

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA SISTEMAS  
MULTIVARIABLES MEDIANTE EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
CANALES INDIVIDUALES**

**POR**

**DANIEL ALEJANDRO MORALES SANDOVAL**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA  
EN INGENIERÍA AERONÁUTICA CON ORIENTACIÓN EN  
DINÁMICA DE VUELO**

**MARZO, 2017**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA SISTEMAS  
MULTIVARIABLES MEDIANTE EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
CANALES INDIVIDUALES**

**POR**

**DANIEL ALEJANDRO MORALES SANDOVAL**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA  
EN INGENIERÍA AERONÁUTICA CON ORIENTACIÓN EN  
DINÁMICA DE VUELO**

**MARZO, 2017**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA SUBDIRECCIÓN DE**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO**

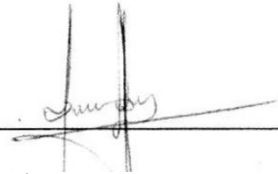
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “Diseño de Sistemas de Control para Sistemas Multivariables mediante el Análisis y Diseño de Canales Individuales” realizada por el alumno Daniel Alejandro Morales Sandoval, matrícula 1489273 sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ingeniería Aeronáutica con Orientación en Dinámica de Vuelo.

**EL CÓMITE DE TESIS**

  
\_\_\_\_\_

Dr. Eduardo Liceaga Castro

Director

  
\_\_\_\_\_

Dr. Jesús Ulises Liceaga Castro

Revisor

  
\_\_\_\_\_

M.C. Daniel Librado Martínez Vázquez

Revisor

\_\_\_\_\_  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

## Resumen

Los sistemas de control MIMO suelen ser complejos y de difícil diseño por el acoplamiento que pueden presentar las dinámicas internas. Todo sistema de control debe estar basado en el conocimiento del proceso que se quiere controlar. Esto es, reducir la incertidumbre lo más posible. Este trabajo presenta un análisis y diseño de sistemas de control para sistemas lineales multivariados, el cual se basa en la aplicación de técnicas de control clásicas. Las cuales han sido adaptadas a un esquema de diseño denominado: diseño y análisis por canal individual (ICAD por sus siglas en inglés).

El objetivo de este trabajo es: i) analizar el efecto y el papel que desempeña la función de estructura multivariable ( $\gamma(s)$ ). ii) Comprobar la aplicabilidad del marco de diseño ICAD. Estos objetivos se desarrollaron en base a un problema propuesto por G. Goodwin, en el cual hace énfasis en la dificultad de diseñar un controlador para esa planta por ser esta de fase no mínima. También se comprobaron estos objetivos mediante un ejemplo de una aeronave militar F106B modelada a bajas velocidades. Se han escogido una serie de casos en los que se muestra la efectividad de ICAD en diferentes circunstancias.

## TABLA DE CONTENIDO

Capítulo	Página
1. INTRODUCCIÓN.....	17
1.1 Antecedentes .....	18
1.2 Contenido General de la Tesis .....	19
1.3 Objetivos .....	20
1.3.1 Objetivos Principales .....	20
1.3.2 Objetivos Secundarios .....	20
2. MÉTODOS DE DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA SISTEMAS MULTIVARIABLES .....	21
2.1 Regulador Lineal Cuadrático (LQR) .....	21
2.2 Control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG) .....	23
2.3 Teoría de Retroalimentación Cuantitativa .....	25
2.4 Control de Modelo Predictivo (MPC) .....	26
2.5 Matriz de Ganancia Relativa.....	28
2.6 Marco de Diseño <i>ICAD</i> .....	29
2.6.1 Condiciones de Estabilización .....	32
2.6.2 Intercambiando Controladores .....	34
2.6.3 Función de Estructura Multivariable .....	37
3. CASO DE ESTUDIO 2X2 .....	38
3.1 Análisis de la Función de Estructura Multivariable ( $\gamma_A(s)$ ) .....	41
3.2 Caso 1 .....	43
3.2.1 Conclusiones del Caso 1 .....	53
3.3 Caso 2 .....	54
3.3.1 Conclusiones del Caso 2 .....	58
3.4 Caso 3 .....	59
3.4.1 Conclusiones del Caso 3.....	71

3.5 Caso 4 .....	72
3.5.1 Conclusiones del Caso 4 .....	76
3.6 Caso 5. Diseño de Sistema de Control Utilizando Gamma B .....	77
3.6.1 Análisis de la Función de Estructura Multivariable (Gamma B ( $\gamma_b(s)$ )) .....	78
3.6.2 Diseño de Controladores del Caso 5 .....	79
3.6.3 Conclusiones del Caso 5 .....	87
4. CASO AERONAVE F106B .....	88
4.1 Análisis de la Función de Estructura Multivariable (Gamma A ( $\gamma_a(s)$ )) .....	89
4.2 Caso 1 .....	91
4.2.1 Conclusiones del Caso 1 .....	101
4.3 Caso 2 .....	101
4.3.1 Conclusiones del Caso 2 .....	106
5. CONCLUSIONES .....	107
6. REFERENCIAS .....	109

## LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
2.1 Polos y Ceros de cada canal individual .....	34
3.1 Polos del sistema TE(s) .....	39
3.2 Polos y ceros de transmisión del sistema .....	40
3.3 Ubicación de los ceros de fase no mínima del canal 1 .....	50
3.4 Resultados obtenidos utilizando ICAD .....	52
3.5 Resultados obtenidos utilizando ICAD .....	56
3.6 Resultados obtenidos con ganancia 6.9 .....	62
3.7 Resultados obtenidos con ganancia 16.9 .....	66
3.8 Resultados obtenidos con ganancia 26.9 .....	70
3.9 Resultados obtenidos del caso IV .....	75
3.10 Polos y ceros de transmisión del sistema .....	78
3.11 Resultados obtenidos utilizando Gamma B .....	86

4.1	Resultados obtenidos para el Caso I .....	101
4.2	Resultados obtenidos para el Caso II .....	106



## LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 Estructura Fundamental QFT .....	25
2.2 Estructura básica de Control de Modelo Predictivo .....	26
2.3 Sistema de Control Multivariable 2 x 2.....	29
2.4 Simplificación por algebra de bloques de $r_1$ a $y_1$ .....	29
2.5 Relación de lazo abierto de $r_1$ a $y_1$ .....	29
2.6 Simplificación por algebra de bloques de $r_2$ a $y_2$ .....	30
2.7 Relación de lazo abierto de $r_2$ a $y_2$ .....	30
2.8 Sistema en lazo cerrado para la salida $y_i$ .....	31
2.9 Sistema de Control Multivariable 2 x 2 Intercambiando Controladores.....	35
2.10 Simplificación por algebra de bloques de $r_1$ a $y_1$ , intercambiando Controladores.....	35

2.11 Relación de lazo abierto de $r_1$ a $y_1$ , intercambiando Controladores.....	35
2.12 Simplificación por algebra de bloques de $r_2$ a $y_2$ , intercambiando Controladores.....	36
2.13 Relación de lazo abierto de $r_2$ a $y_2$ , intercambiando Controladores.....	36
3.1 Diagrama de Nyquist de la MSF.....	41
3.2 Diagrama de Bode de la MSF.....	41
3.3 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del canal 1 sin controlador .....	43
3.4 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 1 sin Controlador .....	43
3.5 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del canal 1 .....	44
3.6 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 .....	44
3.7 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 2 sin Controlador.....	45
3.8 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 2 sin Controlador .....	45
3.9 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 2 .....	46
3.10 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 2.....	46
3.11 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 1 con iteración .....	47

3.12 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 1 con iteración .....	47
3.13 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 2 con Iteración .....	48
3.14 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 2 con Iteración .....	49
3.15 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de $\gamma(s)h_2(s)$ .....	49
3.16 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de $\gamma(s)h_2(s)$ .....	50
3.17 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de $\gamma h_1$ .....	51
3.18 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de $\gamma h_1$ .....	51
3.19 Respuesta en el Tiempo del Canal 1 .....	52
3.20 Respuesta en el Tiempo del Canal 2 .....	53
3.21 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	54
3.22 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	55
3.23 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de $\gamma a(s)h_1(s)$ .....	55
3.24 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de $\gamma a(s)h_1(s)$ .....	56
3.25 Respuesta en el Tiempo del Canal 1 .....	57
3.26 Respuesta en el Tiempo del Canal 2 .....	57
3.27 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 .....	59
3.28 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 .....	60

3.29 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2.....	60
3.30 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 .....	61
3.31 Comparación de diagrama de Nyquist de $\gamma a(s)h_1(s)$ y $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	61
3.32 Comparación de diagrama de Bode de $\gamma a(s)h_1(s)$ y $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	62
3.33 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 .....	63
3.34 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 .....	64
3.35 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2.....	64
3.36 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 .....	65
3.37 Comparación de diagrama de Nyquist de $\gamma a(s)h_1(s)$ y $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	65
3.38 Comparación de diagrama de Bode de $\gamma a(s)h_1(s)$ y $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	66
3.39 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 .....	67
3.40 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 .....	68
3.41 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2.....	68
3.42 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 .....	69
3.43 Comparación de diagrama de Nyquist de $\gamma a(s)h_1(s)$ y $\gamma a(s)h_2(s)$ .....	69

3.44 Comparación de diagrama de Bode de $\gamma_a(s)h_1(s)$ y $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	70
3.45 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 .....	72
3.46 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 .....	73
3.47 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2.....	73
3.48 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 .....	74
3.49 Comparación de diagrama de Nyquist de $\gamma_a(s)h_1(s)$ y $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	74
3.50 Comparación de diagrama de Bode de $\gamma_a(s)h_1(s)$ y $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	75
3.51 Respuesta en el Tiempo del Canal 1 .....	75
3.52 Respuesta en el Tiempo del Canal 2.....	76
3.53 Diagrama de Nyquist de $\gamma_b(s)$ .....	78
3.54 Diagrama de Nyquist de $\gamma_b(s)$ .....	79
3.55 Diagrama de Nyquist del canal 1 sin controlador.....	80
3.56 Diagrama de Bode del canal 1 sin controlador .....	80
3.57 Diagrama de Nyquist del canal 1 con controlador .....	81
3.58 Diagrama de Bode del canal 1 con controlador .....	81
3.59 Diagrama de Nyquist del canal 2 sin controlador.....	82
3.60 Diagrama de Bode del canal 2 sin controlador .....	82

3.61 Diagrama de Nyquist del canal 2 con controlador .....	83
3.62 Diagrama de Bode del canal 2 con controlador .....	83
3.63 Diagrama de Nyquist del canal 1 con iteración.....	84
3.64 Diagrama de Bode del canal 1 con iteración .....	84
3.65 Diagrama de Nyquist de $\gamma_b(s)h_2(s)$ y $\gamma_b(s)h_1(s)$ .....	85
3.66 Diagrama de Bode de $\gamma_b(s)h_2(s)$ y $\gamma_b(s)h_1(s)$ .....	85
3.67 Respuesta en el tiempo del canal 2 ante una entrada escalón .....	86
3.68 Respuesta en el tiempo del canal 1 ante una entrada escalón .....	87
4.1 Diagrama de Nyquist de $\gamma_a(s)$ .....	89
4.2 Diagrama de Bode de $\gamma_a(s)$ .....	89
4.3 Diagrama de Nyquist de Lazo abierto del canal 1 sin Controlador .....	91
4.4 Diagrama de Bode de Lazo abierto del canal 1 sin controlador.....	91
4.5 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 con controlador.....	92
4.6 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 con controlador.....	93

4.7 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2 sin Controlador .....	94
4.8 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 sin controlador.....	94
4.9 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2 con Controlador .....	95
4.10 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 con controlador.....	96
4.11 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 con iteración .....	97
4.12 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 con iteración .....	97
4.13 Respuesta en el tiempo del canal 1 ante una entrada escalón .....	98
4.14 Respuesta en el tiempo del canal 2 ante una entrada escalón .....	98
4.15 Diagrama de Nyquist de $\gamma_a(s)h_1(s)$ .....	99
4.16 Diagrama de Bode de $\gamma_a(s)h_1(s)$ .....	99
4.17 Diagrama de Nyquist de $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	100
4.18 Diagrama de Bode de $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	100
4.19 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 .....	102

4.20 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 .....	102
4.21 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2.....	103
4.22 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 .....	103
4.23 Respuesta en el Tiempo del Canal 1 ante una entrada escalón .....	104
4.24 Respuesta en el Tiempo del Canal 2 ante una entrada escalón .....	104
4.25 Diagrama de Nyquist de $\gamma_a(s)h_1(s)$ , $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	105
4.26 Diagrama de Bode de $\gamma_a(s)h_1(s)$ , $\gamma_a(s)h_2(s)$ .....	105



## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

Hoy en día se cuenta con diversos métodos para el diseño de sistemas de control multivariables. Sin embargo, no es sencillo medir la robustez de estos sistemas, como es el caso de sistemas monovariantes, ya que no se cuenta con los conceptos bien establecidos y probados, de márgenes de fase y ganancia para sistemas multivariables. La medición de robustez por medio de los márgenes de fase y ganancia han probado ser muy efectivos en el diseño de control para sistemas una entrada una salida (SISO por sus siglas en inglés). Por otro lado, la robustez de sistemas multivariables (MIMO por sus siglas en inglés) no están claramente definidos, como si lo está en los sistemas SISO. Existen diversas técnicas para controlar sistemas multivariables, algunas de ellas son *Regulador Lineal Cuadrático* (LQR), *Control Lineal Cuadrático Gaussiano* (LQG), *Teoría de Retroalimentación Cuantitativa* (QFT), *Control de Modelo Predictivo* (MPC), por mencionar algunas. Sin embargo, la medida de robustez por medio de estas técnicas no ha tenido la relevancia y generalidad, como en el caso de los márgenes de estabilidad clásicos. El marco de *diseño y análisis por canal individual* (ICAD por sus siglas en inglés) es una adaptación general de los métodos clásicos de control a sistemas multivariables, la cual se ha utilizado en la industria aeroespacial [2], en el diseño de control para un submarino [14], sistemas de combustión [12], y motor de inducción [15].

*ICAD* a través de los diagramas de Bode y Nyquist permite diseñar y obtener un sistema de control para un sistema multivariable utilizando márgenes de fase y ganancia [9].

Este trabajo plantea el diseño de sistemas multivariables 2x2. Se han escogido una serie de casos en los que se muestra la efectividad de *ICAD* en diferentes circunstancias.

## 1.1 Antecedentes

Desde los años 60's se han logrado grandes desarrollos en los sistemas lineales multivariables; el concepto de espacio de estados, herramientas computacionales y ciertas generalizaciones de los conceptos en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, los practicantes de diseño de control han puesto mucho énfasis en cuestiones analíticas y muy poco en cuestiones importantes desde la perspectiva del diseño [21]. El diseño de sistemas de control de vuelo para aeronaves modernas es uno de los retos más grandes. Muchas teorías de control multivariable, como el control lineal de segundo grado óptimo, el control de estructura propia, control de  $H$  infinito, inversión dinámica no lineal, entre otras técnicas, a las cuales se hacen referencia como modernas, han sido y continuaran siendo desarrolladas para resolver este reto [20].

A pesar de la gran cantidad de estudios analíticos y algunos programas de simulación de vuelo de prueba experimentales que han sido llevados a cabo, todavía hay una resistencia en la comunidad de control para llevar estas técnicas a la implementación. Las técnicas de diseño de control clásico, esto es control basado en métodos frecuenciales, basado en las gráficas de Bode y Nyquist, siguen siendo el enfoque de diseño preferido en la práctica [20].

El éxito del diseño clásico para los problemas de control multivariable se basa en la capacidad de convertir el diseño de lazos múltiples en un conjunto de lazos sencillos que puede ser controlado de uno en uno [20].

El marco de diseño *ICAD* ha sido desarrollado por W. E. Leithead and J. O'Reilly a principio de los años 90's. De esta manera se desarrolla una manera de análisis y diseño multivariable transparente y flexible que busca directamente satisfacer los requerimientos de control de los usuarios y se adapta bien al contexto de la ingeniería sin perder información estructural [8]

## 1.2 Contenido General de la Tesis

En este trabajo se planteó analizar con un par de casos de estudio, el papel que desempeña la función de estructura multivariable  $\gamma(s)$ , y comprobar la aplicabilidad del marco de diseño *ICAD*. En este capítulo se presenta una breve introducción a los sistemas multivariables así mismo se mencionan algunos métodos de diseño para este tipo de sistemas. También se introduce al tema de estudio de este trabajo, el cual es el marco de diseño *ICAD*, se exponen los antecedentes realizados por W. E. Leithead and J. O'Reilly y se mencionan algunas de las aplicaciones en las que se ha utilizado este marco de diseño. En el capítulo 2, se explican de una manera más extensa algunos de los métodos disponibles para el diseño de sistemas de control para sistemas multivariables, los cuales son; *Regulador Lineal Cuadrático* (LQR), *Control Lineal Cuadrático Gaussiano* (LQG), *Teoría de Retroalimentación Cuantitativa* (QFT), y *Control de Modelo Predictivo* (MPC). De igual manera se explica el marco de *diseño y análisis por canal individual (ICAD)*. En el capítulo 3 se expone el caso de estudio propuesto por G. Goodwin en [6], éste se dividió en 5 casos, en los cuales se analizaron los márgenes de estabilidad, es decir, la robustez del sistema. En el capítulo 4, se presenta otro ejemplo práctico, en este caso es una aeronave de tipo interceptor F106B modelada en bajas velocidades. Este sistema se estudió en dos casos para analizar el diseño de sistemas de control. Por último, en el capítulo 5, se mostraron las conclusiones obtenidas de los casos de estudio, es decir, de los capítulos 3 y 4.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivos Principales.

- Analizar el efecto y el papel que desempeña la función de estructura multivariable ( $\gamma(s)$ ).
- Comprobar la aplicabilidad del marco de diseño *ICAD*, mediante diferentes casos.

### 1.3.2 Objetivos Secundarios.

- Mostrar la efectividad del marco de diseño *ICAD*.
- Diseño de controladores empleando el marco de diseño *ICAD*

## CAPÍTULO 2

### MÉTODOS DE DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA SISTEMAS MULTIVARIABLES

#### 2.1 Regulador Lineal Cuadrático (Linear Quadratic Regulator)

El regulador cuadrático lineal (LQR) es un control óptimo donde el estado de la ecuación de la planta es lineal, la función de costo es cuadrática y las condiciones de prueba consisten en las condiciones iniciales en el estado y no perturbaciones en las entradas. La ecuación de estado de la planta es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

La salida es:

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

La función de costo es:

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} y^T(t_f) H_y y(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ y^T(t) Q_y y(t) + u^T(t) R u(t) \} dt \quad (3)$$

donde  $H_y$ ,  $Q_y$ , y  $R$  son positivas definidas.

El costo es evaluado a la condición inicial

$$x(0) = x_0 \quad (4)$$

y no perturbaciones en las entradas. La función de costo (3) generalmente es escrita de una forma directa en términos de estado y control:

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt \quad (5)$$

donde

$$H = C_y^T H_y C_y \quad ; \quad Q = C_y^T Q_y C_y \quad (6)$$

Nótese que H y Q son positivas semidefinidas [4].

## 2.2 Control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG)

El control óptimo alcanzó la madurez en los años 60 con lo que ahora llamamos control lineal cuadrático gaussiano o LQG [18].

Este método permite al diseñador configurar las principales ganancias de la relación de retorno, ya sea en la entrada o en la salida de la planta, para lograr las especificaciones de rendimiento o robustez requeridas [16]. La estabilidad es obtenida automáticamente, por lo tanto, no es necesario preocuparse por las características de fase [16].

En el control LQG tradicional, se asume que las dinámicas de la planta son lineales y conocidas, y que las señales de ruido son estocásticas con propiedades estadísticas conocidas [18].

Suponiendo que se tiene una planta en la forma de espacio de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \quad (7)$$

$$y = Cx + v \quad (8)$$

donde  $w$  y  $v$  son ruido blanco, las cuales no están correlacionadas en el tiempo, teniendo covarianzas

$$E\{ww^T\} = W \geq 0 \quad (9)$$

$$E\{vv^T\} = V \geq 0 \quad (10)$$

Se asumirá que  $w$  y  $v$  no están correlacionadas entre sí, es decir:

$$E\{wv^T\} = 0 \quad (11)$$

En la ecuación (7)  $u$  representa el vector de las señales de control, en la ecuación (8)  $y$  es el vector de las salidas. El problema entonces es diseñar una ley de control de retroalimentación que minimice el costo:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right\} \quad (12)$$

donde

$$z = Mx \quad (13)$$

Es una combinación lineal de los estados, y

$$Q = Q^T \geq 0 \quad (14)$$

$$R = R^T > 0 \quad (15)$$

son matrices [16].

El nombre LQG surge del uso de un modelo lineal, una función de costo cuadrático integral y los procesos de ruido blanco gaussiano para modelar la señal de perturbación y el ruido [18].

La solución de LQG es pre – escrita por el principio de separación. Este consiste primero, en obtener primero una estimación óptima  $\hat{x}$  del estado  $x$  y luego usar esa estimación como si fuera una medida exacta del estado para resolver el problema determinístico de control lineal cuadrático [18].



## 2.3 Teoría de Retroalimentación Cuantitativa (QFT)

Teoría de Retroalimentación Cuantitativa (QFT), un método de diseño para sistemas de control en el dominio de la frecuencia, fue desarrollado por Horowitz a principios de los años 70's. QFT inicialmente se diseñó para sistemas de una entrada y una salida (SISO). Sin embargo, muchos sistemas de control prácticos tienen múltiples entradas y múltiples salidas. Muchas investigaciones han extendido la técnica de control QFT para manejar sistemas multivariables. La técnica QFT toma en cuenta información cuantitativa sobre la planta, requerimientos de robustez, la amplitud de perturbación esperada y su requerimiento de atenuación [19].

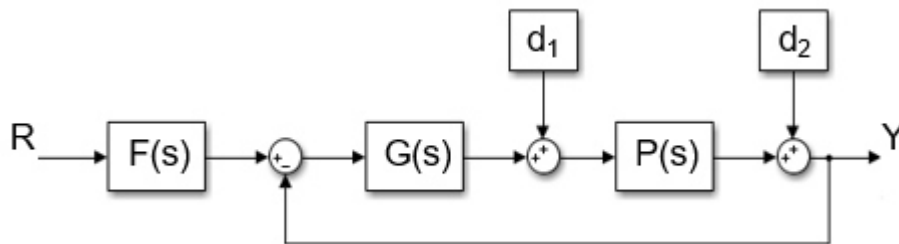


Fig. 2.1 Estructura fundamental QFT

La salida  $y(t)$  es necesaria para rastrear la señal de entrada  $r(t)$  y para rechazar las perturbaciones  $d_1(t)$  y  $d_2(t)$ . El compensador debe ser diseñado de tal manera que las variaciones de  $y(t)$  estén dentro de las tolerancias admisibles y los efectos de las perturbaciones sean pequeños. Las propiedades del prefiltro  $F(s)$  deben ser diseñadas para el seguimiento deseado de la referencia  $r(t)$  [19].

## 2.4 Control de Modelo Predictivo (MPC)

La estructura conceptual de MPC se presenta en la fig. 2.2.



Fig. 2.2 Estructura básica de Control de Modelo Predictivo

La estructura conceptual de MPC se presenta en la figura 2.2. El nombre MPC se deriva de la idea de emplear un modelo explícito de la planta a controlar que se utiliza para predecir el comportamiento futuro del sistema. Esta capacidad de predicción permite resolver problemas de control óptimo, donde la diferencia entre la salida y la referencia deseada se minimiza. Posiblemente sujeto a restricciones en las entradas y salidas [1].

Una pregunta fundamental acerca de MPC es su robustez. Cuando se dice que un sistema de control es robusto, se quiere decir que la estabilidad se mantiene y que las especificaciones de rendimiento se cumplen para un rango específico de variaciones del modelo y de señales de ruido.

Generalmente en la literatura MPC se formula en la forma de espacio de estados.

El sistema a ser controlado es descrito por un modelo lineal discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

donde  $x(k)$  y  $u(k)$  representan al estado y la entrada de control, respectivamente.

Una implementación de MPC se basa típicamente en la solución del siguiente problema de optimización de lazo abierto:

$$J_{(p,m)}(x_0) = \min_{u(\cdot)} \left[ x^T(p)P_0x(p) + \sum_{i=0}^{p-1} x^T(i)Qx(i) + \sum_{i=1}^{m-1} u^T(i)Ru(i) \right] \quad (17)$$

Sujeto a:

$$Ex + Fu \leq \psi \quad (18)$$

( $p \geq m$ ) donde  $p$  denota la longitud de la predicción de la salida y  $m$  denota la longitud de la entrada.

Se observa que a medida que el horizonte de control y el horizonte de predicción se aproximan al infinito y cuando no hay restricciones se obtiene el problema del regulador cuadrático lineal (LQR). La secuencia de control óptima es generada por una ley de retroalimentación de estado estático donde la matriz de ganancia de retroalimentación se encuentra a través de la solución de una ecuación algébrica de Riccati (ARE). Esta ley de retroalimentación tiene algunas propiedades bien conocidas, en particular, garantiza la estabilidad de lazo cerrado para cualquier matriz de ponderación semi-definida positiva  $Q$  y cualquier matriz  $R$  definida positiva [1].

## 2.5 Matriz de Ganancia Relativa

La Matriz de ganancia relativa (RGA por sus siglas en inglés) propuesta por Bristol en 1966 es una matriz cuadrada definida como [18]:

$$RGA(G) = \Lambda(G) \triangleq Gx(G^{-1})^T \quad (19)$$

Donde  $x$  denota la multiplicación elemento por elemento [18].

En el caso de una matriz 2x2 [13]:

$$\Lambda(G(s)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\gamma(s)} & \frac{\gamma(s)}{\gamma(s)-1} \\ \frac{\gamma(s)}{\gamma(s)-1} & \frac{1}{1-\gamma(s)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde

$$\gamma(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (21)$$

Los elementos  $\lambda_{ij}(s)$  de  $\Lambda(G(s))$  son interpretados como el acoplamiento entre la entrada  $i$  y la salida  $j$ . Se considera que un sistema MIMO es diagonalmente dominante si los elementos de la diagonal de la matriz RGA son pequeños [3], [13]. Este resultado se considera empírico en [6] y se formaliza con el estudio de la función  $\gamma(s)$  en [13].

Las propiedades más importantes de RGA son [13]:

- Plantas con elementos de RGA grandes no deben ser desacopladas por controladores de base inversa o desacopladores.
- Los elementos de RGA grandes implican una alta sensibilidad para  $G(s)$ .
- Si el signo de un elemento de RGA cambia a medida que  $s$  varía de 0 a  $\infty$ , hay un cero de fase no mínima en  $G(s)$  o en algún subsistema de este.

## 2.6 Marco de Diseño ICAD

En este trabajo se limita el marco de diseño ICAD para sistemas 2 x 2. Se tiene un sistema multivariable de 2 entradas – 2 salidas como se muestra en la figura 2.3 [3], [5], [9]:

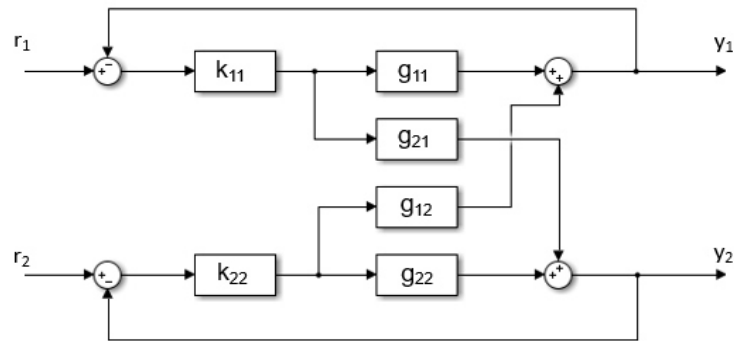


Fig. 2.3. Sistema de Control Multivariable 2 x 2.

