

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



CONTROL DE ORIENTACIÓN Y ALTITUD DE UN VEHÍCULO AÉREO  
NO TRIPULADO, DEL TIPO CUADRIRROTOR

POR

EDWIN BALTAZAR CORTEZ AGUILAR

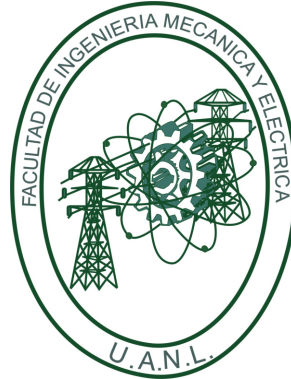
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

OCTUBRE 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DE ORIENTACIÓN Y ALTITUD DE UN  
VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO, DEL TIPO  
CUADRIRROTOR

POR

EDWIN BALTAZAR CORTEZ AGUILAR

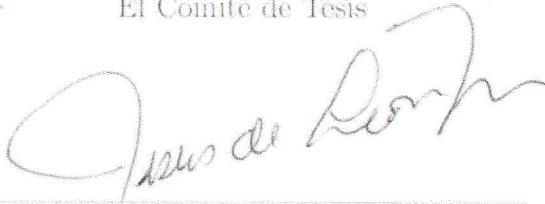
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

OCTUBRE 2016

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Control de orientación y altitud de un vehículo aéreo no tripulado, del tipo cuadrirrotor»; realizada por el alumno Edwin Baltazar Cortez Aguilar, con número de matrícula 1369669, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica .

El Comité de Tesis



Dr. Jesús de León Morales

Asesor



Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

Revisor



Dr. Oscar Salvador Salas Peña

Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, octubre 2016

*Esta tesis es dedicada a mi madre, padre y hermano.  
Por su apoyo y confianza en el transcurso de la tesis.*



# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Antecedentes . . . . .	2
1.4. Hipótesis . . . . .	4
1.5. Objetivos . . . . .	5
1.6. Organización de la tesis . . . . .	5
<b>2. UAV-Cuadrirotor</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.1.1. Historia . . . . .	8
2.1.2. Clasificación . . . . .	9
2.1.3. Aplicaciones . . . . .	10
2.2. Cuadrirotor . . . . .	12

---

2.2.1. Historia . . . . .	13
2.2.2. Principios de operación . . . . .	17
2.3. Conclusiones . . . . .	21
<b>3. Modelo dinámico</b>	<b>22</b>
3.1. Introducción . . . . .	22
3.2. Modelo del cuádrirrotor . . . . .	23
3.2.1. Fuerzas y momentos aerodinámicos . . . . .	25
3.2.2. Momentos generalizados y fuerzas . . . . .	26
3.2.3. Modelo dinámico del cuádrirrotor . . . . .	28
3.3. Dinámica de los rotores . . . . .	29
3.4. Modelo dinámico utilizado para el control del cuádrirrotor . . . . .	30
3.5. Conclusiones . . . . .	33
<b>4. Esquema de control Modos Deslizantes de Alto Orden</b>	<b>34</b>
4.1. Introducción . . . . .	34
4.2. Control por Modos Deslizantes . . . . .	35
4.3. Control por Modos Deslizantes de Alto Orden . . . . .	36
4.3.1. Controlador Super Twisting . . . . .	37
4.3.2. Algoritmo Super Twisting Adaptativo . . . . .	37
4.3.3. Algoritmo Super Twisting Adaptativo aplicado al modelo del cuádrirrotor . . . . .	45

---

4.4. Conclusiones . . . . .	47
<b>5. Esquema de control Backstepping Integral</b>	<b>48</b>
5.1. Introducción . . . . .	48
5.2. Backstepping . . . . .	49
5.2.1. Diseño del controlador Backstepping . . . . .	53
5.2.2. Diseño del controlador Backstepping Integral . . . . .	54
5.2.3. Control Backstepping Integral con perturbación . . . . .	55
5.3. Conclusiones . . . . .	58
<b>6. Resultados de simulación</b>	<b>60</b>
6.1. Introducción . . . . .	60
6.2. Caso nominal y caso perturbado . . . . .	62
6.2.1. Caso nominal . . . . .	62
6.2.2. Caso perturbado . . . . .	66
6.3. Conclusiones . . . . .	70
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>72</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	72
7.2. Trabajos futuros . . . . .	74
<b>A. Plataforma experimental</b>	<b>75</b>
A.1. Motores . . . . .	77

---

A.2. Controladores electrónicos de velocidad (ESC) . . . . .	79
A.3. Sensores . . . . .	80
A.3.1. Giroscopio . . . . .	81
A.3.2. Acelerómetro . . . . .	82
A.3.3. Magnetómetro . . . . .	83
A.3.4. Sensor de presión barométrica . . . . .	83
A.3.5. Sensor de proximidad . . . . .	84
A.3.6. Sistema de posicionamiento global (GPS) . . . . .	85
A.4. Unidad de control . . . . .	85
A.5. Transmisión de datos . . . . .	87
A.6. Batería Li-Po . . . . .	88

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.1. Algunos tipos de aeronaves UAV's . . . . .	9
2.2. Estructura rígida de un cuadirrotor [2]. . . . .	12
2.3. Primer cuadirrotor de Bréguet-Richet. . . . .	13
2.4. Cuadricoptero de Bothezat. . . . .	14
2.5. La aeronave Oeminchen No. 2. . . . .	14
2.6. La aeronave "Convertawings Model A". . . . .	15
2.7. Cuadirrotor Curtis-Wright VZ-7. . . . .	16
2.8. A.R. Drone 2.0. . . . .	16
2.9. Phantom 3. . . . .	17
2.10. Tipos de configuraciones para el cuadirrotor. . . . .	17
2.11. Esquema general del cuadirrotor. . . . .	18
2.12. Movimiento del cabeceo. . . . .	19
2.13. Movimiento del alabeo. . . . .	20
2.14. Movimiento de la guiñada. . . . .	20
3.1. Marcos de referencia de la tierra y del cuadirrotor. . . . .	23

---

3.2. Circuito eléctrico del rotor. . . . .	29
5.1. El diagrama bloque del sistema (5.1)-(5.2) . . . . .	50
5.2. El diagrama bloque del sistema (5.4) . . . . .	51
5.3. El diagrama bloque del sistema (5.5) . . . . .	52
6.1. Seguimiento de trayectorias escalón $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso nominal . . .	62
6.2. Error de seguimiento escalón $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso nominal . . . . .	63
6.3. Velocidades angulares $(\Omega_{1,2,3,4})$ , en caso trayectoria escalón nominal .	63
6.4. Seguimiento de trayectorias senoidal $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso nominal . .	64
6.5. Error de seguimiento senoidal $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso nominal . . . . .	65
6.6. Velocidades angulares $(\Omega_{1,2,3,4})$ , en caso trayectoria senoidal nominal .	65
6.7. Seguimiento de trayectorias escalón $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso perturbado .	66
6.8. Error de seguimiento escalón $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso perturbado . . . . .	67
6.9. Velocidades angulares $(\Omega_{1,2,3,4})$ , caso trayectoria escalón con pertur- bación . . . . .	67
6.10. Seguimiento de trayectorias senoidal $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso perturbado	68
6.11. Error de seguimiento senoidal $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso perturbado . . . . .	68
6.12. Velocidades angulares $(\Omega_{1,2,3,4})$ , en caso trayectoria senoidal con per- turbación . . . . .	69
A.1. Plataforma experimental . . . . .	75
A.2. Esquema de los componentes del cuadirrotor . . . . .	76

---

A.3. Motor <i>brushless</i> DJI 2212/920KV . . . . .	78
A.4. Controlador electrónico de velocidad DJI 30A OPTO . . . . .	80
A.5. IMU con 10DOF . . . . .	81
A.6. Giroscopio de 3 ejes . . . . .	82
A.7. Acelerómetro de 3 ejes . . . . .	83
A.8. Magnetómetro de 3 ejes . . . . .	83
A.9. Sensor de presión barométrica . . . . .	84
A.10.Sensor ultrasónico . . . . .	85
A.11.Sistema de posicionamiento global 3DR U-BLOX . . . . .	86
A.12.Arduino Due [1] . . . . .	87
A.13.Dispositivos Xbee [3] . . . . .	87
A.14.Batería Li-Po . . . . .	88

# ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1. Característica de los principales tipos de UAV's . . . . .	10
6.1. Parámetros del modelo dinámico del cuadrirrotor . . . . .	61
6.2. Parámetros del controlador ASTA . . . . .	61
6.3. Parámetros del controlador <i>Backstepping Integral</i> . . . . .	61
6.4. Comparación de tiempo de computo, caso nominal. . . . .	70
6.5. Comparación de tiempo de computo, caso perturbado. . . . .	70



# AGRADECIMIENTOS

---

A mi madre, padre y hermano por apoyarme incondicionalmente en todo momento y ser mi motivación.

A mi asesor el Dr. Jesús de León Morales, por su asesoría y paciencia durante el desarrollo de este trabajo, por sus consejos y su buena disposición.

A mis revisores el Dr. Marco Tulio Mata Jiménez y el Dr. Oscar Salvador Salas Peña, por su colaboración, por las ideas sugeridas para el beneficio de esta tesis, y por sus oportunas correcciones.

A mis profesores del DIE por haberme compartido sus conocimiento y a mis compañeros por compartir tiempo y esfuerzo.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, por ser mi casa de estudios durante muchos años.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico brindado para mis estudios durante estos años de investigación.

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

En los últimos años ha habido un gran interés en el desarrollo de vehículos aéreos no tripulados, ya que poseen características únicas como: tamaño pequeño, gran maniobrabilidad y relativo bajo precio; haciéndolos atractivos para uso tanto militar como civil en áreas como vigilancia, reconocimiento e inspección en ambientes complicados o peligrosos.

Los últimos avances en la tecnología han impulsado el desarrollo y la operación de este tipo de vehículos. Los nuevos sensores, microprocesadores y sistemas de propulsión son más pequeños, ligeros y más capaces que nunca, llevando a niveles de resistencia, eficiencia y autonomía que sobrepasan las capacidades humanas.

### 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El modelo dinámico del cuadirrotor presenta dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, requiriendo algoritmos de control robustos para el control de orientación y altitud de la aeronave.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

El cuadrirrotor requiere ser lo suficientemente estable, ya que durante el vuelo está sujeto ante condiciones variantes que no se pueden prever. Diversas técnicas de control han sido propuestas para tratar este problema, sin embargo, consideran modelos simplificados o técnicas de control que no son suficientemente robustas ante perturbaciones y dinámicas no modeladas.

## 1.3 ANTECEDENTES

Actualmente, se han llegado a desarrollar diferentes técnicas y métodos para lograr controlar la estabilidad de un cuadrirrotor, en términos de robustez, ya que este tipo de aeronaves realiza maniobras de alto grado de complejidad. Además, se presentan problemas como: dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

Las técnicas de control que se han aplicado son variadas incluyendo algoritmos de control lineales y no lineales. Además, se aplican a modelos dinámicos con diferente representación y reducidos. Las técnicas de control Proporcional Integral Derivativo (PID) han sido presentadas en [26] y comparadas con LQR en [7], donde se utilizó un PID para controlar la orientación de un cuadrirrotor. El controlador PID obtuvo mejores resultados que el LQR pese a que el modelo matemático era más simple, logrando el vuelo autónomo estable.

Además, se implementó la estructura de control difuso junto a un PD en [20]. Sin embargo, estas metodologías no son suficientemente robustas debido a que se necesita del conocimiento de todos los parámetros aerodinámicos del sistema.

Por otro lado, una técnica de control no lineal ha sido propuesta en [9], donde se introduce el enfoque backstepping integral. Esta técnica como tal presentaba

ciertas limitaciones debido a discontinuidades en el control, pero se logró mejorar la respuesta con la parte integral este problema.

En [5] se presentaron dos técnicas, una por backstepping y Feedback Linearization (FL) en combinación con LQ-Servo, el desempeño de los controladores fue bueno. Además, no sólo cancelaron los errores de estado estacionario, sino que mejoraron considerablemente su robustez ante perturbaciones provocadas por el viento.

Otros esquemas de control son los predictivos como se muestra en [27], donde se proponen dos controladores en el espacio de estados adaptativos para la estabilización de la actitud y la auto sintonización: el primero, Model Identification Adaptive Controller (MIAC) es propuesto en combinación con un estimador de mínimos cuadrados, mientras que el segundo control “Model Reference Adaptive Control” (MRAC), está basado en la teoría de Lyapunov, el cual es aplicado para simplificar dinámicas, con esto se garantizan estabilidad asintótica global. En [22] se propone un control robusto predictivo, consta de dos controladores, uno por Model Predictive Controller (MPC) para seguir trayectorias de referencia, junto con un controlador (H)infinito para estabilizar los movimientos de rotación.

En [14], se ha propuesto un control de retroalimentación de estado sobre la base de un modelo con representación de cuaterniones, el cual muestra un buen desempeño en seguimiento de la dinámica, pero tarda en alcanzar la trayectoria deseada en comparación con otras técnicas de control.

Otro enfoque es la teoría de control por modos deslizantes son una forma de control de estructura variable. La mayor ventaja del control por modos deslizantes es su robustez ante perturbaciones externas, dinámicas no modeladas e incertidumbres paramétricas. Además, la trayectoria converge a la superficie del modo deslizante en tiempo finito [30].

Desafortunadamente, las oscilaciones de alta frecuencia de la entrada de control, el cual es conocido como fenómeno *chattering*, puede llegar a ocasionar daño en los actuadores. Con el objetivo de reducir el efecto *chattering*, mejorar la precisión

y asegurar la convergencia en tiempo finito al objetivo de control, nuevas estrategias de control surgieron para disminuir este problema, los llamados algoritmos de control por modos deslizantes de orden superior. Por otra parte, en [8] se han presentado artículos utilizando las técnicas de modos deslizantes en combinación con la técnica de backstepping, en [15] también se usó la teoría de modos deslizantes para implementarla en un observador combinado con un controlador backstepping.

El *algoritmo super twisting adaptativo* (ASTA), el cual fue propuesto en [28], es una estrategia de control por modos deslizantes de alto orden. Este controlador adaptativo proporciona un control robusto sin sobreestimar las ganancias de control, mejora la convergencia en tiempo finito, y además no es necesario conocer los límites de las incertidumbres y perturbaciones.

## 1.4 HIPÓTESIS

Puesto que los vehículos aéreos no tripulados son de talla pequeña y además, son más susceptibles a perturbaciones externas, tales como el viento. Además, el comportamiento dinámico de estos vehículos es no lineal y está fuertemente acoplado. Por lo tanto, el diseño de controladores debe ser lo suficientemente robusto para mantener la estabilidad del UAV bajo diferentes condiciones de operación.

Por otro lado, las técnicas de modos deslizantes de orden superior son insensibles ante perturbaciones acopladas desconocidas pero acotadas, no necesitan conocer el modelo exacto del sistema y además poseen convergencia en tiempo finito. La técnica de control backstepping integral es robusta, ya que la parte integral permite rechazar términos desconocidos debido a incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

Entonces, es posible implementar esquemas de control robustos para controlar el vuelo de vehículos aéreos no tripulados para el seguimiento de trayectorias deseadas en presencia de perturbaciones externas tal como el viento, considerando una

dinámica no lineal del UAV e incertidumbres en el modelo.

## 1.5 OBJETIVOS

El objetivo en esta tesis, es diseñar esquemas de control no lineal robustos, tales como modos deslizantes de alto orden y backstepping integral, que permitan controlar la orientación  $(\phi, \theta, \psi)$  y altitud  $(z)$  del cuadrirrotor.

