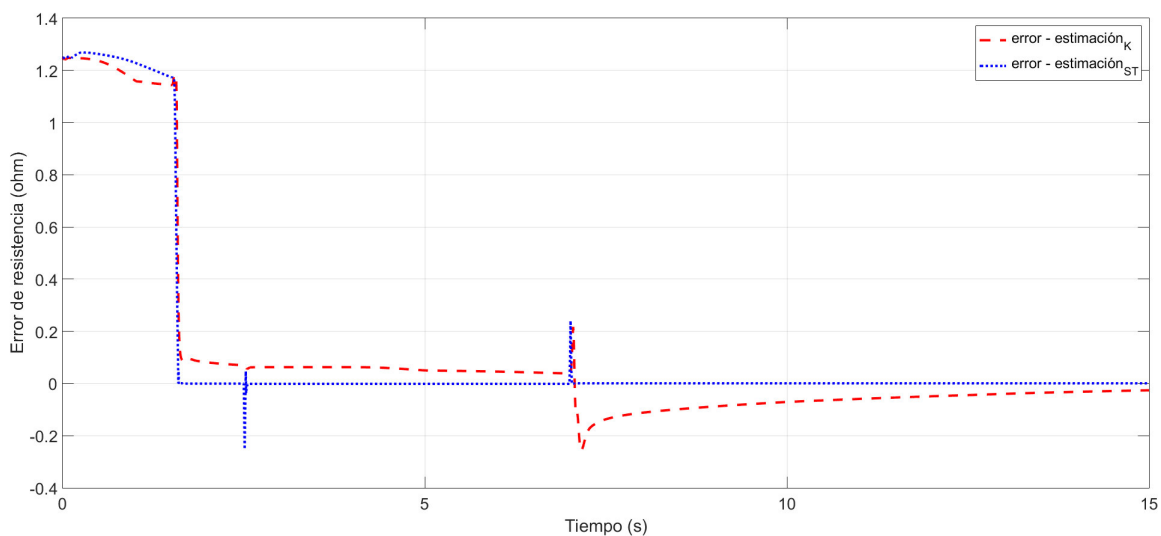


Figura 6.9: Errores de estimación de la resistencia del estator R_s , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

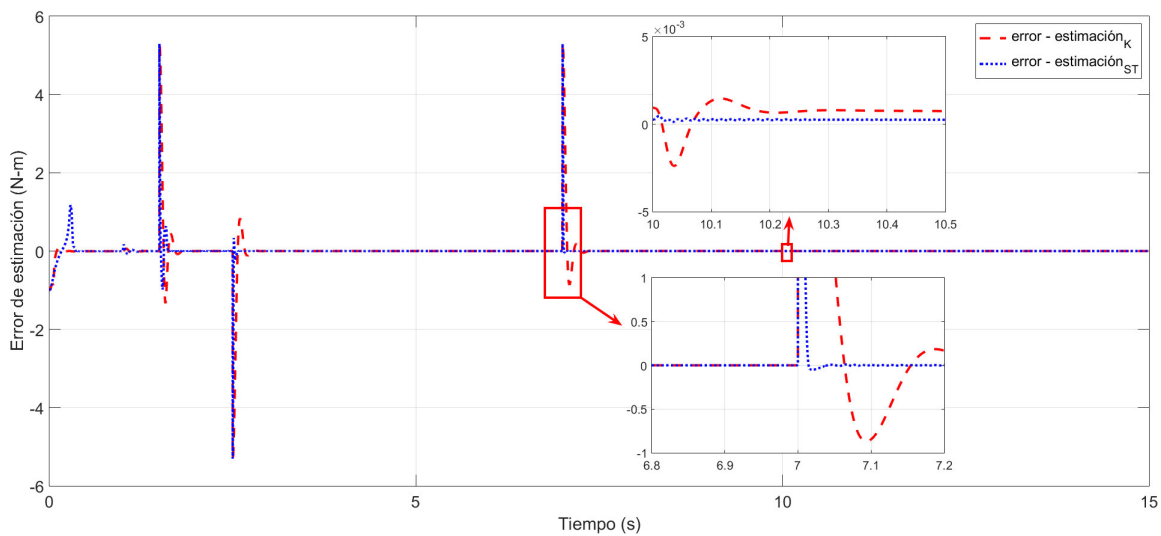


Figura 6.10: Errores de estimación del par de carga T_l , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

