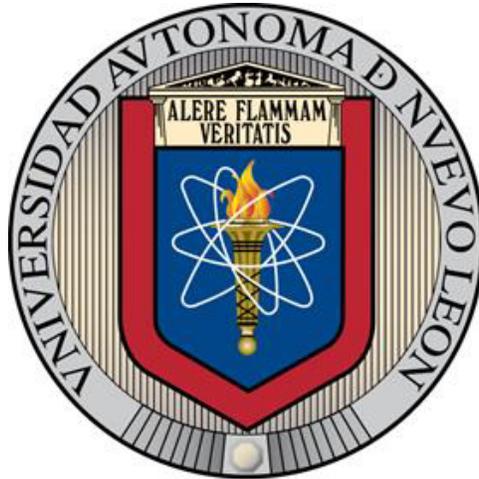


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

“TRANSMISIÓN DE DATOS MEDIANTE ONDULETAS BATTLE-LEMARIÉ”

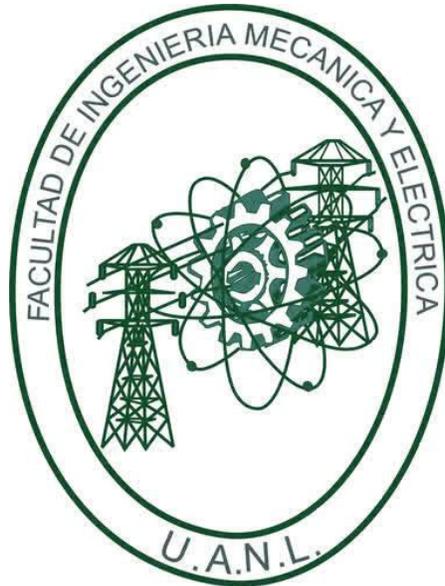
Por

ING. FRANCISCO JAVIER PÍO MENDOZA

**EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

JULIO 2017

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

“TRANSMISIÓN DE DATOS MEDIANTE ONDULETAS BATTLE-LEMARIÉ”

Por

ING. FRANCISCO JAVIER PÍO MENDOZA

**EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

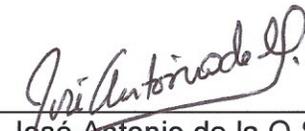
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

JULIO DE 2017

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "TRANSMISIÓN DE DATOS MEDIANTE ONDULETAS BATTLE-LEMARIÉ" realizada por el alumno ING. FRANCISCO JAVIER PÍO MENDOZA, con número de matrícula 1831333, sea aceptada para su defensa como opción al grado de MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA.

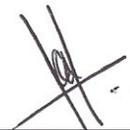
El Comité de Tesis



Dr. José Antonio de la O Serna
Director

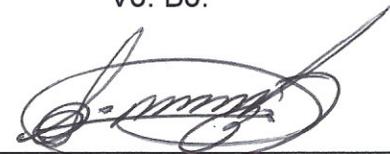


Dr. José Ramón Rodríguez Cruz
Revisor



Dr. César Vargas Rosales
Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León a 17 de julio de 2017

AGRADECIMIENTOS

Un logro es el fruto del esfuerzo y dedicación impresos por una persona en un afán. Sin embargo, rara vez es éste una realización unipersonal. En esencia, somos una construcción hecha de interacciones con nuestros semejantes, pero solo algunas de éstas nos motivan a emprender las tareas más importantes de nuestras vidas. El presente trabajo, en su calidad de logro, no es la excepción.

Me tomo las siguientes líneas para expresar mi agradecimiento a quienes han contribuido positivamente apoyándome en la realización de este trabajo y durante este capítulo de mi vida. Sin su ayuda, este logro no habría sido posible.

A mi director de tesis, el **Dr. José Antonio de la O Serna**, por su actitud siempre positiva y alentadora; por la confianza que depositó en mí desde el primer momento en que me acerqué al posgrado.

Al **Dr. José Ramón Rodríguez Cruz** y al **Dr. César Vargas Rosales**, quienes fungieron como revisores de tesis y cuyas contribuciones mejoraron el presente trabajo en su etapa final.

Al coordinador académico del posgrado en ingeniería eléctrica, el **Dr. David Alejandro Díaz Romero**, por su genuino interés por el bienestar del alumnado; por su orientación y consejo en lo académico, sin limitarse a ello.

En general, a todo el profesorado del **Posgrado de Ingeniería Eléctrica** de la **FIME**, de quienes siempre percibí respeto y una voluntad diligente hacia la enseñanza.

A mis compañeros de maestría, en particular a los compañeros del área de comunicaciones, los **Ing. Gerardo Arturo García Sánchez**, **Ing. Mario Ángel Rico Méndez** y **M.C. Vidal Alfredo Trejo Rocha**, con quienes compartí puntos de vista y bromas, creando una convivencia grata.

A las instituciones como la **Universidad Autónoma de Nuevo León** y al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, por crear oportunidades de superación para la juventud mexicana.

A mi hermana **Cestla Vie Pío Mendoza**, mi cuñado **Ernesto Alonso Maldonado López** y mi sobrina **Sara Zoé Maldonado Pío**, quienes abrieron su hogar para hacerme parte integral de él; por apoyarme en momentos difíciles que se presentaron durante mi estancia en esta ciudad de Monterrey.

Finalmente, de una manera muy especial, le agradezco a mi señora madre **María Aída Mendoza Méndez**, por su amor y cariño siempre constantes e incondicionales; por estar siempre presente en mi vida. A ella le reconozco todos los sacrificios hechos por el bienestar y la realización plena de sus hijos.

¡MUCHAS GRACIAS!

Ing. Francisco Javier Pío Mendoza
Julio de 2017

RESUMEN

Publicación no. _____

Ing. Francisco Javier Pío Mendoza, M.C. de la Ingeniería Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León, 2017

Un esquema de modulación obtiene un conjunto de señales simbólicas para la representación de secuencias binarias. De la teoría de onduletas, las funciones escalante y onduletas conforman una base funcional con la que es posible generar un espacio de funciones o señales.

Como antecedente, la aplicación de onduletas (tipo Haar, Daubechies) en sistemas de comunicaciones ha sido propuesta en esquemas de modulación del tipo OFDM. También se ha propuesto funciones onduletas (tipo Daubechies y Battle-Lemarié de *spline* cúbico) como formas de onda para codificación en banda base de esquemas BPSK y QPSK.

En el presente trabajo, se plantea la hipótesis de que un esquema de modulación digital basado en onduletas Battle-Lemarié (BL) tendrá un nivel de inmunidad al ruido notable y niveles bajos de interferencias intersimbólicas. Tal hipótesis se apoya en las propiedades de las onduletas BL: su ortogonalidad, su decaimiento rápido y su energía que se concentra en regiones acotadas del plano tiempo-frecuencia.

Con el propósito de validar la hipótesis, se estudia la construcción analítica de las funciones escalante y onduletas del tipo BL. Luego se definen parámetros de diseño que permitan la implementación de dichas funciones como una base vectorial para la síntesis de señales simbólicas.

El objetivo del trabajo es evaluar la transmisión de datos mediante onduletas BL, es decir, a través de la base vectorial diseñada con tal fin. Tal objetivo comprende: primero, la proposición de la base vectorial a partir de las onduletas BL; luego, la simulación computacional de la síntesis de señales, la

afectación por el ruido del canal y el proceso de recuperación de datos; y finalmente, la evaluación del desempeño del sistema propuesto en base de criterios de desempeño como la tasa de error binario, la razón de valor pico a valor promedio y la eficiencia de ancho de banda.

Los resultados son comparados con sistemas OFDM. Si bien, los datos arrojados tras la experimentación indican que el desempeño del sistema propuesto es similar al de OFDM en términos de tasa de error binario, los demás criterios indican ser una desventaja para su implementación ya que dichos resultados son pobres en comparación. De tal forma que, solo en aplicaciones donde los picos en las señales simbólicas y la eficiencia en el uso del ancho de banda sean criterios desestimables, el sistema propuesto basado en onduletas BL representa una alternativa a los sistemas OFDM.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Descripción del problema.....	4
1.2 Objetivos.....	6
1.3 Metodología.....	7
1.4 Descripción de la tesis.....	7
2. NOCIONES PRELIMINARES	9
2.1 Series de Fourier.....	10
2.2 Base de señales.....	11
2.3 Matriz de Gram.....	13
2.4 Aproximación de señales en tiempo continuo a señales en tiempo discreto.....	14
2.5 Operadores lineales en $L^2(\mathbb{R})$	16
3. ONDULETAS Y CONSTRUCCIÓN DE ONDULETAS BL	17
3.1 Teoría de onduletas.....	18
3.2 <i>B-splines</i>	19
3.3 Onduletas Batle-Lemarié.....	22
4. ONDULETAS BL COMO BASE DE SEÑALES	33
4.1 Alcance de onduletas base y delimitación del soporte.....	34
4.2 Expansión de la base mediante operación de modulación.....	37
4.3 Discretización de la base mediante operación de muestreo.....	41

5. MODULACIÓN DIGITAL	44
5.1 Síntesis de señales simbólicas.....	45
5.2 Análisis de señales simbólicas y recuperación de datos.....	47
5.3 Tasa de error binario.....	49
5.4 Razón de valor pico a valor promedio.....	50
5.5 Eficiencia de ancho de banda.....	53
5.6 Superposición de símbolos.....	54
5.7 Consideraciones para el diseño.....	55
6. CONCLUSIONES	57
6.1 Sobre el desarrollo de la base vectorial.....	57
6.2 Sobre la implementación en la transmisión de datos.....	58
6.3 Trabajo futuro.....	58
APÉNDICE	60
A.1 Expresiones analíticas de <i>B-splines</i> centrados.....	60
A.2 Derivadas de la función cotangente.....	61
A.3 Función de normalizante $G(\gamma)$	62
A.4 Función de $H_1(\gamma)$	65
LISTA DE SÍMBOLOS	67
ÍNDICE DE FIGURAS	71
ÍNDICE DE TABLAS	74
BIBLIOGRAFÍA	75

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de comunicación satisfacen la necesidad de transmitir información entre gobiernos, instituciones, empresas y personas en general. La información a transmitir puede ser analógica o digital, siendo esta última la de mayor auge debido a la migración de formatos analógicos tradicionales a nuevos formatos digitales en las recientes décadas. La información digital se presenta como datos digitales en forma de secuencias de datos binarios.

El propósito de un sistema de transmisión de datos es el de comunicar estos datos desde un transmisor, y a través de un canal de comunicación dado, hasta un receptor de manera confiable. Para lograr esto, es necesario crear una señal simbólica, o simplemente símbolo, que represente a los datos binarios, separados en secuencias binarias, y que sea compatible con las características del canal; por ejemplo, en términos de ancho de banda. El proceso de establecer la correspondencia entre las secuencias de datos y los símbolos se conoce como *modulación digital* o *señalización digital* [1, p. 95].

En una modulación digital, existe una función biyectiva entre los elementos del conjunto secuencias binarias y los elementos del conjunto de símbolos $s_n(t)$, ver figura 1.1. Existen diferentes esquemas y métodos de modulación que permiten obtener un conjunto de señales simbólicas adecuado para la representación de las secuencias binarias. En los esquemas de modulación lineales, por ejemplo, ASK, PSK y QAM, las señales simbólicas tienen equivalentes en banda base de la forma $A_n p(t)$, donde A_n es una

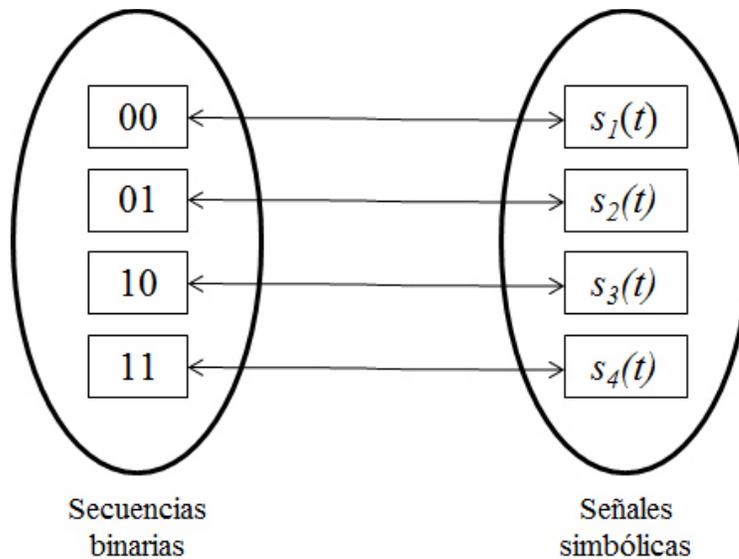


Figura 1.1 Relación biyectiva entre secuencias binarias y símbolos.

amplitud compleja [1, p. 110] y $p(t)$ es una forma de onda en banda base de duración equivalente a la del símbolo. Debido a la linealidad de estos esquemas de modulación, es posible generar el conjunto de símbolos mediante la combinación lineal de las señales de una base funcional, ya sea ortogonal o no ortogonal.

La teoría de onduletas tuvo auge en matemáticas aplicadas con las aportaciones de diversos autores, en particular, entre 1980 y 1985. Se le considera como una síntesis de ideas que surgen de la ingeniería, la física y matemática aplicada, y que fueron desarrolladas en décadas previas. Dado a su origen multidisciplinario, la teoría de onduletas tiene gran atractivo para científicos e ingenieros de diversos ramos [2, p. vii]. Las onduletas son vistas como una nueva base para representar funciones, como una técnica para el análisis tiempo-frecuencia o como un nuevo objeto de estudio matemático; dependiendo del divulgador. Sin embargo, existe el consenso de que la teoría de onduletas es una herramienta versátil y de gran aplicación [3, p. 1].

Para abordar la teoría de onduletas es necesario presentar conceptos como el de función *refinable* y el *análisis multiresolución* (en inglés, *multiresolution analysis* o MRA). Explicando estos conceptos a grosso modo, por un lado se tiene que una función $\varphi(x)$ es refinable si puede ser expresada

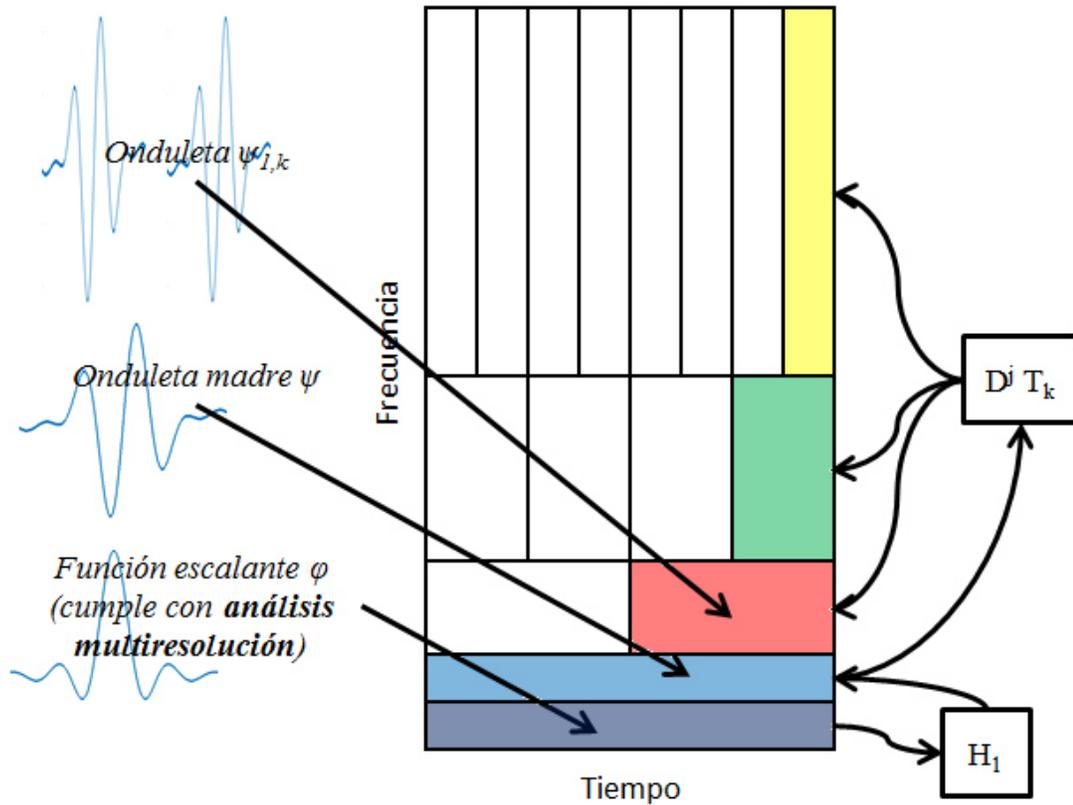


Figura 1.2 Función escalante φ y funciones onduletas ψ en el plano tiempo-frecuencia.

como la sumatoria de versiones trasladadas, dilatadas y escaladas de ella misma. Por otro lado, el MRA es un conjunto de condiciones aplicadas sobre una función refinable $\varphi(x)$ y un conjunto de espacios funcionales definidos por $\varphi(x)$. De tal manera que, dada una función $\varphi(x)$ que satisfaga al MRA, se denomina a esa función como *escalante (scaling function)*. Finalmente, la función escalante, tras un proceso similar al de un filtrado, da lugar a una función *onduleta madre $\psi(x)$ (mother wavelet function)* [4, cap. 1]. A su vez, esta onduleta madre, por medio de dilataciones y traslaciones temporales, genera onduletas de menor escala temporal, que es lo mismo que onduletas de frecuencia más alta.

En conjunto, la función escalante y las onduletas que genera conforman una base funcional con la que es posible representar a otras funciones. Más aún, la función escalante y cada una de las onduletas concentran su energía en regiones disjuntas del plano tiempo-frecuencia; ver figura 1.2.

En este punto, el lector puede anticipar que existe un encuentro entre dos áreas del conocimiento. Estas áreas del conocimiento son una aplicada, la de los sistemas de comunicaciones; y la otra perteneciente a la matemática pura, la de la teoría de onduletas. La primera requiere de una base funcional para generar un conjunto de señales simbólicas, y la segunda es capaz de definir esa base funcional. Esto da lugar a la pregunta: ¿Existe alguna ventaja en la utilización de una base de onduletas como base funcional que genere el conjunto de símbolos de un esquema de modulación digital?

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La pregunta que cierra la sección anterior resume, en esencia, el propósito del presente trabajo. Sin embargo, la teoría de onduletas es bastante amplia y, para efectos del presente trabajo, es atinado acotar los alcances y objetivos buscados. Pese a que la teoría de onduletas viene desarrollándose desde hace relativamente pocas décadas, ésta ha dado fruto a numerosas onduletas de diferentes autores, cada una con características particulares: onduletas *Daubechies*, *Coiflet*, *Meyer*, *Morlet*, *Battle-Lemarié*, entre otras. Algunos tipos de onduletas son denominados como onduletas *spline*, y pueden ser clasificadas según sus características de ortogonalidad. Según esta clasificación, cada tipo de onduletas *spline* presenta ventajas en cierto aspecto, por ejemplo, teniendo un soporte compacto en el tiempo, pero sacrifica otro aspecto, dígase ortogonalidad.

En el presente trabajo de tesis, se plantea estudiar las propiedades de las onduletas Battle-Lemarié (BL) para proponer un esquema de modulación digital. Como se observa en la tabla 1.1, las onduletas BL se caracterizan por su ortogonalidad, ya sea entre onduletas de distintas escalas, así como entre onduletas de la misma escala pero trasladadas. La ortogonalidad en la base de señales de un sistema de comunicaciones es una propiedad que facilita, en la recepción, el proceso de recuperar la señal que ha sido afectada por el ruido del

Tabla 1.1 Clasificación de onduletas *spline* con sus propiedades principales [5].

Tipo de onduleta	Ortogonalidad	Soporte compacto	Propiedades clave	Implementación
<i>Spline</i> ortogonal (<i>Battle-Lemarié, Mallat</i>)	Sí	No	*Simetría y regularidad *Ortogonalidad	IIR/IIR
<i>Spline</i> semiortogonales, <i>B-spline</i> (<i>Chui-Wang, Unser-Aldroubi</i>)	Interescala	Análisis o síntesis	*Simetría y regularidad *Localización en tiempo-frecuencia óptima	IIR/FIR recursivo
<i>Spline</i> ortogonal recorrido (<i>Unser-Thévenaz-Aldroubi</i>)	Intraescala	No	*Simetría y regularidad *Cuasiortogonalidad *Decaimiento rápido	IIR/IIR
<i>Spline</i> biortogonal (<i>Cohen-Daubechies-Feauveau</i>)	No	Sí	*Simetría y regularidad *Soporte compacto	FIR/FIR

canal. La ortogonalidad elimina la interferencia intersimbólica y facilita la demodulación y detección de las señales recibidas [6].

Las onduletas BL no son de soporte compacto. Sin embargo, su decaimiento es rápido. Su energía se concentra casi en su totalidad en un intervalo de tiempo y en un ancho de banda, ambos acotados. De tal manera que, si bien se requeriría un sistema con respuesta al impulso infinita para implementarla de manera cabal, el efecto de truncar la onduleta se presume despreciable.

En conclusión, se plantea la hipótesis de que un esquema de modulación digital basado en onduletas Battle-Lemarié tendrá un nivel de inmunidad al ruido notable y niveles bajos de interferencias intersimbólicas. Lo anterior es debido a que:

a) la ortogonalidad propicia que la proyección del ruido en los vectores que componen la base del sistema sea relativamente uniforme, evitando que una señal simbólica sea malinterpretada por otra; y

b) el decaimiento exponencial facilita la implementación en un sistema sin que el truncamiento de la onduleta signifique pérdida de ortogonalidad considerable.

Como antecedente, en el artículo de Negash [7], la aplicación de onduletas en sistemas de comunicaciones ha sido propuesta en esquemas de modulación del tipo OFDM. En este caso, se reemplazó el uso de exponenciales complejas portadoras basadas en el análisis Fourier por una base de onduletas ortonormales. Fueron utilizadas onduletas Haar y Daubechies. Por otro lado, en el artículo de Gandhi [8], existe el antecedente del uso de onduletas BL de *spline* cúbico, y principalmente de onduletas *Daubechies* como formas de onda para codificación en banda base de esquemas BPSK y QPSK. También, en el trabajo de Daneshgaran [9], se estudió el desempeño de onduletas como pulsos moldeadores para modulación en canales lineales y no lineales. Se incluyó el caso de estudio de onduletas Battle-Lemarié de orden 8 como paquetes de onduletas para demostrar la ventaja de una WOFDM.