Mediante el álgebra de bloques la relación de lazo abierto  $r_1$  y la salida  $y_1$  se puede descomponer como se muestra en la figura 2.5 y 2.7

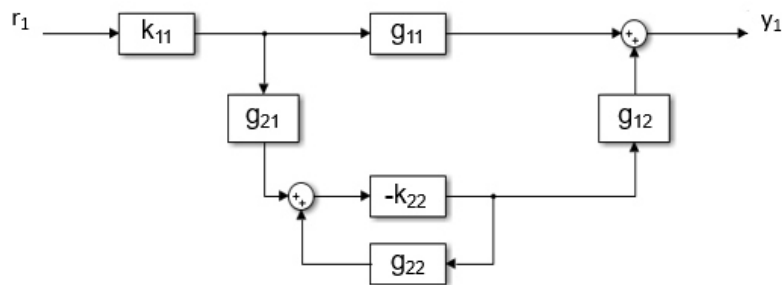


Fig. 2.4 Simplificación por álgebra de bloques de  $r_1$  a  $y_1$

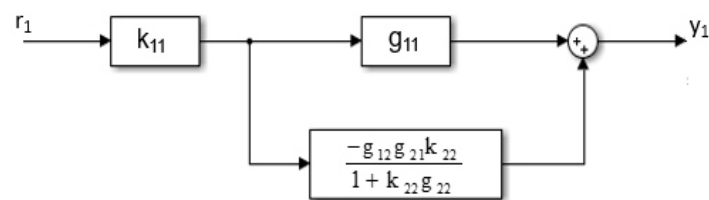
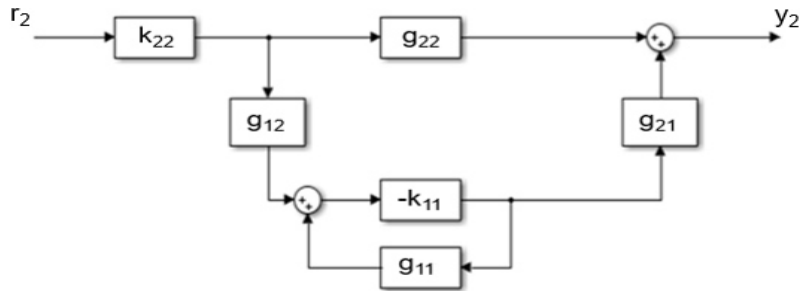
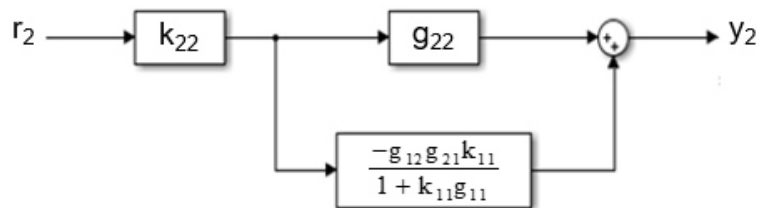


Fig. 2.5. Relación de lazo abierto de  $r_1$  a  $y_1$

Fig. 2.6 Simplificación por algebra de bloques de  $r_2$  a  $y_2$ Fig. 2.7 Relación de lazo abierto de  $r_2$  a  $y_2$ 

Se puede observar una simetría en la estructura. De la Fig. 2.5 y 2.7 se obtienen las relaciones de salida/entrada reales de lazo abierto.

$$\frac{y_i(s)}{r_i(s)} = k_{ii}(s) \left( g_{ii}(s) - \frac{g_{ij}(s)g_{ji}(s)k_{jj}(s)}{1+k_{jj}(s)g_{jj}(s)} \right) \quad (22)$$

$$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$$

Para fines de estudio se introducen términos los cuales se eliminarán por eliminación exacta, quedando la ecuación (19) de la siguiente manera:

$$\frac{y_i(s)}{r_i(s)} = k_{ii}(s)g_{ii}(s) \left( 1 - \frac{g_{ij}(s)g_{ji}(s)}{g_{ii}(s)g_{jj}(s)} \frac{k_{jj}(s)g_{jj}(s)}{1+k_{jj}(s)g_{jj}(s)} \right) \quad (23)$$

$$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$$

Para compactar notaciones:

$$h_j(s) = \frac{k_{jj}(s)g_{jj}(s)}{1+k_{jj}(s)g_{jj}(s)} \quad j=1,2 \quad (24)$$

$$\gamma_a(s) = \frac{g_{ij}(s)g_{ji}(s)}{g_{ii}(s)g_{jj}(s)} \quad i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad (25)$$

Por lo tanto, la ecuación (22) queda de la siguiente manera:

$$\frac{y_i(s)}{r_i(s)} = k_{ii}(s)g_{ii}(s)(1 - \gamma_a(s)h_j(s)) \quad (26)$$

$$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$$

Es claro que en sistemas multivariables todas las señales de entrada afectan todas las salidas. El efecto que la referencia  $r_j$  tiene sobre la salida  $r_i$  se puede modelar como una perturbación.

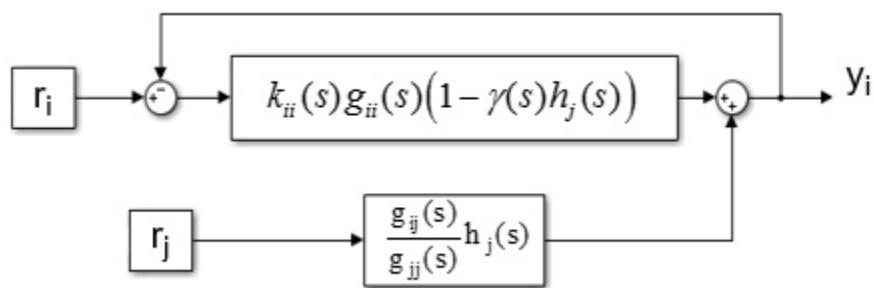


Fig. 2.8. Sistema en lazo cerrado para la salida  $y_i$

De tal forma que la función de lazo cerrado de cada canal es:

$$y_i(s) = R_i(s)r_i(s) + Q_i(s)h_j(s)P_i(s)r_j(s) \quad (27)$$

$$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$$

donde:

$$R_i(s) = \frac{C_i(s)}{1 + C_i(s)} \quad i=1,2 \quad (28)$$

$$Q_i(s) = \frac{g_{ij}(s)}{g_{jj}(s)} \quad i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad (29)$$

$$P_i(s) = \frac{1}{1 + C_i(s)} \quad i=1,2 \quad (30)$$

## 2.6.1 Condiciones de Estabilización

Se analizan las funciones  $R_i(s)$ ,  $Q_i(s)$ ,  $P_i(s)$  y  $h_j(s)$

La función  $R_i(s)$  es:

$$R_i(s) = \frac{C_i(s)}{1 + C_i(s)} = \frac{\frac{nCi(s)}{dCi(s)}}{1 + \frac{nCi(s)}{dCi(s)}} \quad (31)$$

$$R_i(s) = \frac{nCi(s)}{dCi(s) + nCi(s)} \quad (32)$$

Los ceros de  $R_i(s)$  son las raíces del polinomio  $nCi(s)$ , los polos de  $R_i(s)$  son las raíces del polinomio

$$\lambda_i(s) = dCi(s) + nCi(s) \quad (33)$$

Por otra parte, la función  $P_i(s)$  puede analizarse de la misma forma:

$$P_i(s) = \frac{1}{1 + \frac{nCi(s)}{dCi(s)}} = \frac{dCi(s)}{dCi(s) + nCi(s)} \quad (34)$$

Esto demuestra que los polos de  $R_i(s)$  coinciden con los polos de  $P_i(s)$ . Así mismo, es claro que los ceros de  $P_i(s)$  son los polos de  $C_i(s)$ .

Es obvio, que el termino  $Q_i(s)$  tiene los mismos ceros que  $g_{ij}(s)$  y los mismos polos que  $g_{jj}(s)$ . De tal forma que al multiplicarlo por  $h_j(s)$

Resulta en

$$Q_i(s)h_j(s) = \frac{g_{ij}(s)k_{jj}(s)}{1 + k_{jj}(s)g_{jj}(s)} \quad (35)$$



Para ser más específicos los ceros de  $P_i(s)$  son los polos de  $C_i(s)$  que son las raíces de:

$$C_i(s) = k_{ii}(s)g_{ii}(s)(1 - \gamma_a(s)h_j(s)) \quad (36)$$

$$C_i(s) = \frac{nk_{ii}(s) n_{ii}(s)}{dk_{ii}(s) d_{ii}(s)} \left( 1 - \left( \frac{n_{ij}(s) n_{ji}(s) d_{ii}(s) d_{jj}(s)}{d_{ij}(s) d_{ji}(s) n_{ii}(s) n_{jj}(s)} \right) \frac{nh_j(s)}{dh_j(s)} \right) \quad (37)$$

$$C_i(s) = \frac{nk_{ii}(s) n_{ii}(s)}{dk_{ii}(s) d_{ii}(s)} \left( \frac{d_{ij}(s)d_{ji}(s)n_{ii}(s)n_{jj}(s)dh_j(s) - n_{ij}(s)n_{ji}(s)d_{ii}(s)d_{jj}(s)nh_j(s)}{d_{ij}(s)d_{ji}(s)n_{ii}(s)n_{jj}(s)dh_j(s)} \right) \quad (38)$$

Esto es, los polos de  $C_i(s)$  son las raíces de  $dk_{ii}(s)$ ,  $d_{ii}(s)$ ,  $d_{ij}(s)$ ,  $d_{ji}(s)$ ,  $n_{ii}(s)$ ,  $n_{jj}(s)$ ,  $dh_j(s)$

No olvidar que los polos de  $C_i(s)$  son los ceros de  $P_i(s)$

Los polos de  $Q_i(s)h_j(s)$  :

$$Q_i(s)h_j(s) = \frac{n_{ij}(s) d_{jj}(s) nh_j(s)}{d_{ij}(s) n_{jj}(s) dh_j(s)} \quad (39)$$

Lo que indica que todos los polos de  $Q_i(s)h_j(s)$  se cancelan con algunos de los ceros de  $P_i(s)$ . Esto es, en el producto  $Q_i(s)h_j(s)P_i(s)$  no aparecen los polos de  $Q_i(s)h_j(s)$ , solamente los polos de  $P_i(s)$  lo que indica que la función, resultado del producto  $Q_i(s)h_j(s)$  no determina la estabilidad de  $Q_i(s)h_j(s)P_i(s)$ .

Así la estabilidad queda determinada por los polos de  $P_i(s)$ , que son igual a los polos de  $R_i(s)$ . Por lo tanto, si  $k_{ii}(s)$  estabiliza la ecuación (26) se estabiliza todo el canal

$$y_i(s) = R_i(s)r_i(s) + Q_i(s)h_j(s)P_i(s)r_j(s) \quad (40)$$

$$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$$

La tabla 2.1 muestra en resumen los polos y ceros de los canales 1 y 2

Tabla 2.1 Polos y Ceros de cada canal individual

Canal	Polos	Ceros
1	Raíces de $d_{11}$ , $d_{12}$ , $n_{11}$ , $n_{22}$ , $dh_2$	Raíces de $(1-\gamma h_2)$
2	Raíces de $d_{22}$ , $d_{21}$ , $n_{11}$ , $n_{22}$ , $dh_1$	Raíces de $(1-\gamma h_1)$

## 2.6.2 Intercambiando Controladores

Como se mostró en la sección anterior en el control multivariable de 2 entradas – 2 salidas se puede observar una simetría en la estructura. De esta manera se cuenta con una alternativa de diseño de sistemas de control, la cual es intercambiando controladores. A continuación, se describe esta alternativa.

Se tiene que:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (41)$$

donde  $Y(s)$  es una matriz de salidas del sistema  $2 \times 1$ ,  $G(s)$  es una matriz de transferencia del sistema  $2 \times 2$  y  $U(s)$  es:

$$U(s) = K(s)E(s) \quad (42)$$

Por lo tanto:

$$Y(s) = G(s)K(s)E(s) \quad (43)$$

La matriz del controlador es diagonal solo que ahora se utiliza la diagonal no principal:

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Por lo que la ecuación (43) queda:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} \quad (45)$$

En la Fig. 2.9 se muestra la estructura del sistema de control multivariable 2 x 2 intercambiando controladores.

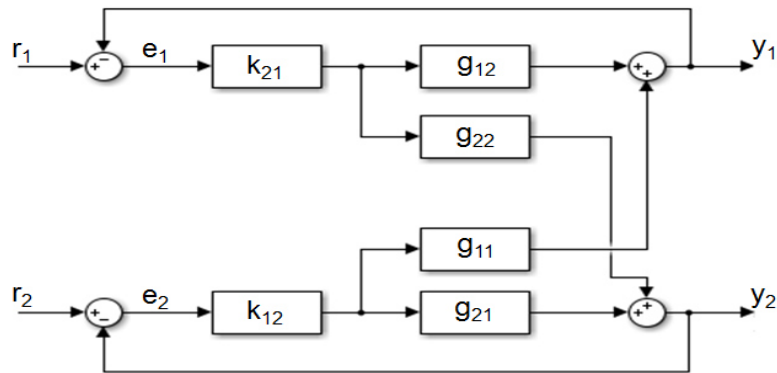


Fig 2.9 Sistema de Control Multivariable 2 x 2 Intercambiando Controladores.

Existen varias maneras de obtener la función de transferencia de lazo abierto de cada canal; Algebraica, algebra de bloques y regla de Mason. En este trabajo se optó por utilizar algebra de bloques.

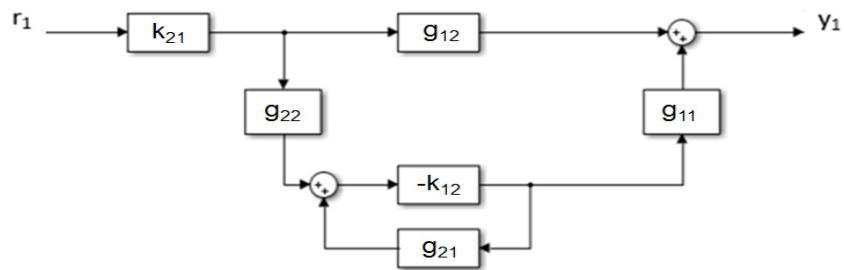


Fig. 2.10 Simplificación por algebra de bloques de  $r_1$  a  $y_1$ , intercambiando controladores.

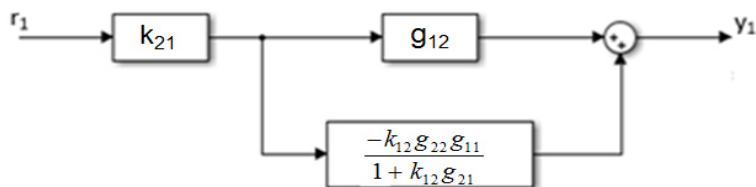


Fig. 2.11 Relación de lazo abierto de  $r_1$  a  $y_1$ , intercambiando controladores.

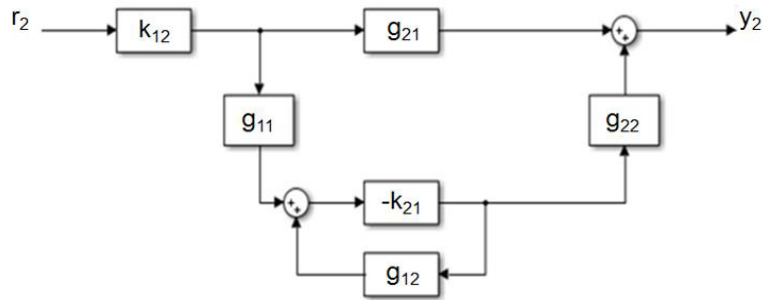


Fig. 2.12 Simplificación por algebra de bloques de  $r_2$  a  $y_2$ , intercambiando controladores.

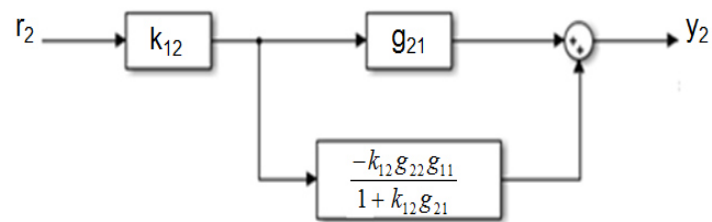


Fig. 2.13 Relación de lazo abierto de  $r_2$  a  $y_2$ , intercambiando controladores.

De las Figs. 2.11 y 2.13 se obtienen las relaciones de salida/entrada reales de lazo abierto de cada canal.

$$\frac{y_i(s)}{r_i(s)} = k_{ij}(s)g_{ji}(s) \left( 1 - \frac{g_{ii}(s)g_{jj}(s)}{g_{ij}(s)g_{ji}(s)} \frac{k_{ij}(s)g_{ji}(s)}{1+k_{ij}(s)g_{ji}(s)} \right) \quad (46)$$

$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$

Para compactar notaciones:

$$h_j(s) = \frac{k_{ij}(s)g_{ji}(s)}{1+k_{ij}(s)g_{ji}(s)} \quad i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad (47)$$

$$\gamma_b(s) = \frac{g_{ii}(s)g_{jj}(s)}{g_{ij}(s)g_{ji}(s)} \quad i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad (48)$$

Por lo tanto,

$$\frac{y_i(s)}{r_i(s)} = k_{ij}(s)g_{ji}(s) \left( 1 - \gamma_b(s)h_j(s) \right) \quad (49)$$

$i \neq j \quad i=1,2 \quad j=1,2$

### 2.6.3 Función de Estructura Multivariable (Gamma $\gamma(s)$ )

La naturaleza multivariable de los canales se caracteriza por la función de estructura multivariable (Gamma ( $\gamma$ )) [8]. Así mismo, el desempeño dinámico de lazo cerrado de los canales individuales en el caso de un sistema multivariable de 2-entradas 2-salidas es afectado por la presencia de ceros de fase no mínima, es decir, ceros ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$ , y su relación a la función de Gamma [2], [4], [8], [17].

El número de ceros de fase no mínima se determina mediante lo siguiente :

Suponiendo que el diagrama de Nyquist de la función de estructura multivariable  $\gamma h_j(s)$  rodea el punto  $(1,0)$   $N$  veces más en sentido de las manecillas del reloj que en el sentido contrario. Entonces,  $Z$ , el número de ceros de fase no mínima de  $(1-\gamma h_j(s))$  está dado por:

$$N = Z - P \quad (50)$$

donde  $P$  es el número de polos ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$  de  $h_j(s)$ .

De esto se puede observar que para que el canal  $C_i(s)$  sea de fase mínima depende de ambos;  $\gamma(s)$  y  $h_j(s)$  [2], [4], [8], [17].

## CAPÍTULO 3

### CASO DE ESTUDIO 2 X 2

El caso de estudio en esta sección es un problema propuesto en el libro Control System Design de Graham C. Goodwin, Stefan F. Graebe y Mario E. Salgado [6].

Considerando el siguiente sistema multivariable

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0.25 \frac{10s+1}{(s+1)(s+2)} \\ 0.25 \frac{10s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

En [6] se realizó un análisis por medio del arreglo de ganancia relativa (*RGA: relative gain array*) para evaluar el acoplamiento del sistema. Este está definido por la matriz:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1.0159 & -0.0159 \\ -0.0159 & 1.0159 \end{bmatrix} \quad (52)$$

El análisis de *RGA* da lugar a la hipótesis de que se ha realizado un emparejamiento correcto de entradas y salidas, además muestran poco acoplamiento.

Así mismo, Goodwin diseña un controlador diagonal  $k(s)$  para lograr el sistema de lazo cerrado siguiente:

$$k(s) = \begin{bmatrix} \frac{9(s+1)}{s(s+4)} & 0 \\ 0 & \frac{9(s+2)}{2s(s+4)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$T_0(s) = \frac{9}{s^2 + 4s + 9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Sin embargo, el controlador propuesto da como resultado un sistema de lazo cerrado inestable con canales entrada salida dados por:

$$T_E(s) = \frac{9(s + 0.5237)(s + 8.055)(s^2 - 1.579s + 4.2)}{(s + 6)(s + 0.5)(s^2 - 0.4679s + 1.898)(s^2 + 4.972s + 28.19)} \quad (55)$$

En la Tabla 3.1 se muestran los polos del sistema en lazo cerrado  $T_E(s)$ .

Tabla 3.1.- Polos del sistema  $T_E(s)$

Polos del Sistema	
$p_1 = -6$	$p_{3,4} = -2.49 \pm 4.69j$
$p_2 = -0.5$	$p_{5,6} = 0.23 \pm 1.36j$

De la matriz de transferencia  $G(s)$  propuesta en la ecuación (48) se calcula la forma Smith-McMillan  $G^{SM}(s)$  para determinar los polos y ceros de transmisión del sistema [18].

$$G^{SM}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(s+0.5542)(s-1.6718)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \quad (56)$$

En la Tabla 3.2 se muestran los polos y ceros de transmisión de la ecuación (56)

Tabla 3.2. Polos y ceros de transmisión del sistema

Polos	Ceros
$p_1 = -1$	$z_1 = -0.5542$
$p_2 = -2$	$z_2 = 1.6718$
$p_3 = -1$	
$p_4 = -2$	



### 3.1 Análisis de la Función de Estructura Multivariable

#### (Gamma A ( $\gamma_a(s)$ ))

Como se mencionó en la sección 2.6.3 la función de estructura multivariable es de gran importancia en el diseño de controladores para sistemas de control multivariables bajo el marco de diseño *ICAD*. Por lo tanto, el primer paso para el diseño de controladores es analizar la función  $\gamma_a(s)$ . La función  $\gamma_a(s)$  para este caso de estudio propuesto por Goodwin es:

$$\gamma_a(s) = \frac{3.125(s+0.1)^2}{(s+1)(s+2)} \quad (57)$$

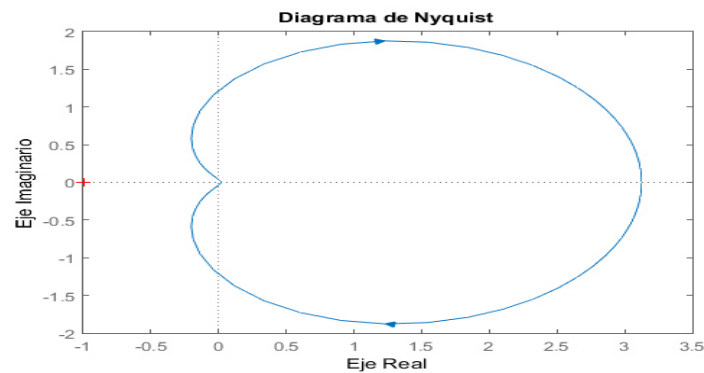


Figura 3.1 Diagrama de Nyquist de la MSF

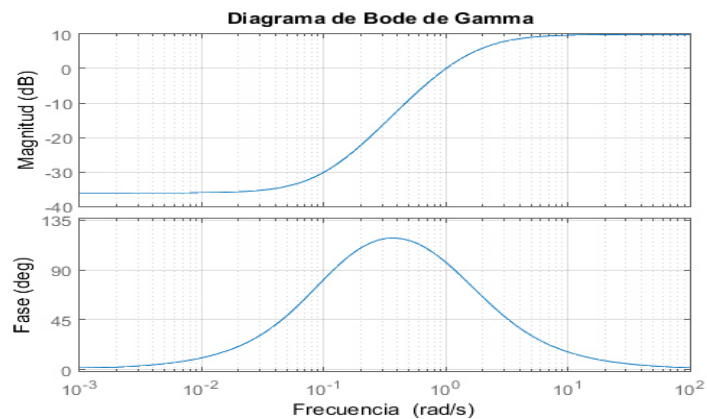


Figura 3.2 Diagrama de Bode de la MSF

En base a los diagramas de Nyquist (Fig. 3.1) y Bode (Fig. 3.2) obtenidos de la función de estructura multivariable se puede percibir que el sistema es de fase no mínima. Por medio de la ecuación (57) podemos visualizar que en la función de estructura multivariable  $\gamma_a(s)$  no hay polos ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$ , por lo que de acuerdo a la ecuación (50) habrá un cero de fase no mínima. Se hace notar que la ecuación (57) evaluada en el cero de transmisión  $z = 1.6718$  presenta una singularidad, es decir  $\gamma_a(s) = 1$ .

Esto repercute en los canales individuales, es decir, el cero de fase no mínima estará en uno de los canales, lo que hace más elaborado el diseño de los controladores.

Por otra parte, la función  $\gamma_a(s)$  en la Fig 3.2 muestra el acoplamiento de los canales en lazo abierto, se puede visualizar que para frecuencias bajas el sistema tiene poco acoplamiento y para altas frecuencias el sistema tiene alto acoplamiento. Por lo que se debe verificar que tan cercanas a éste punto están las funciones  $\gamma_a(s)h_2(s)$  y  $\gamma_a(s)h_1(s)$  correspondientes a cada canal del sistema multivariable para determinar la robustez del sistema.

A continuación, se diseñan los controladores para el sistema utilizando el marco de diseño *ICAD*. Con base al análisis desarrollado de la función de estructura multivariable se presentan cinco casos en diferentes circunstancias para comprobar la efectividad del marco de diseño. En los primeros cuatro casos, se diseñaron los controladores empleando Gamma a ( $\gamma_a(s)$ ). En el quinto caso, se diseñaron los controladores utilizando Gamma b ( $\gamma_b(s)$ )

### 3.2 Caso 1

A continuación, se explica el proceso de diseño para el caso 1, donde se obtuvo un canal de fase no mínima y  $\gamma_a(s)h_2(s)$  queda muy cerca de la zona no robusta.

Bajo *ICAD* se analizan los canales independientes. En este caso se analiza primero el canal 1 ( $C_{11}$ ) sin controlador por medio de los diagramas de Nyquist y Bode.

$$c_1(s) = \frac{-2.125(s+0.554)(s-1.67)}{(s+1)^2(s+2)} \quad (58)$$

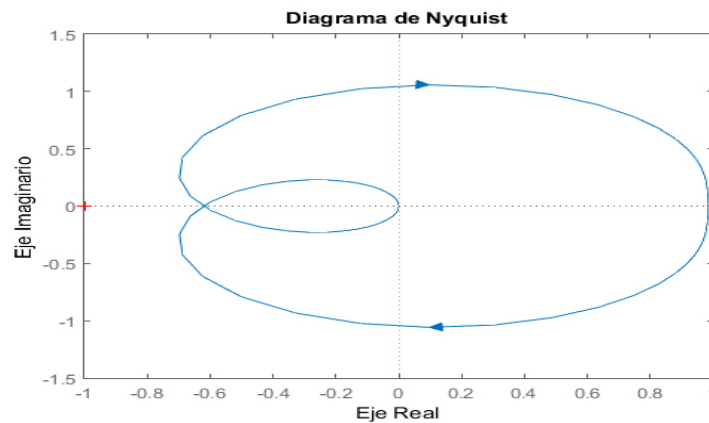


Figura 3.3 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del canal 1 sin controlador

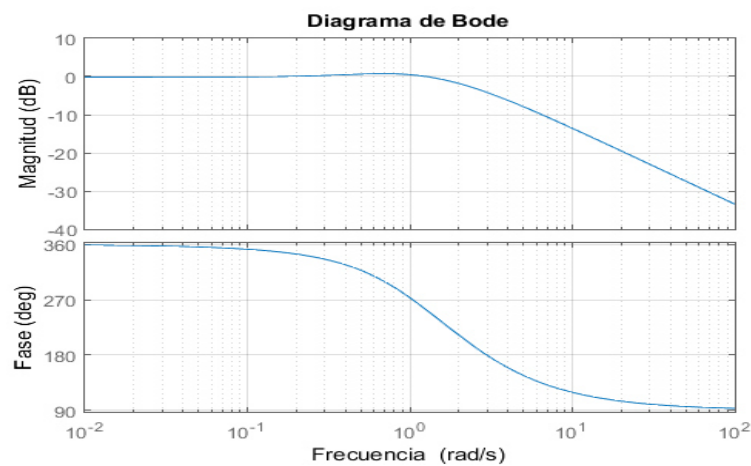


Figura 3.4 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 1 sin Controlador

Inicialmente se propone un controlador  $k_{11}(s)$  tipo PI con el fin de eliminar el error en estado estacionario y manipular la frecuencia de corte:

$$k_{11}(s) = \frac{0.69s + 0.414}{s} \quad (59)$$

Canal 1 con el controlador diseñado considerando que  $h_2(s) = 1$

$$C_{11}(s) = \frac{-1.46(s + 0.6)(s + 0.55)(s - 1.672)}{s(s + 1)^2(s + 2)} \quad (60)$$

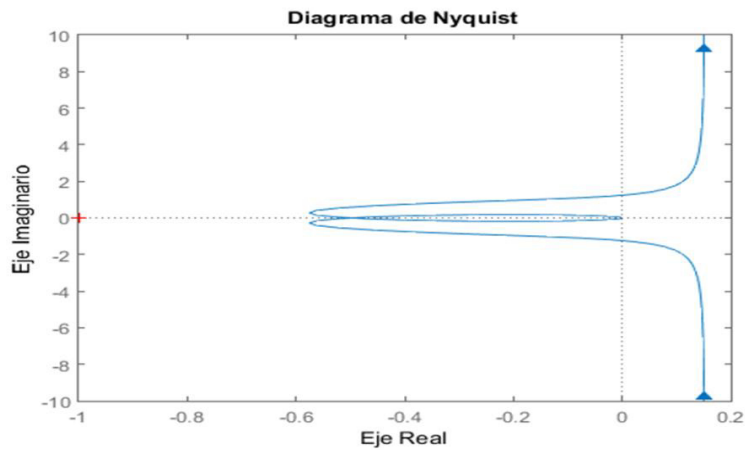


Figura 3.5 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del canal 1

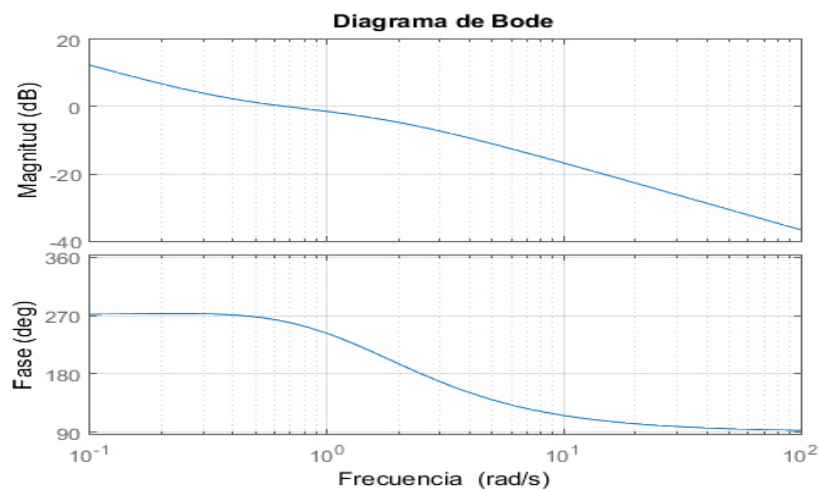


Figura 3.6 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1

Se visualizan los diagramas de Bode y Nyquist para analizar la estabilidad del canal 1. Es evidente que el canal es fase no-mínima ya que incluye el cero de transmisión del sistema. Se procede a obtener  $h_1$  con el controlador diseñado.

$$h_1(s) = \frac{0.69(s+0.6)}{(s+1.39)(s+0.29)} \quad (61)$$

Al obtener  $h_1$  se continua con el diseño del controlador del canal 2. Pero antes se analiza el canal 2 sin controlador.