Resultados en simulación serán presentados para determinar la eficiencia de ambos algoritmos de control propuestos.

## 1.6 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presenta una breve introducción de los UAVs, planteamiento del problema sobre el control de estabilidad de los UAVs. Además, se incluye un estado del arte de las diferentes técnicas y métodos de control para la estabilidad de un cuadrirrotor.

En el Capítulo 2 se presenta el estado de arte de los vehículos aéreos no tripulados y del cuadrirrotor, desde su historia, la clasificación de los UAVs, además de la estructura y movilidad de los cuadrirrotores.

En el Capítulo 3 se introduce el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del cuadrirrotor. Este modelo dinámico será utilizado para el diseño de ambas estrategias de control.

En el Capítulo 4 se introduce la metodología de control Super Twisting. Posteriormente se aborda el diseño del *Algoritmo Super Twisting Adaptativo* (ASTA).

---

En el Capítulo 5 se introduce la estrategia de control backstepping clásico, posteriormente, se introduce el esquema de control *Backstepping Integral* (BI), el cual será utilizado para el diseño de control a partir del modelo dinámico del cuadrirrotor.

En el Capítulo 6 se plasman los resultados en simulación, para observar el desempeño de ambos esquemas de control enfrentando diferentes condiciones de operación.

En el Capítulo 7 se proporcionan las conclusiones y perspectivas acerca de la presente tesis, además de los trabajos futuros a realizar.

Finalmente, el material y la información necesarios para la construcción de nuestro prototipo físico para pruebas, se añadió a un apéndice.

## CAPÍTULO 2

# UAV-CUADRIRROTOR

---

## 2.1 INTRODUCCIÓN

El término UAV, por sus siglas en inglés “*Unmanned Aerial Vehicle*”, se utiliza para definir a los vehículos aéreos sin tripulación humana a bordo. Los UAVs han despertado un gran interés en el área de la investigación y desarrollo, ya que pueden ser usados como plataformas de prueba y desarrollo para implementar algoritmos avanzados de control.

En el pasado estas aeronaves fueron denominados ROA (“*Remotely Piloted Aircraft*”) o UA (“*Unmanned Aircraft*” o “*Uninhabited Aircraft*”). En la actualidad suele llamarse vehículos aéreos no tripulados utilizando el término UAV o más recientemente UAS (“*Unmanned Aircraft System*”).

Las tareas que son capaces de realizar los vehículos aéreos no tripulados, van en aumento. Esto se debe a que son viables para realizar múltiples tareas y por las habilidades que poseen dependiendo del tipo de UAV. Una de las principales ventajas al usar este tipo de aeronaves para sus diferentes misiones, es que las tareas se efectúan sin la interacción directa de humanos, esto es un factor de suma importancia para tareas de alto riesgo.



En este capítulo, se adentrará en la historia, clasificación y aplicaciones tanto para los UAVs como para el cuadirrotor; además de los principios de operación de la aeronave utilizada en esta tesis.

### 2.1.1 HISTORIA

Los vehículos aéreos no tripulados han llegado recientemente a niveles sin precedentes de crecimiento en diversos dominios de aplicación tanto militar y como civil. Enseguida se presenta un pequeño resumen de la historia de los UAVs [18]:

Los UAVs se introdujeron por primera vez durante la Primera Guerra Mundial (1917), registrando un periodo de participación con el ejército de los Estados Unidos con vehículos no tripulados. Esos primeros UAVs eran muy inexactos y poco fiables, por tal motivo en ese momento su utilidad, su capacidad para realizar tareas en los campos de batalla y su impacto global en aplicaciones militares no fueron reconocidos por la mayoría de los líderes militares y políticos.

Solamente un grupo de personas previeron y predijeron su potencial futuro e impacto en general en aplicaciones militares. Si no fuera por ese pequeño grupo de gente que los mantuvo vivos (en los años posteriores de la Primera Guerra Mundial), el concepto de un vehículo no tripulado impulsado por el apoyo político y financiación, nada hubiera sido posible hoy en día.

A pesar de que los UAVs fueron utilizados en Vietnam, fue sólo después de la Operación “Tormenta del Desierto” (1991) y el conflicto en la península de los Balcanes en la década de 1990, cuando el interés en UAVs cobró impulso. En 1997 los ingresos totales del mercado mundial de vehículos aéreos no tripulados, incluyendo los de despegue y aterrizaje vertical (VTOL), alcanzó \$2.27 mil millones de dólares [4], un aumento del 9.5% con respecto a 1996. A mediados de 1990 la demanda de vehículos VTOL era limitado, pero desde entonces, los productos disponibles en el mercado y la cuota de mercado comenzaron a aumentar.

### 2.1.2 CLASIFICACIÓN

Para clasificar los UAVs es necesario considerar diferentes criterios. Uno de los más simples está basado en el tipo de aeronaves del UAV. De acuerdo con este criterio, existen dos tipos diferentes de aeronaves: las de despegue vertical y las de despegue no vertical. Dentro de la primera clasificación están las de ala rotativa o hélice (helicópteros y cuadrirrotores) y los auto-sustentados (dirigibles y globos). Dentro de la categoría de despegue no vertical se encuentran los de ala flexible (parapentes o ala delta) y los de ala fija (aeroplanos). La Figura 2.1, muestra los diferentes tipos de aeronaves utilizados en los UAV.

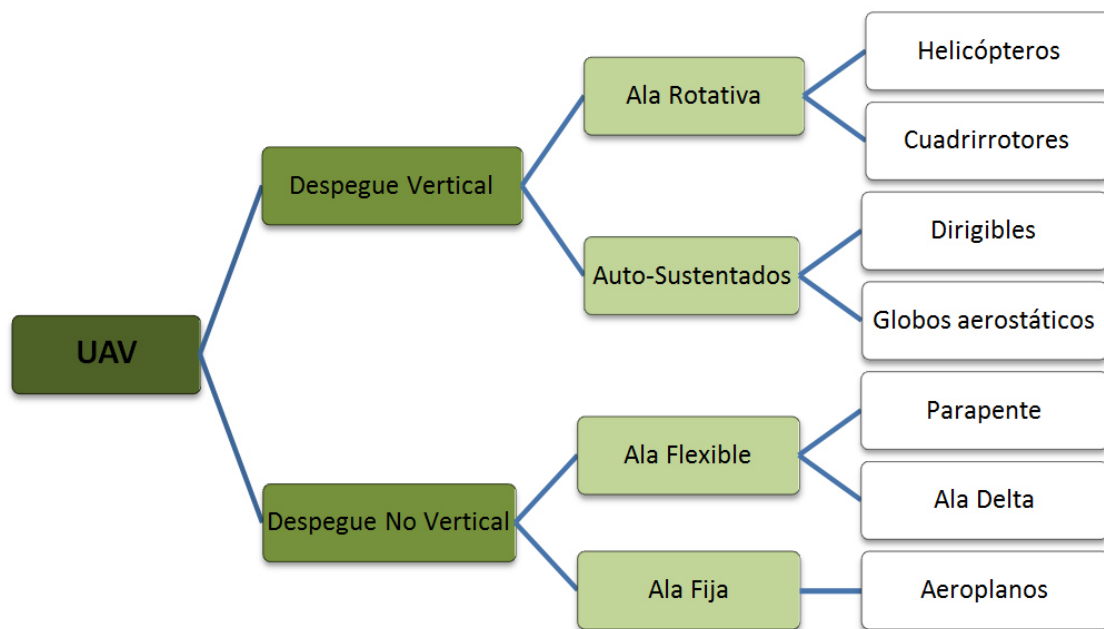


Figura 2.1: Algunos tipos de aeronaves UAV's

Las aplicaciones de los UAVs varían mucho de un tipo de aeronave a otra, cubriendo cada una de ellas un amplio espectro de campos. La Tabla 2.1 muestra algunas de las características de los principales vehículos aéreos no tripulados.

Característica	Helicóptero	Aeroplano	Dirigible	Cuadrirrotor
Capacidad de vuelo estacionario	***		****	***
Velocidad de desplazamiento	***	****	*	**
Maniobrabilidad	***	*	*	****
Autonomía de vuelo	**	***	****	*
Resistencia a perturbaciones externas	**	****	*	**
Auto estabilidad	*	***	****	**
Capacidad de vuelos verticales	****	*	**	****
Capacidad de carga	***	****	*	**
Capacidad de vuelo en interiores	**	*	***	****
Techo de vuelo	**	****	***	*

Tabla 2.1: Característica de los principales tipos de UAV's

### 2.1.3 APLICACIONES

La selección de la aeronave depende de su aplicación. Existen diferentes aplicaciones para los UAVs, ya sea para el ámbito civil o el militar. A continuación se enlistan algunas de las aplicaciones para ambos casos [6]:

#### Aplicaciones civiles:

- Fotografía aérea. (Filme, video, etc.)
- Agricultura. (Vigilancia de los cultivos y aspersion)
- Guardacostas. (Búsqueda y rescate)
- Conservación. (Contaminación y vigilancia terrestre)
- Aduanas. (Vigilancia de importaciones ilegales)
- Compañías eléctricas. (Inspección en líneas de alta tension)
- Servicio de bomberos y forestales. (Detección de incendios y control de incidentes )

- Servicios de información. (información de noticias y fotos )
- Instituciones de salvamento marítimo. (Investigación de accidentes, guiado y control)
- Autoridades locales. (Inspección y control de desastres)
- Servicios meteorológicos. (Muestreo y análisis de la atmósfera para la previsión)
- Agencia de tráfico. (Vigilancia y control del trafico terrestre)
- Servicio oficial de cartografía. (Proyección de fotografía aérea)
- Autoridades policíacas. (Búsqueda de personas, seguridad y vigilancia)

Los drones aparecieron principalmente para satisfacer algunas misiones en el ámbito militar, enseguida se muestran algunas aplicaciones de este tipo:

#### **Aplicaciones militares:**

- Señuelo de misiles por emisión de firmas artificiales.
- Inteligencia electrónica.
- Retransmisión de señal de audio.
- Protección de los puertos de ataques en alta mar.
- Reconocimiento.
- Vigilancia de la actividad enemiga.
- Ubicación y destrucción de minas terrestres.
- Monitoreo de contaminación nuclear, biológica o química (NBC).

## 2.2 CUADRIRROTOR

El cuadrirrotor o *quadrotor* (ver Figura 2.2) es el vehículo aéreo no tripulado con múltiples rotores y con mayor maniobrabilidad con respecto a las demás aeronaves. Esta aeronave realiza un vuelo estacionario estable y maniobras precisas, equilibrando las fuerzas producidas por cada uno de los rotores. Cambiando la velocidad de cada rotor es como se logra el movimiento del cuadrirrotor, lo cual será explicado a detalle más adelante.



Figura 2.2: Estructura rígida de un cuadrirrotor [2].

Una de las ventajas de los cuadrirrotores es su capacidad de vuelo estacionario, debido a sus cuatro rotores es muy estable en dichas condiciones. Además, los cuadrirrotores llegan a tener alta maniobrabilidad en el aire, aparte de su habilidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL, por sus siglas en inglés, “*Vertical Take Of and Landing*”), con estas capacidades le permiten realizar tareas en entornos difíciles de alcanzar para los humanos.

Debido a que el cuadrirrotor cuenta con cuatro rotores, el requerimiento de energía es elevada para la batería, a su vez reduce el tiempo de vuelo, en otras palabras, reduce la autonomía de vuelo. La autonomía de vuelo depende de la batería con la que se le suministre la energía. En adición, debido al peso de los rotores, sensores, circuitos eléctricos y la cámara, la aeronave tiende a poseer menor capacidad de carga.

### 2.2.1 HISTORIA

La historia de los cuadirrotores inicia desde el siglo XX, donde empezaron a crear nuevas ideas para la construcción de una aeronave que se elevara por el cielo. A continuación se presenta un breve resumen de la historia del cuadirrotor.

Fue el primer proyecto de aeronave de ala rotatoria capaz de elevarse del suelo por sí sola. Diseñada por los hermanos Bréguet de Bréguet Aviation (registrada a nombre de Louis Bréguet) con la ayuda del profesor Charles Richet, al cual nombraron “*Bréguet Richet Gyroplane No. 1*” (ver Figura 2.3) [23]. Esta aeronave fue capaz de elevarse unos 60 cm del suelo por primera vez el 29 de septiembre de 1907. Este modelo no tenía ningún sistema de control ni de direccionamiento, por lo que era estabilizada por cuatro hombres que la sujetaban.

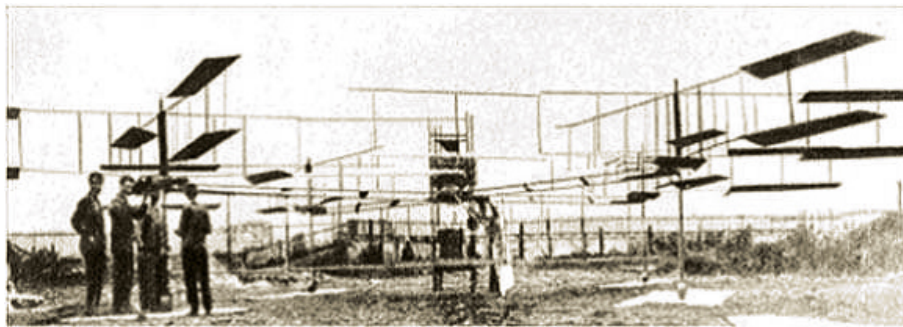


Figura 2.3: Primer cuadirrotor de Bréguet-Richet.

El 18 de diciembre de 1922 se realizó el primer vuelo publico del helicóptero diseñado por George De Bothezat e Ivan Jerome para el ejército estadounidense, en McCook Field cerca de Dayton, Ohio. Contaba con un cuerpo de tubos de acero con forma de X, cuatro rotores con hélices de seis palas, como se muestra en la Figura 2.4 [25], además de dos pequeños propulsores que servían para desplazarse y dirigirlo.

Llegó a elevarse a una altura de 5 m, pero era muy poco eficiente, complejo y de poca fiabilidad mecánica, y bastante complicado de manejar por el piloto, puesto que en vuelo estacionario había que evitar continuamente que girase sobre sí mismo.



Figura 2.4: Cuadricoptero de Bothezat.

Un par de años mas tarde, en 1924, el ingeniero francés Étienne Oeminchen diseñó la aeronave de ala móvil, llamada “*Oeminchen No. 2*” (ver Figura 2.5) [24].

El diseño consta de un cuerpo de tubos de acero, con cuatro brazos, 4 hélices principales de sustentación y otras 8 hélices para el control de estabilidad y dirección. Además, las hélices eran todas de dos palas.

El *Oeminchen No. 2* estableció varios récords de distancia, entre ellos el de realizar el primer vuelo de un kilómetro.

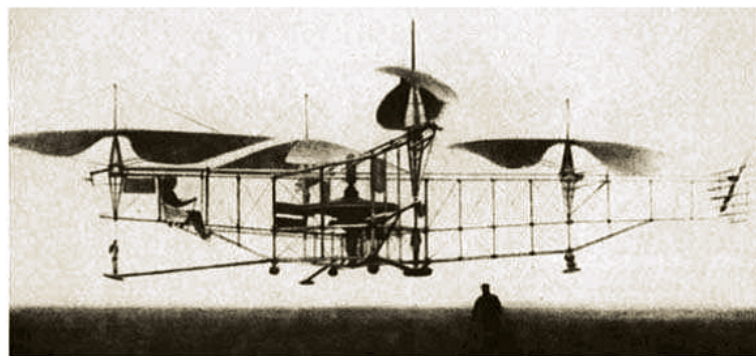


Figura 2.5: La aeronave Oeminchen No. 2.

