

## TRIGONOMETRÍA ELÍPTICA PARA SU USO EN INGENIERIA

Juan Camilo Valencia Estrada [1]  
Álvaro Hernán Bedoya Calle [2]

[1] *Ingeniero de Producción, Universidad EAFIT. Maestro en Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT. Profesor asistente, Escuela de Ingeniería de Antioquia.*

[2] *Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Antioquia. Maestro en Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT.*

Abstract: Se presenta a continuación la creación de funciones trigonométricas especiales, con base en la geometría elíptica en coordenadas cartesianas y polares, que permiten describir una torsión del plano polar, para caracterizar variables físicas, con muchas aplicaciones en la industria electrónica, también para modelar distribuciones de probabilidad finitas, para caracterizar el astigmatismo oblicuo en óptica, y para modelar matemáticamente la cornea humana.

Keywords: Trigonometría elíptica,  $\beta \sin$ , excentricidad, semieje, astigmatismo.

### 1. INTRODUCCION.

Considerando una torsión del plano polar se necesitan crear unas funciones especiales que sean equivalentes a las funciones trigonométricas circulares e hiperbólicas que surgen de los triángulos rectángulos formados por el origen de coordenadas, los diferentes puntos de un círculo e hipérbola unitaria y los puntos de las respectivas proyecciones normales a los ejes principales, que en forma canónica corresponden al eje  $x$  y  $y$ . De este concepto se aclara que las funciones trigonométricas circulares surgen de

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

para crear las funciones trigonométricas de la misma manera que Thomas Fincke en 1583<sup>1</sup> creó la trigonometría con la notación moderna que se usa canónicamente, que fue refinada por William Oughtred en 1632 con:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= y, & \tan \alpha &= \frac{y}{x}, & \sec \alpha &= \frac{1}{x}, \\ \cos \alpha &= x, & \cot \alpha &= \frac{x}{y}, & \csc \alpha &= \frac{1}{y}. \end{aligned} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Libro 14: *Geometria rotundi*. El uso de las abreviaturas para las funciones trigonométricas proviene de Fincke.

Las anteriores funciones trigonométricas circulares<sup>2</sup> permiten describir fácilmente la naturaleza cíclica de orden 4 que surge de la rotación del radio unitario cuando se conmuta de cuadrante. Estas funciones describen la naturaleza del tiempo real si el ángulo es  $t$ , de la misma manera en que funciona un reloj.

La trigonometría hiperbólica fue creada por Vincenzo Riccati (1707-1775), pero la notación moderna fue impulsada por Johann Heinrich Lambert en 1768<sup>3</sup>, para describir el comportamiento equivalente de las funciones trigonométricas circulares cuando los ángulos o el tiempo son imaginarios.

Las funciones de las hipérbolas canónicas unitarias generadoras corresponden a:

$$\mp x^2 \pm y^2 = 1 \quad (3)$$

con las respectivas funciones trigonométricas hiperbólicas generadas:

$$\begin{aligned} \sinh \alpha &= \frac{\sin i \alpha}{i} = y, & \cosh \alpha &= \cos i \alpha = x, \\ \tanh \alpha &= \frac{\tan i \alpha}{i} = \frac{y}{x}, & \coth \alpha &= -\frac{\cot i \alpha}{i} = \frac{x}{y}, \\ \operatorname{sech} \alpha &= \frac{1}{\cosh \alpha} = \frac{1}{x}, & \operatorname{csc h} \alpha &= -\frac{1}{\sinh \alpha} = \frac{1}{y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Posteriormente, Leonhard Euler (1707-1783) descubrió la representación exponencial para ángulos reales e imaginarios, gracias a las representaciones en series de potencias descubiertas por James Gregory:

$$\begin{aligned} e^{\pm i \alpha} &= \cos \alpha \pm i \sin \alpha \\ e^{\pm \alpha} &= \cosh \alpha \pm \sinh \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

En el plano cartesiano canónico, considerando las funciones trigonométricas circulares, la función seno adquiere sus valores extremos unitarios en  $\alpha = \pm \pi/2$  con  $\pm 1$  respectivamente.

<sup>2</sup> Muy diferentes de las funciones trigonométricas esféricas que surgen de los triángulos rectángulos sobre la superficie de una esfera.

<sup>3</sup> *Histoire de l'académie Royele des sciences et des belles-lettres de Berlin*, vol. XXIV, pág. 327.