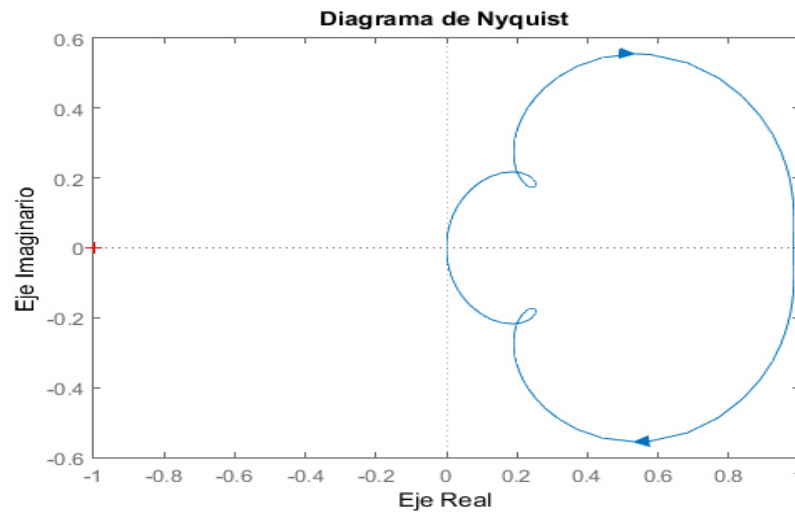


Figura 3.7 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 2 sin Controlador

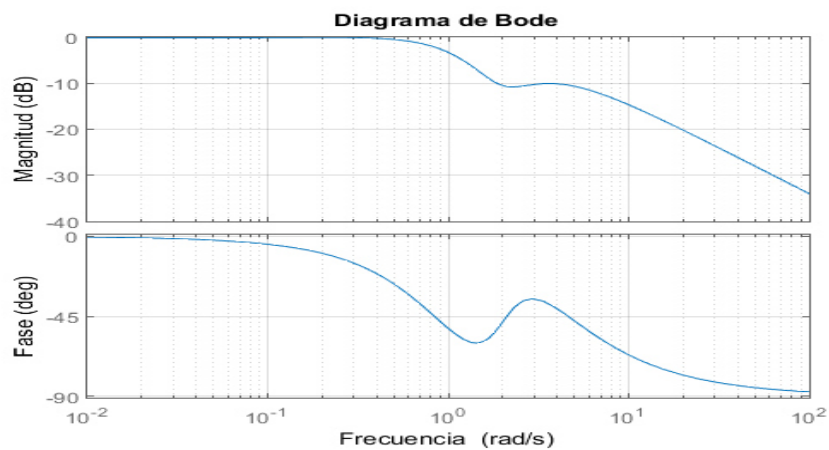


Figura 3.8 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 2 sin Controlador

En este canal ya se incluye la función  $h_1(s)$  definida por la ecuación (58). Se propone el controlador siguiente:

$$k_{22}(s) = \frac{1}{s} \quad (62)$$

Canal 2 ( $C_{22}$ ) con controlador:

$$C_{22}(s) = \frac{2(s+0.72)(s+0.28)(s^2+1.53s+4.02)}{s(s+2)^2(s+1.39)(s+1)(s+0.29)} \quad (63)$$

Se visualizan los diagramas de Bode y Nyquist para analizar la estabilidad del canal 2.

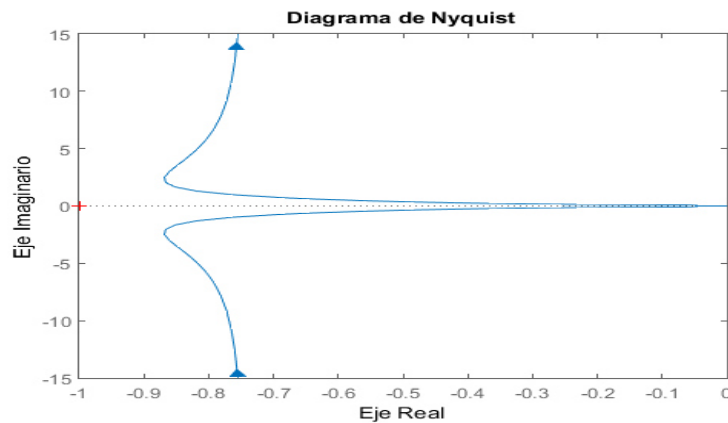


Figura 3.9 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 2

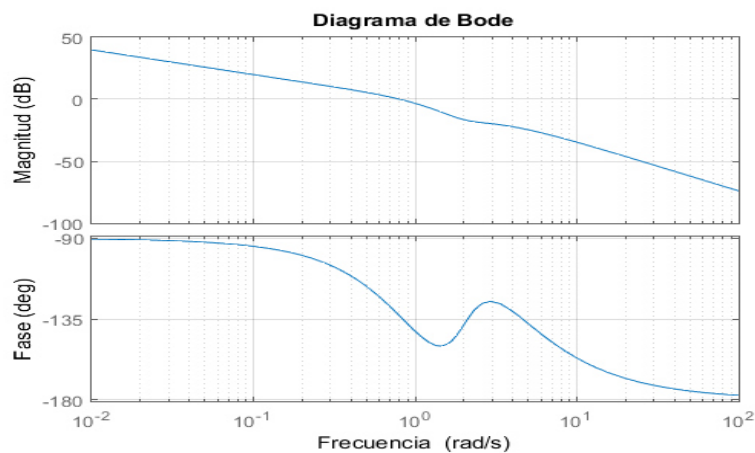


Figura 3.10 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 2

Se construye  $h_2(s)$ :

$$h_2(s) = \frac{2s^2 + 4s}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s} \quad (64)$$

al tener  $h_2$ , se rediseña el canal 1

$$C_{11}(s) = \frac{0.69s(s+0.6)(s+0.49)(s+2)(s+4.55)(s^2 - 0.049 + 1.75)}{s^2(s+1)^2(s+2)^2(s^2 + 2s + 2)} \quad (65)$$

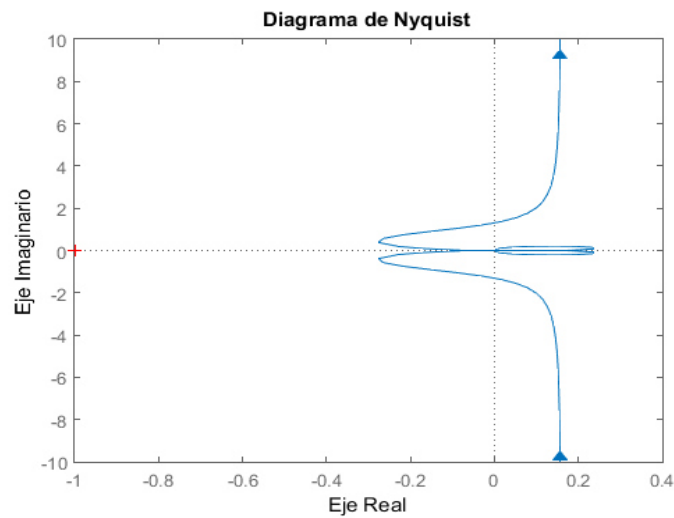


Figura 3.11 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 1 con iteración

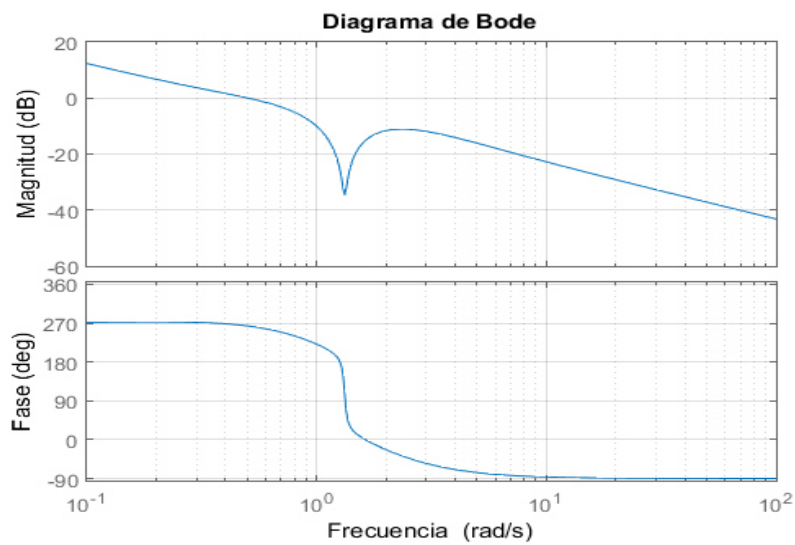


Figura 3.12 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 1 con iteración

Se reconstruye  $h_1$

$$h_1(s) = \frac{0.69(s+0.6)}{(s+1.39)(s+0.29)} \quad (66)$$

En este caso queda igual debido a que al utilizar  $h_2$  no hubo necesidad de rediseñar el controlador.

Con  $h_1$ , ahora se rediseña el canal 2.

Nota: En este caso solo se modificó la ganancia, para mejorar los márgenes de estabilidad.

$$C_{22}(s) = \frac{0.82(s+0.72)(s+0.28)(s^2+1.53s+4.02)}{s(s+2)^2(s+1.39)(s+1)(s+0.29)} \quad (67)$$

Al disminuir la ganancia se mejoraron los márgenes de estabilidad, se pueden visualizar mediante los diagramas de Bode y Nyquist.

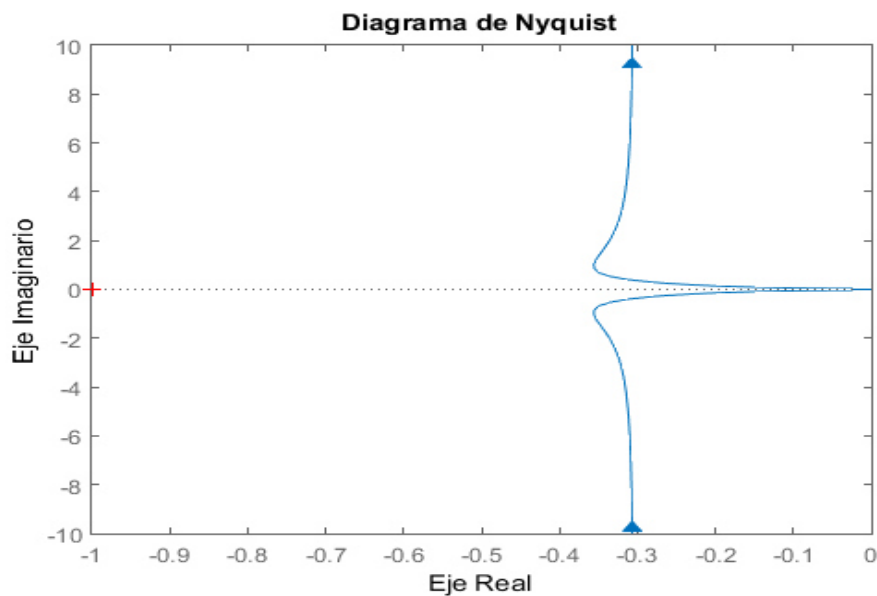


Figura 3.13 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto del Canal 2 con Iteración



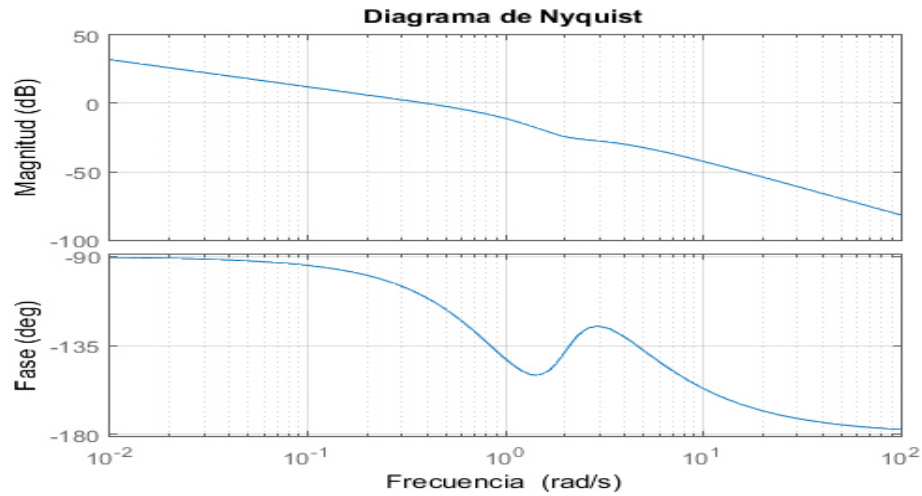


Figura 3.14 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del Canal 2 con Iteración

Se analiza  $\gamma_a(s)h_2(s)$ :

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{6.25(s+0.1)^2(s+2)}{s(s+2)^2(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (68)$$

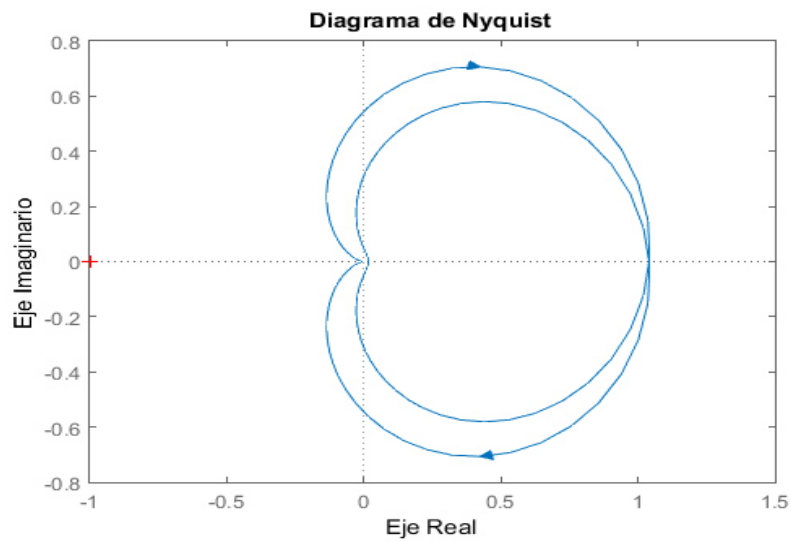


Figura 3.15 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de  $\gamma(s)h_2(s)$ .

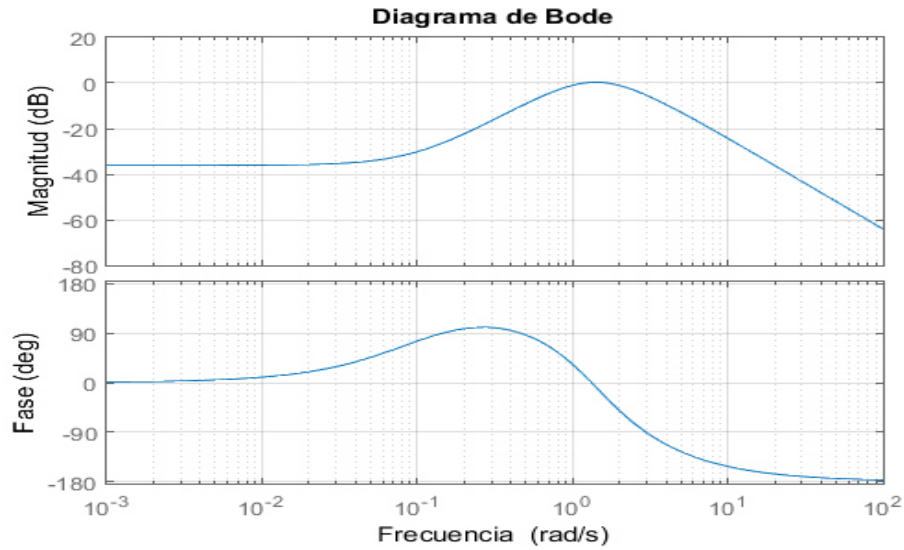


Figura 3.16 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de  $\gamma(s)h_2(s)$ .

Mediante el diagrama de Nyquist se visualiza que se rodea dos veces el punto (1,0) en el sentido de las manecillas del reloj. Lo que quiere decir que  $1 - \gamma h_2$  es de fase no mínima:

$$1 - \gamma_a(s)h_2(s) = \frac{s(s + 4.557)(s + 2)(s + 0.4924)(s^2 - 0.4924s + 1.755)}{s(s + 2)^2(s + 1)(s^2 + 2s + 2)} \quad (69)$$

En la tabla 3.3 se indica la ubicación de los ceros de fase no mínima del canal 1.

Tabla 3.3 Ubicación de los ceros de fase no mínima del canal 1

Ceros
$z_1 = 0.2462 + 1.3017j$
$z_2 = 0.2462 - 1.3017j$

También se analiza  $\gamma_a(s)h_1(s)$ :

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{2.1563(s+0.1)^2(s+0.6)}{(s+2)(s+1.393)(s+1)(s+0.2973)} \quad (70)$$

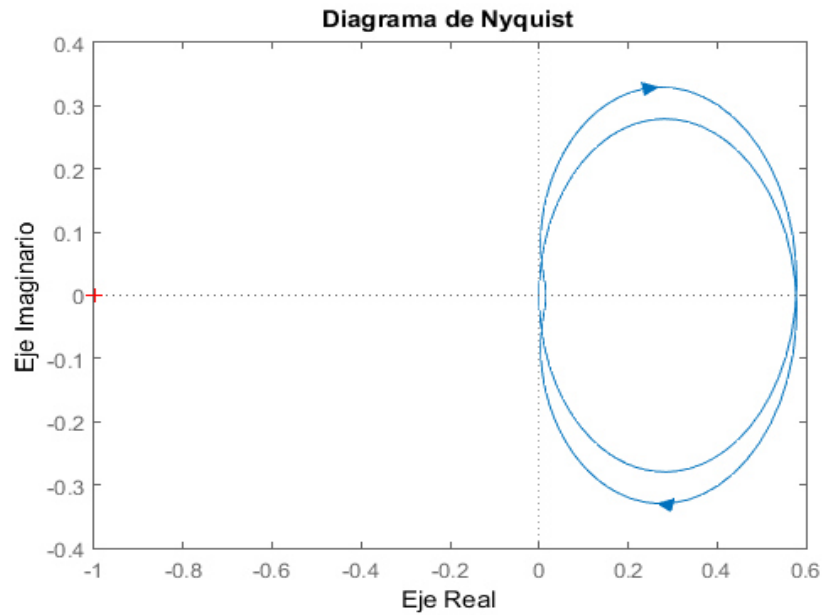


Figura 3.17 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de  $\gamma h_1$

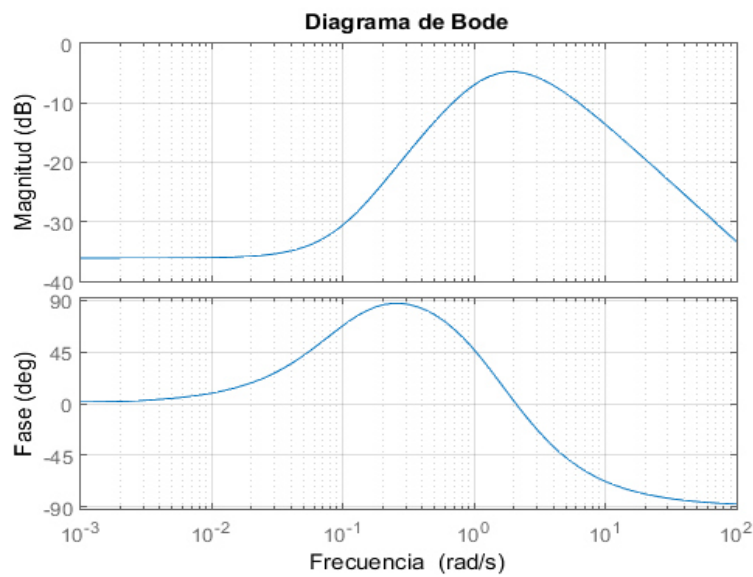


Figura 3.18 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de  $\gamma h_1$

Mediante el diagrama de Nyquist se puede visualizar que no se rodea el punto (1,0), por lo tanto  $1 - \gamma h_1$  es de fase mínima.

$$1 - \gamma_a(s)h_1(s) = \frac{(s+0.7216)(s+0.2809)(s^2+1.531s+4.021)}{(s+2)(s+1.393)(s+1)(s+0.2973)} \quad (71)$$

En la tabla 3.4 se resumen los resultados obtenidos en el diseño y análisis de los controladores mediante la metodología ICAD, permitiendo visualizar el ancho de banda y los márgenes de estabilidad de cada canal y de  $\gamma_a(s)h(s)$  con mayor facilidad.

Tabla 3.4 Resultados obtenidos utilizando ICAD

	$C_{11}(s)$	$\gamma(s)h_2(s)$		$C_{22}(s)$	$\gamma(s)h_1(s)$
BW (rad/s)	0.503	1.2	1.69	0.4	-
MG (dB)	25.8	0.34	0.34	$\infty$	4.77
MF ( $^\circ$ )	83.5	15	30	69.1	$\infty$

Quedando las respuestas de la siguiente manera:

$$C_{11}(s) = \frac{0.69(s+0.6)(s+0.49)(s+4.55)(s^2-0.049s+1.75)}{(s+0.6848)(s+0.2767)(s^2+0.6798s+0.983)(s^2+5.049s+8.751)} \quad (72)$$

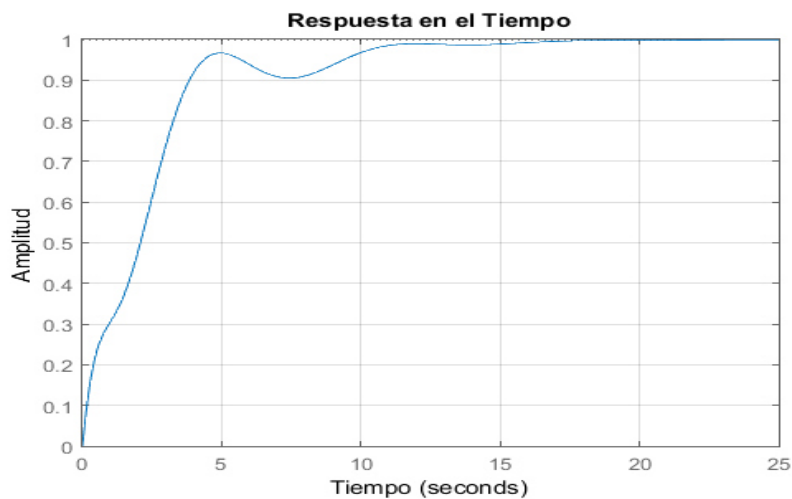


Fig. 3.19 Respuesta en el Tiempo del Canal 1

$$C_{22}(s) = \frac{0.82(s+0.72)(s+0.28)(s^2+1.53s+4.02)}{(s+0.595)(s+0.2658)(s^2+1.004s+0.5981)(s^2+4.826s+7.067)} \quad (73)$$

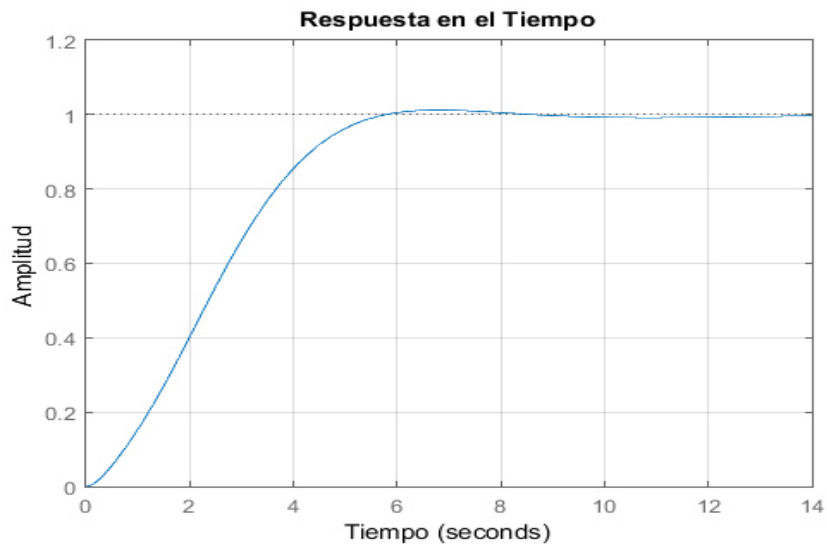


Fig. 3.20 Respuesta en el Tiempo del Canal 2

### 3.2.1 Conclusiones del Caso 1

Como se analizó al comienzo de este caso, de acuerdo con la función de estructura multivariable  $\gamma_a(s)$ , la presencia del cero de fase no mínima en la naturaleza del sistema se refleja en el canal 1, al quedar éste de fase no mínima. Al analizar la multiplicación de  $\gamma_a(s)h_2(s)$ , ecuación (68), se observa que el diagrama de Nyquist, fig. 3.15, de ésta función rodea dos veces el punto (1,0) por lo que el canal 1 resulta de fase no mínima con la presencia de dos ceros ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Por otra parte, el canal 2 es de fase mínima.

Estructuralmente el sistema no es robusto ya que la función  $\gamma_a(s)h_2(s)$  está muy cerca del punto (1,0).

### 3.3 Caso 2

En el caso 1, se observó que el ancho de banda de los dos canales era muy similar, el ancho de banda del canal 1 fue de 0.503 rad/s mientras que el ancho de banda del canal 2 fue 0.4 rad/s. Con estos anchos de banda  $\gamma_a(s)h_2(s)$  está muy cerca de la zona no robusta (1,0). Con esto los dos canales son estables, pero estructuralmente el canal 1 es no robusto debido a  $\gamma_a(s)h_2(s)$ . Por lo que en este caso se disminuyó el ancho de banda del canal 2.