En el presente trabajo, las señales simbólicas se sintetizarán mediante combinaciones lineales de hasta 16 funciones onduletas (y sus modulaciones), mientras que en [8] se limitan únicamente a la función escalante y la onduleta madre.

1.2 OBJETIVOS

Diseñar un esquema de modulación digital en banda base utilizando onduletas BL como formas de ondas codificadoras. Definir parámetros de diseño de la base vectorial que genera el conjunto de símbolos y determinar los efectos de dichos parámetros. Evaluar el desempeño del sistema utilizando los criterios de tasa de error binario, razón de valor pico a valor promedio y eficiencia de uso de ancho de banda.

1.3 METODOLOGÍA

Construir de manera analítica las funciones escalante y onduleta de tipo BL de distintos órdenes. Se utilizarán los conceptos y fundamentos teóricos presentes en la literatura [3] [10].

Proponer un conjunto de funciones onduletas BL como base vectorial del esquema de modulación digital. Para este objetivo, se valorarán las propiedades de ortogonalidad, características en tiempo y frecuencia, y complejidad matemática de dicha base.

Simular computacionalmente un sistema de modulación digital basado en la base vectorial de onduletas propuesta: Sintetizar señales simbólicas que codifiquen información de contenido binario, simular el efecto de ruido introducido por un canal AWGN, y analizar señales en la recepción para recuperar la información de contenido binario transmitido.

Evaluar el desempeño del sistema de modulación digital en términos de tasa de error binario, razón de valor pico a valor promedio y eficiencia de uso de ancho de banda.

1.4 DESCRIPCIÓN DE LA TESIS

La tesis se organiza de la siguiente manera:

El capítulo 2 retoma nociones preliminares provenientes de matemáticas avanzadas y del procesamiento de señales que resultarán útiles en el desarrollo de los posteriores capítulos.

El capítulo 3 presenta los fundamentos matemáticos referentes a la teoría de onduletas y se desarrolla analíticamente la construcción de las funciones escalante y onduleta correspondientes a las onduletas BL de los primeros 5 órdenes de onduleta.

El capítulo 4 parte de los resultados obtenidos en el capítulo anterior para definir la base vectorial de un esquema de modulación digital. Se determinan los parámetros de diseño y se revisan los efectos de dichos parámetros.

En el capítulo 5, se muestran los resultados de la simulación del esquema de modulación digital y se muestran los resultados de tasa de error binario, razón de valor pico a valor promedio y eficiencia de ancho de banda.

Por último, en el capítulo 6, se exponen las conclusiones principales que surgen del presente trabajo. Se sugiere el trabajo futuro que puede continuar la labor de la presente tesis.

CAPÍTULO 2

NOCIONES PRELIMINARES

Resulta conveniente mostrar al lector algunos conocimientos previos provenientes de campos de estudios como el procesamiento de señales y las matemáticas avanzadas. Estas nociones serán utilizadas en los desarrollos presentados en los posteriores capítulos del presente trabajo.

En la sección 2.1, se presentan las definiciones de las series de Fourier que, como herramientas matemáticas, serán de gran ayuda en la construcción analítica de las funciones escalante y onduleta. Las secciones 2.2 y 2.3 muestran los fundamentos del procesamiento de señales utilizados en la definición de las bases, por ejemplo, de un esquema de modulación digital, y algunos operadores matriciales necesarios para la síntesis y análisis de señales simbólicas a partir de una base. La sección 2.4 explica el factor de corrección que se requiere introducir cuando se migra de un ámbito continuo a uno discreto.

2.1 SERIES DE FOURIER

La expansión de funciones periódicas por medio de una base sinusoidal es conocida como serie trigonométrica de Fourier.

Serie Trigonométrica de Fourier

(def. 2.1)

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo T y absolutamente integrable en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Se define como serie trigonométrica de Fourier a la serie de funciones:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} x \right) dx, n \geq 0$$

y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin \left(\frac{2\pi n}{T} x \right) dx, n \geq 1$$

Similarmente, la expansión de funciones periódicas por medio de una base de exponenciales complejas es conocida como serie compleja de Fourier.

Serie de Compleja de Fourier

(def. 2.2)

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo T y absolutamente integrable en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Se define como serie compleja de Fourier a la serie de funciones:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T} x}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-j\frac{2\pi n}{T} x} dx, n \geq 0$$

2.2 BASE DE SEÑALES

Un espacio vectorial normado \mathbf{V} es aquel conjunto de vectores x que resultan de la combinación lineal de los elementos de un subconjunto de vectores independientes ϕ_n llámese base vectorial. Es decir,

$$\mathbf{V} = \{x | x = \alpha_0 \phi_0 + \dots + \alpha_{n-1} \phi_{n-1}\} \quad (\text{ec. 2.1})$$

donde α_n son coeficientes reales o incluso complejos. Por otro lado, ϕ_n hace referencia a los elementos de la base vectorial $\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}\}$ [11, p. 70]. Además, se puede establecer que el espacio vectorial en cuestión se trata de un espacio vectorial de producto interno estándar. Es decir, que admite las operaciones de producto interno y de norma.

$$\text{Producto interno} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_0 b_0^* + \dots + a_{n-1} b_{n-1}^* \quad (\text{ec. 2.2})$$

$$\text{Norma} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_0^2 + \dots + a_{n-1}^2} \quad (\text{ec. 2.3})$$

El símbolo $*$ como superíndice denota la conjugación de un escalar complejo, o bien, la transpuesta conjugada de una matriz con elementos complejos. Definido tal espacio vectorial, la ortogonalidad de la base que lo genera se valora mediante la operación de producto interno entre los elementos de la base. Una base es ortogonal si el producto interno entre elementos distintos de la base es cero. En caso contrario, se trata de una base no ortogonal. Además, si la norma de todos los elementos de una base ortogonal es unitario, se dice que es una base ortonormal. De manera formal, en una base ortonormal $\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}\}$ se tiene que:

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \delta_{k,l} \quad (\text{ec. 2.4})$$

donde $\delta_{k,l}$ es la delta de Kronecker cuya magnitud es unitaria si los índices k y l son iguales y es cero en caso contrario [11, p. 76].

Independientemente de la ortogonalidad de la base de un espacio vectorial, existe un proceso de análisis del que se obtienen los coeficientes α_n a partir del vector $x \in \mathbf{V}$. Así como de un proceso de síntesis del que se obtiene el vector x a partir de los coeficientes α_n . Ahora bien, la no ortogonalidad es una propiedad que presenta una desventaja en el proceso de análisis-síntesis ya

que implica encontrar, de antemano, la base dual biortogonal. Lo anterior es debido a que cuando se realiza un proceso de síntesis usando una base no ortogonal, en el análisis se requerirá utilizar la base dual asociada a la base original.

La base dual de una base ortonormal es ella misma. Por lo que se emplea la misma base tanto en la síntesis como en el análisis, facilitando en gran medida el trabajo numérico. En el presente trabajo, se trabaja con bases ortonormales, o bien, cuya no ortogonalidad es despreciable. Se tiene entonces que para un vector $x \in \mathbf{V}$, los procesos de síntesis y análisis con respecto a una base ortogonal Φ se obtienen de manera matricial mediante:

$$\text{Análisis} \qquad \qquad \qquad \alpha = \Phi^* x \qquad \qquad \qquad (\text{ec. 2.5a})$$

$$\text{Síntesis} \qquad \qquad \qquad x = \Phi \alpha \qquad \qquad \qquad (\text{ec. 2.5b})$$

donde $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$, es decir, un vector con los coeficientes que resultan del análisis del vector x en términos de los elementos de la base $\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}\}$ [11, p. 75].

Las anteriores ecuaciones dan pauta para definir un operador de proyección ortogonal de un vector $y \notin \mathbf{V}$ sobre el espacio vectorial \mathbf{V} . Sea $y = x + e$, donde e es un vector de error ortogonal al espacio vectorial \mathbf{V} , entonces:

$$\Phi^* y = \Phi^*(x + e) = \Phi^* x + \Phi^* e = \Phi^* x = \alpha \qquad (\text{ec. 2.6})$$

Multiplicando los términos extremos de (ec. 2.6), se tiene que:

$$\Phi \Phi^* y = \Phi \alpha = x \qquad (\text{ec. 2.7})$$

donde $\Phi \Phi^*$ es entonces el operador de proyección ortogonal sobre \mathbf{V} que se aplica a y [11, p. 81]. Este resultado es de gran aplicación en diversos campos de la ingeniería y de la ciencia aplicada. Nótese que los vectores no se limitan a representar dimensiones espaciales o magnitudes físicas con dirección. Los vectores pueden ser representaciones de funciones matemáticas discretas, o incluso, en un sentido más concreto, de señales físicas muestreadas. Entonces, tomando el caso de señales físicas, cuando se hace referencia a un espacio vectorial, se habla de un conjunto de señales que se sintetizan mediante la combinación lineal de señales elementales pertenecientes a una base de

señales. Luego, las distorsiones que sufran una de estas señales, o la afectación por ruido introducido por el medio de propagación, harán que la señal se mueva alrededor de un punto perteneciente al espacio de señales, o incluso que salga de él. Sin embargo, utilizando el proyector ortogonal asociado a la base, siempre es posible regresar al espacio original y recuperar aproximadamente los coeficientes utilizados en la síntesis de la señal. De aquí que es en los coeficientes donde es posible codificar información para implementar un sistema de modulación digital.

2.3 MATRIZ DE GRAM

La matriz de Gram o gramiana \mathbf{G} se define como:

$$\mathbf{G} = \mathbf{\Phi}^* \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n,1} & \cdots & G_{n,n} \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.8})$$

donde $G_{k,l} = \langle \phi_k, \phi_l \rangle$. Cuando la base $\mathbf{\Phi}$ es ortonormal, la matriz \mathbf{G} equivale de la matriz identidad $\mathbf{I}_{n \times n}$ [11, p. 90].

La matriz de Gram es útil para calcular la energía de una señal a partir de los coeficientes de la expansión lineal. La energía de la señal se calcula mediante el producto interno como:

$$\int_a^b s(x) s^*(x) dx = \langle s(x), s(x) \rangle \quad (\text{ec. 2.9})$$

Expresando la (ec. 2.9) de manera matricial y sustituyendo $s(x)$ por la expansión con respecto al vector de coeficientes α de una base de señales $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$, se obtiene:

$$\langle s(x), s(x) \rangle = \langle \mathbf{\Phi} \alpha, \mathbf{\Phi} \alpha \rangle = \langle \mathbf{\Phi}^* \mathbf{\Phi} \alpha, \alpha \rangle = \langle \mathbf{G} \alpha, \alpha \rangle = \alpha^H \mathbf{G} \alpha \quad (\text{ec. 2.10})$$

En el caso particular de una base ortonormal, la (ec. 2.10) se simplifica a:

$$\alpha^H \mathbf{I} \alpha = \alpha^H \alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \quad (\text{ec. 2.11})$$

2.4 APROXIMACIÓN DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO A SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Las señales representan modelos de fenómenos físicos que determinan la magnitud y/o dirección de una variable física con respecto a otra u otras variables físicas. Desde un punto de vista matemático, este mismo concepto equivale al de las funciones matemáticas. Una función denota la correspondencia entre una variable independiente y otra variable dependiente. Las variables existen de carácter continuo (que toma cualquier valor perteneciente a los números reales) y discreto (que toma valores pertenecientes a los números enteros). Las funciones, o señales, comúnmente utilizadas son aquellas donde la variable dependiente es continua y la variable independiente es el tiempo, ya sea de carácter continuo o discreto.

Es importante analizar con atención la relación entre el tiempo continuo y el tiempo discreto. Los fenómenos físicos estudiados en la naturaleza son, en términos prácticos, de carácter continuo. Por otro lado, el estudio de tales fenómenos se realiza por medio de mediciones y registros de ellos. Estos registros y mediciones suelen ser de carácter discreto. Entonces, para una función de tiempo continuo corresponden varias funciones de tiempo discreto, dependiendo de parámetros como, por ejemplo, el periodo de muestreo. Otro aspecto a considerar cuando se busca el equivalente en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo es su equivalencia en términos de la energía de la señal.

A continuación, se revisa el caso en el que la energía de la señal de tiempo continuo está contenida exclusivamente en un intervalo de tiempo finito $I \in (a, b)$. En este caso, la energía de la señal ε_C se define como:

$$\varepsilon_C = \int_a^b f_C(x)f_C^*(x)dx \quad (\text{ec. 2.12})$$

donde $f_C(x)$ es la señal estudiada y x es la variable temporal continua. Por otro lado, en el caso de una señal de tiempo discreto cuya energía está distribuida entre número finito de muestras N , la energía de la señal ε_D se define como:

$$\varepsilon_D = \sum_{n=1}^N f_D[n]f_D^*[n] \quad (\text{ec. 2.13})$$

donde $f_D[n]$ es la señal continua y n es la variable temporal discreta. Si se desea que la señal discreta preserve la energía de la señal continua, es decir que $\varepsilon_D = \varepsilon_C$, se tiene que:

$$\sum_{n=1}^N f_D[n]f_D^*[n] = \int_a^b f_C(x)f_C^*(x)dx \quad (\text{ec. 2.14})$$

El término del lado derecho de (ec. 2.14) es una integración a la que es aproximable mediante una sumatoria de Riemman. Haciendo la sustitución en (ec. 2.14) de la integral, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^N f_D[n]f_D^*[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f_C\left(a + k \frac{(b-a)}{N}\right) f_C^*\left(a + k \frac{(b-a)}{N}\right) \quad (\text{ec. 2.15})$$

donde $\frac{(b-a)}{N}$ corresponde al periodo de muestreo T_s del intervalo $I \in (a, b)$ cuando se divide éste en N subintervalos. Si además establecemos que $a = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N f_D[n]f_D^*[n] &= \lim_{N \rightarrow \infty} T_s \sum_{k=1}^N f_C(kT_s)f_C^*(kT_s) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sqrt{T_s}f_C(kT_s) \cdot \sqrt{T_s}f_C^*(kT_s) \end{aligned} \quad (\text{ec. 2.16})$$

Entonces, la señal en tiempo discreto que preserve la energía de la señal en tiempo continuo es:

$$f_D[n] = \sqrt{T_s}f_C(kT_s) \quad (\text{ec. 2.17})$$

para $n, k \in \mathbb{Z}$. Lo anterior es válido siempre y cuando el valor del número de muestras N sea suficientemente grande en un intervalo finito $I \in (a, b)$, es decir, que el periodo de muestreo tienda a cero, $T_s \rightarrow 0$. El factor $\sqrt{T_s}$ deberá ser tomado en cuenta en la implementación de modelos analíticos continuos en un sistema computacional o informático que trabaja con modelos numéricos de carácter discreto.

2.5 OPERADORES LINEALES EN $L^2(\mathbb{R})$

En la generación de funciones onduletas de escalas temporales menores partir de la onduleta madre, se recurre a algunos operadores lineales en $L^2(\mathbb{R})$ como los de traslación y dilatación. Estos se definen como [10, p. 120]:

Operadores lineales en $L^2(\mathbb{R})$ (def. 2.3)

(i) Para $a \in \mathbb{R}$, el operador T_a , llamado traslación por a , se define:

$$T_a f(x) := f(x - a), x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Para $b \in \mathbb{R}$, el operador E_b , llamado modulación por b , se define:

$$E_b f(x) := e^{j2\pi b x} f(x), x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Para $c > 0$, el operador D_c , llamado dilatación por c , se define:

$$D_c f(x) := \frac{1}{\sqrt{c}} f\left(\frac{x}{c}\right), x \in \mathbb{R}.$$

CAPÍTULO 3

ONDULETAS Y CONSTRUCCIÓN DE ONDULETAS BL

No existen fórmulas explícitas para denotar ciertos tipos de onduletas y se recurre a definiciones indirectas, por ejemplo, las onduletas Daubechies se definen por medio de polinomios en el dominio espectral [4, cap. 3.6]. Las onduletas BL pertenecen a este caso también. Este capítulo tiene como objetivo llegar a una expresión que, aunque no sea explícita todavía, sí permita la construcción de onduletas BL en el dominio temporal y auxilie en el cómputo numérico de las funciones escalante y onduleta.

En la sección 3.1, se introduce al lector a la teoría de onduletas y se exponen las nociones básicas que fundamentan la construcción de funciones onduletas en general. La referencia bibliográfica principal es el libro de O. Christensen [10]. Las secciones 3.2 y 3.3 abordan los conceptos de *splines* y la construcción de las onduletas BL, respectivamente.

3.1 TEORÍA DE ONDULETAS

La teoría de onduletas permite construir bases ortonormales con la propiedad de que los elementos que las constituyen sean funciones que resultan de la traslación y escalamiento de una función particular. La definición formal de onduleta dice que [10, p. 160]:

Base de Onduletas

(def. 3.1)

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

(i) Para $l, k \in \mathbb{Z}$, defínase $\psi_{l,k}$ como:

$$\psi_{l,k}(x) := 2^{l/2} \psi(2^l x - k), x \in \mathbb{R}$$

(ii) La función ψ se denomina onduleta si las funciones $\psi_{l,k \in \mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

El análisis multiresolución es la herramienta para construir bases ortonormales de onduletas. Consiste en un conjunto de condiciones aplicadas en un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ y una función asociada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Formalmente, se define como [10, p. 162]:

Análisis Multiresolución

(def. 3.2)

Sea $\{\mathbf{V}_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de subespacios cerrados en $L^2(\mathbb{R})$ y una función $\varphi \in \mathbf{V}_0$, tales que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Los espacios V_l están anidados, es decir,

$$\dots \mathbf{V}_{-1} \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_1 \dots$$

(ii) $\overline{\cup_{l \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_l} = L^2(\mathbb{R})$ y $\cap_{l \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_l = \{0\}$.

(iii) Para toda $l \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{V}_{l+1} = D_{\frac{1}{2}}(\mathbf{V}_l)$.

(iv) $f \in \mathbf{V}_0 \Rightarrow T_k(f) \in \mathbf{V}_0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(v) $\{T_k(\varphi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de \mathbf{V}_0 .

Las condiciones del análisis multiresolución implican que la función φ determina los espacios \mathbf{V}_l unívocamente. Sin embargo, solamente ciertas funciones φ pueden generar el análisis multiresolución.

Partiendo de la determinación de los espacios \mathbf{V}_l , se definen a los espacios \mathbf{W}_l como los complementos ortogonales de \mathbf{V}_l con respecto a \mathbf{V}_{l+1} , es decir [10, p. 164]:

$$\mathbf{W}_l := \{f \in \mathbf{V}_{l+1} | \langle f, g \rangle = 0, \forall g \in \mathbf{V}_l\} \quad (\text{ec. 3.1})$$

La importancia de los espacios \mathbf{W}_l recae en el hecho de que una base onduleta $\left\{D_{\frac{1}{2}}^l T_k(\psi)\right\}_{l,k \in \mathbb{Z}}$ para $L^2(\mathbb{R})$ consistirá en una función $\psi \in \mathbf{W}_0$ que genere la base ortonormal $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para \mathbf{W}_0 .

Como se mencionó anteriormente, solamente ciertas funciones φ generan el análisis multiresolución. Las condiciones necesarias establecen que [10, p. 168]:

Función Escalante (def. 3.3)

Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ una función que genera análisis multiresolución, entonces:

(i) $\inf_{\gamma \in [-\epsilon, \epsilon]} |\hat{\varphi}(\gamma)| > 0$, para alguna $\epsilon > 0$;

(ii) φ es una función *escalante* o función refinable, es decir, existe una función $H_0 \in L^2(0,1)$ de periodo 1 tal que:

$$\hat{\varphi}(2\gamma) = H_0(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma), \gamma \in \mathbb{R}$$

(iii) $\{T_k(\varphi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal.

En la condición (i) de la (def. 3.3) y en lo subsecuente, el circunflejo en la notación $\hat{\varphi}(\gamma)$ hace referencia a la transformada de Fourier en de $\varphi(x)$. Nótese también que x expresa la variable temporal y γ su contraparte frecuencial.

3.2 B-SPLINES

En el campo del análisis funcional, el término de *spline* hace referencia al conjunto de funciones que se definen por segmentos mediante polinomios. Este concepto es asimilado por la teoría de onduletas para dar lugar a las denominadas onduletas *spline*. Éstas son construidas a partir de la

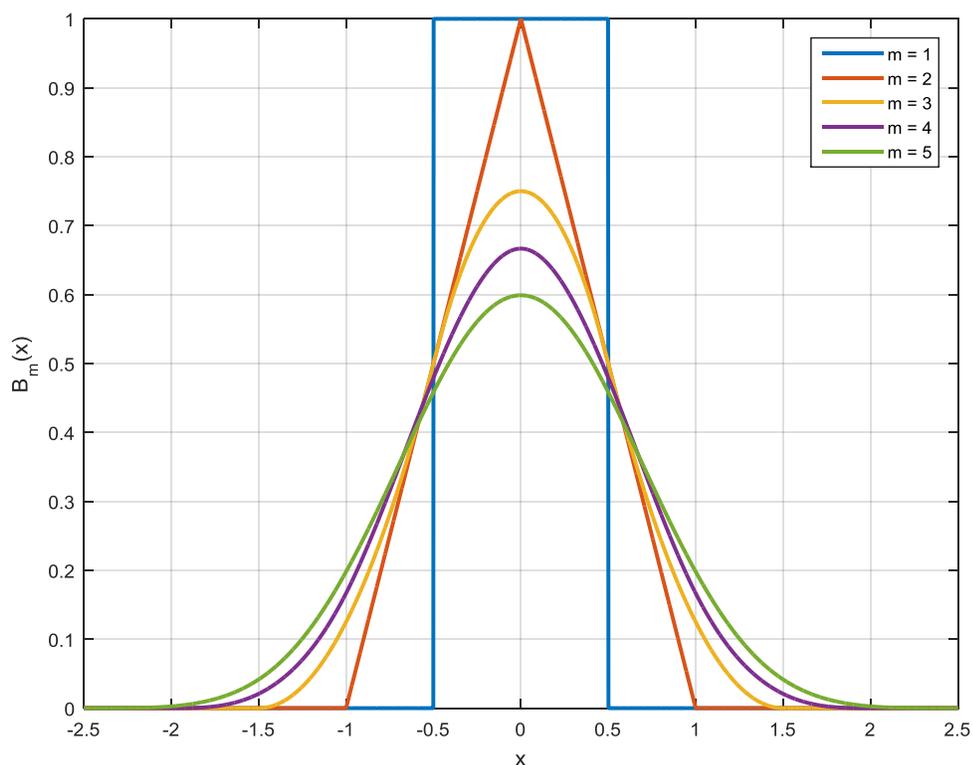


Figura 3.1 *B-spline* centrados $B_m(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

especificación de un *B-spline*. La onduleta Haar, que es una de las primeras onduletas propuestas, parte de un *B-spline* de orden 1.