Si se efectúa una torsión del plano cartesiano canónico conservando el eje  $x$  en la posición canónica y posicionando el eje  $y$  con un ángulo de astigmatismo  $\beta \neq \pi/2$ , la función seno correspondiente a la torsión debe adquirir sus valores extremos unitarios en  $\beta$  y  $\beta + \pi$ .

Estas funciones trigonométricas que se desean crear permiten describir fácilmente muchos problemas matemáticos de ingeniería que actualmente pueden ser modelados con expresiones demasiado complejas.

## 2. REPRESENTACIONES POLARES.

En las representaciones polares de las funciones trigonométricas los radios negativos no existen, ya que los radios negativos son conceptualmente "imaginarios" y matemáticamente reales. Para clarificar este concepto se considera la función  $r = \sqrt{\sin^2 \alpha}$ , como se observa en la figura 1, esta curva llamada *rhodonea*<sup>4</sup>. Si la función fuese  $r = \sin \alpha$ , para  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , se obtiene solamente la gráfica en el primer semiplano (Cuadrantes I y II.), ya que los radios negativos no existen, así, por convención de signos se establece que los radios son positivos si están en el primer semiplano, y negativos si están en el segundo semiplano (Cuadrantes III y IV.).

Considerando una torsión del plano polar que permita establecer una nueva familia de funciones trigonométricas con las mismas razones fundamentales usadas en (2) y (4), se obtiene una distorsión del círculo que degenera en una elipse rotada como se muestra en la figura 2, con  $r_{\max} = \pm 1$  para el ángulo de torsión  $\beta$  y el parámetro de excentricidad  $e$ , según la función seno equivalente<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> Denominación dada por el matemático italiano Guido Grandi entre 1723 y 1728, ya que se parece a los pétalos de las rosas.

<sup>5</sup> Función creada como  $\beta \sin_e \alpha$ , con astigmatismo oblicuo  $\beta$  y excentricidad  $e$ .

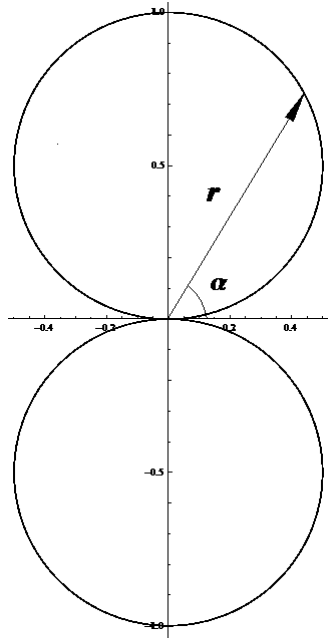


Fig. 1. Representación polar de la función  $r = \sqrt{\sin^2 \alpha}$ , para  $0 \leq \alpha < 2\pi$ .

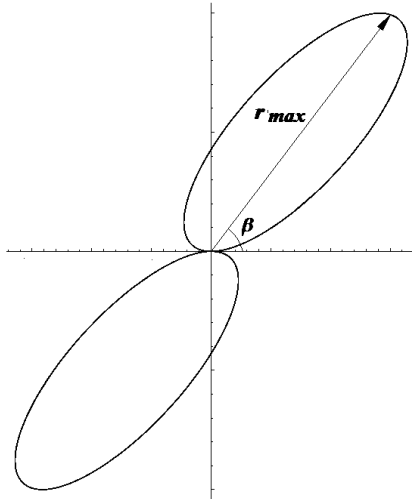


Fig. 2. Representación polar de la figura que representa  $r = \sqrt{\beta \sin^2 \alpha}$ , para  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ; con la convención de signos para los radios, con  $\beta = \pi/4$  y  $e = 1/2$ .

A continuación se presenta todo el método matemático que permite caracterizar la elipse rotada con semieje mayor  $a$  y excentricidad  $e$ .

