UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN DUOPOLIO MIXTO DE ESTRUCTURA ESPECIAL

PRESENTA

JOSÉ GUADALUPE FLORES MUÑIZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

ENERO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN DUOPOLIO MIXTO DE ESTRUCTURA ESPECIAL

PRESENTA

JOSÉ GUADALUPE FLORES MUÑIZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

ENERO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN
UN DUOPOLIO MIXTO DE ESTRUCTURA ESPECIAL

PRESENTA

JOSÉ GUADALUPE FLORES MUÑIZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON
ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO ENERO 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

FÍSICO-MATEMÁTICAS

Los miembros de este comité recomendamos que la tesis: Equilibrios con Variaciones Conjeturadas en un Duopolio Mixto de Estructura Especial, presentada por el Lic. José Guadalupe Flores Muñiz, sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El comité de Tesis

Dra. Nataliya Kalashnykova
Asesora

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Co-asesor

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Revisor

Dr. José Fernando Camacho Vallejo
Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas

Índice

1. Introducción

Los modelos de oligopolios mixtos han sido muy estudiados últimamente en la literatura. En contraste con un oligopolio clásico, un oligopolio mixto cuenta con al menos un agente especial, además de los agentes comunes que maximizan su utilidad neta. Este agente especial opera con una función objetivo diferente a la de utilidad neta. Muchos de estos modelos incluyen un agente que maximiza el beneficio social (véase [1]-[5]). Una función de ingresos por trabajador remplaza a la función de utilidad neta en otros trabajos (cf. [6]-[9]). En los trabajos [10] y [11] examinan el tercer tipo de oligopolio mixto donde uno de los agentes busca maximizar la combinación convexa de las funciones de beneficio social y utilidad neta.

La mayoría de los trabajos arriba mencionados estudian los oligopolios mixtos bajo los enfoques clásicos de Cournot, Hotelling o Stackelberg ([12] y [13]). No obstante, hoy en día, el concepto de equilibrio con variaciones conjeturadas (CVE por sus siglas en inglés) introducido por Bowley [14] y Frisch [15] como otra posible solución en juegos estáticos es cada vez más utilizado. Este concepto establece que los jugadores se comportan de la siguiente manera: cada agente escoge su mejor estrategia suponiendo que las estrategias de sus oponentes son una conjetura de su propia estrategia. Por ejemplo, como Laitner ([16]) dijo, "Aunque las firmas tomen la decisión de sus volúmenes simultáneamente, cambios de planes siempre son posibles antes de que la producción comience". En otras palabras, al contrario del enfoque de Cournot-Nash, aquí cada firma supone que los cambios en sus volúmenes de producción afectaran las decisiones de sus oponentes. Esta anticipación (o variación conjeturada) es lo que compone el núcleo de la toma de decisiones con variaciones conjeturadas (o equilibrio con variaciones conjeturadas).

Como se divulga en [17] y [18], el concepto de equilibrio con variaciones conjeturadas ha sido tema controversial de diversas disputas conceptuales (véase [19]). Sin embargo, los economistas han hecho un uso masivo de una u otra forma del CVE para predecir el resultado de un comportamiento no cooperativo en muchas áreas de la economía. La literatura sobre conjeturas variaciones se ha centrado principalmente en juegos de dos jugadores (cf. [17]), ya que aparecen muchas dificultades conceptuales si el número de agentes es mayor a dos (véase [17], [20]).

Con el fin de lidiar con este obstáculo conceptual que aparece en los juegos de múltiples jugadores, Bulavsky en [21] dio un enfoque completamente nuevo. En lugar de asumir la equivalencia (simetría) de los jugadores en el oligopolio se supone que cada jugador hace conjeturas no respecto a la respuesta (óptima) de los otros jugadores, sino más bien, sobre las variaciones en el precio del mercado respecto a las variaciones (infinitesimales) de su volumen de producción. Conociendo las conjeturas de sus oponentes (llamados coeficientes de influencia), cada agente entra en un procedimiento de verificación para comprobar si su coeficiente de influencia es consistente con el de los demás jugadores.

En los trabajos [20] y [22], los resultados de [21] fueron extendidos para duopolio y oligopolio mixtos, respectivamente. En ambos trabajos, el concepto de equilibrio exterior fue definido como un equilibrio con variaciones conjeturadas (CVE) con los coeficientes de influencia dados de manera exógena. Se establecieron teoremas de existencia y unicidad para este tipo de CVE, para ser usados como piedra angular para el concepto de equilibrio interior, que está dado como un equilibrio exterior con conjeturas (coeficientes de influencia) consistentes. El criterio de consistencia, el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia, y teoremas de existencia para el equilibrio interior también fueron formulados y demostrados en [20] y [22].

En [23] y en [27], los resultados descritos arriba fueron extendidos para el caso de un duopolio parcialmente mixto, es decir, donde la compañía pública, al igual que en [10] y [11], maximiza la combinación convexa de las funciones de beneficio social y utilidad neta con un parámetro $0 < \beta \leq 1$. Realizaron experimentos numéricos con un modelo de un mercado de electricidad (con datos sacados de [24]), con y sin una compañía pública entre los agentes, que mostraron la importancia del CVE para los consumidores.

El objetivo de esta tesis es investigar esto con más detalle. Cuando el parámetro β de la combinación convexa tiende a 1, es decir, cuando el modelo tiende a un duopolio mixto donde la firma pública maximiza únicamente el beneficio social, aparecen dos resultados muy interesantes. Primero, para la compañía privada, el equilibrio consistente con variaciones conjeturadas sugiere mejores ganancias que con el equilibrio clásico de Cournot. Segundo, existe un valor del parámetro β de la combinación convexa para el cual la ganancia para la compañía privada es la misma para ambos equilibrios antes mencionados. Entonces, si suponemos que la compañía pública es socialmente responsable y utiliza la política de subsidios para motivar económicamente a la firma privada de cambiar el equilibrio de Cournot por el equilibrio de CCVE o, de otra forma, compensar monetariamente a la población por el precio más elevado que aparece en el equilibrio de Cournot en comparación con el equilibrio de CCVE. Pero eligiendo el valor del parámetro de la combinación convexa β de tal manera que las ganancias para la compañía privada sean iguales para ambos equilibrios (Cournot y CCVE) la firma pública no tiene que pagar subsidios ni a la firma privada ni a la población. A este valor del parámetro β le llamamos **grado de socialización óptimo** para la firma pública.

Como en los trabajos [23] y [27], comparaciones entre los equilibrios de CCVE, Cournot y competencia perfecta existen en diversas publicaciones, pero hasta ahora sólo se habían realizado de manera experimental. Está es la motivación principal de esta tesis, realizar por primera vez una comparación teórica entre estos tres equilibrios.

Finalmente, el resto de la tesis se compone de la siguiente manera: En la sección 2 formulamos el modelo y los dos tipos de equilibrio a considerar (exterior e interior), el teorema de existencia y unicidad del equilibrio exterior para cualquier par de coeficientes de influencia factibles, la fórmula para la derivada del precio p del equilibrio con respecto a la variable de la demanda activa D, el criterio de consistencia y el teorema de existencia del equilibrio interior. En la sección 3 estudiamos el importante caso particular de la demanda como una función lineal: analizamos el comportamiento del único equilibrio interior respecto al parámetro de la combinación convexa β y lo comparamos con los equilibrios exteriores correspondientes a las conjeturas de Cournot y competencia perfecta para finalmente formular el criterio de optimalidad de este parámetro. En la sección 4 se muestran y explican algunos resultados de experimentos numéricos (con datos sacados de [24]). En la sección 5 se hallan las demostraciones correspondientes a los teoremas de cada sección. Finalmente, las conclusiones, trabajo a futuro y referencias se encuentran al final de este trabajo.

2. Equilibrio Consistente con Variaciones Conjeturadas en un Duopolio Mixto de Estructura Especial

2.1. Especificación del Modelo

Consideremos dos productores en un mercado de duopolio mixto de un bien homogéneo (véase [27]) con funciones de costo $f_i(q_i)$, $i = 0, 1$, donde q_i es la producción del productor i. Consideraremos también la demanda de dos tipos: la demanda pasiva $G(p)$ y la demanda activa D que no depende del precio p y es no negativa.

Relacionaremos el equilibrio entre la demanda y los suministros para el precio p con la siguiente ecuación de balance

$$q_0 + q_1 = G(p) + D. \tag{1}$$

Para el modelo asumiremos las siguientes suposiciones.

A1. La función de demanda pasiva $G(p)$ está definida para los precios $p \in (0, +\infty)$, es continuamente diferenciable y no creciente con $G'(p) \leq 0$.

A2. Para cada $i = 0, 1$, la función de costos $f_i(q_i)$ es cuadrática, es decir,

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2}a_i q_i^2 + b_i q_i \tag{2}$$

donde

$$a_i, b_i > 0, \ i = 0, 1.$$

También, asumiremos que

$$b_0 \leq b_1. \tag{3}$$

El productor $i = 1$ es privado y elige su volumen de producción q_1 maximizando su función de utilidad neta

$$\pi_1(p, q_1) = p \cdot q_1 - f_1(q_1). \tag{4}$$

El productor $i = 0$, llamado público, selecciona su volumen de producción q_0 maximizando la función que es la combinación convexa de la función de beneficio social y utilidad neta

$$S(p, q_0, q_1) = \beta \left(\int\limits_0^{q_0+q_1} p(x)dx - p \cdot q_1 - f_0(q_0) \right) + (1-\beta)(p \cdot q_0 - f_0(q_0)), \tag{5}$$

donde $0 < \beta \leq 1$.

Ahora diremos que cada agente, tanto el público como el privado, asumen que las decisiones de sus volúmenes de producción afectaran el precio p. En este caso la condición necesaria de optimalidad de primer orden para el agente público ($i = 0$) toma la siguiente forma

$$\frac{\partial S}{\partial q_0} = p + [(1-\beta)q_0 - \beta q_1] \frac{\partial p}{\partial q_0} - f_0'(q_0) \begin{cases} = 0 & \text{si } q_0 > 0 \\ \leq 0 & \text{si } q_0 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

y para el agente privado ($i = 1$)

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = p + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1} - f_1'(q_1) \begin{cases} = 0 & \text{si } q_1 > 0 \\ \leq 0 & \text{si } q_1 = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Para describir el comportamiento de los agentes necesitamos evaluar el comportamiento de la derivada $\dfrac{\partial p}{\partial q_i} = -\nu_i$ antes de la dependencia de p sobre q_i. Introduciremos el signo negativo con el objetivo de poder trabajar con los valores no negativos de ν_i. La dependencia p respecto a q_i debe probar (al menos localmente) concavidad del beneficio del i-ésimo agente en función de su propia producción q_i. De otra manera no podemos garantizar que el beneficio sea maximizado. Como hemos supuesto que las funciones de costo $f_i(q_i)$ son cuadráticas y estrictamente convexas, entonces, para la concavidad de la función $\pi_1(q_1)$ es suficiente obtener la concavidad del producto $p \cdot q_1$. Si asumimos que el coeficiente ν_i (al cual de ahora en adelante nos referiremos como **coeficiente de influencia** del i-ésimo agente) es no negativo y constante, entonces, la dependencia local de la utilidad neta $\pi_1(q_1)$ respecto al volumen de producción η_1 tiene la forma

$$[p - \nu_1 (\eta_1 - q_1)] \eta_1 - f_1(\eta_1) \tag{8}$$

y la condición (7) para $\eta_1 = q_1$ se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{cases} p = \nu_1 q_1 + a_1 q_1 + b_1 & \text{si } q_1 > 0 \\ p \leq b_1 & \text{si } q_1 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

y se usará como la condición suficiente.

Similarmente, las conjeturas de la dependencia local de la función de beneficio de la compañía pública ($i = 0$) respecto a su volumen de producción η_0 está dada de la siguiente forma

$$\beta \left(\int\limits_0^{\eta_0+q_1} p(x)dx - [p - \nu_0 (\eta_0 - q_0)] q_1 - f_0(\eta_0) \right) + (1-\beta) \left\{ [p - \nu_0(\eta_0 - q_0)] \eta_0 - f_0(\eta_0) \right\} \tag{10}$$

lo que permite escribir la condición de optimalidad de primer orden para $\eta_0 = q_0$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} p = \nu_0\left[(1-\beta)q_0 - \beta q_1\right] + a_0 q_0 + b_0 & \text{si } q_0 > 0 \\ p \leq -\beta\nu_0 q_1 + b_0 & \text{si } q_0 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

y también se usará como condición suficiente.

Si las conjeturas de los agentes son dadas de manera exógena como en trabajos de Bulavsky y Kalashnikov ([25], [26]), entonces, los valores ν_i, en general, dependen del volumen de producción del agente i y del precio del mercado, es decir, son funciones de q_i y p, pero puede ser que ν_i dependa también del volumen total del mercado. Sin embargo, en este trabajo usaremos el enfoque propuesto por Bulavsky ([21]), donde las conjeturas ν_i están incluidas en el equilibrio y son determinadas simultáneamente con el precio p y los volúmenes de producción q_i. En el último caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados sólo por el equilibrio. Más adelante tal equilibrio es descrito por el vector $(p, q_0, q_1, \nu_0, \nu_1)$ y se llama **interior**.

2.2. Equilibrio Exterior

Para poder proseguir lo anterior necesitamos definir otra noción de equilibrio llamado exterior ([21]) con coeficientes de influencia $\nu_i \geq 0$, $i = 0, 1$, dados de forma exógena.

Definición 1. El vector (p, q_0, q_1) se llama **equilibrio exterior** para los coeficientes de influencia (ν_0, ν_1), si el mercado es balanceado, es decir, la condición (1) se satisface, y para cada agente las condiciones (9) y (11) son válidas.

A continuación, vamos a considerar sólo el caso en el que el conjunto de productores está fijo, es decir, no depende de los valores de los coeficientes de influencia ν_i. Para eso suponemos lo siguiente:

A3. Para el precio $p_0 = b_1$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\frac{p_0 - b_0}{a_0} < G(p_0). \tag{12}$$

La suposición anterior, junto con las suposiciones **A1** y **A2**, garantiza que para todos los valores no negativos de ν_1 y ν_0 existe una solución óptima para las condiciones (9) y (11) que satisface la ecuación de balance (1), es decir, un equilibrio exterior. Además, las condiciones (1), (9) y (11) se cumplen simultáneamente si y solo si $p > p_0$, esto es, si y solo si los volúmenes de producción q_i son positivos. En efecto, si $p > p_0$, entonces, la desigualdad $p \leq b_1$ dada por (9) y $p \leq -\beta\nu_0 q_1 + b_0$ dada por (11) no son posibles, lo que implica que $q_i > 0$, $i = 0, 1$. Si los volúmenes de producción $q_i > 0$, $i = 0, 1$, entonces, por las condiciones dadas por (9) tenemos que $p = q_1\nu_1 + a_1 q_1 + b_1$, lo que implica que $p > b_1 = p_0$.

Nota. Las demostraciones de los teoremas se encuentran anexadas al final de este capítulo.

Teorema 1. Con las suposiciones **A1**, **A2** y **A3**, y para cuales quiera $D, \nu_0, \nu_1 \geq 0$, existe un único equilibrio exterior (p^*, q_0^*, q_1^*) que depende continuamente de los parámetros (D, ν_0, ν_1). El precio del equilibrio $p^* = p^*(D, \nu_0, \nu_1)$ como función de estos parámetros es diferenciable respecto a D y ν_i, $i = 0, 1$. Además, $p^*(D, \nu_0, \nu_1) > p_0$ y

$$\frac{\partial p^*}{\partial D} = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \dfrac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\dfrac{1}{\nu_1 + a_1}\right) - G'(p^*)}. \tag{13}$$

Nota. La demostración del **Teorema 1** está publicada en [28], pero por la importancia de los pasos y las formulas de la demostración para los resultados de esta tesis, presentamos la demostración completa.

2.3. Equilibrio Interior

Para poder describir el equilibrio interior, primero describiremos el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia ν_i como fue descrito por Bulavsky [21]. Supongamos que tenemos un equilibrio exterior (p, q_0, q_1) que ocurrió para algunos ν_0, ν_1 y D. Uno de los productores, digamos el k, temporalmente cambia su comportamiento absteniéndose de maximizar sus ganancias y hace pequeñas variaciones sobre su volumen de producción q_k. En términos matemáticos esto es equivalente a restringir los agentes al subconjunto $i \neq k$ con la producción q_k substraída de la demanda activa.

La variación del volumen de producción del agente k es equivalente a la variación de la demanda activa en la forma $D_k = D - q_k$. Si consideramos que estas variaciones son infinitesimales, entonces, el agente k puede estimar la derivada del precio del equilibrio con respecto a la demanda activa, es decir, su coeficiente de influencia.

Al aplicar la formula (13) del **Teorema 1** al cálculo de las derivadas hay que recordar que el agente k está temporalmente ausente del modelo en equilibrio, por lo tanto hay que excluir del denominador los términos relacionados con el índice $i = k$. Teniendo esto en cuenta, tenemos el siguiente criterio:

Criterio de Consistencia. Dado un equilibrio exterior (p, q_0, q_1), los coeficientes de influencia ν_k, $k = 0, 1$, se llaman consistentes si las siguientes ecuaciones se cumplen:

$$\nu_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{\nu_1 + a_1} - G'(p)} \tag{14}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} - G'(p)} \tag{15}$$

Nota. Si todos los agentes maximizan su producción como compañías privadas, entonces, las formulas (14) y (15) se reducen a una única fórmula:

$$\nu_i = \frac{1}{\dfrac{1}{\nu_{1-i} + a_{1-i}} - G'(p)}, i = 0, 1. \tag{16}$$

Ahora podemos definir con detalle que es un equilibrio interior.

Definición 2. El vector $(p, q_0, q_1, \nu_0, \nu_1)$, donde $\nu_k \geq 0$, $k = 0, 1$, es un **equilibrio interior** si el vector (p, q_0, q_1) es un equilibrio exterior para los coeficientes de influencia ν_k, $k = 0, 1$, y el criterio de consistencia se satisface para todo ν_k, $k = 0, 1$.

Teorema 2. Con las suposiciones **A1**, **A2** y **A3**, existe un equilibrio interior.

Dentro de la demostración del teorema anterior introducimos un parámetro $\tau \in (-\infty, 0]$ de manera que $\tau = G'(p)$ y las ecuaciones (14) y (15) se reescriben de la siguiente forma:

$$\nu_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{\nu_1 + a_1} - \tau} \tag{17}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} - \tau} \tag{18}$$

y formularemos el siguiente teorema:

Teorema 3. Para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$ existe una solución única $(\nu_0(\tau), \nu_1(\tau))$, del sistema de ecuaciones (17)-(18), que es continuamente diferenciable respecto a τ. Más aún, $\nu_i(\tau) \to 0$ cuando $\tau \to -\infty$, $i = 0, 1$, y $\nu_i(\tau)$ es estrictamente creciente respecto a τ.

Nota. Las formulaciones de los **Teoremas 2 y 3** (sin demostraciones) están publicadas en [27]. Además, para demostrar el **Teorema 2** se hace uso del **Teorema 3**, por lo que el **Teorema 3** es demostrado en el anexo antes que el **Teorema 2**.

Corolario 1. Para la función lineal de la demanda $G(p) = -Kp + T$, donde $K > 0$, $T > 0$, para cada $\beta \in (0, 1]$ existe único equilibrio interior $(p^*(\beta), q_0^*(\beta), q_1^*(\beta), \nu_0^*(\beta), \nu_1^*(\beta))$.

3. Caso Particular: La Demanda como Función Lineal

Consideremos para nuestro modelo el caso particular cuando la demanda $G(p)$ es una función lineal, es decir,

$$G(p) = -Kp + T, \tag{19}$$

donde $K > 0$, $T > 0$, e investigaremos el comportamiento respecto al parámetro β para cada uno de los tres equilibrios: equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (equilibrio interior), equilibrio de Cournot y equilibrio de competencia perfecta (equilibrios exteriores).

3.1. Equilibrio Consistente con Variaciones Conjeturadas

Ya que para cada $\beta \in (0, 1]$, por el **Corolario 1**, existe un único equilibrio interior, lo siguiente es analizar su comportamiento.

Teorema 4. Para la función lineal de la demanda $G(p)$ descrita por (19) el precio $p^*(\beta)$, los volúmenes de producción $q_i^*(\beta)$, $i = 0, 1$, y los coeficientes de influencia $\nu_i^*(\beta)$, $i = 0, 1$, del equilibrio interior, así como el volumen total del mercado $G^*(\beta) = q_0^*(\beta) + q_1^*(\beta)$, son funciones continuamente diferencibles respecto a β, $\beta \in (0, 1]$. Más aun, $q_0^*(\beta)$ y $G^*(\beta)$ son estrictamente crecientes y $p^*(\beta), \nu_0^*(\beta), \nu_1^*(\beta)$ y $q_1^*(\beta)$ son estrictamente decrecientes respecto a β, $\beta \in (0, 1]$.

3.2. Equilibrio de Cournot

Ahora, vamos a analizar el comportamiento respecto al parámetro β del equilibrio exterior de nuestro modelo correspondiente a la conjetura de Cournot.

La conjetura de Cournot, es decir, $\omega_i = \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = 1$, $i = 0, 1$, para nuestro modelo en el caso de la función de la demanda lineal descrita en (19), corresponde a la siguiente conjetura (coeficientes de influencia): $\nu_i = \dfrac{\partial p}{\partial q_i} = -\dfrac{1}{G'(p)} = \dfrac{1}{K}$, $i = 0, 1$. Para cada $\beta \in (0, 1]$, por el **Teorema 1**, existe un único equilibrio exterior correspondiente a la conjetura de Cournot, el cual notaremos por $(p^c, q_0^c, q_1^c) = (p^c(\beta), q_0^c(\beta), q_1^c(\beta))$.

Teorema 5. Para la función lineal de la demanda, el precio $p^c(\beta)$ y los volúmenes de producción $q_i^c(\beta)$, $i = 0, 1$, del equilibrio de Cournot, $(p^c(\beta), q_0^c(\beta), q_1^c(\beta))$, son funciones continuamente diferenciables respecto a β, $\beta \in (0, 1]$. Más aun, $p^c(\beta)$ y $q_1^c(\beta)$ son estrictamente decrecientes y $q_0^c(\beta)$ es estrictamente creciente respecto a β, $\beta \in (0, 1]$.

Es fácil comprobar que el equilibrio de Cournot, dentro de nuestro modelo no satisface el criterio de consistencia, es decir, no coincide con el equilibrio interior.

3.3. Equilibrio de Competencia Perfecta

Ahora, vamos a analizar el comportamiento respecto al parámetro β del equilibrio exterior de nuestro modelo correspondiente a la conjetura de competencia perfecta.

La conjetura de competencia perfecta, es decir, $\omega_i = \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = 0$, $i = 0, 1$, para nuestro modelo en el caso de la función de la demanda lineal descrita en (19), corresponde a la siguiente conjetura (coeficientes de influencia): $\nu_i = \dfrac{\partial p}{\partial q_i} = 0$, $i = 0, 1$. Para cada $\beta \in (0, 1]$, por el **Teorema 1**, existe un único equilibrio exterior correspondiente a la conjetura de competencia perfecta, el cual notaremos por $(p^{cp}, q_0^{cp}, q_1^{cp}) = (p^{cp}(\beta), q_0^{cp}(\beta), q_1^{cp}(\beta))$.

Teorema 6. Para la función lineal de la demanda, el precio $p^{cp}(\beta)$ y los volúmenes de producción $q_i^{cp}(\beta)$, $i = 0, 1$, del equilibrio de competencia perfecta, $(p^{cp}(\beta), q_0^{cp}(\beta), q_1^{cp}(\beta))$, son constantes respecto a β y están dados por las formulas:

$$p^{cp} = \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 a_1 (T + D)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K}, \tag{20}$$

$$q_0^{cp} = \frac{a_1 \left(G(b_0) + D\right) + (b_1 - b_0)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K} \tag{21}$$

$$q_1^{cp} = \frac{a_0 \left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K} \tag{22}$$

Es fácil comprobar que el equilibrio de competencia perfecta, dentro de nuestro modelo no satisface el criterio de consistencia, es decir, no coincide con el equilibrio interior.

3.4. Comparación del Equilibrio Consistente con Variaciones Conjeturadas con los Equilibrios de Cournot y de Competencia Perfecta

Ya hemos visto tres tipos de equilibrio para nuestro modelo, entonces, es natural pensar en compararlos.