El *B-spline* N_1 se define [10, p. 204]:

$$N_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}, x \in \mathbb{R} \quad (\text{ec. 3.2})$$

Una vez establecido el m -ésimo *B-spline* N_m donde $m \in \mathbb{N}$, para órdenes superiores se tiene que:

$$N_{m+1}(x) := (N_m * N_1)(x), x \in \mathbb{R} \quad (\text{ec. 3.3})$$

Se dice que N_m es de orden m . El espectro en frecuencia de $N_1(x)$ es:

$$\hat{N}_1(\gamma) := e^{-j\pi\gamma} \text{sinc } \gamma \quad (\text{ec. 3.4})$$

y, aplicando la propiedad de convolución en el tiempo de la transformada de Fourier, se obtiene que:

$$\hat{N}_m(\gamma) := (e^{-j\pi\gamma} \text{sinc } \gamma)^m \quad (\text{ec. 3.5})$$

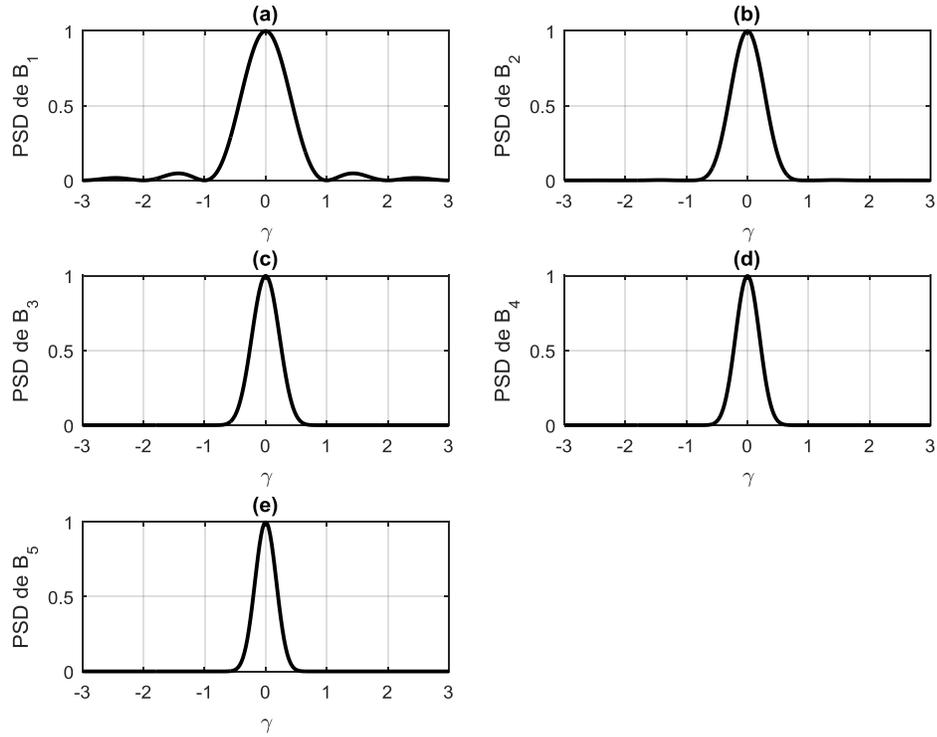


Figura 3.2 Densidad espectral de *B-spline* centrados $B_m(x)$ para (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, (d) $m = 4$ y (e) $m = 5$.

Una variante de los *B-splines* son aquellos que se encuentran centrados en el eje horizontal. Los *B-splines* centrados B_m se obtienen mediante la traslación de N_m [10, p. 208]:

$$B_m(x) := T_{-\frac{m}{2}}N_m(x) = N_m\left(x + \frac{m}{2}\right) \quad (\text{ec. 3.6})$$

Similarmente, la obtención de $B_m(x)$ y $\hat{B}_m(\gamma)$ resulta de:

$$B_m(x) := (B_m * B_1)(x), x \in \mathbb{R} \quad (\text{ec. 3.7})$$

y, en el dominio frecuencial:

$$\hat{B}_m(\gamma) := (\text{sinc } \gamma)^m \quad (\text{ec. 3.8})$$

En las figuras 3.1 y 3.2, se observan las gráficas de los primero 5 órdenes de *B-splines* centrados en dominio del tiempo y la frecuencia, respectivamente. En la tabla A.1 del apéndice A.1 están disponibles las expresiones analíticas para los *B-splines* centrados de los primeros 5 órdenes.

3.3 ONDULETAS BATTLE-LEMARIÉ

Para la obtención de la onduleta ψ a partir de un B -spline, se verifica la validez del B -spline, N_m ó B_m , como función escalante. Sin embargo, la condición (iii) de los requerimientos para una función escalante (def. 3.3) no se cumple para valores de $m > 1$, debido que el producto interno $\langle T_k\varphi(x), T_l\varphi(x) \rangle \neq 0$ para las traslaciones enteras más próximas. En la figura 3.3, se muestra el traslape entre el B -spline centrado de orden 3 y las dos primeras traslaciones enteras a la derecha y a la izquierda. El traslape entre translaciones provoca la pérdida de ortogonalidad entre ellas. Para superar esta situación se introduce la función:

$$G(\gamma) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_m(\gamma + k)|^2 \quad (\text{ec. 3.9})$$

con la que se puede obtener la función escalante normalizada:

$$\hat{\varphi}^\dagger(\gamma) := \frac{\hat{N}_m(\gamma)}{\sqrt{G(\gamma)}} \quad (\text{ec. 3.10})$$

En la definición de $G(\gamma)$ de la (ec. 3.9) se indica el B -spline N_m pero también se puede emplear un B -spline desfasado obteniéndose la misma expresión final. A manera de demostración, propóngase un B -spline descentrado:

$$D_m(x, \Delta) = B_m(x - m\Delta) \quad (\text{ec. 3.11})$$

donde $m\Delta$ representa el desfaseamiento con respecto al origen del B -spline. Entonces, $D_m = B_m$ si $\Delta = 0$, y $D_m = N_m$ si $\Delta = 1/2$. En el dominio frecuencial, se tiene que:

$$\hat{D}_m(\gamma, \Delta) = (e^{-j2\pi\gamma\Delta} \text{sinc } \gamma)^m \quad (\text{ec. 3.12})$$

Sustituyendo la (ec. 3.12) en la (ec. 3.9) lleva al siguiente desarrollo algebraico:

$$\begin{aligned} G(\gamma) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{D}_m(\gamma + k, \Delta)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| (e^{-j2\pi(\gamma+k)\Delta} \text{sinc}(\gamma + k))^m \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e^{-j4\pi(\gamma+k)m\Delta}| \cdot |\text{sinc}^{2m}(\gamma + k)| \end{aligned}$$

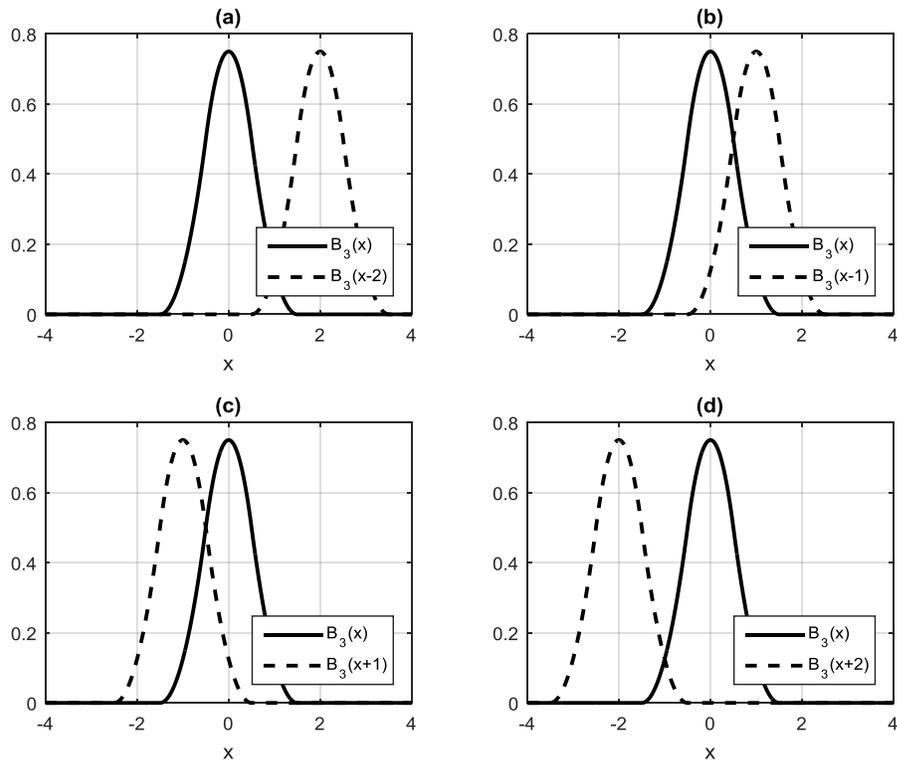


Figura 3.3 *B-spline* centrado de orden 3 $B_3(x)$ y sus traslaciones enteras $B_3(x-k)$ para (a) $k = 2$, (b) $k = 1$, (c) $k = -1$ y (d) $k = -2$.

(ec. 3.13a)

El término $|e^{-j4\pi(\gamma+k)m\Delta}| = 1$. Se omite del desarrollo y con ello se descarta efecto del desfase sobre la función $G(\gamma)$. Luego,

$$\begin{aligned}
 G(\gamma) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{sinc}^{2m}(\gamma + k)| \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin^{2m}(\pi\gamma + \pi k)}{(\pi\gamma + \pi k)^{2m}} \right| \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{[\sin(\pi\gamma) \cos(\pi k) + \cos(\pi\gamma) \sin(\pi k)]^{2m}}{(\pi\gamma + \pi k)^{2m}} \right| \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin^{2m}(\pi\gamma)}{(\pi\gamma + \pi k)^{2m}} \right| \\
 &= |\sin^{2m}(\pi\gamma)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{(\pi\gamma + \pi k)^{2m}} \right| \quad (\text{ec. 3.13b})
 \end{aligned}$$

Se ha aplicado la identidad $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$, también las consideraciones de que $\sin(\pi k) = 0$ y $\cos^{2m}(\pi k) = 1$ para $k \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Para resolver la serie en la expresión última de (ec. 3.13b), se hace uso de la

identidad $\cot(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+\pi k}$ y de las derivadas de la función cotangente [3, p. 88]. Se resuelve en (ec. 3.13b) que:

$$G(\gamma) = |\sin^{2m}(\pi\gamma)| \frac{-1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{d(\pi\gamma)^{2m-1}} \cot(\pi\gamma) \quad (\text{ec. 3.13c})$$

La $(2m-1)$ -ésima derivada (orden de derivada impar) de la función cotangente da como resultado un polinomio trigonométrico de potencias pares de la misma función cotangente cuyos coeficientes son todos negativos. Sin embargo, para determinar la magnitud de los coeficientes es necesario hacer un cálculo numérico. O bien, referirse a los resultados en los artículos de Kölbig [12] y Hoffman [13]. En la tabla A.2 del apéndice A.2, se encuentran las derivadas necesarias para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 . Entonces:

$$\begin{aligned} G(\gamma) &= -\frac{|\sin^{2m}(\pi\gamma)|}{(2m-1)!} \sum_{k=0}^m a_k \cot^{2k}(\pi k) \\ &= -\frac{|\sin^{2m}(\pi\gamma)|}{\sin^{2m}(\pi\gamma)(2m-1)!} \sum_{k=0}^m a_k \frac{\sin^{2m}(\pi\gamma) \cos^{2k}(\pi k)}{\sin^{2k}(\pi\gamma)} \\ &= -\frac{1}{(2m-1)!} \sum_{k=0}^m a_k \sin^{2(m-k)}(\pi\gamma) \cos^{2k}(\pi k) \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.13d})$$

Luego, aplicando identidades trigonométricas, se obtiene la función $G(\gamma)$ expresada como serie de potencias pares de coseno, o bien, de serie de cosenos de ángulos dobles; siendo ésta última una forma más útil de expresarla. Lo anterior, expresado algebraicamente:

$$G(\gamma) = \sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos^{2k}(\pi\gamma) \quad (\text{ec. 3.14a})$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(2k\pi\gamma) \quad (\text{ec. 3.14b})$$

En las tablas A.3 y A.4 del apéndice A.3, se indican estas series de manera desarrollada. En la (ec. 3.14b), se observa que la función $G(\gamma)$ es una función en la frecuencia que es par, es periódica y su periodo es unitario. Más aún, el término $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ de la (ec. 3.10) conserva todas estas mismas propiedades.

Encontrar la transformada inversa de Fourier de $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ para pasar del dominio frecuencial al temporal resulta analíticamente complicado. Sin embargo, basándose en las características mencionadas, es válido expresar ese término como una serie trigonométrica de Fourier. Los coeficientes de los elementos de

la serie son susceptibles de ser calculados de manera numérica. Más aún, los coeficientes b_n de la serie trigonométrica, refiérase a la (def. 2.1), son todos nulos. En consecuencia, $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ es expresable como una serie de cosenos:

$$\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}} = \frac{g_{m,0}^\dagger}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{m,k}^\dagger \cos 2\pi k\gamma) \quad (\text{ec. 3.15})$$

Los coeficientes $g_{m,k}^\dagger$ están disponibles en la tabla A.5 del apéndice A.3. Entonces, sustituyendo (ec. 3.15) en (ec. 3.10) y remplazando el *B-spline* N_m por D_m , resulta en:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^\dagger(\gamma) &= \frac{\hat{D}_m(\gamma, \Delta)}{\sqrt{G(\gamma)}} \\ &= \hat{D}_m(\gamma, \Delta) \cdot \left[\frac{g_{m,0}^\dagger}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{m,k}^\dagger \cos 2\pi k\gamma) \right] \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.16})$$

donde $g_{m,k}^\dagger$ corresponden a los coeficientes a_n de la serie trigonométrica con periodo $T = 1$. Aplicando la transformada inversa de Fourier y la propiedad de convolución en el tiempo da como resultado que:

$$\begin{aligned} \varphi^\dagger(x) &= D_m(x, \Delta) * \left[\frac{g_{m,0}^\dagger}{2} \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_{m,k}^\dagger \cdot \frac{1}{2} (\delta(x-k) + \delta(x+k)) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot D_m(x, \Delta) * \left[g_{m,0}^\dagger \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{m,k}^\dagger \cdot (\delta(x-k) + \delta(x+k)) \right] \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.17})$$

donde el símbolo $*$ denota la operación de convolución. Se observa en (ec. 3.17) que la función escalante normalizada en el tiempo $\varphi^\dagger(x)$ resulta de la sumatoria de versiones trasladadas y ponderadas del *B-spline* original. Ahora bien, el número de elementos coseno de la serie, y por lo tanto, de las versiones trasladadas de la sumatoria en el tiempo, es estrictamente infinito. Sin embargo, su decaimiento es rápido. En las figuras 3.4 y 3.5, se muestra la función escalante normalizada φ^\dagger en el tiempo y su densidad espectral, respectivamente.

Una vez obtenida la función escalante normalizada $\varphi^\dagger(x)$ que garantiza el análisis multiresolución, procedemos a encontrar la función H_0 de la (def. 3.3) que satisface la ecuación:

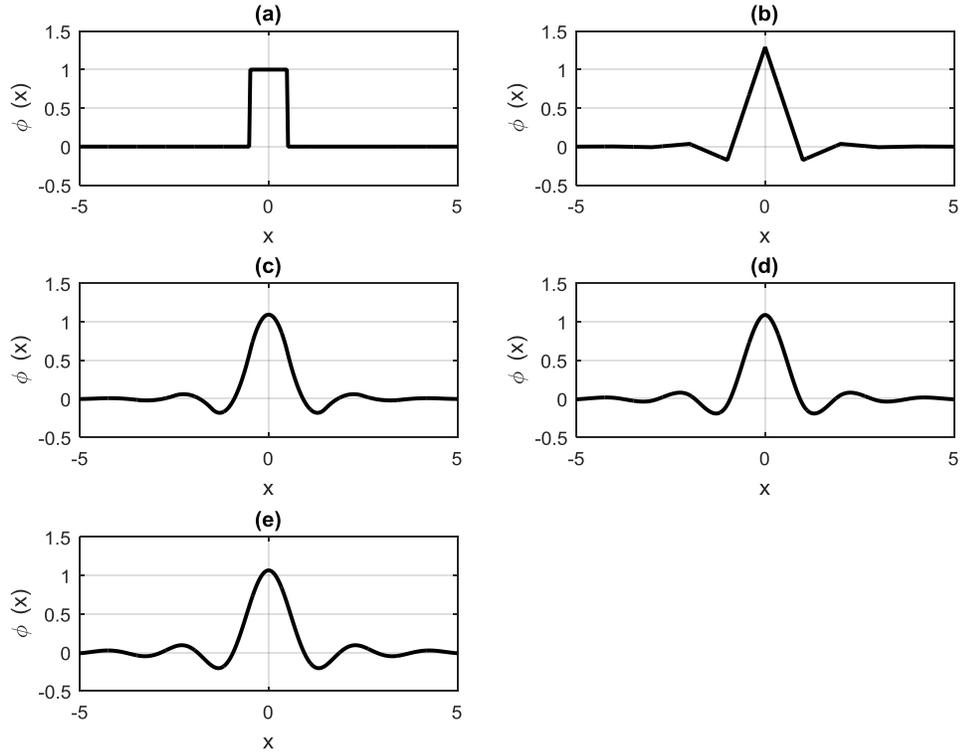


Figura 3.4 Función escalante normalizada en el tiempo $\phi^\dagger(x)$ de orden (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, (d) $m = 4$ y (e) $m = 5$.

$$\hat{\phi}(2\gamma) = H_0(\gamma)\hat{\phi}(\gamma) \quad (\text{ec. 3.18a})$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j2\pi k\gamma} \hat{\phi}(\gamma), \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (\text{ec. 3.18b})$$

Despejando $H_0(\gamma)$ en (ec. 3.18a) y sustituyendo a la función escalante por su versión normalizada, se encuentra que:

$$H_0(\gamma) = \frac{\hat{\phi}^\dagger(2\gamma)}{\hat{\phi}^\dagger(\gamma)} \quad (\text{ec. 3.19a})$$

Sustituyendo $\hat{\phi}^\dagger(\gamma)$ en (ec. 3.19a) por (ec. 3.10) y reemplazando N_m por D_m , se tiene:

$$\begin{aligned} H_0(\gamma) &= \frac{\hat{D}_m(2\gamma, \Delta)}{\sqrt{G(2\gamma)}} \cdot \frac{\sqrt{G(\gamma)}}{\hat{D}_m(\gamma, \Delta)} \\ &= \frac{(e^{-j4\pi\gamma\Delta} \text{sinc}(2\gamma))^m}{(e^{-j2\pi\gamma\Delta} \text{sinc}(\gamma))^m} \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma)}{G(2\gamma)}} \\ &= \left(e^{-j2\pi\gamma\Delta} \frac{\text{sinc}(2\pi\gamma)}{2\pi\gamma} \cdot \frac{\pi\gamma}{\text{sinc}(\pi\gamma)} \right)^m \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma)}{G(2\gamma)}} \end{aligned}$$

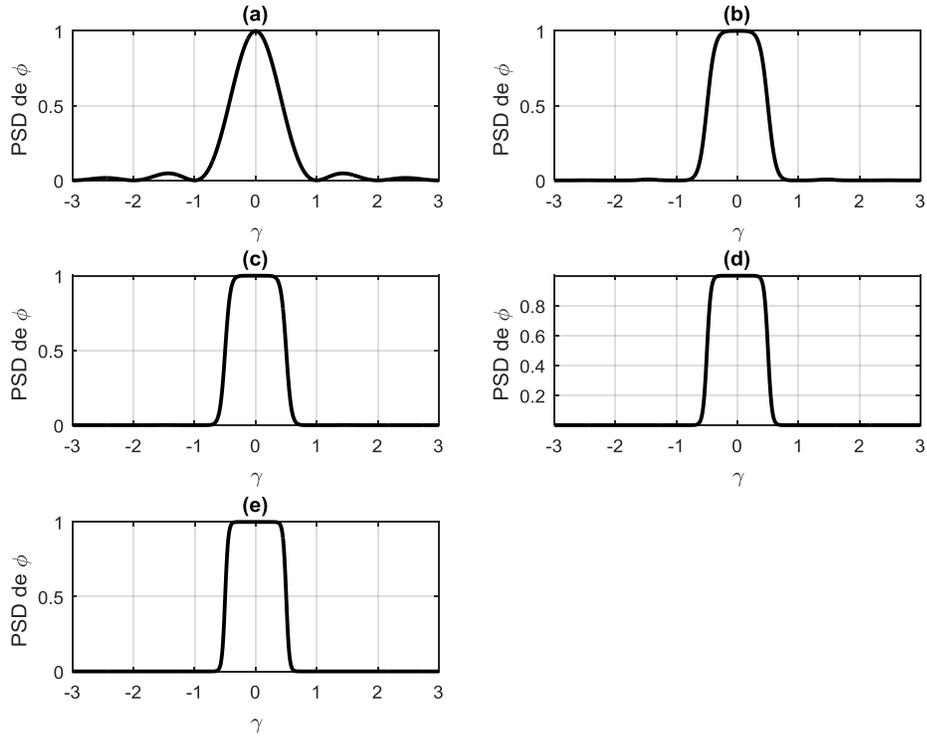


Figura 3.5 Densidad espectral de la función escalante normalizada $\varphi^\dagger(x)$ para (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, (d) $m = 4$ y (e) $m = 5$.

$$\begin{aligned}
 &= \left(e^{-j2\pi\gamma\Delta} \frac{2 \cos(\pi\gamma) \sin(\pi\gamma)}{2\pi\gamma} \cdot \frac{\pi\gamma}{\sin(\pi\gamma)} \right)^m \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma)}{G(2\gamma)}} \\
 &= e^{-j2\pi\gamma\Delta m} \cdot \cos^m(\pi\gamma) \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma)}{G(2\gamma)}} \quad (\text{ec. 3.19b})
 \end{aligned}$$

En (ec. 3.18b), se denota a $H_0(\gamma)$ como una sumatoria de exponenciales complejas. La expresión final de la (ec. 3.19b) es expresable por medio de cosenoidales, y por lo tanto, de exponenciales complejas también.