A mediados del siglo XX se desarrollaron otros dos importantes diseños, el primero fue el “*Convertawings Model A*” (ver Figura 2.6) [17], diseñado por George de Bothezat e Ivan Jerome, para el control del alabeo, cabeceo y guiñada se utilizaba la variación de empuje de las cuatro hélices, una desventaja es que era muy difícil para el piloto volarlo debido a la carga de trabajo, al momento de tratar de controlar el empuje de las cuatro hélices al mismo tiempo.

Los cuatro rotores del helicóptero están montados lateralmente sobre los estabilizadores en dos pares. El mecanismo de control es extremadamente simple y obtenido por medio del cambio diferencial de empuje entre los rotores. La energía es proporcionada por dos motores conectados al sistema de accionamiento del rotor de múltiples correas trapezoidales.

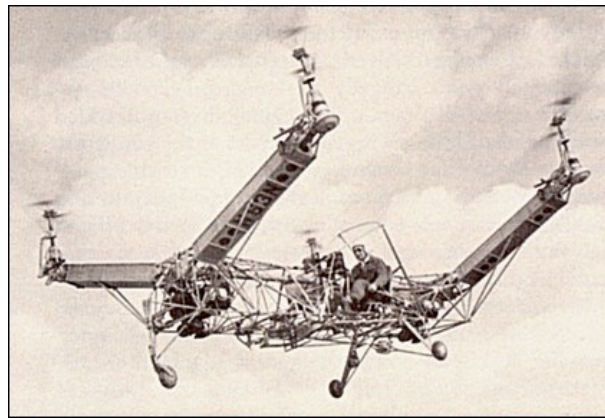


Figura 2.6: La aeronave “Convertawings Model A”.

El segundo diseño del cuadrirrotor fue “*Curtis-Wright VZ-7*” (ver Figura 2.7) [31], diseñado por Curtis Wright Company, fue creado para un proyecto del ejército estadounidense, como un prototipo de “jeep aéreo”. Su diseño era simple, consistía en un fuselaje central rectangular a la que le fueron unidos cuatro hélices en configuración X. El fuselaje central contaba con los asientos de los pilotos, controles de vuelo y gasolina.

Demostó mayor maniobrabilidad y estabilidad que sus antecesores mencionados, pero no cumplía con los requisitos de altitud y velocidad, ya que llegó a volar a una altura de 60 m y a una velocidad de 51 km/h.

En la Actualidad, podemos apreciar que existe un gran mercado de cuadrirrotores para diferentes aplicaciones. Sin duda alguna, una de las más importantes aplicaciones para Drones es captar imágenes y videos. El “*Parrot A.R. Drone 2.0*” se muestra en la Figura 2.8, fue creado en Francia por la empresa Parrot alcanzando una velocidad de 39.9 km/h y una altitud de 199.03 m. Además, cuenta con una



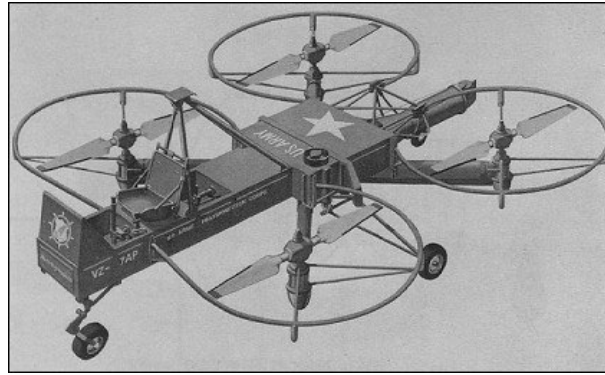


Figura 2.7: Cuadrirrotor Curtis-Wright VZ-7.

cámara HD de 790p, con 18 minutos de autonomía de vuelo y puede realizar vuelos en interiores y exteriores.



Figura 2.8: A.R. Drone 2.0.

Otro cuadrirrotor es el “*Phantom 3*” (mostrado en la Figura 2.9), desarrollado por la empresa DJI con sede en Shenzhen, China. Esta aeronave registró una velocidad de 57.5 (sin viento) y una altitud de 6000 m sobre el nivel del mar, la cámara que utiliza es de 4K/1080p, con un tiempo máximo de vuelo de 23 minutos. Por otro lado, estos últimos drones pueden ser controlados por GPS y pueden ser manejados desde dispositivos móviles.

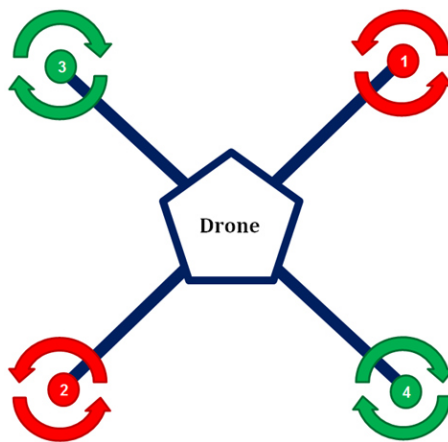
Hoy en día se siguen desarrollando diferentes tecnologías para los cuadrirrotos, tanto para mejorar la robustez ante perturbaciones como para mejorar la eficiencia en múltiples tareas asignadas.



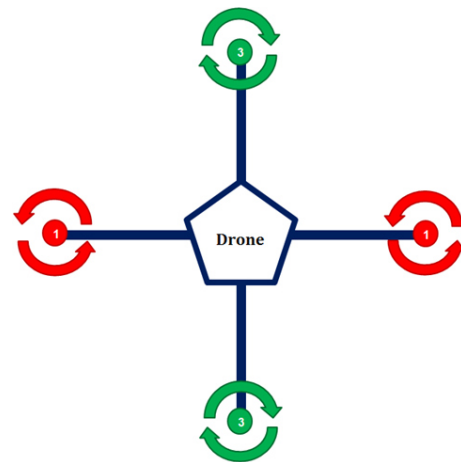
Figura 2.9: Phantom 3.

### 2.2.2 PRINCIPIOS DE OPERACIÓN

Existen diferentes tipos de configuración del modelo para un cuadrirrotor, como en la siguiente Figura 2.10, a) configuración en X y b) configuración en cruz. Dependiendo de la configuración que se desee trabajar, la operación de la aeronave cambia.



(a) Configuración X



(b) Configuración en cruz

Figura 2.10: Tipos de configuraciones para el cuadrirrotor.

Este sistema tiene seis grados de libertad, los cuales son los únicos movimientos capaces de realizar. Sin embargo, sólo se pueden controlar 4 de los 6 movimientos. Los grados de libertad son los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y los ángulos de Euler  $\phi$ ,  $\theta$ , y  $\psi$  (representando el alabeo, cabeceo y la guiñada). Además de ser un sistema

sub-actuado, es multivariable y está fuertemente acoplado. En la Figura 2.11 se muestra el esquema general de un cuádrirrotor, donde está representado en dos ejes cartesianos.

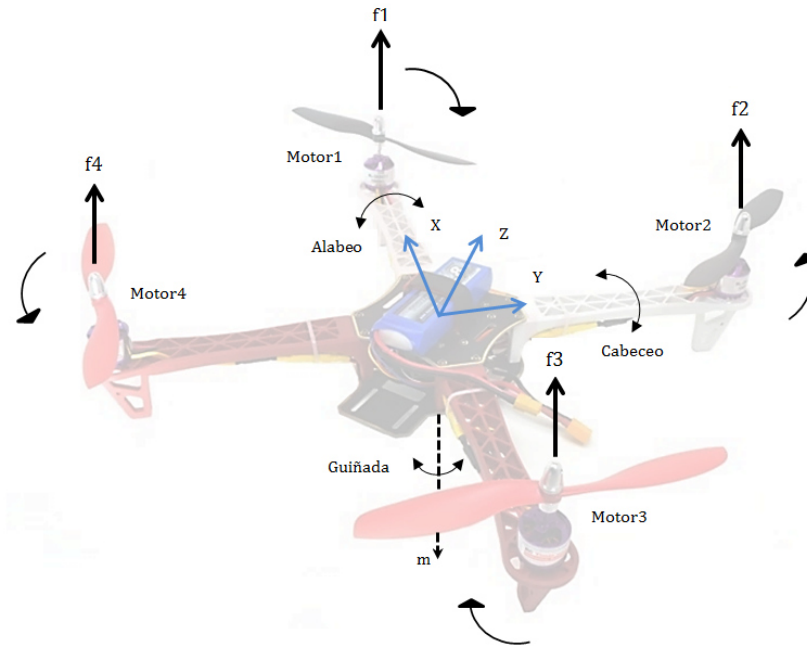


Figura 2.11: Esquema general del cuádrirrotor.

Los 4 movimientos a controlar del cuádrirrotor son:

- **Altitud (desplazamiento vertical)**

Con este movimiento se logra el despegue vertical y llegar a una altura deseada. Esto se logra generando una fuerza de empuje igual en cada uno de los cuatro rotores, ya sea en mayor proporción para elevarlo o en menor proporción para disminuir su altura y aterrizarlo. En la Figura 2.11 se muestra la altitud generada por las fuerzas de empuje ( $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  y  $f_4$ ).

- **Cabeceo**

El cabeceo se logra manteniendo la misma velocidad en los rotores 2 y 4, y en los rotores 1 y 3 debe de haber una variación diferente de empujes entre ellos,

dependiendo hacia donde se quiera realizar el movimiento. Es decir, ya sea hacia adelante o hacia atrás. En la Figura 2.12 a) se muestra el cabeceo hacia adelante, generando mayor empuje en el rotor 3, que en el rotor 1, y en el b) se muestra el movimiento en lado contrario.

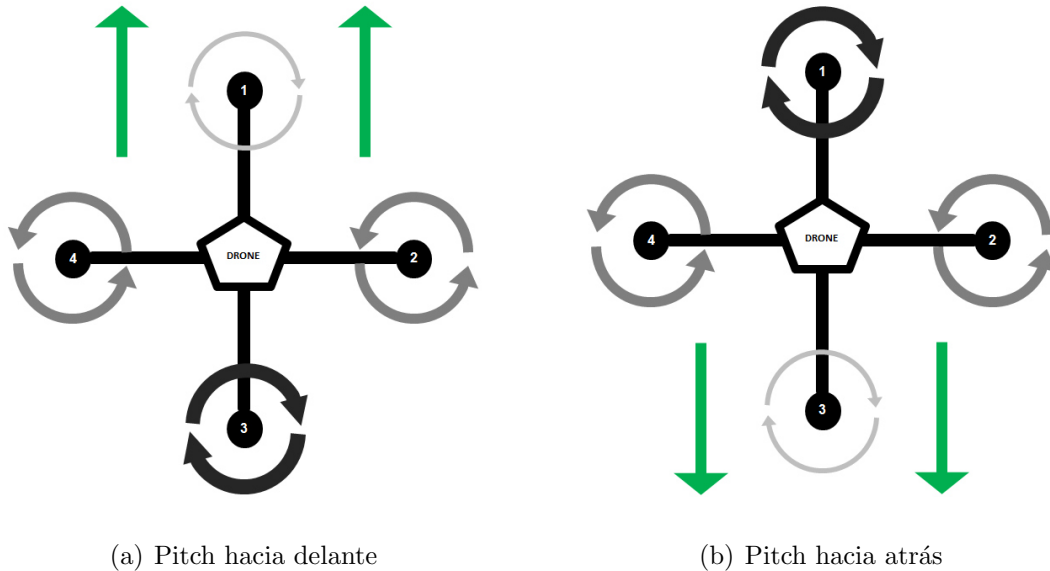


Figura 2.12: Movimiento del cabeceo.

### ■ Alabeo

En esta maniobra los rotores 1 y 3 deben permanecer con la misma velocidad, y los rotores 2 y 4 son los que deben de ser diferentes uno del otro, dependiendo de la orientación que se desee. En la Figura 2.13 a) se muestra el movimiento a la izquierda, generando mayor empuje en el rotor 2 y menor empuje en el rotor 4, en b) se muestra el movimiento a la derecha.

### ■ Guiñada

La guiñada se logra efectuando una vuelta sobre el eje  $z$ , ya sea en sentido horario o contrario en sentido anti-horario. En la Figura 2.14 a), se observa el movimiento en sentido horario, este se logra ejerciendo el mismo empuje en los rotores 2

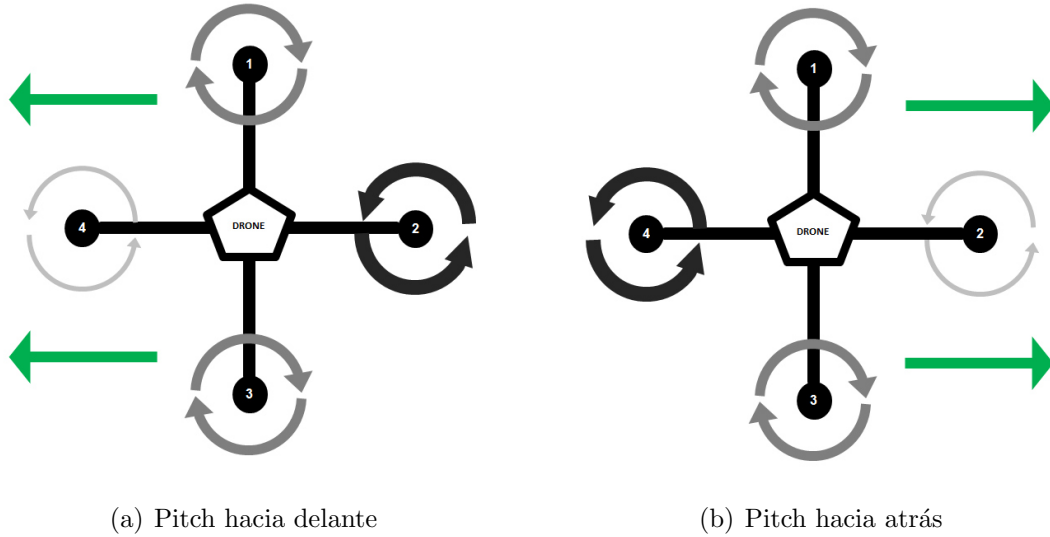


Figura 2.13: Movimiento del alabeo.

y 4, también el mismo empuje en los rotores 1 y 3, pero en mayor proporción que los anteriores. En la Figura 2.14 b) se muestra el movimiento en sentido anti-horario, y este se logra de la misma manera que el sentido horario, sólo que esta vez los rotores 2 y 4 deben de tener mayor empuje que los rotores 1 y 3.

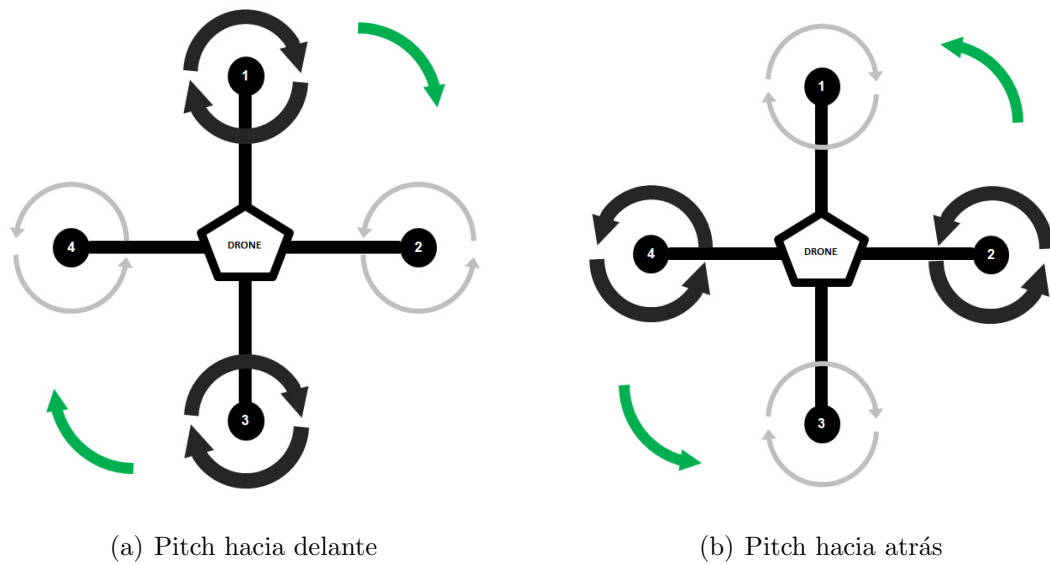


Figura 2.14: Movimiento de la guiñada.