Teorema 7. Para las funciones de precio de los equilibrios de Consistencia con Variaciones Conjeturadas, $p^*(\beta)$, de Cournot, $p^c(\beta)$, y de competencia perfecta, p^{cp}, las siguientes desigualdades se cumplen:

$$p^{cp} < \lim_{\beta \to 0} p^*(\beta) \tag{23}$$

y

$$p^*(\beta) < p^c(\beta) \text{ para todo } \beta \in (0, 1]. \tag{24}$$

3.5. Criterio de Optimalidad para β

Para establecer el criterio para elegir un valor óptimo del parámetro β vamos a analizar el comportamiento de la función de utilidad neta del productor privado en los equilibrios de CCVE y Cournot.

Dado que la función $\pi_1(p, q_1)$ descrita por (4) es continuamente diferenciable respecto a p y q_1, para los modelos de Consistencia con Variaciones Conjeturadas y Cournot podemos considerar las funciones

$$\pi_1^*(\beta) = p^*(\beta) q_1^*(\beta) - \frac{1}{2} a_1 q_1^*(\beta)^2 - b_1 q_1^*(\beta). \tag{25}$$

del equilibrio interior, y

$$\pi_1^c(\beta) = p^c(\beta) q_1^c(\beta) - \frac{1}{2} a_1 q_1^c(\beta)^2 - b_1 q_1^c(\beta). \tag{26}$$

del equilibrio exterior, como funciones continuamente diferenciables respecto a β, $\beta \in (0, 1]$.

Teorema 8. Las funciones $\pi_1^*(\beta)$ y $\pi_1^c(\beta)$ son estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0, 1]$. Además, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\pi_1^*(1) > \pi_1^c(1) \tag{27}$$

y

$$\lim_{\beta \to 0} \pi_1^*(\beta) < \lim_{\beta \to 0} \pi_1^c(\beta). \tag{28}$$

De la demostración del Teorema anterior se sigue que existe un valor $\overline{\beta} \in (0,1)$ tal que $\pi_1^*(\overline{\beta}) = \pi_1^c(\overline{\beta})$. Suponemos ahora que la firma pública es socialmente responsable y utiliza la política de subsidios para motivar a la firma privada de cambiar del equilibrio de Cournot al equilibrio de CCVE o pagar subsidios a la población para compensar el precio más elevado del equilibrio de Cournot. Sin embargo, la elección de este parámetro $\overline{\beta}$ permite que la empresa pública no tenga que pagar subsidios a la empresa privada ni a la población. Bajo esta idea introducimos la siguiente definición:

Definición 3. El valor del parámetro $\overline{\beta} \in (0,1)$ para el cual se cumple que $\pi_1^*(\overline{\beta}) = \pi_1^c(\overline{\beta})$ es llamado **grado de socialización óptimo**.

Del **Teorema 8**, se sigue inmediatamente que para el modelo de Duopolio considerado en esta tesis siempre podemos encontrar un grado de socialización óptimo para la firma pública.

4. Resultados numéricos

En esta sección nos basamos en los resultados de los experimentos numéricos aplicados a un ejemplo sacado del trabajo de Liu [24]. A continuación, describimos a detalles los experimentos:

La función inversa de la demanda está dada por

$$p(G,D) = 50 - 0.02(G+D) = 50 - 0.02(q_0+q_1). \tag{29}$$

Despejando $G+D$ de la ecuación anterior obtenemos la expresión para la función de la demanda:

$$G(p) + D = -50p + 2500. \tag{30}$$

Las funciones de costos de los agentes son cuadráticas y están dadas por (2), donde los valores de a_i y b_i son como se muestran en la **Tabla 1**:

Tabla 1

Agente i	b_i	a_i
0	2.0	0.02
1	1.75	0.0175
2	3.25	0.00834

Calculamos y comparamos entre sí los tres tipos de equilibrio: equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE), equilibrio de Cournot y equilibrio de competencia perfecta. Los coeficientes de influencia se determinan para el CCVE mediante las formulas obtenidas en este trabajo [(14) y (15)], para el equilibrio de Cournot los coeficientes de influencia están dados por la igualdad:

$$\nu_i^c = \frac{\partial p}{\partial q_i} = -\frac{1}{G'(p)} = 0.02,$$

y para el equilibrio de competencia perfecta tienen el valor:

$$\nu_i^{cp} = \frac{\partial p}{\partial q_i} = 0.$$

Partiendo de los datos de la Tabla 1, procedemos a realizar los experimentos numéricos para los tres casos siguientes:

Experimento 1: La firma $i=0$ es pública y la firma $i=2$ es privada.
Experimento 2: La firma $i=0$ es pública y la firma $i=1$ es privada.
Experimento 3: La firma $i=2$ es pública y la firma $i=1$ es privada.

Dentro de cada caso manejaremos la siguiente notación para los tres modelos:

Cournot: Modelo de Cournot.
CCVE: Modelo de CCVE.
CP: Modelo de competencia perfecta.

Experimento 1

En este caso, la firma $i = 0$ es pública y la firma $i = 2$ es privada, de tal manera que la firma pública es más fuerte que la firma privada, es decir, se cumple que $b_0 \leq b_1$ (supuesto **A2**). Los resultados numéricos de este experimento se muestran en la **Tabla 2**.

En los resultados de la **Tabla 2** vemos que los valores de las variables se comportan tal y como fueros descritas en los teoremas de las secciones anteriores.

Los resultados numéricos muestran que para los grados de socialización $0 < \beta \leq 0.55$, los productores privados ganan más en el equilibrio de Cournot que en el de CCVE, pero para $0.60 \leq \beta \leq 1$, ganan más en el equilibrio de CCVE que en el de Cournot. Entonces, el grado de socialización óptimo está dentro del intervalo $0.55 < \beta_{\text{optimo}} < 0.60$. Más aun, se puede encontrar fácilmente que $\beta_{\text{optimo}} = 0.55262$, y el equilibrio interior correspondiente a este grado de socialización es: $(p^*, q_0^*, q_1^*, \nu_0^*, \nu_1^*) = (18.073, 829.53, 766.82, 0.009830, 0.010991)$.

En las secciones anteriores hicimos uso del supuesto **A2**. En los siguientes dos experimentos vamos a considerar el caso cuando esta suposición no se cumple para ver como se comporta nuestro modelo.

Experimento 2

En este caso, la firma $i = 0$ es pública y la firma $i = 1$ es privada, de tal manera que la firma pública es más débil que la firma privada. Los resultados numéricos de este experimento se muestran en la **Tabla 3**.

En los resultados de la **Tabla 3** vemos que los valores de las variables también se comportan según los teoremas de las secciones anteriores, a pesar de que no se cumple **A2**.

Para este segundo caso tenemos que $\beta_{\text{optimo}} = 0.62905$, y el equilibrio interior correspondiente a este valor es: $(p^*, q_0^*, q_1^*, \nu_0^*, \nu_1^*) = (19.458, 905.37, 621.72, 0.01175, 0.01098)$.

Experimento 3

En este caso, la firma $i = 2$ es pública y la firma $i = 1$ es privada, de tal manera que la firma pública ahora es mucho más débil que la firma privada en comparación con el experimento anterior y de nuevo vemos que las variables se comportan según nuestro modelo. Los resultados numéricos de este experimento se muestran en la **Tabla 4**.

Para este tercer caso tenemos que $\beta_{\text{optimo}} = 0.80324$, y el equilibrio interior correspondiente a este valor es: $(p^*, q_0^*, q_1^*, \nu_0^*, \nu_1^*) = (13.329, 1358.7, 474.81, 0.010988, 0.006886)$.

De los resultados de los experimentos podemos observar que mientras más débil sea la firma pública con respecto a la firma privada el grado de socialización óptimo estará más cercano a 1.

5. Conclusiones y trabajo futuro

En los mercados de oligopolio los modelos de Cournot y competencia perfecta siempre se han visto como dos casos extremos, siendo Cournot el mejor modelo para los productores y competencia perfecta el mejor modelo para los consumidores, mientras que el modelo de CCVE representa un caso intermedio (y más realista) entre los modelos de Cournot y competencia perfecta.

Analizando y comparando el comportamiento de los modelos de CCVE, Cournot y competencia

Tabla 2

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.05$	ω_0	1.0	0.50330	0.0
	ω_2	1.0	0.59645	0.0
	p	23.865358	20.378004	13.595420
	q_0	579.302246	636.044983	579.770996
	q_2	727.429749	845.054749	1240.458008
	G	1306.731934	1481.099731	1820.229004
	π_0	10164.514648	8740.533203	5017.960938
	π_2	12789.652344	11496.231445	6416.529297
$\beta = 0.10$	ω_0	1.0	0.50225	0.0
	ω_2	1.0	0.59215	0.0
	p	23.562273	20.158798	13.595420
	q_0	605.151123	654.270691	579.770996
	q_2	716.735107	837.789490	1240.458008
	G	1321.886230	1492.060181	1820.229004
	π_0	11133.738281	9826.311523	6674.577637
	π_2	12416.351563	11239.126953	6416.529297
$\beta = 0.15$	ω_0	1.0	0.50115	0.0
	ω_2	1.0	0.58775	0.0
	p	23.252075	19.937328	13.595420
	q_0	631.606628	672.719421	579.770996
	q_2	705.789551	830.414124	1240.458008
	G	1337.396240	1503.133545	1820.229004
	π_0	12116.625977	10930.390625	8331.194336
	π_2	12040.016602	10981.812500	6416.529297
$\beta = 0.20$	ω_0	1.0	0.49980	0.0
	ω_2	1.0	0.58325	0.0
	p	22.934513	19.712687	13.595420
	q_0	658.690308	691.428467	579.770996
	q_2	694.584106	822.937134	1240.458008
	G	1353.274414	1514.365601	1820.229004
	π_0	13113.334961	12052.929688	9987.811523
	π_2	11660.745117	10723.725586	6416.529297
$\beta = 0.25$	ω_0	1.0	0.49870	0.0
	ω_2	1.0	0.57870	0.0
	p	22.609318	19.486879	13.595420
	q_0	686.424683	710.318787	579.770996
	q_2	683.109314	815.337402	1240.458008
	G	1369.533936	1525.656250	1820.229004
	π_0	14124.014648	13194.797852	11644.427734
	π_2	11278.648438	10466.422852	6416.529297

Tabla 2

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.30$	ω_0	1.0	0.49755	0.0
	ω_2	1.0	0.57410	0.0
	p	22.276215	19.258823	13.595420
	q_0	714.833801	729.436218	579.770996
	q_2	671.355469	807.622681	1240.458008
	G	1386.189209	1537.058838	1820.229004
	π_0	15148.811523	14356.088867	13301.045898
	π_2	10893.858398	10209.187500	6416.529297
$\beta = 0.35$	ω_0	1.0	0.49640	0.0
	ω_2	1.0	0.56940	0.0
	p	21.934910	19.028534	13.595420
	q_0	743.942322	748.781677	579.770996
	q_2	659.312256	799.791504	1240.458008
	G	1403.254639	1548.573242	1820.229004
	π_0	16187.853516	15537.192383	14957.663086
	π_2	10506.521484	9952.127930	6416.529297
$\beta = 0.40$	ω_0	1.0	0.49520	0.0
	ω_2	1.0	0.56465	0.0
	p	21.585094	18.796032	13.595420
	q_0	773.776428	768.355835	579.770996
	q_2	646.964750	791.842590	1240.458008
	G	1420.745117	1560.198486	1820.229004
	π_0	17241.253906	16738.500000	16614.279297
	π_2	10116.801758	9695.359375	6416.529297
$\beta = 0.45$	ω_0	1.0	0.49400	0.0
	ω_2	1.0	0.55975	0.0
	p	21.226450	18.561337	13.595420
	q_0	804.363708	788.158936	579.770996
	q_2	634.313721	783.774353	1240.458008
	G	1438.677490	1571.933350	1820.229004
	π_0	18309.119141	17960.404297	18270.896484
	π_2	9724.893555	9438.992188	6416.529297
$\beta = 0.50$	ω_0	1.0	0.49275	0.0
	ω_2	1.0	0.55480	0.0
	p	20.858637	18.324474	13.595420
	q_0	835.733032	808.190979	579.770996
	q_2	621.335083	775.585388	1240.458008
	G	1457.068115	1583.776367	1820.229004
	π_0	19391.527344	19203.304688	19927.513672
	π_2	9331.004883	9183.150391	6416.529297

Tabla 2

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.55$	ω_0	1.0	0.49145	0.0
	ω_2	1.0	0.54975	0.0
	p	20.481298	18.085476	13.595420
	q_0	867.914673	828.451721	579.770996
	q_2	608.020447	767.274414	1240.458008
	G	1475.935059	1595.726074	1820.229004
	π_0	20488.546875	20467.601563	21584.130859
	π_2	8935.378906	8927.959961	6416.529297
$\beta = 0.60$	ω_0	1.0	0.49015	0.0
	ω_2	1.0	0.54460	0.0
	p	20.094059	17.844379	13.595420
	q_0	900.940674	848.940613	579.770996
	q_2	594.356384	758.840332	1240.458008
	G	1495.297119	1607.781006	1820.229004
	π_0	21600.214844	21753.697266	23240.748047
	π_2	8538.282227	8673.556641	6416.529297
$\beta = 0.65$	ω_0	1.0	0.48865	0.0
	ω_2	1.0	0.53910	0.0
	p	19.696526	17.599619	13.595420
	q_0	934.844666	869.604187	579.770996
	q_2	580.329041	750.414917	1240.458008
	G	1515.173706	1620.019043	1820.229004
	π_0	22726.542969	23062.382813	24897.365234
	π_2	8140.016113	8419.947266	6416.529297
$\beta = 0.70$	ω_0	1.0	0.48730	0.0
	ω_2	1.0	0.53385	0.0
	p	19.288280	17.354864	13.595420
	q_0	969.662231	890.555664	579.770996
	q_2	565.923828	741.701050	1240.458008
	G	1535.586060	1632.256714	1820.229004
	π_0	23867.517578	24393.306641	26553.982422
	π_2	7740.919922	8167.590332	6416.529297
$\beta = 0.75$	ω_0	1.0	0.48590	0.0
	ω_2	1.0	0.52850	0.0
	p	18.868885	17.108099	13.595420
	q_0	1005.430603	911.731628	579.770996
	q_2	551.125122	732.863464	1240.458008
	G	1556.555664	1644.595093	1820.229004
	π_0	25023.082031	25747.185547	28210.599609
	π_2	7341.368652	7916.434082	6416.529297

Tabla 2

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.80$	ω_0	1.0	0.48450	0.0
	ω_2	1.0	0.52300	0.0
	p	18.437878	16.859377	13.595420
	q_0	1042.189575	933.129150	579.770996
	q_2	535.916626	723.901917	1240.458008
	G	1578.106201	1657.031006	1820.229004
	π_0	26193.148438	27124.439453	29867.216797
	π_2	6941.784668	7666.632324	6416.529297
$\beta = 0.85$	ω_0	1.0	0.48300	0.0
	ω_2	1.0	0.51740	0.0
	p	17.994768	16.608765	13.595420
	q_0	1079.980591	954.745117	579.770996
	q_2	520.581189	714.816650	1240.458008
	G	1600.261719	1669.561768	1820.229004
	π_0	27377.578125	28525.478516	31523.833984
	π_2	6542.637695	7418.352539	6416.529297
$\beta = 0.90$	ω_0	1.0	0.48150	0.0
	ω_2	1.0	0.51175	0.0
	p	17.539038	16.356333	13.595420
	q_0	1118.847656	976.575562	579.770996
	q_2	504.200348	705.607971	1240.458008
	G	1623.047974	1682.183594	1820.229004
	π_0	28576.185547	29950.718750	33180.453125
	π_2	6144.448730	7171.762207	6416.529297
$\beta = 0.95$	ω_0	1.0	0.47995	0.0
	ω_2	1.0	0.50590	0.0
	p	17.070143	16.102160	13.595420
	q_0	1158.837769	998.615601	579.770996
	q_2	487.654999	696.276367	1240.458008
	G	1646.492798	1694.891968	1820.229004
	π_0	29788.724609	31400.570313	34837.070313
	π_2	5747.804688	6927.035645	6416.529297
$\beta = 1.0$	ω_0	1.0	0.47835	0.0
	ω_2	1.0	0.50000	0.0
	p	16.587503	15.846337	13.595420
	q_0	1200.000122	1020.859924	579.770996
	q_2	470.624695	686.823181	1240.458008
	G	1670.624756	1707.683105	1820.229004
	π_0	31014.878906	32875.441406	36493.683594
	π_2	5353.354980	6684.358887	6416.529297

Tabla 3

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.05$	ω_0	1.0	0.5976	0.0
	ω_2	1.0	0.6105	0.0
	p	25.236515	22.581360	17.181818
	q_0	611.867249	669.774109	759.090942
	q_2	626.307068	701.157898	881.818176
	G	1238.174316	1370.932007	1640.909180
	π_0	11240.384766	10238.616211	7108.481445
	π_2	11277.490234	10304.376953	6804.028809
$\beta = 0.10$	ω_0	1.0	0.59685	0.0
	ω_2	1.0	0.60580	0.0
	p	24.924370	22.332933	17.181818
	q_0	635.798340	688.364746	759.090942
	q_2	617.983215	694.988586	881.818176
	G	1253.781494	1383.353271	1640.909180
	π_0	12104.848633	11171.680664	8454.772461
	π_2	10979.717773	10078.574219	6804.028809
$\beta = 0.15$	ω_0	1.0	0.59605	0.0
	ω_2	1.0	0.60100	0.0
	p	24.604256	22.080667	17.181818
	q_0	660.340454	707.267517	759.090942
	q_2	609.446838	688.699036	881.818176
	G	1269.787354	1395.966553	1640.909180
	π_0	12984.548828	12123.214844	9801.064453
	π_2	10678.481445	9851.530273	6804.028809
$\beta = 0.20$	ω_0	1.0	0.59525	0.0
	ω_2	1.0	0.59610	0.0
	p	24.275862	21.824505	17.181818
	q_0	685.517273	726.488342	759.090942
	q_2	600.689636	682.286316	881.818176
	G	1286.206909	1408.774658	1640.909180
	π_0	13879.805664	13093.710938	11147.355469
	π_2	10373.805541	9623.306641	6804.028809
$\beta = 0.25$	ω_0	1.0	0.59445	0.0
	ω_2	1.0	0.59110	0.0
	p	23.938864	21.564388	17.181818
	q_0	711.353699	746.033264	759.090942
	q_2	591.703064	675.747375	881.818176
	G	1303.056763	1421.780640	1640.909180
	π_0	14790.943359	14083.678711	12493.647461
	π_2	10065.734375	9393.968750	6804.028809

Tabla 3

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.30$	ω_0	1.0	0.59360	0.0
	ω_2	1.0	0.58600	0.0
	p	23.592920	21.300257	17.181818
	q_0	737.876099	765.908203	759.090942
	q_2	582.477905	669.078857	881.818176
	G	1320.354004	1434.987061	1640.909180
	π_0	15718.292969	15093.635742	13839.938477
	π_2	9754.314453	9163.581055	6804.028809
$\beta = 0.35$	ω_0	1.0	0.59275	0.0
	ω_2	1.0	0.58075	0.0
	p	23.237667	21.032061	17.181818
	q_0	765.112122	786.119385	759.090942
	q_2	573.004456	662.277649	881.818176
	G	1338.116577	1448.396973	1640.909180
	π_0	16662.177734	16124.123047	15186.230469
	π_2	9439.605469	8932.225586	6804.028809
$\beta = 0.40$	ω_0	1.0	0.59185	0.0
	ω_2	1.0	0.57535	0.0
	p	22.872726	20.759743	17.181818
	q_0	793.090942	806.672607	759.090942
	q_2	563.272705	655.340332	881.818176
	G	1356.363647	1462.012939	1640.909180
	π_0	17622.927734	17175.691406	16532.521484
	π_2	9121.689453	8699.980469	6804.028809
$\beta = 0.45$	ω_0	1.0	0.59095	0.0
	ω_2	1.0	0.56990	0.0
	p	22.497696	20.483252	17.181818
	q_0	821.843384	827.573914	759.090942
	q_2	553.271912	648.263550	881.818176
	G	1375.115234	1475.837402	1640.909180
	π_0	18600.869141	18248.904297	17878.814453
	π_2	8800.656250	8466.934570	6804.028809
$\beta = 0.50$	ω_0	1.0	0.59000	0.0
	ω_2	1.0	0.56425	0.0
	p	22.112148	20.202539	17.181818
	q_0	851.401917	848.829346	759.090942
	q_2	542.990601	641.043823	881.818176
	G	1394.392578	1489.873169	1640.909180
	π_0	19596.324219	19344.347656	19225.105469
	π_2	8476.324219	8233.186523	6804.028809

Tabla 3

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.55$	ω_0	1.0	0.58905	0.0
	ω_2	1.0	0.55850	0.0
	p	21.715639	19.917557	17.181818
	q_0	881.801025	870.444519	759.090942
	q_2	532.417053	633.677490	881.818176
	G	1414.218018	1504.122070	1640.909180
	π_0	20609.611328	20462.613281	20571.396484
	π_2	8149.702637	7998.833984	6804.028809
$\beta = 0.60$	ω_0	1.0	0.58805	0.0
	ω_2	1.0	0.55260	0.0
	p	21.307692	19.628265	17.181818
	q_0	913.076965	892.425537	759.090942
	q_2	521.538452	626.161255	881.818176
	G	1434.615479	1518.586792	1640.909180
	π_0	21641.044922	21604.316406	21917.689453
	π_2	7820.067383	7763.995117	6804.028809
$\beta = 0.65$	ω_0	1.0	0.58695	0.0
	ω_2	1.0	0.54645	0.0
	p	20.887804	19.334238	17.181818
	q_0	945.268372	914.766052	759.090942
	q_2	510.341431	618.521973	881.818176
	G	1455.609863	1533.288086	1640.909180
	π_0	22690.923828	22770.126953	23263.980469
	π_2	7487.891113	7528.754883	6804.028809
$\beta = 0.70$	ω_0	1.0	0.58590	0.0
	ω_2	1.0	0.54030	0.0
	p	20.455444	19.036318	17.181818
	q_0	978.415894	937.495850	759.090942
	q_2	498.811859	610.688232	881.818176
	G	1477.227783	1548.184082	1640.909180
	π_0	23759.539063	23960.613281	24610.271484
	π_2	7153.381348	7293.324707	6804.028809
$\beta = 0.75$	ω_0	1.0	0.58485	0.0
	ω_2	1.0	0.53400	0.0
	p	20.010050	18.733961	17.181818
	q_0	1012.562927	960.608276	759.090942
	q_2	486.934662	602.693542	881.818176
	G	1499.497559	1563.301758	1640.909180
	π_0	24847.169922	25176.449219	25956.564453
	π_2	6816.779297	7057.777832	6804.028809

Tabla 3

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.80$	ω_0	1.0	0.58375	0.0
	ω_2	1.0	0.52755	0.0
	p	19.551020	18.427143	17.181818
	q_0	1047.755249	984.108337	759.090942
	q_2	474.693848	594.534424	881.818176
	G	1522.449097	1578.642822	1640.909180
	π_0	25954.074219	26418.306641	27302.855469
	π_2	6478.359863	6822.262695	6804.028809
$\beta = 0.85$	ω_0	1.0	0.58260	0.0
	ω_2	1.0	0.52090	0.0
	p	19.077719	18.115847	17.181818
	q_0	1084.041626	1008.000488	759.090942
	q_2	462.072510	586.207275	881.818176
	G	1546.114136	1594.207764	1640.909180
	π_0	27080.482422	27686.869141	28649.148438
	π_2	6138.441406	6586.937500	6804.028809
$\beta = 0.90$	ω_0	1.0	0.58145	0.0
	ω_2	1.0	0.51410	0.0
	p	18.589472	17.800058	17.181818
	q_0	1121.473755	1032.288574	759.090942
	q_2	449.052582	577.708496	881.818176
	G	1570.526367	1609.997070	1640.909180
	π_0	28226.607422	28982.841797	29995.439453
	π_2	5797.386230	6351.967773	6804.028809
$\beta = 0.95$	ω_0	1.0	0.58020	0.0
	ω_2	1.0	0.50715	0.0
	p	18.085560	17.479778	17.181818
	q_0	1160.107056	1056.976440	759.090942
	q_2	435.614929	569.034668	881.818176
	G	1595.721924	1626.011108	1640.909180
	π_0	29392.613281	30306.937500	31341.730469
	π_2	5455.610352	6117.535156	6804.028809
$\beta = 1.0$	ω_0	1.0	0.57895	0.0
	ω_2	1.0	0.50000	0.0
	p	17.565216	17.155014	17.181818
	q_0	1200.000122	1082.066895	759.090942
	q_2	421.739105	560.182312	881.818176
	G	1621.739258	1642.249268	1640.909180
	π_0	30578.642578	31659.882813	32688.021484
	π_2	5113.585938	5883.829590	6804.028809