### 3. CONSTRUCCIÓN.

Se construye una elipse canónica en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  con semiejes mayor 1 y menor  $b$ , con  $0 < b \leq 1$  y centro en el origen, con la representación explícita

$$y = \pm b \sqrt{1 - x^2} \quad (6)$$

que también puede ser expresada en coordenadas polares con notación explícita para el primer semiplano

$$r = \frac{b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \quad (7)$$

Para rotarla un ángulo  $\theta$ :

$$r = \frac{b}{\sqrt{b^2 \cos^2(\alpha - \theta) + \sin^2(\alpha - \theta)}} \quad (8)$$

Para luego determinar el punto mínimo, donde la recta cartesiana tangente tiene pendiente cero:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{min}} = 0 \Rightarrow \left. \frac{r' \sin \alpha + r \cos \alpha}{r' \cos \alpha - r \sin \alpha} \right|_{\alpha_{min} = \gamma} = 0 \quad (9)$$

Evaluando únicamente el numerador y simplificando:

$$(b^2 + 1) \cos \gamma + (b^2 - 1) \cos(\gamma - 2\theta) = 0 \quad (10)$$

Cuyas soluciones validas para los puntos críticos máximo y mínimo, que determinan el eje que contiene el punto mínimo, con un ángulo  $\gamma$ , son:

$$\gamma = -\cos^{-1} \left( \frac{(b^2 - 1) \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sqrt{b^4 + 1 + (b^4 - 1) \cos(2\theta)}} \right) \quad (11)$$

y si la excentricidad  $e$  es conocida,  $b = \sqrt{1 - e^2}$ , el valor del ángulo  $\gamma$  también puede ser calculado con:

$$\gamma = -\cos^{-1} \left( -\frac{e^2 \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sqrt{(2-2e^2+e^4+e^2(e^2-2)\cos(2\theta))}} \right) \quad (12)$$

Cuando se necesita determinar el ángulo de rotación  $\theta$ , si se prescribe el eje principal que contiene el punto mínimo ( $\gamma$ ,  $r(\gamma)$ ) para una elipse con semieje mayor unitario y semieje menor  $b$  o en su defecto con excentricidad  $e$ , se obtiene de la solución para  $\theta$  en (10):

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \left( \gamma + \cos^{-1} \left( \frac{1+b^2}{1-b^2} \cos \gamma \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \gamma + \cos^{-1} \left( \frac{2-e^2}{e^2} \cos \gamma \right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Para definir la nueva función  $\beta \sin_e(\alpha)$  se debe escalar la elipse rotada de manera que la cuerda elíptica máxima sea unitaria. Como el astigmatismo es invariante con el escalado las expresiones en términos de la excentricidad son invariantes.

Las coordenadas polares del punto mínimo son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r(\gamma) \\ \gamma \end{bmatrix} &= \\ &\begin{bmatrix} \sqrt{2-e^2 - \frac{2(e^2-1)}{-2+e^2+e^2\cos(2\theta)}} \\ -\cos^{-1} \left( -\frac{e^2 \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sqrt{2-2e^2+e^4+e^2(e^2-2)\cos(2\theta)}} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

y las coordenadas cartesianas, como función de la excentricidad, son:

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{e^2 \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sqrt{2-e^2-e^2\cos(2\theta)}} \\ -\frac{\sqrt{2-e^2-e^2\cos(2\theta)}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Trasladando la función elíptica rotada con origen en el punto mínimo, de acuerdo a la construcción propuesta, se obtiene la función en coordenadas polares, reemplazando los valores de  $h$  y  $k$  respectivos:

$$r = \frac{4\sqrt{2} b^2 |\sin(\alpha)|}{\left( \frac{(1+b^2 - (1-b^2)\cos(2(\alpha-\theta)))}{\sqrt{1+b^2 - (1-b^2)\cos(2\theta)}} \right)} \quad (16)$$

que como función de la excentricidad se puede expresar con:

$$r = \frac{4\sqrt{2}(1-e^2) |\sin \alpha|}{\left( \frac{(2-e^2(1+\cos(2(\alpha-\theta))))}{\sqrt{2-e^2(1+\cos(2(\alpha-\theta)))}} \right)} \quad (17)$$

Diferenciando la expresión (16) para determinar el radio máximo para un ángulo de astigmatismo  $\beta$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\alpha} \Big|_{\beta} = 0 &\Rightarrow 2\sqrt{2} b^2 (2(b^2+1)\cos\beta + \\ &(b^2-1)(3\cos(\beta-2\theta) - \cos(3\beta-2\theta))) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

de la cual se puede obtener fácilmente el ángulo de rotación de la elipse, para un ángulo oblicuo  $\beta$  predeterminado, considerando únicamente la raíz válida, que caracteriza el astigmatismo:

$$\theta = \mp \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(13-7b^2 - (4-8b^2)\cos(2\beta) - (b^2+1)\cos(4\beta) - 8\sqrt{2}\sqrt{1-3b^2+b^4 - (b^4-b^2+1)\cos(2\beta)} \sin^3 \beta)}{(1-b^2)(5-3\cos(2\beta))}} \right) \quad (19)$$

donde el signo depende del cuadrante del astigmatismo y es equivalente a  $\text{sgn}(\pi/2 - \beta)$ .