La función H_0 fue propuesta con el fin de establecer el análisis multiresolución y definir, de manera indirecta, a la función escalante φ . Similarmente, se propone a la función H_1 para definir a la función onduleta ψ . Entonces:

$$H_1(\gamma) = \overline{H_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)} e^{-j2\pi\gamma} \quad (\text{ec. 3.20a})$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{j2\pi k\gamma} \quad (\text{ec. 3.20b})$$

y en el dominio temporal:

$$H_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \delta(x - k) \quad (\text{ec. 3.21})$$

Por otro lado, la función onduleta:

$$\hat{\psi}(2\gamma) = H_1(\gamma) \hat{\varphi}(\gamma) \quad (\text{ec. 3.22a})$$

$$\hat{\psi}(\gamma) = H_1\left(\frac{\gamma}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (\text{ec. 3.22b})$$

Luego, aplicando transformada inversa de Fourier a (ec. 3.22a):

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{\psi}(2\gamma)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(\gamma) \hat{\varphi}(\gamma)\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1/2}{1/2} \hat{\psi}\left(\frac{\gamma}{1/2}\right)\right\} = H_1(x) * \varphi(x)$$

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}x\right) = H_1(x) * \varphi(x)$$

$$\psi(x) = 2H_1(2x) * \varphi(2x) \quad (\text{ec. 3.23})$$

Como se indica en (ec. 3.21), $H_1(x)$ es un tren de funciones delta ponderadas. En la (ec. 3.23), se observa que la función escalante se convoluciona con cada una de las funciones delta que conforman a $H_1(x)$, creando versiones trasladadas y ponderadas de sí misma que se superponen para dar lugar a la función onduleta.

Enseguida, se procede a encontrar la función H_1 para un B -spline de m -ésimo orden. Sustituyendo $H_0(\gamma)$ en (ec. 3.20) por (ec. 3.19b), se tiene:

$$\begin{aligned} H_1(\gamma) &= e^{-j2\pi(\gamma+\frac{1}{2})\Delta m} \cdot \cos^m\left(\pi\gamma + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma+\frac{1}{2})}{G(2\gamma+1)}} \cdot e^{-j2\pi\gamma} \\ &= e^{j2\pi(\gamma+\frac{1}{2})\Delta m} \cdot \cos^m\left(\pi\gamma + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma+\frac{1}{2})}{G(2\gamma+1)}} \cdot e^{-j2\pi\gamma} \\ &= e^{j2\pi\gamma\Delta m} \cdot e^{j\pi\Delta m} \cdot (-\sin(\pi\gamma))^m \cdot \sqrt{\frac{G(\gamma+\frac{1}{2})}{G(2\gamma+1)}} \cdot e^{-j2\pi\gamma} \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.24a})$$

Sustituyendo $G(\gamma)$ en (ec. 3.24a) por (ec. 3.14b):

$$\begin{aligned} H_1(\gamma) &= e^{j2\pi\gamma\Delta m} \cdot (-\sin(\pi\gamma))^m \cdot \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(2k\pi(\gamma+\frac{1}{2}))}{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(2k\pi(2\gamma+1))}} \cdot e^{j2\pi\gamma(\Delta m-1)} \\ &= e^{j\pi\Delta m} \cdot (-\sin(\pi\gamma))^m \cdot \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(2k\pi\gamma+k\pi)}{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(4k\pi\gamma+2k\pi)}} \cdot e^{j2\pi\gamma(\Delta m-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{j\pi\Delta m} \cdot (-\sin(\pi\gamma))^m \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k}(-1)^k \cos(2k\pi\gamma)}{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(4k\pi\gamma)}} \cdot e^{j2\pi\gamma(\Delta m-1)} \\
&= e^{j\pi\Delta m} \cdot (-\sin(\pi\gamma))^m \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k}(-1)^k \cos(2k\pi\gamma)}{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(4k\pi\gamma)}} \cdot e^{j2\pi\gamma(\Delta m-1)}
\end{aligned}
\tag{ec. 3.24b}$$

La expresión en el lado derecho de (ec. 3.24b) se simplifica analizando las propiedades de los términos involucrados. Para ello, se propone expresar (ec. 3.24b) por medio de las funciones auxiliares como:

$$H_1(\gamma) = A(\gamma) \cdot B(\gamma) \cdot C(\gamma) \tag{ec. 3.24c}$$

donde $A(\gamma) = e^{j\pi\Delta m}$, $B(\gamma) = (-\sin(\pi\gamma))^m \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k}(-1)^k \cos(2k\pi\gamma)}{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(4k\pi\gamma)}}$ y $C(\gamma) = e^{j2\pi\gamma(\Delta m-1)}$. El primer término $A(\gamma)$ es una cantidad unitaria compleja dependiente de Δ . El siguiente término $B(\gamma)$ corresponde a una función periódica que es impar de periodo igual a 2 si m es impar; o es par de periodo unitario si m es par. Por último, $C(\gamma)$ es un término que expresa un desplazamiento en el dominio del tiempo. Se verá más adelante como este desplazamiento se refleja en la obtención de la función onduleta.

Regresando al término $B(\gamma)$, resulta conveniente expresar este complicado término por medio de una serie compleja de Fourier; refiérase a la (def. 2.2). De esta manera, se establece que:

$$(-\sin(\pi\gamma))^m \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k}(-1)^k \cos(2k\pi\gamma)}{\sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(4k\pi\gamma)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} e^{j\pi k \gamma}
\tag{ec. 3.25}$$

donde $h_{m,k}$ corresponde a los coeficientes c_n de la serie compleja de Fourier de periodo $T = 2$. Se anticipa al lector de que es necesario realizar la transformada inversa de Fourier para pasar del dominio frecuencial al temporal. Sin embargo, en el caso de las funciones de orden m impar los coeficientes $h_{m,k}$ son complejos; más aún, son puramente imaginarios ya que $B(\gamma)$ se trata de una expresión impar. En consecuencia, al aplicar la transformada inversa de Fourier, obtendremos funciones en el tiempo perteneciente a los complejos.

Se propone utilizar $A(\gamma)$ como un factor de corrección para volver real los resultados imaginarios, sin afectarlos cuando éstos sean puramente reales,

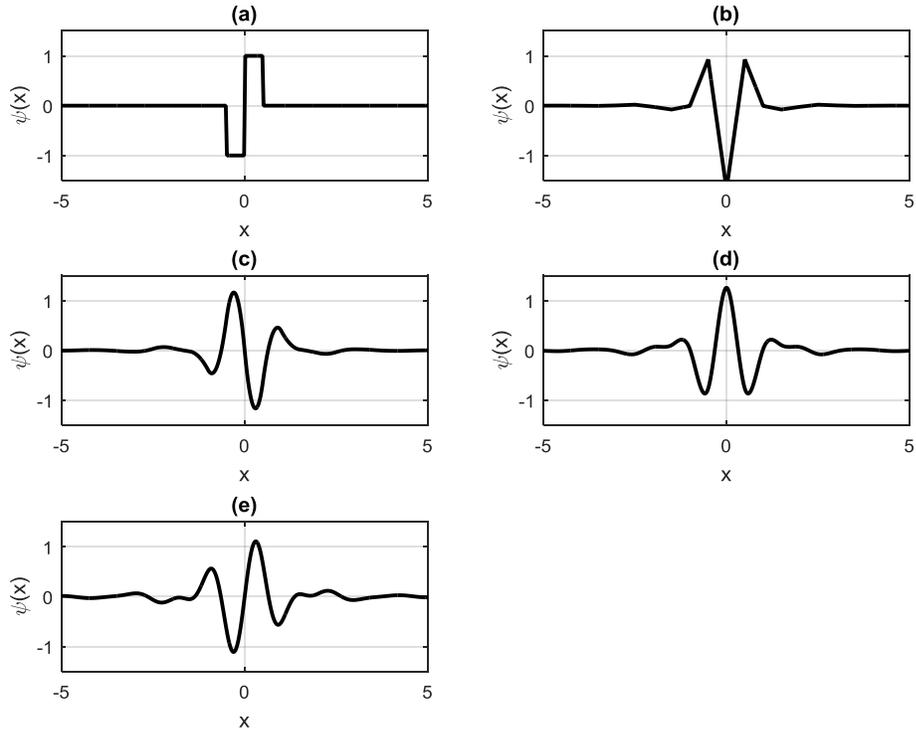


Figura 3.6 Función onduleta en el tiempo $\psi(x)$ para (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, (d) $m = 4$ y (e) $m = 5$.

independientemente del valor de m . Tal efecto se logra escogiendo el valor de $\Delta = \frac{1}{2}$, es decir, se utilizarán los *B-spline* no centrados N_m . Nótese que $e^{j\pi\Delta m} = e^{j\frac{\pi m}{2}} = j^m$ y $e^{j2\pi\gamma(\Delta m - 1)} = e^{j2\pi\gamma(\frac{m}{2} - 1)}$. Introduciendo estos resultados en la (ec. 3.24c) queda que:

$$H_1(\gamma) = j^m \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} e^{j\pi k \gamma} \cdot e^{j2\pi\gamma(\frac{m}{2} - 1)} \quad (\text{ec. 3.26})$$

Por otro lado, de la (ec. 3.16):

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^\dagger(\gamma) &= \hat{D}_m\left(\gamma, \frac{1}{2}\right) \cdot \left[\frac{g_{m,0}^\dagger}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{m,k}^\dagger \cos 2\pi k \gamma) \right] \\ &= \hat{B}_m(\gamma) \cdot e^{-j\pi\gamma m} \cdot \left[\frac{g_{m,0}^\dagger}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{m,k}^\dagger \cos 2\pi k \gamma) \right] \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.27a})$$

Definiendo a $\hat{B}_m^\dagger(\gamma)$ como el *B-spline* centrado y normalizado, la (ec. 3.27a) queda como:

$$\hat{\varphi}^\dagger(\gamma) = \hat{B}_m^\dagger(\gamma) \cdot e^{-j\pi\gamma m} \quad (\text{ec. 3.27b})$$

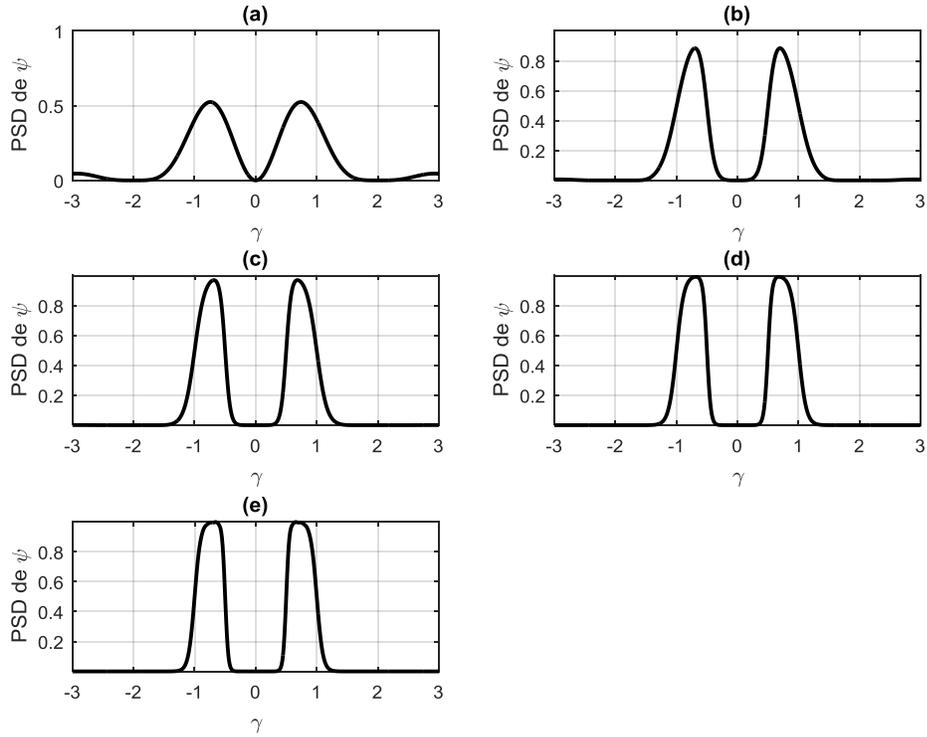


Figura 3.7 Densidad espectral de la función onduleta $\psi(x)$ para (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, (d) $m = 4$ y (e) $m = 5$.

Sustituyendo la (ec. 3.27b) para $\hat{\psi}^\dagger(\gamma)$ en (ec. 3.22a):

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(2\gamma) &= \hat{B}_m^\dagger(\gamma) \cdot e^{-j\pi\gamma m} \cdot j^m \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} e^{j\pi k\gamma} \cdot e^{j2\pi\gamma(\frac{m}{2}-1)} \\ &= \hat{B}_m^\dagger(\gamma) \cdot j^m \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} e^{j\pi k\gamma} \cdot e^{-j2\pi\gamma}\end{aligned}\quad (\text{ec. 3.28})$$

Aplicando transformada inversa,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{\psi}(2\gamma)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{B}_m^\dagger(\gamma) \cdot j^m \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} e^{j\pi k\gamma} \cdot e^{-j2\pi\gamma}\} \\ \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\hat{\psi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right\} &= j^m \cdot B_m^\dagger(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{2} - 1\right) \\ \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}x\right) &= j^m \cdot B_m^\dagger(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{2} - 1\right) \\ \psi\left(\frac{1}{2}x\right) &= 2j^m \cdot B_m^\dagger(x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{2} - 1\right) \\ \psi(x) &= 2j^m \cdot B_m^\dagger(2x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{4} - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}\quad (\text{ec. 3.29})$$

Cabe recordar que la anterior ecuación determina la función onduleta madre, $\psi(x)$, que corresponde a la función escalante normalizada a partir de un *B-spline* de orden m no centrado N_m . En las figuras 3.6 y 3.7, se aprecian las funciones

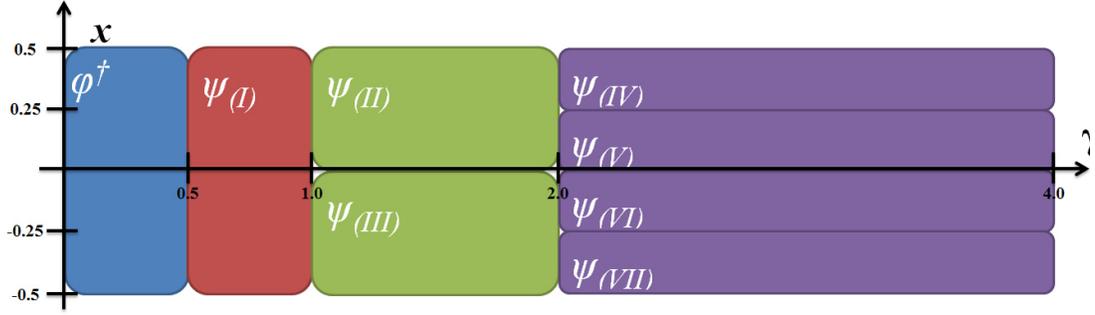


Figura 3.8 Localización en el plano tiempo-frecuencia de los elementos de la base de onduletas obtenidas a partir de *B-Spline* centrado.

onduleta madre correspondientes a los *B-splines* N_m para los órdenes $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 . Ahora bien, la operación de traslación $T_{\frac{1}{2}}$ aplicada sobre dicha función onduleta madre resulta en la onduleta madre para la función escalante normalizada de un *B-Spline* centrado B_m . Aplicando operadores de traslación y dilatación sobre la ecuación (ec. 3.29) se obtiene una familia de onduletas que conforman una base ortogonal.

$$\varphi^\dagger(x) = \frac{1}{2} B_m(x) * [g_{m,0}^\dagger \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{m,k}^\dagger (\delta(x-k) + \delta(x+k))] \quad (\text{ec. 3.30a})$$

$$\psi_{(I)}(x) = 2j^m B_m^\dagger(2x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{4}\right) \quad (\text{ec. 3.30b})$$

$$\psi_{(II)}(x) = 2^{\frac{3}{2}} j^m B_m^\dagger(4x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{8} - \frac{1}{4}\right) \quad (\text{ec. 3.30c})$$

$$\psi_{(III)}(x) = 2^{\frac{3}{2}} j^m B_m^\dagger(4x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{8} + \frac{1}{4}\right) \quad (\text{ec. 3.30d})$$

$$\psi_{(IV)}(x) = 4j^m B_m^\dagger(8x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{16} - \frac{3}{8}\right) \quad (\text{ec. 3.30e})$$

$$\psi_{(V)}(x) = 4j^m B_m^\dagger(8x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{16} - \frac{1}{8}\right) \quad (\text{ec. 3.30f})$$

$$\psi_{(VI)}(x) = 4j^m B_m^\dagger(8x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{16} + \frac{1}{8}\right) \quad (\text{ec. 3.30g})$$

$$\psi_{(VII)}(x) = 4j^m B_m^\dagger(8x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{16} + \frac{3}{8}\right) \quad (\text{ec. 3.30h})$$

donde $\varphi^\dagger(x)$ es la función escalante normalizada y centrada; $\psi_{(I)}$ es la onduleta madre; $\psi_{(II)}$, $\psi_{(III)}$ y son onduletas de segunda generación; $\psi_{(IV)}$, $\psi_{(V)}$, $\psi_{(VI)}$ y $\psi_{(VII)}$ son onduletas de tercera generación. En la figura 3.8, se observa la ubicación en el plano tiempo-frecuencia de esta base de onduletas.

CAPÍTULO 4

ONDULETA BL COMO BASE DE SEÑALES

Como resultado del capítulo anterior, se obtuvo un conjunto de ecuaciones que, complementadas con un conjunto de coeficientes de ponderación, permiten la obtención numérica de las funciones escalante y onduleta BL. Esto para los primeros cinco órdenes m de *B-spline*. La característica de ortonormalidad de este conjunto de funciones hace de él un conjunto de señales propicio para crear una base vectorial. Sin embargo, el desarrollo realizado y los resultados obtenidos pertenecen al ámbito analítico. La creación de una base vectorial a partir de los resultados anteriores requiere definir parámetros de diseño. En el presente capítulo, se revisan las consideraciones necesarias para crear una base vectorial a partir de las funciones escalante φ y onduleta ψ de la onduleta BL correspondiente a un *B-spline* dado. Lo anterior se traduce en el establecimiento de parámetros de diseño pertinentes tales como la selección del orden de onduleta BL, el número de funciones onduletas que conformarán la base, la redefinición del intervalo de soporte y la obtención de su equivalente en tiempo discreto. Adicionalmente, se estudiará la expansión de la base por medio de la operación de modulación.

En la sección 4.1, se define el alcance o número de funciones onduletas que conformarán la base. Además, se analiza el efecto de redefinir y hacer finito el intervalo de soporte de las funciones analíticas de la base. Posteriormente, en la sección 4.2, se propone la expansión por modulación de la base con el objetivo de extenderla hasta un número fijo de 16 elementos. Finalmente, en la sección 4.3, se introduce el factor de corrección requerido para migrar del

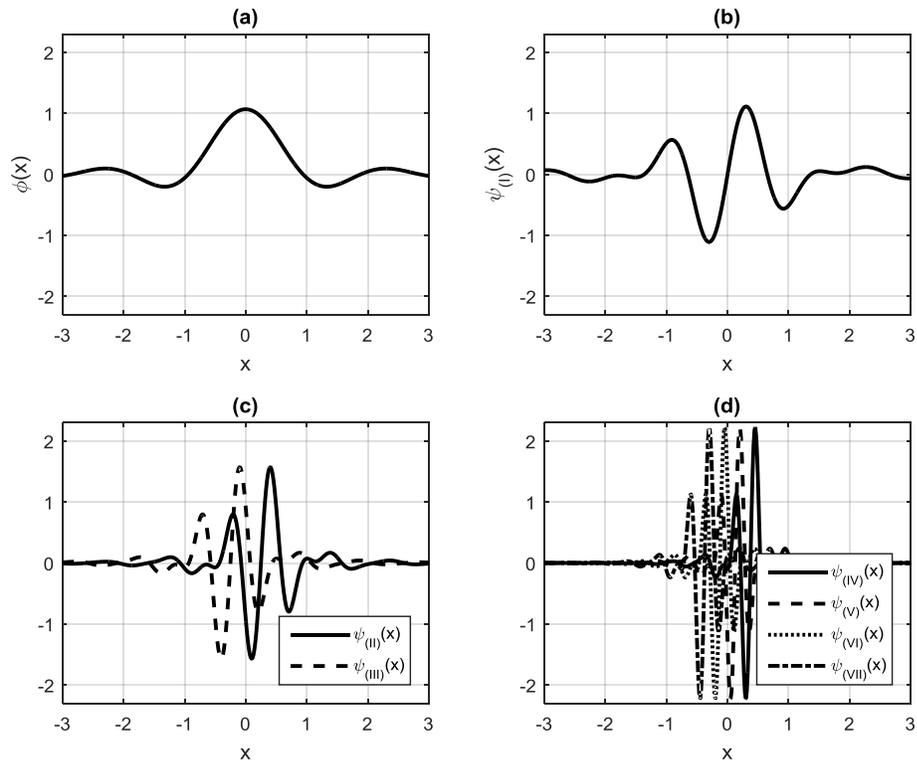


Figura 4.1 Funciones de la base de onduleta BL correspondiente a un *B-spline* de orden $m = 5$.
 (a) Función escalante, (b) función onduleta madre, (c) funciones onduletas hijas de primera generación y (d) funciones onduletas hijas de segunda generación.

ámbito continuo al discreto y se verifica la ortonormalidad de la base vectorial resultante.