Tabla 4

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.05$	ω_0	1.0	0.57730	0.0
	ω_2	1.0	0.49115	0.0
	p	23.352148	19.603029	13.167710
	q_0	756.335266	866.452209	1189.173828
	q_2	576.057312	653.396240	652.440613
	G	1332.392578	1519.848389	1841.614502
	π_0	13706.178711	12193.504883	7592.712891
	π_2	9540.458008	7929.494141	3724.688721
$\beta = 0.10$	ω_0	1.0	0.57590	0.0
	ω_2	1.0	0.48325	0.0
	p	22.918531	19.237989	13.167710
	q_0	789.579346	894.331604	1189.173828
	q_2	564.494202	643.768982	652.440613
	G	1354.073486	1538.100586	1841.614502
	π_0	14763.654297	13329.030273	9288.485352
	π_2	9161.292969	7631.888184	3724.688721
$\beta = 0.15$	ω_0	1.0	0.57445	0.0
	ω_2	1.0	0.47510	0.0
	p	22.470568	18.865875	13.167710
	q_0	823.923157	922.834656	1189.173828
	q_2	552.548462	633.871582	652.440613
	G	1376.471680	1556.706299	1841.614502
	π_0	15847.480469	14494.601563	10984.256836
	π_2	8777.657227	7333.576660	3724.688721
$\beta = 0.20$	ω_0	1.0	0.57290	0.0
	ω_2	1.0	0.46675	0.0
	p	22.007536	18.486591	13.167710
	q_0	859.422363	951.976013	1189.173828
	q_2	540.200989	623.694336	652.440613
	G	1399.623291	1575.670410	1841.614502
	π_0	16958.544922	15691.247070	12680.029297
	π_2	8389.741211	7034.814453	3724.688721
$\beta = 0.25$	ω_0	1.0	0.57135	0.0
	ω_2	1.0	0.45810	0.0
	p	21.528660	18.100050	13.167710
	q_0	896.135986	981.770264	1189.173828
	q_2	527.430908	613.227173	652.440613
	G	1423.566895	1594.997437	1841.614502
	π_0	18097.763672	16920.029297	14375.800781
	π_2	7997.771973	6735.878906	3724.688721

Tabla 4

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.30$	ω_0	1.0	0.56970	0.0
	ω_2	1.0	0.44925	0.0
	p	21.033115	17.706175	13.167710
	q_0	934.127747	1012.231628	1189.173828
	q_2	514.216431	602.459534	652.440613
	G	1448.344238	1614.691162	1841.614502
	π_0	19266.085938	18182.044922	16071.573242
	π_2	7602.032715	6437.071777	3724.688721
$\beta = 0.35$	ω_0	1.0	0.56800	0.0
	ω_2	1.0	0.44015	0.0
	p	20.520016	17.304901	13.167710
	q_0	973.465454	1043.374146	1189.173828
	q_2	500.533752	591.380737	652.440613
	G	1473.999268	1634.754883	1841.614502
	π_0	20464.484375	19478.417969	17767.345703
	π_2	7202.853516	6138.721191	3724.688721
$\beta = 0.40$	ω_0	1.0	0.56625	0.0
	ω_2	1.0	0.43075	0.0
	p	19.988411	16.896181	13.167710
	q_0	1014.221863	1075.211426	1189.173828
	q_2	486.357635	579.979675	652.440613
	G	1500.579468	1655.191162	1841.614502
	π_0	21693.962891	20810.306641	19463.117188
	π_2	6800.632813	5841.183594	3724.688721
$\beta = 0.45$	ω_0	1.0	0.56435	0.0
	ω_2	1.0	0.42095	0.0
	p	19.437281	16.479219	13.167710
	q_0	1056.475098	1107.760742	1189.173828
	q_2	471.660828	568.278259	652.440613
	G	1528.135986	1676.039063	1841.614502
	π_0	22955.556641	22178.644531	21158.890625
	π_2	6395.837891	5544.568359	3724.688721
$\beta = 0.50$	ω_0	1.0	0.56250	0.0
	ω_2	1.0	0.41105	0.0
	p	18.865530	16.055681	13.167710
	q_0	1100.309326	1141.023315	1189.173828
	q_2	456.414124	556.192444	652.440613
	G	1556.723389	1697.215820	1841.614502
	π_0	24250.316406	23585.226563	22854.662109
	π_2	5989.023438	5249.898926	3724.688721

Tabla 4

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.55$	ω_0	1.0	0.56055	0.0
	ω_2	1.0	0.40085	0.0
	p	18.271980	15.624649	13.167710
	q_0	1145.814941	1175.017334	1189.173828
	q_2	440.586151	543.750122	652.440613
	G	1586.401123	1718.767456	1841.614502
	π_0	25579.326172	2503.943359	24550.435547
	π_2	5580.839355	4957.280273	3724.688721
$\beta = 0.60$	ω_0	1.0	0.55850	0.0
	ω_2	1.0	0.39030	0.0
	p	17.655359	15.186154	13.167710
	q_0	1193.089111	1209.753052	1189.173828
	q_2	424.142914	530.939270	652.440613
	G	1617.232056	1740.692383	1841.614502
	π_0	26943.681641	26517.054688	26246.207031
	π_2	5172.044922	4667.187500	3724.688721
$\beta = 0.65$	ω_0	1.0	0.55640	0.0
	ω_2	1.0	0.37950	0.0
	p	17.014296	14.740260	13.167710
	q_0	1242.237305	1245.239380	1189.173828
	q_2	407.047882	517.747620	652.440613
	G	1649.285156	1762.987061	1841.614502
	π_0	28344.494141	28044.837891	27941.980469
	π_2	4763.529297	4380.128418	3724.688721
$\beta = 0.70$	ω_0	1.0	0.55420	0.0
	ω_2	1.0	0.36835	0.0
	p	16.347307	14.287062	13.167710
	q_0	1293.373169	1281.483887	1189.173828
	q_2	389.261536	504.163025	652.440613
	G	1682.634766	1785.646973	1841.614502
	π_0	29782.888672	29615.587891	29637.751953
	π_2	4356.330566	4096.645020	3724.688721
$\beta = 0.75$	ω_0	1.0	0.55190	0.0
	ω_2	1.0	0.35690	0.0
	p	15.652787	13.826693	13.167710
	q_0	1346.619629	1318.492188	1189.173828
	q_2	370.740997	490.173065	652.440613
	G	1717.360596	1808.665283	1841.614502
	π_0	31259.984375	31230.599609	31333.525391
	π_2	3951.655518	3817.310059	3724.688721

Tabla 4

		$\omega_i = -G'(p)\nu_i$		
		Cournot	**CCVE**	**CP**
$\beta = 0.80$	ω_0	1.0	0.54955	0.0
	ω_2	1.0	0.34505	0.0
	p	14.928997	13.359329	13.167710
	q_0	1402.110229	1356.268066	1189.173828
	q_2	351.439911	475.765594	652.440613
	G	1753.550171	1832.033691	1841.614502
	π_0	32776.894531	32891.179688	33029.296875
	π_2	3550.912842	3542.734450	3724.688721
$\beta = 0.85$	ω_0	1.0	0.54695	0.0
	ω_2	1.0	0.33285	0.0
	p	14.174046	12.885129	13.167710
	q_0	1459.989868	1394.792358	1189.173828
	q_2	331.307892	460.951324	652.440613
	G	1791.297729	1855.743652	1841.614502
	π_0	34334.707031	34598.664063	34725.070313
	π_2	3155.741211	3273.586426	3724.688721
$\beta = 0.90$	ω_0	1.0	0.54445	0.0
	ω_2	1.0	0.32035	0.0
	p	13.385877	12.404556	13.167710
	q_0	1520.416138	1434.110474	1189.173828
	q_2	310.290039	445.661743	652.440613
	G	1830.706177	1879.772217	1841.614502
	π_0	35934.476563	36354.214844	36420.843750
	π_2	2768.047363	3010.452148	3724.688721
$\beta = 0.95$	ω_0	1.0	0.54180	0.0
	ω_2	1.0	0.30750	0.0
	p	12.562248	11.917760	13.167710
	q_0	1583.561035	1474.190430	1189.173828
	q_2	288.326630	429.921478	652.440613
	G	1871.887695	1904.111938	1841.614502
	π_0	37577.203125	38159.140625	38116.613281
	π_2	2390.052002	2754.054199	3724.688721
$\beta = 1.0$	ω_0	1.0	0.53900	0.0
	ω_2	1.0	0.29430	0.0
	p	11.700713	11.425176	13.167710
	q_0	1649.612061	1515.018799	1189.173828
	q_2	265.352356	413.722351	652.440613
	G	1914.964355	1928.741211	1841.614502
	π_0	39263.800781	40014.652344	39812.386719
	π_2	2024.341309	2505.132324	3724.688721

perfecta, lo anterior ha sido demostrado en esta tesis para el caso particular de un duopolio mixto. Además, se formuló un criterio óptimo de selección para el grado de socialización del productor público y se desmostó su existencia para el caso particular de la demanda como función lineal.

Este criterio de selección para el grado de socialización óptimo está enfocado a la política de subsidios, sin embargo, no es la única manera de escoger este parámetro, un criterio diferente podría conducir a un valor óptimo diferente pero propusimos este criterio por su importancia en la industria eléctrica.

Se planea extender los resultados obtenidos en este trabajo para el caso general de un oligopolio mixto. Además, los resultados de este trabajo son nuevos, por lo que también se planea su aplicación en la vida real.

6. Demostraciones

Demostración del Teorema 1:

Sea (ν_0, ν_1), utilizando las ecuaciones de optimalidad de un equilibrio exterior (9) y (11), definimos las funciones de los volúmenes de producción de cada productor $q_i = q_i(p; \nu_0, \nu_1)$, $i = 0, 1$, en el intervalo $[p_0, +\infty)$. Estas funciones son diferenciables respecto a p y ν_i, $i = 0, 1$, y están dadas de la siguiente manera:

$$q_0 = \frac{p - b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\beta\nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{p - b_1}{\nu_1 + a_1}\right), \tag{31}$$

$$q_1 = \frac{p - b_1}{\nu_1 + a_1}. \tag{32}$$

Ahora introduciremos la función

$$\begin{aligned}
Q(p;\nu_0,\nu_1) =& q_0(p;\nu_0,\nu_1) + q_1(p;\nu_0,\nu_1) \\
=& \frac{p - b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\beta\nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{p - b_1}{\nu_1 + a_1}\right) + \frac{p - b_1}{\nu_1 + a_1} \\
=& p\left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\beta\nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{1}{\nu_1 + a_1}\right) + \frac{1}{\nu_1 + a_1}\right] \\
& - \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\beta\nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{b_1}{\nu_1 + a_1}\right) + \frac{b_1}{\nu_1 + a_1}\right] \\
=& p\left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \left(\frac{\beta\nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + 1\right)\left(\frac{1}{\nu_1 + a_1}\right)\right] \\
& - \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \left(\frac{\beta\nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + 1\right)\left(\frac{b_1}{\nu_1 + a_1}\right)\right] \\
=& p\left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\beta\nu_0 + (1-\beta)\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{1}{\nu_1 + a_1}\right)\right] \\
& - \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\beta\nu_0 + (1-\beta)\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{b_1}{\nu_1 + a_1}\right)\right] \\
=& p\left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{1}{\nu_1 + a_1}\right)\right] \\
& - \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\left(\frac{b_1}{\nu_1 + a_1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{33}$$

Como (33) es una función lineal de p con pendiente positiva, entonces, $Q(p; \nu_0, \nu_1)$ es estrictamente creciente respecto a p, y tiende a $+\infty$ cuando $p \to +\infty$. Luego, por la suposición **A3** tenemos que para cualquier $\nu_i \geq 0$, $i = 0, 1$,

$$
\begin{aligned}
Q(p_0; \nu_0, \nu_1) =& q_0(p_0; \nu_0, \nu_1) + q_1(p_0; \nu_0, \nu_1) \\
=& \frac{p_0 - b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} \leq \frac{p_0 - b_0}{a_0} < G(p_0) \leq G(p_0) + D.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Entonces, dado que $Q(p; \nu_0, \nu_1)$ es estrictamente creciente respecto a p, $G(p)$ es no creciente respecto a p con D constante, y la desigualdad (34), tenemos que existe único valor $p^* > p_0$ tal que

$$
Q(p^*; \nu_0, \nu_1) = G(p^*) + D. \tag{35}
$$

Para este valor p^*, y utilizando las formulas (31) y (32), calculamos los únicos volúmenes de producción $q_i^* = q_i(p^*; \nu_0, \nu_1)$, $i = 0, 1$. Entonces, el equilibrio exterior (p^*, q_0^*, q_1^*) existe y es único para cualesquiera $D \geq 0$ y $\nu_i \geq 0$, $i = 0, 1$.

Ahora demostramos que el precio p^* del equilibrio exterior es diferenciable respecto a los parámetros (D, ν_0, ν_1). De (35) obtenemos la siguiente relación:

$$
Q(p^*; \nu_0, \nu_1) - G(p^*) - D = 0. \tag{36}
$$

Ahora introduciremos la función

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p^*; D, \nu_0, \nu_1) =& Q(p^*; \nu_0, \nu_1) - G(p^*) - D \\
=& p^* \left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} \left(\frac{1}{\nu_1 + a_1} \right) \right] \\
& - \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} \left(\frac{b_1}{\nu_1 + a_1} \right) \right] \\
& - G(p^*) - D.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Luego, reescribir la igualdad (36) como una ecuación funcional

$$
\Gamma(p^*; D, \nu_0, \nu_1) = 0 \tag{38}
$$

y vamos a analizar el comportamiento de su derivada parcial con respecto a p^*:

$$
\frac{\partial \Gamma}{\partial p^*} = \frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} \left(\frac{1}{\nu_1 + a_1} \right) - G'(p^*) \geq \frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} > 0. \tag{39}
$$

De (39) observamos que la derivada parcial de Γ respecto a p^* siempre es positiva, dada esta condición, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita para concluir que el precio p^* considerado como función $p^* = p^*(D, \nu_0, \nu_1)$ es diferenciable con respecto a los parámetros D y ν_i, $i = 0, 1$, más aun, la derivada parcial del precio p^* con respecto a D puede ser encontrada de la ecuación

$$
\frac{\partial \Gamma}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial D} + \frac{\partial \Gamma}{\partial D} = 0 \tag{40}
$$

lo que lleva a

$$
\frac{\partial p^*}{\partial D} = -\frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial D}}{\frac{\partial \Gamma}{\partial p^*}} = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} \left(\frac{1}{\nu_1 + a_1} \right) - G'(p^*)}. \tag{41}
$$

Finalmente, dado que la función p^* depende de (D, ν_0, ν_1) y es diferenciable con respecto a D y ν_i, $i = 0, 1$, se sigue que las funciones q_i^*, $i = 0, 1$, depende de (D, ν_0, ν_1) y son diferenciables con respecto a D y ν_i, $i = 0, 1$. Entonces, el equilibrio (p^*, q_0^*, q_1^*) depende continuamente de los parámetros (D, ν_0, ν_1) y el teorema queda demostrado■

Demostración del Teorema 3:

Las variables ν_i, $i=0,1$, dadas por (17) y (18) están bien definidas sobre el dominio correspondiente ($\nu_i \geq 0, a_i > 0$, $i=0,1$, $\beta \in (0,1]$ y $\tau \in (-\infty, 0]$).

Sustituyendo (18) en (17) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\nu_0 =& \frac{1}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} - \tau}\right) + a_1} - \tau} \\
=& \frac{1}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{(1-\beta)\nu_0 + a_0}{1 - [(1-\beta)\nu_0 + a_0]\,\tau}\right) + a_1} - \tau} \\
=& \frac{1}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{(1-\beta)\nu_0 + a_0}{-(1-\beta)\tau\nu_0 + (1 - a_0\tau)}\right) + a_1} - \tau} \\
=& \frac{1}{\dfrac{-(1-\beta)\tau\nu_0 + (1-a_0\tau)}{(1-\beta)\nu_0 + a_0 + a_1\left[-(1-\beta)\tau\nu_0 + (1-a_0\tau)\right]} - \tau} \\
=& \frac{1}{\dfrac{-(1-\beta)\tau\nu_0 + (1-a_0\tau)}{(1-\beta)\left(1-a_1\tau\right)\nu_0 + \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right)} - \tau} \\
=& \frac{(1-\beta)\left(1-a_1\tau\right)\nu_0 + \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right)}{-(1-\beta)\tau\nu_0 + (1-a_0\tau) - \left[(1-\beta)\left(1-a_1\tau\right)\nu_0 + \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right)\right]\tau} \\
=& \frac{(1-\beta)\left(1-a_1\tau\right)\nu_0 + \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right)}{(1-\beta)\left(-2\tau + a_1\tau^2\right)\nu_0 + \left(1 - 2a_0\tau - a_1\tau + a_0a_1\tau^2\right)}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Luego, multiplicando (42) por el termino $\left[(1-\beta)\left(-2\tau + a_1\tau^2\right)\nu_0 + \left(1 - 2a_0\tau - a_1\tau + a_0a_1\tau^2\right)\right]$ obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}
&\left[(1-\beta)\left(-2\tau + a_1\tau^2\right)\nu_0 + \left(1 - 2a_0\tau - a_1\tau + a_0a_1\tau^2\right)\right]\nu_0 \\
&\qquad = (1-\beta)\left(1-a_1\tau\right)\nu_0 + \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right)
\end{aligned} \tag{43}$$

y moviendo todos los términos de (43) al lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left[(1-\beta)\left(-2\tau + a_1\tau^2\right)\nu_0 + \left(1 - 2a_0\tau - a_1\tau + a_0a_1\tau^2\right)\right]\nu_0 \\
&\qquad -(1-\beta)\left(1-a_1\tau\right)\nu_0 - \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right) = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Ahora, agrupando los terminos de (44) obetemos la siguiente ecuación cuadrática para ν_0:

$$(1-\beta)\left(-2\tau + a_1\tau^2\right)\nu_0^2 + \left(\beta - 2a_0\tau - \beta a_1\tau + a_0a_1\tau^2\right)\nu_0 - \left(a_0 + a_1 - a_0a_1\tau\right) = 0. \tag{45}$$

Antes de continuar y con el fin de simplificar la notación, vamos a reescribir (45) de la siguiente manera:

$$A\nu_0^2 + B\nu_0 - C = 0 \tag{46}$$

donde

$$A = A(\tau) = (1-\beta)\left(-2\tau + a_1\tau^2\right) \geq 0, \tag{47}$$

$$B = B(\tau) = \beta - 2a_0\tau - \beta a_1\tau + a_0a_1\tau^2 > 0, \tag{48}$$

$$C = C(\tau) = a_0 + a_1 - a_0 a_1 \tau > 0. \tag{49}$$

Si $\tau = 0$ ó $\beta = 1$, entonces, $A = 0$ y (46) es lineal, por lo que tiene la solución única para ν_0 que está dada por:

$$\nu_0(\tau) = \frac{C}{B} = \begin{cases} \dfrac{a_0 + a_1}{\beta} & \text{si } \tau = 0 \\ \dfrac{a_0 + a_1 - a_0 a_1 \tau}{1 - 2a_0\tau - a_1\tau + a_0 a_1 \tau^2} & \text{si } \beta = 1 \end{cases}. \tag{50}$$

Si $\beta \in (0,1)$ y $\tau < 0$, entonces, $A \neq 0$ y podemos hallar las dos raíces de (46), las cuales son:

$$\nu_0(\tau) = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}, \tag{51}$$

$$\nu_0(\tau) = \frac{-B - \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}. \tag{52}$$

Sin embargo, dado que $\nu_0 \geq 0$, tenemos que (52) no es posible, dejando así a (51) como solución única para (46).

Pero las formulas (50) y (51) pueden escribirse como una sola fórmula para todo $\beta \in (0,1]$ y $\tau \in (-\infty, 0]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nu_0(\tau) =& \nu_0 = \frac{2C}{B + \sqrt{B^2 + 4AC}} \\ =& \frac{2(a_0 + a_1 - a_0 a_1 \tau)}{(\beta - 2a_0\tau - \beta a_1 \tau + a_0 a_1 \tau^2) + \sqrt{(\beta - 2a_0\tau - \beta a_1\tau + a_0 a_1 \tau^2)^2 + 4(1-\beta)(-2\tau + a_1\tau^2)(a_0 + a_1 - a_0 a_1 \tau)}}, \end{aligned} \tag{53}$$

donde es evidente que

$$B + \sqrt{B^2 + 4AC} > 0, \tag{54}$$

y esta es la solución única para ν_0.

Observamos que la solución (53) para cada parámetro $\beta \in (0,1]$ cumple que $\nu_0 \to 0$ si $\tau \to -\infty$, entonces, existe una constante positiva $\overline{\nu_0}(\beta)$ tal que $\nu_0(\tau) \leq \overline{\nu_0}(\beta)$ para todo $\tau \leq 0$.

Luego, de (18) y (53), se tiene que ν_1 también tiene solución única y está dada por

$$\nu_1(\tau) = \nu_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0(\tau) + a_0} - \tau} \tag{55}$$

e igualmente observamos que para cada parámetro $\beta \in (0,1]$ se cumple que $\nu_1 \to 0$ si $\tau \to -\infty$ y también $\nu_1(\tau) \leq a_0 + (1-\beta)\overline{\nu_0}(\beta)$ para todo $\tau \leq 0$.

Ahora, es fácil ver que las funciones (47)-(49) son continuamente diferenciables respecto a τ, $\tau \in (-\infty, 0]$ y

$$A' = (1-\beta)(-2 + 2a_1\tau) \leq 0, \tag{56}$$

$$B' = -2a_0 - \beta a_1 + 2a_0 a_1 \tau < 0, \tag{57}$$

$$C' = -a_0 a_1 < 0. \tag{58}$$

Entonces, de (53), tenemos que $\nu_0(\tau)$ también es continuamente diferenciable y

$$\begin{aligned}
\nu_0' =& \frac{2C'\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)-2C\left(B'+\dfrac{2BB'+4A'C+4AC'}{2\sqrt{B^2+4AC}}\right)}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2} \\
=& \frac{2C'\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)\sqrt{B^2+4AC}-2C\left(B'\sqrt{B^2+4AC}+\dfrac{2BB'+4A'C+4AC'}{2}\right)}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}} \\
=& \frac{2C'\left(B\sqrt{B^2+4AC}+B^2+4AC\right)-2C\left(B'\sqrt{B^2+4AC}+BB'+2A'C+2AC'\right)}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}} \\
=& \frac{2C'B\sqrt{B^2+4AC}+2C'B^2+4ACC'-2CB'\sqrt{B^2+4AC}-2CBB'-4A'C^2}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}} \\
=& \frac{2\left(C'B-CB'\right)\sqrt{B^2+4AC}+2\left(C'B-CB'\right)B+4\left(AC'-A'C\right)C}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}} \\
=& \frac{2\left(C'B-CB'\right)\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)+4\left(AC'-A'C\right)C}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}}. \qquad (59)
\end{aligned}$$

Ahora, vamos a analizar el valor de (59) para saber el comportamiento de $\nu_0(\tau)$.