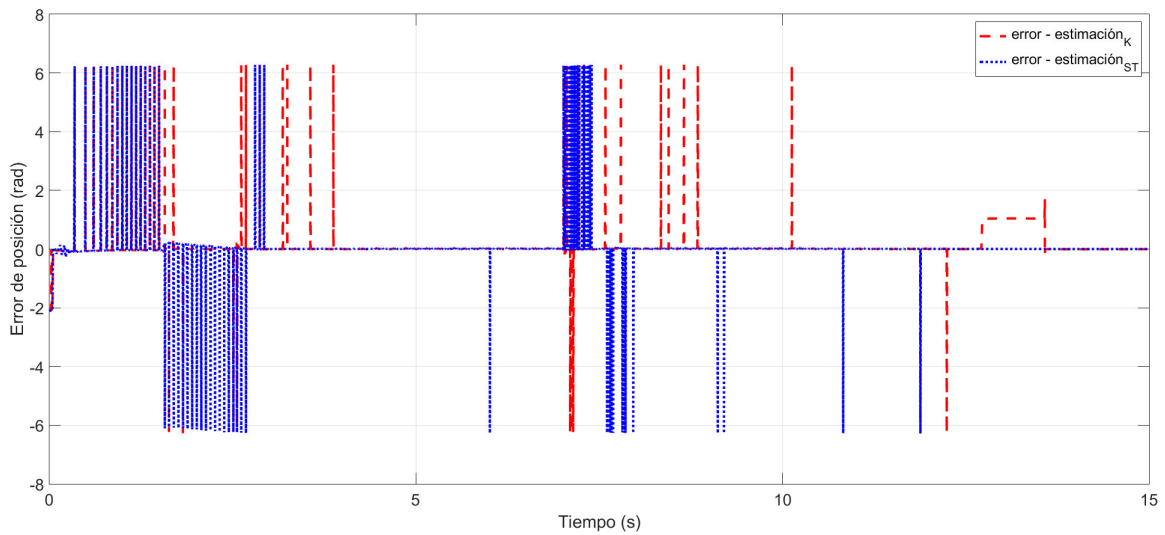


Figura 6.11: Errores de estimación de la posición θ_m , de los observadores tipo Kalman vs. Super Twisting

Ahora bien, tomando en cuenta los resultados de las Figuras 6.8, 6.9, 6.10 y 6.11 se puede decir que el desempeño de los observadores Super Twisting es superior a los observadores tipo Kalman. Se utilizó la metodología del *error cuadrático medio* (ECM) [37], para determinar el desempeño de los observadores. Entonces, utilizando el ECM, se obtuvo lo siguiente

$$ECM_K = 0.1196, \quad ECM_{ST} = 0.0989$$

donde ECM_K representa el ECM del observador tipo Kalman para el estimador de la posición θ_m , y ECM_{ST} es el ECM del observador Super Twisting para el estimador de la posición θ_m .

Entonces, de acuerdo a los resultados obtenidos del ECM de cada observador, se concluye que $ECM_K > ECM_{ST}$, es decir, que el observador Super Twisting tiene un mejor desempeño para estimar la posición θ_m , comparado con el observador tipo Kalman.

Finalmente, se puede concluir que el observador Super Twisting, tiene mejor desempeño que el observador tipo Kalman propuesto para este trabajo de tesis.

6.4.2. Simulación II

Ahora, se realizará un estudio comparativo de los algoritmos de control para el MSIPI. Para ello, se utilizará el observador interconectado Super Twisting para estimar las variables que serán implementadas en los algoritmos de control. Además, los parámetros de sintonización de los observadores y controles, se definen en las Tablas 6.3 y 6.4 respectivamente.

Ganancias de los controladores			
Backstepping Integral		Super Twisting	
k_1	100	$k_{\Omega,1}$	100
k_2	20	L_{Ω}	2000
k_3	200	$k_{sd,1}$	5
k_4	20	L_{sd}	700
k_5	100		
k_6	20		

Tabla 6.3: Parámetros de sintonización de los controladores para la Simulación II.

Ganancias del observador Super Twisting en el marco (d, q)	
θ_1	100
θ_2	150
θ_3	180

Tabla 6.4: Parámetros de sintonización del observador para la Simulación II.

Para comparar el desempeño de ambos controles, se utilizaron las mismas condiciones iniciales del observador Super Twisting, las cuales son

$$\hat{\Omega}(0) = 2 \text{ rad/s}, \quad \hat{\theta}_m(0) = 2 \text{ rad}, \quad \hat{T}_l(0) = 1 \text{ N-m}, \quad \hat{R}_s(0) = 2 \text{ ohm}$$

$$\hat{i}_{sd}(0) = 2 \text{ A}, \quad \hat{i}_{sq}(0) = 1 \text{ A}, \quad \hat{i}_{s\alpha}(0) = 0 \text{ A}, \quad \hat{i}_{s\beta}(0) = 0 \text{ A}$$

En la Figura 6.12 se presenta el desempeño del seguimiento de referencia de velocidad, para ambos controladores, y sus respectivos errores se encuentran en la Figura 6.13.