El ángulo de rotación expresado como función de la excentricidad es invariante con el escalado:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2e} \sqrt{\frac{-6-7e^2+4(-1+2e^2)\cos(2\beta)-(-2+e^2)\cos(4\beta)+8\sqrt{2}\sqrt{-1+e^2+e^4+(-1+e^2-e^4)\cos(2\beta)}\sin^3\beta}{3\cos(2\beta)-5}} \right) \quad (20)$$

con un discriminante que garantiza una solución válida y real si

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5+2\cos(2\beta)-3\cos^2(2\beta)}-1-\cos(2\beta)}}{2\sin\beta} < e < 1 \quad (21)$$

Definiendo el seno astigmático con parámetros predeterminados  $e$  y  $\beta$  verificados según (21), usando el ángulo de rotación  $\theta$  según (20):

$$\beta \sin_e \alpha = \pm \left( \frac{e^2 \cos(2(\beta-\theta)) + e^2 - 2}{e^2 \cos(2(\alpha-\theta)) + e^2 - 2} \right) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (22)$$

para todo  $\alpha$  en el primer semiplano usando el signo positivo, la cual es válida en ciertos dominios.

A continuación se muestra la figura 3 usando las funciones anteriores con diferentes valores de excentricidad.

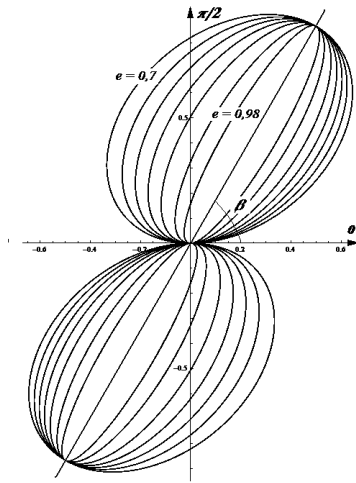


Fig. 3. Representación polar de la función  $r = \sqrt{\beta \sin_e^2 \alpha}$ , para  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , con la convención de signos para los radios, con  $\beta = \pi/3$  y  $e = 0,7, 0,75, 0,8, 0,85, 0,9, 0,95$  y  $0,98$ .

También se muestra en la figura 4 la representación temporal con los mismos parámetros de la figura 3 comparados con la función canónica seno.

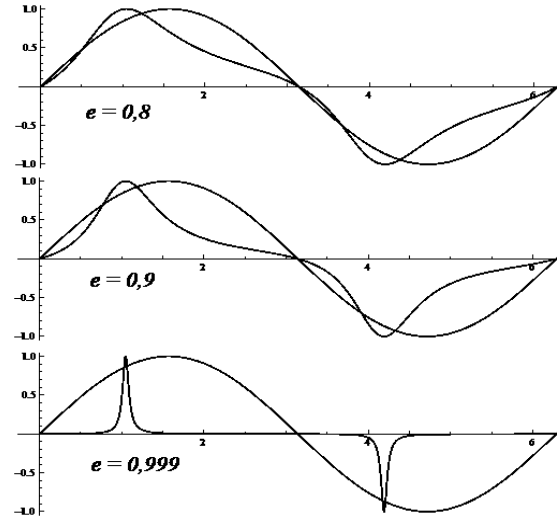


Fig. 4. Representación temporal de la función  $\beta \sin_e \alpha$ , para  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ; con la convención de signos para los radios, con  $\beta = \pi/3$  y  $e = 0,8, 0,9$  y  $0,999$ . Cuando  $e = 1$ , la función converge en una función impulso de amplitud nula, bastante útil para modelar problemas de ingeniería electrónica y espintrónica, incluyendo la resonancia magnética.

Como caso particular es importante resaltar que si  $\beta = n\pi/2$  la solución tiende al límite:

$$\beta \rightarrow \pi/2 \sin_e \alpha = \pm \frac{2(1-e^2) \sin \alpha}{2-e^2+e^2 \cos(2\alpha)} \quad (23)$$

Se observa en la Figura 5 la descripción de la función  $\beta \sin_e$  sin astigmatismo para diferentes excentricidades, función que puede ser útil para modelar funciones físicas y estadísticas.