Dados (47)-(49), es fácil ver que el denominador de (59)

$$\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}>0. \qquad (60)$$

Luego, sustituyendo (47)-(49) y (56)-(58) en (59), obtenemos que los términos del numerador

$$\begin{aligned}
C'B-CB' =& \left(-a_0a_1\right)\left(\beta-2a_0\tau-\beta a_1\tau+a_0a_1\tau^2\right) \\
&-\left(a_0+a_1-a_0a_1\tau\right)\left(-2a_0-\beta a_1+2a_0a_1\tau\right) \\
=& \left(-a_0a_1\right)\left(\beta-a_0a_1\tau^2\right)+\left(-a_0a_1\right)\left(-2a_0\tau-\beta a_1\tau+2a_0a_1\tau^2\right) \\
&-\left[\left(a_0+a_1\right)\left(-2a_0-\beta a_1+2a_0a_1\tau\right)+\left(-a_0a_1\tau\right)\left(-2a_0-\beta a_1+2a_0a_1\tau\right)\right] \\
=& a_0a_1\left(-\beta+a_0a_1\tau^2\right)-a_0a_1\left(-2a_0\tau-\beta a_1\tau+2a_0a_1\tau^2\right) \\
&+a_0a_1\left(-2a_0\tau-\beta a_1\tau+2a_0a_1\tau^2\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(2a_0+\beta a_1-2a_0a_1\tau\right) \\
=& a_0a_1\left(-\beta+a_0a_1\tau^2\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(2a_0+\beta a_1-2a_0a_1\tau\right) \\
=& a_0a_1\left(-\beta\right)+a_0a_1\left(a_0a_1\tau^2\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(2a_0-2a_0a_1\tau\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(\beta a_1\right) \\
=& -a_0\left(\beta a_1\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(\beta a_1\right)+a_0a_1\left(a_0a_1\tau^2\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(2a_0-2a_0a_1\tau\right) \\
=& \beta a_1^2+a_0^2a_1^2\tau^2+\left(a_0+a_1\right)\left(2a_0-2a_0a_1\tau\right)>0 \qquad (61)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
AC'-A'C =& (1-\beta)\left(-2\tau+a_1\tau^2\right)\left(-a_0a_1\right) \\
&-(1-\beta)\left(-2+2a_1\tau\right)\left(a_0+a_1-a_0a_1\tau\right) \\
=& (1-\beta)\left(-2\tau+2a_1\tau^2\right)\left(-a_0a_1\right)+(1-\beta)\left(-a_1\tau^2\right)\left(-a_0a_1\right) \\
&-(1-\beta)\left(-2+2a_1\tau\right)\left(a_0+a_1\right)-(1-\beta)\left(-2+2a_1\tau\right)\left(-a_0a_1\tau\right) \\
=& (1-\beta)a_0a_1^2\tau^2-(1-\beta)\left(-2\tau+2a_1\tau^2\right)\left(a_0a_1\right) \\
&+(1-\beta)\left(-2\tau+2a_1\tau^2\right)\left(a_0a_1\right)+(1-\beta)\left(2-2a_1\tau\right)\left(a_0+a_1\right) \\
=& (1-\beta)a_0a_1^2\tau^2+(1-\beta)\left(2-2a_1\tau\right)\left(a_0+a_1\right)\geq 0 \qquad (62)
\end{aligned}$$

Entonces, dados los valores de (47)-(49), (54) y (60)-(62), concluimos que

$$\begin{aligned}\nu_0' =&\frac{2\left(C'B-CB'\right)\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)+4\left(AC'-A'C\right)C}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}}\\ \geq&\frac{2\left(C'B-CB'\right)\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)}{\left(B+\sqrt{B^2+4AC}\right)^2\sqrt{B^2+4AC}}>0.\end{aligned} \tag{63}$$

Entonces, $\nu_0(\tau)$ es estrictamente creciente respecto a $\tau, \tau \in (-\infty, 0]$.

Ahora, de (55) tenemos que

$$\nu_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} - \tau}. \tag{64}$$

Entonces, $\nu_1(\tau)$ es continuamente diferenciable respecto a τ, ya que $\nu_0(\tau)$ es continuamente diferenciable respecto a τ, y

$$\begin{aligned}\nu_1' =&-\frac{1}{\left(\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0+a_0}-\tau\right)^2}\left(-\frac{1}{\left[(1-\beta)\nu_0+a_0\right]^2}(1-\beta)\nu_0'-1\right)\\ =&\nu_1^2\left(\frac{(1-\beta)\nu_0'}{\left[(1-\beta)\nu_0+a_0\right]^2}+1\right)\end{aligned} \tag{65}$$

y dado que $\nu_0' > 0$, entonces,

$$\nu_1' = \nu_1^2\left(\frac{(1-\beta)\nu_0'}{\left[(1-\beta)\nu_0+a_0\right]^2}+1\right) \geq \nu_1^2 > 0. \tag{66}$$

Entonces, $\nu_1(\tau)$ también es estrictamente creciente respecto a $\tau, \tau \in (-\infty, 0]$ y el teorema queda demostrado■

Demostración del Teorema 2:

Vamos a demostrar que existen $\nu_i^* \geq 0, q_i^* \geq 0$, $i = 0, 1$, y $p^* > p_0$ tales que el vector (p^*, q_0^*, q_1^*) es un equilibrio exterior y los coeficientes de influencia (ν_0^*, ν_1^*) son consistentes, es decir, las ecuaciones (14) y (15) se satisfacen.

Como se demostró en el **Teorema 3**, ν_0 y ν_1 tiene una solución única para las ecuaciones (17) y (18) que depende continuamente de $\tau = G'(p)$ y, dado que $G'(p)$ es una función continua respecto a p, entonces, podemos considerar a las funciones ν_0 y ν_1 como funciones continuas respecto a p.

Consideremos nuevamente la función (33) de la demostración del **Teorema 1**

$$\begin{aligned}Q(p;\nu_0(p),\nu_1(p)) =&Q(p) = q_0(p;\nu_0(p),\nu_1(p)) + q_1(p;\nu_0(p),\nu_1(p))\\ =&\frac{p-b_0}{(1-\beta)\nu_0(p)+a_0}+\frac{\beta\nu_0(p)}{(1-\beta)\nu_0(p)+a_0}\left(\frac{p-b_1}{\nu_1(p)+a_1}\right)+\frac{p-b_1}{\nu_1(p)+a_1}\\ =&p\left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0(p)+a_0}+\frac{\nu_0(p)+a_0}{(1-\beta)\nu_0(p)+a_0}\left(\frac{1}{\nu_1(p)+a_1}\right)\right]\\ &-\left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0(p)+a_0}+\frac{\nu_0(p)+a_0}{(1-\beta)\nu_0(p)+a_0}\left(\frac{b_1}{\nu_1(p)+a_1}\right)\right],\end{aligned} \tag{67}$$

la cual es continua respecto a p y tiende a $+\infty$ cuando $p \to +\infty$ dado que $\nu_0(p)$ y $\nu_1(p)$ están acotadas. Y, nuevamente, por la suposición **A3**, tenemos que

$$\begin{aligned}Q(p_0) =&q_0(p_0;\nu_0(p_0),\nu_1(p_0)) + q_1(p_0;\nu_0(p_0),\nu_1(p_0))\\ =&\frac{p_0-b_0}{(1-\beta)\nu_0(p_0)+a_0} \leq \frac{p_0-b_0}{a_0} < G(p_0) \leq G(p_0) + D.\end{aligned} \tag{68}$$

Entonces, existe al menos un valor $p^* > p_0$ tal que

$$Q(p^*) = G(p^*) + D. \tag{69}$$

Para este valor p^*, calculamos los coeficientes de in fluencia $\nu_i^* = \nu_i(G'(p^*))$, $i = 0, 1$, con las formulas (53) y (55), y los volúmenes de producción $q_i^* = q_i(p^*; \nu_0^*, \nu_1^*)$, $i = 0, 1$, utilizando las formulas (31) y (32). Así, ν_0^* y ν_1^* satisfacen (14) y (15), y el vector (p^*, q_0^*, q_1^*) es un equilibrio exterior, por lo que el vector $(p^*, q_0^*, q_1^*, \nu_0^*, \nu_1^*)$ es un equilibrio interior y el teorema queda demostrado■

Demostración del Corolario 1:

Sea $\beta \in (0, 1]$. $G'(p) = -K$, entonces, por el **Teorema 3**, para $\tau = -K$ existe una solución única (ν_0^*, ν_1^*) de la ecuaciones (17) y (18), donde

$$\nu_0^* = \frac{2(a_0+a_1+a_0a_1K)}{(\beta+2a_0K+\beta a_1K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(\beta+2a_0K+\beta a_1K+a_0a_1K^2)^2+4(1-\beta)(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}}, \tag{70}$$

y

$$\nu_1^* = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + K} = \frac{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}{1 + [(1-\beta)\nu_0^* + a_0]\,K}. \tag{71}$$

Además, de (17), (70) también se puede escribir como

$$\nu_0^* = \frac{1}{\dfrac{1}{\nu_1^* + a_1} + K}. \tag{72}$$

Es fácil ver que los coeficientes de influencia ν_0^* y ν_1^* son constantes respecto a p, entonces, por el **Teorema 1**, existe un único equilibrio exterior (p^*, q_0^*, q_1^*) para los coeficientes de influencia (ν_0^*, ν_1^*), por lo que el vector $(p^*, q_0^*, q_1^*, \nu_0^*, \nu_1^*) = (p^*(\beta), q_0^*(\beta), q_1^*(\beta), \nu_0^*(\beta), \nu_1^*(\beta))$ es un equilibrio interior que es único para cada $\beta \in (0, 1]$ y el corolario queda demostrado■

Demostración del Teorema 4:

Primero, vamos a demostrar que las funciones $\nu_i^*(\beta)$, $i = 0, 1$, son continuamente diferenciables y estrictamente decrecientes respecto a β. Consideremos las funciones

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\beta) = (1-\beta)\left(2K + a_1K^2\right) \geq 0, \tag{73}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\beta) = \beta + 2a_0K + \beta a_1K + a_0a_1K^2 > 0, \tag{74}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\beta) = a_0 + a_1 + a_0a_1K > 0, \tag{75}$$

las cuales son continuamente diferenciables respecto a β y

$$\mathcal{A}' = -\left(2K + a_1K^2\right) < 0, \tag{76}$$

$$\mathcal{B}' = 1 + a_1K > 0, \tag{77}$$

$$\mathcal{C}' = 0. \tag{78}$$

Ahora, utilizando (73)-(75) reescribimos la formula (70):

$$\nu_0^*(\beta) = \nu_0^* = \frac{2\mathcal{C}}{\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{AC}}}, \tag{79}$$

donde

$$\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{AC}} > 0. \tag{80}$$

Entonces, $\nu_0^*(\beta)$ es continuamente diferenciable respecto a β y, análogamente a (59),

$$\nu_0^{*\prime} = \frac{2\left(\mathcal{C}'\mathcal{B} - \mathcal{C}\mathcal{B}'\right)\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{AC}}\right) + 4\left(\mathcal{AC}' - \mathcal{A}'\mathcal{C}\right)\mathcal{C}}{\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{AC}}\right)^2\sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{AC}}}. \tag{81}$$

Pero, dado que $\mathcal{C}'=0$, entonces,

$$\begin{aligned}\nu_0^{*\prime} =& \frac{2\left(-\mathcal{C}\mathcal{B}'\right)\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)+4\left(-\mathcal{A}'\mathcal{C}\right)\mathcal{C}}{\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}}\\ =& \frac{-2\mathcal{C}\left[\mathcal{B}'\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)+2\mathcal{A}'\mathcal{C}\right]}{\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}}.\end{aligned} \tag{82}$$

Ahora, vamos a analizar el valor de (82) para saber el comportamiento de $\nu_0^*(\beta)$.

Dados (73)-(75), es fácil ver que el denominador de (82)

$$\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}>0. \tag{83}$$

Supongamos que el numerador de (82) es no negativo para algún $\beta_0\in(0,1]$, es decir,

$$-2\mathcal{C}\left[\mathcal{B}'\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)+2\mathcal{A}'\mathcal{C}\right]\geq 0. \tag{84}$$

Dado que $\mathcal{C}>0$, por (75), se debe cumplir que

$$\mathcal{B}'\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)+2\mathcal{A}'\mathcal{C}\leq 0. \tag{85}$$

Además, $B'>0$, por (77), entonces,

$$\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\leq\frac{-2\mathcal{A}'\mathcal{C}}{\mathcal{B}'}-\mathcal{B} \tag{86}$$

con $\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}>0$, entonces, elevando al cuadrado ambos lado de (86) obtenemos que

$$\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}\leq\frac{4{\mathcal{A}'}^2\mathcal{C}^2}{\mathcal{B}'^2}+\frac{4\mathcal{A}'\mathcal{C}\mathcal{B}}{\mathcal{B}'}+\mathcal{B}^2, \tag{87}$$

despejando $\mathcal{A}$ de (87) tenemos que

$$\mathcal{A}\leq\frac{{\mathcal{A}'}^2\mathcal{C}}{\mathcal{B}'^2}+\frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}}{\mathcal{B}'} \tag{88}$$

y multiplicando ambos lados de (88) por ${\mathcal{B}'}^2$ llegamos a que

$$\mathcal{A}{\mathcal{B}'}^2\leq{\mathcal{A}'}^2\mathcal{C}+\mathcal{A}'\mathcal{B}\mathcal{B}'=\mathcal{A}'\left(\mathcal{A}'\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{B}'\right). \tag{89}$$

Ahora sustituimos los valores de A y A' dados por (73) y (76) en (89) y obtenemos que

$$(1-\beta)\left(2K+a_1K^2\right){\mathcal{B}'}^2\leq-\left(2K+a_1K^2\right)\left[-\left(2K+a_1K^2\right)\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{B}'\right] \tag{90}$$

y, dado que $\left(2K+a_1K^2\right)>0$, llegamos a que

$$(1-\beta){\mathcal{B}'}^2\leq-\left[-\left(2K+a_1K^2\right)\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{B}'\right]=\left(2K+a_1K^2\right)\mathcal{C}-\mathcal{B}\mathcal{B}', \tag{91}$$

entonces, se debe cumplir que

$$(1-\beta){\mathcal{B}'}^2+\mathcal{B}\mathcal{B}'-\left(2K+a_1K^2\right)\mathcal{C}=\left[(1-\beta)\mathcal{B}'+\mathcal{B}\right]\mathcal{B}'-\left(2K+a_1K^2\right)\mathcal{C}\leq 0. \tag{92}$$

Sustituyendo las formulas (74), (75) y (77) en (92) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&[(1-\beta)\mathcal{B}'+\mathcal{B}]\,\mathcal{B}'-\left(2K+a_1K^2\right)\mathcal{C}= \\
&=\left[(1-\beta)\left(1+a_1K\right)+\left(\beta+2a_0K+\beta a_1K+a_0a_1K^2\right)\right]\left(1+a_1K\right) \\
&\quad-\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right) \\
&=\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(1+a_1K\right) \\
&\quad-\left(2+a_1K\right)\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right) \\
&=1+\left(a_1K\right)+\left(2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)+\left(2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(a_1K\right) \\
&\quad-\left(2+a_1K\right)\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right) \\
&=1+2\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)+\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(a_1K\right) \\
&\quad-\left(2+a_1K\right)\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right) \\
&=1+\left(2+a_1K\right)\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right) \\
&\quad-\left(2+a_1K\right)\left(a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right) \\
&=1>0
\end{aligned} \tag{93}$$

lo que contradice a (92). Entonces, (84) no se cumple para nungún valor $\beta_0 \in (0,1]$, lo que implica que

$$-2\mathcal{C}\left[\mathcal{B}'\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)+2\mathcal{A}'\mathcal{C}\right]<0 \tag{94}$$

para todo $\beta \in (0,1]$.

Entonces, de (83) y (94), concluimos que

$${\nu_0^*}'=\frac{-2\mathcal{C}\left[\mathcal{B}'\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)+2\mathcal{A}'\mathcal{C}\right]}{\left(\mathcal{B}+\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2\sqrt{\mathcal{B}^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}}}<0 \tag{95}$$

para todo $\beta \in (0,1]$, y $\nu_0^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$.

Ahora, de (71), es fácil ver que ν_1^* es continuamente diferenciable respecto a ν_0^* y, dado que $\nu_0^*(\beta)$ es continuamente diferenciable respecto a β, entonces, $\nu_1^*(\beta)$, es continuamente diferenciable respecto a β.

Luego, derivando (72) respecto a β obtenemos que

$${\nu_0^*}'=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\nu_1^*+a_1}+K\right)^2}\left(\frac{1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}{\nu_1^*}'\right)={\nu_0^*}^2\left(\frac{{\nu_1^*}'}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\right)=\left(\frac{\nu_0^*}{\nu_1^*+a_1}\right)^2{\nu_1^*}'. \tag{96}$$

Y de (96), dado que ${\nu_0^*}'<0$, se debe cumplir que ${\nu_1^*}'<0$, para todo $\beta \in (0,1]$. Entonces, $\nu_1^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$. Ahora, antes de continuar con la demostración, vamos a demostrar la siguiente desigualdad

$$\nu_0^*+\beta{\nu_0^*}'>0. \tag{97}$$

Primero, sustituimos (79) y (82) en (97), entonces,

$$\begin{aligned}
\nu_0^* + \beta {\nu_0^*}' =& \frac{2\mathcal{C}}{\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}} + \beta \frac{-2\mathcal{C}\left[\mathcal{B}'\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right) + 2\mathcal{A}'\mathcal{C}\right]}{\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2 \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}} \\
=& \frac{2\mathcal{C}}{\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2 \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}} \\
& \cdot \left\{\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)\sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}} - \beta\left[\mathcal{B}'\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right) + 2\mathcal{A}'\mathcal{C}\right]\right\} \\
=& \frac{2\mathcal{C}}{\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2 \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}} \\
& \cdot \left[\left(-\beta\mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right) - 2\beta\mathcal{A}'\mathcal{C}\right].
\end{aligned} \tag{98}$$

Por (75), (76) y (83),

$$\frac{2\mathcal{C}}{\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)^2 \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}} > 0 \tag{99}$$

y

$$-2\beta\mathcal{A}'\mathcal{C} > 0. \tag{100}$$

Entonces, para que se cumpla la desigualdad (97), sólo hace falta probar que

$$\left(-\beta\mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right)\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}}\right) > 0, \tag{101}$$

lo que, por (80), equivale a probar que

$$-\beta\mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}} > 0. \tag{102}$$

Supongamos que

$$-\beta\mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}} \leq 0, \tag{103}$$

entonces,

$$\sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}} \leq \beta\mathcal{B}' \tag{104}$$

con $\sqrt{\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C}} > 0$, entonces, elevando al cuadrado ambos lado de (104) obtenemos que

$$\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C} \leq \beta^2{\mathcal{B}'}^2. \tag{105}$$

Sustituyendo (74) y (77) en (105) llegamos a que

$$\left(\beta + 2a_0K + \beta a_1K + a_0a_1K^2\right)^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C} \leq \beta^2\left(1 + a_1K\right)^2, \tag{106}$$

entonces,

$$\left[(\beta + \beta a_1K) + 2a_0K + a_0a_1K^2\right]^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{C} \leq (\beta + \beta a_1K)^2. \tag{107}$$

Pero, por (73) y (75),

$$4\mathcal{A}\mathcal{C} \geq 0, \tag{108}$$

entonces,

$$\left[(\beta + \beta a_1K) + 2a_0K + a_0a_1K^2\right]^2 \leq (\beta + \beta a_1K)^2. \tag{109}$$

Por otro lado,

$$2a_0K + a_0a_1K^2 > 0, \tag{110}$$

entonces,

$$(\beta + \beta a_1K) < (\beta + \beta a_1K) + 2a_0K + a_0a_1K^2 \tag{111}$$

con $(\beta + \beta a_1 K) > 0$, entonces, elevando al cuadrado ambos lado de (104) obtenemos que

$$(\beta + \beta a_1 K)^2 < \left[(\beta + \beta a_1 K) + 2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right]^2 . \tag{112}$$

Pero la desigualdad (112) contradice (109), entonces, debe cumplirse (102), lo que finalmente demuestra (97).

Continuando con la demostración, ahora demostraremos que el precio $p^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β. Para esto, vamos a considerar nuevamente la función del volumen total de producción dada por (33) y el hecho de que $G(p^*) = -Kp^* + T$, para obtener la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
&Q(p^*; \nu_0^*, \nu_1^*) - G(p^*) - D = \\
&= p^* \left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + \frac{\nu_0^* + a_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}\left(\frac{1}{\nu_1^* + a_1}\right)\right] \\
&\quad - \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + \frac{\nu_0^* + a_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}\left(\frac{b_1}{\nu_1^* + a_1}\right)\right] \\
&\quad + Kp^* - T - D = 0.
\end{aligned} \tag{113}$$

Ahora, vamos a considerar la función

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(p^*; \beta) = &p^* \left[\frac{1}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + \frac{\nu_0^* + a_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}\left(\frac{1}{\nu_1^* + a_1}\right)\right] \\
&- \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + \frac{\nu_0^* + a_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}\left(\frac{b_1}{\nu_1^* + a_1}\right)\right] \\
&+ Kp^* - T - D,
\end{aligned} \tag{114}$$

recordando que ν_0^* y ν_1^* dependen de β, pero no de p^*. Ahora reescribimos (113), utilizando (114), como una ecuación funcional

$$\mathcal{F}(p^*; \beta) = 0 \tag{115}$$

y vamos a analizar el valor de la derivada parcial de la función $\mathcal{F}(p^*; \beta)$ respecto a p^*:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p^*} = \frac{1}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + \frac{\nu_0^* + a_0}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}\left(\frac{1}{\nu_1^* + a_1}\right) + K \geq K > 0. \tag{116}$$

Observamos que la derivada parcial de $\mathcal{F}$ respecto a p^* es positiva, dada esta condición, por el Teorema de la Función Implícita, la función $p^* = p^*(\beta)$ es diferenciable respecto a β, y la derivada de p^* respecto a β puede ser encontrada de la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p^*}\frac{dp^*}{d\beta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = 0, \tag{117}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{dp^*}{d\beta} = -\frac{\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p^*}}. \tag{118}$$

De (116) tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p^*} > 0, \tag{119}$$

por lo que, para que p^* sea estrictamente decreciente, sólo hace falta probar que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} > 0. \tag{120}$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} =& \frac{\partial}{\partial \beta}\left(Q(p^*;\nu_0^*,\nu_1^*) - G(p^*) - D\right) = \frac{\partial}{\partial \beta} Q(p^*;\nu_0^*,\nu_1^*)\\
=& \frac{\partial}{\partial \beta}\left(q_0(p^*;\nu_0^*,\nu_1^*) + q_1(p^*;\nu_0^*,\nu_1^*)\right)\\
=& \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{p^*-b_0}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0} + \frac{\beta\nu_0^*}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}\left(\frac{p^*-b_1}{\nu_1^*+a_1}\right) + \frac{p^*-b_1}{\nu_1^*+a_1}\right]\\
=& -\frac{p^*-b_0}{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]^2}\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right]\\
&+ \frac{\left(\nu_0^*+\beta\nu_0^{*\prime}\right)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right] - \beta\nu_0^*\left[-\nu_0^*+(1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right]}{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]^2}\left(\frac{p^*-b_1}{\nu_1^*+a_1}\right)\\
&+ \frac{\beta\nu_0^*}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}\left(-\frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\nu_1^{*\prime}\right) + \left(-\frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\nu_1^{*\prime}\right)\\
=& \frac{p^*-b_0}{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]^2}\left[\nu_0^* + (1-\beta)\left(-\nu_0^{*\prime}\right)\right]\\
&+ \frac{\left(\nu_0^*+\beta\nu_0^{*\prime}\right)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right] + \beta\nu_0^*\left[\nu_0^*+(1-\beta)\left(-\nu_0^{*\prime}\right)\right]}{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]^2}\left(\frac{p^*-b_1}{\nu_1^*+a_1}\right)\\
&+ \frac{\beta\nu_0^*}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}\left[\frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\left(-\nu_1^{*\prime}\right)\right] + \left[\frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\left(-\nu_1^{*\prime}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{121}
$$

Dados los valores de $a_0, a_1, b_0, b_1, \beta, \nu_0^*, \nu_1^*, \nu_0^{*\prime}, \nu_1^{*\prime}, p^*$ y (97), es fácil ver que (121) es no negativa. Además,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} =& \frac{p^*-b_0}{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]^2}\left[\nu_0^* + (1-\beta)\left(-\nu_0^{*\prime}\right)\right]\\
&+ \frac{\left(\nu_0^*+\beta\nu_0^{*\prime}\right)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right] + \beta\nu_0^*\left[\nu_0^*+(1-\beta)\left(-\nu_0^{*\prime}\right)\right]}{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]^2}\left(\frac{p^*-b_1}{\nu_1^*+a_1}\right)\\
&+ \frac{\beta\nu_0^*}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}\left[\frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\left(-\nu_1^{*\prime}\right)\right] + \left[\frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\left(-\nu_1^{*\prime}\right)\right]\\
\geq& \frac{p^*-b_1}{\left(\nu_1^*+a_1\right)^2}\left(-\nu_1^{*\prime}\right) > 0,
\end{aligned}
\tag{122}
$$

lo que demuestra (120), y, entonces,

$$
\frac{dp^*}{d\beta} = -\frac{\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p^*}} < 0,
\tag{123}
$$

donde $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}$ y $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p^*}$ son continuas respecto a β, por lo que $p^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$.

Ahora, dado que

$$
G^*(\beta) = G(p^*(\beta)) = -Kp^*(\beta) + T
\tag{124}
$$

y $p^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, y K y T constantes positivas, entonces, $G^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente creciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$.