Para comparar el desempeño de ambos controladores para el seguimiento de corriente de referencia i_{sd}^* , se debe tomar en cuenta que dicha referencia está en función de una variable del sistema (ver Sección 2.6), es decir, dicha referencia de corriente se modifica dependiendo de la dinámica del sistema. Entonces, para el esquema observador-control II, existirá una referencia de corriente i_{sd}^* única, así como, para el esquema observador Super Twisting y control backstepping integral.

Considerando lo anterior, tenemos que la Figura 6.14 muestra el desempeño del control backstepping integral, para el seguimiento de referencia de corriente i_{sd}^* . En la Figura 6.15 se presenta el desempeño del control Super Twisting, para el seguimiento de la referencia de corriente i_{sd}^* .

La Figura 6.16 muestra las leyes de control backstepping integral utilizadas en las simulaciones del MSIPI. Las leyes de control Super Twisting utilizadas en el esquema observador-control II, se presenta en la Figura 6.17.

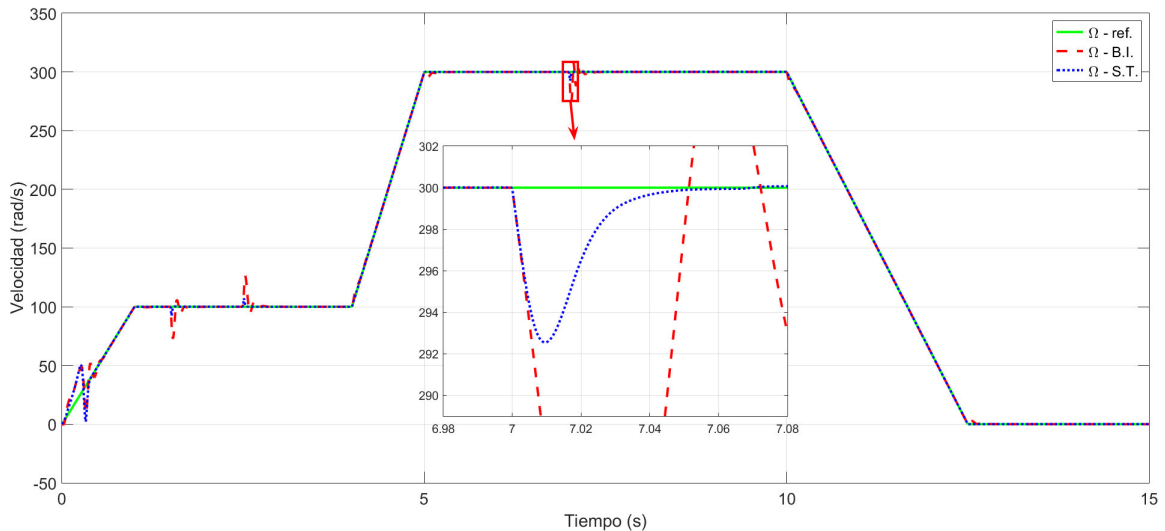


Figura 6.12: Seguimiento de referencia de velocidad Ω , comparando el control backstepping integral vs. control Super Twisting

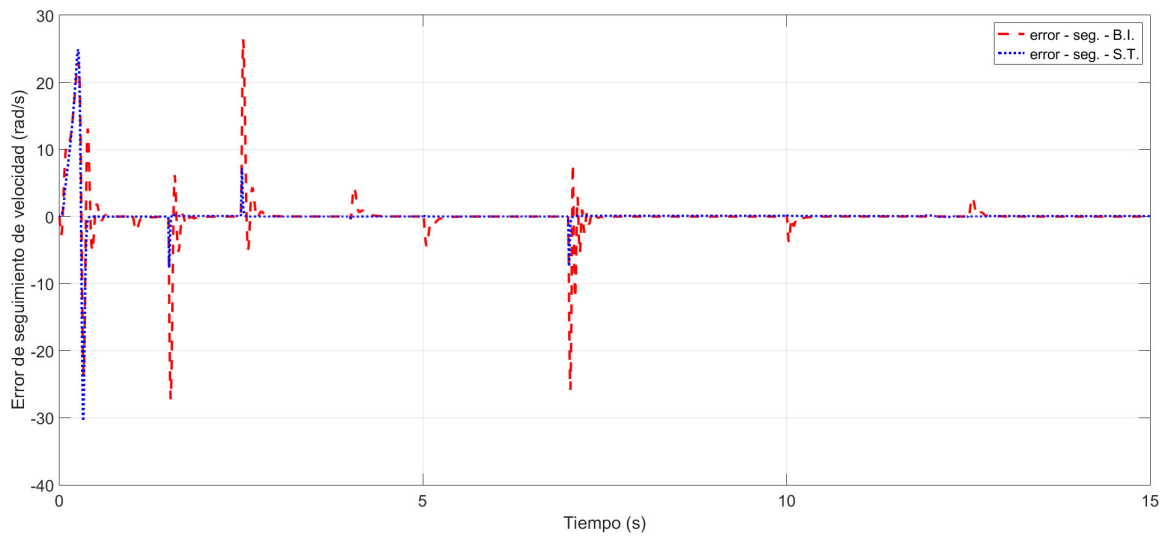


Figura 6.13: Errores de seguimiento de referencia de velocidad Ω , comparando el control backstepping integral vs. control Super Twisting