## 2.3 CONCLUSIONES

En este capítulo se introdujo el concepto de los UAVs, una breve historia, así como la clasificación y aplicación de estas aeronaves. Además, se mostraron diferentes ventajas y desventajas de algunos tipos de UAVs. Por otra parte, dentro de la clasificación de los UAVs, se estudió el cuadrirrotor, el cual se usará a lo largo de esta tesis. Finalmente, se mostró el funcionamiento para cada uno de los principales movimientos del cuadrirrotor, el cual se lleva a cabo mediante el cambio de velocidad de los rotores.

## CAPÍTULO 3

# MODELO DINÁMICO

---

### 3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se presenta el modelo dinámico del cuadrirrotor, el cual describe el modelo matemático que conforma la dinámica que representan los 6 grados de libertad capaz de realizar el cuadrirrotor (cabeceo, alabeo, guiñada, altitud, eje  $x$  y eje  $y$ ), además del modelo del rotor. Esto, con la finalidad de tener una mejor descripción del comportamiento del cuadrirrotor.

Antes de que se muestren las ecuaciones que conforman el modelo dinámico, se introducen las hipótesis sobre el modelo. Se considera lo siguiente:

- Las hélices se consideran rígidas.
- La estructura se supone rígida.
- Se supone que la estructura es simétrica.
- El origen del centro de referencia de la aeronave coincide con el centro de gravedad.
- El empuje y el arrastre son proporcionales al cuadrado de la velocidad de la hélice.

## 3.2 MODELO DEL CUADRIRROTOR

En el modelo que se muestra en la Figura 3.1, consideran dos marcos de referencia, el primero corresponde al marco de referencia fijo al cuerpo del cuadrirrotor  $B$  (marco-B), y el segundo corresponde al marco de referencia fijo a la tierra  $E$  (marco-E).

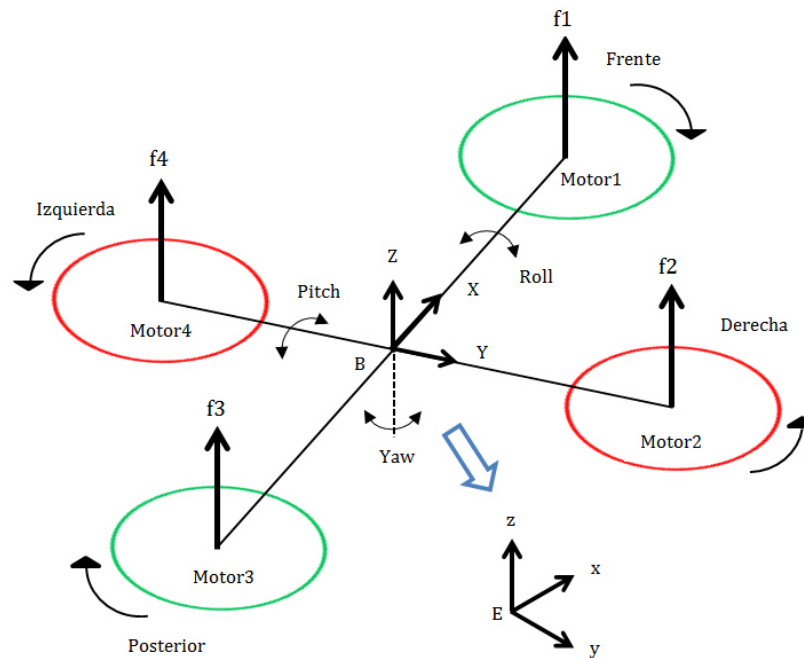


Figura 3.1: Marcos de referencia de la tierra y del cuadrirrotor.

Las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico, se formularán en el marco de referencia fijo al cuerpo, debido a las siguientes ventajas:

- La matriz de inercia es invariante en el tiempo
- La simetría del cuerpo sirve para simplificar las ecuaciones
- Las mediciones se obtienen directamente en el marco fijo al cuerpo
- El diseño de control se lleva a cabo en el marco fijo al cuerpo



La cinemática de un cuerpo rígido de 6 grados de libertad esta dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\xi} = J_{\Theta} v \quad (3.1)$$

donde  $\dot{\xi}$  es el vector de velocidad generalizado con respecto al marco-E y  $J_{\Theta}$  es la matriz generalizada. Además, el vector de velocidad  $\dot{\xi}$  está compuesto de los vectores de posición lineal  $\Gamma^E[m]$  y angular  $\Theta^E[m]$  del cuadrirrotor con respecto al marco-E, es decir

$$\dot{\xi} = \left[ \Gamma^E \quad \Theta^E \right]^T = \left[ X \quad Y \quad Z \quad \phi \quad \theta \quad \psi \right]^T \quad (3.2)$$

De igual manera,  $v$  está constituido por los vectores de velocidad lineal  $V^B[ms^{-1}]$  y angular  $\omega^B[rads^{-1}]$  del cuadrirrotor con respecto al marco-B

$$v = \left[ V^B \quad \omega^B \right]^T = \left[ u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r \right]^T \quad (3.3)$$

Por otro lado, la matriz generalizada  $J_{\Theta}$  está constituida de 4 sub-matrices,

$$J_{\Theta} = \begin{bmatrix} R_{\Theta} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Notación:  $0_{3 \times 3}$  se refiere a una sub-matriz de ceros con 3 filas y 3 columnas, mientras que la matriz de rotación  $R_{\Theta}$  y la matriz de transferencia  $T_{\Theta}$  están definidas a continuación

$$R_{\Theta} = \begin{bmatrix} c_{\psi}c_{\theta} & -s_{\psi}c_{\phi} + c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} & s_{\psi}s_{\phi} + c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} \\ s_{\psi}c_{\theta} & c_{\psi}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} & -c_{\psi}s_{\phi} + s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} \\ -s_{\theta} & c_{\theta}s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$T_{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\phi}t_{\theta} & c_{\phi}t_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & -s_{\phi} \\ 0 & s_{\phi}/c_{\theta} & c_{\phi}/c_{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

donde,  $c_x = \cos x$ ,  $s_x = \sin x$  y  $t_x = \tan x$ .

### 3.2.1 FUERZAS Y MOMENTOS AERODINÁMICOS

Las fuerzas y momentos aerodinámicas se pueden derivar mediante la combinación de los momentos aerodinámicos y la teoría de análisis de las hélices [12].

A continuación se introducen las ecuaciones matemáticas que representan las fuerzas y momentos aerodinámicos del cuadrirrotor.

La fuerza de empuje  $T$  de las hélices, es la resultante de las fuerzas verticales que actúan sobre todos los elementos de las hélices, es decir

$$T = C_T \rho A (\Omega R_{rad})^2 \quad (3.7)$$

$$\frac{C_T}{\sigma a} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\mu^2\right)\theta_0 - (1 + \mu^2)\frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{1}{4}\lambda$$

donde  $C_T$  corresponde al coeficiente de empuje,  $A$  se refiere al área que genera la hélice en rotación,  $\Omega$  denota la velocidad angular de la hélice,  $\sigma$  denota la relación de la longitud de la cuerda de la hélice,  $a$  se refiere a la pendiente de elevación,  $\mu$  la razón de avance del rotor,  $\lambda$  el flujo del aire,  $\rho$  la densidad del aire,  $R_{rad}$  el radio del rotor,  $\theta_0$  la incidencia del ángulo de cabeceo y  $\theta_{tw}$  el giro del ángulo de cabeceo.

La fuerza central  $H$  es la resultante de las fuerzas horizontales que actúan sobre todos los elementos de las hélices, y se obtiene de la siguiente manera

$$H = C_H \rho A (\Omega R_{rad})^2 \quad (3.8)$$

$$\frac{C_H}{\sigma a} = \frac{1}{4a}\mu\overline{C_d} + \frac{1}{4}\lambda\mu\left(\theta_0 - \frac{\theta_{tw}}{2}\right)$$

donde  $C_H$  denota el coeficiente central y  $C_d$  es el coeficiente de arrastre proporcional al 70 % del radio.

El momento de arrastre  $Q$  es causado por las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre los elementos de las hélices. Determina la potencia requerida para girar el rotor, que está dada por

$$Q = C_Q \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad} \quad (3.9)$$

$$\frac{C_Q}{\sigma a} = \frac{1}{8a}(1 + \mu^2)\overline{C_d} + \lambda\left(\frac{1}{6}\theta_0 - \frac{1}{8}\theta_{tw} - \frac{1}{4}\lambda\right)$$

donde  $C_Q$  corresponde al coeficiente del momento de arrastre

El momento de alabeo  $R_m$  es la integral del empuje de la hélice para cada sección a un radio determinado (difiere del momento de alabeo general).

$$\begin{aligned} R_m &= C_{R_m} \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad} \\ \frac{C_{R_m}}{\sigma a} &= -\mu \left( \frac{1}{6} \theta_0 + \frac{1}{8} \theta_{tw} - \frac{1}{8} \lambda \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $C_{R_m}$  corresponde al coeficiente del momento de alabeo

El efecto de tierra está relacionado con la reducción del flujo de aire inducido. La caracterización de dicho efecto permite mejorar el despegue autónomo y el aterrizaje del cuadrirrotor. El efecto de tierra (IGE) puede expresarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} T_{IGE} &= C_T^{IGE} \rho A (\Omega R_{rad})^2 \\ \frac{C_T^{IGE}}{\sigma a} &= \frac{C_T^{IGE}}{\sigma a} + \frac{\delta v_i}{4\Omega R_{rad}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $C_T^{IGE}$  corresponde al coeficiente de empuje considerando el efecto de tierra,  $v$  la velocidad inducida.

### 3.2.2 MOMENTOS GENERALIZADOS Y FUERZAS

El cuadrirrotor se encuentra bajo diferentes fuerzas y momentos generalizados, cuando este realiza las maniobras de vuelo. Para el modelo dinámico empleado, se consideran las siguientes ecuaciones que describen dichos efectos.

#### Cabeceo

Efecto giroscópico del cuerpo	$\dot{\phi} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{xx})$
Efecto giroscópico de la hélice	$J_r \dot{\phi} \Omega_r$
Acción de los actuadores del cabeceo	$l(T_1 - T_3)$
Momento central debido al vuelo hacia adelante	$h \left( \sum_{i=1}^4 H_{xi} \right)$

Momento de alabeo debido al vuelo lateral	$(-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi}$
---	-----------------------------------

**Alabeo**

Efecto giroscópico del cuerpo	$\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz})$
Efecto giroscópico de la hélice	$J_r \dot{\theta} \Omega_r$
Acción de los actuadores del alabeo	$l(-T_2 + T_4)$
Momento central debido al desplazamiento lateral	$h(\sum_{i=1}^4 H_{yi})$
Momento de alabeo debido al vuelo hacia adelante	$(-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi}$

**Guiñada**

Efecto giroscópico del cuerpo	$\dot{\theta}\dot{\phi}(I_{xx} - I_{yy})$
Contrapar inercial	$J_r \dot{\Omega}_r$
Contrapar desbalanceado	$(-1)^i \sum_{i=1}^4 Q_i$
Fuerza central desbalanceada en vuelo delantero	$l(H_{x2} - H_{x4})$
Fuerza central desbalanceada en vuelo lateral	$l(-H_{y1} + H_{y3})$

**Fuerzas a lo largo del eje z**

Acción en los actuadores	$c\psi c\phi(\sum_{i=1}^4 T_i)$
Peso	$mg$

**Fuerzas a lo largo del eje x**

Acción en los actuadores	$(s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi)(\sum_{i=1}^4 T_i)$
Fuerza central en el eje x	$-\sum_{i=1}^4 H_{xi}$

$$\text{Fricción} \quad \frac{1}{2}C_x A_c \rho \dot{x} |\dot{x}|$$

### Fuerzas a lo largo del eje y

$$\text{Acción en los actuadores} \quad (-c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi) \left( \sum_{i=1}^4 T_i \right)$$

$$\text{Fuerza central en el eje y} \quad - \sum_{i=1}^4 H_{yi}$$

$$\text{Fricción} \quad \frac{1}{2}C_y A_c \rho \dot{y} |\dot{y}|$$

donde  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  representan las inercias en cada eje,  $J_r$  es la inercia del rotor,  $\Omega_r$  es la velocidad residual de la hélice,  $h$  es la distancia vertical de la hélice al centro de masa y  $l$  es la distancia horizontal de la hélice al centro de masa.

### 3.2.3 MODELO DINÁMICO DEL CUADRIRROTOR

En esta sección se introduce el modelo dinámico completo que representa la dinámica del cuadirrotor. El modelo dinámico del cuadirrotor está constituido por 6 ecuaciones diferenciales de segundo orden, cada una de las cuales representa los grados de libertad que la aeronave puede realizar. Cabe mencionar que de los 6 grados de libertad sólo pueden ser controlados 4 directamente, los cuales son  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  y  $z$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xx} \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) + J_r \dot{\theta} \Omega_r + l(-T_2 + T_4) - h(\sum_{i=1}^4 H_{yi}) + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi} \\ I_{yy} \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{xx}) - J_r \dot{\phi} \Omega_r + l(T_1 - T_3) + h(\sum_{i=1}^4 H_{xi}) + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi} \\ I_{zz} \ddot{\psi} = \dot{\theta} \dot{\phi} (I_{xx} - I_{yy}) + J_r \dot{\psi} \Omega_r + (-1)^i \sum_{i=1}^4 Q_i + l(H_{x2} - H_{x4}) + l(-H_{y1} + H_{y3}) \\ m \ddot{z} = mg(c\psi c\phi) \sum_{i=1}^4 T_i \\ m \ddot{x} = (s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi) \sum_{i=1}^4 T_i - \sum_{i=1}^4 H_{xi} - \frac{1}{2} C_x A_c \rho \dot{x} |\dot{x}| \\ m \ddot{y} = (-c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi) \sum_{i=1}^4 T_i - \sum_{i=1}^4 H_{yi} - \frac{1}{2} C_y A_c \rho \dot{y} |\dot{y}| \end{array} \right. \quad (3.12)$$

donde  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , representan los ángulos de orientación (cabeceo, alabeo y guiñada), posteriormente  $x$ ,  $y$ ,  $z$  representan la posición en el eje  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Puesto a que el modelo dinámico (3.12) es complejo para diseñar una ley de control, se obtendrá un modelo simplificado para poder diseñar una ley de control más fácilmente. Una vez validado el algoritmo de control en el modelo simplificado, se pretende implementarlo al modelo completo del cuadrirrotor.

### 3.3 DINÁMICA DE LOS ROTORES

En esta sección, se obtendrá un modelo simple de los rotores, posteriormente será agregado al modelo dinámico del cuadrirrotor. El cual será utilizado para diseñar la ley de control.

Considerando el esquema eléctrico de los motores de DC, que se muestra en la Figura 3.2, se obtendrán las ecuaciones que serán utilizadas para describir el comportamiento dinámico de los rotores.