4.1 ALCANCE DE ONDULETAS BASE Y DELIMITACIÓN DEL SOPORTE

En el capítulo anterior, se obtuvieron las funciones escalante $\phi(x)$ y onduleta $\psi(x)$ a partir de los *B-splines* de orden $m = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Las funciones escalante ϕ^\dagger , onduleta madre $\psi_{(I)}$, y onduletas hijas de primera generación $\psi_{(II)}$ y $\psi_{(III)}$, conforman una base ortonormal de 4 elementos. Es posible incluir a las funciones onduletas de segunda generación $\psi_{(IV)}$, $\psi_{(V)}$, $\psi_{(VI)}$ y $\psi_{(VII)}$, para conjuntar 8 elementos en la base. En la figura 4.1, se grafican las 8 funciones

correspondientes a este caso. Se define el parámetro adimensional P para indicar la extensión de la base de onduletas como el conjunto $\Phi = \{\varphi^\dagger, \psi_{(I)}, \psi_{(II)}, \dots, \psi_{(P-I)}\}$. Se sugieren los valores de $P = \{1, 2, 4, 8 \text{ y } 16\}$ para aprovechar todas las funciones pertenecientes a las escalas comprendidas por el parámetro.

Un aspecto importante que no se debe perder de vista es que, de manera estricta, el soporte de las onduletas ortogonales es el intervalo infinito $I \in (-\infty, \infty)$. Esto es un gran inconveniente desde el punto de vista de implementación, pues las funciones de la base deberán traducirse a vectores numéricos finitos para hacer posible la realización de las operaciones de proyección de símbolos e inferencia de los datos transmitidos.

Es entonces necesario redefinir el intervalo de soporte al de un intervalo finito sin afectar la propiedad de ortonormalidad de la base. Convenientemente, en el dominio temporal, la energía de estas funciones se concentra en el origen, por lo que resulta adecuado delimitar el intervalo de soporte al intervalo finito $I \in \left(-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}\right)$, donde S es el intervalo de soporte en unidades temporales, en *seg* por ejemplo. Con el propósito de evaluar el efecto provocado por esta delimitación, se definen a continuación un conjunto de indicadores que proporcionan la perspectiva necesaria para ello. Se evalúan por separado la propiedad de normalidad y la de ortogonalidad. La evaluación se realiza sobre la base de un *B-Spline* de orden $m = 5$, ya que presenta características más idóneas, principalmente en el dominio frecuencial. Se profundizará en este aspecto más adelante en este mismo capítulo.

Primeramente, la propiedad de normalidad, es decir, que la norma de cada elemento de la base sea unitaria, en función de la delimitación del intervalo de soporte $I \in (-x, x)$ se evalúa mediante el indicador $C_{(i)}(x)$. Se define $C_{(i)}(x)$ como:

$$C_{(0)}(x) = \sqrt{\int_{-x}^x \varphi^{\dagger 2}(t) dt} \quad (\text{ec. 4.1a})$$

$$C_{(p)}(x) = \sqrt{\int_{-x}^x \psi_{(p)}^2(t) dt} \quad (\text{ec. 4.1b})$$

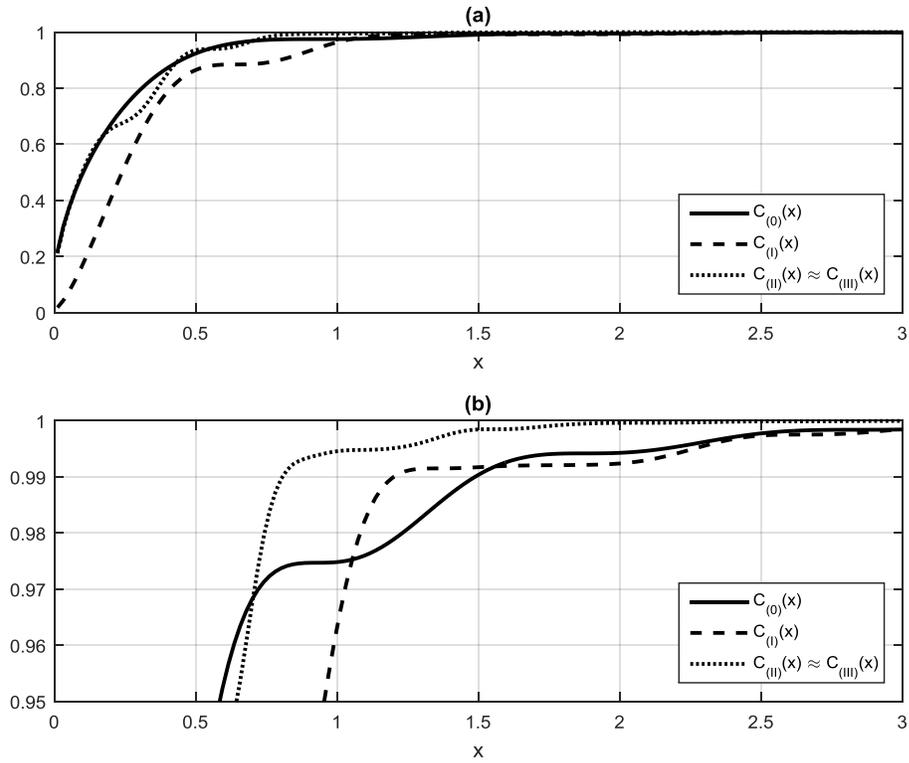


Figura 4.2 Norma de las funciones de la base onduleta para $P = 4$ con soporte redefinido en el intervalo $I \in (-x, x)$; (a) escala vertical completa, (b) acercamiento a la parte superior.

para $p = \{0, 1, \dots, P - 1\}$. En la figura 4.2, se observa que al redefinir el soporte de la función, por ejemplo, a un intervalo $I \in (-1.5, 1.5)$ se mantiene la norma > 0.99 para todas las funciones de la base.

A continuación, se evalúa el efecto sobre la ortogonalidad entre cada par de elementos de la base mediante la función $D_{(p_i-p_j)}(x)$, donde:

$$D_{(0-p_1)}(x) = \frac{\int_{-x}^x \varphi^\dagger(t) \cdot \psi_{(p_1)}(t) dt}{\sqrt{\int_{-x}^x \varphi^{\dagger 2}(t) dt \cdot \int_{-x}^x \psi_{(p_1)}^2(t) dt}} \quad (\text{ec. 4.2a})$$

$$D_{(p_1-p_2)}(x) = \frac{\int_{-x}^x \psi_{(p_1)}(t) \cdot \psi_{(p_2)}(t) dt}{\sqrt{\int_{-x}^x \psi_{(p_1)}^2(t) dt \cdot \int_{-x}^x \psi_{(p_2)}^2(t) dt}} \quad (\text{ec. 4.2b})$$

para $p_1, p_2 \in \{0, 1, \dots, P - 1\}$ y $p_1 \neq p_2$. Similarmente, en la figura 4.3, al redefinir el soporte como el intervalo $I \in (-1.5, 1.5)$, los indicadores de ortogonalidad $D_{(p_1-p_2)}(x)$ se mantienen cercanos a cero. Lo que indica que se conserva la propiedad de ortogonalidad entre todos los pares de funciones de la base.

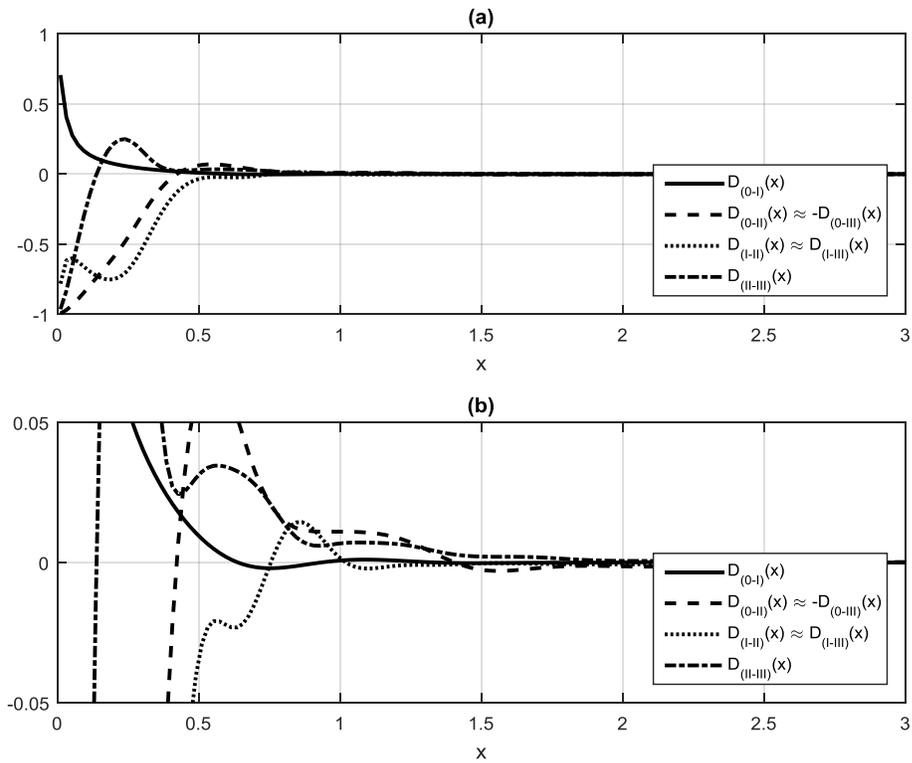


Figura 4.3 Ortogonalidad entre funciones de la base onduleta para $P = 4$ con soporte redefinido en $I \in (-x, x)$; (a) escala vertical completa, (b) acercamiento a la parte central.

En su conjunto, estos indicadores nos muestran que el efecto en cuanto a la ortonormalidad provocado por la delimitación del intervalo de soporte de las funciones de la base no es tan drástico como se anticiparía.

4.2 EXPANSIÓN DE LA BASE MEDIANTE OPERACIÓN DE MODULACIÓN

Se cuenta con una base de P elementos de intervalo de soporte finito. Esta base es ortonormal, o bien, su no ortonormalidad es despreciable. Se propone utilizar la operación de modulación para expandir esta base de P señales a una base de 16 señales. Esto es, de forma similar a los trabajos de Platas-Garza [16] y Trejo-Rocha [17] donde la base de Fourier es extendida mediante los polinomios Taylor y Legendre, se utilizarán las funciones

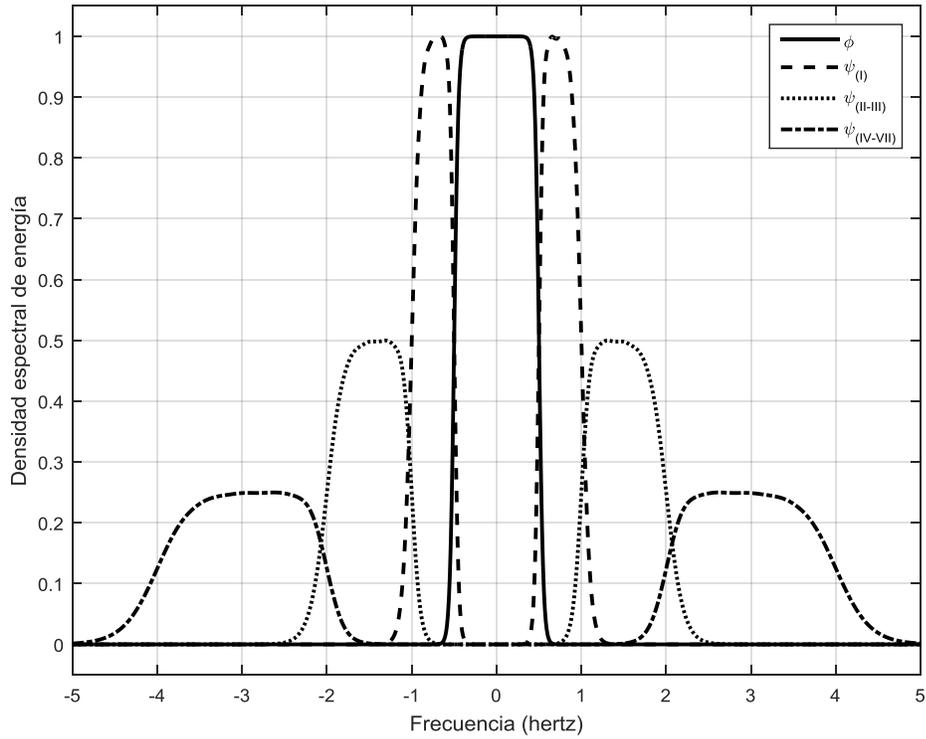


Figura 4.4 Densidad espectral de energía (PSD) de las funciones de la base de onduleta correspondiente a un B-Spline de orden $m = 5$.

onduletas para extender la base de Fourier. Estas 16 señales consisten en $\frac{16}{P}$ P -tuplas de señales: una P -tupla sin modular y otras $\frac{16}{P} - 1$ P -tuplas moduladas cada una por una exponencial compleja a una frecuencia de $k \cdot Q$, donde $k = \{1, 2, \dots, k_{max}\}$, $k_{max} = \frac{16}{P} - 1$ y Q es un parámetro de diseño que indica una frecuencia fundamental de modulación. El parámetro Q tiene unidades de frecuencia, por ejemplo Hz .

Por lo tanto, si $\varphi^\dagger(x)$ es un elemento de la base, entonces otros elementos serán $\varphi^\dagger(x) \cdot e^{j2\pi k Q x}$ para $k = \{1, 2, \dots, k_{max}\}$. Atendiendo a este objetivo, el criterio de selección del orden m es su espectro de frecuencia. Se considera que aquel donde la energía de las señales esté contenida en un ancho de banda lo más limitado posible se evitará la interferencia interarmónica entre las P -tuplas de distinta frecuencia de modulación.

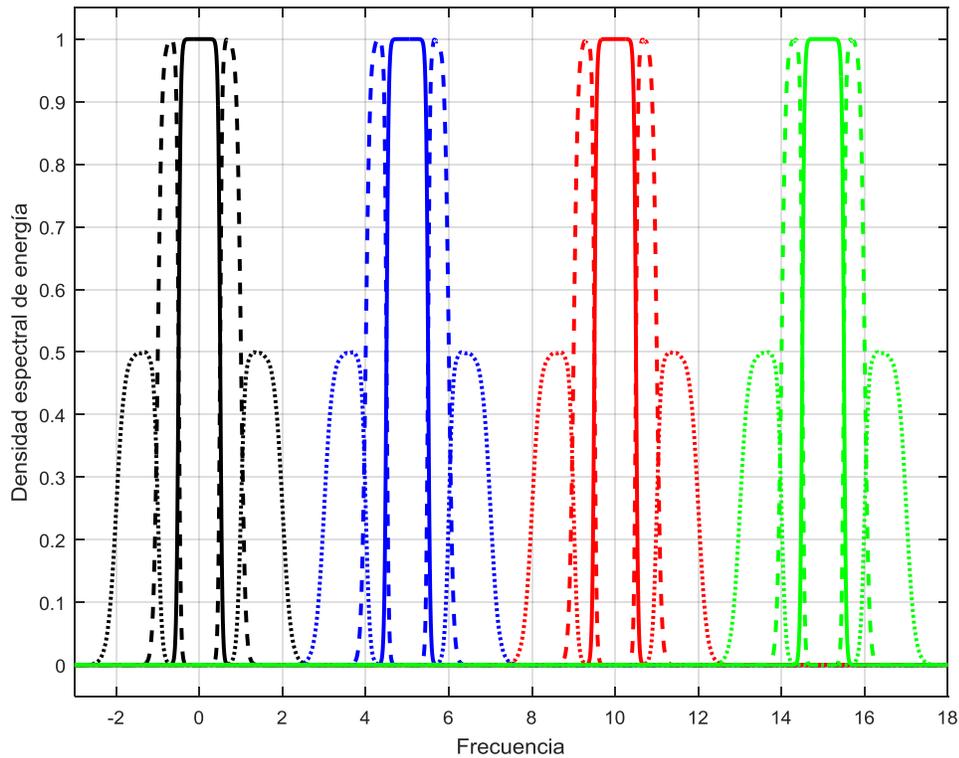


Figura 4.5 Densidad espectral de energía de las funciones de la base onduleta BL de $m = 5$ expandida por modulación con $P = 4$ y $Q = 5$: P -tupla sin modular (en negro), P -tuplas moduladas en $k \cdot Q$ para $k = 1, 2$ y 3 (azul, rojo y verde, respectivamente). Cada P -tupla consiste en función escalante (línea sólida), onduleta madre (línea intermitente) y dos onduletas hijas de primera generación (línea punteada).

En la figura 3.5 del capítulo anterior, se observa que la función escalante de m -ésimo orden $\hat{\varphi}^\dagger(\gamma)$ tiende a reducir los lóbulos laterales presentes en $\gamma > \pm 1$, y a concentrarse alrededor del origen conforme se incrementa el orden m . Para $m = 5$, el espectro obtenido es muy cercano a un filtro ideal pasabajos. Similarmente, en la figura 3.7, la función onduleta madre $\hat{\psi}(\gamma)$ se asemeja a un filtro ideal pasabanda. Por lo tanto, como se mencionó previamente, se propone utilizar el quinto orden m para generar la base de 16 señales onduletas moduladas.

En la figura 4.4, se visualiza la densidad espectral de energía (*power spectral density*, PSD) de la base onduleta BL de quinto orden. Se define a BW_P

Tabla 4.1 Ancho de banda base no modulada BW_P y frecuencia máxima de la base onduleta BL expandida por modulación en función de P .

P	BW_P	f_{\max}
1	1.25 Hz	19.375 Hz
2	2.5 Hz	18.75 Hz
4	5 Hz	17.5 Hz
8	10 Hz	15 Hz
16	20 Hz	10 Hz

como el ancho de banda de las funciones conjuntadas por el parámetro de P . Este valor de ancho de banda BW_P es el valor mínimo para la frecuencia fundamental de modulación Q que evita la interferencia entre P -tuplas adyacentes en el espectro de frecuencia.

Un ejemplo del resultado de este proceso de modulación se observa en la figura 4.5. Se observa en esta misma figura que la frecuencia máxima f_{\max} ocupada por el ancho de banda de la base extendida por modulación BW_Φ es:

$$f_{\max} = k_{\max}Q + \frac{1}{2}BW_P \quad (\text{ec. 4.3})$$

Este frecuencia máxima es importante para determinar la frecuencia de muestreo necesaria para discretizar las funciones de la base. La tabla 4.1 enlista los valores aproximados del BW_P y de la f_{\max} para una Q aceptablemente pequeña (<99% de la energía de la función onduleta contenida en el ancho de banda). Asimismo, tenemos que:

$$BW_\Phi = f_{\max} + \frac{1}{2}BW_P \quad (\text{ec. 4.4})$$

Este ancho de banda, a su vez, es importante para determinar la eficiencia de ancho de banda.

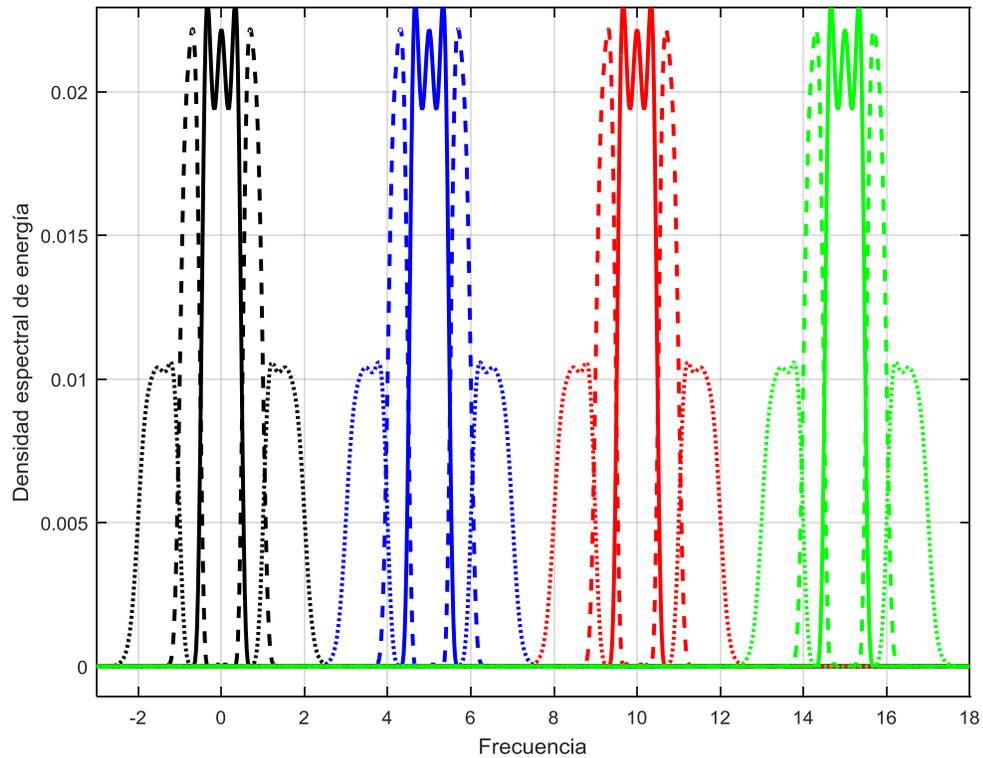


Figura 4.6 Densidad espectral de energía de la base vectorial de $N_{\text{sam}} = 256$ muestras con $S = 16/3$ seg, $P = 4$, $Q = 5$ Hz y $f_s = 48$ Hz. P -tupla sin modular (en negro), P -tupla moduladas en $k \cdot Q$ para $k = 1, 2$ y 3 (azul, rojo y verde, respectivamente). Cada P -tupla consiste en función escalante (línea sólida), onduleta madre (línea intermitente) y onduletas hijas de primera generación (línea punteada).

4.3 DISCRETIZACIÓN DE LA BASE MEDIANTE OPERACIÓN DE MUESTREO

Se ha trabajado hasta este punto con funciones continuas. El siguiente paso para obtener la base vectorial deseada es la discretización de tales funciones. En este punto se debe respetar el teorema del muestreo para evitar efectos adversos como el *aliasing*. El teorema del muestreo nos indica que la frecuencia de muestreo f_s debe ser por lo menos mayor que el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear [14, p. 518].

Entonces, atendiendo al teorema del muestreo:

Tabla 4.2 Parámetros y constantes de diseño de la base vectorial.