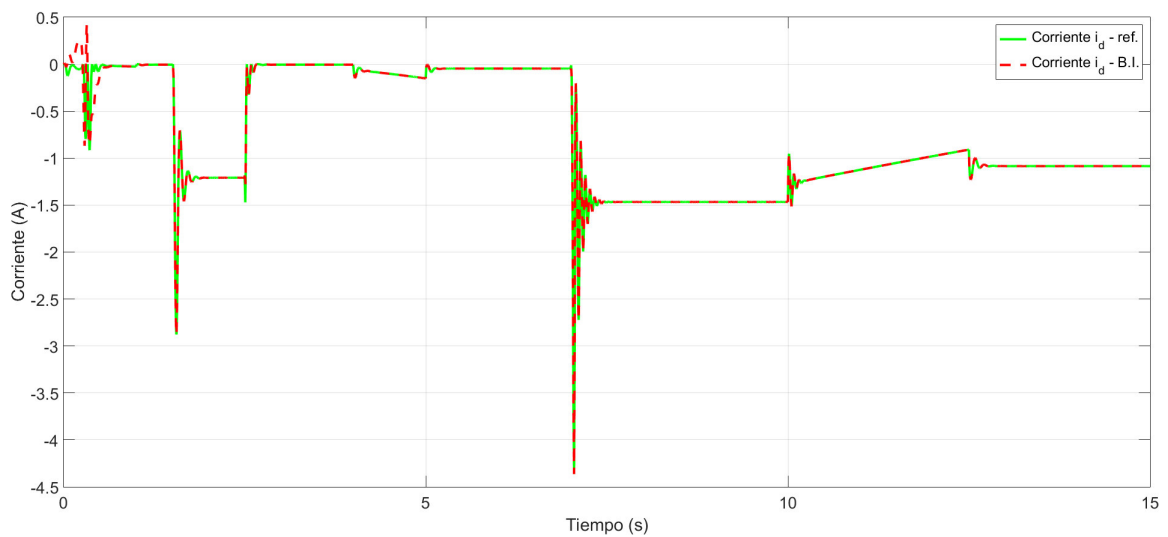


Figura 6.14: Seguimiento de referencia de corriente i_{sd} , utilizando el control backstepping integral

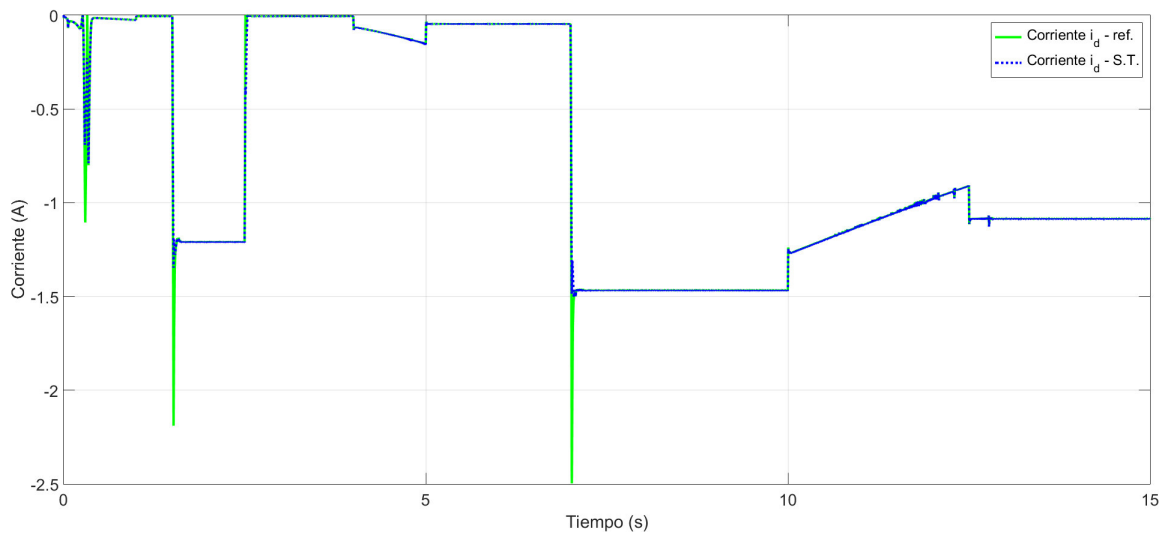


Figura 6.15: Seguimiento de referencia de corriente i_{sd} , utilizando el control backstepping integral