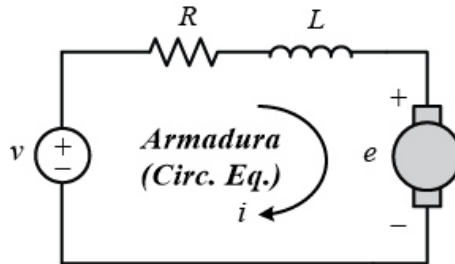


Figura 3.2: Circuito eléctrico del rotor.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en el circuito eléctrico (3.2), se obtiene lo siguiente

$$v = v_R + v_L + e \quad (3.13)$$

donde  $v_R$  es el voltaje a través de la resistencia  $R$  y  $v_L$  es el voltaje a través de la inductancia  $L$ , y  $e$  es el voltaje inducido en el rotor.

La ecuación (3.13) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$v = R * i + L * \frac{di}{dt} + K_E \omega_M \quad (3.14)$$

donde  $i$  es la corriente del motor,  $K_E$  es la constante del motor y  $\omega_M$  es la velocidad angular del motor.

Además, el par del motor está descrito de la siguiente manera

$$T_m = i * K_E \quad (3.15)$$

Por otro lado, se introducen las ecuaciones que describen el comportamiento mecánico de los rotores, es decir

$$T_m - T_l = \dot{\omega}_m J_{tm} \quad (3.16)$$

donde  $T_m$  es el par del motor,  $T_l$  es la carga del par,  $J_{tm}$  es el momento de inercia total del motor y  $\dot{\omega}_m$  es la aceleración angular del motor.

Finalmente, se considera que la dinámica del motor es de primer orden, cuya función de transferencia esta dada por la siguiente ecuación

$$\frac{\omega_m}{U_m} = \frac{K_p}{1 + s\tau} \quad (3.17)$$

donde  $\omega_m$  es la velocidad,  $U_m$  es el voltaje de alimentación,  $K_p$  es la ganancia del sistema y  $\tau$  es la constante de tiempo del sistema.

### 3.4 MODELO DINÁMICO UTILIZADO PARA EL CONTROL DEL CUADRIRROTOR

Puesto que el modelo dinámico completo (3.12) es de alta dimensión y no lineal, debido a esto se introducirán algunas hipótesis que permitan simplificar el modelo, para después poder diseñar las leyes de control.

A continuación se describen las hipótesis que permitirán reducir el modelo dinámico completo del cuadrirrotor:

- Las fuerzas centrales y momentos de alabeo son despreciables.
- Los coeficientes de empuje y arrastre se suponen constantes.

El sistema puede escribirse en espacio estado, en la forma, y se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{X} = f(X, U) \quad (3.18)$$

donde  $X$  es el vector de estado, el cual está definido por

$$X = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}, x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T \quad (3.19)$$

definiendo la variables del vector  $X$ , tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi & x_7 &= z \\ x_2 &= \dot{\phi} & x_8 &= \dot{z} \\ x_3 &= \theta & x_9 &= x \\ x_4 &= \dot{\theta} & x_{10} &= \dot{x} \\ x_5 &= \psi & x_{11} &= y \\ x_6 &= \dot{\psi} & x_{12} &= \dot{y} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Además,  $U$  es el vector de las entradas

$$U = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T \quad (3.21)$$

donde las entradas son mapeadas por:

$$\begin{aligned} U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 &= b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ U_3 &= b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_4 &= d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$



donde  $\Omega$  son las velocidades angulares de las hélices y son las variables a controlar.

Finalmente, de las ecuaciones anteriores, se obtiene el siguiente modelo dinámico:

$$f(X, U) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4x_6a_1 + x_4a_2\Omega_r + b_1U_2 \\ x_4 \\ x_2x_6a_3 + x_2a_4\Omega_r + b_2U_3 \\ x_6 \\ x_4x_2a_5 + b_3U_4 \\ x_8 \\ g - c_\phi c_\theta \frac{1}{m}U_1 \\ x_{10} \\ u_x \frac{1}{m}U_1 \\ x_{12} \\ u_y \frac{1}{m}U_1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= (I_{yy} - I_{zz})/I_{xx} & b_1 &= l/I_{xx} \\ a_2 &= J_r/I_{xx} & b_2 &= l/I_{yy} \\ a_3 &= (I_{zz} - I_{xx})/I_{yy} & b_3 &= l/I_{zz} \\ a_4 &= J_r/I_{yy} \\ a_5 &= (I_{xx} - I_{yy})/I_{zz} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} u_x &= (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \\ u_y &= (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Posteriormente en los siguientes capítulos, se utilizarán las ecuaciones obtenidas del modelo dinámico del cuadrirrotor, para implementar los algoritmos de control ASTA y BI respectivamente.

## 3.5 CONCLUSIONES

En este capítulo, se introdujo el modelo matemático general que representa la dinámica del cuadrirrotor. Por otra parte, bajo las siguientes hipótesis: las fuerzas centrales y momentos de alabeo son despreciables, y los coeficientes de empuje y arrastre se suponen constantes, se obtuvo el modelo simplificado del cuadrirrotor, con el fin de diseñar los algoritmos de control.

## CAPÍTULO 4

# ESQUEMA DE CONTROL MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

---

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se presentara una metodología para el diseño de un control robusto basado en las técnicas por modos deslizantes. La principal característica de estos controles es que satisface los objetivos de control con convergencia en tiempo finito, y su robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones.

Varias estrategias de control han sido propuestas para controlar sistemas no lineales con incertidumbres. En cuanto a la técnica de modos deslizantes, mediante el uso de las técnicas clásicas de modos deslizantes, se obtiene una entrada discontinua, produciendo en el sistema el denominado fenómeno de *chattering*, el cual es una de las limitaciones más importantes de tales controladores.

Recientemente, varios trabajos han abordado el problema de cómo reducir el fenómeno de *chattering*. Por ejemplo, los controladores de modos deslizantes de alto orden se han propuesto gracias a sus ventajas, como la robustez ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas, la convergencia en tiempo finito y la reducción del efecto de *chattering*.

El objetivo de esta sección es diseñar estrategias de control basados en la técnica de modos deslizantes de alto orden. Más precisamente, utilizando el *Algoritmo Super Twisting Adaptativo* (ASTA) [28], para el seguimiento de las trayectorias deseadas ante perturbaciones.

## 4.2 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

El control por modos deslizantes es un esquema de control robusto, basado en el concepto de una estructura variable de control en respuesta a los cambios de estado del sistema, con el fin de obtener un mejor desempeño.

Por otro lado, el control por modos deslizantes permite la separación del movimiento del sistema completo en componentes parciales independientes de dimensiones inferiores, y reduce la sensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones. Además, estas propiedades convierten a los modos deslizantes en una herramienta eficiente para controlar sistemas con dinámicas de alto orden, operando bajo condiciones inciertas, presentes en muchos procesos. Como se ha mencionado, la principal desventaja de los modos deslizantes clásicos es la presencia de oscilaciones de alta frecuencia llamadas *chattering*, causado por alta frecuencia de conmutación de control.

Definiendo una superficie deslizante dada por  $s = y - h(t) = 0$ , donde  $y$  es la salida de un sistema dinámico SISO, la cual es una variable física medible, y  $h(t)$  es una entrada continuamente diferenciable a seguir en tiempo real. Entonces, el control por modos deslizantes clásico está dado por  $u = -k\text{sign}(s)$ , donde

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

debe ser considerado como un controlador universal aplicable, si el grado relativo es 1, es decir,  $\dot{s}$  depende directamente del control  $u$ .

### 4.3 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

Como se mencionó anteriormente, la principal desventaja del control por modos deslizantes clásico es el efecto *chattering*. Sin embargo, han surgido nuevas técnicas para dar solución de este problema. Recientemente se introdujeron los Modos Deslizantes de Alto Orden (*HOSM*, por sus siglas en inglés, *High Order Sliding Modes*), los cuáles generalizan la idea de los modos deslizantes clásicos, actuando sobre las derivadas del tiempo de alto orden de la desviación del sistema de las restricciones, en lugar de influir en la primera desviación como pasa en los Modos Deslizantes Clásicos. Las principales ventajas del enfoque original se cumplen, y a la vez que reducen el efecto *chattering*, además, prevén una mayor precisión en la realización [19].

El orden deslizante caracteriza el grado de suavidad en la dinámica dentro de la vecindad del modo deslizante. Si la tarea es mantener una restricción dada por la igualdad de una función suave  $s$  a cero, el orden de deslizamiento es un número de derivadas totales continuas de  $s$  (incluyendo el cero) en la vecindad del modo deslizante. Por lo tanto, el  $r$ -ésimo orden del modo deslizante se determina por la igualdad

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$$

formando una condición  $r$ -dimensional, sobre el estado del sistema dinámico.

El principal problema en la implementación de los *HOSM*, es que se incrementa la demanda de información. De manera general, cualquier controlador  $r$ -modo deslizante manteniendo  $s = 0$  necesita que  $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)}$  estén disponibles. Una excepción es el llamado *Super Twisting*, un controlador de segundo orden, el cual sólo necesita mediciones de  $s$ .

Entonces, con el objetivo de controlar la orientación y altitud de un vehículo

aéreo no tripulado, en esta tesis se considera la técnica de control por modos deslizantes de orden superior, como el *Algoritmo Super Twisting Adaptativo*. El diseño de estos controlados es mostrado en las siguientes secciones.

### 4.3.1 CONTROLADOR SUPER TWISTING

Considere un sistema no lineal de una entrada

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

donde  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  es un vector de estado ( $X$  es un conjunto compacto),  $u \in \mathbb{R}$  es una función de control,  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial parcialmente conocido y diferenciable.

El siguiente control *Super Twisting* [13] es considerado

$$\begin{aligned} u &= -K_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) + v \\ \dot{v} &= -\frac{K_2}{2} \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $u$  representa la señal de control,  $K_1$  y  $K_2$  son las ganancias del controlador, y  $s$  representa la superficie deslizante.

El controlador clásico por modos deslizantes y los controladores por modos deslizantes de segundo orden incluyendo el algoritmo de control *Super Twisting* continuo, pueden garantizar robustez ante perturbaciones si las cotas de las perturbaciones son conocidas.

### 4.3.2 ALGORITMO SUPER TWISTING ADAPTATIVO

De acuerdo con la metodología de *Algoritmo Super Twisting Adaptativo*, las ganancias del controlador se adaptan con el fin de atenuar el fenómeno de *chattering* y rechazar las perturbaciones del sistema. Además, no se requiere conocer las cotas

de las incertidumbres y perturbaciones presentes en el sistema. La principal ventaja de este algoritmo es que combina la reducción del fenómeno *chattering* y la robustez de los modos deslizantes de alto orden. De esta forma, el control diseñado garantiza la convergencia en tiempo finito y la robustez del sistema bajo incertidumbre.

Utilizando el *Algoritmo Super Twisting Adaptativo* [28], las ganancias adaptativas  $K_1$  y  $K_2$  son seleccionadas de tal forma que están en función de la dinámica de la superficie deslizante, como se describe a continuación

$$K_1 = K_1(t, s, \dot{s}), \quad K_2 = K_2(t, s, \dot{s}). \quad (4.3)$$

Entonces, con el objetivo de diseñar un *algoritmo super twisting adaptativo* para el sistema (4.1), se introducen las siguientes hipótesis:

**Hipótesis B1.** La variable deslizante  $s = s(x, t) \in \mathfrak{R}$  se diseña de tal forma que las dinámicas compensadas del sistema (4.1) alcanzan la superficie deslizante  $s = s(x, t) = 0$ .

**Hipótesis B2.** El grado relativo del sistema (4.1) es igual a 1 y las dinámicas internas son estables.

Entonces, la dinámica variable deslizante  $s$  está dada por

$$\dot{s} = a(x, t) + b(x, t)u. \quad (4.4)$$

donde  $a(x, t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}f(x, t)$ ,  $b(x, t) = \frac{\partial s}{\partial x}g(x)$ .

**Hipótesis B3.** La función  $b(x, t) \in \mathfrak{R}$  es desconocida y diferente a cero  $\forall x$  y  $t \in [0, \infty)$ . Además,  $b(x, t) = b_0(x, t) + \Delta b(x, t)$ , donde  $b_0(x, t)$  corresponde a la parte nominal de  $b(x, t)$ , la cual se considera ser conocida. Además  $\delta_1$  representa una constante positiva tal que  $\Delta b(x, t)$  satisface

$$\left| \frac{\Delta b(x, t)}{b_0(x, t)} \right| \leq \gamma_1.$$

**Hipótesis B4.** Existen constantes positivas desconocidas  $\delta_1, \delta_2$  tal que la

función  $a(x, t)$  y su derivada es acotada

$$|a(x, t)| \leq \delta_1 |s|^{1/2}, \quad |\dot{a}(x, t)| \leq \delta_2. \quad (4.5)$$

El objetivo del enfoque ASTA es diseñar un control continuo sin sobreestimar la ganancia, para llevar la variable deslizante  $s$  y su derivada  $\dot{s}$  a cero en tiempo finito, ante perturbaciones aditivas y multiplicativas  $\gamma_1$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , cuyas cotas son desconocidas.

Entonces, el sistema (4.4) en lazo cerrado bajo la acción de control (4.2)-(4.3), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{s} &= a(x, t) - K_1 b(x, t) |s|^{1/2} \text{sign}(s) + b(x, t)v, \\ \dot{v} &= -K_2 \text{sign}(s), \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por otro lado, considerando el siguiente cambio de coordenadas

$$\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2)^T = (|s|^{1/2} \text{sign}(s), \quad b(x, t)v + a(x, t))^T, \quad (4.7)$$

El sistema (4.6) puede escribirse como

$$\dot{\varsigma} = \tilde{A}(\varsigma_1)\varsigma + \tilde{g}(\varsigma_1)\varrho(x, t), \quad (4.8)$$

donde

$$\tilde{A}(\varsigma_1) = \frac{1}{2|\varsigma_1|} \begin{pmatrix} -2b(x, t)K_1 & 1 \\ -2b(x, t)K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}(\varsigma_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dados  $\varrho(x, t) = \dot{b}(x, t)v + \dot{a}(x, t) = 2\varrho(x, t)\frac{\varsigma_1}{|s|}$ .

Para probar la estabilidad en lazo cerrado del sistema se presenta la siguiente hipótesis

**Hipótesis B5.** El término  $\dot{b}(x, t)v$  está acotado. Sin embargo, no se conocen sus cotas  $\delta_3$ , *i.e.*  $|\dot{b}(x, t)v| < \delta_3$ .

Entonces, el sistema (4.8) puede escribirse como

$$\dot{\varsigma} = \bar{A}(\varsigma_1)\varsigma, \quad \bar{A}(\varsigma_1) = \frac{1}{2|\varsigma_1|} \begin{pmatrix} -2b(x, t)K_1 & 1 \\ -2b(x, t)K_2 + 2\varrho(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$



donde  $|\varsigma_1| = |s|^{1/2}$ . Tomando en cuenta la función cuadrática

$$V_0 = \varsigma^T \tilde{P} \varsigma \quad (4.10)$$

donde  $\tilde{P}$  es una matriz constante, simétrica y definida positiva. Tomando su derivada a lo largo de las trayectorias de (4.2) tenemos que

$$\dot{V}_0 = -|s|^{-1/2} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma, \quad (4.11)$$

la cual es válida para casi cualquier región, donde  $\tilde{P}$  y  $\tilde{Q}$  satisfacen la ecuación de Lyapunov

$$\bar{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \bar{A} = -\tilde{Q}, \quad (4.12)$$

puesto que  $\bar{A}$  es Hurwitz si se cumplen las siguientes desigualdades  $b(x, t)K_1 > 0$ ,  $2b(x, t)K_2 + 2\rho(x, t) > 0$ , para todo  $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T > 0$ , entonces, existe una única solución  $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$  de (4.12), tal que  $V_0$  es una función de Lyapunov estricta.