Se analiza  $\gamma_a(s)h_2(s)$ :

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{1.5625(s+0.1)^2}{(s+2)(s+1.707)(s+1)(s+0.2929)} \quad (74)$$

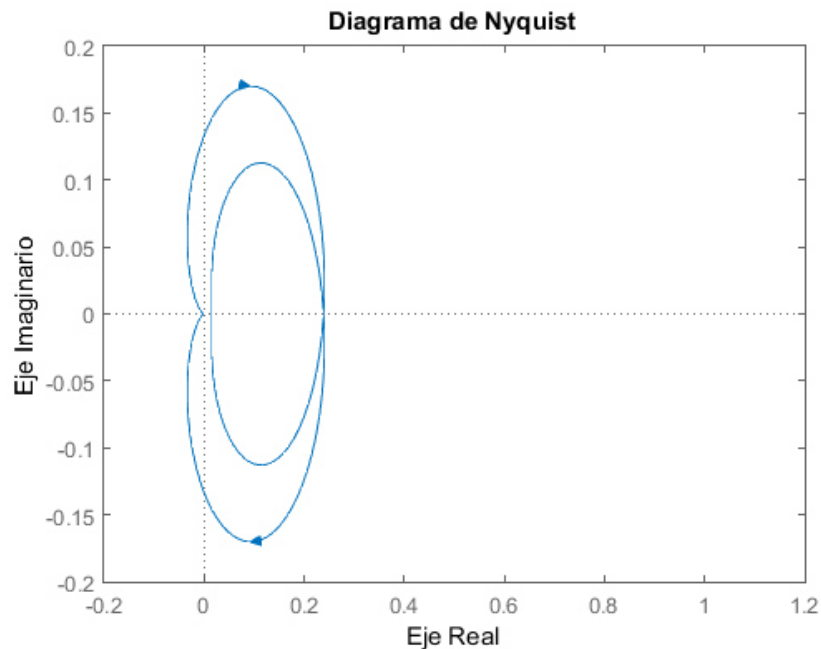


Figura 3.21 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de  $\gamma_a(s)h_2(s)$ .

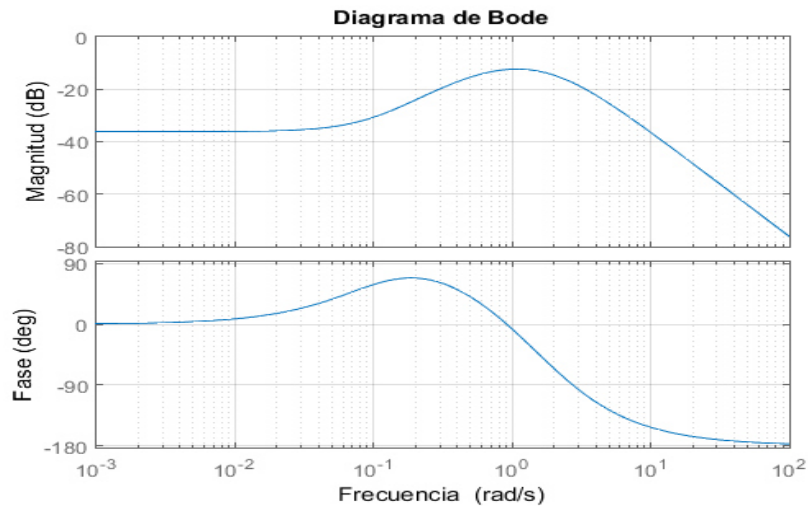


Figura 3.22 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de  $\gamma_a(s)h_2(s)$ .

Mediante el diagrama de Nyquist se visualiza como se alejó de la zona no robusta (1,0). Al no rodear el punto (1,0) quiere decir que  $1 - \gamma_a(s)h_2(s)$  es de fase mínima:

$$1 - \gamma_a(s)h_2(s) = \frac{(s+3.374)(s+0.2685)(s^2+1.358s+1.087)}{(s+2)(s+1.707)(s+1)(s+0.2929)} \quad (75)$$

También se analiza  $\gamma_a(s)h_1(s)$ , el cual quedo igual que el primer caso:

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{2.1563(s+0.1)^2(s+0.6)}{(s+2)(s+1.393)(s+1)(s+0.2973)} \quad (76)$$

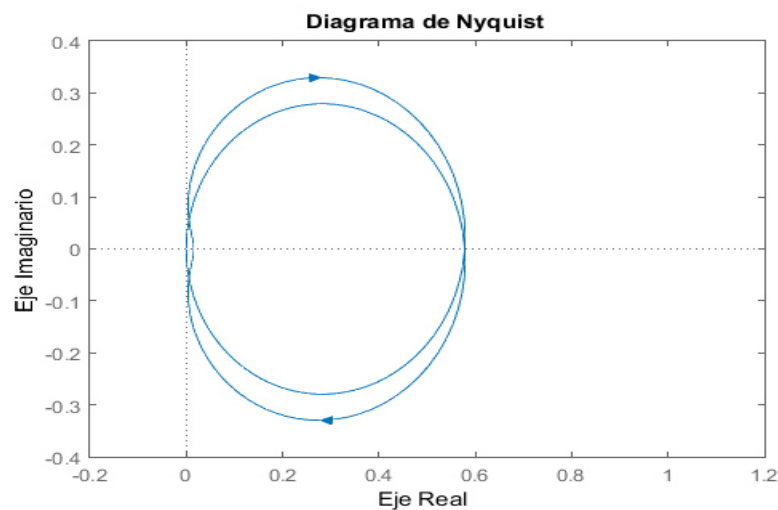


Figura 3.23 Diagrama de Nyquist de Lazo Abierto de  $\gamma_a(s)h_1(s)$

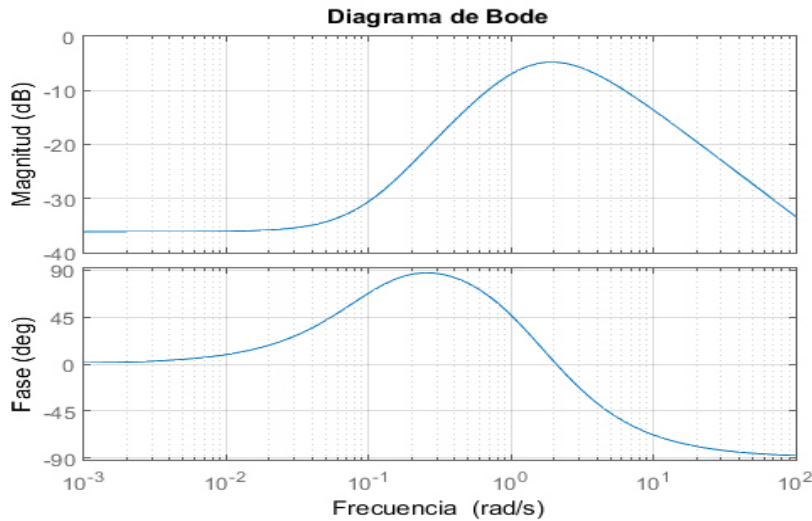


Figura 3.24 Diagrama de Bode de Lazo Abierto de  $\gamma_a(s)h_1(s)$

Mediante el diagrama de Nyquist se puede visualizar que no se rodea el punto (1,0), por lo tanto  $1 - \gamma_a(s)h_1(s)$  también es de fase mínima.

$$1 - \gamma_a(s)h_1(s) = \frac{(s + 0.7216)(s + 0.2809)(s^2 + 1.531s + 4.021)}{(s + 2)(s + 1.393)(s + 1)(s + 0.2973)} \quad (77)$$

En la tabla 3.5 se resumen los resultados obtenidos en el diseño y análisis de los controladores mediante la metodología ICAD, permitiendo visualizar el ancho de banda y los márgenes de estabilidad de cada canal y de  $\gamma_a(s)h(s)$  con mayor facilidad.

Tabla 3.5 Resultados obtenidos utilizando ICAD

	$C_{11}(s)$	$\gamma_a(s)h_2(s)$	$C_{22}(s)$	$\gamma_a(s)h_1(s)$
BW (rad/s)	0.425	-	0.101	-
MG (dB)	$\infty$	12.5	$\infty$	4.78
MF (°)	95.2	$\infty$	85.5	$\infty$



Quedando las respuestas de la siguiente manera:

$$C_{11}(s) = \frac{0.69(s+0.6)(s+0.2685)(s+3.374)(s^2+1.358s+1.087)}{(s+0.4297)(s+0.2379)(s^2+1.325s+0.6236)(s^2+4.697s+6.392)} \quad (78)$$

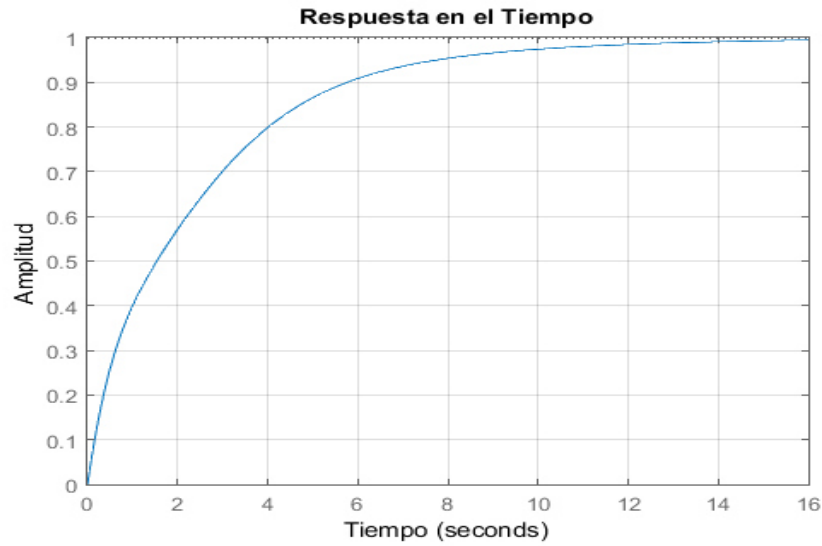


Fig. 3.25 Respuesta en el Tiempo del Canal 1

$$C_{22}(s) = \frac{0.205(s+0.72)(s+0.28)(s^2+1.53s+4.02)}{(s+0.3114)(s+0.1084)(s^2+1.785s+0.9011)(s^2+4.485s+5.496)} \quad (79)$$

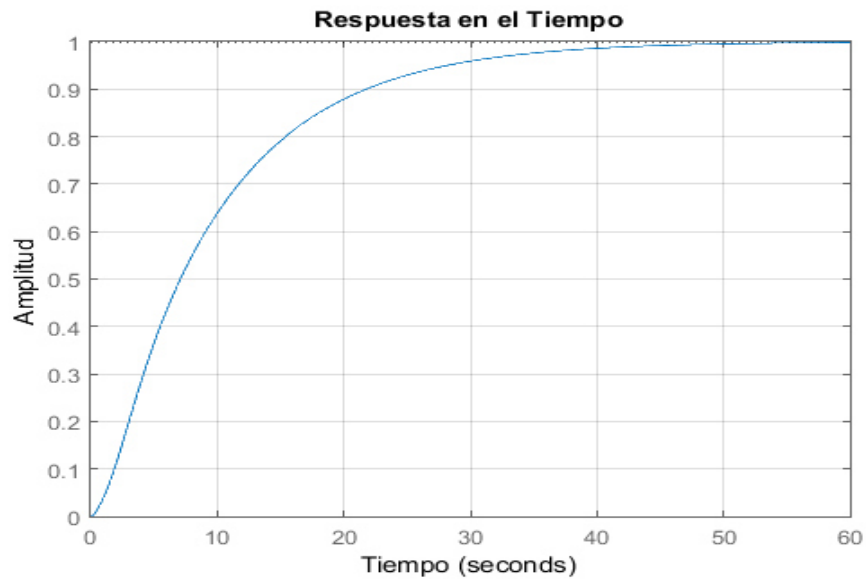


Fig. 3.26 Respuesta en el Tiempo del Canal 2

### 3.3.1 Conclusiones del Caso 2

Con los resultados obtenidos de analizar  $\gamma_a(s)$  y del caso 1, se percató de la robustez estructural de los dos canales.

En este caso se redujo el ancho de banda del canal 2, con lo que se alejó la función  $\gamma_a(s)h_2(s)$  del punto (1,0).

También al reducir el ancho de banda del canal 2 resultaron los dos canales de fase mínima. Por lo tanto, el sistema es estructuralmente robusto.

## 3.4 Caso 3

En el tercer caso, se aumentó el ancho de banda del canal 1, dejando el ancho de banda del canal 2 como en el primer caso, para conocer en qué punto el sistema es inestable. Para analizar esto con mayor claridad se fue aumentando el ancho de banda del canal 1 de 10 en 10, hasta llegar a 30 veces más el ancho de banda del primer caso.

✓ Con ganancia = 6.9 (10 veces más)

$$k_{11}(s) = \frac{6.9(s+0.6)}{s} \quad (80)$$

$$k_{22}(s) = \frac{1}{s} \quad (81)$$

los canales quedan:

$$C_1(s) = \frac{6.9(s+0.6)(s+0.49)(s+4.55)(s^2 - 0.049 + 1.75)}{s(s+2)(s+1)^2(s^2 + 2s + 2)} \quad (82)$$

$$C_2(s) = \frac{0.82(s-8.92)(s-2.878)(s+0.6393)(s+0.4966)}{(s+7.336)(s+2)^2(s+1)(s+0.5644)} \quad (83)$$

Al aumentar el ancho de banda del canal 1, 10 veces, surge la presencia de ceros de fase no mínima en el canal 2. Se analizan los diagramas de Nyquist y Bode de los canales.

- Canal 1

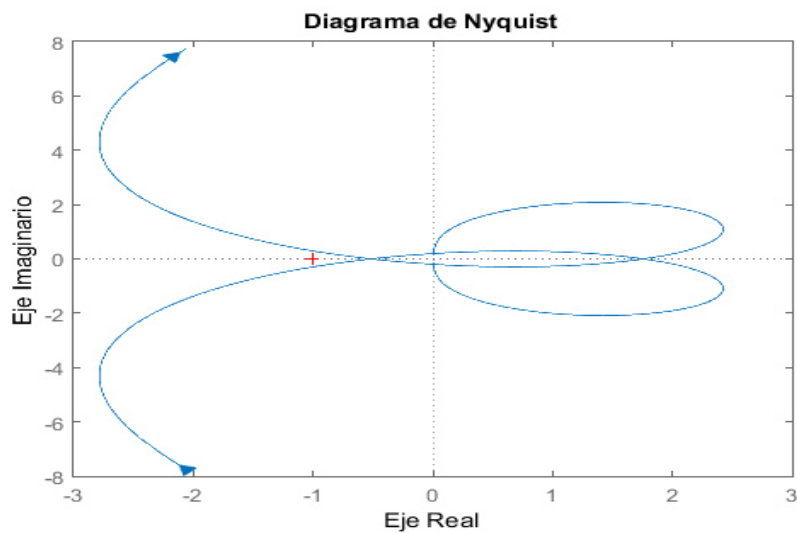


Fig. 3.27 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1

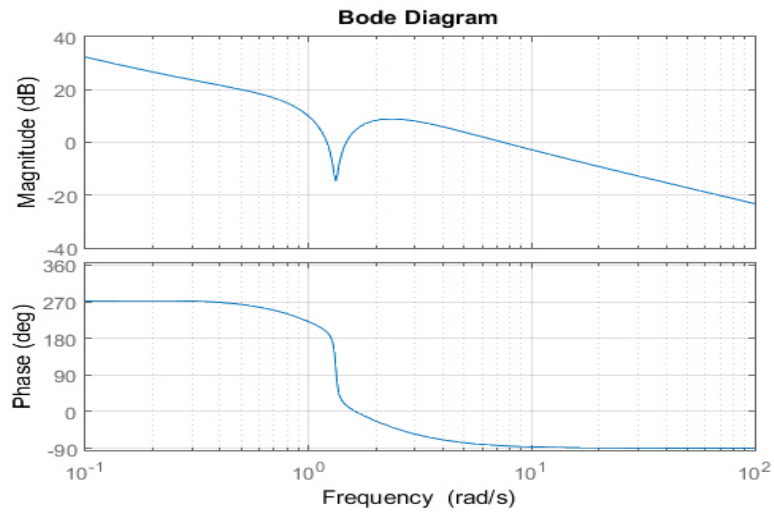


Fig. 3.28 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1

- Canal 2

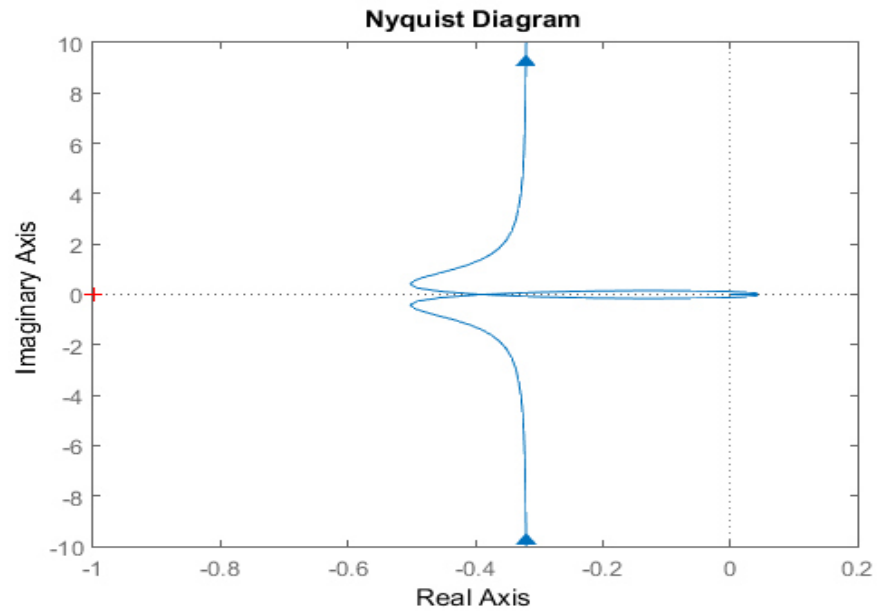


Fig. 3.29 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2

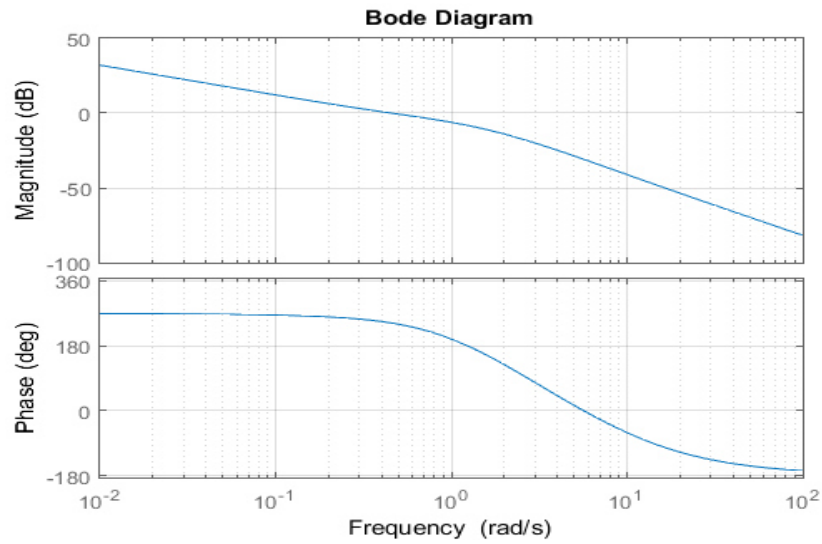
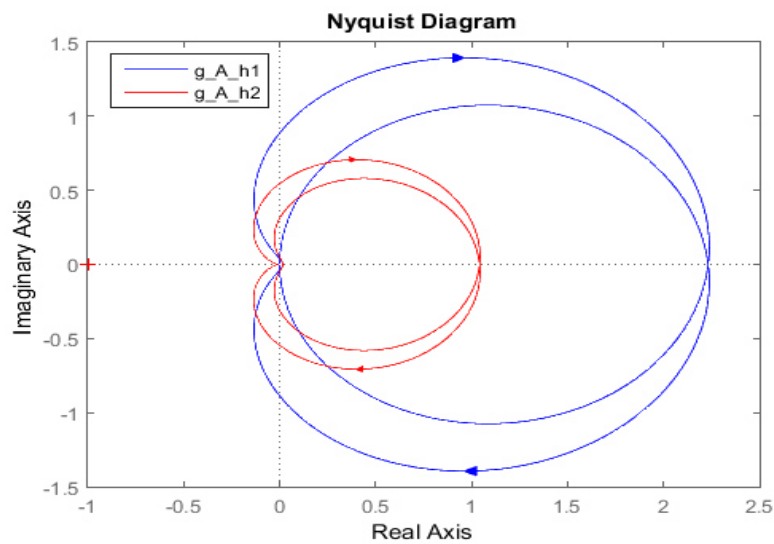


Fig. 3.30 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2

- $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{21.5625(s+0.1)^2(s+0.6)}{(s+2)(s+1)(s+0.5644)(s+7.336)} \quad (84)$$

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{6.25(s+0.1)^2}{(s+2)(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (85)$$

Fig. 3.31 Comparación de diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

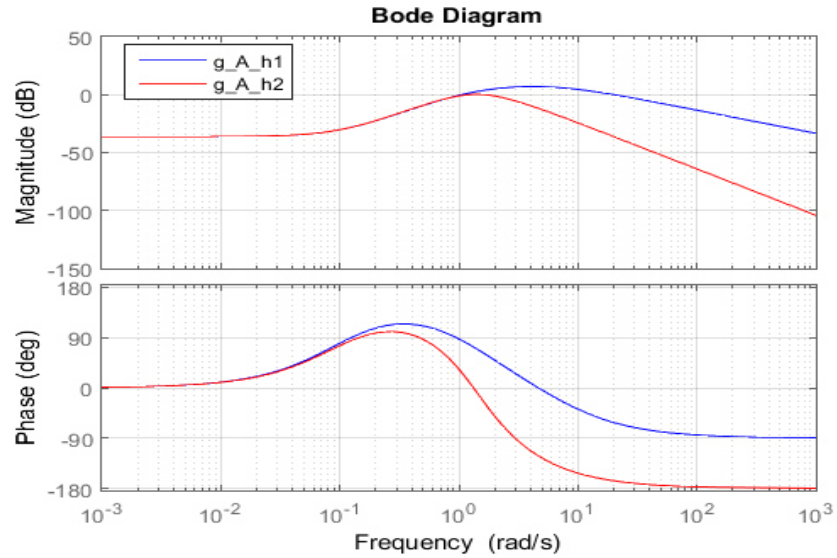


Fig. 3.32 Comparación de diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

En la tabla 3.6 se resumen los resultados obtenidos con esta ganancia:

Tabla 3.6 Resultados obtenidos con ganancia 6.9

	C <sub>11</sub> (s)			$\gamma_a(s)h_2(s)$		C <sub>22</sub> (s)	$\gamma_a(s)h_1(s)$	
BW (rad/s)	0.224	1.47	7.46	1.21	1.64	0.459	1.05	20.1
MG (dB)	5.77			0.32		8.18	6.97	
MF (°)	15.5	164	96.4	12.1	26.8	63.2	85.8	62.1

✓ Con ganancia = 16.9 (20 veces más)

$$k_{11}(s) = \frac{16.9(s+0.6)}{s} \quad (86)$$

$$k_{22}(s) = \frac{1}{s} \quad (87)$$

los canales quedan:

$$C_1(s) = \frac{16.9(s+0.6)(s+0.49)(s+4.55)(s^2 - 0.049s + 1.75)}{s(s+2)(s+1)^2(s^2 + 2s + 2)} \quad (88)$$

$$C_2(s) = \frac{0.82(s-31.09)(s-1.967)(s+0.6219)(s+0.5247)}{s(s+17.31)(s+2)^2(s+1)(s+0.5856)} \quad (89)$$

- Canal 1

Al aumentar el ancho de banda del canal 1, 20 veces, el canal 1 se hace inestable.

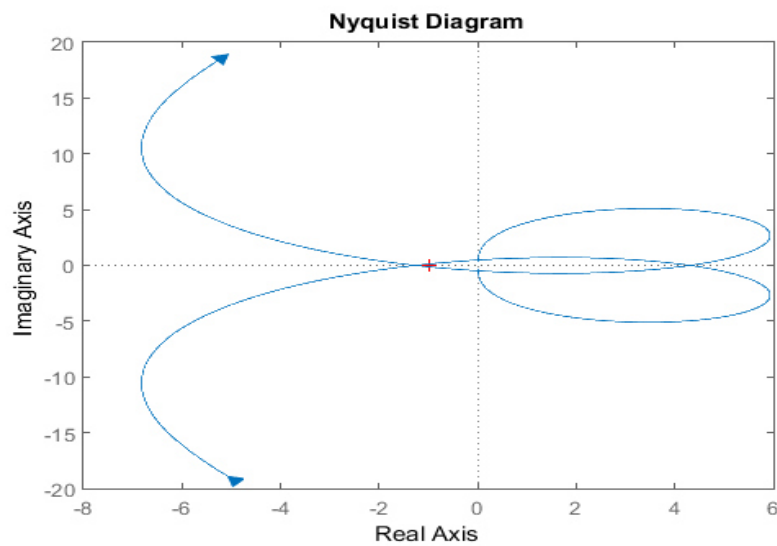


Fig. 3.33 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1

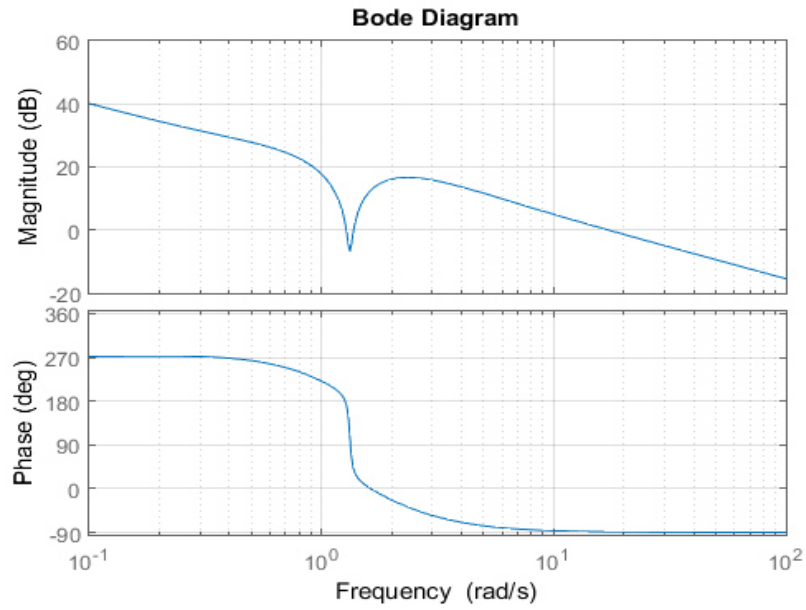


Fig. 3.34 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1

- Canal 2

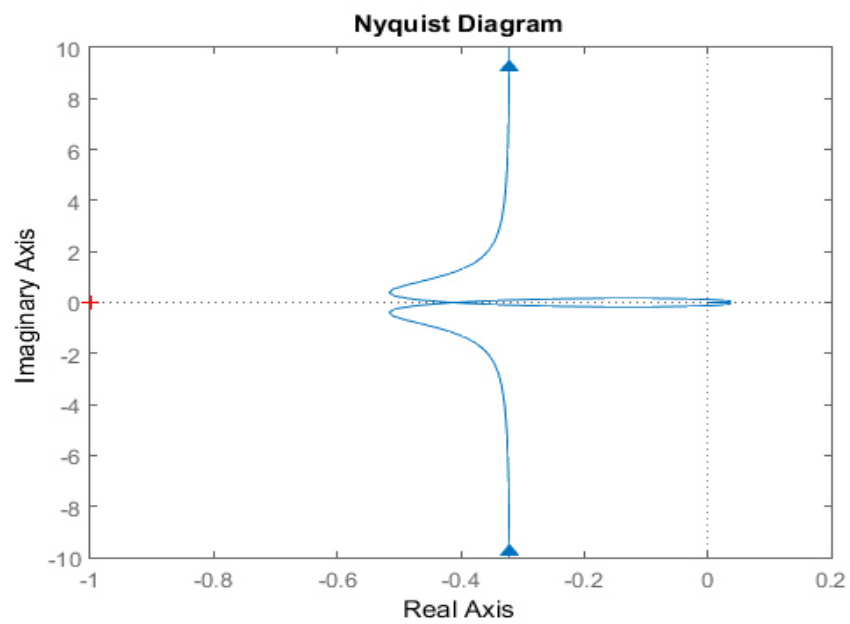


Fig. 3.35 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2



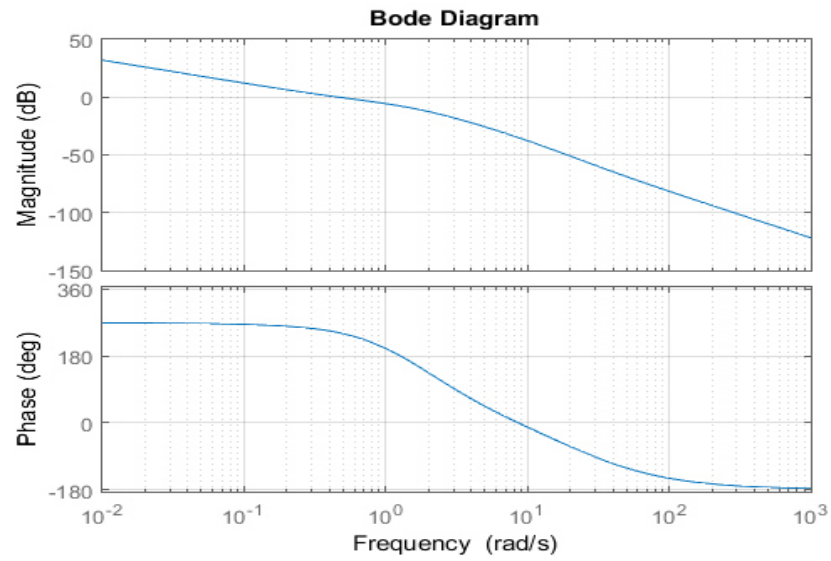
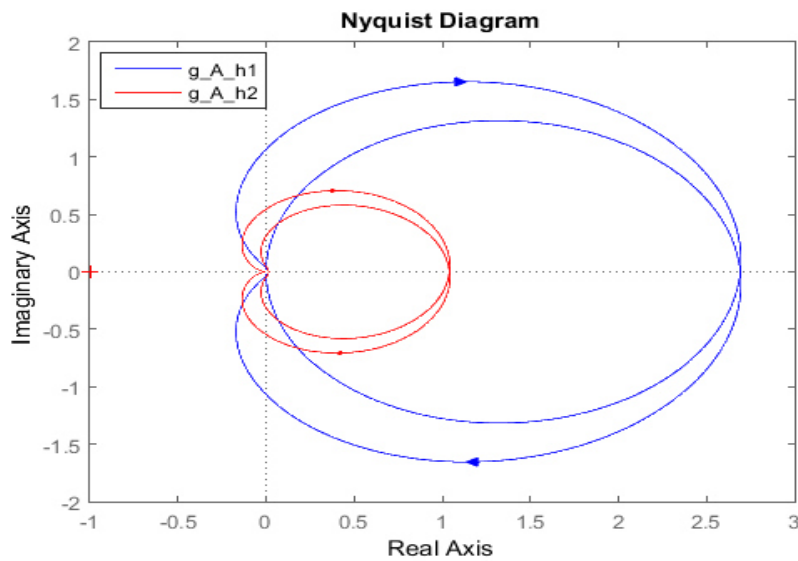