Usando el mismo argumento utilizado para construir la función  $\beta \sin_e$  se establece todas las demás funciones trigonométricas, como:

$$\beta \cos_e \alpha = \mp \left( \frac{e^2 \cos(2(\beta-\theta)) + e^2 - 2}{e^2 \cos(2(\alpha-\beta+\theta)) + e^2 - 2} \right) \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin \beta} \quad (24)$$

y si  $\beta = \pi/2$

$$\beta_{\rightarrow \pi/2} \cos_e \alpha = \pm \frac{2(1-e^2) \cos \alpha}{2-e^2-e^2 \cos(2\alpha)} \quad (25)$$

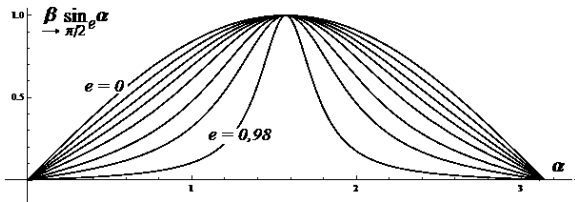


Fig. 5. Representación temporal de la función  $\beta \sin_e \alpha$ , para  $0 \leq \alpha < \pi$ ; con la convención de signos para los radios, con  $\beta = \pi/2$  y  $e = 0,45, 0,55, 0,65, 0,75, 0,85, 0,92$  y  $0,98$ .

Conocidas las funciones fundamentales  $\beta \sin_e \alpha$  y  $\beta \cos_e \alpha$  se puede calcular la función generadora con

$$r = \sqrt{\beta \sin_e^2 \alpha + \beta \cos_e^2 \alpha} \quad (26)$$

Se ilustra esta función en la figura 6 para un astigmatismo particular.

#### 4. APLICACIONES.

Estas funciones tienen numerosas aplicaciones en ingeniería.

##### 4.1 Aplicación Óptica.

El ojo emélope ideal le corresponde generalmente una cornea perfecta de revolución, que en forma canónica tiene como sección cortada:

$$\begin{aligned} z_a &= a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + a_8 r^8 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} r^{2i} \end{aligned} \quad (26)$$

donde normalmente los coeficientes  $\{a_{2i}\}$  que caracterizan la geometría de la sección son reales y en su mayoría positivos; y los exponentes del polinomio característico son pares.

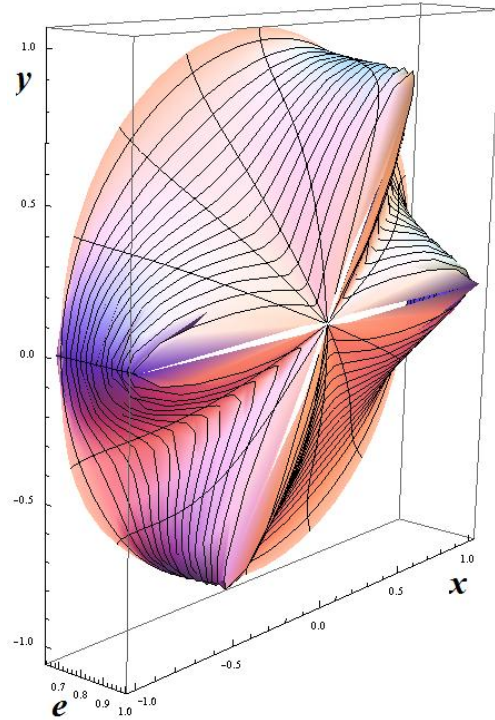


Fig. 6. Representación tridimensional de la función de la función  $r = \sqrt{\beta \sin_e^2 \alpha + \beta \cos_e^2 \alpha}$  en coordenadas paramétricas, con  $\beta = \pi/3$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  y la excentricidad  $e$  en el intervalo real menor que la unidad.

La realidad biológica presenta una geometría corneal que se caracteriza por tener una forma tórica de revolución con ejes principales casi siempre ortogonales (Astigmatismo regular), donde la geometría de las secciones tóricas son funciones de un sistema polar:

$$\begin{aligned} z_a(\alpha) &= a_2(\alpha) r^2 + a_4(\alpha) r^4 + a_6(\alpha) r^6 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}(\alpha) r^{2i} \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $\alpha$  varía entre 0 y  $2\pi$  radianes, ya que  $z_a(\alpha) = z_a(\alpha + 2\pi)$  si se asumen toroides.