Parámetro	Constante	Significado	Unidad	Valores sugeridos o dados
m		Orden del <i>B-spline</i>	Adimensional	> 3
S		Intervalo de soporte finito	Tiempo	> 4 seg
P		Rango de onduletas no moduladas	Adimensional	1, 2, 4, 8 ó 16
	BW_P	Ancho de banda de onduletas no moduladas	Frecuencia	1.25, 2.5, 5, 10 ó 20 Hz para $P = 1, 2, 4, 8$ ó 16
Q		Frecuencia fundamental de expansión de la base por modulación	Frecuencia	$\geq BW_P$
	k_{max}	Armónica máxima de Q	Adimensional	$\frac{16}{P} - 1$
	f_{max}	Frecuencia máxima de BW_ϕ	Frecuencia	$k_{max}Q + \frac{1}{2}BW_P$
	BW_ϕ	Ancho de banda de la base extendida por modulación	Frecuencia	$f_{max} + \frac{1}{2}BW_P$
f_s		Frecuencia de muestreo	Muestras / Tiempo	$\geq 2f_{max}$
	N_{sam}	Número de elementos del vector	Elementos	$S \cdot f_s$
	$\sqrt{T_s}$	Factor de corrección entre tiempo continuo y tiempo discreto	Adimensional	$\frac{1}{\sqrt{f_s}}$

$$f_s \geq 2f_{max} = 2 \left(k_{max}Q + \frac{1}{2}BW_P \right) \quad (\text{ec. 4.5})$$

Como ejemplo, para los valores de $P = 4$, $Q = 5$ Hz, $k_{max} = \frac{16}{P} - 1 = 3$, y $BW_P = 5$ Hz, la frecuencia de muestreo debe ser $f_s \geq 35$ Hz. Este valor debe interpretarse como un mínimo.

Otro aspecto importante es el de introducir el factor de corrección $\sqrt{T_s} = \frac{1}{\sqrt{f_s}}$ para mantener la equivalencia en términos de energía, y por ende de ortonormalidad, de las funciones discretizadas.

Tras las consideraciones estudiadas a lo largo de este capítulo, se propone crear una base vectorial de 16 elementos vectoriales donde cada vector cuenta con $N_{sam} = S \cdot f_s = 256$ muestras para los propósitos de simular la transmisión de datos en el próximo capítulo. Se proponen los valores, pero sin limitarse a, de $S = 4$ seg y $f_s = 64$ Hz. En la figura 4.6, se observa la densidad espectral de energía de la base vectorial obtenida. Nótese que el efecto de la

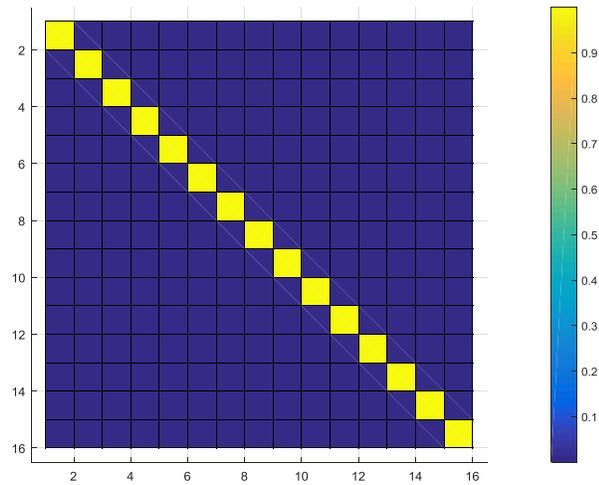


Figura 4.7 Matriz gramiana de la base vectorial expandida por modulación.

delimitación del intervalo de soporte provoca un rizado importante en los lóbulos principales de cada vector. Si S es pequeño habrá menos rizados pero de mayor amplitud; caso contrario, si S es grande, habrá más rizados pero de menor amplitud.

Finalmente, en la tabla 4.2, se hace un resumen de las variables y constantes de diseño estudiadas. Se puede recurrir a la Gramiana de la base para visualizar la ortonormalidad de la misma; obsérvese la figura 4.7. Como se mencionó en la sección 2.3, la matriz de Gram de una base ortonormal corresponde a la matriz identidad.

CAPÍTULO 5

MODULACIÓN DIGITAL

Se ha establecido una base conformada por 16 vectores. Por medio de combinaciones lineales de dichos vectores se genera un espacio vectorial. Como se mencionó en la sección 2.2, los coeficientes que ponderan la combinación de los vectores pueden ser utilizados para codificar información. De tal manera, el esquema de modulación digital propuesto es implementable en un sistema de transmisión de datos consistente en las siguientes etapas:

En un primer paso, se establece la correspondencia entre la información en secuencias binarias y los vectores de 16 amplitudes complejas basadas en el esquema de modulación. Luego, las amplitudes complejas son utilizadas como los coeficientes en la combinación lineal de los vectores de la base. El resultado es un subconjunto de señales del espacio de vectorial. Cada una de ese subconjunto de señales es entonces transmitida y posteriormente recibida. Esto es desarrollado en la sección 5.1.

En el lado de la recepción se asume que la señal recibida ha sido afectada por el medio de transmisión. La señal recibida consiste, entonces, de la señal original más una componente asociada al ruido. Dado que se asume que el ruido saca a la señal del subespacio, un proceso de proyección se emplea para recuperar los coeficientes (o amplitudes complejas) de la señal transmitida. Finalmente, se realiza la correspondencia inversa entre las amplitudes complejas obtenidas y la información binaria. La sección 5.2 expone este aspecto del sistema de transmisión de datos.

Las secciones 5.3, 5.4 y 5.5 evalúan los criterios de desempeño del sistema en términos de tasa de error binario, razón de valor pico a valor promedio y la eficiencia de ancho de banda, respectivamente.

5.1 SÍNTESIS DE SEÑALES SIMBÓLICAS

La modulación por amplitud de pulso (PAM, *pulse amplitude modulation*) es uno de los esquemas de modulación más básicos. En el esquema PAM digital [1, p. 98], las señales representadas atienden a la fórmula:

$$s_n(t) = A_n p(t) \quad (\text{ec. 5.1})$$

donde $p(t)$ es el pulso de duración finita y A_n (para $1 \leq n \leq M$) denota las M posibles amplitudes correspondientes a $M = 2^k$ posibles bloques de k bits de información. Como se aprecia en esta definición de PAM, las amplitudes son de naturaleza real exclusivamente. Usualmente, las amplitudes A_n toman valores discretos de la forma:

$$A_n = 2n - 1 + M, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (\text{ec. 5.2})$$

El caso especial de $M = 2$, o señales binarias, donde las dos posibles señales son una el negativo de la otra y el coeficiente de correlación cruzada es -1 , es un caso especial de los esquemas de señalización antipodal binaria. En particular, este caso también corresponde al esquema BPSK (*binary phase-shift keying*).

En el presente trabajo, la etapa inicial del proceso de simulación del sistema de transmisión de datos se emplea el esquema BPSK. Dado que el enfoque es el de apreciar la conveniencia de utilizar la base de onduletas en la transmisión de datos, se considera que dicho esquema es suficiente y adecuado para tal objetivo.

Los bloques binarios para determinar cada coeficiente o amplitud compleja son de un solo bit. En consecuencia, las amplitudes que modulan a los vectores de la base son de 1 y -1 . Las señales simbólicas se generan con la combinación o suma de las 16 señales moduladas. Por lo tanto, cada señal

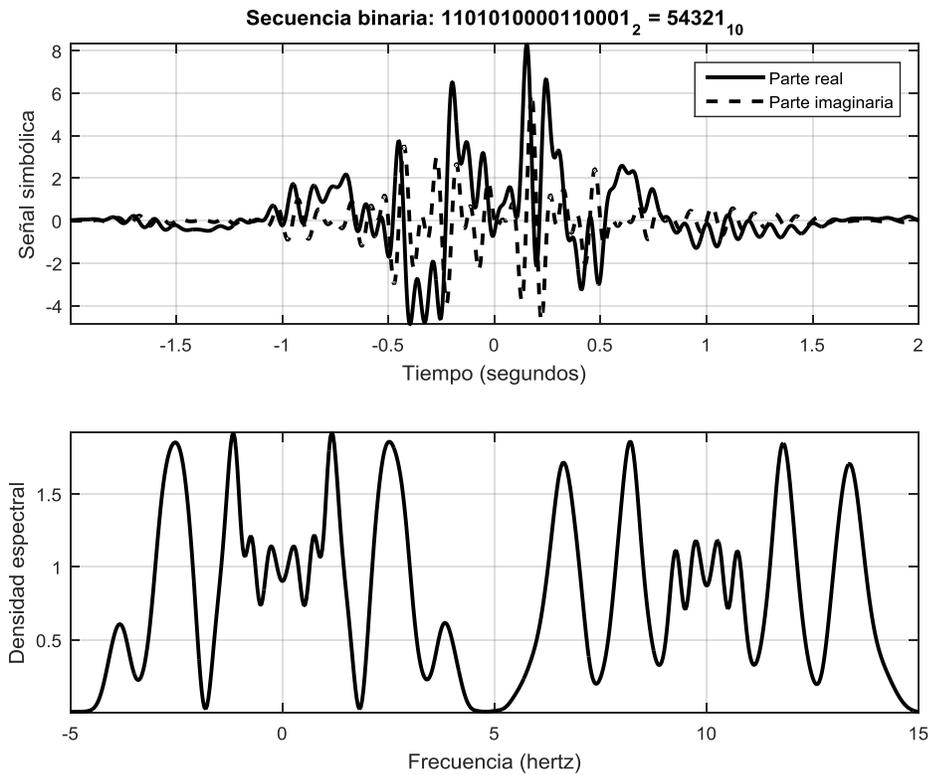


Figura 5.1 Señal simbólica $s(x)$ correspondiente a la secuencia binaria 1101010000110001 utilizando una base de onduletas BL con $m = 5$, $P = 8$, $Q = 10$ Hz y $S = 4$ seg.

simbólica representa la información de palabras de binarias de 16 bits. La señal simbólica se representa entonces como:

$$s[n] = \sqrt{T_s} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{P-1} \alpha_{k,l} e^{-j2\pi k Q n T_s} \psi_{(l)}[n T_s] \quad (\text{ec. 5.3a})$$

$$s(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{P-1} \alpha_{k,l} e^{-j2\pi k Q x} \psi_{(l)}(x) \quad (\text{ec. 5.3b})$$

La (ec. 5.3a) corresponde a la señal simbólica expresada como un vector discreto obtenido tras un procesamiento digital, (ec. 5.3b) corresponde a la señal simbólica analítica obtenida tras la conversión digital/analógico del vector discreto, y donde $\alpha_{k,l}$ son las amplitudes complejas. En la figura 5.1, se ejemplifica una señal simbólica.

La energía de una señal simbólica generada corresponde a la expresión $\alpha^H G \alpha$. Considerando que la base utilizada es ortonormal y que para una

modulación BPSK los coeficientes $\alpha_{k,l}^2 = 1$ para toda $k = \{0, 1, \dots, k_{\max}\}$ y toda $l = \{0, 1, \dots, P - 1\}$, entonces la energía se simplifica a:

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{P-1} \alpha_{k,l}^2 = (k_{\max} + 1)P = \left(\frac{16}{P} + 1 - 1\right)P = 16 \quad (\text{ec. 5.4})$$

5.2 ANÁLISIS DE SEÑALES SIMBÓLICAS Y RECUPERACIÓN DE DATOS

En la etapa de recepción, se asume que la señal recibida contiene ahora una componente de ruido. Desde la perspectiva de espacio de señales, eso significa que la señal recibida se encuentra ahora en un punto distinto alrededor de la señal original transmitida. Este nuevo punto puede estar dentro o fuera del espacio de señales. La operación de análisis, vista en la sección 2.2, permitirá encontrar los coeficientes de la señal dentro del espacio de señales que es proyectada ortogonalmente por la señal recibida. Los coeficientes obtenidos son comparados con el conjunto de amplitudes complejas A_n predefinidas por la modulación BPSK para establecer la correspondencia a los datos binarios.

Se conoce como proceso de ruido blanco al proceso aleatorio estacionario en sentido amplio cuya media es cero y sus elementos son no correlacionados [11, p. 397]. Los procesos de ruido blanco con distribución de probabilidad gaussiana son utilizados de manera frecuente en modelos físicos como ruido aditivo; de aquí el término de ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN, *additive white Gaussian noise*).

La densidad espectral (PSD) de un proceso blanco es constante en todas las frecuencias. Sin embargo, esto implicaría que la energía en un proceso de ruido blanco fuera infinita. Por lo tanto, tal proceso de ruido blanco no es realizable físicamente. No obstante, siguen siendo útiles para modelar fenómenos físicos [1, p. 69].

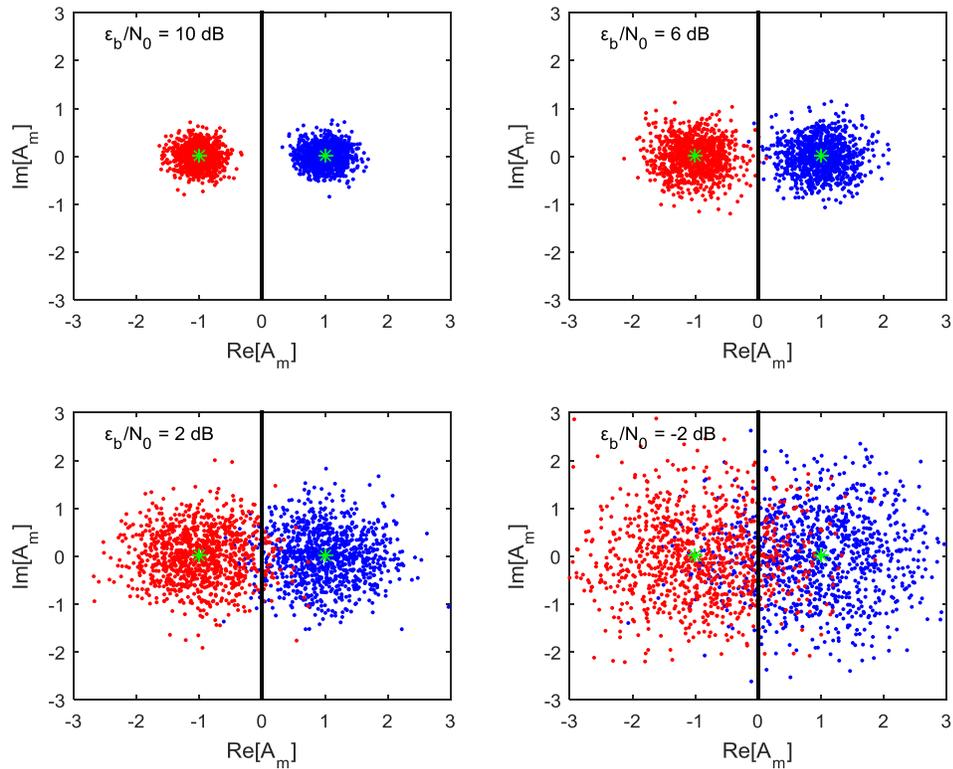


Figura 5.2 Amplitudes complejas recuperadas para diferentes niveles de relación señal a ruido por bit (ϵ_b/N_0) utilizando base de onduletas BL con $m = 5$, $P = 4$, $Q = 5$ Hz, $S = 4$ seg y $f_s = 64$ Hz. En azul, amplitudes transmitidas como 1; en rojo, amplitudes transmitidas como -1.

Con el propósito de ejemplificar el efecto de un canal que presenta un proceso de ruido AWGN sobre el sistema de transmisión de datos, se simuló la etapa de transmisión: obtención de amplitudes complejas mediante el esquema BPSK aplicado sobre los datos binarios, síntesis de señales de información mediante operadores matriciales; la afectación por ruido AWGN para distintos niveles de relación señal a ruido por bit, (ϵ_b/N_0); y la etapa recepción: análisis de señales de información para la recuperación de las amplitudes complejas, recuperación de los datos binarios basados en los valores de las amplitudes complejas. Los parámetros de la base fueron $m = 5$, $P = 4$, $Q = 5$ Hz, $S = 4$ seg y $f_s = 64$ Hz. Sin embargo, los parámetros P , Q , S y f_s pueden variar y los resultados seguirán siendo similares siempre que se

mantenga la condición de ortonormalidad de la base y el mismo número de muestras de las señales de la base.

En la figura 5.2, se observa el efecto del ruido en la recuperación de las amplitudes complejas para distintos niveles de ε_b/N_0 . Los valores de las amplitudes complejas son esparcidos en dos regiones alrededor de los dos valores predefinidos por el esquema BPSK (-1 y 1). Dichas regiones son más extensas para valores menores de ε_b/N_0 . Naturalmente, cuando las regiones rebasan la frontera de decisión de cada amplitud compleja, se suscitan errores binarios en la recuperación de los datos transmitidos.

5.3 TASA DE ERROR BINARIO

En términos de errores binarios, el desempeño del sistema es evaluado mediante el cálculo de la tasa de error binario (BER, *bit error rate*) para diferentes valores de ε_b/N_0 . En la figura 5.3, se aprecia el efecto del ruido en el BER obtenido en la simulación de 60,000 símbolos utilizando una base de onduletas Battle-Lemarié con los parámetros $m = 5$, $S = 4$ seg, $f_s = 64$ Hz y diferentes valores de P y Q . También se compara la tasa de error binario utilizando bases de onduletas Daubechies construídas con parámetros similares y la tasa de error binario de una base OFDM (*Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*) de 16 portadoras. El desempeño de las onduletas Battle-Lemarié es muy similar al de OFDM y supera al de las onduletas Daubechies.

En [17, cap. 4.3], se evalúa el desempeño del BER en la transmisión de datos utilizando las bases Taylor-Fourier y Legendre-Fourier en la síntesis de símbolos. La base Legendre-Fourier con la separación interarmónica suficiente es una base ortonormal y produce los resultados de BER similares a los obtenidos en el presente trabajo con la base onduleta Battle-LeMarié propuesta y a los resultados de OFDM. En el caso de bases no ortogonales, por ejemplo, usando la base Taylor-Fourier propuesta en [17] o la construida a partir de onduletas Daubechies, existe una mayor tasa de errores.

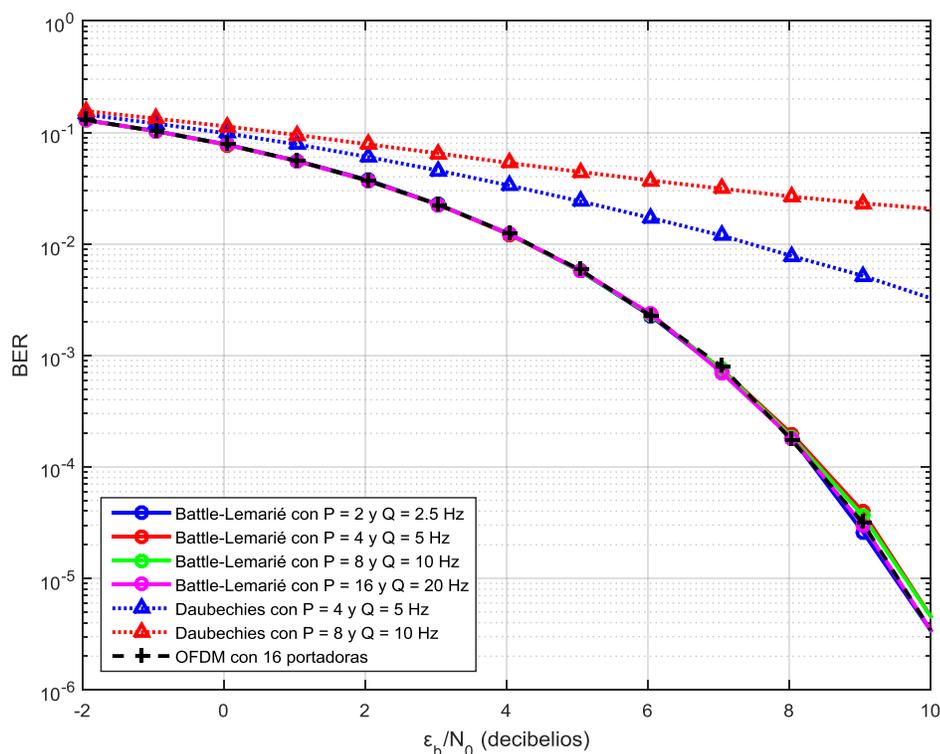


Figura 5.3 Tasa de error binario vs relación señal a ruido por bit utilizando bases de onduletas Battle-Lemarié (líneas continuas), bases de onduletas Daubechies (líneas punteadas) y base de OFDM (línea intermitente).

5.4 RAZÓN DE VALOR PICO A VALOR PROMEDIO

Hemos visto que desde el punto de vista de la tasa de error binario, un sistema de onduletas Battle-Lemarié tiene un desempeño muy similar al de un sistema OFDM. Sin embargo, es útil estudiar el desempeño ahora desde el punto de vista de la razón de valor pico a valor promedio (PAR, *peak-to-average power ratio*) para establecer la ventaja o desventaja de un sistema con respecto al otro.

Un problema principal en la implementación de sistemas de transmisión de datos que utilizan modulación multiportadora, por ejemplo OFDM, es el nivel alto de la PAR. De manera general, se suscitan altos valores pico en la señal transmitida cuando varios de los subcanales se suman constructivamente en

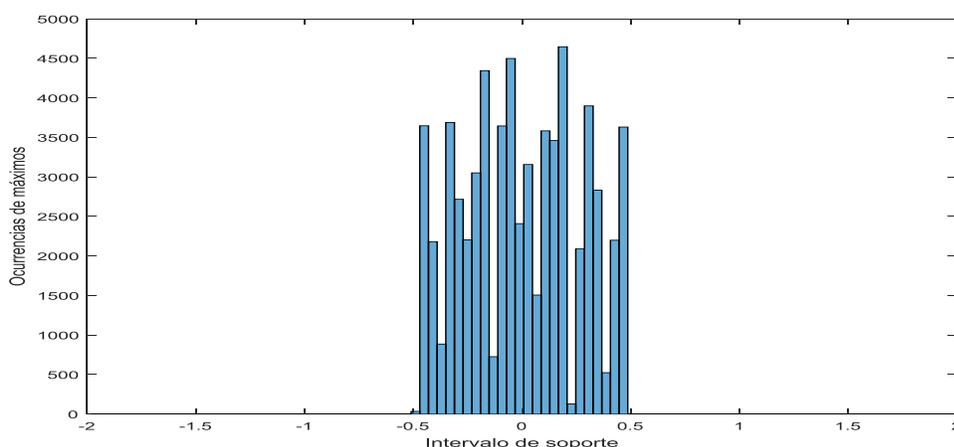


Figura 5.4 Histograma de la ubicación de máximos de energía en el intervalo de soporte de las señales codificadas con los parámetros $m = 5$, $f_s = 64$ Hz, $P = 4$, $Q = 5$ Hz y $S = 4$ seg.

fase. Tales picos de señal pueden provocar recortes de la señal en los convertidores análogo-digital o saturación en los amplificadores de potencia, y como consecuencia de los anterior, distorsión entre canales modulados [1, p. 757].