Fig. 3.36 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2

- $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{52.8125(s+0.1)^2(s+0.6)}{(s+2)(s+1)(s+0.5856)(s+17.31)} \quad (90)$$

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{6.25(s+0.1)^2}{(s+2)(s+1)(s^2+2s+s)} \quad (91)$$

Fig. 3.37 Comparación de diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

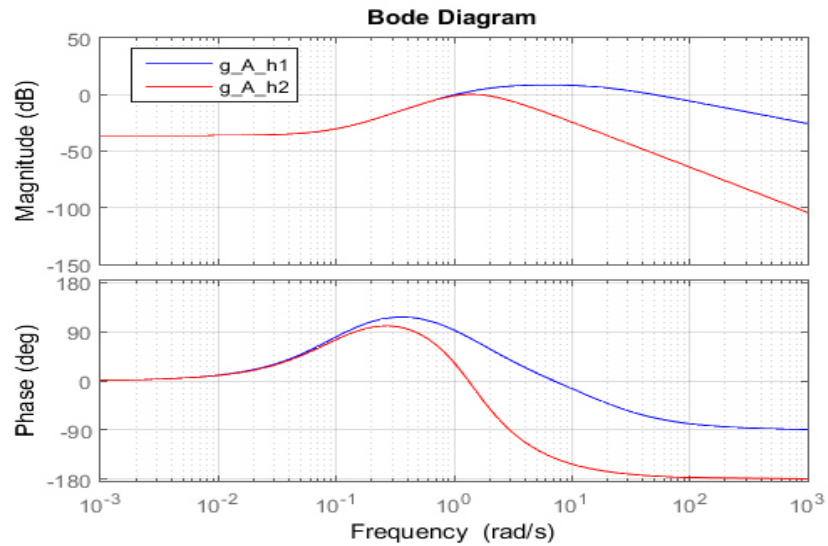


Fig. 3.38 Comparación de diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

En la tabla 3.7 se resumen los resultados obtenidos con ganancia 16.9:

Tabla 3.7 Resultados obtenidos con ganancia 16.9

	$C_{11}(s)$		$\gamma_a(s)h_2(s)$		$C_{22}(s)$	$\gamma_a(s)h_1(s)$		
BW (rad/s)	1.28	1.38	1.2	1.66	0.46	1.04	48.8	
MG (dB)	2.01		0.304		7.66	8.6		
MF (°)	7.14	140	91.6	12.4	28	63	91.6	67.3

✓ Con ganancia = 26.9 (30 veces más)

$$k_{11}(s) = \frac{26.9(s+0.6)}{s} \quad (92)$$

$$k_{22}(s) = \frac{1}{s} \quad (93)$$

los canales quedan:

$$C_1(s) = \frac{26.9(s+0.6)(s+0.49)(s+4.55)(s^2 - 0.049 + 1.75)}{s(s+2)(s+1)^2(s^2 + 2s + 2)} \quad (94)$$

$$C_2(s) = \frac{0.82(s-52.47)(s-1.843)(s+0.6157)(s+0.5338)}{s(s+27.31)(s+2)^2(s+1)(s+0.591)} \quad (95)$$

- Canal 1

Al aumentar el ancho de banda del canal 1, 30 veces, el canal 1 se hace inestable.

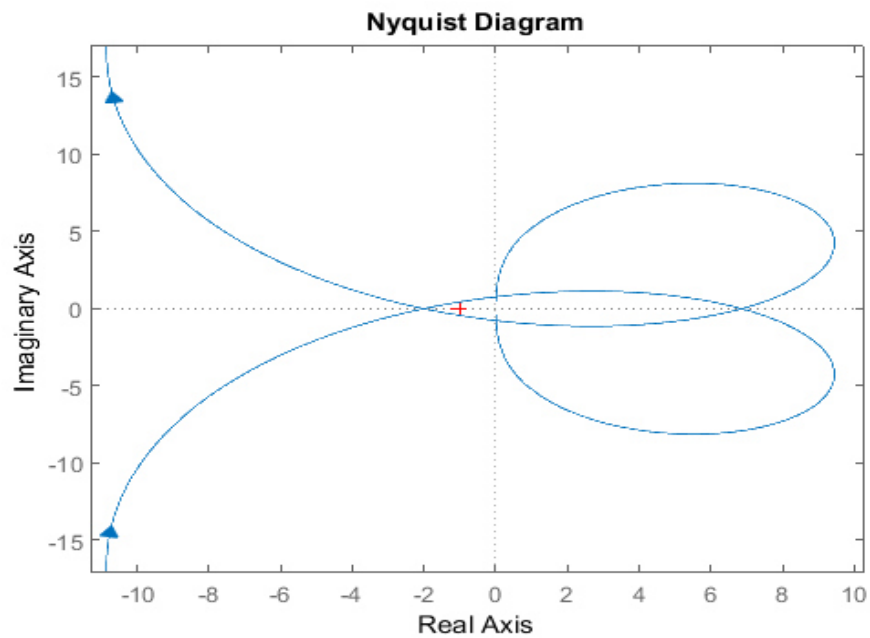


Fig. 3.39 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1

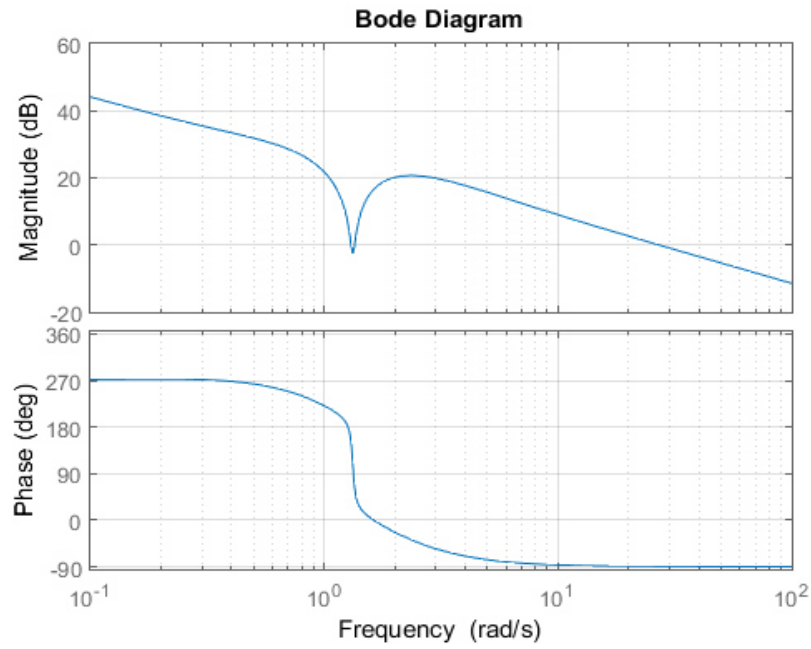


Fig. 3.40 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1

- Canal 2

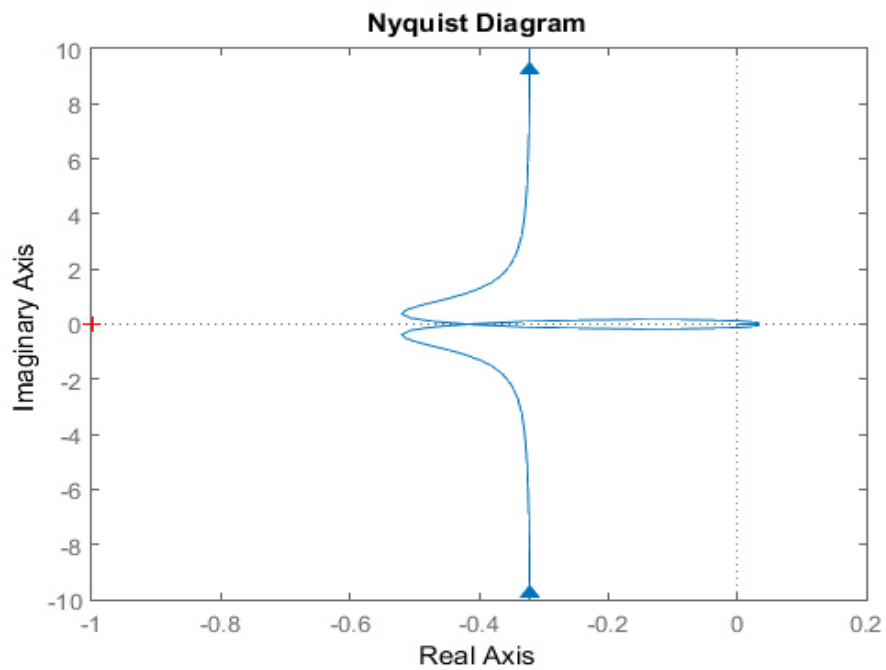


Fig. 3.41 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2

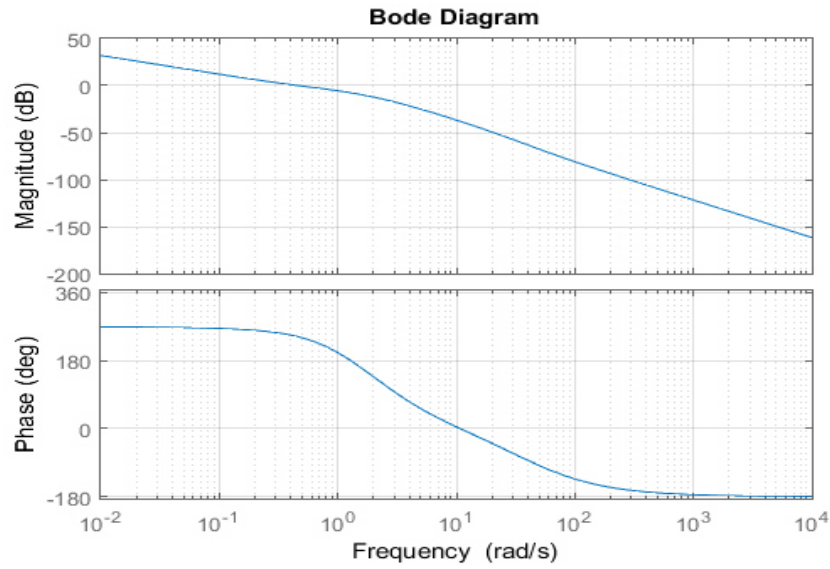
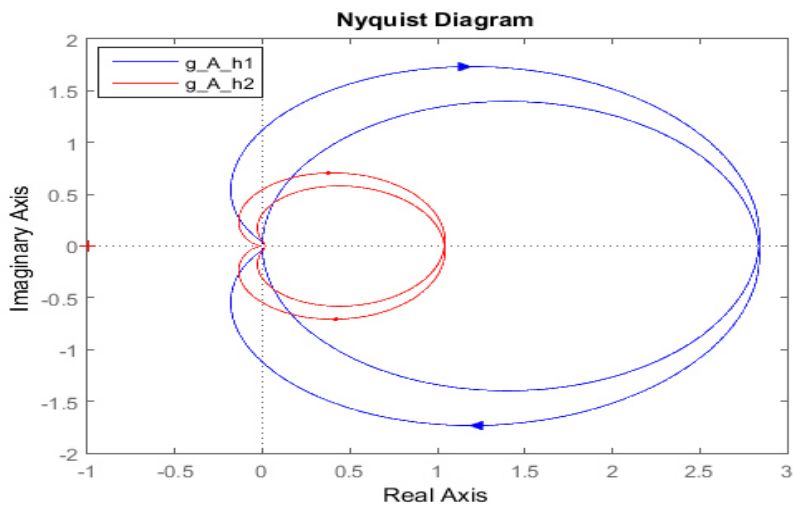


Fig. 3.42 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2

- $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{84.0625(s+0.1)^2(s+0.6)}{(s+2)(s+1)(s+0.591)(s+27.31)} \quad (96)$$

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{6.25(s+0.1)^2}{(s+2)(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (97)$$

Fig. 3.43 Comparación de diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

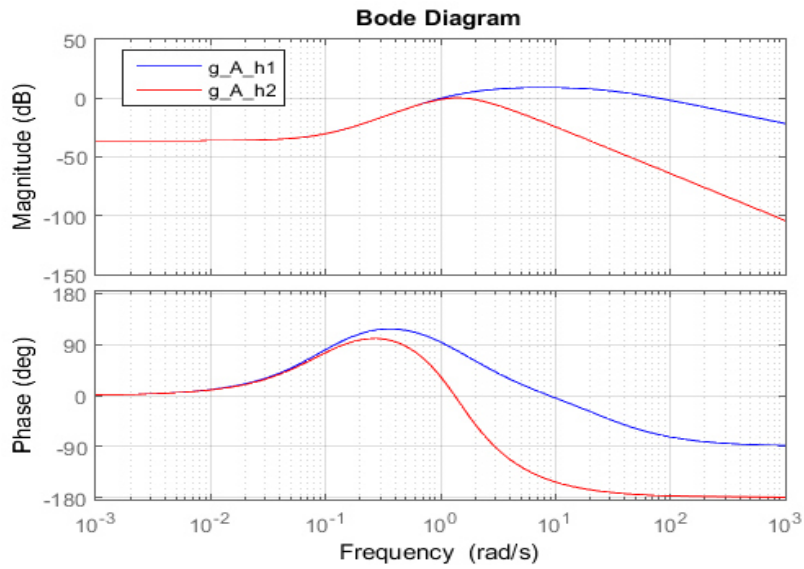


Fig. 3.44 Comparación de diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

En la tabla 3.8 se resumen los resultados obtenidos con ganancia 16.9:

Tabla 3.8 Resultados obtenidos con ganancia 26.9

	$C_{11}(s)$		$\gamma_a(s)h_2(s)$		$C_{22}(s)$	$\gamma_a(s)h_1(s)$		
BW (rad/s)	1.3	1.35	1.2	1.66	0.46	1.2	77.2	
MG (dB)	6.05		0.34		7.55	9.06		
MF (°)	28.9	118	90.9	11.8	28.2	62.9	85.9	68.3

### 3.4.1 Conclusiones del Caso 3

Para este caso, se buscó hasta qué punto el sistema se hacía inestable, para realizar este análisis con mayor profundidad se fue aumentando el ancho de banda del canal 1. Se fue aumentando de 10 en 10 la ganancia del canal 1, hasta llegar a 30 veces más la ganancia del caso 1. Para la primera iteración donde se aumentó 10 veces la ganancia del canal 1, se obtuvo que el sistema aún es estable, además que los dos canales son de fase no mínima, es decir, las funciones  $\gamma_a(s)h_2(s)$  y  $\gamma_a(s)h_1(s)$  rodean dos veces al punto  $(1,0)$ , por lo que surge la presencia de dos ceros ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$  en los dos canales. Para el caso donde se aumentó 20 veces la ganancia del canal 1 el sistema resulta inestable. De igual manera los dos canales resultan de fase no mínima. Al aumentar 30 veces la ganancia del canal 1 el sistema ya es inestable.

Estructuralmente el sistema conforme se va aumentando la ganancia, aun siendo estable no es robusto, debido a que la función  $\gamma_a(s)h_2(s)$  siempre permanece cerca del punto  $(1,0)$  debido a que no se modificó el ancho de banda del canal 2.

### 3.5 Caso 4

En el cuarto caso se redujo el ancho de banda del canal 2 y para el canal 1 se aumentó el ancho de banda 30 veces más al primer caso.

$$k_{11}(s) = \frac{26.9(s+0.6)}{s} \quad (98)$$

$$k_{22}(s) = \frac{0.25}{s} \quad (99)$$

los canales quedan:

$$C_1(s) = \frac{26.9(s+0.6)(s+0.2685)(s+3.374)(s^2+1.358s+1.087)}{s(s+2)(s+1.707)(s+1)^2(s+0.2929)} \quad (100)$$

$$C_2(s) = \frac{0.205(s-52.47)(s-1.843)(s+0.6157)(s+0.5338)}{s(s+27.31)(s+2)^2(s+1)(s+0.591)} \quad (101)$$

- Canal 1

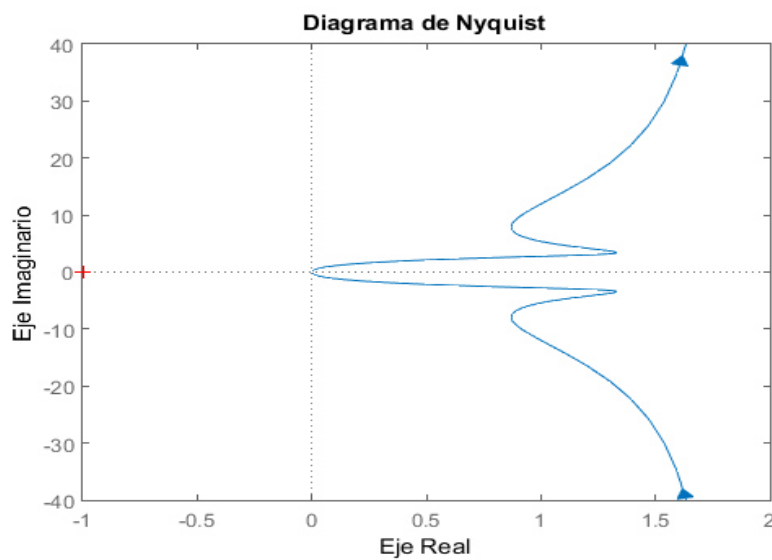


Fig. 3.45 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1



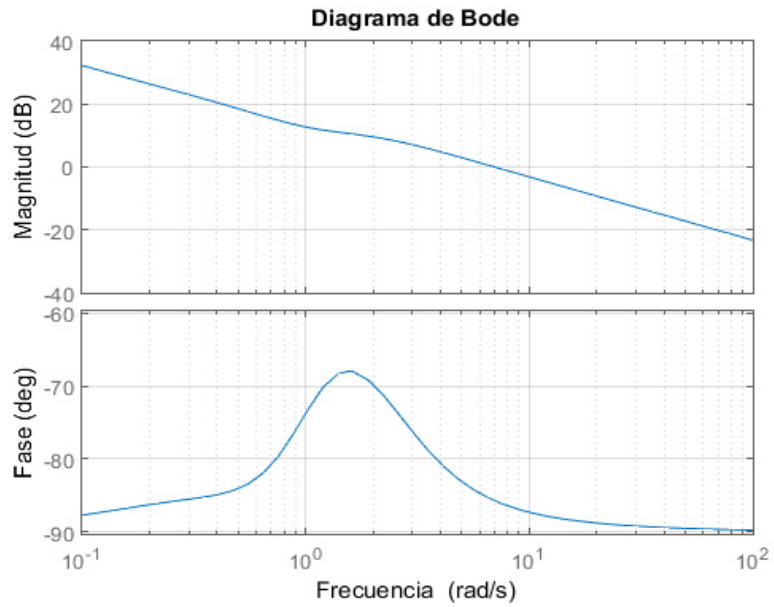


Fig. 3.46 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1

- Canal 2

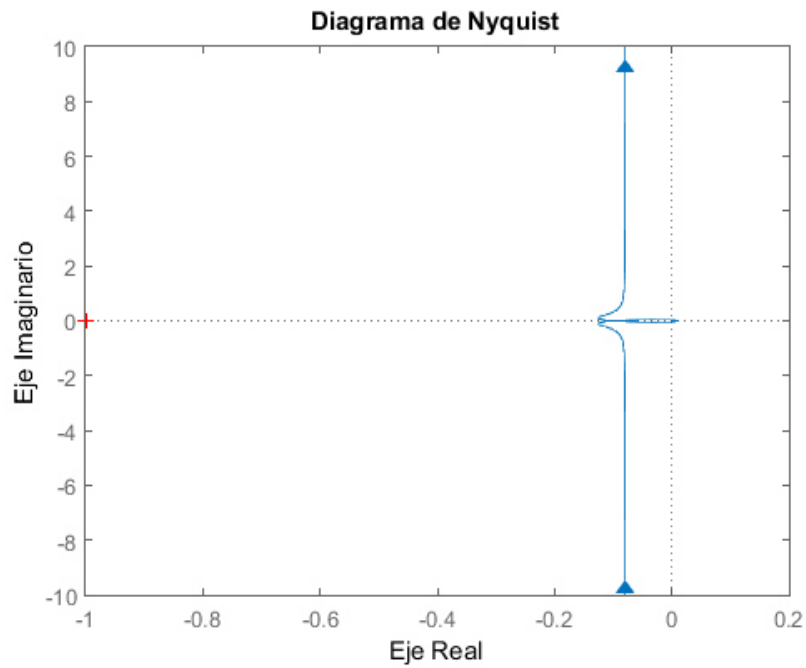


Fig. 3.47 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2

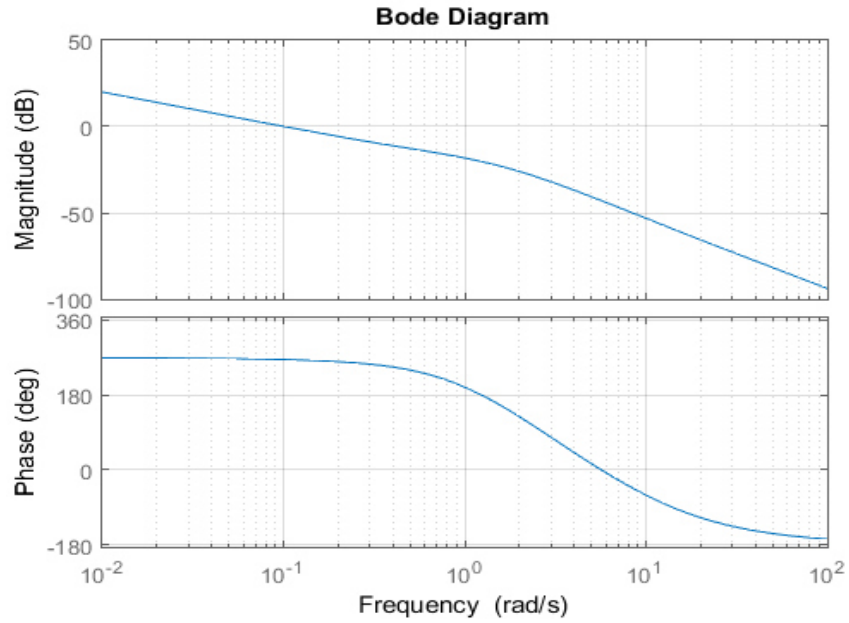
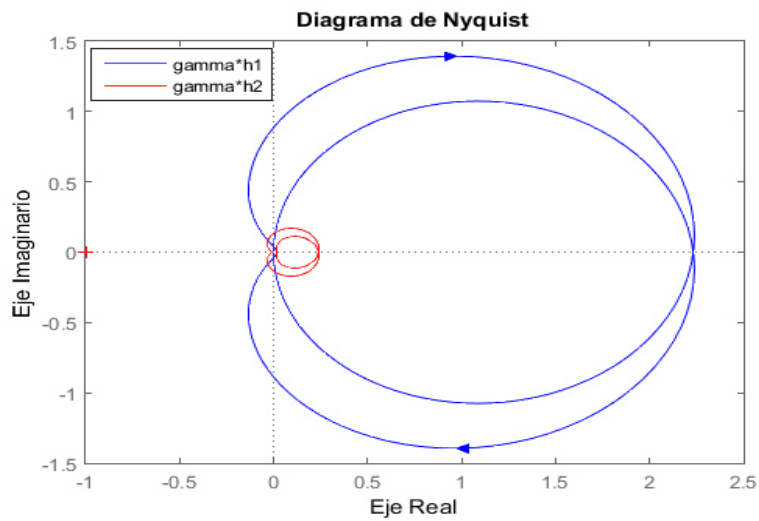


Fig. 3.48 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2

- $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{84.0625(s+0.1)^2(s+0.6)}{(s+2)(s+1)(s+0.591)(s+27.31)} \quad (102)$$

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{1.5625(s+0.1)^2}{(s+2)(s+1.707)(s+1)(s+0.2929)} \quad (103)$$

Fig. 3.49 Comparación de diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

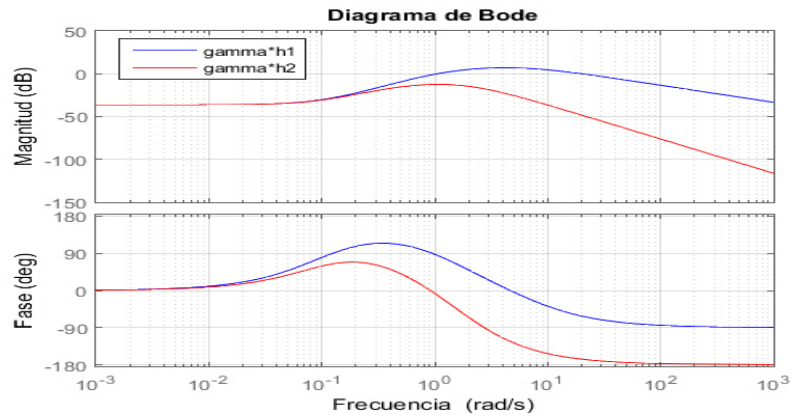


Fig. 3.50 Comparación de diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$

En la tabla 3.9 se resumen los resultados obtenidos del caso IV:

Tabla 3.9 Resultados obtenidos del caso IV

	$C_{11}(s)$	$\gamma_a(s)h_2(s)$	$C_{22}(s)$	$\gamma_a(s)h_1(s)$	
BW (rad/s)	26.9	-	0.102	1.02	78.4
MG (dB)	$\infty$	12.5	19.66	9	
MF ( $^\circ$ )	90.9	$\infty$	85.3	93.2	68.7

Quedando las respuestas de la siguiente manera:

$$C_{11}(s) = \frac{6.9(s+0.6)(s+0.2685)(s+3.374)(s^2+1.358s+1.087)}{(s+0.588)(s+0.2669)(s+3.936)(s+6.818)(s^2+1.29s+0.9675)} \quad (104)$$

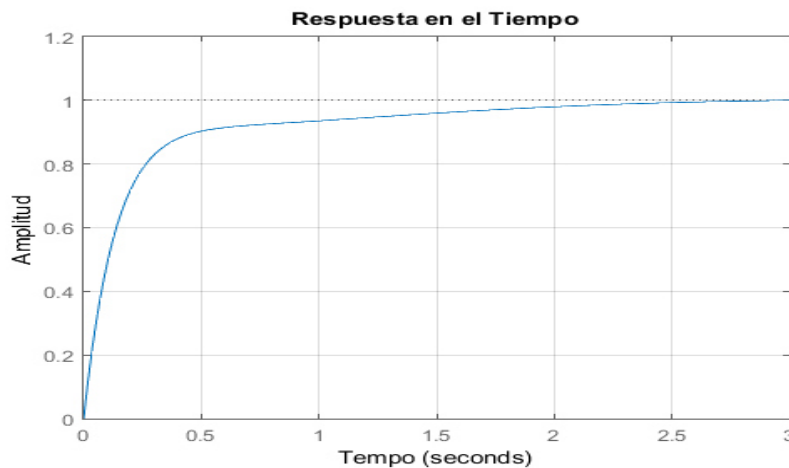


Fig. 3.51 Respuesta en el Tiempo del Canal 1

$$C_{22}(s) = \frac{0.205(s-8.92)(s-2.878)(s+0.6393)(s+0.4966)}{(s+3.165)(s+7.149)(s+0.5745)(s+0.1084)(s^2+1.903s+1.186)} \quad (105)$$

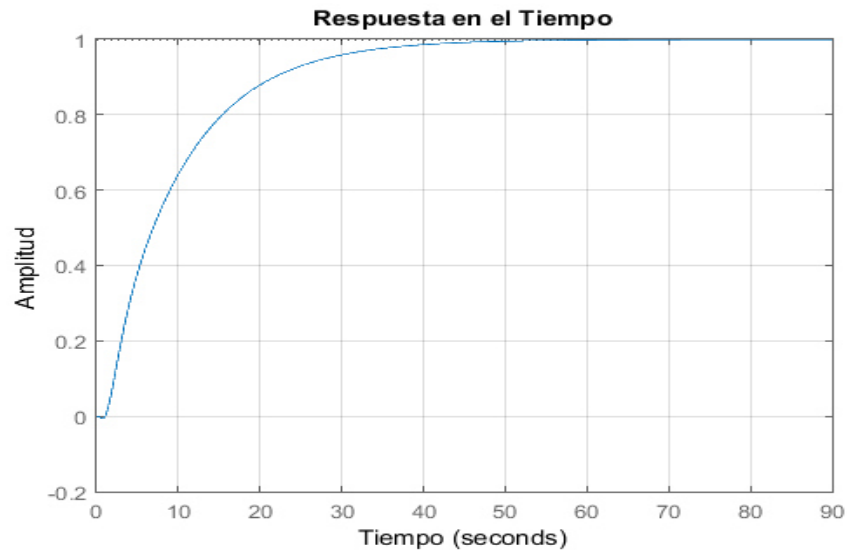


Fig. 3.52 Respuesta en el Tiempo del Canal 2

### 3.5.1 Conclusiones del Caso 4

De acuerdo con los resultados obtenidos del caso 3, se visualiza que la función  $\gamma_a(s)h_2(s)$  permanece cerca del punto  $(1,0)$  debido a su ancho de banda. Por lo que para este caso solo se aumentó 10 veces el ancho de banda del canal 1 para garantizar la estabilidad del sistema y se redujo el ancho de banda del canal 2.