**Nota 1.** La estabilidad en  $\dot{\varsigma} = 0$  de (4.9) está completamente determinada por la estabilidad de la matriz  $\bar{A}$ . Sin embargo, las versiones clásicas del Teorema de Lyapunov [10] no pueden emplearse ya que requieren una función candidata continuamente diferenciable, o por lo menos una función de Lyapunov continua localmente Lipschitz. Sin embargo,  $V_0$  (4.15) es continua pero no localmente Lipschitz. No obstante, como se explica en el Teorema 1 en [16], es posible demostrar la convergencia mediante el Teorema de Zubov [21], que requiere sólo funciones de Lyapunov continuas. Este argumento es válido para todas las pruebas del presente trabajo, por lo que se mencionará posteriormente.

Por otro lado, a partir de la Hipótesis B4 - B5, se tiene que

$$0 < \rho(x, t) < \delta_2 + \delta_3 = \delta_4.$$

Dado que  $\varsigma_1$  y  $\varsigma_2$  convergen a 0 en tiempo finito, entonces  $s$  y  $\dot{s}$  convergen a 0 también en tiempo finito.

El diseño del controlador basado en el enfoque ASTA, es formulado en el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.1 [28].** *Considérese el sistema (4.1) en lazo cerrado con el control (4.2), expresado en términos de las dinámicas de la variable deslizante (4.4). Además, considérense satisfechas las hipótesis B1-B5 para las ganancias desconocidas  $\gamma_1, \delta_1, \delta_2 > 0$ . Entonces, para valores iniciales dados  $x(0)$  y  $s(0)$ , existe un tiempo finito  $t_F > 0$  y un parámetro  $\mu$ , siempre que se cumpla la condición*

$$K_1 > \frac{(\lambda + 4\epsilon_*)^2 + 4\delta_4^2 + 4\delta_4(\lambda - 4\epsilon_*^2)}{16\epsilon_*\lambda},$$

si  $|s(0)| > \mu$ , tal que un modo deslizante de segundo orden, i.e.  $|s| \leq \eta_1$  y  $|\dot{s}| \leq \eta_2$  es establecido  $\forall t \geq t_F$ , bajo la acción de control (4.2) con las ganancias adaptativas

$$\dot{K}_1 = \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \text{signo}(|s| - \mu), & \text{if } K_1 > K_*, \\ K_*, & \text{if } K_1 \leq K_*, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$K_2 = 2\epsilon_* K_1,$$

donde  $\epsilon_*, \lambda, \gamma_1, \omega_1, \mu$  son constantes positivas arbitrarias,  $K_*$  es una constante positiva arbitrariamente pequeña,  $\eta_1 \geq \mu$  y  $\eta_2 > 0$ .  $\square$

**Prueba.** Para analizar la estabilidad en lazo cerrado del sistema (4.9), considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varsigma, K_1, K_2) = V_0 + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2\gamma_i} (K_i - K_i^*)^2 \right\} \quad (4.14)$$

donde

$$V_0 = \varsigma^T \tilde{P} \varsigma, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda + 4\epsilon_*^2 & -2\epsilon_* \\ -2\epsilon_* & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

y  $\lambda, \epsilon_*, \gamma_2, K_1^*$  y  $K_2^* > 0$ . Note que la matriz  $\tilde{P}$  es definida positiva si  $\lambda > 0$  y  $\epsilon_* \in \mathfrak{R}$ .

Entonces, al calcular la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (4.14), se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) = \dot{V}_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} (K_i - K_i^*) \dot{K}_i, \quad (4.16)$$

donde

$$\dot{V}_0 = \varsigma^T \{ \tilde{A}(\varsigma_1)^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}(\varsigma_1) \} \varsigma \leq -\frac{1}{|\varsigma_1|} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma. \quad (4.17)$$

La matriz simétrica  $\tilde{Q}$  se define como

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2|s|^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 4b(x, t)[K_1(\lambda + 4\epsilon_*^2) - 2K_2\epsilon_*] + 8\rho\epsilon_* & * \\ -\lambda - 4\epsilon_*^2 - 2b(x, t)[2K_1\epsilon_* - K_2] - 2\rho & 4\epsilon_* \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Al seleccionar

$$K_2 = 2\epsilon_*K_1, \quad (4.19)$$

entonces, a partir de las hipótesis B3-B5, es fácil deducir que la matriz  $\tilde{Q}$  será definida positiva con un valor propio mínimo  $\lambda_{min}(\tilde{Q}) \geq 2\epsilon_*$  si se cumple la condición siguiente

$$K_1 > \frac{(\lambda + 4\epsilon_*)^2 + 4\delta_4^2 + 4\delta_4(\lambda - 4\epsilon_*^2)}{16\epsilon_*\lambda\gamma_1}. \quad (4.20)$$

Por otro lado, derivando la función candidata de Lyapunov (4.14) a lo largo de la trayectoria de (4.9), se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) = \dot{V}_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} (K_i - K_i^*) \dot{K}_i, \quad (4.21)$$

donde

$$\dot{V}_0 = \varsigma^T \{ \tilde{A}(\varsigma_1)^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}(\varsigma_1) \} \varsigma \leq -\frac{1}{|\varsigma_1|} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma. \quad (4.22)$$

Dado que  $\tilde{Q}$  es definida positiva con un valor propio mínimo  $\lambda_{min}(\tilde{Q}) \geq 2\epsilon_*$ , se satisface la siguiente desigualdad

$$\dot{V}_0 \leq -\frac{1}{|\varsigma_1|} \varsigma^T \tilde{Q} \varsigma \leq -\frac{2\epsilon_*}{|\varsigma_1|} \|\varsigma\|^2, \quad (4.23)$$

y, a partir de la norma de equivalencia, se tiene

$$\lambda_{min}(\tilde{P}) \|\varsigma\|^2 \leq \varsigma^T \tilde{P} \varsigma \leq \lambda_{max}(\tilde{P}) \|\varsigma\|^2, \quad (4.24)$$

donde  $\|\varsigma\|^2 = |s| + \varsigma_2^2$ , y

$$|\varsigma_1| = |s|^{1/2} \leq \|\varsigma\| \leq \sqrt{\frac{V_0(\varsigma)}{\lambda_{min}(\tilde{P})}}.$$

Entonces, con una selección de las ganancias acorde a las condiciones dadas en las ecuaciones (4.19) y (4.20), se tiene que

$$\dot{V}_0 \leq -rV_0^{1/2}, \quad r = 2\epsilon_* \frac{\sqrt{\lambda_{min}(\tilde{P})}}{\lambda_{max}(\tilde{P})}. \quad (4.25)$$

Ahora bien, de acuerdo con las ecuaciones (4.21) y (4.25), se tiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -rV_0^{1/2} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} \epsilon_{K_i} \dot{K}_i, \quad (4.26)$$

donde  $\epsilon_{K_i} = (K_i - K_i^*)$  para  $i = 1, 2$ . Añadiendo el término de la ecuación  $\pm \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \right\}$  a (4.26), reagrupando se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -rV_0^{1/2} - \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \epsilon_{K_i} \dot{K}_i + \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \right\}. \quad (4.27)$$

A partir de la desigualdad  $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \leq |x| + |y| + |z|$ , se cumple lo siguiente

$$-rV_0^{1/2} - \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)}, \quad (4.28)$$

dado que  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ ,  $\eta_0 = \min(r, \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}}, \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}})$ . De acuerdo con la desigualdad (4.28), la ecuación (4.26) puede reescribirse como

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{\gamma_i} \epsilon_{K_i} \dot{K}_i + \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} |\epsilon_{K_i}| \right\}. \quad (4.29)$$

Ahora bien, con base en la definición de las ganancias adaptativas (4.13), se puede obtener una solución en el dominio  $\mu < |s| \leq \eta_1$  de la forma siguiente

$$K_1 = K_1(0) + \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} t, \quad 0 \leq t \leq t_F, \quad (4.30)$$

siendo  $K_1$  acotada. Considerando  $K_2 = 2\epsilon_* K_1$ , la ganancia adaptativa  $K_2$  también es acotada.

Dentro del dominio  $|s| \leq \mu$ , las ganancias  $K_1$  y  $K_2$  son decrecientes. Por lo tanto, las ganancias  $K_1$  y  $K_2$  están acotadas. Entonces, existen constantes positivas  $K_i^*$  tal que  $K_i - K_i^* < 0$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . De esta forma, la Ecuación (4.29) puede reducirse a

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)} + \hat{\epsilon}, \quad (4.31)$$

donde

$$\hat{\epsilon} = - \sum_{i=1}^2 |\epsilon_{K_i}| \left( \frac{1}{\gamma_i} \dot{K}_i - \frac{\omega_i}{\sqrt{2\gamma_i}} \right).$$

Por otro lado, si  $|s| > \mu$  y  $K_1 > K_1^*$ ,  $\forall t \geq 0$ , se tiene que

$$\dot{K}_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \quad y \quad \hat{\epsilon} = -|\epsilon_{K_2}| \left( \frac{1}{\gamma_2} \dot{K}_2 - \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} \right). \quad (4.32)$$

De este modo, seleccionando  $\epsilon_* = \frac{\omega_2}{2\omega_1} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$ , obtenemos

$$\dot{K}_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{\gamma_2}{2}}. \quad (4.33)$$

A partir de (4.33), el término  $\hat{\epsilon}$  en (4.31) se vuelve  $\hat{\epsilon} = 0$ , se obtiene

$$\dot{V}(\varsigma, K_1, K_2) \leq -\eta_0 \sqrt{V(\varsigma, K_1, K_2)}. \quad (4.34)$$

Integrando (4.34), tenemos que

$$\sqrt{V(t, \varsigma, K_1, K_2)} \leq \sqrt{V(t_0, \varsigma, K_1, K_2)} - \frac{\eta_0}{2} t, \quad (4.35)$$

sea  $\sqrt{V(t_0, \varsigma, K_1, K_2)} - \frac{\eta_0}{2} t_F = 0$ , entonces el tiempo de convergencia  $t_F$  está dado por

$$t_F = \frac{2\sqrt{V(t_0, \varsigma, K_1, K_2)}}{\eta_0}. \quad (4.36)$$

Además, para  $t > t_F$  tenemos que  $V(t) = 0$ . Por otro lado, cuando  $|s| < \mu$ ,  $K_1$  está dado por (4.13), y el término  $\hat{\epsilon}$  está dado por

$$\hat{\epsilon} = \begin{cases} 2|K_1 - K_1^*| \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}}, & K_1 > K_*, \\ -|K_* - K_1^* + \eta t| \left( \frac{\eta}{\gamma_1} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} \right), & K_1 \leq K_*, \end{cases} \quad (4.37)$$

De este modo, durante el proceso de adaptación la variable deslizante  $s$  alcanza el dominio  $|s| \leq \mu$  en tiempo finito. Si  $s$  escapa del dominio un tiempo finito, se garantiza que permanecerá en un dominio mayor  $|s| \leq \eta_1$ ,  $\eta_1 > \mu$  en un modo deslizante real.

Dentro del dominio  $|s| \leq \mu$ , el valor  $|s|$  puede estimarse con respecto a (4.6), y de acuerdo a (4.13)-(4.19) tal que

$$|s| \leq \{(1 - \gamma_1)K_1 + \delta_1\} \mu^{\frac{1}{2}} + \epsilon_* K_1 (1 - \gamma_1) (t_2 - t_1) = \bar{\eta}_1, \quad (4.38)$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  es el tiempo en el cual la trayectoria  $s$  entra y sale en el dominio  $|s| \leq \mu$ , respectivamente.

Si  $\mu < |s| \leq \eta_1$ , entonces

$$|\dot{s}| \leq (1 + \gamma_1)(\sqrt{\eta_1} + \epsilon_*)(K_1(t_2) + \omega_1 \sqrt{\frac{\eta_1 \gamma_1}{2}})(t_3 - t_2) + \delta_1 \sqrt{\eta_1} = \bar{\eta}_2, \quad (4.39)$$

donde  $t_2$  y  $t_3$  ( $t_3 > t_2$ ), son los instantes de tiempo cuando  $s$  abandona y regresa al dominio  $|s| \leq \mu$  respectivamente.

A partir de las condiciones (4.38)-(4.39), obtenemos

$$|\dot{s}| \leq \max(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \eta_2, \quad (4.40)$$

y de esta forma se prueba la existencia del dominio real del modo deslizante

$$W = \{s, \dot{s} \mid |s| \leq \eta_1, |\dot{s}| \leq \eta_2, \eta_1 > \mu\}. \quad (4.41)$$

Con esto se concluye la prueba del Teorema 1.  $\square$

Una vez estudiado el estrategia de control ASTA, podemos implementar esta técnica de control a nuestro modelo dinámico del cuadrirrotor. A continuación se muestra la implementación de dicho control.

### 4.3.3 ALGORITMO SUPER TWISTING ADAPTATIVO APLICADO AL MODELO DEL CUADRIRROTOR

En esta sección, se presenta el control por modos deslizantes de alto orden, basado en el *algoritmo super twisting adaptativo* aplicado al modelo del cuadrirrotor.

El problema de control considerado en esta tesis es realizar el seguimiento de trayectorias deseadas para la orientación y altitud de un cuadrirrotor, diseñando el control de vuelo con la técnica de modos deslizantes de alto orden. Basado en el modelo dinámico en las ecuaciones (3.22) y (3.23), el sistema de control está dividido en múltiples subsistemas, compuestos por las dinámicas  $\phi, \theta, \psi$  y  $z$ , con los cuales se diseña un control para cada uno de los subsistemas. Para el sistema subactuado del cuadrirrotor, una superficie deslizante es diseñada usando una combinación lineal

del error de seguimiento de la posición y la velocidad de las variables de estado del sistema. De este modo, se pretende que el error de seguimiento sea forzado a cero, para obtener un buen desempeño en el seguimiento de trayectorias deseadas.

Un controlador para el sistema subactuado del cuadrirrotor es diseñado usando el *algoritmo super twisting adaptativo*, el objetivo es asegurar que el estado de las variables converja al valor deseado. La superficie deslizante está definida como

$$S_* = \dot{e}_* + \lambda_* e_* \quad (4.42)$$

donde  $* = z, \phi, \theta, \psi$  que representa cada uno de los estados,  $e_* = *_{d} - *$  es el error de cada uno de los estados y  $\lambda_* > 0$ .

Se propone diseñar el *algoritmo super twisting adaptativo* para controlar la orientación y altitud de un cuadrirrotor, gracias a que posee características atractivas de robustez, al no necesitar conocer las cotas de las incertidumbres y perturbaciones. Entonces, las ganancias de control dinámicamente adaptativas ayudan a reducir el esfuerzo de la acción del controlador, además de asegurar la convergencia en un tiempo finito.

Por otro lado, el *algoritmo super twisting adaptativo* está dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \Omega_i &= -\alpha_* |S_*|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S_*) + \nu_* \\ \dot{\nu}_* &= -\frac{\beta_*}{2} \text{sign}(S_*) \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) representa la señal de control,  $\alpha_*$  y  $\beta_*$  son las ganancias adaptativas y deben ser positivas, y el símbolo *sign* se entiende como la función signo

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Las ganancias adaptativas  $\alpha_*$  y  $\beta_*$  están dadas por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_* &= \begin{cases} \omega_* \sqrt{\frac{\gamma_*}{2}} \text{sign}(|S_*| - \mu_*), & \text{if } \alpha_* > \alpha_m, \\ \eta_*, & \text{if } \alpha_* \leq \alpha_m, \end{cases} \\ \beta_* &= 2\epsilon_* \alpha_*, \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde  $\epsilon_*$ ,  $\gamma_*$ ,  $\omega_*$ ,  $\eta_*$  son constantes positivas arbitrarias, y  $\eta \geq \mu$ ,  $\eta > 0$ . El parámetro  $\alpha_m$  es una constante pequeña positiva.