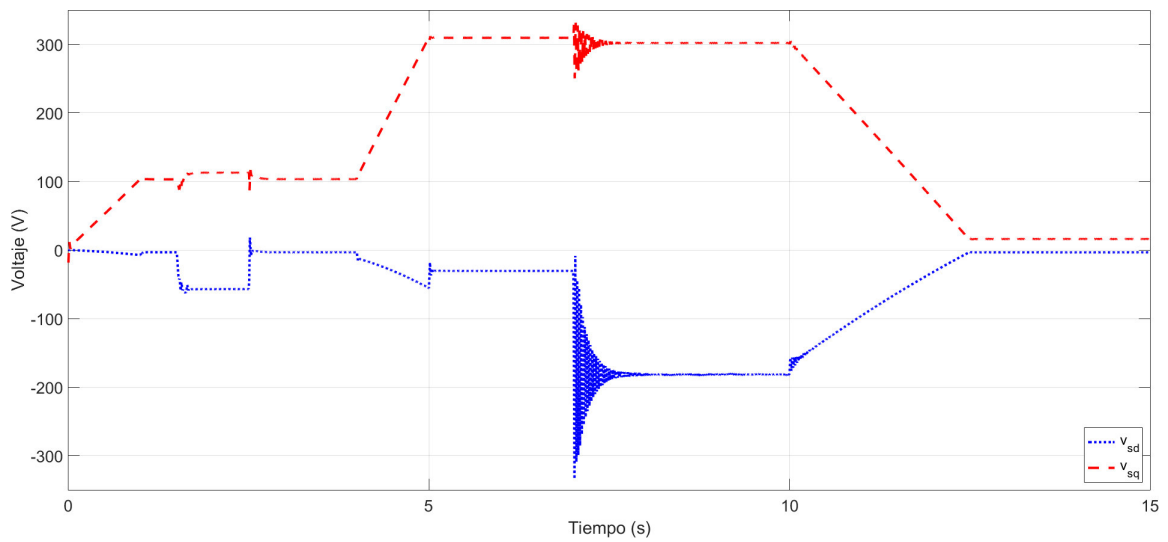


Figura 6.16: Leyes de control del esquema observador Super Twisting - control Super Twisting

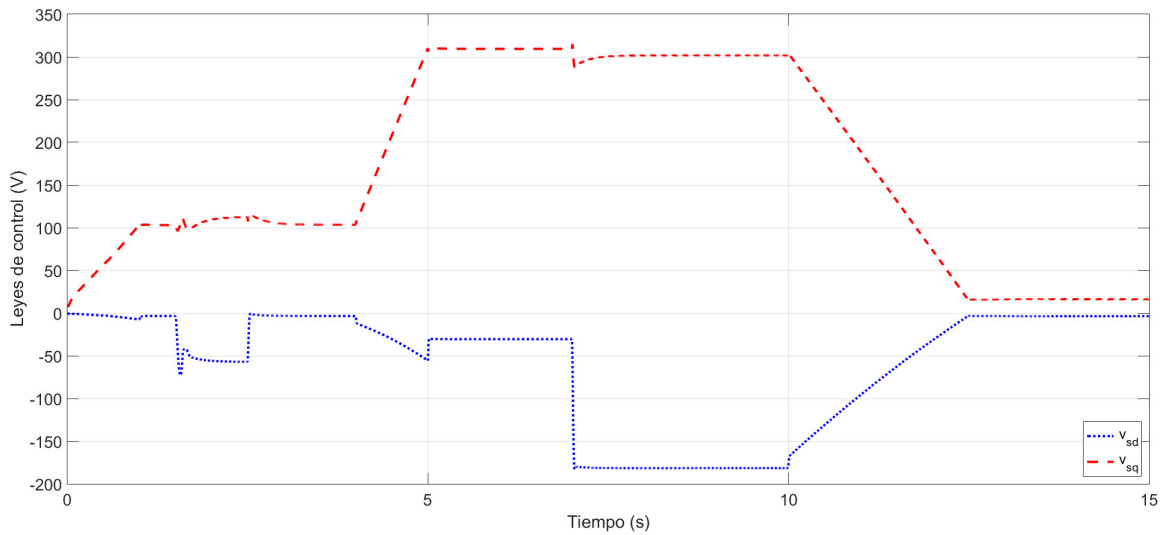


Figura 6.17: Leyes de control Super Twisting del esquema observador-control II

Tomando en cuenta los resultados de las Figuras 6.12, 6.13, 6.14 y 6.15, se puede decir que el desempeño del control Super Twisting es superior al control backstepping integral. Se utilizó el ECM para determinar el control con mejor desempeño. Entonces, tomando en cuenta los resultados de las Figuras 6.14 y 6.15, se obtuvo lo siguiente:

$$ECM_{B.I.} = 0.003, \quad ECM_{S.T.} = 0.0018$$

donde $ECM_{B.I.}$ representa el ECM del seguimiento de referencia de corriente utilizando el control backstepping integral, y $ECM_{S.T.}$ el ECM del seguimiento de corriente utilizando el control Super Twisting.