Con esto se logra que el sistema sea estable, resultando el canal 2 de fase no mínima, debido a que la función  $\gamma_a(s)h_1(s)$  rodea dos veces el punto  $(1,0)$ , lo que se ve reflejado en el canal 1 el cual tiene dos ceros ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Por otra parte, el sistema es robusto estructuralmente, ya que se logró alejar las funciones  $\gamma_a(s)h_2(s)$  y  $\gamma_a(s)h_1(s)$  del punto  $(1,0)$ , obteniendo así excelentes márgenes de estabilidad y una robustez estructural.

### 3.6 Caso 5. Diseño de Sistema de Control Utilizando Gamma B

Anteriormente se realizaron 4 casos utilizando Gamma a ( $\gamma_a(s)$ ), la cual utiliza la diagonal principal en su desarrollo. Estos 4 casos se realizaron para analizar la robustez del sistema, para este ejemplo propuesto por Goodwin en su libro Control System Design [6]. A continuación, se analiza el mismo problema, pero ahora se utilizó Gamma b ( $\gamma_b(s)$ ), es decir se utilizó la diagonal no principal.

El caso de estudio es un problema propuesto por Goodwin, en el cual, es definida la siguiente matriz de transferencia  $G(s)$ :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0.25 \frac{10s+1}{(s+1)(s+2)} \\ 0.25 \frac{10s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \quad (106)$$

De la matriz de transferencia  $G(s)$  propuesta en la ecuación (106) se calcula la forma Smith-McMillan  $G^{SM}(s)$ .

$$G^{SM}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(s+0.5542)(s-1.6718)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \quad (107)$$

En la Tabla 3.10 se muestran los polos y ceros de transmisión de la ecuación (107). Donde se muestra que el sistema presenta un cero de fase no-mínima.

Tabla 3.10 Polos y ceros de transmisión del sistema

Polos	Ceros
$p_1 = -1$	$z_1 = -0.5542$
$p_2 = -2$	$z_2 = 1.6718$
$p_3 = -1$	
$p_4 = -2$	

### 3.6.1 Análisis de la Función de Estructura Multivariable (Gamma B ( $\gamma_b(s)$ ))

El primer paso para el diseño de controladores es analizar la función  $\gamma_b(s)$ .

De acuerdo con *ICAD* la función de estructura multivariable (MSF)  $\gamma_b(s)$  es:

$$\gamma_b(s) = \frac{0.32(s+2)(s+1)}{(s+0.1)^2} \quad (108)$$

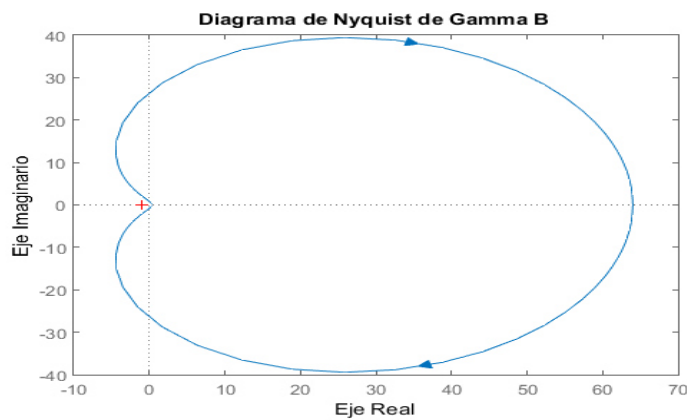


Fig. 3.53 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_b(s)$

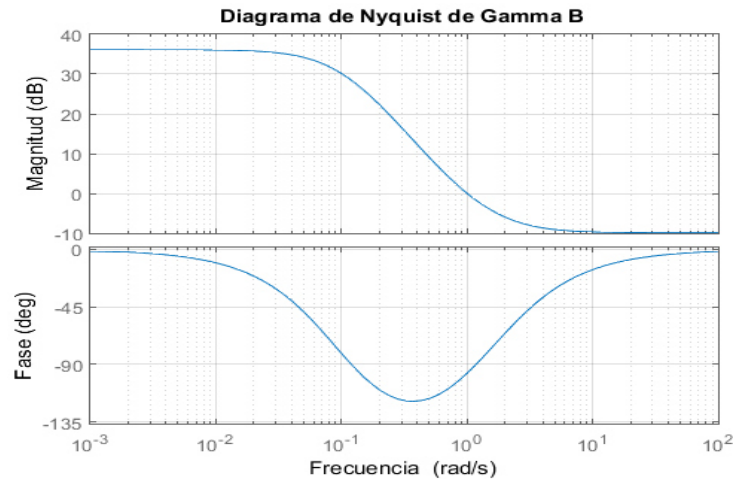


Fig. 3.54 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_b(s)$

En la fig. 3.53 se visualiza que  $\gamma_b(s)$  realiza un giro a favor de las manecillas del reloj al punto  $(1,0)$  lo que nos indica que el sistema tiene un cero en el semiplano derecho. Esto es, el sistema es de fase no mínima, mismo que se muestra en las tablas 3.2 y 3.10. Estructuralmente, el sistema es robusto, debido a que conforme la frecuencia va aumentando la magnitud de la función de estructura multivariable  $\gamma_b(s)$  es pequeña.

Por otra parte, la función  $\gamma_b(s)$  en las Figs. 3.53 y 3.54 muestra el acoplamiento de los canales en lazo abierto, se puede visualizar que para frecuencias bajas el sistema tiene alto acoplamiento y para altas frecuencias el sistema tiene bajo acoplamiento.

### 3.6.2 Diseño de Controladores para el Caso 5

A continuación, se presenta el diseño de controladores para este caso. Se analizan los canales independientes. En este caso se comenzó por analizar el canal 1 sin controlador. Por motivos de diseño, para el primer caso se asume  $h_2(s)$  igual a 1

$$c_1(s) = g_{12}(s)k_{21}(s)(1 - \gamma_b(s)h_2(s)) \quad (109)$$

$$c_1(s) = \frac{1.7(s+0.1)(s+0.554)(s-1.672)}{(s+2)(s+1)(s+0.1)^2} \quad (110)$$

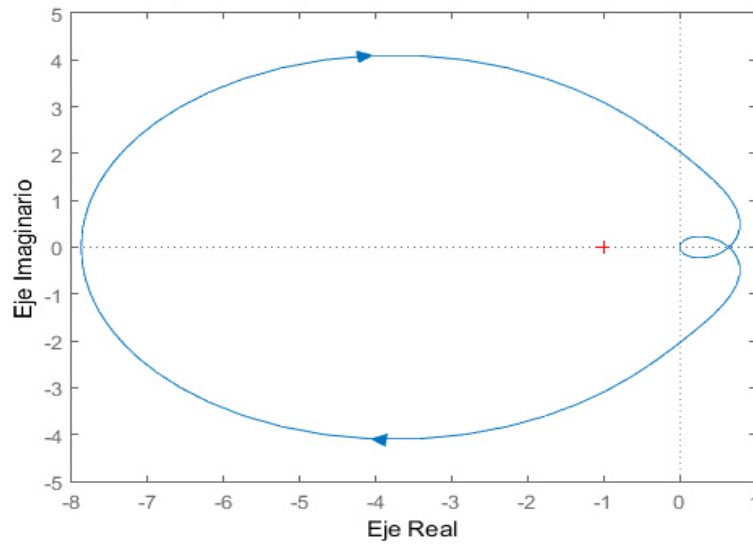


Fig. 3.55 Diagrama de Nyquist del canal 1 sin controlador

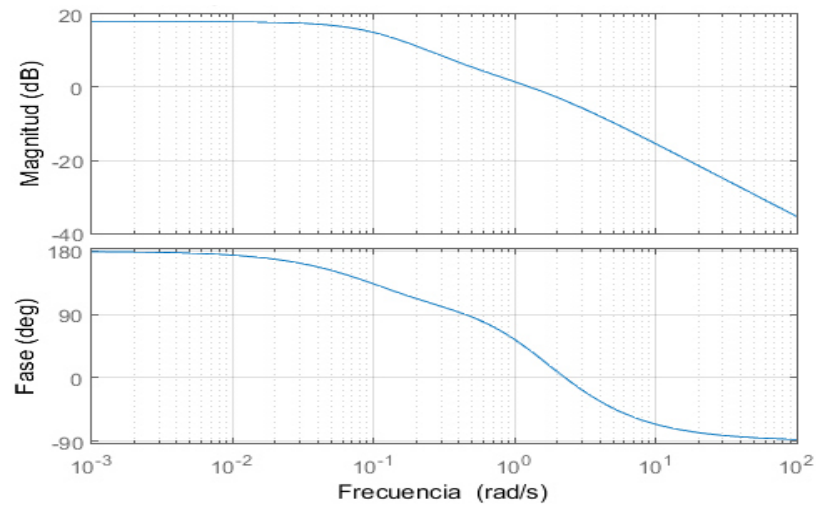


Fig. 3.56 Diagrama de Bode del canal 1 sin controlador

Se propone el siguiente controlador  $k_{21}(s)$

$$k_{21}(s) = \frac{-(s+0.2)}{s(s+8)} \quad (111)$$



Quedando el canal 1 de la siguiente manera:

$$c_1(s) = \frac{-1.7(s+0.2)(s+0.1)(s+0.554)(s-1.672)}{s(s+8)(s+2)(s+0.1)^2} \quad (112)$$

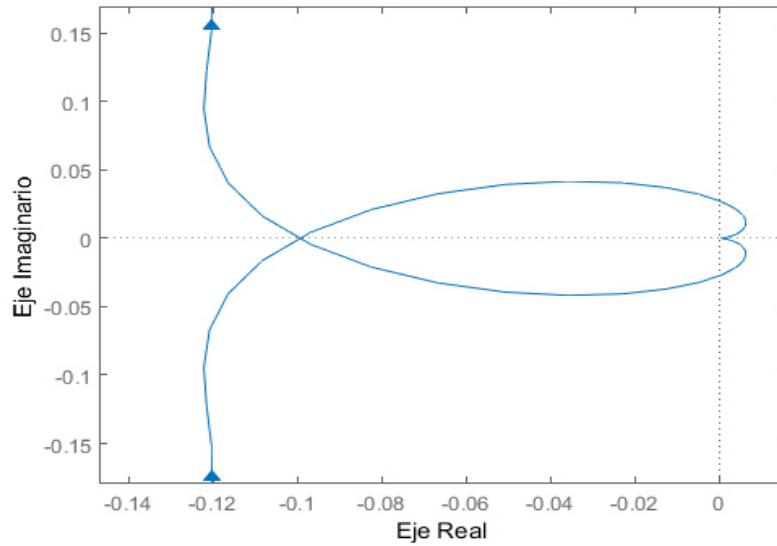


Fig. 3.57 Diagrama de Nyquist del canal 1 con controlador

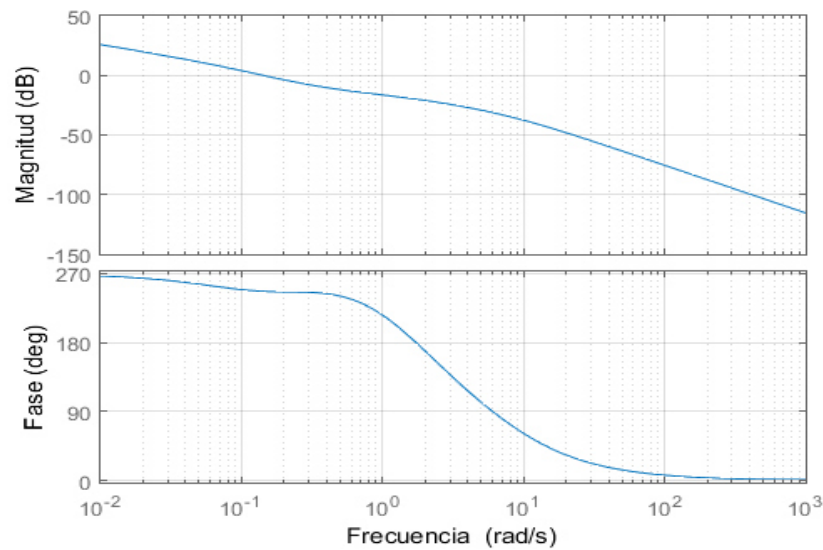


Fig. 3.58 Diagrama de Bode del canal 1 con controlador

Teniendo  $k_{21}(s)$  se construye  $h_1(s)$ , el cual se utiliza para el canal 2:

$$h_1(s) = \frac{-2.5(s+0.2)(s+0.1)}{(s+8.42)(s-0.003262)(s^2+2.57s+1.819)} \quad (113)$$

Se analiza el canal 2 sin controlador:

$$c_2(s) = g_{21}(s)k_{12}(s)(1-\gamma_b(s)h_2(s)) \quad (114)$$

$$c_{2sc}(s) = \frac{2.5(s+8.337)(s^2+0.2016s+0.0206)(s^2+2.561s+1.831)}{(s+2)(s+1)(s+8.426)(s-0.003262)(s^2+2.57s+1.819)} \quad (115)$$

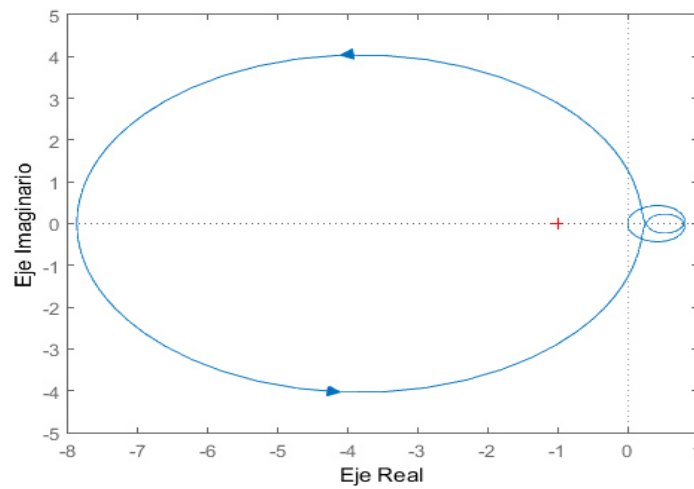


Fig. 3.59 Diagrama de Nyquist del canal 2 sin controlador

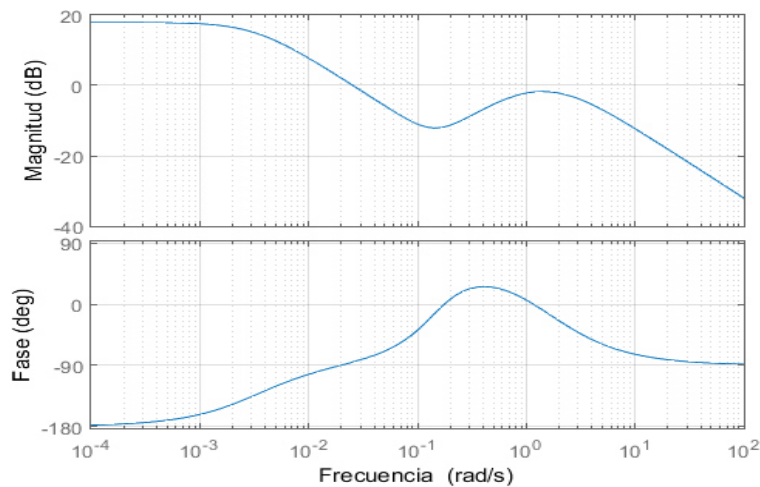


Fig. 3.60 Diagrama de Bode del canal 2 sin controlador

El canal 2 sin controlador es estable, sin embargo, se propone el controlador  $k_{12}(s)$ , el cual contiene un integrador para garantizar que el error en estado estacionario sea cero.

$$k_{12}(s) = \frac{0.1047(s+3)}{s(s+0.1)} \quad (116)$$

Quedando el canal 2 de la siguiente manera:

$$c_2(s) = \frac{0.26175(s+3)(s+8.337)(s^2+0.2016s+0.0206)(s^2+2.561s+1.831)}{s(s+2)(s+1)(s+8.426)(s+0.1)(s-0.003262)(s^2+2.57s+1.819)} \quad (117)$$

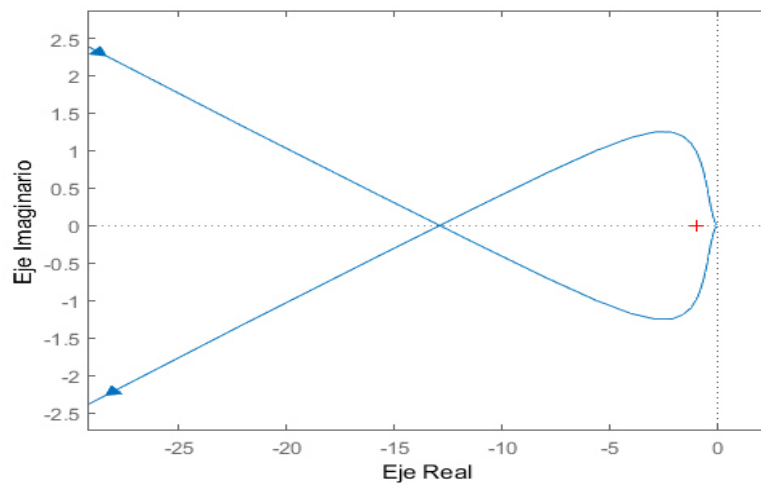


Fig. 3.61 Diagrama de Nyquist del canal 2 con controlador

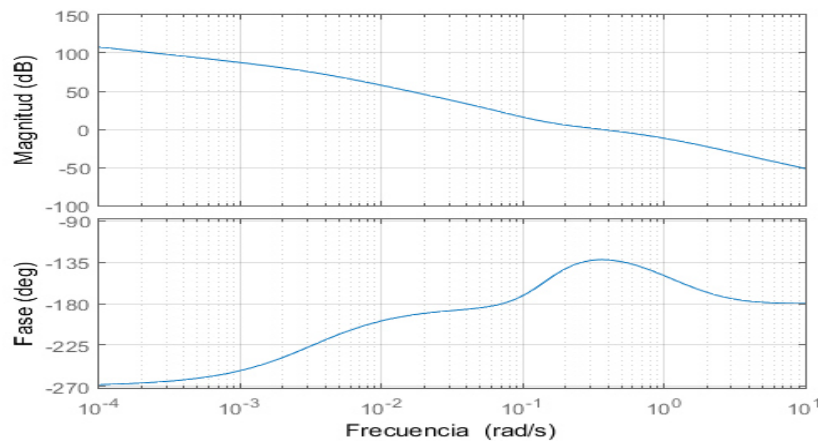


Fig. 3.62 Diagrama de Bode del canal 2 con controlador

Con  $k_{12}(s)$  se construye  $h_2(s)$ :

$$h_2(s) = \frac{0.26175(s+3)}{(s+2.102)(s^2+0.8984s+0.3736)} \quad (118)$$

Al tener  $h_2(s)$ , éste se utiliza para introducirlo en el canal 1, que se había diseñado primero, y corroborar la estabilidad del canal, y si es necesario modificar los controladores.

$$c_1(s) = \frac{-2.5(s+0.2)(s+0.649)(s-0.52)(s^2+0.9714s+0.694)}{s(s+2)(s+1)(s+8)(s+0.1)(s^2+0.898s+0.373)} \quad (119)$$

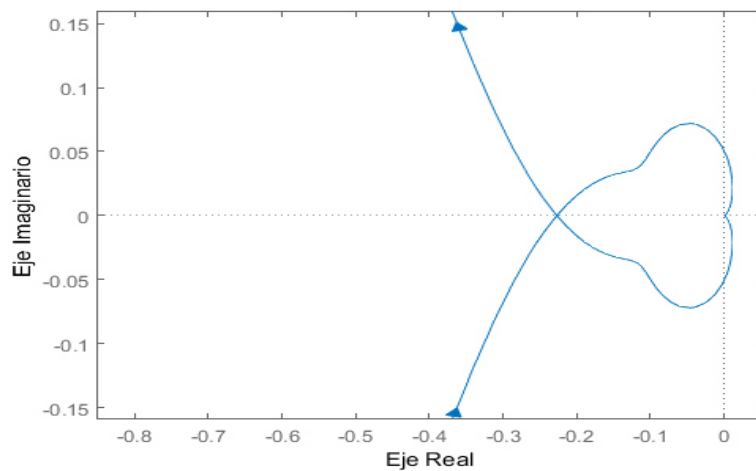


Fig. 3.63 Diagrama de Nyquist del canal 1 con iteración

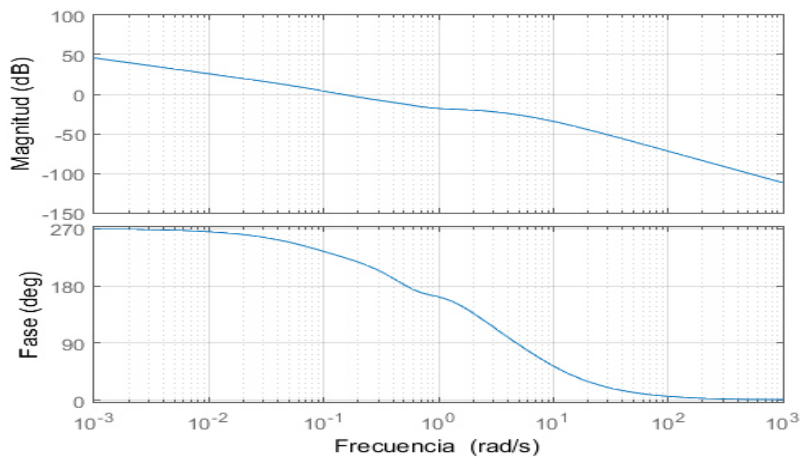


Fig. 3.64 Diagrama de Bode del canal 1 con iteración

Como al introducir  $h_2(s)$  al canal 1, el canal 1 resulta estable y con buenos márgenes de estabilidad no es necesario modificar los controladores.

Se analiza  $\gamma_b(s)h_2(s)$  y  $\gamma_b(s)h_1(s)$ :

$$\gamma_b(s)h_2(s) = \frac{0.0837(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+0.1)^2(s+2.102)(s^2+0.898s+0.373)} \quad (120)$$

$$\gamma_b(s)h_1(s) = \frac{-0.8(s+1)(s+2)(s+0.2)}{(s+0.1)(s+8.426)(s-0.00326)(s^2+2.57s+1.819)} \quad (121)$$

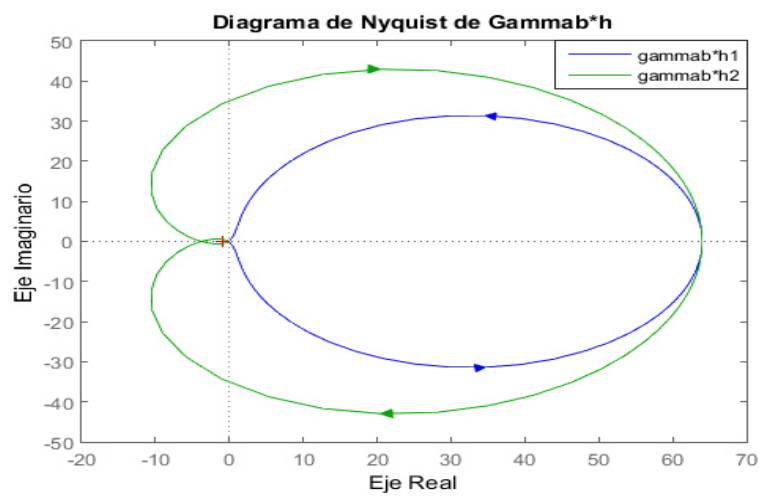


Fig 3.65 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_b(s)h_2(s)$  y  $\gamma_b(s)h_1(s)$ :

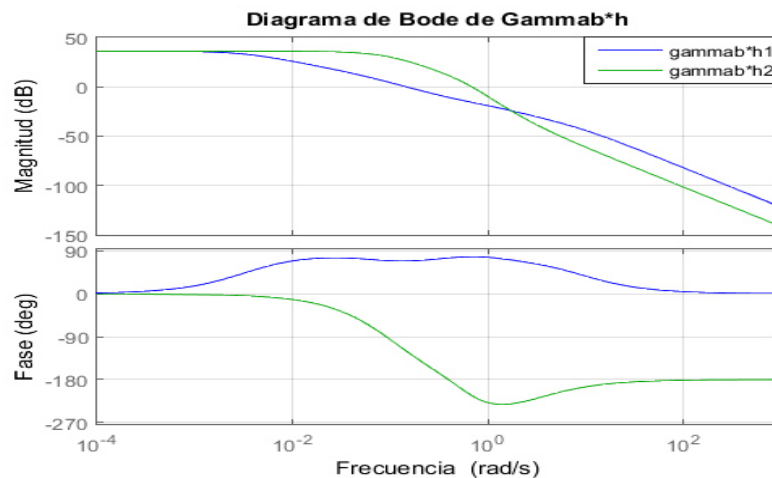


Fig 3.66 Diagrama de Bode de  $\gamma_b(s)h_2(s)$  y  $\gamma_b(s)h_1(s)$

Se resumen los resultados de márgenes de estabilidad en la tabla 3.11:

Tabla 3.11 Resultados obtenidos utilizando Gamma B

	C <sub>22</sub> (s)		γ <sub>b</sub> (s)h <sub>1</sub> (s)	C <sub>11</sub> (s)	γ <sub>b</sub> (s)h <sub>2</sub> (s)
BW (rad/s)	0.35		0.135	0.143	0.682
MG (dB)	22.2	72.9	∞	12.9	∞
MF (°)	47.9		68.9	46	212

Las respuestas de los canales son las siguientes:

$$c_{2LC} = \frac{0.2617(s+3)(s+8.33)(s^2+0.2016s+0.02064)(s^2+2.561s+1.83)}{(s+2.1)(s+8.426)(s^2+0.1852s+0.0279)(s^2+0.7978s+0.2703)(s^2+2.59s+1.851)} \quad (122)$$

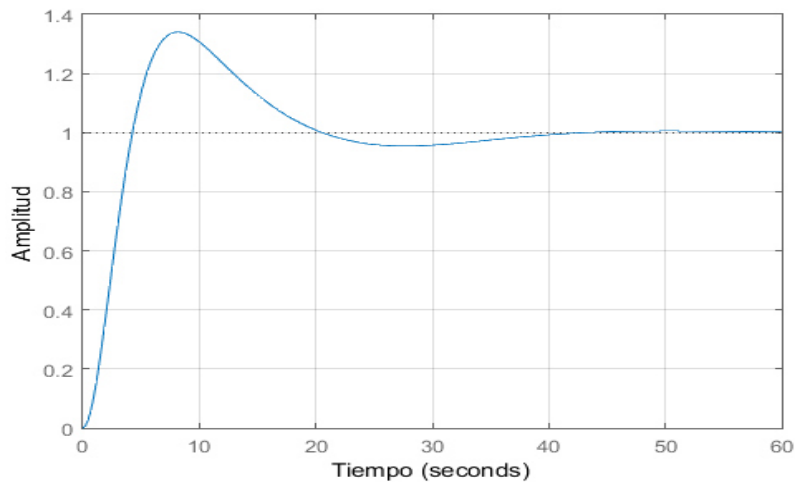


Fig. 3.67 Respuesta en el tiempo del canal 2 ante una entrada escalón

$$c_{ILC} = \frac{-2.5(s+0.649)(s-0.52)(s+0.2)(s^2+0.9714s+0.694)}{(s+8.426)(s^2+0.1852s+0.0279)(s^2+0.7978s+0.2703)(s^2+2.59s+1.851)}$$

(123)

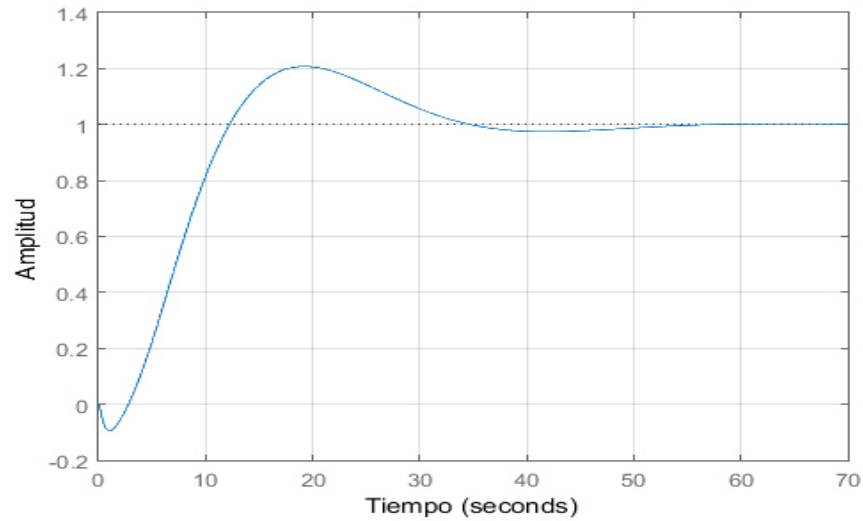


Fig. 3.68 Respuesta en el tiempo del canal 1 ante una entrada escalón

### 3.6.3 Conclusiones del Caso 5

Mediante este caso, se comprobó la alternativa de utilizar Gamma b ( $\gamma_b(s)$ ), es decir, la diagonal no principal, para diseñar los controladores siguiendo los principios del marco de referencia *ICAD*.