Ahora, vamos a demostrar que $q_1^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β. Para esto, primero vamos a despejar p^* de (113) y obtendremos la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
p^* =& \frac{\dfrac{b_0}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0} + \dfrac{\nu_0^*+a_0}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}\left(\dfrac{b_1}{\nu_1^*+a_1}\right) + T + D}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0} + \dfrac{\nu_0^*+a_0}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}\left(\dfrac{1}{\nu_1^*+a_1}\right) + K} \\
=& \frac{b_0 + (\nu_0^*+a_0)\left(\dfrac{b_1}{\nu_1^*+a_1}\right) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](T+D)}{1 + (\nu_0^*+a_0)\left(\dfrac{1}{\nu_1^*+a_1}\right) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K} \\
=& \frac{(\nu_0^*+a_0)b_1 + (\nu_1^*+a_1)b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)}{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K}.
\end{aligned} \tag{125}
$$

Ahora, sustituimos (125) en $q_1^* = q_1(p^*; \nu_0^*, \nu_1^*)$, y obtenemos que

$$
\begin{aligned}
q_1^* =& \frac{p^*-b_1}{\nu_1^*+a_1} \\
=& \frac{\dfrac{(\nu_0^*+a_0)b_1 + (\nu_1^*+a_1)b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)}{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K} - b_1}{\nu_1^*+a_1} \\
=& \frac{(\nu_0^*+a_0)b_1 + (\nu_1^*+a_1)b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)}{(\nu_1^*+a_1)\{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}} \\
&- \frac{\{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}b_1}{(\nu_1^*+a_1)\{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}} \\
=& \frac{(\nu_1^*+a_1)b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)}{(\nu_1^*+a_1)\{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}} \\
&- \frac{(\nu_1^*+a_1)b_1 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)Kb_1}{(\nu_1^*+a_1)\{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}} \\
=& \frac{b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](T+D)}{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K} \\
&- \frac{b_1 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]Kb_1}{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K} \\
=& \frac{-b_1 + b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](-Kb_1 + T + D)}{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K} \\
=& \frac{-(b_1-b_0) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)}{(\nu_0^*+a_0) + (\nu_1^*+a_1)\{1 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K\}}.
\end{aligned} \tag{126}
$$

Sustituyendo (71) en (126) nos queda que

$$
\begin{aligned}
q_1^* =& \frac{-(b_1-b_0) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)}{(\nu_0^*+a_0) + \left[\dfrac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K} + a_1\right]\{1 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K\}} \\
=& \frac{-(b_1-b_0) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)}{(\nu_0^*+a_0) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0] + a_1\{1 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K\}} \\
=& \frac{-(b_1-b_0) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)}{(\nu_0^*+a_0+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](1+a_1K)} = \frac{M}{N},
\end{aligned} \tag{127}
$$

donde

$$
M = M(\beta) = -(b_1-b_0) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D) \tag{128}
$$

y

$$
N = N(\beta) = (\nu_0^*+a_0+a_1) + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](1+a_1K). \tag{129}
$$

Es fácil ver que M y N son continuamente diferenciables respecto a β y

$$M' = \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D)\,, \tag{130}$$

$$N' = \nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\,. \tag{131}$$

Además $N > 0$, entonces, q_1^* es continuamente diferenciable respecto a β y

$$q_1^{*\prime} = \frac{M'N - MN'}{N^2}. \tag{132}$$

Entonces, para saber el valor de $q_1^{*\prime}$ es suficiente con analizar el valor del numerador de (127):

$$\begin{aligned}
&M'N - MN' = \\
&= \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D)\left\{(\nu_0^*+a_0+a_1) + \left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](1+a_1K)\right\} \\
&\quad - \left\{-(b_1-b_0) + \left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](G(b_1)+D)\right\}\left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\} \\
&= (\nu_0^*+a_0+a_1)\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + \left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)(G(b_1)+D) \\
&\quad + \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}(b_1-b_0) \\
&\quad - \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](G(b_1)+D) \\
&= (\nu_0^*+a_0)\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + a_1\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + \left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)(G(b_1)+D) \\
&\quad + \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}(b_1-b_0) \\
&\quad - \nu_0^{*\prime}\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](G(b_1)+D) \\
&\quad - \left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)(G(b_1)+D) \\
&= (\nu_0^*+a_0)\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + a_1\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}(b_1-b_0) \\
&\quad - \nu_0^{*\prime}\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](G(b_1)+D) \\
&= \left\{(\nu_0^*+a_0)\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right] - \nu_0^{*\prime}\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\right\}(G(b_1)+D) \\
&\quad + a_1\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}(b_1-b_0) \\
&= \left[(\nu_0^*+a_0)\left(-\nu_0^* - \beta\nu_0^{*\prime}\right) + \beta\nu_0^*\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + a_1\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&\quad + \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}(b_1-b_0).
\end{aligned} \tag{133}$$

Dados los valores de $a_0, a_1, b_0, b_1, \beta, \nu_0^*, \nu_0^{*\prime}, G(p), D$ y (97), es fácil ver que (133) es no positiva. Además,

$$\begin{aligned}
M'N - MN' = &\left[(\nu_0^*+a_0)\left(-\nu_0^* - \beta\nu_0^{*\prime}\right) + \beta\nu_0^*\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&+ a_1\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) \\
&+ \left\{\nu_0^{*\prime} + \left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](1+a_1K)\right\}(b_1-b_0) \\
\leq &a_1\left[-\nu_0^* + (1-\beta)\nu_0^{*\prime}\right](G(b_1)+D) < 0.
\end{aligned} \tag{134}$$

Entonces,

$$M'N - MN' < 0, \tag{135}$$

lo que demuestra que ${q_1^*}' < 0$, por lo que $q_1^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$.

Finalmente, dado que

$$q_0^*(\beta) + q_1^*(\beta) = G^*(\beta) + D, \tag{136}$$

entonces,

$$q_0^*(\beta) = -q_1^*(\beta) + G^*(\beta) + D, \tag{137}$$

y dado que $G^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente creciente respecto a β, $q_1^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, y D constante, entonces, $q_0^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente creciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$ y el teorema queda demostrado■

Demostración del Teorema 5:

Consideremos el equilibrio exterior (p^c, q_0^c, q_1^c), es decir, se cumplen las siguientes igualdades:

$$q_0^c + q_1^c = G(p^c) + D, \tag{138}$$

$$q_0^c = \frac{p^c - b_0}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + \frac{\beta\frac{1}{K}}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0}\left(\frac{p^c - b_1}{\frac{1}{K} + a_1}\right), \tag{139}$$

$$q_1^c = \frac{p^c - b_1}{\frac{1}{K} + a_1}, \tag{140}$$

donde

$$G(p^c) = -Kp^c + T. \tag{141}$$

De la ecuación (138) tenemos que

$$q_0^c + q_1^c - G(p^c) - D = 0, \tag{142}$$

y sustituyendo (139), (140) y (141) en (142), análogamente a (33), obtenemos que

$$\begin{aligned} q_0^c + q_1^c - G(p^c) - D =& \frac{p^c - b_0}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + \frac{\beta\frac{1}{K}}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0}\left(\frac{p^c - b_1}{\frac{1}{K} + a_1}\right) + \frac{p^c - b_1}{\frac{1}{K} + a_1} \\ &+ Kp^c - T - D \\ =& p^c\left[\frac{1}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + \frac{\frac{1}{K} + a_0}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{K} + a_1}\right)\right] \\ &- \left[\frac{b_0}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + \frac{\frac{1}{K} + a_0}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0}\left(\frac{b_1}{\frac{1}{K} + a_1}\right)\right] \\ &+ Kp^c - T - D = 0, \end{aligned} \tag{143}$$

y despejando p^c de (143), análogamente a (125), obtenemos la ecuación

$$p^c = \frac{\dfrac{b_0}{(1-\beta)\dfrac{1}{K}+a_0} + \dfrac{\dfrac{1}{K}+a_0}{(1-\beta)\dfrac{1}{K}+a_0}\left(\dfrac{b_1}{\dfrac{1}{K}+a_1}\right) + T + D}{\dfrac{1}{(1-\beta)\dfrac{1}{K}+a_0} + \dfrac{\dfrac{1}{K}+a_0}{(1-\beta)\dfrac{1}{K}+a_0}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{K}+a_1}\right) + K}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)b_1 + \left(\frac{1}{K}+a_1\right)b_0 + \left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(T+D)}{\left(\frac{1}{K}+a_0\right) + \left(\frac{1}{K}+a_1\right) + \left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K} = \frac{X}{Y}, \tag{144}$$

donde

$$X(\beta) = \left(\frac{1}{K}+a_0\right)b_1 + \left(\frac{1}{K}+a_1\right)b_0 + \left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \tag{145}$$

y

$$Y(\beta) = \left(\frac{1}{K}+a_0\right) + \left(\frac{1}{K}+a_1\right) + \left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K. \tag{146}$$

Es fácil ver que X y Y son continuamente diferenciables respecto a β y

$$X' = -\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(T+D), \tag{147}$$

$$Y' = -\left(\frac{1}{K}+a_1\right). \tag{148}$$

Además $Y > 0$, entonces, p^c es continuamente diferenciable respecto a β y

$$p^{c\prime} = \frac{X'Y - XY'}{Y^2}. \tag{149}$$

Entonces, para saber el valor de $p^{c\prime}$ es suficiente con analizar el valor del numerador de (149):

$$\begin{aligned}
&X'Y - XY' = \\
&= -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\} \\
&\quad - \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\right\}\left[-\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\right] \\
&= -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\} \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\right\} \\
&= -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \\
&\quad - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2(T+D) \\
&\quad - \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2(T+D) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_1 \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2 b_0 \\
&\quad + \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2(T+D) \\
&= \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_1 - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2 b_0 - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2(T+D)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(-Kb_1+T+D) \\
&\quad -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2(-Kb_0+T+D) \\
&= -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(G(b_1)+D) \\
&\quad -\tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)^2(G(b_0)+D). \qquad (150)
\end{aligned}
$$

Dados los valores de $a_0, a_1, K, G(p)$ y D, es fácil ver que (150) es no positiva. Además,

$$
\begin{aligned}
X'Y - XY' =& -\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}+a_0\right)\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(G(b_1)+D) - \frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}+a_1\right)^2(G(b_0)+D) \\
\leq& -\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}+a_0\right)\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(G(b_1)+D) < 0. \qquad (151)
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$X'Y - XY' < 0, \qquad (152)$$

lo que demuestra que $p^{c\prime} < 0$, por lo que $p^c(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$.

Luego, dado que

$$q_1^c(\beta) = \frac{p^c(\beta) - b_1}{\dfrac{1}{K} + a_1} \qquad (153)$$

y $p^c(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, y a_1, b_1 y K constantes positivas, entonces, $q_1^c(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$.

Finalmente, dado que

$$q_0^c(\beta) + q_1^c(\beta) = G(p^c(\beta)) + D = -Kp^c(\beta) + T + D, \qquad (154)$$

entonces,

$$q_0^c(\beta) = -q_1^c(\beta) - Kp^c(\beta) + T + D, \qquad (155)$$

y dado que $q_1^c(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, $p^c(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente respecto a β, y K, T y D son constantes no negativas, entonces, $q_0^*(\beta)$ es continuamente diferenciable y estrictamente creciente respecto a β, $\beta \in (0,1]$ y el teorema queda demostrado■

Demostración del Teorema 6:

Consideramos el equilibrio exterior $(p^{cp}, q_0^{cp}, q_1^{cp})$, es decir, se cumplen las siguientes igualdades:

$$q_0^{cp} + q_1^{cp} = G(p^{cp}) + D, \qquad (156)$$

$$q_0^{cp} = \frac{p^{cp} - b_0}{a_0}, \qquad (157)$$

$$q_1^{cp} = \frac{p^{cp} - b_1}{a_1}, \qquad (158)$$

donde

$$G(p^{cp}) = -Kp^{cp} + T. \qquad (159)$$

De la ecuación (138) tenemos que

$$q_0^{cp} + q_1^{cp} - G(p^{cp}) - D = 0, \qquad (160)$$

y sustituyendo (157), (158) y (159) en (160), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
q_0^{cp} + q_1^{cp} - G(p^{cp}) - D =& \frac{p^{cp} - b_0}{a_0} + \frac{p^{cp} - b_1}{a_1} + Kp^{cp} - T - D \\
=& p^{cp}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}\right) - \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_0}{a_0}\right) + Kp^c - T - D = 0, \qquad (161)
\end{aligned}
$$

y despejando p^{cp} de (161) obtenemos la ecuación

$$p^{cp} = \frac{\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_0}{a_0} + T + D}{\dfrac{1}{a_0} + \dfrac{1}{a_1} + K} = \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 a_1 (T+D)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K}, \tag{162}$$

y vemos que la función $p^{cp}(\beta)$ es constante para todo $\beta \in (0,1]$.

Luego, dado que

$$\begin{aligned} q_0^{cp} =& \frac{p^{cp} - b_0}{a_0} = \frac{\dfrac{a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 a_1 (T+D)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K} - b_0}{a_0} \\ =& \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 a_1 (T+D) - (a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)\, b_0}{a_0 (a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)} \\ =& \frac{a_0 (b_1 - b_0) + a_0 a_1 (-K b_0 + T + D)}{a_0 (a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)} \\ =& \frac{a_1 (G(b_0) + D) + (b_1 - b_0)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K}, \end{aligned} \tag{163}$$

y

$$\begin{aligned} q_1^{cp} =& \frac{p^{cp} - b_1}{a_1} = \frac{\dfrac{a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 a_1 (T+D)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K} - b_1}{a_1} \\ =& \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 a_1 (T+D) - (a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)\, b_1}{a_1 (a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)} \\ =& \frac{-a_1 (b_1 - b_0) + a_0 a_1 (-K b_1 + T + D)}{a_1 (a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)} \\ =& \frac{a_0 (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)}{a_0 + a_1 + a_0 a_1 K}, \end{aligned} \tag{164}$$

entonces, las funciones $q_0^{cp}(\beta)$ y $q_1^{cp}(\beta)$ son constantes para todo $\beta \in (0,1]$ y el teorema queda demostrado$\blacksquare$

Demostración del Teorema 7:

Primero vamos a demostrar la desigualdad (23):

$$p^{cp} < \lim_{\beta \to 0} p^*(\beta),$$

y para esto introduciremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \widehat{\nu_0^*} &= \lim_{\beta \to 0} \nu_0^*(\beta) \\ &= \lim_{\beta \to 0} \frac{2(a_0+a_1+a_0a_1K)}{(\beta+2a_0K+\beta a_1K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(\beta+2a_0K+\beta a_1K+a_0a_1K^2)^2+4(1-\beta)(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}} \\ &= \frac{2(a_0+a_1+a_0a_1K)}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}} > 0, \end{aligned} \tag{165}$$

$$\widehat{\nu_1^*} = \lim_{\beta \to 0} \nu_1^*(\beta) = \lim_{\beta \to 0} \frac{(1-\beta)\nu_0^* + a_0}{1 + [(1-\beta)\nu_0^* + a_0]\, K} = \frac{\widehat{\nu_0^*} + a_0}{1 + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) K} > 0. \tag{166}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to 0} p^*(\beta) =& \lim_{\beta \to 0} \frac{(\nu_0^* + a_0)\, b_1 + (\nu_1^* + a_1)\, b_0 + [(1-\beta)\nu_0^* + a_0]\,(\nu_1^* + a_1)\,(T+D)}{(\nu_0^* + a_0) + (\nu_1^* + a_1) + [(1-\beta)\nu_0^* + a_0]\,(\nu_1^* + a_1)\, K} \\ =& \frac{\left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) b_1 + \left(\widehat{\nu_1^*} + a_1\right) b_0 + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*} + a_1\right)(T+D)}{\left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) + \left(\widehat{\nu_1^*} + a_1\right) + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*} + a_1\right) K}. \end{aligned} \tag{167}$$

Ahora, vamos a calcular la diferencia

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to 0} p^*(\beta) - p^{cp} = \\
&= \frac{\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)b_1+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)b_0+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(T+D)}{\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K} \\
&\quad - \frac{a_0b_1+a_1b_0+a_0a_1(T+D)}{a_0+a_1+a_0a_1K} \\
&= \frac{\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)b_1+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)b_0+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(T+D)\right](a_0+a_1+a_0a_1K)}{\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right](a_0+a_1+a_0a_1K)} \\
&\quad - \frac{\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right][a_0b_1+a_1b_0+a_0a_1(T+D)]}{\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right](a_0+a_1+a_0a_1K)} \\
&= \frac{R1}{R2},
\end{aligned}
\tag{168}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
R1 = &\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)b_1+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)b_0+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(T+D)\right](a_0+a_1+a_0a_1K) \\
&- \left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right][a_0b_1+a_1b_0+a_0a_1(T+D)]
\end{aligned}
\tag{169}
$$

y

$$
R2 = \left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right](a_0+a_1+a_0a_1K). \tag{170}
$$

Dados los valores de $a_0, a_1, \widehat{\nu_0^*}, \widehat{\nu_1^*}$ y K, es fácil ver que $R2 > 0$, entonces, para saber el valor de (168), es suficiente con analizar el valor de (169).

$$
\begin{aligned}
R1 = &\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)b_1+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)b_0+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(T+D)\right](a_0+a_1+a_0a_1K) \\
&- \left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right][a_0b_1+a_1b_0+a_0a_1(T+D)] \\
= &(a_0+a_1+a_0a_1K)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)b_1 \\
&+ (a_0+a_1+a_0a_1K)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)b_0 \\
&+ (a_0+a_1+a_0a_1K)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(T+D) \\
&- a_0\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right]b_1 \\
&- a_1\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right]b_0 \\
&- a_0a_1\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right](T+D) \\
= &\left\{(a_1+a_0a_1K)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)-a_0\left[\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right]\right\}b_1 \\
&+ \left\{(a_0+a_0a_1K)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)-a_1\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right]\right\}b_0 \\
&+ \left\{(a_0+a_1)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)-a_0a_1\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)\right]\right\}(T+D) \\
= &\left[a_1\widehat{\nu_0^*}-a_0\widehat{\nu_1^*}-a_0\widehat{\nu_1^*}\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K\right]b_1 \\
&+ \left[a_0\widehat{\nu_1^*}-a_1\widehat{\nu_0^*}-a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)K\right]b_0 \\
&+ \left[a_0\widehat{\nu_1^*}\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)+a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)\right](T+D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -a_0\widehat{\nu_1^*}\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)Kb_1 + a_0\widehat{\nu_1^*}\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)(T+D)\\
&\quad - a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)Kb_0 + a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(T+D)\\
&\quad + \left(a_1\widehat{\nu_0^*}-a_0\widehat{\nu_1^*}\right)b_1 + \left(a_0\widehat{\nu_1^*}-a_1\widehat{\nu_0^*}\right)b_0\\
&= a_0\widehat{\nu_1^*}\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)(-Kb_1+T+D)\\
&\quad + a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(-Kb_0+T+D)\\
&\quad + \left(a_1\widehat{\nu_0^*}-a_0\widehat{\nu_1^*}\right)(b_1-b_0)\\
&= a_0\widehat{\nu_1^*}\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)(G(b_1)+D) - a_0\widehat{\nu_1^*}(b_1-b_0)\\
&\quad + a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(G(b_0)+D) + a_1\widehat{\nu_0^*}(b_1-b_0)\\
&= a_0\widehat{\nu_1^*}\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)(G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\right]\\
&\quad + a_1\widehat{\nu_0^*}\left[\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(G(b_0)+D)+(b_1-b_0)\right].
\end{aligned}
\tag{171}
$$

Dados los valores de $a_0, a_1, b_0, b_1, \widehat{\nu_0^*}, \widehat{\nu_1^*}, G(p), D$ y el supuesto **A3**, es fácil ver que (171) es no negativa. Además,

$$
\begin{aligned}
R1 &= a_0\widehat{\nu_1^*}\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)(G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\right]\\
&\quad + a_1\widehat{\nu_0^*}\left[\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(G(b_0)+D)+(b_1-b_0)\right]\\
&\geq a_1\widehat{\nu_0^*}\left[\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(G(b_0)+D)+(b_1-b_0)\right] \geq a_1\widehat{\nu_0^*}\left(\widehat{\nu_1^*}+a_1\right)(G(b_0)+D)\\
&\geq a_1^2\widehat{\nu_0^*}(G(b_0)+D) \geq a_1^2\widehat{\nu_0^*}G(b_0) > 0.
\end{aligned}
\tag{172}
$$

Y dado que $R1 > 0$, por (172), entonces,

$$
\lim_{\beta\to 0} p^*(\beta) - p^{cp} > 0, \tag{173}
$$

lo que demuestra la desigualdad (23).

Ahora, vamos a demostrar la desigualdad (24):

$$
p^*(\beta) < p^c(\beta) \text{ para todo } \beta \in (0,1],
$$

y para esto utilizaremos la notación usual:

$$
\nu_i^* = \nu_i^*(\beta),\ i = 0,1.
$$

De las ecuaciones (71) y (72) es fácil ver que la siguiente desigualdad se cumplen para todo $\beta \in (0,1]$:

$$
\nu_i^* < \frac{1}{K},\ i = 0,1. \tag{174}
$$

Ahora, vamos a calcular la diferencia

$$\begin{aligned}
&(p^c - p^*)(\beta) = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)b_1 + \left(\frac{1}{K}+a_1\right)b_0 + \left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(T+D)}{\left(\frac{1}{K}+a_0\right) + \left(\frac{1}{K}+a_1\right) + \left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K} \\
&\quad - \frac{(\nu_0^*+a_0)b_1 + (\nu_1^*+a_1)b_0 + [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)}{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K} \\
&= \frac{\left\{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)b_1+\left(\frac{1}{K}+a_1\right)b_0+\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\right\}\{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}}{\left\{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)+\left(\frac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K\right\}\left\{\left(\nu_0^*+a_0\right)+\left(\nu_1^*+a_1\right)+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left(\nu_1^*+a_1\right)K\right\}} \\
&\quad - \frac{\left\{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)+\left(\frac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K\right\}\{(\nu_0^*+a_0)b_1+(\nu_1^*+a_1)b_0+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)\}}{\left\{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)+\left(\frac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K\right\}\left\{\left(\nu_0^*+a_0\right)+\left(\nu_1^*+a_1\right)+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left(\nu_1^*+a_1\right)K\right\}} \\
&= \frac{S1}{S2},
\end{aligned} \tag{175}$$

donde

$$\begin{aligned}
S1 =& \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1 + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0 + \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\right\}\{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\} \\
&- \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\}\{(\nu_0^*+a_0)b_1+(\nu_1^*+a_1)b_0+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)\}
\end{aligned} \tag{176}$$

y

$$S2 = \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\}\{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}. \tag{177}$$

Dados los valores de $a_0, a_1, \beta, \nu_0^*, \nu_1^*$ y K, es fácil ver que $S2 > 0$, entonces, para saber el valor de (175), es suficiente con analizar el valor de (176).

$$\begin{aligned}
S1 =& \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1 + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0 + \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\right\}\{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\} \\
&- \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\}\{(\nu_0^*+a_0)b_1+(\nu_1^*+a_1)b_0+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D)\} \\
=& \{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1 \\
&+ \{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0 \\
&+ \{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)K\}\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \\
&- \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\}(\nu_0^*+a_0)b_1 \\
&- \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\}(\nu_1^*+a_1)b_0 \\
&- \left\{\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\right\}[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)(T+D) \\
=& (\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1 + (\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1 \\
&+ [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)Kb_1 \\
&+ (\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0 + (\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0 \\
&+ [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)Kb_0 \\
&+ \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \\
&+ \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \\
&+ [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K(T+D) \\
&- (\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1 - (\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_1 \\
&- \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)Kb_1 \\
&- (\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_0 - (\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0 \\
&- \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)Kb_0 \\
&- [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(T+D) \\
&- [(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D) \\
&- [(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K(T+D)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&-\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)Kb_1\\
&+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\\
&+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)Kb_1\\
&-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(T+D)\\
&-\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)Kb_0\\
&+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\\
&+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)Kb_0\\
&-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(T+D)\\
&+(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_1-(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)b_0\\
&-(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_1+(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)b_0\\
=&\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(-Kb_1+T+D)\\
&-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(-Kb_1+T+D)\\
&+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(-Kb_0+T+D)\\
&-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(-Kb_0+T+D)\\
&+(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(b_1-b_0)-(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(b_1-b_0)\\
=&\left\{\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\right\}(-Kb_1+T+D)\\
&+\left\{\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\right\}(-Kb_0+T+D)\\
&+\left[(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)-(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\right](b_1-b_0)\\
=&\left\{\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\right\}(G(b_1)+D)\\
&+\left\{\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\right\}(G(b_0)+D)\\
&+\left[(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)-(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\right](b_1-b_0)\\
=&X_1(G(b_1)+D)+X_2(G(b_0)+D)+X_3(b_1-b_0),
\end{aligned}
\tag{178}
$$

donde

$$X_1=\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right), \tag{179}$$

$$X_2=\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right) \tag{180}$$

y

$$X_3=(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)-(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right). \tag{181}$$

Dados los valores de $a_0, a_1, \beta, \nu_0^*, \nu_1^*, K$ y (174), es fácil ver que

$$
\begin{aligned}
X_2=&\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\\
=&(1-\beta)\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right)(\nu_1^*+a_1)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\geq 0
\end{aligned}
\tag{182}
$$

para todo $\beta\in(0,1]$.