Entonces, de acuerdo a los resultados obtenidos del ECM para cada control, se concluye que $ECM_{B.I.} > ECM_{S.T.}$, es decir, que el control Super Twisting, tiene un mejor desempeño para realizar el seguimiento de la señal de referencia de la corriente i_{sd}^* , comparado con el control backstepping integral.

Considerando lo anterior, se puede concluir que el control Super Twisting del esquema observador-control II, tiene mejor desempeño que el control backstepping integral del esquema observador-control I.

6.5. Conclusiones

Se presentaron dos esquemas del tipo observador-control para el MSIPI, en los cuales se garantizaron las condiciones de estabilidad para el seguimiento de referencia del sistema en lazo cerrado.

Se realizó un estudio comparativo, entre las técnicas de observación por modos deslizantes Super Twisting cuya convergencia es en tiempo finito, y los observadores tipo Kalman cuya convergencia es asintótica. Resultando con mejor desempeño, para esta aplicación, las técnicas de observación por modos deslizantes Super Twisting.

También se comparó el desempeño de los controles diseñados, uno por modos deslizantes Super Twisting y el control backstepping integral, resultando que el control Super Twisting obtuvo un mejor desempeño que el control backstepping integral.

Conclusiones

En este trabajo se presentaron dos soluciones para el problema de estimación de la posición mecánica del rotor de un MSIPI, considerando que las únicas mediciones disponibles son las corrientes y voltajes del estator.

En esta tesis se propusieron dos esquemas de observación-control para dar solución al problema de control del MSIPI sin sensores mecánicos. Una primera solución es el esquema de observador-control, constituido por dos observadores interconectados tipo Kalman, y un control backstepping integral. Mientras que el segundo esquema de observador-control, se compone de dos observadores interconectados por modos deslizantes Super Twisting, y un control por modos deslizantes Super Twisting. Además, se presentó un análisis de la estabilidad para el seguimiento de trayectorias del sistema en lazo cerrado de cada esquema.

Por otra parte, en esta tesis se propuso una modificación al observador por modos deslizantes Super Twisting presentado [1], así como, al control por modos deslizantes Super Twisting introducido en [2], en donde en ambos casos se simplifica su implementación, ya que se reduce el número de parámetros a sintonizar a uno. Además, de su robustez y de reducir considerablemente el efecto de *chattering*.

Se presentaron los resultados de dichos esquemas mediante simulaciones que muestran la efectividad de los algoritmos propuestos. Dichas simulaciones fueron realizadas en el ambiente de Matlab/Simulink. Se encontró que la técnica de observación Super Twisting propuesta fue superior en cuanto a desempeño comparada con los observadores tipo Kalman del primer esquema de observación-control. Por otro lado, el control Super Twisting presentó un mejor desempeño en el seguimiento de referencia deseada, comparado con el control backstepping integral del primer esquema de observación-control.

Cabe mencionar que en el primer esquema observador-control, se requiere de un análisis de estabilidad para el seguimiento de la señal de referencia del sistema en lazo cerrado. Mientras que en el segundo esquema no fue necesario debido a que se cumple el principio de separación.

Finalmente, se concluye que ambos esquemas de observación-control, cumplen con el objetivo general de este trabajo. Sin embargo, las técnicas por modos deslizantes Super Twisting propuestas lograron un mejor desempeño del objetivo de control y estimación.

Bibliografía

- [1] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, 2005.
- [2] A. Levant, “Introduction to high-order sliding modes,” *School of Mathematical Sciences, Israel*, vol. 58, no. 6, p. 1, 2003.
- [3] A. Glumineau and J. de León Morales, *Sensorless AC electric motor control*. Springer, 2015.
- [4] N. Tesla, “A new system of alternate current motors and transformers,” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 5, no. 10, pp. 308–327, 1888.
- [5] T. M. Jahns, “Flux-weakening regime operation of an interior permanent-magnet synchronous motor drive,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, no. 4, pp. 681–689, 1987.
- [6] M. Koteich, *Modélisation et observabilité des machines électriques en vue de la commande sans capteur mécanique*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2016.
- [7] J. Holtz, “Sensorless control of induction machines - with or without signal injection?,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 1, pp. 7–30, 2006.
- [8] R. Delpoux, *Contribution à l’identification, l’estimation et la commande de moteur synchrone à aimants permanents*. PhD thesis, thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lille, 2012.
- [9] A. K. Jebai, *Sensorless control of synchronous permanent magnet motors by signal injection*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2013.