## CAPÍTULO 4

### CASO AERONAVE F106B

En este capítulo, al igual que el anterior se presenta un caso de estudio. El caso de estudio es una aeronave F106B modelada a bajas velocidades. Por otra parte, en esta ocasión, se presentan dos casos, en los cuales se busca analizar los márgenes de estabilidad y el papel que desempeña la función de estructura multivariable.

Considerando el siguiente sistema multivariable:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0492(s-66.34)(s^2+0.97s+0.2885)}{(s+0.5844)(s+0.1707)(s^2+0.7905s+6.208)} & \frac{0.028(s+42.43)(s+0.6795)(s-0.2687)}{(s+0.5844)(s+0.1707)(s^2+0.7905s+6.208)} \\ \frac{-13.664(s^2+0.701s+1.613)}{(s+0.5844)(s+0.1707)(s^2+0.7905s+6.208)} & \frac{1.9159(s-2.987)(s+1.994)}{(s+0.5844)(s+0.1707)(s^2+0.7905s+6.208)} \end{bmatrix} \quad (124)$$



## 4.1 Análisis de la Función de Estructura Multivariable

### Gamma A ( $\gamma_a(s)$ )

Se analiza el sistema utilizando el marco de diseño *ICAD*. Se analiza la función multivariable del sistema.

$$\gamma_a(s) = \frac{-4.0588(s+0.6795)(s-0.2687)(s+42.43)(s^2+0.701s+1.613)}{(s-66.34)(s-2.987)(s+1.994)(s^2+0.97s+0.2885)} \quad (125)$$

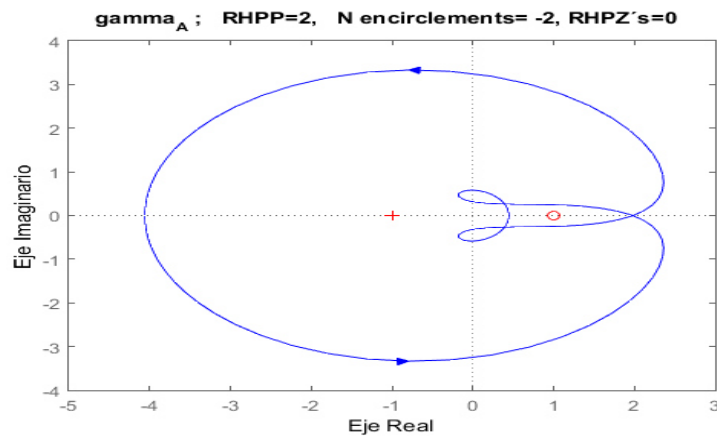


Fig. 4.1 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)$

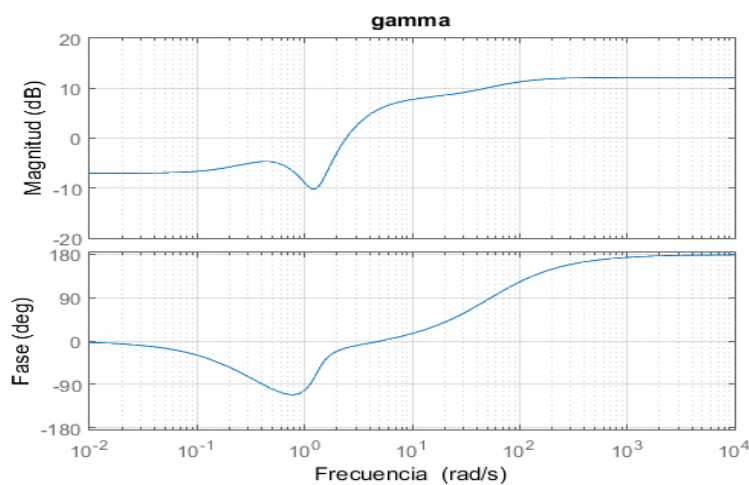


Fig. 4.2 Diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)$

En la Fig. 4.1, el diagrama de Nyquist de la función  $\gamma_a(s)$ , se analiza la existencia de ceros de fase no mínima. En este sistema no hay ceros de fase no mínima, debido a que la función  $\gamma_a(s)$  contiene dos polos del lado derecho del semiplano  $s$  y realiza dos rodeos en sentido contrario de las manecillas del reloj al punto crítico (1,0). Por lo tanto:

$$Z = N + P \quad (126)$$

donde:

$$P = 2;$$

$$N = -2;$$

$$Z = -2 + 2 = 0 \quad (127)$$

Por esta razón, el sistema es de fase mínima. Además, el sistema tiene un cero de transmisión:

$$z_t = -20.2715 \quad (128)$$

Es decir, que la ecuación (125) evaluada en el cero de transmisión (ecuación (128)) presenta una singularidad.

Por otra parte, la función  $\gamma_a(s)$  en las Figs. 4.1 y 4.2 muestra el acoplamiento de los canales en lazo abierto, se puede visualizar que para frecuencias bajas el sistema tiene poco acoplamiento y para altas frecuencias el sistema tiene alto acoplamiento. Por lo que se debe verificar que tan cercanas a éste punto están las funciones  $\gamma_a(s)h_2(s)$  y  $\gamma_a(s)h_1(s)$  correspondientes a cada canal del sistema multivariable para determinar la robustez del sistema.

A continuación, se presentan dos casos, en los cuales se diseñó un sistema de control buscando obtener buenos márgenes de estabilidad y la robustez del sistema.

## 4.2 Caso 1

Bajo el marco de diseño *ICAD* se analizan los canales independientes. Se analiza primero el canal 1 sin controlador por medio de los diagramas de Nyquist y Bode.

$$c_1(s) = \frac{0.24889(s + 20.27)}{(s + 1.994)(s - 2.987)} \quad (129)$$

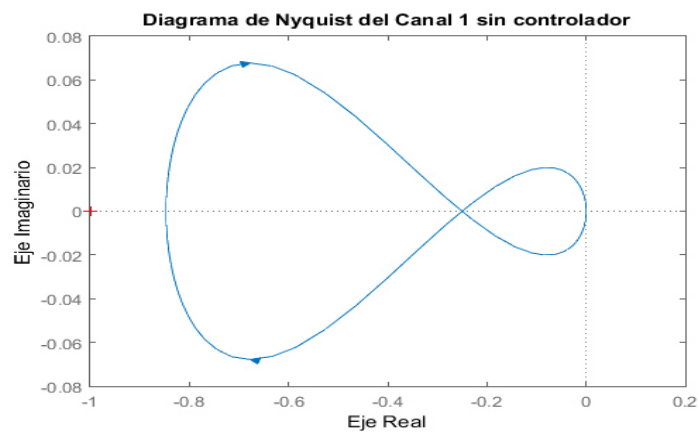


Fig. 4.3 Diagrama de Nyquist de Lazo abierto del canal 1 sin controlador

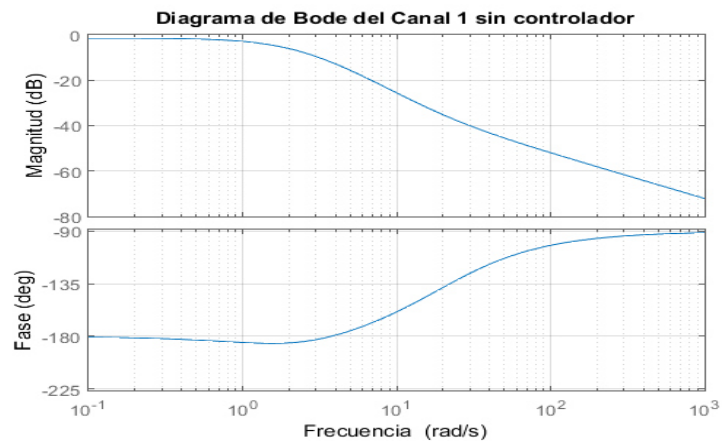


Fig. 4.4 Diagrama de Bode de Lazo abierto del canal 1 sin controlador

Por motivos de diseño y análisis, para el primer caso se asume que  $h_2(s)$  es igual a 1. La ecuación (129) representa la función del canal 1 sin controlador, la cual contiene un polo en el semiplano derecho del plano S. Por definición, para que el canal 1 sea estable, el diagrama de Nyquist debe rodear una vez en sentido contrario de las manecillas del reloj al punto crítico  $(-1,0)$ . En la Fig. 4.3 se visualiza el diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 sin controlador y se puede notar que no se rodea al punto  $(-1,0)$  por lo que el canal 1 sin controlador es inestable.

Se propone un controlador con un integrador, para garantizar que el error en estado estacionario sea cero:

$$k_{11}(s) = \frac{145(s+1.99)(s^2+10s+29)}{s(s+30)(s+15)} \quad (130)$$

Al introducir el controlador  $k_{11}(s)$  (ecuación (130)), el canal 1 se logra estabilizar esto se puede corroborar mediante los diagramas de Nyquist y Bode.

$$c_1(s) = \frac{7.134(s+1.99)(s+0.9299)(s^2+3.624s+3.328)(s^2+10s+29)(s^2+45.37s+602.2)(s^2+27.97s+46830)}{s(s+2.376)(s+0.879)(s-2.741)(s+15)(s+23.48)(s+30)(s^2+3.2s+2.92)(s^2+117.9s+13200)} \quad (131)$$

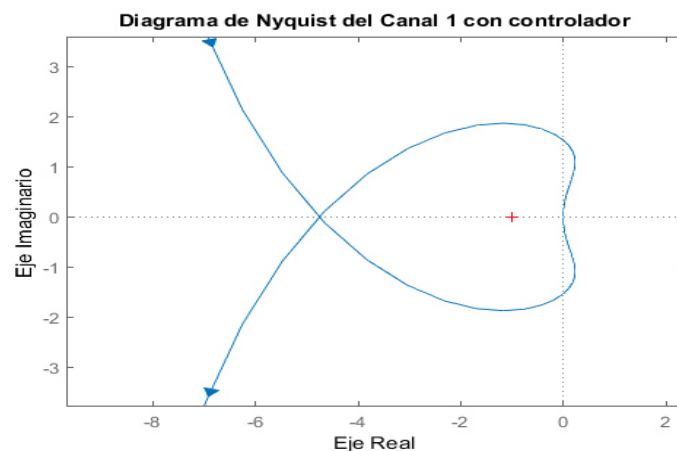


Fig. 4.5 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 con controlador

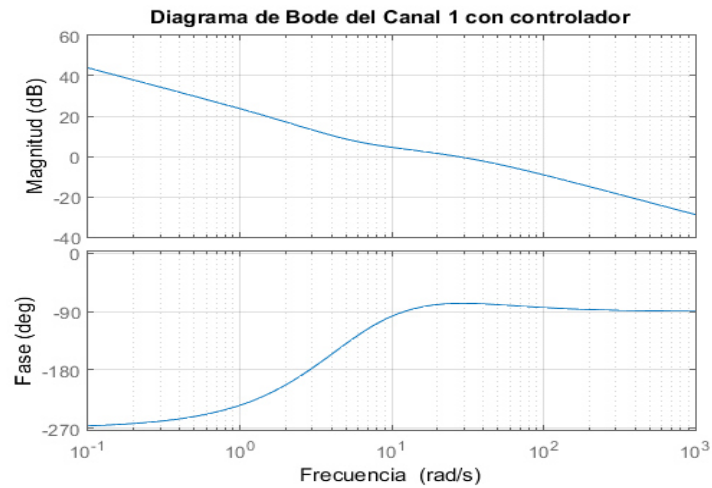


Fig. 4.6 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 con controlador

En la Fig. 4.5. se puede visualizar que ahora si realiza un rodeo en sentido contrario de las manecillas del reloj. Lo cual hace estable al canal, debido a la ecuación (126). Donde en la ecuación (131),  $P$  es igual a 1. Con el controlador se logró rodear al punto  $(-1,0)$  en sentido contrario de las manecillas del reloj, por lo que  $N$  es igual a  $-1$ . Por lo tanto, no existen polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Teniendo  $k_{11}(s)$  se obtiene  $h_1(s)$ :

$$h_1(s) = \frac{7.134(s+1.99)(s-66.34)(s^2+10s+29)}{(s+48.95)(s+9.475)(s-9.922)(s^2+4.205s+6.057)} \quad (132)$$

La ecuación (132) se introduce en el canal 2 y se analiza el canal 2 sin controlador.

$$c_{2sc}(s) = \frac{1.9159(s+1.99)(s+18.07)(s+54.5)(s^2+5.541s+21.54)}{(s+9.475)(s-9.92)(s+48.95)(s^2+0.9724s+0.2827)(s^2+4.205s+6.057)} \quad (133)$$

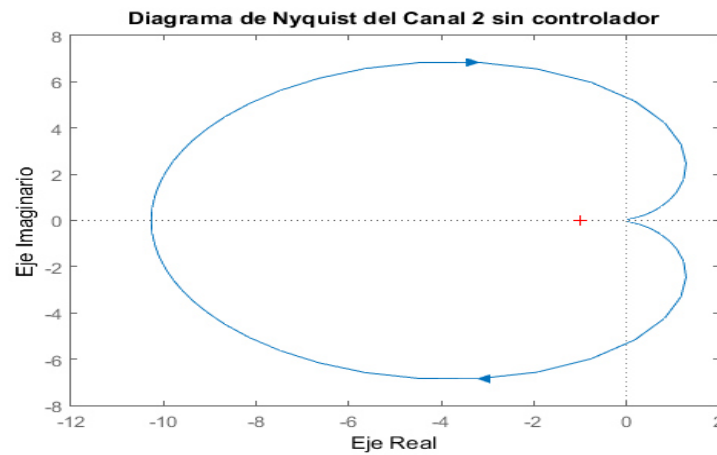


Fig. 4.7 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2 sin controlador

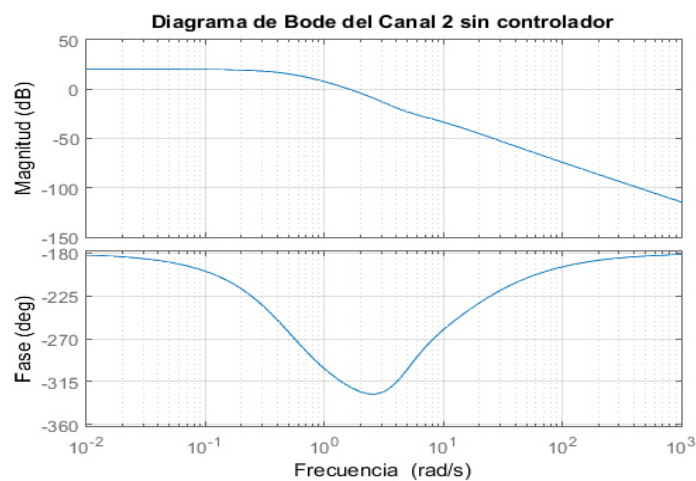


Fig. 4.8 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 sin controlador

En la Fig. 4.7 se puede visualizar que el diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2 sin controlador da un rodeo a favor de las manecillas del reloj al punto crítico (1,0). La ecuación (133) tiene un polo en el semiplano derecho del plano S, por lo que el diagrama de Nyquist debía de rodear una vez en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Por lo tanto, al no realizar lo que se mencionó antes, el canal 2 sin controlador es inestable.

Por lo que se diseña el controlador  $k_{22}(s)$ , se propone un controlador con un integrador, como en el canal 1, para garantizar que sea cero el error en estado estacionario. Además, se realizó una combinación de controladores para levantar la fase y lograr estabilizar el canal 2.

$$k_{22}(s) = \frac{5432.5(s+35)(s+30)(s+2)(s+1.5)(s+1)(s+0.5)}{s(s+65)(s+60)(s+50)(s+4)(s+3)} \quad (134)$$

se analiza la estabilidad del canal 2 mediante los diagramas de Nyquist y Bode

$$c_2(s) = \frac{10408(s+2)(s+1.99)(s+1.5)(s+1)(s+0.5)(s+18.07)(s+30)(s+35)(s+54.5)(s^2+5.54s+21.54)}{s(s+3)(s+4)(s+9.475)(s-9.92)(s+48.95)(s+50)(s+60)(s+65)(s^2+0.9724s+0.2827)(s^2+4.205s+6.057)} \quad (135)$$

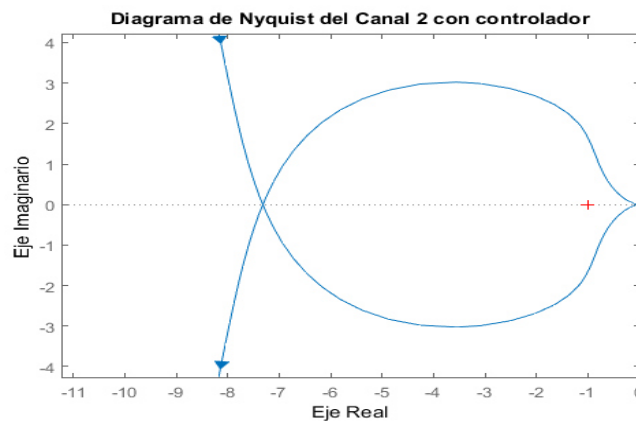


Fig. 4.9 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2 con controlador

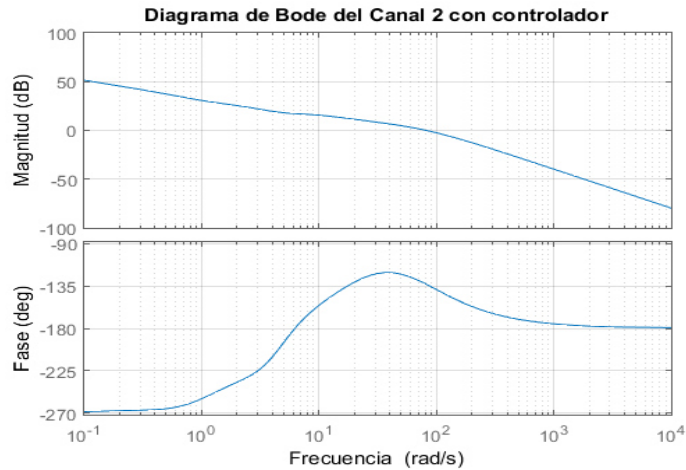


Fig. 4.10 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2 con controlador

En la Fig. 4.9 se visualiza que con el controlador  $k_{22}(s)$  el diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2 rodea una vez en sentido contrario de las manecillas del reloj al punto  $(-1,0)$  lo que garantiza la estabilidad del canal 2 en lazo cerrado.

Al tener  $k_{22}(s)$  se construye  $h_2(s)$ :

$$h_2(s) = \frac{10408(s - 2.987)(s + 2)(s + 1.99)(s + 1.5)(s + 1)(s + 0.5)(s + 30)(s + 35)}{(s + 2.376)(s + 0.879)(s + 0.496)(s - 2.741)(s + 23.48)(s + 37.94)(s^2 + 3.2s + 2.92)(s^2 + 117.9s + 13200)} \quad (136)$$

La ecuación (136), en el primer caso se había asumido igual a 1. Ahora ésta será introducida en el canal 1 y se comprobará la estabilidad del canal. Si es necesario se deberá modificar el controlador.



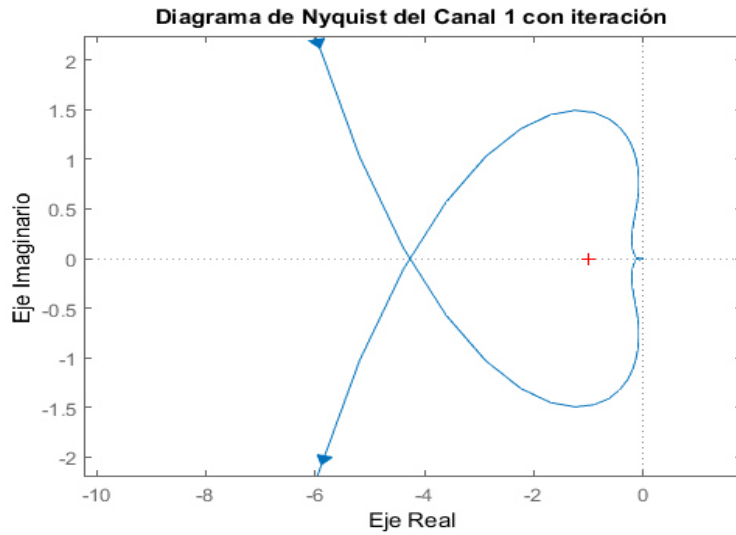


Fig. 4.11 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1 con iteración

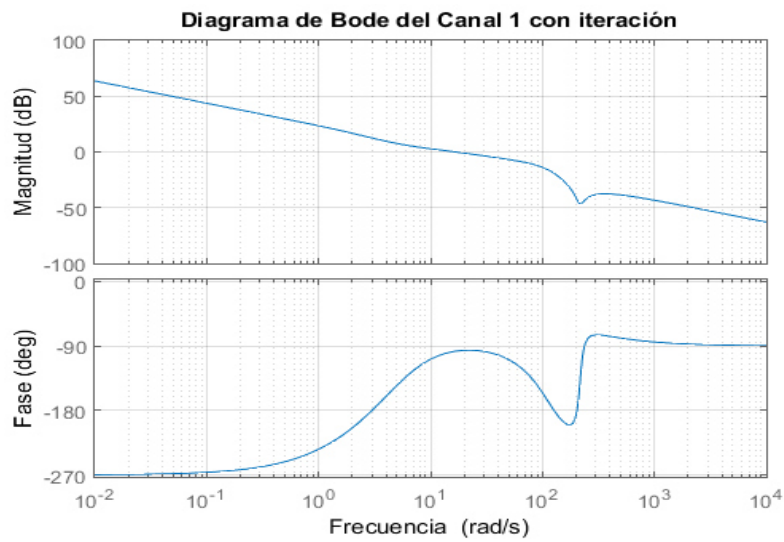


Fig. 4.12 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1 con iteración

Como se visualiza en las Fig. 4.11 y 4.12, el canal 1 permanece estable al introducir  $h_2(s)$ , por lo que no es necesario realizar cambios en los controladores  $k_{11}(s)$  y  $k_{22}(s)$ . Quedando las respuestas de los canales de la siguiente manera:

- Canal 1

$$c_{1r}(s) = \frac{7.134(s+1.99)(s^2+3.624s+3.328)(s^2+10s+29)(s^2+45.37s+602.2)(s^2+27.97s+46830)}{(s+2.24)(s+55.03)(s^2+3.339s+2.92)(s^2+5.491s+23.32)(s^2+38.54s+433)(s^2+91.68s+10680)} \quad (137)$$

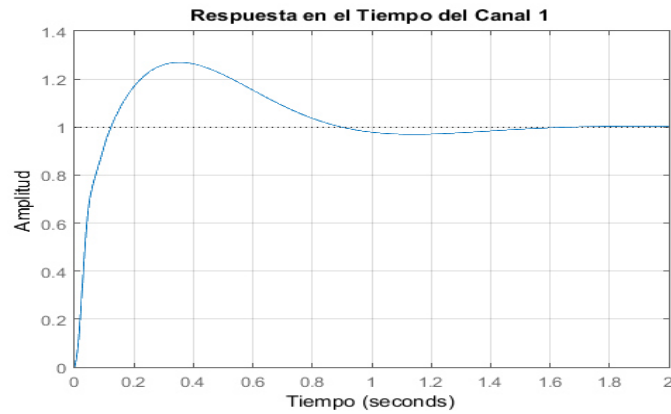


Fig. 4.13 Respuesta en el tiempo del canal 1 ante una entrada escalón

- Canal 2

$$c_{2r}(s) = \frac{10408(s+2)(s+1.99)(s+1.5)(s+1)(s+18.07)(s+30)(s+35)}{(s+2.24)(s+38.41)(s+0.9235)(s^2+3.339s+2.92)(s^2+38.55s+434)(s^2+91.71s+10670)} \quad (138)$$

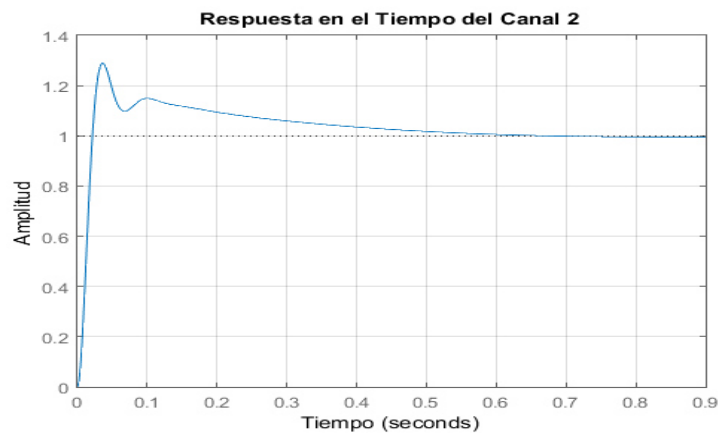


Fig. 4.14 Respuesta en el tiempo del canal 2 ante una entrada escalón

También se analiza  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$ :

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{-28.95(s+0.6795)(s-0.2687)(s+42.43)(s^2+0.701s+1.613)(s^2+10s+29)}{(s+48.95)(s+9.475)(s-9.92)(s-2.987)(s^2+0.9724s+0.2827)(s^2+4.205s+6.057)} \quad (139)$$