Ahora, vamos a demostrar que $X_1>0$ para todo $\beta\in(0,1]$. Sustituyendo (71) en X_1, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
X_1=&\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\\
&-\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left(\frac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\\
=&\frac{\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left\{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K\right\}}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}\\
&-\frac{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0+a_1\left\{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K\right\}\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}
\end{aligned}
\tag{183}
$$

$$=\frac{T1}{T2},$$

donde

$$
\begin{aligned}
T1 = &\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,K\} \\
&-[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,[(1-\beta)\nu_0^*+a_0+a_1\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,K\}]\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)
\end{aligned}
\tag{184}
$$

y

$$
T2 = 1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,K. \tag{185}
$$

Dados los valores de a_0, β, ν_0^* y K, es fácil ver que $T2 > 0$, entonces, para saber el valor de (183) es suficiente con analizar el valor de $T1$.

$$
\begin{aligned}
T1 = &\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,K\} \\
&-[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,[(1-\beta)\nu_0^*+a_0+a_1\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,K\}]\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right) \\
=&\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right](\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,K\} \\
&-[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,[a_1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\,(1+a_1K)]\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right) \\
=&\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0) \\
&+\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right][(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,K \\
&-a_1\,[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right) \\
&-[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]^2\,(1+a_1K)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right) \\
=&\left[(1-\beta)\tfrac{1}{K}+a_0\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0) \\
&+\left[(1-\beta)^2\tfrac{1}{K}\nu_0^*+(1-\beta)a_0\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)+a_0^2\right]\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,K \\
&-a_1\,[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right) \\
&-\left[(1-\beta)^2\nu_0^{*2}+2(1-\beta)a_0\nu_0^*+a_0^2\right](1+a_1K)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right) \\
=&(1-\beta)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\tfrac{1}{K}+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,a_0 \\
&+(1-\beta)^2\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,\nu_0^*+(1-\beta)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K \\
&+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,a_0^2K \\
&-(1-\beta)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^*-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_0a_1 \\
&-(1-\beta)^2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,\nu_0^{*2}-2(1-\beta)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^* \\
&-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0^2 \\
=&(1-\beta)^2\nu_0^*\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,\nu_0^*\right] \\
&+(1-\beta)\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\tfrac{1}{K}+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K\right. \\
&\qquad\left.-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^*-2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^*\right] \\
&+a_0\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,a_0K+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\right. \\
&\qquad\left.-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\right] \\
=&(1-\beta)^2\nu_0^*\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\nu_0^*+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0-\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\nu_0^*-\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^*\right] \\
&+(1-\beta)\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\tfrac{1}{K}+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K\right. \\
&\qquad\left.-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^*-2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^*\right] \\
&+a_0\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\,(1+a_0K)-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\right] \\
=&(1-\beta)^2\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right)a_0K\nu_0^* \\
&+(1-\beta)\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\tfrac{1}{K}+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K\right. \\
&\qquad\left.-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^*-2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^*\right] \\
&+a_0\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(\nu_0^*+a_0)\,K-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&(1-\beta)^2\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right)a_0K\nu_0^* \\
&+(1-\beta)\Big[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\nu_0^*+a_0\right)\tfrac{1}{K}+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\nu_0^*+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K \\
&\qquad-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^*-2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(1+a_1K\right)a_0\nu_0^*\Big] \\
&+\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_0\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\nu_0^*-a_1\right] \\
=&(1-\beta)^2Y_1+(1-\beta)Y_2+\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_0Y_3,
\end{aligned} \tag{186}
$$

donde

$$
Y_1=\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right)a_0K\nu_0^*, \tag{187}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2=&\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\nu_0^*+a_0\right)\tfrac{1}{K}+\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\nu_0^*+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K \\
&-\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^*-2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(1+a_1K\right)a_0\nu_0^*
\end{aligned} \tag{188}
$$

y

$$
Y_3=\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\nu_0^*-a_1. \tag{189}
$$

Dados los valores de a_0, a_1, ν_0^*, K y (174), es fácil ver que $Y_1>0$, y observemos que $Y_3=Y_3(\beta)$ es estrictamente decreciente respecto a β, dado que $\nu_0^*=\nu_0^*(\beta)$ es estrictamente decreciente respecto a β y $\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K>0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
Y_3=&Y_3(\beta)\geq Y_3(1)=\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\nu_0^*(1)-a_1 \\
=&\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)K\frac{a_0+a_1+a_0a_1K}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2}-a_1 \\
=&\frac{a_0+a_1+a_0a_1K}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2}\left(1+a_1K\right)-a_1 \\
=&\frac{\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+a_1K\right)-\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)a_1}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=&\frac{\left[\left(1+a_1K\right)a_0+a_1\right]\left(1+a_1K\right)-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(2+a_1K\right)a_0K\right]a_1}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=&\frac{\left(1+a_1K\right)^2a_0+\left(1+a_1K\right)a_1-\left(1+a_1K\right)a_1-\left(2+a_1K\right)a_0a_1K}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=&\frac{\left[\left(1+a_1K\right)^2-\left(2+a_1K\right)a_1K\right]a_0}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=&\frac{a_0}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2}>0.
\end{aligned} \tag{190}
$$

Entonces, $Y_3>0$ para todo $\beta\in(0,1]$.

Ahora, vamos a probar que $Y_2 > 0$ para todo $\beta \in (0,1]$.

$$
\begin{aligned}
Y_2 =& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\tfrac{1}{K} + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)(\nu_0^*+a_0)\left(\tfrac{1}{K}+\nu_0^*\right)a_0K \\
& - \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^* - 2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^* \\
=& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\nu_0^*\tfrac{1}{K} + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0\tfrac{1}{K} + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\left[{\nu_0^*}^2 + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\nu_0^* + a_0\tfrac{1}{K}\right] \\
& - \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^* - 2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^* \\
=& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\nu_0^*\tfrac{1}{K} + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0\tfrac{1}{K} \\
& + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K{\nu_0^*}^2 + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^* + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0^2 \\
& - \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^* - 2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^* \\
=& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K{\nu_0^*}^2 + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\nu_0^*\tfrac{1}{K} - \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\nu_0^* \\
& + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0\tfrac{1}{K} + \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0^2 \\
& + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^* - 2\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)(1+a_1K)\,a_0\nu_0^* \\
=& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K{\nu_0^*}^2 + \left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\tfrac{1}{K} - \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)a_1\right]\nu_0^* \\
& + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0 - \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^* \\
=& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K{\nu_0^*}^2 + \left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right)\nu_0^* + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right) \\
=& \left[\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^* + \left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right)\right]\nu_0^* + \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right)a_0K \\
=& Z_1\nu_0^* + Z_2,
\end{aligned}
\tag{191}
$$

donde

$$
Z_1 = \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^* + \left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right) \tag{192}
$$

y

$$
Z_2 = \left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)\left(\tfrac{1}{K}-\nu_0^*\right)a_0K. \tag{193}
$$

Dados los valores de a_0, a_1, ν_0^*, K y (174), es fácil ver que $Z_2 > 0$ para todo $\beta \in (0,1]$, y que $Z_1 = Z_1(\beta)$ es estrictamente decreciente respecto a β, dado que $\nu_0^*(\beta)$ es estrictamente decreciente respecto a β y $(a_1 + \frac{1}{K})a_0K > 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
Z_1 =& Z_1(\beta) \geq Z_1(1) = \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\nu_0^*(1) + \left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right) \\
=& \left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K\frac{a_0+a_1+a_0a_1K}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} + \left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right) \\
=& \frac{(a_0+a_1+a_0a_1K)\left(\tfrac{1}{K}+a_1\right)a_0K + \left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right)}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=& \frac{(a_0+a_1+a_0a_1K)(1+a_1K)\,a_0 + \left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right)}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=& \frac{\left(a_0+a_1+2a_0a_1K+a_1^2K+a_0a_1^2K^2\right)a_0}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
& + \frac{\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(\tfrac{1}{K^2}-a_0a_1\right)}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=& \frac{a_0^2 + \left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)a_0a_1}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
& + \frac{\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\tfrac{1}{K^2} - \left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)a_0a_1}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=& \frac{a_0^2 + \left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\tfrac{1}{K^2}}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} \\
=& \frac{a_0^2}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2} + \frac{1}{K^2} > 0.
\end{aligned}
\tag{194}
$$

Entonces, $Z_1 > 0$ para todo $\beta \in (0,1]$, lo que prueba que $Y_2 = \nu_0^* Z_1 + Z_2 > 0$ para todo $\beta \in (0,1]$. Luego, dado que $Y_1, Y_2, Y_3 > 0$, entonces,

$$T1 = (1-\beta)^2 Y_1 + (1-\beta) Y_2 + \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) a_0 Y_3 > 0, \tag{195}$$

lo que demuestra que

$$X_1 = \frac{T1}{T2} > 0. \tag{196}$$

Ahora, dado que $X_1 > 0$ y $X_2 \geq 0$, entonces, si $X_3 \geq 0$ para $\beta_0 \in (0,1]$, tenemos que

$$S1 = X_1(G(b_1) + D) + X_2(G(b_0) + D) + X_3(b_1 - b_0) > 0 \text{ para } \beta_0 \in (0,1]. \tag{197}$$

Por otra parte, si $X_3 < 0$ para $\beta_0 \in (0,1]$, entonces,

$$\begin{aligned}
S1 =& X_1(G(b_1) + D) + X_2(G(b_0) + D) + X_3(b_1 - b_0) \\
=& \left[(1-\beta)\tfrac{1}{K} + a_0\right] (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right) (G(b_1) + D) \\
&- \left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right] (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) (G(b_1) + D) \\
&+ X_2(G(b_0) + D) + X_3(b_1 - b_0) \\
=& (1-\beta)\tfrac{1}{K} (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right) (G(b_1) + D) + a_0 (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right) (G(b_1) + D) \\
&- (1-\beta)\nu_0^* (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) (G(b_1) + D) - a_0 (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) (G(b_1) + D) \\
&+ X_2(G(b_0) + D) + X_3(b_1 - b_0) \\
=& (1-\beta) \left[\tfrac{1}{K} (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right) - \nu_0^* (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right)\right] (G(b_1) + D) \\
&- a_0 \left[(\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) - (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right)\right] (G(b_1) + D) \\
&+ X_2(G(b_0) + D) + X_3(b_1 - b_0) \\
=& (1-\beta) X_4 (G(b_1) + D) - a_0 X_3 (G(b_1) + D) + X_2(G(b_0) + D) + X_3(b_1 - b_0) \\
=& (1-\beta) X_4 (G(b_1) + D) - X_3 \left[a_0(G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)\right] + X_2(G(b_0) + D),
\end{aligned} \tag{198}$$

donde

$$X_4 = \tfrac{1}{K} (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right) - \nu_0^* (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right). \tag{199}$$

Luego, aplicando la desigualdad (174) a (199), obtenemos que

$$\begin{aligned}
X_4 =& \tfrac{1}{K} (\nu_0^* + a_0) \left(\tfrac{1}{K} + a_1\right) - \nu_0^* (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) \\
>& \tfrac{1}{K} (\nu_0^* + a_0) (\nu_1^* + a_1) - \nu_0^* (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) \\
=& (\nu_1^* + a_1) \left[\tfrac{1}{K} (\nu_0^* + a_0) - \nu_0^* \left(\tfrac{1}{K} + a_0\right)\right] \\
=& (\nu_1^* + a_1) \left(a_0 \tfrac{1}{K} - a_0 \nu_0^*\right) \\
=& a_0 (\nu_1^* + a_1) \left(\tfrac{1}{K} - \nu_0^*\right) > 0.
\end{aligned} \tag{200}$$

Entonces, $X_4 > 0$ para $\beta_0 \in (0,1]$, y dado que $X_2 \geq 0$, $X_3 < 0$ y el supuesto **A3**, entonces,

$$\begin{aligned}
S1 =& (1-\beta) X_4 (G(b_1) + D) - X_3 \left[a_0(G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)\right] + X_2(G(b_0) + D) \\
\geq& - X_3 \left[a_0(G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)\right] > 0 \text{ para } \beta_0 \in (0,1].
\end{aligned} \tag{201}$$

Entonces, siempre se cumple que $S1 > 0$ para todo $\beta \in (0,1]$, entonces,

$$(p^c - p^*)(\beta) = \frac{S1}{S2} > 0, \tag{202}$$

lo que finalmente demuestra (24)■

Demostración del Teorema 8:

Primero, vamos a demostrar que π_1^* y π_1^c son estrictamente decrecientes respecto a β.

La función π_1^* es diferenciable respecto a β y

$$\begin{aligned}
{\pi_1^*}' = &\left(p^* q_1^* - \frac{1}{2}a_1 {q_1^*}^2 - b_1 q_1^*\right)' = {p^*}' q_1^* + p^* {q_1^*}' - a_1 q_1^* {q_1^*}' - b_1 {q_1^*}' \\
=&{p^*}' q_1^* + \left(p^* - a_1 q_1^* - b_1\right) {q_1^*}' \\
=&{p^*}' q_1^* + \left(p^* - b_1 - a_1 \frac{p^* - b_1}{\nu_1^* + a_1}\right) {q_1^*}' \\
=&{p^*}' q_1^* + \left(1 - \frac{a_1}{\nu_1^* + a_1}\right) \left(p^* - b_1\right) {q_1^*}' \\
=&{p^*}' q_1^* + \frac{\nu_1^*}{\nu_1^* + a_1} \left(p^* - b_1\right) {q_1^*}'.
\end{aligned} \tag{203}$$

Luego, dados los valores de $a_1, b_1, \nu_1^*, p^*, q_1^*, {p^*}'$ y ${q_1^*}'$, es fácil ver que

$${\pi_1^*}' = {p^*}' q_1^* + \frac{\nu_1^*}{\nu_1^* + a_1} \left(p^* - b_1\right) {q_1^*}' < 0. \tag{204}$$

Análogamente

$${\pi_1^c}' = {p^c}' q_1^c + \frac{\frac{1}{K}}{\frac{1}{K} + a_1} \left(p^c - b_1\right) {q_1^c}' < 0. \tag{205}$$

Entonces, π_1^* y π_1^c son estrictamente decrecientes respecto a $\beta \in (0, 1]$.

Consideremos ahora la diferencia de las funciones π_1^* y π_1^c como sigue:

$$\begin{aligned}
\pi_1^c - \pi_1^* &= \left(p^c q_1^c - \frac{1}{2}a_1 {q_1^c}^2 - b_1 q_1^c\right) - \left(p^* q_1^* - \frac{1}{2}a_1 {q_1^*}^2 - b_1 q_1^*\right) \\
&= \left(p^c - b_1 - \frac{1}{2}a_1 q_1^c\right) q_1^c - \left(p^* - b_1 - \frac{1}{2}a_1 q_1^*\right) q_1^* \\
&= \left[\left(\frac{1}{K} + a_1\right) \frac{p^c - b_1}{\frac{1}{K} + a_1} - \frac{1}{2}a_1 q_1^c\right] q_1^c - \left[\left(\nu_1^* + a_1\right) \frac{p^* - b_1}{\nu_1^* + a_1} - \frac{1}{2}a_1 q_1^*\right] q_1^* \\
&= \left[\left(\frac{1}{K} + a_1\right) q_1^c - \frac{1}{2}a_1 q_1^c\right] q_1^c - \left[\left(\nu_1^* + a_1\right) q_1^* - \frac{1}{2}a_1 q_1^*\right] q_1^* \\
&= \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a_1\right) {q_1^c}^2 - \left(\nu_1^* + \frac{1}{2}a_1\right) {q_1^*}^2.
\end{aligned} \tag{206}$$

Ahora, de (126) tenemos que

$$\begin{aligned}
q_1^* =& \frac{-(b_1 - b_0) + \left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right] \left(G(b_1) + D\right)}{\left(\nu_0^* + a_0\right) + \left(\nu_1^* + a_1\right) \left\{1 + \left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right] K\right\}} \\
=& \frac{\left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right] \left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{\left(\nu_0^* + a_0\right) + \left(\nu_1^* + a_1\right) + \left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right] \left(\nu_1^* + a_1\right) K},
\end{aligned} \tag{207}$$

y, análogamente a (126) y (207),

$$q_1^c = \frac{\left[(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0\right] \left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{\left(\frac{1}{K} + a_0\right) + \left(\frac{1}{K} + a_1\right) + \left[(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0\right] \left(\frac{1}{K} + a_1\right) K}. \tag{208}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación (207) la expresión de ν_1^* dada por (71) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
q_1^* =& \frac{\left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right]\left(G(b_1)+D\right)-(b_1-b_0)}{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_1^*+a_1)+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](\nu_1^*+a_1)K}\\
=& \frac{\left[(1-\beta)\nu_0^* + a_0\right]\left(G(b_1)+D\right)-(b_1-b_0)}{(\nu_0^*+a_0)+\left(\frac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\left(\frac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}+a_1\right)K}\\
=& \frac{(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)\{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\}}{(\nu_0^*+a_0)(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0+a_1(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)]+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0][(1-\beta)\nu_0^*+a_0+a_1(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)]K}\\
=& \frac{(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)\{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\}}{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_0^*+a_0)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K+[a_1+(1+a_1K)([(1-\beta)\nu_0^*+a_0])]+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0][a_1+(1+a_1K)([(1-\beta)\nu_0^*+a_0])]K}\\
=& \frac{(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)\{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\}}{(\nu_0^*+a_0)+(\nu_0^*+a_0)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K+a_1+(1+a_1K)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](a_1+(1+a_1K)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0])K}\\
=& \frac{(1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K)\{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\}}{(\nu_0^*+a_0)+a_1+(1+a_1K)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]+\{(\nu_0^*+a_0)+a_1+(1+a_1K)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]\}[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K}\\
=& \frac{(1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K)\left\{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\right\}}{(1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K)\left\{(\nu_0^*+a_0)+a_1+(1+a_1K)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]\right\}}\\
=& \frac{\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)}{(\nu_0^*+a_0+a_1)+(1+a_1K)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]}.
\end{aligned}
\tag{209}
$$

De la ecuación (71)

$$
\nu_1^* = \frac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K},
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
\nu_1^* + \frac{1}{2}a_1 =& \frac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}+\frac{1}{2}a_1\\
=& \frac{(1-\beta)\nu_0^*+a_0+\frac{1}{2}a_1\left(1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K\right)}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}\\
=& \frac{\frac{1}{2}a_1+\left(1+\frac{1}{2}a_1K\right)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}.
\end{aligned}
\tag{210}
$$

Por otra parte, de la ecuación de q_1^c descrita por (208) tenemos que

$$
\begin{aligned}
q_1^c =& \frac{\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)}{\left(\frac{1}{K}+a_0\right)+\left(\frac{1}{K}+a_1\right)+\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}+a_1\right)K}\\
=& \frac{\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)}{\frac{1}{K}(1+a_0K)+\frac{1}{K}(1+a_1K)+\frac{1}{K}\left[(1-\beta)+a_0K\right](1+a_1K)}\\
=& \frac{\left\{\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\right\}K}{(1+a_0K)+(1+a_1K)\left[(2-\beta)+a_0K\right]}.
\end{aligned}
\tag{211}
$$

Sustituyendo las expresiones (209), (210) y (211) en la ecuación (206) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\pi_1^c - \pi_1^* =& \left(\frac{1}{K}+\frac{1}{2}a_1\right){q_1^c}^2-\left(\nu_1^*+\frac{1}{2}a_1\right){q_1^*}^2\\
=& \left(\frac{1}{K}+\frac{1}{2}a_1\right)\left(\frac{\left\{\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)\right\}K}{(1+a_0K)+(1+a_1K)[(2-\beta)+a_0K]}\right)^2\\
&-\left(\frac{\frac{1}{2}a_1+\left(1+\frac{1}{2}a_1K\right)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}\right)\left(\frac{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)}{\left(\nu_0^*+a_0+a_1\right)+(1+a_1K)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]}\right)^2\\
=& \frac{1}{2}K(2+a_1K)\left(\frac{\left[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0\right](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)}{(1+a_0K)+(1+a_1K)[(2-\beta)+a_0K]}\right)^2\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+(2+a_1K)[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]}{1+\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]K}\right)\left(\frac{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b_1)+D)-(b_1-b_0)}{\left(\nu_0^*+a_0+a_1\right)+(1+a_1K)\left[(1-\beta)\nu_0^*+a_0\right]}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{212}
$$

Finalmente, para demostrar las desigualdades (34) y (35) se debe cumplir que

$$\pi_1^c(1) - \pi_1^*(1) = (\pi_1^c - \pi_1^*)(1) < 0 \tag{213}$$

y

$$\lim_{\beta\to 0} \pi_1^c(\beta) - \lim_{\beta\to 0} \pi_1^*(\beta) = \lim_{\beta\to 0} (\pi_1^c - \pi_1^*)(\beta) > 0. \tag{214}$$

Evaluando la expresión de ν_0^*, dada por (70), en $\beta = 1$, y utilizando la notación $\overline{\nu_0^*} = \nu_0^*(1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\nu_0^*} = \nu_0^*(1) =& \frac{2\left(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K\right)}{(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2) + \sqrt{(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2)^2}} \\ =& \frac{a_0 + a_1 + a_0a_1K}{1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2}.\end{aligned} \tag{215}$$

Ahora, evaluamos (212) en $\beta = 1$ para obtener que

$$\begin{aligned}(\pi_1^c - \pi_1^*)(1) =& \frac{1}{2}K\left(2 + a_1K\right)\left(\frac{[a_0]\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{(1 + a_0K) + (1 + a_1K)\left[1 + a_0K\right]}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + (2 + a_1K)\left[a_0\right]}{1 + [a_0]\,K}\right)\left(\frac{[a_0]\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{\left(\overline{\nu_0^*} + a_0 + a_1\right) + (1 + a_1K)\left[a_0\right]}\right)^2 \\ =& \frac{1}{2}K\left(2 + a_1K\right)\left(\frac{a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{(1 + a_0K)\left(2 + a_1K\right)}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_0\left(2 + a_1K\right)}{1 + a_0K}\right)\left(\frac{a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)}{\left(\overline{\nu_0^*} + a_0 + a_1\right) + a_0\left(1 + a_1K\right)}\right)^2 \\ =& \frac{1}{2}\frac{\left[a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)\right]^2}{1 + a_0K}\frac{K}{(1 + a_0K)\left(2 + a_1K\right)} \\ & - \frac{1}{2}\frac{\left[a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)\right]^2}{1 + a_0K}\frac{a_1 + a_0\left(2 + a_1K\right)}{\left[\left(\overline{\nu_0^*} + a_0 + a_1\right) + a_0\left(1 + a_1K\right)\right]^2} \\ =& \frac{1}{2}\frac{\left[a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)\right]^2}{1 + a_0K}\frac{K}{2 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2} \\ & - \frac{1}{2}\frac{\left[a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)\right]^2}{1 + a_0K}\frac{2a_0 + a_1 + a_0a_1K}{\left(\overline{\nu_0^*} + 2a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)^2} \\ =& U_1\frac{V_1}{W_1}\end{aligned} \tag{216}$$

donde

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{\left[a_0\left(G(b_1) + D\right) - (b_1 - b_0)\right]^2}{1 + a_0K}, \tag{217}$$

$$V_1 = K\left(\overline{\nu_0^*} + 2a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)^2 - \left(2a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)\left(2 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) \tag{218}$$

y

$$W_1 = \left(2 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right)\left(\overline{\nu_0^*} + 2a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)^2. \tag{219}$$

Dados los valores de $a_0, a_1, \overline{\nu_0^*}$ y K, es fácil ver que $U_1 > 0$ y $W_1 > 0$, entonces, para demostrar (213) es suficiente demostrar que $V_1 < 0$. En efecto, sustituyendo la expresión de $\overline{\nu_0^*}$ dada por (215) en (218), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
V_1 =& K\left(\overline{\nu_0^*}+2a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2-\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
=& K\left(\frac{a_0+a_1+a_0a_1K}{1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2}+2a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\\
&-\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
=& \frac{K\left[a_0+a_1+a_0a_1K+\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\right]^2}{\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2}\\
&-\frac{\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2}{\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2}\\
=& \frac{P}{Q},
\end{aligned}
\tag{220}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
P =& K\left[a_0+a_1+a_0a_1K+\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\right]^2\\
&-\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2
\end{aligned}
\tag{221}
$$

y

$$
Q=\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2. \tag{222}
$$

Dados los valores de a_0, a_1 y K, es fácil ver que $Q>0$, y además

$$
\begin{aligned}
P =& K\left[a_0+a_1+a_0a_1K+\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\right]^2\\
&-\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\\
<& K\left[\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)+\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\right]^2\\
&-\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\\
=& K\left[\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\right]^2\\
&-\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\\
=& \Big[K\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
&-\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\Big]\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
=& \Big[\left(2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
&-\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\Big]\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
=& \Big[\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2-1\right)\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2+1\right)\\
&-\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\Big]\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
=& \Big[\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2-1\\
&-\left(1+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)^2\Big]\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)\\
=& -\left(2a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+2a_0K+a_1K+a_0a_1K^2\right)<0.
\end{aligned}
\tag{223}
$$

Entonces, $P<0$, lo que demuestra que

$$
V_1=\frac{P}{Q}<0, \tag{224}
$$

y dado que $U_1 > 0$ y $W_1 > 0$, entonces,

$$(\pi_1^c - \pi_1^*)(1) = U_1 \frac{V_1}{W_1} < 0, \tag{225}$$

lo que demuestra (213).