- [10] S. Bolognani, R. Oboe, and M. Zigliotto, "Sensorless full-digital pmsm drive with ekf estimation of speed and rotor position," *IEEE transactions on Industrial Electronics*, vol. 46, no. 1, pp. 184–191, 1999.
- [11] H. Kubota, K. Matsuse, and T. Nakano, "Dsp-based speed adaptive flux observer of induction motor," *IEEE Transactions on industry Applications*, vol. 29, no. 2, pp. 344–348, 1993.
- [12] G. H. B. Foo and M. Rahman, "Direct torque control of an ipm-synchronous motor drive at very low speed using a sliding-mode stator flux observer," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 25, no. 4, pp. 933–942, 2010.
- [13] R. Ortega, L. Praly, A. Astolfi, J. Lee, and K. Nam, "Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 3, pp. 601–614, 2011.
- [14] M. Li, J. Chiasson, M. Bodson, and L. Tolbert, "Observability of speed in an induction motor from stator currents and voltages," in *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pp. 3438–3443, IEEE, 2005.
- [15] I. Boldea, M. C. Paicu, and G.-D. Andreescu, "Active flux concept for motion-sensorless unified ac drives," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 23, no. 5, pp. 2612–2618, 2008.
- [16] V. C. Ilioudis, "A model based sliding mode observer applied in pmsm sensorless control for speed and position," in *Control and Automation (MED), 2017 25th Mediterranean Conference on*, pp. 921–926, IEEE, 2017.
- [17] L. Saihi and A. Boutera, "Robust sensorless sliding mode control of pmsm with mras and luenberger extended observer," in *Modelling, Identification and Control (ICMIC), 2016 8th International Conference on*, pp. 174–179, IEEE, 2016.
- [18] Y.-S. Kung, L.-C. Huang, *et al.*, "Design and digital hardware implementation of a sensorless controller for pmsm drives using lf signal injection and ekf," in *Applied System Innovation (ICASI), 2017 International Conference on*, pp. 1281–1284, IEEE, 2017.

- [19] M. Amin and G. A. A. Aziz, "A dynamic adaptive observer for speed sensorless intelligent control of pmsm drives," in *Electric Machines and Drives Conference (IEMDC), 2017 IEEE International*, pp. 1–8, IEEE, 2017.
- [20] M. Comanescu, "Speed, rotor position and load torque estimation of the pmsm using an extended dynamic model and cascaded sliding mode observers," in *Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion (SPEEDAM), 2016 International Symposium on*, pp. 98–103, IEEE, 2016.
- [21] D. Liang, J. Li, and R. Qu, "Sensorless control of permanent magnet synchronous machine based on second-order sliding-mode observer with online resistance estimation," *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2017.
- [22] J. Wiley, *Modeling and high-performance control of electrical machines*. John Wiley & Sons, New Jersey, ISBN: 0-471-68449-X, 2005.
- [23] M. N. Uddin and M. A. Rahman, "High-speed control of ipmsm drives using improved fuzzy logic algorithms," *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 54, no. 1, pp. 190–199, 2007.
- [24] E. Kreindler and P. Sarachik, "On the concepts of controllability and observability of linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 9, no. 2, pp. 129–136, 1964.
- [25] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1995.
- [26] A. Valibeygi, K. Vijayaraghavan, *et al.*, "A comparative study of extended kalman filter and an optimal nonlinear observer for state estimation," in *American Control Conference (ACC), 2017*, pp. 5211–5216, IEEE, 2017.
- [27] M. G. Price and G. Cook, "Identification/observation using an extended luenberger observer," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, no. 4, pp. 279–287, 1982.
- [28] H. K. Khalil, "High-gain observers in nonlinear feedback control," in *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on*, pp. xvii–lvii, IEEE, 2008.

- [29] M. C. Turner and D. G. Bates, *Mathematical methods for robust and nonlinear control*. Springer, 2007.
- [30] R. Hermann and A. Krener, "Nonlinear controllability and observability," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 22, no. 5, pp. 728–740, 1977.
- [31] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 37, no. 6, pp. 875–880, 1992.
- [32] A. Isidori, *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [33] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear control design: geometric, adaptive and robust*. Prentice Hall International (UK) Ltd., 1996.
- [34] S. Kobayashi and K. Furuta, "Frequency characteristics of levant's differentiator and adaptive sliding mode differentiator," *International Journal of Systems Science*, vol. 38, no. 10, pp. 825–832, 2007.
- [35] M. A. Hamida, A. Glumineau, and J. De Leon, "Robust integral backstepping control for sensorless ipm synchronous motor controller," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 5, pp. 1734–1757, 2012.
- [36] A. Levant, "Homogeneity approach to high-order sliding mode design," *Automatica*, vol. 41, no. 5, pp. 823–830, 2005.
- [37] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [38] V. Lakshmikantham, S. Leela, and A. Martynuk, *Practical stability of nonlinear systems*.