La información suministrada por lo modernos topógrafos computarizados describen la superficie de

la cornea humana mediante zonas de isocurvatura con el mismo color como se observa en Figura 7. El astigmatismo corneal se indica con la dirección de los ejes principales del toroide que mejor se ajusta a la superficie corneal.

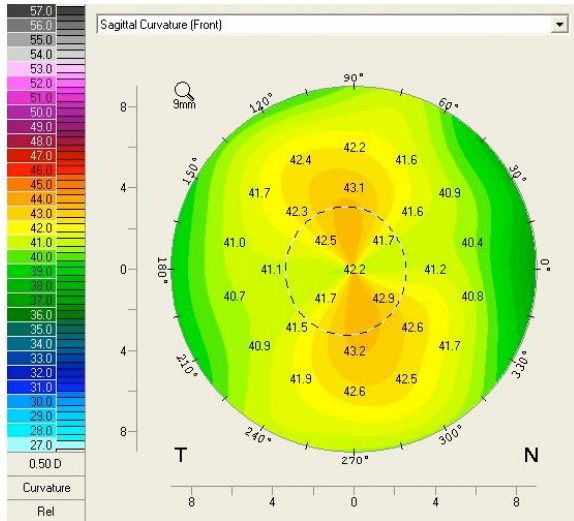


Fig. 7. Topografía corneal computarizada de la córnea humana con alto astigmatismo corneal regular, el más común en la práctica clínica. Para la regresión estadística se usa principalmente la curvatura sagital.

Donde por técnicas de regresión y correlación se puede formular la superficie corneal con la geometría del toroide que mejor se ajusta a la regresión de la superficie corneal puede ser especificada relativamente con relación al ángulo del eje principal  $\theta_0 = \theta_{Axis}$  para un astigmatismo regular con

$$\begin{aligned} z_a(\alpha) &= a_2(\theta_0 + \alpha)r^2 + a_4(\theta_0 + \alpha)r^4 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}(\theta_0 + \alpha)r^{2i} \end{aligned} \quad (28)$$

y  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  radianes, para caracterizar con un cuadrante toda la superficie, ya que el resto es simétrico.

Considerando una variación armónica de la superficie tórica de revolución, todos los coeficientes  $\{a_{2i}\}$  pueden ser referenciados con una única expresión armónica:

$$\begin{aligned} a_{2i}(\theta) &= a_{2i}(\theta_0 + \alpha) \\ &= a_{2i}(\theta_0) + \begin{pmatrix} a_{2i}(\theta_0 + \pi/2) \\ -a_{2i}(\theta_0) \end{pmatrix} \sin \alpha \end{aligned} \quad (29)$$

si  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Reemplazando (29) en (28) se obtiene la expresión:

$$z_a(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_{2i}(\theta_0) + \begin{pmatrix} a_{2i}(\theta_0 + \pi/2) \\ -a_{2i}(\theta_0) \end{pmatrix} \sin \alpha \right) r^{2i} \quad (30)$$

así, la geometría de la sección del toroide se reduce a la variación armónica de la geometría de la sección que contiene el meridiano mas plano. Como normalmente las corneas se aplanan hacia la periferia, los coeficientes disminuyen cuando  $i$  aumenta; y también cuando varían armónicamente, aumentan cuando  $\alpha$  aumenta.

Si el astigmatismo es irregular con ejes no ortogonales, pero con secciones con geometrías de revolución, la geometría de la superficie tórica que mejor se ajusta puede ser especificada con una variación elíptica de la armonía, para un ángulo  $\beta$  entre ejes principales, usando la función  $\beta \sin_e \alpha$ :

$$z_a(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_{2i}(\theta_0) + \begin{pmatrix} a_{2i}(\theta_0 + \pi/2) \\ -a_{2i}(\theta_0) \end{pmatrix} \beta \sin_e \alpha \right) r^{2i} \quad (31)$$

Este tipo particular de astigmatismo no es muy común en la práctica clínica, sin embargo se hallan casos asociados a keratoconos. Actualmente no se fabrican lentes tóricos para solucionar el error refractivo que genera el astigmatismo irregular simétrico y centrado con ejes no ortogonales. Estos lentes podrían fabricarse usando las modernas técnicas de fresado y erosionado de penetración CNC.