Ahora, sólo queda demostrar (214). Utilizando nuevamente la notación $\widehat{\nu_0^*} = \lim_{\beta \to 0} \nu_0^*(\beta)$ dada por (165), de (212) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta \to 0} (\pi_1^c - \pi_1^*)(\beta) = \\
&= \frac{1}{2} K (2 + a_1 K) \left(\frac{\left[\frac{1}{K} + a_0\right] (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)}{(1 + a_0 K) + (1 + a_1 K) [2 + a_0 K]} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + (2 + a_1 K) \left[\widehat{\nu_0^*} + a_0\right]}{1 + \left[\widehat{\nu_0^*} + a_0\right] K} \right) \left(\frac{\left[\widehat{\nu_0^*} + a_0\right] (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)}{\left(\widehat{\nu_0^*} + a_0 + a_1\right) + (1 + a_1 K) \left[\widehat{\nu_0^*} + a_0\right]} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} K (2 + a_1 K) \left(\frac{\left(\frac{1}{K} + a_0\right) (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)}{(1 + a_0 K) + (1 + a_1 K) + (1 + a_0 K)(1 + a_1 K)} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + (2 + a_1 K) \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)}{1 + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) K} \right) \left(\frac{\left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)}{a_1 + (2 + a_1 K) \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} K (2 + a_1 K) \left(\frac{\left(\frac{1}{K} + a_0\right) (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)}{(1 + a_1 K) + (1 + a_0 K)(2 + a_1 K)} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) K} \frac{\left[\left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)\right]^2}{a_1 + (2 + a_1 K) \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{V_2}{W_2},
\end{aligned} \tag{226}$$

donde

$$\begin{aligned}
V_2 = & K (2 + a_1 K) \left[\left(\tfrac{1}{K} + a_0\right) (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)\right]^2 \left[1 + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) K\right] \left[a_1 + (2 + a_1 K) \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)\right] \\
& - \left[(1 + a_1 K) + (1 + a_0 K)(2 + a_1 K)\right]^2 \left[\left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) (G(b_1) + D) - (b_1 - b_0)\right]^2
\end{aligned} \tag{227}$$

y

$$W_2 = \left[(1 + a_1 K) + (1 + a_0 K)(2 + a_1 K)\right]^2 \left[1 + \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right) K\right] \left[a_1 + (2 + a_1 K) \left(\widehat{\nu_0^*} + a_0\right)\right]. \tag{228}$$

Dados los valores de $a_0, a_1, \widehat{\nu_0^*}$ y K, es fácil ver que $W_2 > 0$, entonces, para demostrar (214) es suficiente con demostrar que $V_2 > 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
V_2 =& K\left(2+a_1K\right)\left[1+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K\right]\left[a_1+\left(2+a_1K\right)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\right]\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(1+a_0K\right)\left(2+a_1K\right)\right]^2\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
=&\left[\left(2+a_1K\right)+\left(2+a_1K\right)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K\right]\left[a_1K+\left(2+a_1K\right)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K\right]\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(1+a_0K\right)\left(2+a_1K\right)\right]^2\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
=&\left[\left(1+a_1K\right)+\left(2+a_1K\right)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K+1\right]\left[\left(1+a_1K\right)+\left(2+a_1K\right)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K-1\right]\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(1+a_0K\right)\left(2+a_1K\right)\right]^2\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
=&\left(\left[\left(1+a_1K\right)+\left(2+a_1K\right)\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)K\right]^2-1\right)\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(1+a_0K\right)\left(2+a_1K\right)\right]^2\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
=&\left[\left(1+a_1K\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(2+a_1K\right)K\right]^2\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(2+a_1K\right)K\right]^2\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2.
\end{aligned}\tag{229}$$

Para fines prácticos, vamos a introducir la siguiente notación:

$$\eta = 1+a_1K > 0,\tag{230}$$

$$\xi = K\left(1+\eta\right) = K\left(2+a_1K\right) > 0,\tag{231}$$

$$\mathcal{Z} = \eta + a_0\xi = \left(1+a_1K\right)+a_0K\left(2+a_1K\right) > 0,\tag{232}$$

$$G1 = G(b_1)+D > 0\tag{233}$$

y

$$G3 = a_0G1-\left(b_1-b_0\right) = a_0\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right) > 0;\tag{234}$$

de tal manera que podamos reescribir (229) como sigue:

$$\begin{aligned}
V_2 =&\left[\left(1+a_1K\right)+\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(2+a_1K\right)K\right]^2\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(1+a_1K\right)+\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(2+a_1K\right)K\right]^2\left[\left(\widehat{\nu_0^*}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
&-\left[\left(\tfrac{1}{K}+a_0\right)\left(G(b_1)+D\right)-\left(b_1-b_0\right)\right]^2\\
=&\left(\widehat{\nu_0^*}\xi+\mathcal{Z}\right)^2\left(\tfrac{1}{K}G1+G3\right)^2-\left(\tfrac{1}{K}\xi+\mathcal{Z}\right)^2\left(\widehat{\nu_0^*}G1+G3\right)^2-\left(\tfrac{1}{K}G1+G3\right)^2\\
=&\left(\tfrac{1}{K}\widehat{\nu_0^*}\xi G1+\tfrac{1}{K}\mathcal{Z}G1+\widehat{\nu_0^*}\xi G3+\mathcal{Z}G3\right)^2-\left(\tfrac{1}{K}\widehat{\nu_0^*}\xi G1+\widehat{\nu_0^*}\mathcal{Z}G1+\tfrac{1}{K}\xi G3+\mathcal{Z}G3\right)^2\\
&-\left(\frac{1}{K^2}G1^2+2\tfrac{1}{K}G1G3+G3^2\right)\\
=&\left[2\left(\tfrac{1}{K}\widehat{\nu_0^*}\xi G1+\mathcal{Z}G3\right)+\left(\tfrac{1}{K}+\widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1+\xi G3\right)\right]\left[\left(\tfrac{1}{K}-\widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1-\xi G3\right)\right]\\
&-\left(\frac{1}{K^2}G1^2+2\tfrac{1}{K}G1G3\right)-G3^2\\
=&2\left(\tfrac{1}{K}\widehat{\nu_0^*}\xi G1+\mathcal{Z}G3\right)\left(\tfrac{1}{K}-\widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1-\xi G3\right)+\left(\tfrac{1}{K^2}-\widehat{\nu_0^*}^2\right)\left(\mathcal{Z}^2G1^2-\xi^2G3^2\right)\\
&-\tfrac{1}{K}G1\left(\tfrac{1}{K}G1+2G3\right)-G3^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\tfrac{1}{K^2} - \widehat{\nu_0^*}^2\right)\left(\mathcal{Z}^2 G1^2 - \xi^2 G3^2\right) - \tfrac{1}{K} G1 \left(\tfrac{1}{K} G1 + 2G3\right) \\
&\quad + 2\mathcal{Z} G3 \left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3) - G3^2 \\
&\quad + 2\tfrac{1}{K}\widehat{\nu_0^*}\xi G1 \left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3) \\
&= \mathcal{P}_1 + \mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_1,
\end{aligned}
\tag{235}
$$

donde

$$
\mathcal{P}_1 = \left(\tfrac{1}{K^2} - \widehat{\nu_0^*}^2\right)\left(\mathcal{Z}^2 G1^2 - \xi^2 G3^2\right) - \tfrac{1}{K} G1 \left(\tfrac{1}{K} G1 + 2G3\right), \tag{236}
$$

$$
\mathcal{Q}_1 = 2\mathcal{Z} G3 \left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3) - G3^2 \tag{237}
$$

y

$$
\mathcal{R}_1 = 2\tfrac{1}{K}\widehat{\nu_0^*}\xi G1 \left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3). \tag{238}
$$

Ahora, vamos a demostrar que

$$
\mathcal{Z} G1 - \xi G3 > 0. \tag{239}
$$

Utilizando (232) y (234) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} G1 - \xi G3 &= (\eta + a_0\xi) G1 - \xi\left(a_0 G1 - (b_1 - b_0)\right) \\
&= \eta G1 + \xi(b_1 - b_0) \geq \eta G1 > 0,
\end{aligned}
\tag{240}
$$

lo que demuestra (239).
Entonces, dados los valores de $\widehat{\nu_0^*}, K$, (231), (233), (174) y (239), es fácil ver que $\mathcal{R}_1 > 0$.
Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= 2\mathcal{Z} G3 \left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3) - G3^2 \\
&= \left[2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3) - G3\right] G3.
\end{aligned}
\tag{241}
$$

Ahora, hacemos uso de (234) para reescribir (241) como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \left[2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(\mathcal{Z} G1 - \xi G3) - G3\right] G3 \\
&= \left\{2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z} G1 - \xi\left[a_0 G1 - (b_1 - b_0)\right]\right) - \left[a_0 G1 - (b_1 - b_0)\right]\right\} G3 \\
&= \left\{2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\left[\mathcal{Z} G1 - a_0\xi G1 + \xi(b_1 - b_0)\right] - a_0 G1 + (b_1 - b_0)\right\} G3 \\
&= \left\{2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\left[(\mathcal{Z} - a_0\xi) G1 + \xi(b_1 - b_0)\right] - a_0 G1 + (b_1 - b_0)\right\} G3 \\
&= \left\{2\mathcal{Z}(\mathcal{Z} - a_0\xi)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) G1 + 2\xi\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)(b_1 - b_0) - a_0 G1 + (b_1 - b_0)\right\} G3 \\
&= \left\{\left[2\mathcal{Z}(\mathcal{Z} - a_0\xi)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0\right] G1 + \left[2\xi\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + 1\right](b_1 - b_0)\right\} G3.
\end{aligned}
\tag{242}
$$

Además, de (232), tenemos que

$$
\eta = \mathcal{Z} - a_0\xi = 1 + a_1 K. \tag{243}
$$

Y sustituyendo (243) en (242) obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \left\{\left[2\mathcal{Z}(\mathcal{Z} - a_0\xi)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0\right] G1 + \left[2\xi\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + 1\right](b_1 - b_0)\right\} G3 \\
&= \left\{\left[2\mathcal{Z}(1 + a_1 K)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0\right] G1 + \left[2\xi\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + 1\right](b_1 - b_0)\right\} G3 \\
&= \left\{\left[2a_1 K\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + 2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0\right] G1 + \left[2\xi\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + 1\right](b_1 - b_0)\right\} G3 \\
&= \left[(V_3 + W_3) G1 + U_3(b_1 - b_0)\right] G3,
\end{aligned}
\tag{244}
$$

donde,

$$V_3 = 2a_1K\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right), \tag{245}$$

$$W_3 = 2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0 \tag{246}$$

y

$$U_3 = 2\xi\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + 1. \tag{247}$$

Dados los valores de a_1, K, ξ y $\mathcal{Z}$, es fácil ver que $V_3 > 0$ y $U_3 > 0$. Ahora, vamos a demostrar que $W_3 > 0$. Para esto, primero sustituimos (232) en (246) para obtener que:

$$\begin{aligned} W_3 =& 2\mathcal{Z}\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0 \\ =& 2\left[(1 + a_1K) + a_0K\left(2 + a_1K\right)\right]\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0 \\ >& a_0K\left(2 + a_1K\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0 \\ =& a_0\left[K\left(2 + a_1K\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - 1\right]. \end{aligned} \tag{248}$$

Luego, utilizando el valor de $\widehat{\nu_0^*}$ dado por (165) tenemos que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} =& \tfrac{1}{K} - \tfrac{2(a_0+a_1+a_0a_1K)}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}} \\ =& \tfrac{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}-2K(a_0+a_1+a_0a_1K)}{K\left[(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}\right]} \\ =& \tfrac{\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}-\left(2a_1K+a_0a_1K^2\right)}{K\left[(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}\right]} \\ =& \tfrac{\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}-a_1K(2+a_0K)}{K\left[(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}\right]}. \end{aligned} \tag{249}$$

Ahora, sustituimos (249) en (248) para obtener que:

$$\begin{aligned} W_3 >& a_0\left[K\left(2 + a_1K\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - 1\right] \\ =& a_0\left[K\left(2 + a_1K\right)\tfrac{\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}-a_1K(2+a_0K)}{K\left[(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}\right]} - 1\right] \\ =& a_0\left[\left(2 + a_1K\right)\tfrac{\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}-a_1K(2+a_0K)}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}} - 1\right] \\ =& \tfrac{a_0}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}}\Bigg[\\ & \left(2 + a_1K\right)\sqrt{\left(2a_0K + a_0a_1K^2\right)^2 + 4\left(2K + a_1K^2\right)\left(a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)} \\ & - a_1K\left(2 + a_0K\right)\left(2 + a_1K\right) - \left(2a_0K + a_0a_1K^2\right) \\ & - \sqrt{\left(2a_0K + a_0a_1K^2\right)^2 + 4\left(2K + a_1K^2\right)\left(a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)}\Bigg] \\ =& \tfrac{a_0}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}}\Bigg[\\ & \left[(2 + a_1K) - 1\right]\sqrt{\left(2a_0K + a_0a_1K^2\right)^2 + 4\left(2K + a_1K^2\right)\left(a_0 + a_1 + a_0a_1K\right)} \\ & - a_1K\left(2 + a_0K\right)\left(2 + a_1K\right) - a_0K\left(2 + a_1K\right)\Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}}\Bigg\{\\
&(1+a_1K)\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\\
&-K\left(2+a_1K\right)\left[a_1\left(2+a_0K\right)+a_0\right]\Bigg\}\\
&= \frac{a_0}{(2a_0K+a_0a_1K^2)+\sqrt{(2a_0K+a_0a_1K^2)^2+4(2K+a_1K^2)(a_0+a_1+a_0a_1K)}}\Bigg\{\\
&(1+a_1K)\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\\
&-K\left(2+a_1K\right)\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]\Bigg\}\\
&=a_0\frac{V_4}{W_4},
\end{aligned}
\tag{250}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
V_4 =& \left(1+a_1K\right)\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\\
&-K\left(2+a_1K\right)\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]
\end{aligned}
\tag{251}
$$

y

$$
W_4 = \left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)+\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}. \tag{252}
$$

Dados los valores de a_0, a_1 y K, es fácil ver que $W_4 > 0$, entonces, para saber el valor de (250) sólo hace falta analizar el valor de V_4. Supongamos que

$$
\begin{aligned}
V_4 =& \left(1+a_1K\right)\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\\
&-K\left(2+a_1K\right)\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]\leq 0,
\end{aligned}
\tag{253}
$$

entonces, tendríamos que

$$
\begin{aligned}
&\left(1+a_1K\right)\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\\
&\leq K\left(2+a_1K\right)\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right],
\end{aligned}
\tag{254}
$$

luego, como ambos términos son positivos, sus cuadrados conservan la desigualdad, entonces,

$$
\begin{aligned}
&\left(1+a_1K\right)^2\left[\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]\\
&\leq K^2\left(2+a_1K\right)^2\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]^2,
\end{aligned}
\tag{255}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
&\left(1+a_1K\right)^2\left[a_0^2K^2\left(2+a_1K\right)^2+4K\left(2+a_1K\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]\\
&\leq K^2\left(2+a_1K\right)^2\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]^2,
\end{aligned}
\tag{256}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
&K\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)^2\left[a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]\\
&\leq K^2\left(2+a_1K\right)^2\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]^2,
\end{aligned}
\tag{257}
$$

además, $K\left(2+a_1K\right)>0$, entonces,

$$
\begin{aligned}
&\left(1+a_1K\right)^2\left[a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]\\
&\leq K\left(2+a_1K\right)\left[a_0\left(1+a_1K\right)+2a_1\right]^2,
\end{aligned}
\tag{258}
$$

luego, desarrollando cuadrados obtenemos que:

$$\begin{aligned}&(1+a_1K)^2\left[a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]\\&\leq K\left(2+a_1K\right)\left[a_0^2\left(1+a_1K\right)^2+4a_0a_1\left(1+a_1K\right)+4a_1^2\right],\end{aligned} \tag{259}$$

y distribuyendo términos:

$$\begin{aligned}&a_0^2K\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)^2+4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+a_1K\right)^2\\&\leq a_0^2K\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)^2+4a_0a_1K\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)+4a_1^2K\left(2+a_1K\right),\end{aligned} \tag{260}$$

entonces,

$$\begin{aligned}&4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(1+a_1K\right)^2\\&\leq 4a_0a_1K\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)+4a_1^2K\left(2+a_1K\right),\end{aligned} \tag{261}$$

distribuyendo nuevamente obtenemos:

$$\begin{aligned}&4\left(a_0+a_1\right)\left(1+a_1K\right)^2+4a_0a_1K\left(1+a_1K\right)^2\\&\leq 4a_0a_1K\left(1+a_1K\right)+4a_0a_1K\left(1+a_1K\right)^2+4a_1^2K\left(2+a_1K\right),\end{aligned} \tag{262}$$

por lo que

$$\begin{aligned}&4\left(a_0+a_1\right)\left(1+a_1K\right)^2\\&\leq 4a_0a_1K\left(1+a_1K\right)+4a_1^2K\left(2+a_1K\right),\end{aligned} \tag{263}$$

entonces,

$$\begin{aligned}&\left(a_0+a_1\right)\left(1+a_1K\right)^2\\&\leq a_0a_1K\left(1+a_1K\right)+a_1^2K\left(2+a_1K\right),\end{aligned} \tag{264}$$

distribuyendo términos y desarrolando cuadrados de nuevo tenemos que:

$$\begin{aligned}&\left(a_0+a_1\right)\left(1+2a_1K+a_1^2K^2\right)\\&\leq a_0a_1K\left(1+a_1K\right)+a_1^2K\left(1+a_1K\right)+a_1^2K,\end{aligned} \tag{265}$$

entonces,

$$\begin{aligned}&\left(a_0+a_1\right)\left(1+2a_1K+a_1^2K^2\right)\\&\leq \left(a_0+a_1\right)a_1K\left(1+a_1K\right)+a_1^2K,\end{aligned} \tag{266}$$

por lo que

$$\begin{aligned}&\left(a_0+a_1\right)\left(1+2a_1K+a_1^2K^2\right)\\&\leq \left(a_0+a_1\right)\left(a_1K+a_1^2K^2\right)+a_1^2K,\end{aligned} \tag{267}$$

y, entonces,

$$\left(a_0+a_1\right)\left(1+a_1K\right)\leq a_1^2K, \tag{268}$$

lo que finalmente lleva a que

$$a_0+a_1+a_0a_1K+a_1^2K\leq a_1^2K, \tag{269}$$

lo cual no es posible ya que $a_0+a_1+a_0a_1K>0$.
Entonces, debe ser que

$$V_4>0, \tag{270}$$

por lo que,

$$W_3>a_0\frac{V_4}{W_4}>0. \tag{271}$$

Entonces, dado que $V_3>0$, $W_3>0$ y $U_3>0$, además de los valores de $b_0, b_1, G1$ y $G3$, tenemos que

$$\mathcal{Q}_1=\left[\left(V_3+W_3\right)G1+U_3(b_1-b_0)\right]G3>0. \tag{272}$$

Ahora, sólo queda demostrar el valor de $\mathcal{P}_1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \left(\tfrac{1}{K^2} - \widehat{\nu_0^*}^2\right)\left(\mathcal{Z}^2 G1^2 - \xi^2 G3^2\right) - \tfrac{1}{K}G1\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{K} + \widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1 + \xi G3\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1 - \xi G3\right) - \tfrac{1}{K}G1\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{K}\mathcal{Z}G1 + \tfrac{1}{K}\xi G3 + \widehat{\nu_0^*}\mathcal{Z}G1 + \widehat{\nu_0^*}\xi G3\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1 - \xi G3\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}G1\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right).\end{aligned} \tag{273}$$

Veamos que, utilizando (231), (234) y (243),

$$\xi = K\left(2 + a_1 K\right) > 2K, \tag{274}$$

$$\mathcal{Z}G1 - \xi G3 = \mathcal{Z}G1 - \xi\left[a_0 G1 - (b_1 - b_0)\right] \geq \mathcal{Z}G1 - a_0\xi G1 = \eta G1, \tag{275}$$

$$\mathcal{Z} = \eta + a_0\xi > \eta \tag{276}$$

y

$$\widehat{\nu_0^*}\xi G3 > 0. \tag{277}$$

Utilizando las desigualdades (274)-(277), para la ecuación (273) tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \left(\tfrac{1}{K}\mathcal{Z}G1 + \tfrac{1}{K}\xi G3 + \widehat{\nu_0^*}\mathcal{Z}G1 + \widehat{\nu_0^*}\xi G3\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\left(\mathcal{Z}G1 - \xi G3\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}G1\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\\ &> \left(\tfrac{1}{K}\mathcal{Z}G1 + 2G3 + \widehat{\nu_0^*}\eta G1\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\eta G1\\ &\quad - \tfrac{1}{K}G1\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\\ &= \Big[\eta\left(\tfrac{1}{K}\mathcal{Z}G1 + 2G3 + \widehat{\nu_0^*}\eta G1\right)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\Big]G1\\ &= \Big\{\Big[\left(\tfrac{1}{K}\mathcal{Z} + \widehat{\nu_0^*}\eta\right)\eta G1 + 2\eta G3\Big]\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\Big\}G1.\end{aligned} \tag{278}$$

Luego, tenemos que, haciendo uso de (230), (232) y (274),

$$\eta = 1 + a_1 K > 1 \tag{279}$$

y

$$\mathcal{Z} = \eta + a_0\xi > \eta + 2a_0 K. \tag{280}$$

Entonces, utilizando las desigualdades (279) y (280), para la ecuación (278) tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &> \Big\{\Big[\left(\tfrac{1}{K}\mathcal{Z} + \widehat{\nu_0^*}\eta\right)\eta G1 + 2\eta G3\Big]\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\Big\}G1\\ &> \Big\{\Big[\left(\tfrac{1}{K}\left(\eta + 2a_0 K\right) + \widehat{\nu_0^*}\right)G1 + 2\eta G3\Big]\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\Big\}G1\\ &= \Big\{\Big[\left(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right)G1 + 2\eta G3\Big]\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right)\\ &\quad - \tfrac{1}{K}\left(\tfrac{1}{K}G1 + 2G3\right)\Big\}G1.\end{aligned} \tag{281}$$

Ahora, sustituyendo el valor de $G3$ dado por (234) en (281) obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 >& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + \widehat{\nu_0^*} \Big) G1 + 2\eta G3 \Big] \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \\ & - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} G1 + 2G3 \right) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + \widehat{\nu_0^*} \Big) G1 + 2\eta \left[a_0 G1 - (b_1 - b_0) \right] \Big] \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \\ & - \tfrac{1}{K} \left\{ \tfrac{1}{K} G1 + 2 \left[a_0 G1 - (b_1 - b_0) \right] \right\} \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + \widehat{\nu_0^*} \Big) G1 + 2a_0\eta G1 - 2\eta (b_1 - b_0) \Big] \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \\ & - \tfrac{1}{K} \left[\tfrac{1}{K} G1 + 2a_0 G1 - 2(b_1 - b_0) \right] \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + 2a_0\eta + \widehat{\nu_0^*} \Big) G1 - 2\eta (b_1 - b_0) \Big] \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \\ & - \tfrac{1}{K} \left[\left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) G1 - 2(b_1 - b_0) \right] \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + 2a_0\eta + \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) G1 - 2\eta \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) (b_1 - b_0) \\ & - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) G1 + 2\tfrac{1}{K}(b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + 2a_0\eta + \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[\tfrac{1}{K} - \eta \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1. \end{aligned} \tag{282}$$

Después, sustituimos el valor de η dado por (230) en (282) para obtener que:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 >& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}\eta + 2a_0 + 2a_0\eta + \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[\tfrac{1}{K} - \eta \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K}(1 + a_1 K) + 2a_0 + 2a_0\eta + \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[\tfrac{1}{K} - (1 + a_1 K) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\Big(\tfrac{1}{K} + a_1 + 2a_0 + 2a_0\eta + \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[\tfrac{1}{K} - \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - a_1 K \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[\left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) + (a_1 + 2a_0\eta) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) + \widehat{\nu_0^*} \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \tfrac{1}{K} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[\widehat{\nu_0^*} - a_1 + a_1 K \widehat{\nu_0^*} \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[-\widehat{\nu_0^*} \left(\tfrac{1}{K} + 2a_0 \right) + (a_1 + 2a_0\eta) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) + \widehat{\nu_0^*} \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[(1 + a_1 K) \widehat{\nu_0^*} - a_1 \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \Big\{ \Big[(a_1 + 2a_0\eta) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \widehat{\nu_0^*} \Big(2a_0 + \widehat{\nu_0^*} \Big) \Big] G1 \\ & + 2 \Big[(1 + a_1 K) \widehat{\nu_0^*} - a_1 \Big] (b_1 - b_0) \Big\} G1 \\ =& \left[V_5 G1 + 2W_5 (b_1 - b_0) \right] G1, \end{aligned} \tag{283}$$

donde

$$V_5 = (a_1 + 2a_0\eta) \Big(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*} \Big) - \widehat{\nu_0^*} \Big(2a_0 + \widehat{\nu_0^*} \Big) \tag{284}$$

y

$$W_5 = (1 + a_1 K) \widehat{\nu_0^*} - a_1. \tag{285}$$

Ahora, vamos a demostrar que $V_5 > 0$ y $W_5 > 0$.