El controlador ASTA (4.43) es utilizado en (3.22), donde el control de la altitud depende de  $U_1$  y la orientación depende de  $U_2, U_3$ , y  $U_4$ .

A partir de (3.22), se obtiene  $U_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), entonces podemos obtener el control del sistema (3.23) en lazo cerrado aplicando el controlador ASTA, con el objetivo de que la dinámica de los estados ( $\phi, \theta, \psi$  y  $z$ ) sigan trayectorias deseadas y sean robustos ante incertidumbres y perturbaciones.

## 4.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado un diseño de control no lineal robusto, basado en el enfoque de la técnica de *Modos Deslizantes de Alto Orden*, en particular el *Algoritmo Super Twisting Adaptativo*. Esta técnica de control es robusta con respecto a perturbaciones e incertidumbre paramétrica que afectan a la dinámica del sistema del cuadricóptero. Asimismo se mostró el procedimiento del diseño del control, el cual está basado en el modelo simplificado del cuadricóptero. Además, una de las propiedades de la técnica es su convergencia en tiempo finito. Finalmente, se obtuvieron condiciones suficientes para garantizar la robustez con respecto a la incertidumbre paramétrica y perturbaciones.



## CAPÍTULO 5

# ESQUEMA DE CONTROL BACKSTEPPING INTEGRAL

---

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, una estrategia de control no lineal robusto basado en la técnica de control *Backstepping Integral* (BI) ha sido diseñada para el modelo de un cuádrirrotor. Para poder implementar el controlador, se considera que todas las variables son medibles y todos los parámetros son conocidos, además, las incertidumbres se suponen acotadas. A partir de un modelo simplificado del cuádrirrotor se diseñará una estrategia de control *backstepping integral* para el seguimiento de trayectoria deseadas de la orientación del cuádrirrotor. Por otra parte, se obtienen condiciones suficientes para asegurar la convergencia exponencial del error de seguimiento.

Se han propuesto varios enfoques para el diseño de sistemas de control no lineal. Entre estos controladores, el control *backstepping* constituye una metodología importante de diseño. La técnica *backstepping* es una metodología de diseño sistemático y recursivo para el control de retroalimentación no lineal. El principio del diseño de *backstepping*, se basa en seleccionar de forma recursiva algunas funciones apropiadas

de las variables de estado como entrada de control virtual para un subsistema de orden uno.

El control virtual es diseñado para obtener la estabilidad de este subsistema a través de la función de Lyapunov. Después de cada etapa del método, resulta un nuevo control virtual. El procedimiento de *backstepping* termina cuando la entrada real aparece para estabilizar el sistema completo.

La robustez del control *backstepping* clásico es mejorado al añadir una parte integral. Esto permitirá rechazar términos desconocidos debido a incertidumbres paramétricas y perturbaciones.

Por otro lado, si el sistema no presenta incertidumbres, los controladores *backstepping integral* alcanzan un seguimiento asintótico. En consecuencia, los objetivos principales son diseñar un controlador basado en una técnica *backstepping integral* para el modelo del cuadrirrotor, para asegurar un seguimiento de la trayectoria de referencia deseada ante perturbaciones.

## 5.2 BACKSTEPPING

El control *backstepping* es un procedimiento recursivo que combina la elección de una función de Lyapunov con el diseño de un control por retroalimentación. Descompone el problema original en una secuencia de problemas de diseño para sistemas de orden reducido. El método *backstepping* [11] es utilizado para resolver problemas de estabilización, seguimiento y control robusto bajo condiciones menos restrictivas que las encontradas en otros métodos. Para ilustrar la técnica de *backstepping* en el caso especial de *backstepping* de un integrador, considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (5.1)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (5.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  son los estados y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control.

Las funciones  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son suaves en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $x = 0$ , y  $f(0) = 0$ . Se pretende diseñar un control por retroalimentación de estado que estabilice el origen  $x = 0$ ,  $\xi = 0$ . El sistema (5.1)-(5.2) pueden pensarse como la conexión en cascada de dos componentes, como en la Figura 5.1. La primer componente (5.1), con  $\xi$  como la entrada, y la segunda es el integrador (5.2). Supóngase que se sabe que la componente (5.1) puede estabilizarse con un control suave  $\xi = \phi(x)$ , con  $\phi(0) = 0$ , es decir, el origen de

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x)$$

es asintóticamente estable.

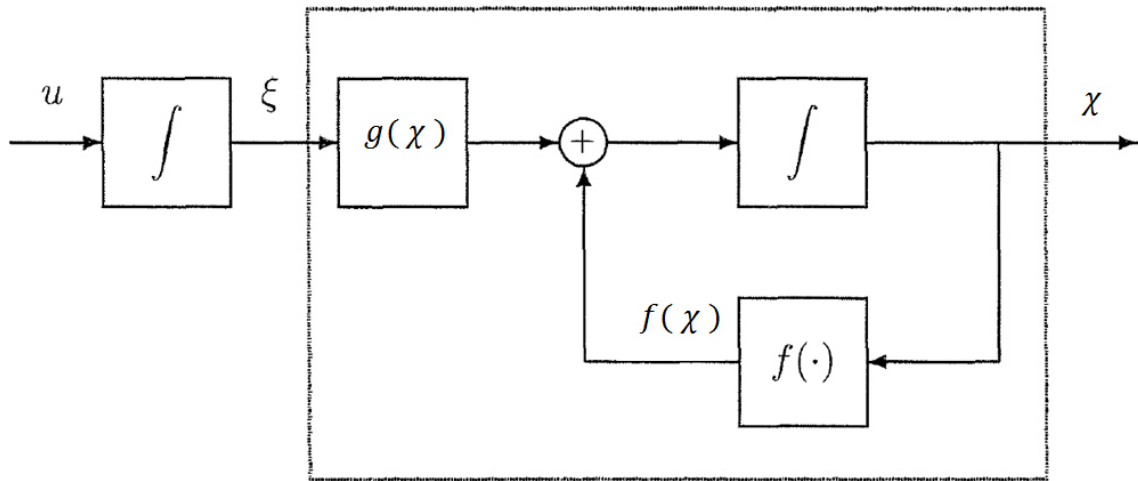


Figura 5.1: El diagrama bloque del sistema (5.1)-(5.2)

Además, supóngase que se conoce una función de Lyapunov  $V(x)$  (suave, definida positiva) que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -W(x), \quad \forall x \in D, \quad (5.3)$$

donde  $W(x)$  es definida positiva. Sumando y restando  $g(x)\phi(x)$  al lado derecho de (5.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [f(x) + g(x)\phi(x)] + \phi(x)[\xi - \phi(x)] \\ \dot{\xi} &= u \end{aligned} \quad (5.4)$$

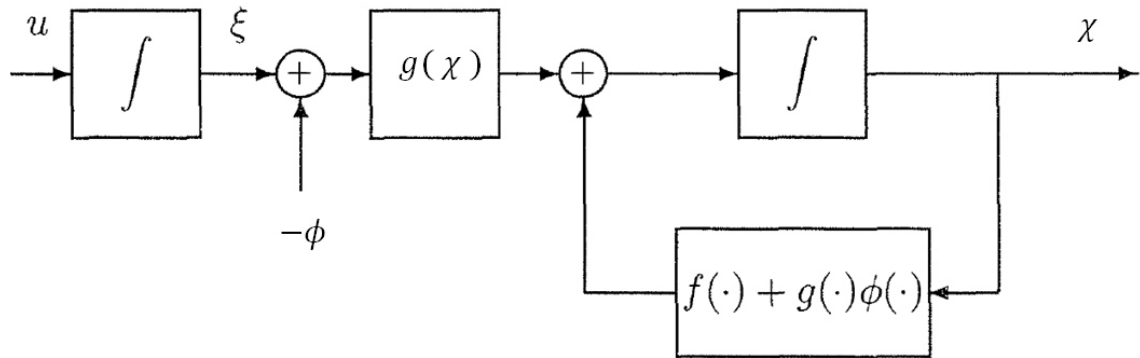


Figura 5.2: El diagrama bloque del sistema (5.4)

el cual es mostrado en la Figura 5.2.

Aplicando el cambio de variables tenemos

$$z = \xi - \phi(x), \quad v = u - \dot{\phi},$$

se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)z \\ \dot{z} &= v \end{aligned} \tag{5.5}$$

el cual podemos visualizar en la Figura 5.3.

El sistema (5.5) tiene la misma estructura que el sistema original, pero ahora la primera componente  $[f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)z$  tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen cuando su entrada  $z$  es cero. Esta característica será explotada en el diseño de un control  $v$  que establezca todo el sistema. Se propone una función candidata de Lyapunov para el sistema (5.5), de la forma

$$V_a(x, z) = V(x) + \frac{1}{2}z^2,$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (5.5) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)z + zv \\ &\leq -W(x) + \left[ \frac{\partial V}{\partial x} g(x) + v \right] z \end{aligned} \tag{5.6}$$

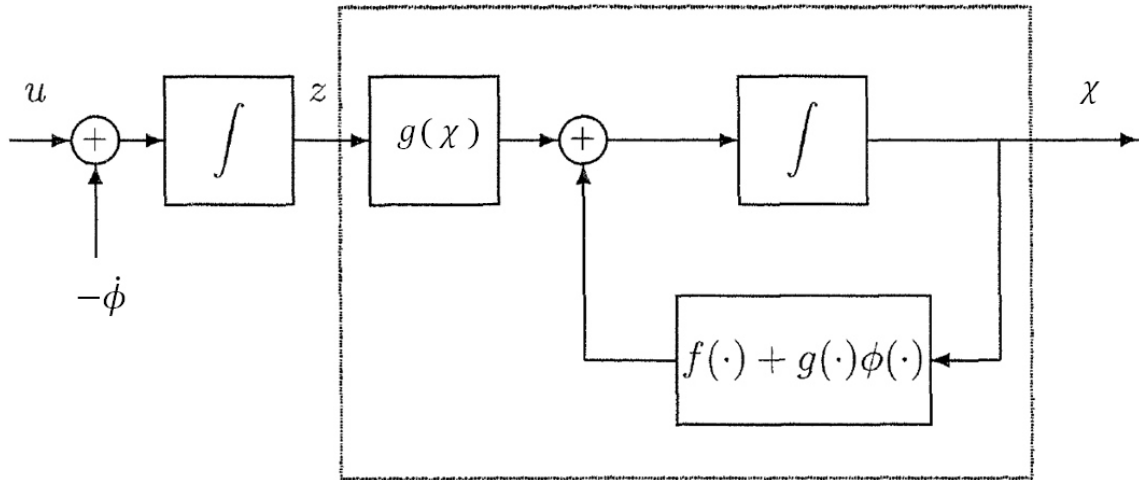


Figura 5.3: El diagrama bloque del sistema (5.5)

Eligiendo  $v$  como

$$v = -\frac{\partial V}{\partial x}g(x) - kz, \quad k > 0,$$

sustituyendo  $v$  en el sistema (5.6) se obtiene

$$\dot{V}_a \leq -W(x) - kz^2,$$

que muestra que el origen ( $x = 0, z = 0$ ) es asintóticamente estable. Como  $\phi(0) = 0$ , concluimos que el origen ( $x = 0, \xi = 0$ ) es asintóticamente estable. Sustituyendo las expresiones de  $v$ ,  $z$  y  $\dot{\phi}$  en el sistema (5.6), obtenemos la ley de control por retroalimentación de estados

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}[f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V}{\partial x}g(x) - k[\xi - \phi(x)] \quad (5.7)$$

Si las hipótesis son válidas globalmente y  $V(x)$  es radialmente no acotada, concluimos que el origen es globalmente asintóticamente estable. El resultado se resume en el siguiente lema.

**Lema.** *Considere el sistema (5.1)-(5.2) y sea  $\phi(x)$  un control estabilizante por retroalimentación de estado con  $\phi(0) = 0$ . Sea  $V(x)$  una función de Lyapunov que satisface (5.3) con alguna función definida positiva  $W(x)$ . Entonces, el control por retroalimentación de estado (5.7) estabiliza el origen de (5.1)-(5.2) con  $V(x) +$*

$\frac{1}{2}[\xi - \phi(x)]$  como función de Lyapunov. Además, si todas las hipótesis se cumplen globalmente y  $V(x)$  es radialmente no acotada, entonces, el origen será globalmente estable.  $\diamond$

Una vez estudiado la estrategia de control *backstepping* clásico, ahora podemos implementar esta técnica al modelo del cuadrirrotor agregando una parte integral al controlador, con la finalidad de obtener mayor robustez en cuestión de seguimiento de trayectorias.

### 5.2.1 DISEÑO DEL CONTROLADOR BACKSTEPPING

A continuación se realizará el diseño del controlador *backstepping* para el modelo del cuadrirrotor. Más precisamente se controlará el ángulo de roll ( $\phi$ ), para explicar como se realiza la técnica *backstepping* en el diseño de la ley de control para el sistema del cuadrirrotor.

Primer paso, se considera el error de seguimiento del ángulo de roll  $e_1 = \phi_d - \phi$ . Entonces se usará la siguiente función de Lyapunov

$$V(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2, \quad (5.8)$$

tomando la derivada en el tiempo de  $V(e_1)$ , se tiene que

$$\dot{V}(e_1) = e_1(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}). \quad (5.9)$$

Para asegurar  $\dot{V}(e_1)$  sea definida negativa, se define  $\dot{V}(e_1) = -\alpha e_1^2$ ,  $\alpha > 0$ . Entonces su derivada es  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_d + \alpha e_1$ . Puesto que  $\dot{\phi}$  no es una entrada de control esta será considerada como una entrada de control virtual

$$u_1 = \dot{\phi}_d + \alpha e_1. \quad (5.10)$$

Segundo paso, definiendo el error de seguimiento de velocidad angular roll

$$e_2 = u_1 - \dot{\phi} = \dot{\phi}_d + \alpha e_1 - \dot{\phi}, \quad (5.11)$$

y escogiendo la función de Lyapunov

$$V(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2), \quad (5.12)$$

además, tomando su derivada en el tiempo, se tiene que

$$\dot{V}(e_1, e_2) = -\alpha e_1^2 + e_2[\ddot{\phi}_d + \alpha \dot{e}_1 - \ddot{\phi}]. \quad (5.13)$$

Para que se cumpla  $\dot{V}(e_1, e_2) = -\alpha e_1^2 - \beta e_2^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , entonces, el ángulo de aceleración de roll ( $\ddot{\phi}$ ) debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\ddot{\phi} = \ddot{\phi}_d + \alpha \dot{e}_1 + \beta e_2, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (5.14)$$

Sustituyendo la ecuación (5.14) en el modelo simplificado (3.23) se obtiene la ley de control  $U_2$ , el cual satisface la estabilidad de Lyapunov

$$U_2 = \frac{1}{L}[I_{xx}(\ddot{\phi}_d + \alpha \dot{e}_1 + \beta e_2) - \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) - J_r\dot{\theta}\Omega_r]. \quad (5.15)$$

Finalmente, los controles  $U_3$  y  $U_4$  se obtienen siguiendo el mismo procedimiento.

## 5.2.2 DISEÑO DEL CONTROLADOR BACKSTEPPING INTEGRAL

En esta sección se diseñará un control robusto como el *backstepping*, agregado la parte integral para el modelo del cuadrirrotor. Debido a que el modelo del cuadrirrotor es un sistema subactuado y no lineal, resulta que, es muy sensible ante perturbaciones. Por tal motivo, se pretende mejorar el controlador *backstepping* en términos de robustez, agregándole una parte integral.