#### 4.2 Aplicación Estadística.

La función estandarizada  $\beta \cos_e \alpha$  tiene practicas aplicaciones estadísticas con la gran ventaja de ser una función continua de probabilidad finita que se ajusta mejor a los valores reales de la naturaleza que las funciones de distribución infinitas como la curva

normal y las distribuciones *t*-Student, ya que son unimodales y pueden estar sesgadas a la derecha o a la izquierda con el parámetro  $\beta$ . A continuación se presenta la formulación para la distribución de probabilidad estandarizada con algunas de sus propiedades:

Sea  $\beta \cos_e x$ , con  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  una distribución de probabilidad para cierto valor de  $e$ , así,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta \cos_e x \, dx = 1 \quad (32)$$

Reemplazando (24) en (32)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{e^2 \cos(2(\beta - \theta)) + e^2 - 2}{e^2 \cos(2(x - \beta + \theta)) + e^2 - 2} \right) \frac{\sin(x - \beta)}{\sin \beta} \, dx = 1 \quad (33)$$

la cual es válida para un único valor de  $e$  si se predetermina  $\beta$  que corresponde al ángulo modal.

Siendo de mayor utilidad práctica la distribución de probabilidad simétrica con  $\beta = \pi/2$ , la excentricidad converge en el número trascendental

$$e = 0,9190097215604317\dots$$

para obtener la función de probabilidad estandarizada que satisface:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2(1 - e^2) \cos x}{2 - e^2 - e^2 \cos(2x)} \, dx = \frac{2\sqrt{1 - e^2} \sin^{-1} e}{e} = 1 \quad (34)$$

Como la función (34) no tiene solución analítica, la solución para la excentricidad  $e$  es trascendental y se obtiene el valor mediante aproximación por series de

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{1 - e^2} \sin^{-1} e}{e} \\ &= \frac{2\sqrt{1 - e^2}}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - 1/2) e^{2n-1}}{(2n - 1) \sqrt{\pi} \Gamma(n)} = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

Para obtener la función de distribución de probabilidad estandarizada

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2(1 - e^2) \cos x}{2 - e^2 - e^2 \cos(2x)} \\ &= \frac{0,3108422634 \cos x}{1,155421132 - 0,8445788683 \cos(2x)} \end{aligned} \quad (36)$$

Donde la función generadora de momentos para la distribución simétrica corresponde a:

$$M^{(t)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^t f(x) \, dx \quad (37)$$

donde verificar que la media  $M^{(1)} = \bar{x} = 0$  y la varianza

$$M^{(2)} = \sigma^2 \approx 0,2387513794.$$

Si la excentricidad no está estandarizada, la varianza tiene como dominio  $0 \leq \sigma^2 \leq \pi^2/2 - 4$ .

En la Figura 7 se presenta la función de probabilidad acumulada sin la excentricidad estandarizada.

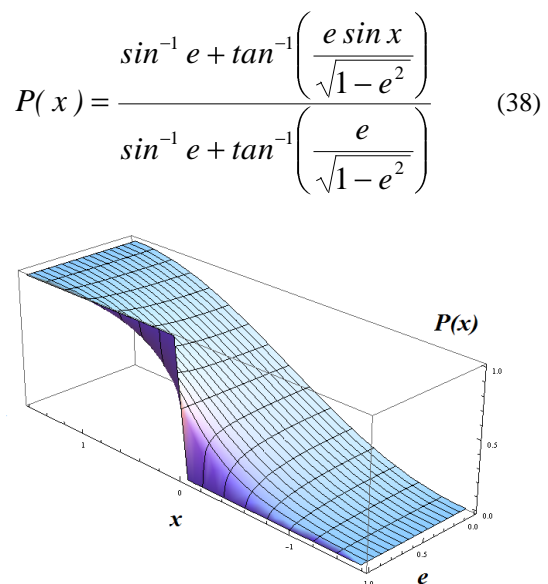


Fig. 7. Representación tridimensional de la función de probabilidad acumulada para todas las excentricidades calculada con la expresión (38).



## 5. CONCLUSIONES.

Se espera que estas simples funciones permitan mejorar la calidad de nuestras vidas, mejorando en especial la salud visual y simplificando los modelos estadísticos.

## BIBLIOGRAFIA.

Kincaid, D., Cheney, W. (1994). *Análisis Numérico: Las Matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana.

Valencia E., Juan C y Bedoya C., Álvaro H. (2009). *Regresión y correlación de superficies ópticas de revolución en forma canónica: Conocidos los radios de curvatura*. Revista EIA ( En proceso.).