Apéndice A

Definiciones de Estabilidad Práctica

En este apéndice se introducen algunos conceptos y resultados de las propiedades de estabilidad práctica en términos de funciones de Lyapunov [38].

La teoría de estabilidad es la base del estudio de cualquier sistema de control. Además, el concepto de estabilidad práctica permite estudiar las propiedades de un sistema no lineal, cuando el estado del sistema está acercándose a un conjunto en lugar de un punto de equilibrio. Desde un punto de vista práctico, un sistema se considera estable si sus desviaciones permanecen acotadas alrededor de un punto de equilibrio. La noción de estabilidad práctica se vuelve útil, si el comportamiento del sistema se puede restringir mediante ciertas cotas. Por ejemplo, en las máquinas de corriente alterna, la estabilidad del sistema se dirige a un dominio acotado durante un intervalo de tiempo fijo, el cual es un concepto equivalente al de estabilidad en tiempo finito.

Ahora, se introducen las siguientes definiciones para garantizar la estabilidad práctica, en términos de funciones de Lyapunov.

Definiendo la siguiente clase de función

$$\mathbf{W} = \{d_1 \in C[\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^+]$$

$d_1(l)$ es estrictamente creciente en l y

$$d_1(l) \rightarrow \infty \text{ como } l \rightarrow \infty\}$$

Sea $B_r = \{e \in \mathbb{R}^n : \|e\| \leq r\}$. Considere el siguiente sistema dinámico

$$\dot{e} = f(t, e), \quad e(t_0) = e_0, \quad t_0 \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

El sistema (A.1) se dice que es

DEFINICIÓN A.1 (UPE). *Uniformemente prácticamente estable si, dados (h_1, h_2) con $0 < h_1 < h_2$, se tiene que*

$$\|e_0\| \leq h_1 \Rightarrow \|e(t)\| \leq h_2, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{A.2})$$

DEFINICIÓN A.2 (UPCE). *Uniformemente prácticamente cuasi-estable si, dados $h_1 > 0, \mathfrak{F} > 0, T > 0$, y $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$, se tiene que*

$$\|e_0\| \leq h_1 \Rightarrow \|e(t)\| \leq \mathfrak{F}, \quad t \geq t_0 + T \quad (\text{A.3})$$

DEFINICIÓN A.3 (FUPE). *Fuertemente uniformemente prácticamente estable si, el sistema cumple con ser UPE y UPCE.*

A continuación, se presenta un resultado de estabilidad práctica en términos de funciones de Lyapunov.

TEOREMA A.1. *Considere el sistema definido en la ecuación (A.1), y asuma que*

- i) h_1 y h_2 son dadas tal que $0 < h_1 < h_2$,
- ii) $V \in C[\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+]$ y que $V(t, e)$ es localmente Lipschitz en e ,
- iii) para $(t, e) \in \mathbb{R}^+ \times B_{h_2}$, $d_1(\|e\|) \leq V(t, e) \leq d_2(\|e\|)$ y

$$\dot{V}(t, e) \leq \vartheta(t, V(t, e)) \quad (\text{A.4})$$

donde $d_1, d_2 \in \mathbf{W}$, y $\vartheta \in C[\mathbb{R}^{+2}, \mathbb{R}]$,

- iv) la desigualdad $d_2(h_1) < d_1(h_2)$ se mantiene

Entonces, las propiedades de estabilidad práctica de

$$\dot{l} = \vartheta(t, l), \quad l(t_0) = l_0 \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

implica las correspondientes propiedades de estabilidad práctica para el sistema (A.1) [38].

Considerando el teorema anterior, se puede establecer el siguiente criterio.

COROLARIO A.1. *En el teorema (A.1), si $\vartheta(t, l) = -\alpha_1 l + \alpha_2$, donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, esto implica que el sistema (A.1) es fuertemente uniformemente prácticamente estable (FUPE).*

Podemos ver que la solución de la ecuación

$$\dot{l}(t) = -\alpha_1 l(t) + \alpha_2 \quad (\text{A.6})$$

tiene la siguiente forma

$$l(t) = l_0 e^{-\alpha_1(t-t_0)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} [1 - e^{-\alpha_1(t-t_0)}] \quad (\text{A.7})$$

Entonces, se obtiene la estabilidad práctica uniformemente fuerte de (A.6).