Primero, como $\nu_0^*(\beta)$ es estrictamente decreciente, tenemos que $\widehat{\nu_0^*} = \lim\limits_{\beta\to 0} \nu_0^*(\beta) > \nu_0^*(1) = \overline{\nu_0^*}$, entonces,

$$W_5 = (1 + a_1K)\,\widehat{\nu_0^*} - a_1 > (1 + a_1K)\,\overline{\nu_0^*} - a_1. \tag{286}$$

Ahora, sustituimos el valor de $\overline{\nu_0^*}$ dado por (215) en (286) para obtener que:

$$\begin{aligned} W_5 >& (1 + a_1K)\,\overline{\nu_0^*} - a_1 \\ =& (1 + a_1K)\left(\frac{a_0 + a_1 + a_0a_1K}{1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2}\right) - a_1 \\ =& \frac{(1 + a_1K)(a_0 + a_1 + a_0a_1K) - a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right)}{1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2} \\ =& \frac{V_6}{W_6}, \end{aligned} \tag{287}$$

donde

$$V_6 = (1 + a_1K)(a_0 + a_1 + a_0a_1K) - a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) \tag{288}$$

y

$$W_6 = 1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2. \tag{289}$$

Dado los valores de a_0, a_1 y K, es fácil ver que $W_6 > 0$. Entonces, investigaremos el valor de V_6.

$$\begin{aligned} V_6 =& (1 + a_1K)(a_0 + a_1 + a_0a_1K) - a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) \\ =& (a_0 + a_1 + a_0a_1K) + a_1K(a_0 + a_1 + a_0a_1K) - a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) \\ =& a_0 + a_1(1 + a_0K) + a_1\left(a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) - a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) \\ =& a_0 + a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) - a_1\left(1 + 2a_0K + a_1K + a_0a_1K^2\right) \\ =& a_0 > 0. \end{aligned} \tag{290}$$

Por lo tanto $V_6 > 0$ y

$$W_5 > \frac{V_6}{W_6} > 0. \tag{291}$$

Ahora, sólo queda demostrar que $V_5 > 0$.

$$\begin{aligned} V_5 =& (a_1 + 2a_0\eta)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(2a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right) \\ =& (a_1 + a_0\eta)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) + a_0\eta\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right) - a_0\widehat{\nu_0^*} \\ =& \left[(a_1 + a_0\eta)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right)\right] + a_0\left[\eta\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\right] \\ =& V_7 + a_0W_7, \end{aligned} \tag{292}$$

donde

$$V_7 = (a_1 + a_0\eta)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right) \tag{293}$$

y

$$W_7 = \eta\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}. \tag{294}$$

Ya por último demostraremos que $V_7 > 0$ y $W_7 > 0$. Sustituimos el valor de η dado por (230) en V_7 para obtener que:

$$\begin{aligned} V_7 =& (a_1 + a_0\eta)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right) \\ =& \left[a_1 + a_0(1 + a_1K)\right]\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right) \\ =& (a_1 + a_0 + a_0a_1K)\left(\tfrac{1}{K} - \widehat{\nu_0^*}\right) - \widehat{\nu_0^*}\left(a_0 + \widehat{\nu_0^*}\right) \\ =& \tfrac{1}{K}(a_1 + a_0 + a_0a_1K) - \widehat{\nu_0^*}(a_1 + a_0 + a_0a_1K) - a_0\widehat{\nu_0^*} - \widehat{\nu_0^*}^2 \\ =& \tfrac{1}{K}(a_1 + a_0 + a_0a_1K) - \widehat{\nu_0^*}(a_1 + 2a_0 + a_0a_1K) - \widehat{\nu_0^*}^2. \end{aligned} \tag{295}$$

Ahora, haciendo uso de la relación

$$(1-\beta)\left(-2\tau+a_1\tau^2\right)\nu_0^2+\left(\beta-2a_0\tau-\beta a_1\tau+a_0a_1\tau^2\right)\nu_0-\left(a_0+a_1-a_0a_1\tau\right)=0,$$

dada por (45), para $\tau=-K$ y aplicando el límite cuando $\beta\to 0$, obtenemos la siguiente relación:

$$\left(2K+a_1K^2\right)\widehat{\nu_0^*}^2+\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)\widehat{\nu_0^*}-\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)=0. \tag{296}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\left(2K+a_1K^2\right)\widehat{\nu_0^*}^2+\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)\widehat{\nu_0^*}-\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\\
&=\left(2+a_1K\right)K\widehat{\nu_0^*}^2+\left(2a_0+a_0a_1K\right)K\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)K\\
&=\left[\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2+\left(2a_0+a_0a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]K\\
&=\left[\left(1+1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2+\left(a_1+2a_0+a_0a_1K-a_1\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]K\\
&=\left[\widehat{\nu_0^*}^2+\left(a_1+2a_0+a_0a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)+\left(1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2-a_1\widehat{\nu_0^*}\right]K\\
&=0.
\end{aligned} \tag{297}$$

Luego, como $K>0$, tenemos que

$$\widehat{\nu_0^*}^2+\left(a_1+2a_0+a_0a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)+\left(1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2-a_1\widehat{\nu_0^*}=0, \tag{298}$$

entonces,

$$\left(1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2-a_1\widehat{\nu_0^*}=\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)-\left(a_1+2a_0+a_0a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\widehat{\nu_0^*}^2. \tag{299}$$

Ahora, utilizando la igualdad (299) en (295) tenemos que:

$$\begin{aligned}
V_7=&\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)-\left(a_1+2a_0+a_0a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\widehat{\nu_0^*}^2\\
=&\left(1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2-a_1\widehat{\nu_0^*}\\
=&\left[\left(1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-a_1\right]\widehat{\nu_0^*}\\
=&W_5\widehat{\nu_0^*}.
\end{aligned} \tag{300}$$

Como ya hemos visto $W_5>0$ y $\widehat{\nu_0^*}>0$, entonces,

$$V_7=W_5\widehat{\nu_0^*}>0. \tag{301}$$

Ya sólo falta demostrar que $W_7>0$. Para esto, sustituimos nuevamente el valor de η dado por (230) en W_7 para obtener que:

$$\begin{aligned}
W_7=&\eta\left(\tfrac{1}{K}-\widehat{\nu_0^*}\right)-\widehat{\nu_0^*}\\
=&\left(1+a_1K\right)\left(\tfrac{1}{K}-\widehat{\nu_0^*}\right)-\widehat{\nu_0^*}\\
=&\tfrac{1}{K}\left(1+a_1K\right)-\left(1+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\widehat{\nu_0^*}\\
=&\tfrac{1}{K}\left(1+a_1K\right)-\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}.
\end{aligned} \tag{302}$$

Luego, haciendo uso nuevamente de la relación (296) tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\left(2K+a_1K^2\right)\widehat{\nu_0^*}^2+\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)\widehat{\nu_0^*}-\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\\
&=\left[\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2+\left(2a_0+a_0a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]K\\
&=\left\{\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2+a_0\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}K\\
&=\left\{\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2+a_0\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}a_1-\tfrac{1}{K}a_0\left(1+a_1K\right)\right\}K\\
&=\left\{\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}^2-\tfrac{1}{K}a_1+a_0\left[\left(2+a_1K\right)\widehat{\nu_0^*}-\tfrac{1}{K}\left(1+a_1K\right)\right]\right\}K.
\end{aligned} \tag{303}$$

Luego, como $K > 0$, se sigue que:

$$(2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}^2 - \tfrac{1}{K} a_1 + a_0 \left[(2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*} - \tfrac{1}{K}(1 + a_1 K)\right] = 0, \tag{304}$$

entonces,

$$(2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}^2 - \tfrac{1}{K} a_1 = -a_0 \left[(2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*} - \tfrac{1}{K}(1 + a_1 K)\right], \tag{305}$$

y dado que $a_0 > 0$, tenemos que:

$$\tfrac{1}{a_0}\left[(2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}^2 - \tfrac{1}{K} a_1\right] = \tfrac{1}{K}(1 + a_1 K) - (2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}. \tag{306}$$

Ahora, haciendo uso de la igualdad (306) en (302) obtenemos que:

$$\begin{aligned} W_7 =& \tfrac{1}{K}(1 + a_1 K) - (2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*} \\ =& \tfrac{1}{a_0}\left[(2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}^2 - \tfrac{1}{K} a_1\right] \\ =& \frac{U_8}{a_0}, \end{aligned} \tag{307}$$

donde

$$U_8 = (2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}^2 - \tfrac{1}{K} a_1. \tag{308}$$

Finalmente, supongamos que

$$U_8 \leq 0. \tag{309}$$

Sustituyendo el valor de $\widehat{\nu_0^*}$, dado por (165), en U_8 tenemos que:

$$\begin{aligned} U_8 =& (2 + a_1 K)\,\widehat{\nu_0^*}^2 - \tfrac{1}{K} a_1 \\ =& (2 + a_1 K)\left[\frac{2(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)}{(2a_0 K + a_0 a_1 K^2) + \sqrt{(2a_0 K + a_0 a_1 K^2)^2 + 4(2K + a_1 K^2)(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)}}\right]^2 - \tfrac{1}{K} a_1 \\ =& \Bigg\{(2 + a_1 K)\,[2\,(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)]^2 - \tfrac{1}{K} a_1 \Bigg[\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right) \\ & + \sqrt{\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right)^2 + 4\,(2K + a_1 K^2)\,(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)}\Bigg]^2\Bigg\} \\ & / \left[\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right) + \sqrt{\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right)^2 + 4\,(2K + a_1 K^2)\,(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)}\right]^2 \\ =& \frac{V_9}{W_9} \leq 0, \end{aligned} \tag{310}$$

donde

$$\begin{aligned} V_9 =& (2 + a_1 K)\,[2\,(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)]^2 - \tfrac{1}{K} a_1 \Bigg[\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right) \\ & + \sqrt{\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right)^2 + 4\,(2K + a_1 K^2)\,(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)}\Bigg]^2 \end{aligned} \tag{311}$$

y

$$W_9 = \left[\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right) + \sqrt{\left(2a_0 K + a_0 a_1 K^2\right)^2 + 4\,(2K + a_1 K^2)\,(a_0 + a_1 + a_0 a_1 K)}\right]^2. \tag{312}$$

Dados los valores de a_0, a_1 y K, es fácil ver que $W_9 > 0$, entonces, por (310), se debe cumplir que

$$V_9 \leq 0. \tag{313}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
V_9 =& \left(2+a_1K\right)\left[2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\right]^2-\tfrac{1}{K}a_1\left[\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)\right.\\
&\left.+\sqrt{\left(2a_0K+a_0a_1K^2\right)^2+4\left(2K+a_1K^2\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\right]^2\\
=&4\left(2+a_1K\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2-\tfrac{1}{K}a_1\left[a_0K\left(2+a_1K\right)\right.\\
&\left.+\sqrt{a_0^2K^2\left(2+a_1K\right)^2+4K\left(2+a_1K\right)\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)}\right]^2\\
=&4\left(2+a_1K\right)\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]^2-\tfrac{1}{K}a_1\left[a_0K\left(2+a_1K\right)\right.\\
&\left.+\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\right]^2\\
=&4\left(2+a_1K\right)\left[a_1^2+2a_0a_1\left(1+a_1K\right)+a_0^2\left(1+a_1K\right)^2\right]-\tfrac{1}{K}a_1\left[a_0^2K^2\left(2+a_1K\right)^2\right.\\
&+2a_0K\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
&\left.+K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}\right]\\
=&4a_1^2\left(2+a_1K\right)+8a_0a_1\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)+4a_0^2\left(2+a_1K\right)\left(1+a_1K\right)^2\\
&-a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)^2-a_1\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&\left(2+a_1K\right)\left[4a_1^2+8a_0a_1\left(1+a_1K\right)+4a_0^2\left(1+a_1K\right)^2\right.\\
&\left.-a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)-a_1\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}\right]\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&\left(2+a_1K\right)\left[4a_1^2+8a_0a_1\left(1+a_1K\right)+4a_0^2\left(1+a_1K\right)^2\right.\\
&\left.-a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)-a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)-4a_1\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right]\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&\left(2+a_1K\right)\left[4a_1^2+8a_0a_1\left(1+a_1K\right)+4a_0^2\left(1+a_1K\right)^2\right.\\
&\left.-a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)-a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)-4a_1^2-4a_0a_1\left(1+a_1K\right)\right]\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&\left(2+a_1K\right)\left[4a_0a_1\left(1+a_1K\right)+4a_0^2\left(1+a_1K\right)^2-2a_1a_0^2K\left(2+a_1K\right)\right]\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&a_0\left(2+a_1K\right)\left[4a_1\left(1+a_1K\right)+4a_0\left(1+a_1K\right)^2-2a_0a_1K\left(2+a_1K\right)\right]\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&a_0 \left(2+a_1K\right)\left[4a_1\left(1+a_1K\right)+4a_0\left(1+2a_1K+a_1^2K^2\right)-2a_0a_1K\left(2+a_1K\right)\right]\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&a_0\left(2+a_1K\right)\left(4a_1+4a_1^2K+4a_0+8a_0a_1K+4a_0a_1^2K^2-4a_0a_1K-2a_0a_1^2K^2\right)\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&a_0\left(2+a_1K\right)\left(4a_0+4a_1+4a_0a_1K+4a_1^2K+2a_0a_1^2K^2\right)\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&2a_0\left(2+a_1K\right)\left(2a_0+2a_1+2a_0a_1K+2a_1^2K+a_0a_1^2K^2\right)\\
&-2a_0a_1\left(2+a_1K\right)\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\\
=&2a_0\left(2+a_1K\right)\Bigg[\left(2a_0+2a_1+2a_0a_1K+2a_1^2K+a_0a_1^2K^2\right)\\
&-a_1\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\Bigg]\\
=&2a_0\left(2+a_1K\right)\Bigg[2a_0+a_1K\left(2\tfrac{1}{K}+2a_0+2a_1+a_0a_1K\right)\\
&-a_1\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\Bigg]\leq 0.
\end{aligned}
\tag{314}
$$

Luego, como $2a_0\left(2+a_1K\right)>0$, entonces, de (314) se debe cumplir que

$$
\begin{aligned}
&2a_0+a_1K\left(2\tfrac{1}{K}+2a_0+2a_1+a_0a_1K\right)\\
&-a_1\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}\leq 0,
\end{aligned}
\tag{315}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
&2a_0+a_1K\left(2\tfrac{1}{K}+2a_0+2a_1+a_0a_1K\right)\\
&\leq a_1\sqrt{K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}}.
\end{aligned}
\tag{316}
$$

Ahora, como ambos términos de la desigualdad (316) son positivos, entonces,

$$
\begin{aligned}
&\left[2a_0+a_1K\left(2\tfrac{1}{K}+2a_0+2a_1+a_0a_1K\right)\right]^2\\
&\leq a_1^2\left[K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}\right].
\end{aligned}
\tag{317}
$$

Por lo que,

$$
\begin{aligned}
0\leq&a_1^2\left[K\left(2+a_1K\right)\left\{a_0^2K\left(2+a_1K\right)+4\left[a_1+a_0\left(1+a_1K\right)\right]\right\}\right]\\
&-\left[2a_0+a_1K\left(2\tfrac{1}{K}+2a_0+2a_1+a_0a_1K\right)\right]^2\\
=&a_1^2K\left(2+a_1K\right)\left(2a_0^2K+a_0^2a_1K^2+4a_1+4a_0+4a_0a_1K\right)\\
&-\left(2a_0+2a_1+2a_0a_1K+2a_1^2K+a_0a_1^2K^2\right)^2\\
=&a_1^2K\left(2+a_1K\right)\left(4a_0+4a_1+4a_0a_1K+2a_0^2K+a_0^2a_1K^2\right)\\
&-\left(2a_0+2a_1+2a_0a_1K+2a_1^2K+a_0a_1^2K^2\right)^2\\
=&a_1^2K\left(2+a_1K\right)\left[4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)+a_0^2K\left(2+a_1K\right)\right]\\
&-\left[2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)+a_1^2K\left(2+a_0K\right)\right]^2\\
=&4a_1^2K\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+a_1K\right)+a_0^2a_1^2K^2\left(2+a_1K\right)^2\\
&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2-4a_1^2K\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(2+a_0K\right)-a_1^4K^2\left(2+a_0K\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&4a_1^2K\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left[\left(2+a_1K\right)-\left(2+a_0K\right)\right]\\
&+a_1^2K^2\left[a_0^2\left(2+a_1K\right)^2-a_1^2\left(2+a_0K\right)^2\right]\\
&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\\
=&4a_1^2K^2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(a_1-a_0\right)\\
&+a_1^2K^2\left[a_0\left(2+a_1K\right)+a_1\left(2+a_0K\right)\right]\left[a_0\left(2+a_1K\right)-a_1\left(2+a_0K\right)\right]\\
&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\\
=&4a_1^2K^2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(a_1-a_0\right)\\
&+a_1^2K^2\left(2a_0+a_0a_1K+2a_1+a_0a_1K\right)\left(2a_0+a_0a_1K-2a_1-a_0a_1K\right)\\
&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\\
=&4a_1^2K^2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(a_1-a_0\right)\\
&+4a_1^2K^2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(a_0-a_1\right)\\
&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\\
=&4a_1^2K^2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(a_1-a_0\right)\\
&-4a_1^2K^2\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)\left(a_1-a_0\right)\\
&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\\
=&-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2.
\end{aligned}
\tag{318}
$$

Entonces,

$$
-4\left(a_0+a_1+a_0a_1K\right)^2\geq 0,
$$

lo cual no es posible ya que $a_0+a_1+a_0a_1K>0$.

Por tanto, la suposición es falsa y $U_8>0$. Entonces,

$$
W_7=\frac{U_8}{a_0}>0, \tag{319}
$$

por lo que

$$
V_5=V_7+a_0W_7>0, \tag{320}
$$

lo que prueba que

$$
\mathcal{P}_1>\left[V_5G1+2W_5(b_1-b_0)\right]G1\geq V_5G1^2>0. \tag{321}
$$

Entonces, dado que $\mathcal{P}_1>0$, $\mathcal{Q}_1>0$ y $\mathcal{R}_1>0$, tenemos que

$$
V_2=\mathcal{P}_1+\mathcal{Q}_1+\mathcal{R}_1>0. \tag{322}
$$

Y por lo tanto

$$
\lim_{\beta\to 0}(\pi_1^c-\pi_1^*)(\beta)=\frac{1}{2}\frac{V_2}{W_2}>0, \tag{323}
$$

lo que finalmente demuestra (214)■

Referencias

[1] R.C. Cornes and M. Sepahvand, Cournot vs Stackelberg equilibria with a public enterprise and international competition. Discussion Paper No. 03/12, University of Nottingham, School of Economics, United Kingdom, 2003.

[2] C. Fershtman, The interdependence between ownership status and market structure: The case of privatization, *Economica*, 57: 319-328, 1990.

[3] T. Matsumura, Stackelberg mixed duopoly with a foreign competitor, *Bulletin of Economics Research*, 55: 275-287, 2003.

[4] N. Matsushima and T. Matsumura, Mixed oligopoly and spatial agglomeration, *Canadian Journal of Economics*, 36: 62-87, 2003.

[5] T. Matsumura and O. Kanda, Mixed oligopoly at free entry markets, *Journal of Economics*, 84: 27-48, 2005.

[6] N.J. Ireland and P.J. Law, *The Economics of Labour-Managed Enterprises*, Croom Helm, London, 1982.

[7] J.P. Bonin and L. Putterman, *Economics of Cooperation and the Labor-Managed Economy*, Harwood Academic Publisher, Chur, Switzerland, 1987.

[8] F.H. Stephan (Ed.), *The Performance of Labour-Managed Firms*, Macmillan Press, London, 1982.

[9] L. Putterman, Labour-managed firms. In S.N. Durlauf and L.E. Blume, editors, *The New Palgrave Dictionary of Economics*, vol. 4, p. 791-795, Palgrave Macmillan, Basingstoke, Hampshire, 2008.

[10] B. Saha and R. Sensarma, State ownership, credit risk and bank competition: A mixed oligopoly approach. Working Paper, University of Hertfordshire Business School, Hatfield, England, 2009.

[11] A. Mumcu, S. Oğur, and Ü. Zenginobuz, Competition between regulated and non-regulated generators on electric power networks. MPRA Paper No. 376, online at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/376/ MPRA Paper No. 376, posted 07. November 2007 / 00:59.

[12] J.F. Ruiz, Teoría de Juegos: su Aplicación en Economía. El Colegio de Mexico, Centro de Estudios Económicos, 1st ed., p. 182, 2002.

[13] R. Gibbons, Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. 267, 1992.

[14] A.L. Bowley, *The Mathematical Groundwork of Economics*, Oxford University Press, Oxford, 1924.

[15] R. Frisch, Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy, *International Economics Papers*, 1: 23-36, 1951. (Monopole, polypole - La notion de force en économie, *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 71: 241-259, 1933.)

[16] J. Laitner, "Rationa" duopoly equilibria, *Quarterly Journal of Economics*, 95: 641-662, 1980.

[17] C. Figuières, A. Jean-Marie, N. Quérou, and M. Tidball, *Theory of Conjectural Variations*, World Scientific, Singapore, Taibei, 2004.

[18] N. Giocoli, The escape from conjectural variations: The consistency condition in duopoly theory from Bowley to Fellner, *Cambridge Journal of Economics*, 29: 601-618, Oxford University Press, 2005.

[19] T. Lindh, The inconsistency of consistent conjectures. Coming back to Cournot, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 18:c 69-90, 1992.

[20] V.V. Kalashnikov, V.A. Bulavsky, N.I. Kalashnykova, and F.J. Castillo, Consistent conjectures in mixed oligopoly, *European Journal of Operational Research*, 210: 729-735, 2011.

[21] V.A. Bulavsky, Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly, *Economics and Mathematical Methods* (*Ekonomika i Matematicheskie Metody*), 33: 112-134, Central Economics and Mathematics Institute, Moscow, 1997 (*in Russian*).

[22] N.I. Kalashnykova, V.A. Bulavsky, V.V. Kalashnikov and F.J. Castillo-Pérez, Consistent conjectural variations equilibrium in a mixed duopoly, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 15: 425-432, 2011.

[23] V.V. Kalashnikov, N.I. Kalashnykova, and J.F. Camacho, Partially mixed duopoly and oligopoly: Consistent conjectural variations equilibrium (CCVE). Part 1. In: Juan Carlos Leyva López et al. (Eds.), Studies on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision Making, Fourth International Workshop Proceedings EUREKA ' 2013, Mazatlán, November 4 - 8, 2013, Atlantis Press, Amsterdam-Pars-Beijing, 2013, pp. 198-206.

[24] Y.F. Liu, Y.X. Ni, F.F. Wu, and B. Cai, Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 29: 455-461, 2007.

[25] V.A. Bulavsky and V.V. Kalashnikov, One-parametric method to study equilibrium, *Economics and Mathematical Methods* (*Ekonomika i Matematicheskie Metody*), 30: 129-138, Central Economics and Mathematics Institute, Moscow, 1994 (*in Russian*).

[26] V.A. Bulavsky and V.V. Kalashnikov, Equilibrium in generalized Cournot and Stackelberg models, *Economics and Mathematical Methods* (*Ekonomika i Matematicheskie Metody*), 31: 164-176, Central Economics and Mathematics Institute, Moscow, 1995 (*in Russian*).

[27] V. V. Kalashnikov, V. A. Bulavsky, N. I. Kalashnykova, J. Watada and D. D. J. Hernández-Rodríguez, Analysis of Consistent Equilibria in a Mixed Duopoly, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, vol. 18, No. 6, pp. 962-970, Japan, 2014.

[28] Diego de Jesús Hernández Rodríguez, Matrícula 1417696, Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas, FCFM, UANL, Título: “Equilibrios con variaciones conjeturadas en un oligopolio mixto de estructura especial”. Fecha de conclusión: 06/02/2015.