En el caso del sistema propuesto, la señal transmitida se constituye de la combinación de señales onduletas. Tales señales pueden ser consideradas como multiportadoras en el sentido de que cada generación de onduletas existe en un ancho de banda espectral separado de las otras. Más aún, se ha propuesto la posibilidad de expandir la base mediante la modulación por exponenciales complejas. Lo cual le confiere la característica de modulación multiportadora en el sentido más estricto.

La *PAR* de una señal en el tiempo se define como la razón entre el pico de energía de la señal y su valor promedio de energía [15, p. 224]:

$$PAR = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{pico}}{P_{promedio}} \right) \quad (\text{ec. 5.5})$$

En el sistema de trasmisión propuesto, existen 2^{16} señales codificadas que se generan con la combinación de las 16 señales de la base de onduletas. La *PAR* se evalúa para cada una de estas señales y se considerará el peor escenario donde la *PAR* sea máxima. Antes abordar los resultados obtenidos de manera numérica en la evaluación de la *PAR*, se hace la siguiente

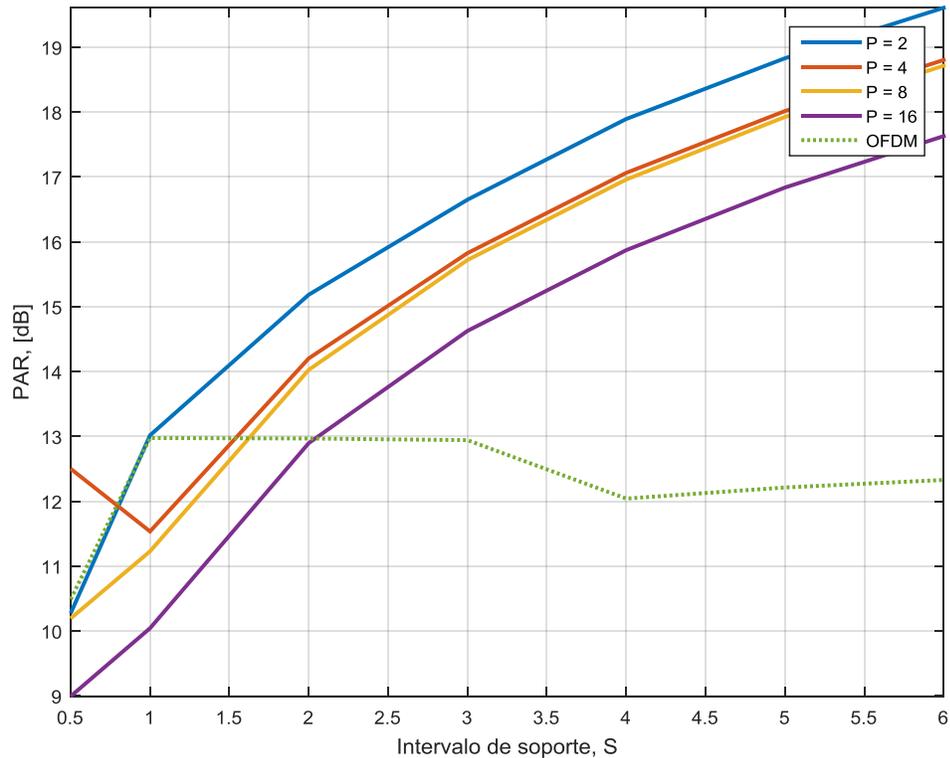


Figura 5.5 Razón de energía pico a valor promedio PAR en función del intervalo de soporte S para bases de ondulitas expandidas por modulación (líneas sólidas) y base OFDM (línea punteada).

consideración. En la figura 5.4, se observa que la ocurrencia de los máximos se restringe al intervalo $(-0.5, 0.5)$. Como se mencionó en la sección 4.1, la energía de las ondulitas se concentra en el origen; mientras que hacia los extremos del intervalo de soporte, el nivel de energía decae rápidamente. Este hecho tiene un aspecto beneficioso, pues asegura que la transición entre símbolos consecutivos sea suave; evita que cambios abruptos en la señal propicien la aparición de lóbulos espectrales fuera del ancho de banda principal.

Sin embargo, este mismo hecho repercute en el cálculo de la energía promedio, y en consecuencia, en la PAR . Si el parámetro del intervalo de soporte S se incrementa, obtendremos un valor de energía promedio que tiende a reducirse y una PAR que aumenta. Por otro lado, reduciendo el parámetro S obtenemos valores de la PAR menores. No obstante, es importante notar que al

reducir el parámetro S se compromete la ortonormalidad de la base afectando adversamente la BER .

La figura 5.5 muestra el nivel de PAR obtenido computacionalmente para diferentes valores de los parámetros P y S . Como se mencionó, el nivel de PAR aumenta conforme se incrementa el intervalo de soporte. En el mismo gráfico, se hace una comparación con el nivel de PAR obtenido de un sistema OFDM, para el cuál se obtienen valores cercanos a 12 dB. Entonces, se observa que para valores de $S > 2$, los sistemas de base de onduletas son menos deseables en términos de PAR que un sistema OFDM.

5.5 EFICIENCIA DE ANCHO DE BANDA

La eficiencia de ancho de banda es la razón de la tasa binaria del esquema de señalización contra el ancho de banda del mismo [1, p. 226]:

$$BE = \frac{R}{W} \quad (\text{ec. 5.6})$$

donde R es la tasa binaria y W es el ancho de banda y BE tiene unidades en bits/s/Hz.

En el sistema propuesto, el ancho de banda es determinado en gran medida por el parámetro Q , la frecuencia fundamental que modula a las P -tuplas que expanden la base. Experimentalmente, se obtuvo de la simulación que con los valores de $(P, Q) = (2, 2.5), (4, 5), (8, 10)$ ó $(16, 20)$ se mantiene un ancho de banda de $W = BW_{\phi} \approx 20$ Hz, el cual basta para que no exista pérdida de ortogonalidad. En la figura 4.5 y 4.6 del capítulo anterior, se aprecia cómo las P -tuplas están suficientemente separadas. La tasa binaria corresponde a los 16 bits que se codifican en cada señal simbólica de duración S , es decir, $R = \frac{16}{S}$ bps. Sustituyendo en (ec. 5.5), se tiene que la eficiencia de ancho de banda de sistema propuesto es:

$$BE = \frac{16}{20 \cdot S} = \frac{0.8}{S} \text{ bps/Hz} \quad (\text{ec. 5.7})$$

En la sección 4.1 se estudió el impacto de delimitar el intervalo de soporte a través del parámetro S . De las figuras 4.1 y 4.2, se observa que

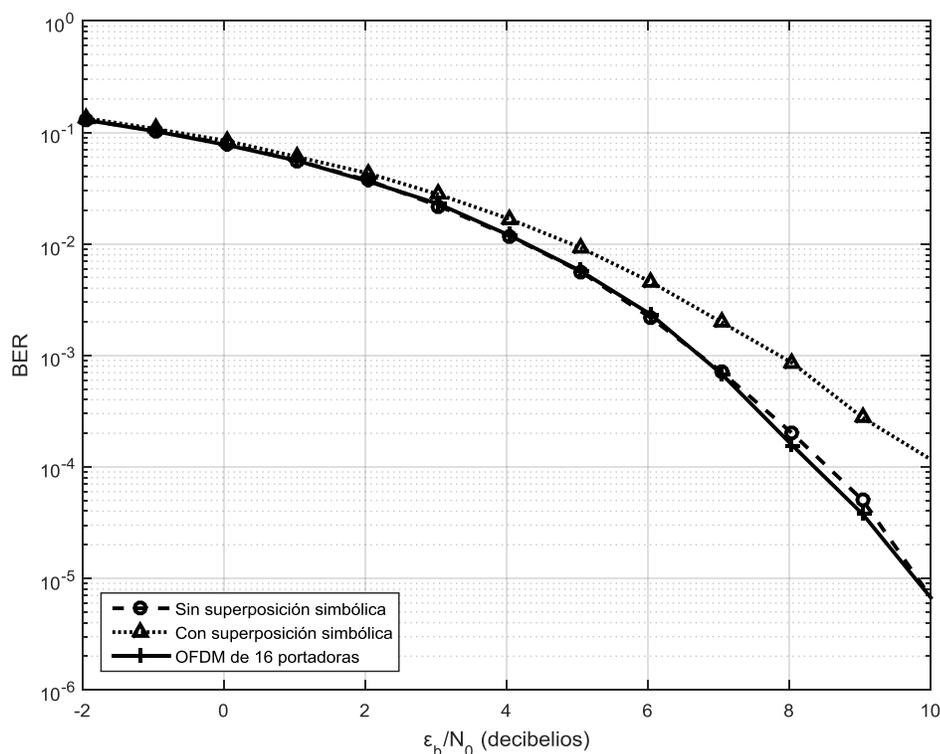


Figura 5.6 Tasa de error binario vs. relación señal a ruido por bit utilizando base de onduletas Battle-Lemarié sin superposición de símbolos (línea punteada) y con superposición simbólica (línea intermitente). Tasa de error binario para OFDM como referencia (línea discontinua).

reducir el parámetro S por debajo de los 4 segundos compromete la ortonormalidad de la base. De tal forma que la BE permitida sin afectar a la base es de 0.2 bps/Hz.

5.6 SUPERPOSICIÓN DE SÍMBOLOS

Los resultados mostrados se basan en la transmisión de símbolos consecutivos sin transape intersimbólico. Sin embargo, queda desaprovechada la propiedad de las funciones onduletas BL de ortogonalidad entre traslaciones. Para beneficiarse de tal propiedad, una vez transmitido un primer símbolo bastaría con esperar una unidad temporal para superponer el siguiente símbolo. En consecuencia, la tasa binaria sería $R = 16$ bps y la $BE = 0.8$ bps/Hz.

No obstante, la superposición de símbolos afecta negativamente la tasa de error binario debido a que la detección del símbolo transmitido debe discernir la energía no solo entre el símbolo y el ruido del canal, sino también de los símbolos transmitidos previamente. Experimentalmente, se verificó que el sistema es capaz de transmitir datos sin errores usando símbolos superpuestos en ausencia de ruido. Sin embargo, se observó que el efecto del ruido es más severo que en la transmisión de datos sin superposición de símbolos. La figura 5.6 muestra la tasa de error binario que resulta de simular 10,000 símbolos utilizando una base de onduletas BL con los parámetros $m = 5$, $S = 4$ seg, $P = 2$, $Q = 2.5$ Hz y $f_s = 64$ Hz con superposición de símbolos y sin superposición simbólica. Como se aprecia, la tasa de error binario utilizando la superposición de símbolos es mayor que la BER que resulta del uso de OFDM.

Por otro lado, la razón de valor pico a valor promedio se ve beneficiada. Como se ve en la figura 5.4, los máximos de cada símbolo se concentran en un intervalo unitario alrededor del origen. Con la superposición, la energía de los símbolos superpuestos se distribuirá a lo largo del intervalo de soporte S de un símbolo dado.

Experimentalmente, la *PAR* obtenida para distintas combinaciones de símbolos traslapados no supera un máximo de 16.03 *dB* utilizando una base con los parámetros $P = 4$, $Q = 5$ Hz, $S = 4$ seg. Lo que representa una mejora apreciable.

5.7 CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO

En el presente capítulo, se ha revisado el desempeño de *BER*, *PAR* y *BE* de la base propuesta. Ahora bien, en diferentes aplicaciones y escenarios, algún criterio en particular tendrá mayor relevancia que los otros, o viceversa, será desestimable. De tal manera, es conveniente aplicar una estrategia de selección de parámetros de diseño para beneficiar el criterio más relevante, o reducir el desempeño del menos importante en favor de los otros, según el escenario de la aplicación final.

Tabla 5.1 Selección de parámetros de diseño según criterio de desempeño.

Criterio a mejorar	P Alcance de onduleta	S Intervalo de soporte	Q Frecuencia de modulación	Superposición simbólica
BER	Indistinto	Aumentar	Aumentar	No
BE	Indistinto	Reducir	Reducir	Sí
PAR	Aumentar	Reducir	Reducir	Sí

La tabla 5.1 resume las consideraciones a tomar para la selección de parámetros de diseños según el criterio de desempeño; indica la tendencia a aumentar o reducir los parámetros P , S y Q , y a utilizar la superposición simbólica para mejorar el criterio deseado.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de tesis, se desarrolló un esquema de modulación digital que utiliza una base de funciones onduletas BL como formas de onda que generan las señales simbólicas en banda base para un sistema de transmisión de datos. A continuación, en las secciones 6.1 y 6.2, se resumen las conclusiones principales y, en la sección 6.3, se comenta sobre el trabajo futuro que es posible desarrollar partiendo de los resultados obtenidos en el presente trabajo.

6.1 SOBRE EL DESARROLLO DE LA BASE VECTORIAL

En la construcción de las funciones onduletas BL, se obtuvieron expresiones formuladas y conjuntos de coeficientes que permiten la obtención numérica de los vectores que representan a las funciones analíticas de las onduletas BL. Lo anterior facilita la implementación en los esquemas de modulación y los sistemas de transmisión de datos.

Se verificó que es posible truncar el soporte infinito que caracteriza a las onduletas BL sin comprometer la ortonormalidad de la base resultante. También se observó que la base puede comprender tantas escalas de onduletas como sea requerido, o bien, que es posible extender la base por medio de modulación con exponenciales complejas. Cada escala de onduletas tiene un ancho de banda notablemente definido. Las onduletas BL mejoran sus características en

frecuencia conforme aumenta el orden del *B-spline* asociado a su construcción. Para un orden $m > 3$, se acerca bastante a la respuesta de filtros ideales.

6.2 SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN EN LA TRANSMISIÓN DE DATOS

Cuando la implementación como sistema de transmisión de datos se realiza mediante el uso de símbolos no superpuestos, la tasa error binario es comparable con los sistemas OFDM. Sin embargo, la razón de valor pico a valor promedio y la eficiencia de ancho de banda distan notablemente de un valor comparable con el de OFDM. Por otro lado, aprovechando la propiedad de ortogonalidad entre translaciones, la superposición de símbolos permite sacrificar, en cierta medida, el desempeño en términos de *BER* para que el *PAR* y la *BE* se vean beneficiados.

De tal forma que, solo en aplicaciones donde la eficiencia en el uso del ancho de banda y los picos en las señales simbólicas sean criterios desestimables, el esquema propuesto basado en onduletas BL representa una alternativa a los sistemas OFDM.

6.3 TRABAJO FUTURO

Para que el sistema propuesto represente una mejor alternativa frente a los sistemas OFDM, es necesario encontrar una característica de la base de onduletas BL que supere a un sistema OFDM. Un trabajo futuro en ese sentido es encontrar tal característica. Al final de este trabajo, se sospecha que la transición suave entre símbolos que caracteriza a las señales obtenidas con la base de onduletas BL puede representar tal ventaja frente a un sistema OFDM.

Con respecto a la *PAR*, es posible mejorar el nivel de *PAR* global de una base de onduletas si se reduce el conjunto de señales simbólicas a un subconjunto de éstas que excluya a las señales de *PAR* alto. Se requiere estudiar el efecto sobre los demás criterios de desempeño; ya que, al reducir el

número de elementos del conjunto de símbolos, se reducirá el número de bits codificados en cada señal.

El presente trabajo se limitó a estudiar el efecto de un canal AWGN sobre las señales transmitidas. Como trabajo futuro, es posible estudiar el desempeño de la base de onduletas BL ante canales de distinta naturaleza y medios de propagación diferentes. Así como el comportamiento frente a efectos dispersivos, de multitrayectoria, Doppler, etc.

Finalmente, queda abierta la posibilidad de estudiar la compatibilidad del esquema de modulación propuesto con nuevas tecnología y protocolos de comunicación electrónicas.

APÉNDICE

TABLAS DE RESULTADOS ÚTILES

En el presente apéndice, se provee al lector de fórmulas y resultados utilizados en la construcción de las funciones escalante y onduletas.

A.1 EXPRESIONES ANALÍTICAS DE *B-SPLINES* CENTRADOS

La siguiente tabla muestra las expresiones analíticas para los *B-splines*, $B_m(x)$, de orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

Tabla A.1 Expresiones analíticas para *B-splines* de orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

m	$B_m(x)$
1	$B_1(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \pm \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$
2	$B_2(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$
3	$B_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4x^2 + 12x + 9) & -1.5 \leq x < -0.5 \\ \frac{1}{4}(-4x^2 + 3) & -0.5 \leq x < 0.5 \\ \frac{1}{8}(4x^2 - 12x + 9) & 0.5 \leq x < 1.5 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

4	$B_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{6}(-3x^3 - 6x^2 + 4) & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{6}(3x^3 - 6x^2 + 4) & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$
5	$B_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{384}(16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625) & -2.5 \leq x < -1.5 \\ \frac{1}{96}(-16x^4 - 80x^3 - 120x^2 - 20x + 55) & -1.5 \leq x < -0.5 \\ \frac{1}{192}(48x^4 - 120x^2 + 115) & -0.5 \leq x < 0.5 \\ \frac{1}{96}(-16x^4 + 80x^3 - 120x^2 + 20x + 55) & 0.5 \leq x < 1.5 \\ \frac{1}{384}(16x^4 - 160x^3 + 600x^2 - 1000x + 625) & 1.5 \leq x < 2.5 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

A.2 DERIVADAS DE LA FUNCIÓN COTANGENTE

La siguiente tabla muestra las derivadas $(2m - 1)$ -ésimas de la función $\cot(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 implicadas en el cálculo de la función escalante normalizada φ^\dagger obtenida a partir del *spline* N_m .

Tabla A.2 Derivadas de la función cotangente.

$2m - 1$	$\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \cot x = \sum_{k=0}^m a_k \cot^{2k}(x)$					
1	-1	$-\cot^2(x)$				
3	-2	$-8 \cot^2(x)$	$-6 \cot^4(x)$			
5	-16	$-136 \cot^2(x)$	$-240 \cot^4(x)$	$-120 \cot^6(x)$		
7	-272	$-3\,968 \cot^2(x)$	$-12\,096 \cot^4(x)$	$-13\,440 \cot^6(x)$	$-5\,040 \cot^8(x)$	
9	-7\,936	$-176\,896 \cot^2(x)$	$-814\,080 \cot^4(x)$	$-1\,491\,840 \cot^6(x)$	$-1\,209\,600 \cot^8(x)$	$-362\,880 \cot^{10}(x)$

A.3 FUNCIÓN DE NORMALIZANTE $G(\gamma)$

Tablas y gráficas con resultados importantes en relación al desarrollo de la función normalizante $G(\gamma)$ para *B-splines* de orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

Tabla A.3 Función $G(\gamma)$ para *B-splines* de orden m como una suma de potencias pares de cosenos.

m	$G(\gamma) = \sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos^{2k}(\pi\gamma)$
1	1
2	$\frac{1}{3}(1 + 2 \cos^2 \pi\gamma)$
3	$\frac{1}{15}(2 + 11 \cos^2 \pi\gamma + 2 \cos^4 \pi\gamma)$
4	$\frac{1}{315}(17 + 180 \cos^2 \pi\gamma + 114 \cos^4 \pi\gamma + 4 \cos^6 \pi\gamma)$
5	$\frac{1}{2835}(62 + 1072 \cos^2 \pi\gamma + 1452 \cos^4 \pi\gamma + 247 \cos^6 \pi\gamma + 2 \cos^8 \pi\gamma)$

Tabla A.4 Función $G(\gamma)$ para *B-splines* de orden m como una suma cosenos de ángulos dobles.

m	$G(\gamma) = \sum_{k=0}^{m-1} g_{m,k} \cos(2k\pi\gamma)$
1	1
2	$\frac{1}{3}(2 + \cos 2\pi\gamma)$
3	$\frac{1}{60}(33 + 26 \cos 2\pi\gamma + \cos 4\pi\gamma)$
4	$\frac{1}{2520}(1208 + 1191 \cos 2\pi\gamma + 120 \cos 4\pi\gamma + \cos 6\pi\gamma)$
5	$\frac{1}{181440}(78095 + 88234 \cos 2\pi\gamma + 14608 \cos 4\pi\gamma + 502 \cos 6\pi\gamma + \cos 8\pi\gamma)$

La siguiente tabla muestra los coeficientes $g_{m,k}^\dagger$ para expresar el término $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ como una serie de Fourier.

$$\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}} = \frac{g_{m,0}^\dagger}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{m,k}^\dagger \cos 2\pi k\gamma)$$

Tabla A.5 Coeficientes $g_{m,k}^\dagger$.

k	$g_{1,k}^\dagger$	$g_{2,k}^\dagger$	$g_{3,k}^\dagger$	$g_{4,k}^\dagger$	$g_{5,k}^\dagger$
0	2.000 000	2.583 351	3.171 047	3.939 523	4.983 339
1		-0.349 326	-0.766 615	-1.344 861	-2.165 978
2		0.070 420	0.244 820	0.537 408	1.005 532
3		-0.015 749	-0.087 510	-0.237 040	-0.503 472
4		0.003 696	0.032 945	0.110 383	0.265 149
5		-0.000 892	-0.012 767	-0.053 041	-0.144 204
6		0.000 219	0.005 040	0.025 996	0.080 093
7		-0.000 055	-0.002 016	-0.012 915	-0.045 131
8		0.000 014	0.000 814	0.006 480	0.025 696
9		-0.000 003	-0.000 331	-0.003 276	-0.014 746
10		0.000 001	0.000 135	0.001 666	0.008 514
11		>10 ⁻⁶	-0.000 056	-0.000 851	-0.004 940
12		>10 ⁻⁶	0.000 023	0.000 437	0.002 878
13		>10 ⁻⁶	-0.000 010	-0.000 225	-0.001 682
14		>10 ⁻⁶	0.000 004	0.000 116	0.000 986
15		>10 ⁻⁶	-0.000 002	-0.000 060	-0.000 580
16		>10 ⁻⁶	0.000 001	0.000 031	0.000 341
17		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	-0.000 016	-0.000 201
18		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	0.000 008	0.000 119
19		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	-0.000 004	-0.000 071
20		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	0.000 002	0.000 042
21		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	-0.000 001	-0.000 025
22		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	0.000 001	0.000 015
23		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	-0.000 009
24		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	0.000 005
25		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	-0.000 003
26		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	0.000 002
27		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	-0.000 001
28		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	0.000 001
29		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
30		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
31		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
32		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
33		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
34		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
35		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
36		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
37		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
38		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
39		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶
40		>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶	>10 ⁻⁶