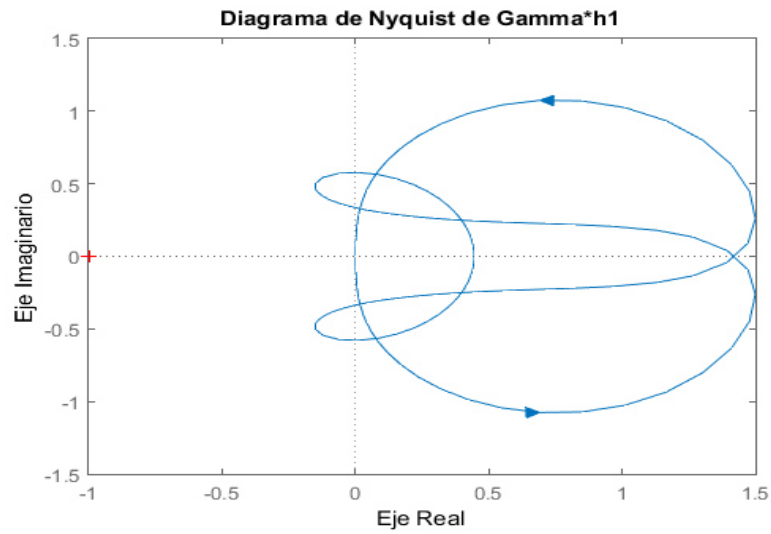


Fig. 4.15 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_1(s)$

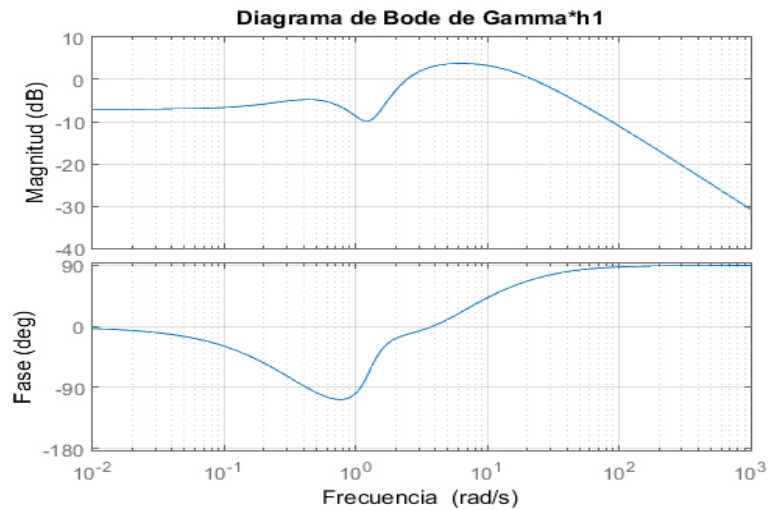


Fig. 4.16 Diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_1(s)$

$$\gamma h_2(s) = \frac{-42245(s+1.5)(s+1)(s+2)(s+0.6795)(s-0.2687)(s+30)(s+35)(s+42.43)(s^2+0.701s+1.613)}{(s-66.34)(s+37.94)(s+23.48)(s+2.376)(s+0.879)(s-2.741)(s^2+0.97s+0.2885)(s^2+3.2s+2.92)(s^2+117.9s+13200)} \quad (140)$$

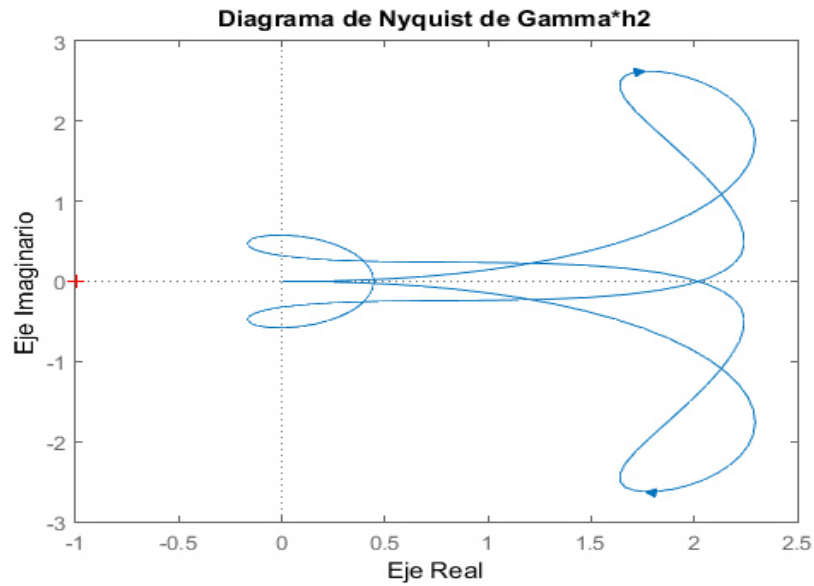
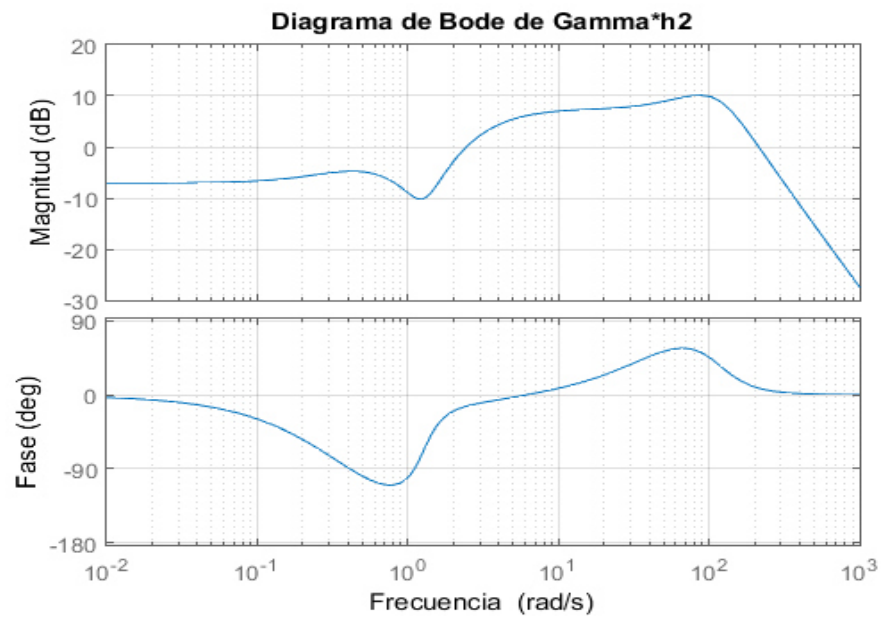
Fig. 4.17 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_2(s)$ Fig. 4.18 Diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_2(s)$

Tabla 4.1 Resultados obtenidos para el Caso I

	C <sub>11</sub> (s)			γ <sub>a</sub> (s)h <sub>2</sub> (s)		C <sub>22</sub> (s)	γ <sub>a</sub> (s)h <sub>1</sub> (s)	
BW (rad/s)	16.8			1.2	1.69	82.3	2.48	22.2
MG (dB)	12.6	19.1	42.7	0.34	0.34	17.3	3	3
MF (°)	82.9	82.9	82.9	15	30	46.9	11.2	69.2

### 4.2.1 Conclusiones del Caso 1

Al analizar la función de estructura multivariable del sistema, se percató que la magnitud es pequeña a bajas frecuencias y la magnitud es grande a frecuencias altas. Se buscó alejar los anchos de banda para desacoplar los canales, lo cual si se pudo llevar a cabo. Sin embargo, el proceso de diseño de los controladores es complicado debido a la naturaleza de la planta. No se pudo garantizar la robustez estructural, ya que  $\gamma_a(s)h_2(s)$  y  $\gamma_a(s)h_1(s)$  pasan cerca del punto (1,0).

## 4.3 Caso 2

En este caso se busca aumentar los márgenes de estabilidad obtenidos en el caso 1 y garantizar la robustez del sistema. Por lo cual, se realizó un rediseño de controladores:

$$k_{11}(s) = \frac{393.55(s+1.99)}{s} \quad (141)$$

$$k_{22}(s) = \frac{25119(s+80)(s+60)(s+1.2)(s+0.5)(s^2+0.97s+0.28)}{s(s+220)(s+180)(s+63.89)(s+1.5)(s+1)} \quad (142)$$

Quedando los canales de la siguiente manera:

$$c_1(s) = \frac{19.36(s+71.64)(s+53.61)(s+26.25)(s^2+246.9s+233600)}{s(s-2.86)(s+49.73)(s+68.01)(s^2+348.4s+69920)} \quad (143)$$

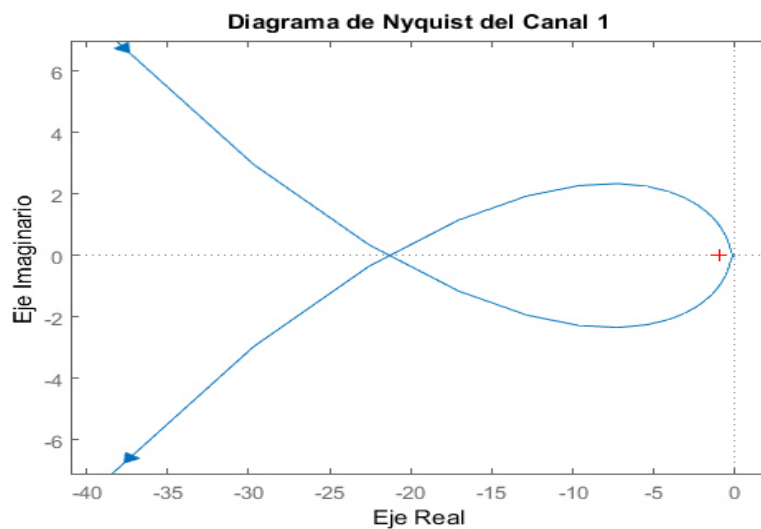


Fig. 4.19 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 1

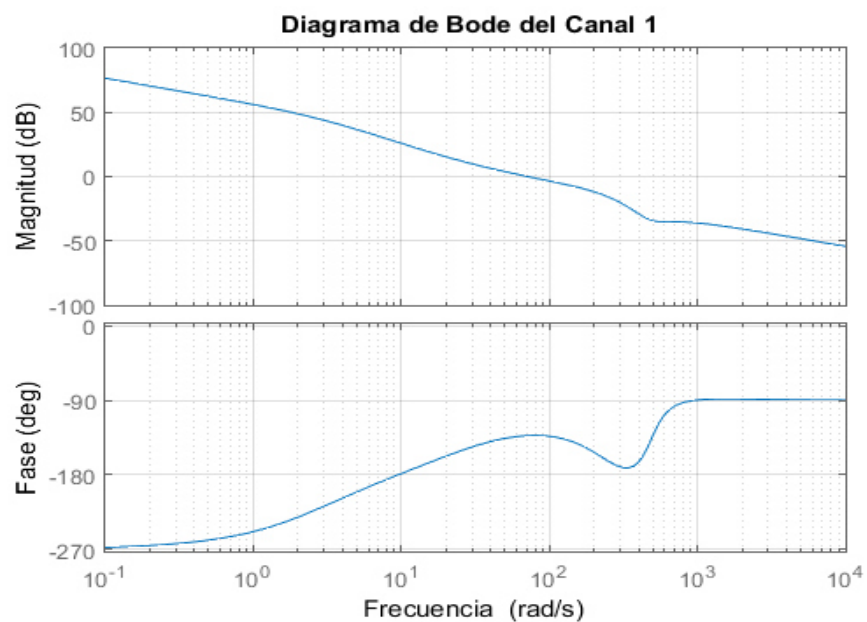


Fig. 4.20 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 1

$$c_2(s) = \frac{48125.5(s+1.2)(s+0.5)(s+31.08)(s+60)(s+63.89)(s+80)}{s(s+1.5)(s+1)(s-27.68)(s+45.79)(s+63.89)(s+180)(s+220)} \quad (144)$$

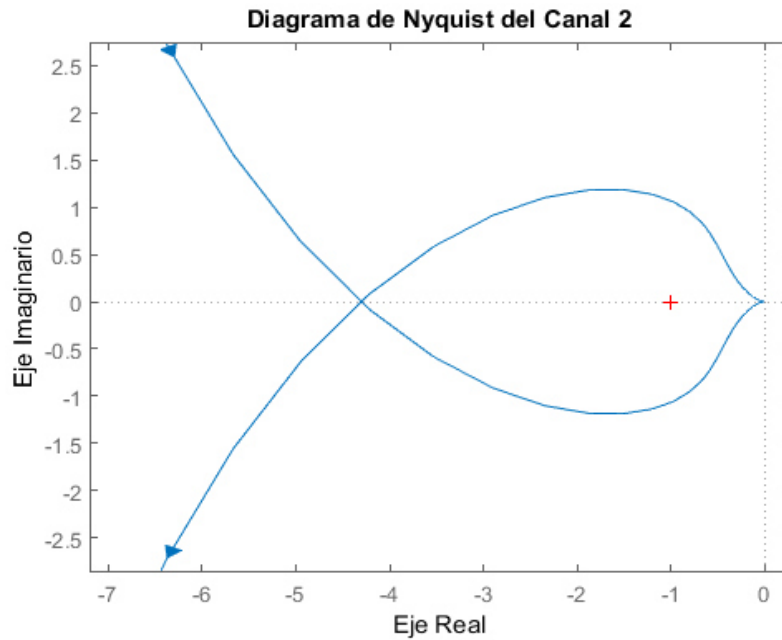


Fig. 4.21 Diagrama de Nyquist de lazo abierto del canal 2

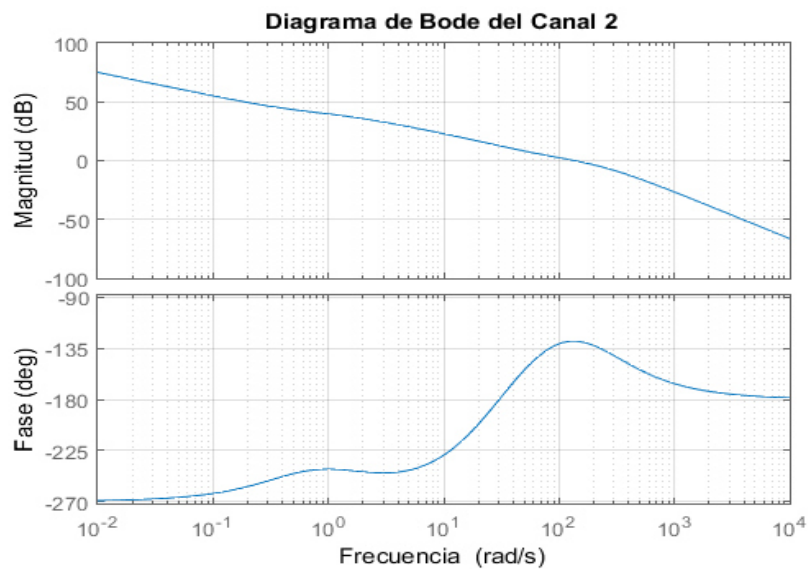


Fig. 4.22 Diagrama de Bode de lazo abierto del canal 2

Las respuestas de los canales en lazo cerrado quedan de la siguiente manera:

$$c_{1LC}(s) = \frac{19.36(s+71.64)(s+53.61)(s+26.25)(s^2+246.9s+233600)}{(s+40.66)(s+63.89)(s^2+84.45s+3490)(s^2+293.6s+50290)} \quad (145)$$

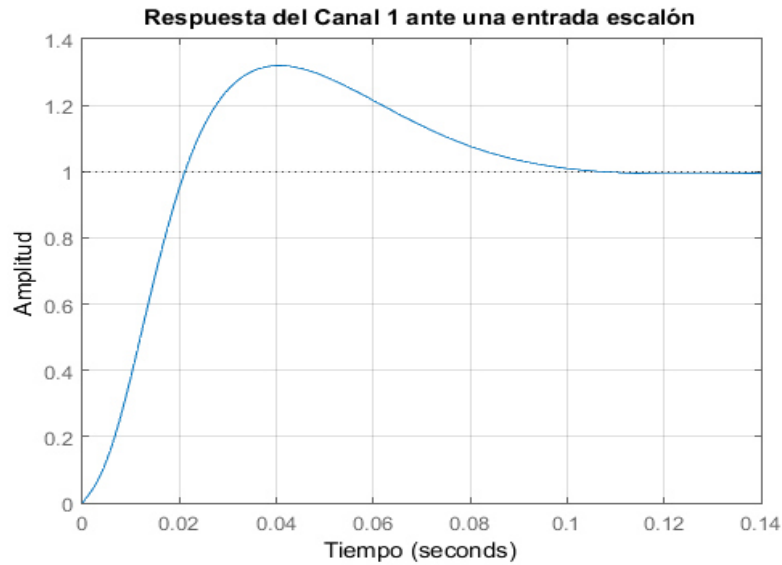


Fig. 4.23 Respuesta en el Tiempo del Canal 1 ante una entrada escalón

$$c_{2LC}(s) = \frac{48125.5(s+31.08)(s+60)(s+80)}{(s+40.65)(s^2+84.51s+3491)(s^2+293.6s+50290)} \quad (146)$$

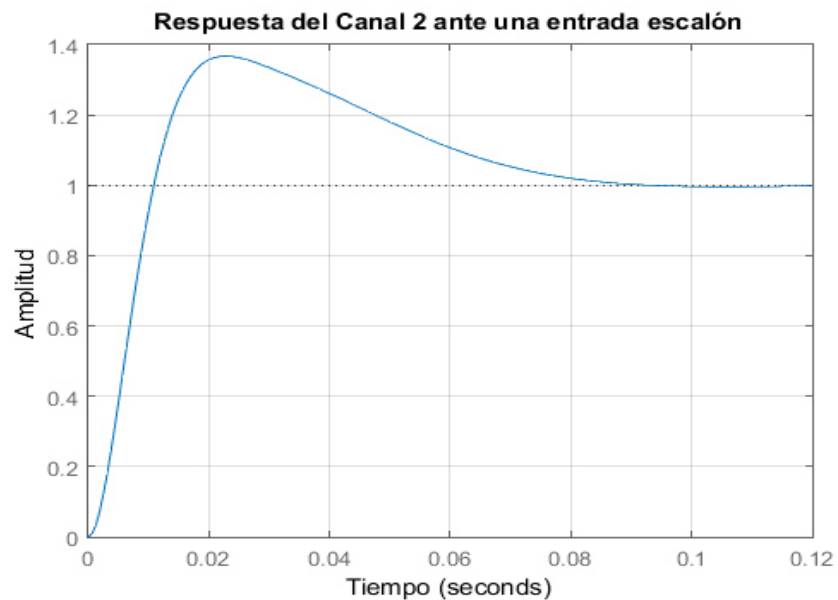


Fig. 4.24 Respuesta en el Tiempo del Canal 2 ante una entrada escalón



También se analiza  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$ :

$$\gamma_a(s)h_1(s) = \frac{-78.589(s+1.99)(s+0.6795)(s-0.2687)(s+42.43)(s^2+0.701s+1.613)}{(s-27.86)(s+45.79)(s-2.987)(s+2.004)(s+1.994)(s^2+0.97s+0.2884)} \quad (147)$$

$$\gamma_a(s)h_2(s) = \frac{-195330(s+1.2)(s+0.6795)(s+0.5)(s-0.2687)(s+42.43)(s+60)(s+80)(s^2+0.701s+1.613)}{(s-66.34)(s+68.01)(s+49.73)(s-2.865)(s+2.012)(s+1.203)(s+0.4976)} \quad (148)$$

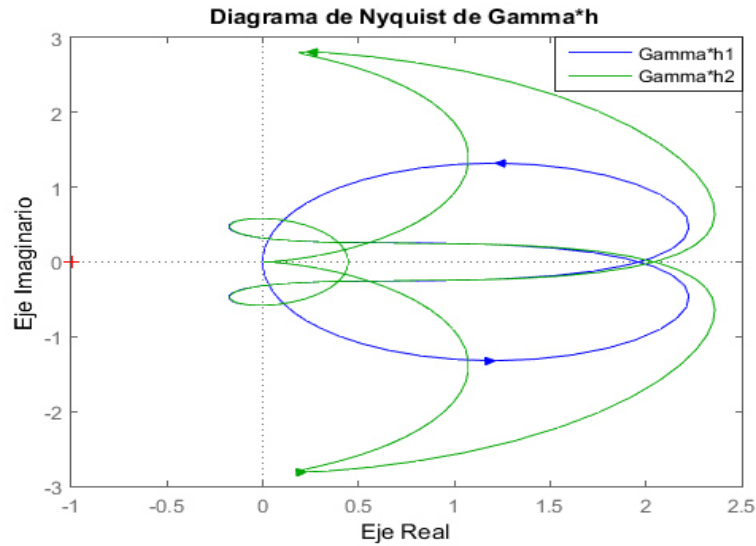


Fig. 4.25 Diagrama de Nyquist de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  ,  $\gamma_a(s)h_2(s)$

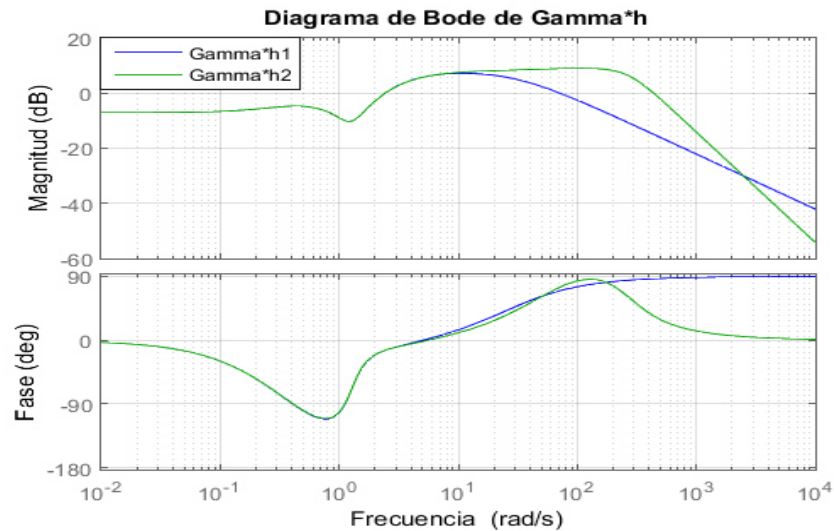


Fig. 4.26 Diagrama de Bode de  $\gamma_a(s)h_1(s)$  ,  $\gamma_a(s)h_2(s)$

Se resumen los márgenes de estabilidad obtenidos en el caso II en la tabla 4.2:

Tabla 4.2 Resultados obtenidos para el Caso II

	$C_{11}(s)$	$\gamma_b(s)h_2(s)$		$C_{22}(s)$	$\gamma_b(s)h_1(s)$	
BW (rad/s)	71.6	2.45	436	135	2.43	71.3
MG (dB)	26.6	6.18		12.7	5.86	
MF (°)	47.4	14.2	34.3	51.4	14.3	69.8

### 4.3.1 Conclusiones del Caso 2

En base a los resultados obtenidos en el caso anterior se modificaron los controladores buscando obtener un sistema estructuralmente robusto. Se lograron rediseñar los controladores con los cuales se obtuvieron mayores anchos de banda y se separaron los anchos de banda de cada canal. A pesar de esto no se pudo obtener la robustez estructural, lo cual se vio reflejado en las respuestas.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES

En este trabajo, se aborda el problema de diseño de controladores descentralizados, bajo el marco de trabajo de ICAD (Análisis y Diseño por Canal Individual) para: i) un sistema reportado en la literatura académica que es estable y de fase no mínima, y ii) una aeronave militar que es estable de fase mínima.

Se resalta la importancia de la MSF (Función de Estructura Multivariable) ya que, con base en su conocimiento y análisis, se pueden definir las condiciones de robustez para sistemas multivariables y diseñar controladores clásicos con ayuda de los diagramas de Nyquist y de Bode.

Se probó, mediante diferentes casos, las diferentes posibilidades que se pudiesen realizar para el diseño de sistemas de control con el fin de encontrar buenos márgenes de estabilidad y garantizar la robustez estructural. Comprobando así que para tener un sistema estructuralmente robusto se debe alejar las funciones  $\gamma_a(s)h_1(s)$  y  $\gamma_a(s)h_2(s)$ , correspondientes a cada canal, del punto crítico (1,0). Así mismo, se comprobó que es posible reducir el problema del acoplamiento mediante la separación de anchos de banda de los canales individuales. Por otra parte, se mostró la alternativa de diseñar mediante la redefinición de los canales entrada-salida, es decir, con la función de estructura multivariable inversa, obteniendo en este caso un sistema estructuralmente robusto.

También se eligió un caso de una aeronave F106B modelada a bajas velocidades, en el cual se muestra que bajo este marco de diseño se puede conocer el

desempeño de la planta. Complementando que hay una interacción entre los requerimientos que el cliente busca y las limitaciones de la planta.

Se comprobó que el marco de diseño *ICAD* es flexible y transparente. Además, no es más complejo de lo necesario. Concluyendo así, que se lograron los objetivos planteados para este trabajo. Haciendo notar que existe una gran área de oportunidad para trabajo futuro a partir de los resultados obtenidos.

## VI. Referencias

- [1] A. Bemporad, M. M. (1999). Robust Model Predictive Control: A Survey. *Robustness in identification and control*, 207 - 226.
- [2] Akbar, M. A. (1993). Design of Robust Controllers for a Fighter Aircraft using Individual Channel Design. *Proceedings of the 32 Conference on Decision and Control*, 430-435.
- [3] Amezquita, L. (2005). *Modelado y Control de Giroscopio-Edición Única*. Estado de México.
- [4] Burl, J. B. (1999). *Linear Optimal Control*. Menlo Park, CA: Addison - Wesley.
- [5] Fuentes, J. I. (2003). *Análisis y Diseño de un Sistema de Control Multivariable para el Dispositivo "Twin Rotor MIMO System"*. Estado de México.
- [6] G. Goodwin, S. F. (2001). *Control System Design*. USA, New Jersey: Prentice – Hall.
- [7] Grimble, M. J. (1996). *Polynomial Methods for Control Systems Design*. Glasgow, UK: Springer - Verlag .
- [8] J. O'Reilly, W. E. (1992). The Direct (Inverse) Nyquist Array and Quantitative Feedback Theory Approaches to Multivariable Feedback Design: A Structural Assesment For 2-Input 2-Output Systems. *System Structure and Control*, 12-15.
- [9] J. O'Reilly, W. E. (1991). Multivariable control by individual channel design. *International Journal of Control*, 1-46.
- [10] J. O'Reilly, W. E. (1991). Multivariable control by individual channel design: an automotive gas turbine case study. *International Conference on Control*, 1261 - 1266.
- [11] J. O'Reilly, W. E. (1991). Structural issues underlying the performance of 2-input 2-output multivariable systems using individual channel design. *Decision and Control, Proceedings of the 30th IEEE Conference*, 575 - 580.
- [12] Kocijan, J. (1997). An approach to multivariable combustion control design. *Journal of Process Control* 7.4, 291-301.
- [13] Licéaga-Castro, E. L.-C.-L. (2005). Beyond the existence of diagonal controllers: from the relative gain array to the multivariable structure function. *European Control Conference*, 7150-7156.

- [14] Liceaga-Castro, E. L.-C.-L.-L. (2008). Efficient multivariable submarine depth-control system design. *Ocean Engineering*, 1747-1758.
- [15] Liceaga-Castro, J. L.-B.-C. (2008). Induction motor current controller for field oriented control using individual channel design. *In Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, 235-240.
- [16] Maciejowski, J. M. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Great Britain: Addison - Wesley Publishing Company .
- [17] S. S. Robertson, J. O. (1997). Nyquist/Bode design for multivariable systems with parametric uncertainty. *Robust Control: Theory, Software and Applications, IEE Colloquium on*, 3/1 - 3/4.
- [18] S. Skogestad, I. P. (2005). *Multivariable Feedback Control*. New York: John Wiley & Sons.
- [19] S. Wu, W. W. (2004). Robust MIMO control - system design using eigenstructure assignment and QFT. *IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 151, No. 2*, 199 - 209.
- [20] Srinathkumar, S. (2011). *Eigenstructure Control Algorithms*. London, United Kingdom: The Institution of Engineering and Technology.
- [21] Stein, J. C. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/modern Synthesis. *IEEE Transactions On Automatic Control, Vol AC - 26, No. 1*, 4 - 16.
- [22] W.E. Leithead, J. (1991). Structural Issues Underlying the Performance of 2-Input 2-Output Multivariable Systems Using Individual Channel Design. *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, 575-580.