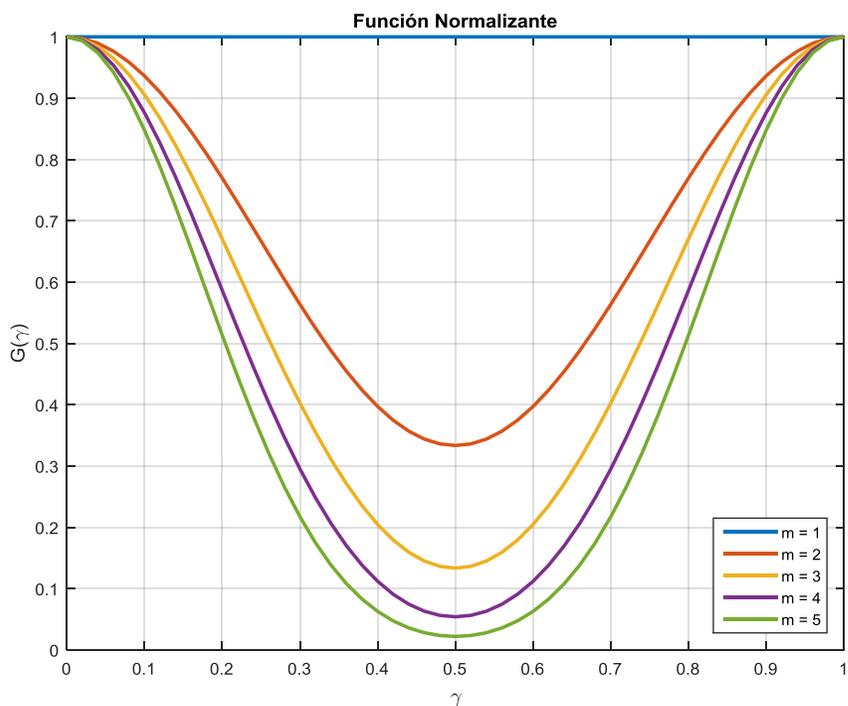


Figura A.1 Gráfica de la función normalizante $G(\gamma)$ para orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

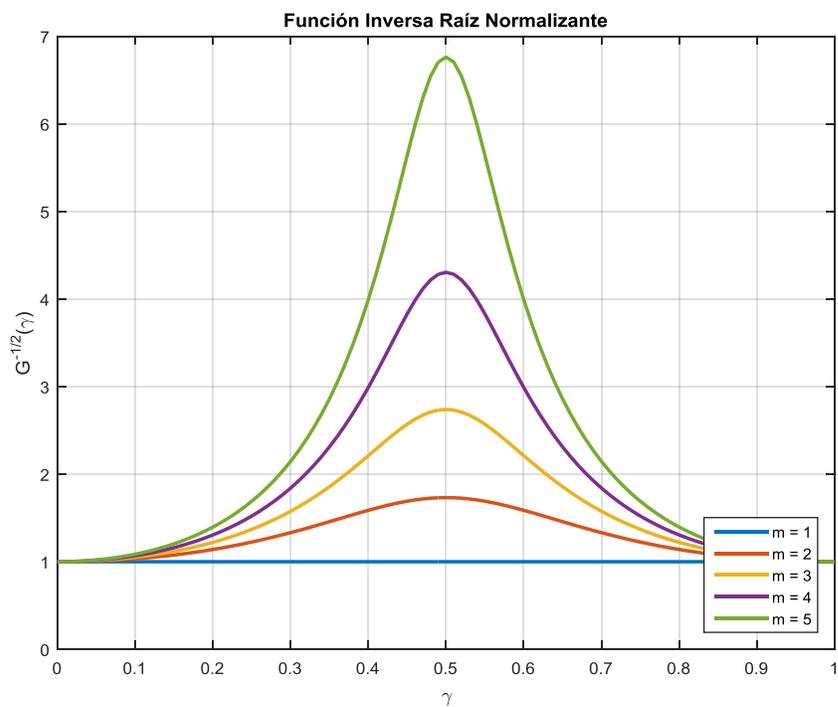


Figura A.2 Gráfica de la función inversa raíz normalizante $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ para orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

A.4 FUNCIÓN $H_1(\gamma)$

La siguiente tabla muestra los coeficientes $h_{m,k}$ usados para computar la función onduleta $\psi(x)$ a partir de $\hat{\varphi}^\dagger(\gamma)$ y $H_I(\gamma)$. Nótese que $h_{m,k} = h_{m,k}^*$, y que $\text{Re}\{h_{1,k}\} = \text{Im}\{h_{2,k}\} = \text{Re}\{h_{3,k}\} = \text{Im}\{h_{4,k}\} = \text{Re}\{h_{5,k}\} = 0$ para toda k .

Tabla A.6 Coeficientes $h_{m,k}$.

k	$\text{Im}\{h_{1,k}\}$	$\text{Re}\{h_{2,k}\}$	$\text{Im}\{h_{3,k}\}$	$\text{Re}\{h_{4,k}\}$	$\text{Im}\{h_{5,k}\}$
0		0.578 163		0.541 736	
1	0.500 000		0.481 094		0.471 151
2		- 0.280 931		- 0.306 830	
3			- 0.097 555		- 0.119 680
4		- 0.048 862		- 0.035 498	
5			- 0.088 272		- 0.097 851
6		0.036 731		0.077 808	
7			0.014 670		0.031 501
8		0.012 000		0.022 685	
9			0.029 686		0.046 451
10		- 0.007 064		- 0.029 747	
11			- 0.002 997		- 0.010 772
12		- 0.002 746		- 0.012 145	
13			- 0.010 686		- 0.024 218
14		0.001 557		0.012 715	
15			0.000 794		0.004 107
16		0.000 653		0.006 141	
17			0.004 034		0.013 048
18		- 0.000 362		- 0.005 799	
19			- 0.000 237		- 0.001 713
20		- 0.000 159		- 0.003 079	
21			- 0.001 564		- 0.007 183
22		0.000 087		0.002 745	
23			0.000 076		0.000 766
24		0.000 039		0.001 546	
25			0.000 617		0.004 016
26		- 0.000 021		- 0.001 331	
27			- 0.000 026		- 0.000 361
28		- 0.000 010		- 0.000 780	
29			- 0.000 247		- 0.002 271
30		0.000 005		0.000 656	
31			0.000 009		0.000 176
32		0.000 002		0.000 396	
33			0.000 100		0.001 296
34		- 0.000 001		- 0.000 327	
35			- 0.000 003		- 0.000 089
36		- 0.000 001		- 0.000 202	
37			- 0.000 041		- 0.000 745
38		$>10^{-6}$		0.000 164	
39			0.000 001		0.000 046
40		$>10^{-6}$		0.000 103	

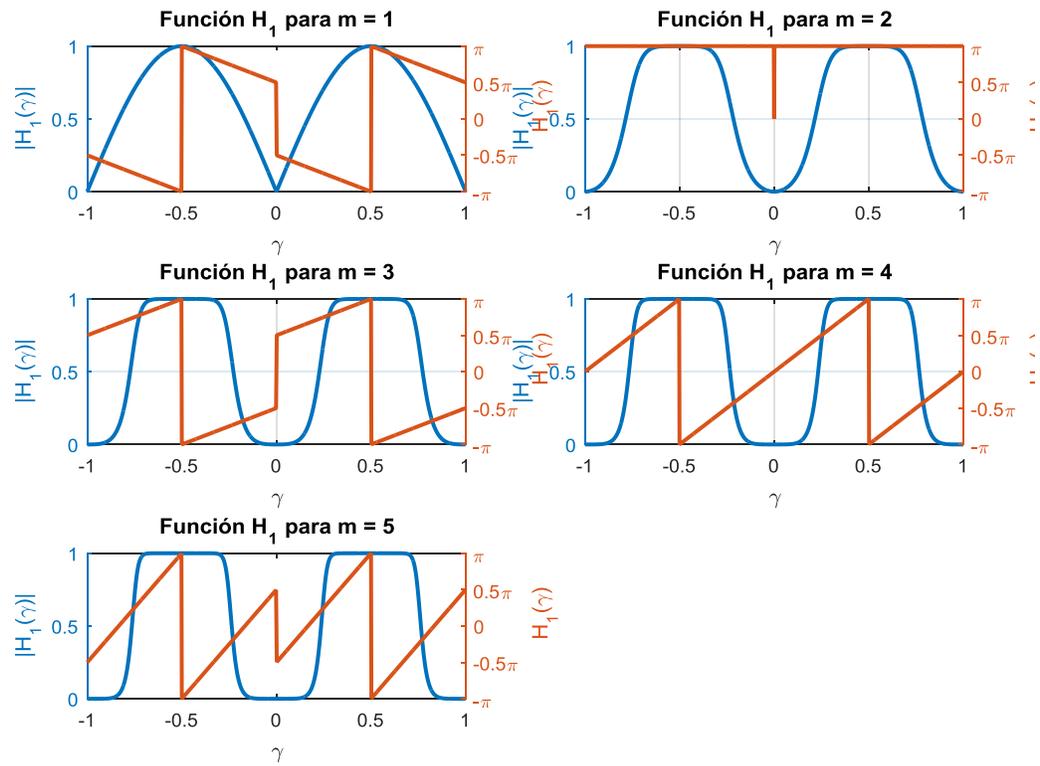


Figura A.3 Magnitud (azul) y fase (rojo) de la función $H_1(\gamma)$ para orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

LISTA DE SÍMBOLOS

- i, k, l, n Índices de suma en una sumatoria, o de una secuencia.
 j Unidad de número imaginario.

ESPACIOS Y REGIONES

- \mathbb{R} Espacio de números reales.
 \mathbb{Z} Espacio de números enteros.
 $L^2(\mathbb{R})$ Espacio de señales cuadráticamente integrables.
 I Intervalo de tiempo en \mathbb{R} .
 T_a Operador de traslación por a en $L^2(\mathbb{R})$.
 E_b Operador de modulación por b en $L^2(\mathbb{R})$.
 D_c Operador de dilatación por c en $L^2(\mathbb{R})$.

FUNCIONES Y SEÑALES

- x, t Variables continua en el tiempo.
 γ Variable continua en la frecuencia.
 n Variable discreta en el tiempo.
 $f(x), f[n]$ Función continua, función discreta.
 $\hat{f}(\gamma)$ Transforma de Fourier de $f(x)$.
 T Periodo de una función periódica.
 a_n, b_n, c_n Coeficientes de Fourier.
 $\varepsilon_C, \varepsilon_D$ Energía de una señal continua y discreta, respectivamente.

MATRICES Y VECTORES

$\mathbf{V}, \{\mathbf{V}_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$	Espacio vectorial, secuencia de subespacios vectoriales.
\mathbf{W}_l	Complemento ortogonal de \mathbf{V}_l con respecto a \mathbf{V}_{l+1} .
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$	Vectores.
a_n, b_n	Elementos de un vector.
Φ	Base vectorial.
ϕ_n	Vector independiente.
α	Vector de coeficientes de una combinación lineal.
α_n	Coefficiente de una combinación lineal.
\mathbf{G}	Matriz de Gram o gramiana.
$\delta_{k,l}$	Delta de Kronecker.
N	Número de muestras o de elementos de un vector.
$\mathbf{I}_{n \times n}$	Matriz identidad de $n \times n$.

TEORÍA DE ONDULETAS

m	Orden del <i>B-spline</i> .
$N_m(x)$	<i>B-spline</i> no centrado de orden m .
$B_m(x), B_m^\dagger(x)$	<i>B-spline</i> centrado de orden m , <i>ídem</i> normalizado.
$D_m(x, \Delta)$	<i>B-spline</i> trasladado en Δ de orden m .
Δ	Traslación aplicada sobre $B_m(x)$.
$\varphi(x), \varphi^\dagger(x)$	Función refinable o escalante, <i>ídem</i> normalizada.
$\psi(x), \psi_{(p)}(x)$	Función onduleta u onduleta madre, <i>ídem</i> ordinalizada.
$G(\gamma)$	Función normalizante.
$g_{m,k}$	Coefficientes de $G(\gamma)$ como serie trigonométrica de Fourier.
$g_{m,k}^\dagger$	Coefficientes de $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ como serie compleja de Fourier.
$H_0(\gamma)$	Función refinante.
$H_1(\gamma)$	Función onduletizante.
$h_{m,k}$	Coefficientes asociados a $H_1(\gamma)$ como serie compleja de Fourier utilizados en la construcción de $\psi(x)$.

MODULACIÓN DIGITAL

- $s_n(t)$ n -ésima señal simbólica en el tiempo.
 M Cardinalidad de amplitudes complejas.
 A_n n -ésima amplitud compleja.
 $p(t)$ Forma de onda en banda base, pulso de duración finita.

PÁRAMETROS Y CONSTANTES DE DISEÑO DE BASE VECTORIAL

- $C_{(p)}(x)$ Indicador de norma de $\psi_{(p)}$ con soporte $I \in (-x, x)$.
 $D_{(p_1-p_2)}(x)$ Indicador de ortogonalidad entre $\psi_{(p_1)}$ y $\psi_{(p_2)}$ con soporte $I \in (-x, x)$.
 S Intervalo de soporte truncado de onduleta.
 P Rango de onduletas de la base.
 Q Frecuencia fundamental de expansión de la base por modulación.
 k_{\max} Armónica máxima de Q .
 BW_p Ancho de banda de onduletas no moduladas.
 BW_Φ Ancho de banda de la base extendida por modulación.
 f_{\max} Frecuencia máxima de BW_Φ .
 f_s Frecuencia de muestreo.
 T_s Periodo de muestreo.
 N_{sam} Número de elementos del vector.

EVALUACIÓN DE SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE DATOS

- $\frac{\epsilon_b}{N_0}$ Relación señal a ruido por bit.
 $P_{\text{pico}}, P_{\text{promedio}}$ Valores pico y promedio de energía de la señal, respectivamente.
 R Tasa binaria.
 W Ancho de banda.

ABREVIATURAS

BL	Battle-Lemarié
PAM	Pulse Amplitude Modulation
BPSK	Binary Phase Shift-Keying
OFDM	Orthogonal Frequency-Division Multiplexing
WOFDM	Wavelet Orthogonal Frequency-Division Multiplexing
AWGN	Additive White Gaussian Noise
PSD	Power Spectral Density
BER	Bit-Error Rate
PAR	Peak-to-Average Power Ratio
BE	Bandwidth Efficiency

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1 Relación biyectiva entre secuencias binarias y símbolos.....	2
1.2 Función escalante φ y funciones onduletas ψ en el plano tiempo-frecuencia.....	3
3.1 <i>B-spline</i> centrados $B_m(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	20
3.2 Densidad espectral de <i>B-spline</i> centrados $B_m(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	21
3.3 <i>B-spline</i> centrado de orden 3 $B_3(x)$ y sus traslaciones enteras $B_3(x - k)$ para $k = 2, 1, -1$ y -2	23
3.4 Función escalante normalizada en el tiempo $\varphi^\dagger(x)$ de orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	26
3.5 Densidad espectral de la función escalante normalizada $\varphi^\dagger(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	27
3.6 Función onduleta en el tiempo $\psi(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	30
3.7 Densidad espectral de la función onduleta en la frecuencia $\psi(x)$ para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	31
3.8 Localización en el plano tiempo-frecuencia de los elementos de la base de onduletas obtenidas a partir de <i>B-Spline</i> centrado.....	32
4.1 Funciones de la base de onduleta BL correspondiente a un <i>B-spline</i> de orden $m = 5$. Función escalante, función onduleta madre, funciones onduletas hijas de primera generación y funciones onduletas hijas de segunda generación.....	34
4.2 Norma de las funciones de la base onduleta para $P = 4$ con soporte redefinido en el intervalo $I \in (-x, x)$; escala vertical completa, acercamiento a la parte superior.....	36

4.3 Ortogonalidad entre funciones de la base onduleta para $P = 4$ con soporte redefinido en $I \in (-x, x)$; escala vertical completa, acercamiento a la parte central.....	37
4.4 Densidad espectral de energía (PSD) de las funciones de la base de onduleta correspondiente a un <i>B-Spline</i> de orden $m = 5$	38
4.5 Densidad espectral de energía de las funciones de la base onduleta BL de $m = 5$ expandida por modulación con $P = 4$ y $Q = 5$: P -tupla sin modular, P -tuplas moduladas en $k \cdot Q$ para $k = 1, 2$ y 3 . Cada P -tupla consiste en función escalante, onduleta madre y dos onduletas hijas de primera generación.....	39
4.6 Densidad espectral de energía de la base vectorial de $N_{sam} = 256$ muestras con $S = 16/3$ seg, $P = 4$, $Q = 5$ Hz y $f_s = 48$ Hz. P -tupla sin modular, P -tupla moduladas en $k \cdot Q$ para $k = 1, 2$ y 3 . Cada P -tupla consiste en función escalante, onduleta madre y onduletas hijas de primera generación.....	40
4.7 Matriz gramiana de la base vectorial expandida por modulación.....	43
5.1 Señal simbólica $s(x)$ correspondiente a la secuencia binaria 1101010000110001 utilizando una base de onduletas BL con $m = 5$, $P = 8$, $Q = 10$ Hz y $S = 4$ seg.....	46
5.2 Amplitudes complejas recuperadas en la recepción para diferentes niveles de relación señal a ruido por bit $\left(\frac{\epsilon_b}{N_0}\right)$ utilizando una base de onduletas BL con $m = 5$, $P = 4$, $Q = 5$ Hz, $S = 4$ seg y $f_s = 64$ Hz. Amplitudes transmitidas como 1; amplitudes transmitidas como -1	48
5.3 Tasa de error binario vs relación señal a ruido por bit utilizando bases de onduletas Battle-Lemarié, bases de onduletas Daubechies y base de OFDM.....	50
5.4 Histograma de la ubicación de máximos de energía en el intervalo de soporte de las señales codificadas con los parámetros $m = 5$, $f_s = 64$ Hz, $P = 4$, $Q = 5$ Hz y $S = 4$ seg.....	51

5.5 Razón de energía pico a valor promedio PAR en función del intervalo de soporte S para bases de onduletas expandidas por modulación y base OFDM.....	52
5.6 Tasa de error binario vs. relación señal a ruido por bit utilizando base de onduletas Battle-Lemarié sin superposición de símbolos y con superposición simbólica. Tasa de error binario para OFDM como referencia.....	54
A.1 Gráfica de la función normalizante $G(\gamma)$ para orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	64
A.2 Gráfica de la función inversa raíz normalizante $\frac{1}{\sqrt{G(\gamma)}}$ para orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	64
A.2 Magnitud y fase de la función $H_1(\gamma)$ para orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	63

ÍNDICE DE TABLAS

1.1 Clasificación de onduletas <i>spline</i> con sus propiedades principales.....	5
4.1 Ancho de banda base no modulada BW_p y frecuencia máxima de la base onduleta BL expandida por modulación en función de P	40
4.2 Parámetros y constantes de diseño de la base vectorial.....	42
5.1 Selección de parámetros de diseño según criterio de desempeño.....	56
A.1 Expresiones analíticas para <i>B-splines</i> de orden $m = 1, 2, 3, 4$ y 5	60
A.2 Derivadas de la función cotangente.....	61
A.3 Función $G(\gamma)$ para <i>B-splines</i> de orden m como una suma de potencias pares de cosenos.....	62
A.4 Función $G(\gamma)$ para <i>B-splines</i> de orden m como una suma de cosenos de ángulos dobles.....	62
A.5 Coeficientes $g_{m,k}^+$	63
A.6 Coeficientes $h_{m,k}$	65

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Proakis, John G. y Masoud Salehi. *Digital Communications*. 5th ed. McGraw-Hill Higher Education. Boston: McGraw-Hill, 2008.
- [2] Daubechies, Ingrid. *Cbms-Nsf Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Vol. 61, *Ten Lectures On Wavelets*. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [3] Chui, C K. *Wavelet Analysis and Its Applications*. Vol. v. 1, *An Introduction to Wavelets*. Boston: Academic Press, ©1992.
- [4] Keinert, Fritz. *Wavelets and Multiwavelets*. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, ©2004.
- [5] M. Unser. *Ten Good Reasons for Using Spline Wavelets*, Proc. SPIE Vol. 3169, *Wavelets Applications in Signal and Image Processing V*, 1997, pp. 422-431.
- [6] Chen Zhaonan et al., *Maximal Capacity Nonorthogonal Pulse Shape Modulation*. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, vol. 28, issue 6, pp. 1699–1708.
- [7] B.G. Negash. *Wavelet Based OFDM for Wireless Channels*. Vehicular Technology Conference, 2001. VTC 2001 Spring. IEEE VTS 53rd (Volume:1).
- [8] P.P. Gandhi; S.S. Rao; R.S. Pappu. *Wavelets for Baseband Coding of Waveforms*, Global Telecommunications Conference, 1994. GLOBECOM '94. Communications: The Global Bridge., IEEE.
- [9] F. Daneshgaran, M. Mondin and F. Dosis. *Comparative study of the performance of wavelets as shaping pulses for modulation over linear and non-linear channels*. Journal of Communications and Networks, vol. 2, no. 3, pp. 207-217, Sept. 2000.

- [10] Christensen, Ole. *Functions, Spaces, and Expansions: Mathematical Tools in Physics and Engineering*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston, Mass.: Birkhäuser, ©2010.
- [11] Vetterli, Martin; Jelena Kovačević y Vivek K. Goyal. *Foundations of Signal Processing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [12] Kölbig, K.S. *The polygamma function and the derivatives of the cotangent function for rational arguments*. <https://cds.cern.ch/record/298844>.
- [13] Michael E. Hoffman. *Derivative Polynomials for Tangent and Secant*. The American Mathematical Monthly, vol. 102, no. 1 (Jan., 1995), pp. 23-30.
- [14] Oppenheim, Alan V.; Alan S. Willsky; y S. Hamid Nawab. *Señales y Sistemas*. 2da. ed. México: Prentice Hall, © 1998.
- [15] Roupheal, Tony J. *RF and Digital Signal Processing for Software-Defined Radio: A Multi-Standard Multi-Mode Approach*. Amsterdam: Newnes, ©2009.
- [16] Platas Garza, M.A. *Una extensión a la transformada de Fourier, transformada Taylor-Fourier*, tesis doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N.L. 2011.
- [17] Trejo Rocha, Vidal Alfredo. *Esquema de Transmisión de Información No Ortogonal mediante Transformadas Taylor-Fourier y Legendre-Fourier*, tesis de maestría, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N.L. 2017.