Analizando la ecuación (5.15) encontramos que  $U_2$  depende de las variables  $e_1$  y  $\dot{e}_1$ . Para obtener un buen desempeño del control en términos de robustez, se agrega el término integral dentro del *backstepping*, con el fin de controlar la orientación y altitud de un modelo con incertidumbre.

Considere el error de seguimiento del ángulo roll  $e_1 = \phi_d - \phi$ , agregando el término integral  $\chi_1 = \int_0^t e_1(\tau)d\tau$  dentro del error de seguimiento. Entonces se obtiene el nuevo error de seguimiento

$$z_1 = \phi_d - \phi + \chi_1 = e_1 + \chi_1 \quad (5.16)$$

Sea la función de Lyapunov  $V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$ , tomando su derivada en el tiempo  $\dot{V}(z_1) = z_1\dot{z}_1$ , se obtiene el control virtual

$$u_1 = \dot{\phi}_d + \alpha e_1 + \gamma z_1, \quad (5.17)$$

donde  $\alpha, \gamma > 0$ , haciendo  $\dot{V}(z_1) = -\gamma z_1^2$  negativa definida. Ahora, se considera el error de seguimiento de velocidad del ángulo roll

$$z_2 = \dot{\phi}_d + \alpha e_1 + \gamma z_1 - \dot{\phi} \quad (5.18)$$

y la función de Lyapunov  $V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$ , entonces el control real  $U_2$  está dado por.

$$U_2 = \frac{1}{L}[I_{xx}(\ddot{\phi}_d + \alpha\dot{e}_1 + \beta\dot{z}_1 + \gamma z_2) - \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) - J_r\dot{\theta}\Omega_r] \quad (5.19)$$

Como  $z_2$  contiene el término integral, la ley de control  $U_2$  tiene una forma de PID. De manera similar los controles  $U_3$  y  $U_4$  pueden ser obtenidas con el mismo procedimiento anterior.

### 5.2.3 CONTROL BACKSTEPPING INTEGRAL CON PERTURBACIÓN

Considere el modelo general del cuadrirrotor en donde se introducen las perturbaciones al sistema

$$\dot{X} = f(x) + g(x)U_2 + \Delta\xi_1 \quad (5.20)$$

donde la parte de las incertidumbres paramétricas está representado por  $\Delta\xi_1$ .



El modelo del cuadrirrotor puede ser expresado de la forma (5.20), con el fin de comprobar estabilidad en presencia de perturbaciones

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 x_6 a_1^0 + x_4 a_2^0 \Omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1^0 \end{bmatrix} U_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \xi_1 \quad (5.21)$$

donde la perturbación esta dada por  $\Delta \xi_1 = \Delta a_1 x_4 x_6 + \Delta a_2 x_4 \Omega_r + \Delta b_1 U_2$ .

Además, el vector de estado está dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi & x_7 &= z \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\phi} & x_8 &= \dot{x}_7 = \dot{z} \\ x_3 &= \theta & x_9 &= x \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\theta} & x_{10} &= \dot{x}_9 = \dot{x} \\ x_5 &= \psi & x_{11} &= y \\ x_6 &= \dot{x}_5 = \dot{\psi} & x_{12} &= \dot{x}_{11} = \dot{y} \end{aligned} \quad (5.22)$$

y los parámetros están dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= (I_{yy} - I_{zz})/I_{xx} \\ a_2 &= J_r/I_{xx} & b_1 &= l/I_{xx} \\ a_3 &= (I_{zz} - I_{xx})/I_{yy} & b_2 &= l/I_{yy} \\ a_4 &= J_r/I_{yy} & b_3 &= l/I_{zz} \\ a_5 &= (I_{xx} - I_{yy})/I_{zz} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Con base en la metodología de *backstepping*, considérese la ecuación (5.21) que representa la dinámica de alabeo  $\phi$ , el cual está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_4 x_6 a_1 + x_4 a_2 \Omega_r + b_1 U_2 + \Delta \xi_1 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Entonces, el error  $z_1$  y  $z_2$  están diseñados en [29], como sigue

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^d - x_1 + \chi_1 \\ z_2 &= x_2^d + \alpha_1 e_1 + \gamma_1 z_1 - x_2, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde  $\chi_1 = \int_0^t e_1(\tau)d\tau$ , representa la parte integral. Tomando la derivada con respecto al tiempo de  $z_1$  y  $z_2$ , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_1^d - \dot{x}_1 + \alpha_1 e_1 \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2^d + \alpha_1 \dot{e}_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 - \dot{x}_2,\end{aligned}\tag{5.26}$$

Ahora bien, aplicando la metodología del *backstepping* con los pasos antes mencionados, se obtiene la ley de control

**Paso 1.** Considerando la función de Lyapunov  $V_1(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$ , y tomando derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1, \\ \dot{V}_1 &= z_1(\dot{x}_1^d - x_2 + \alpha_1 e_1),\end{aligned}\tag{5.27}$$

seleccionando a  $x_2$  como un control virtual, resulta que

$$x_2 = (\dot{x}_1^d + \alpha_1 e_1 + \gamma_1 z_1),\tag{5.28}$$

entonces, reemplazando el control virtual (5.28) en  $\dot{V}_1$ , se obtiene

$$\dot{V}_1 = -\gamma_1 z_1^2, \quad \text{donde } \dot{V}_1 < 0.\tag{5.29}$$

**Paso 2** Considerando a  $V_a(z_1, z_2) = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2$  como una función de Lyapunov, tomando la derivada con respecto al tiempo, tal que

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ \dot{V}_a &= \dot{V}_1 + z_2(\dot{x}_2^d + \alpha_1 \dot{e}_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 - \dot{x}_2),\end{aligned}\tag{5.30}$$

donde se sustituye  $\dot{x}_2$  en la ecuación (5.24), resulta que

$$\dot{V}_a = \dot{V}_1 + z_2[\dot{x}_2^d + \alpha_1 \dot{e}_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 - (x_4 x_6 a_1 + x_4 a_2 \Omega_r + b_1 U_2 + \Delta \xi_1)]\tag{5.31}$$

donde  $\Delta \xi_1$  es el término adicional de incertidumbre generalizadas. De acuerdo con (5.31) podemos diseñar una ley de control robusta ante perturbaciones para el modelo del cuadricóptero, la cual es expresada como

$$U_2 = \frac{1}{b_1}(\dot{x}_2^d + \alpha_1 \dot{e}_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 + \beta_1 z_2 - x_4 x_6 a_1 - x_4 a_2 \Omega_r)\tag{5.32}$$

entonces, reemplazando esta ley de control (5.32) en  $\dot{V}_a$  (5.31), tal que

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &= \dot{V}_1 + z_2 \{ \dot{x}_2^d + \alpha_1 \dot{e}_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 - x_4 x_6 a_1 - x_4 a_2 \Omega_r - b_1 \left[ \frac{1}{b_1} (\dot{x}_2^d \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \dot{e}_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 + \beta_1 z_2 - x_4 x_6 a_1 - x_4 a_2 \Omega_r) \right] - \Delta \xi_1 \} \\ \dot{V}_a &= \dot{V}_1 + z_2 (-\beta_1 z_2 - \Delta \xi_1) \\ \dot{V}_a &= -\gamma_1 z_1^2 - \beta_1 z_2^2 - \Delta \xi_1 z_2\end{aligned}\tag{5.33}$$

Por lo tanto, el sistema (5.24) en lazo cerrado con la ley de control (5.32) es estable, ya que  $\dot{V}_a$  es asintóticamente estable. Se representa como

$$\dot{V}_a = -\delta V_a,\tag{5.34}$$

Se puede reescribir la ecuación (5.33) de la siguiente manera

$$\dot{V}_a = -2\gamma_1 \left( \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \right) - (\beta_1 - 2\gamma_1) z_2^2 - \Delta \xi_1 z_2,\tag{5.35}$$

entonces, agrupando los términos de  $z_2^2$  y la parte que contiene la perturbación, e igualamos a 0, se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= -(\beta_1 - 2\gamma_1) z_2^2 - \Delta \xi_1 z_2 \\ (\beta_1 - 2\gamma_1) z_2 &= -\Delta \xi_1\end{aligned}\tag{5.36}$$

tomando la norma de  $z_2$ , resulta que

$$\|z_2\| \geq \frac{\|\Delta \xi_1\|}{(\beta_1 - 2\gamma_1)}\tag{5.37}$$

en donde  $\|z_2\|$  es una bola de radio  $\frac{\|\Delta \xi_1\|}{(\beta_1 - 2\gamma_1)}$ , dado que depende de la perturbación <sup>1</sup>.

### 5.3 CONCLUSIONES

En este capítulo, se diseñó un control no lineal robusto para el cuádrirrotor, el cual está basado en el enfoque de *backstepping integral*, para estabilizar la orientación

<sup>1</sup>Satisface con la propiedad de la estabilidad práctica, debido a que permite establecer que la dinámica del error de estimación converge en una bola  $B_r$  de radio  $r$  ( $x \in B_r \Rightarrow \|x\| \leq r$ ). Si  $r \rightarrow 0$  en  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene la estabilidad asintótica clásica.

del sistema y el seguimiento de las trayectorias deseadas. Por otra parte, una de las propiedades del controlador *backstepping integral* es su convergencia asintótica. Además, fueron obtenidas condiciones suficientes para asegurar la estabilidad en lazo cerrado.

Un estudio comparativo de las técnicas de control de los Capítulos 4 y 5 será presentado en el siguiente capítulo para determinar su desempeño.

## CAPÍTULO 6

# RESULTADOS DE SIMULACIÓN

---

## 6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se obtuvieron resultados en simulación al implementar los algoritmos de control presentados en el Capítulo 4 y Capítulo 5, para el modelo del cuadrirrotor. Esto con la finalidad de comparar y determinar un buen desempeño del comportamiento en el seguimiento de trayectorias deseadas.

Las respuestas del *algoritmo super twisting adaptativo* y el *backstepping integral*, serán mostradas para comparar sus diferentes propiedades de robustez.

A partir de los resultados obtenidos para el seguimiento de trayectorias deseadas para ángulos de alabeo ( $\phi$ ), cabeceo ( $\theta$ ), guiñada ( $\psi$ ) y altitud ( $z$ ), se realizaron dos casos para estudiar el comportamiento en ambos esquemas de control: en caso nominal y en caso perturbado. De esta forma, se obtendrá una mejor apreciación del comportamiento de las respuestas, dado que se implementarán los controladores al modelo del cuadrirrotor bajo diferentes condiciones de operación.

Por otro lado, las respuestas obtenidas se obtuvieron con los parámetros de modelo dinámico que se muestran en la Tabla 6.1, los parámetros del controlador ASTA en la Tabla 6.2, y por último los parámetros del controlador BI en la Tabla

6.3.

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Masa	$m$	0.650	kg
Inercia en x	$I_{xx}$	$7.5e^{-3}$	kg.m <sup>2</sup>
Inercia en y	$I_{yy}$	$7.5e^{-3}$	kg.m <sup>2</sup>
Inercia en z	$I_{zz}$	$1.3e^{-2}$	kg.m <sup>2</sup>
Coefficiente de empuje	$b$	$3.1e^{-5}$	Ns <sup>2</sup>
Coefficiente de arrastre	$d$	$7.5e^7$	Nms <sup>2</sup>
Radio de la hélice	$R_{rad}$	0.15	m
Inercia del rotor	$J_r$	$6e^{-5}$	kg.m <sup>2</sup>
longitud centro-hélice	$l$	0.23	m

Tabla 6.1: Parámetros del modelo dinámico del cuadrirrotor

	$\omega_i$	$\lambda_i$	$\mu_i$	$\gamma_i$	$\epsilon_{*i}$	$\eta_i$
$U_1$	5	5	0.001	10	1	0.01
$U_2$	2	8	0.001	0.02	0.1	0.01
$U_3$	2	8	0.001	0.02	0.1	0.01
$U_4$	1	7	0.001	0.01	0.1	0.01

Tabla 6.2: Parámetros del controlador ASTA

	$C_{1,3,5,7}$	$C_{2,4,6,8}$	$\lambda_i$
$U_1$	10	15	5
$U_2$	5	25	2
$U_3$	5	20	2
$U_4$	15	25	2

Tabla 6.3: Parámetros del controlador *Backstepping Integral*

## 6.2 CASO NOMINAL Y CASO PERTURBADO

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de los algoritmos de control, estudiando dos casos diferentes, en caso nominal y en caso perturbado del sistema del cuadrirrotor. En caso nominal se observa las respuestas en donde el modelo no está sometido a ninguna perturbación, y el caso perturbado es donde al modelo está sometido a diferentes perturbaciones.

### 6.2.1 CASO NOMINAL

Antes de someter el modelo a perturbaciones, primero se debe conocer el comportamiento del modelo con los algoritmos de control en el caso nominal. En este caso, se muestran las respuestas del modelo sin ninguna perturbación. Con el fin de mostrar su comportamiento, se agregan al sistema diferentes trayectorias de seguimiento. Enseguida, se muestra el primer resultado obtenido en la Figura 6.1, así como el error de seguimiento en la Figura 6.4. donde  $\phi$  es el alabeo,  $\theta$  es el cabeceo,  $\psi$  es

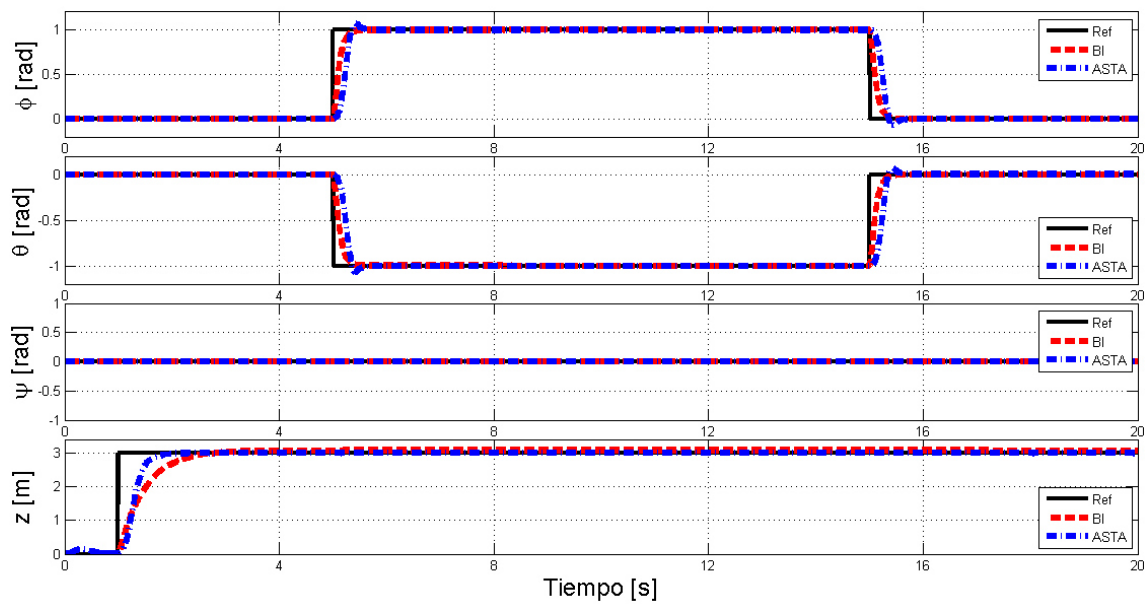


Figura 6.1: Seguimiento de trayectorias escalón ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $z$ ), en caso nominal

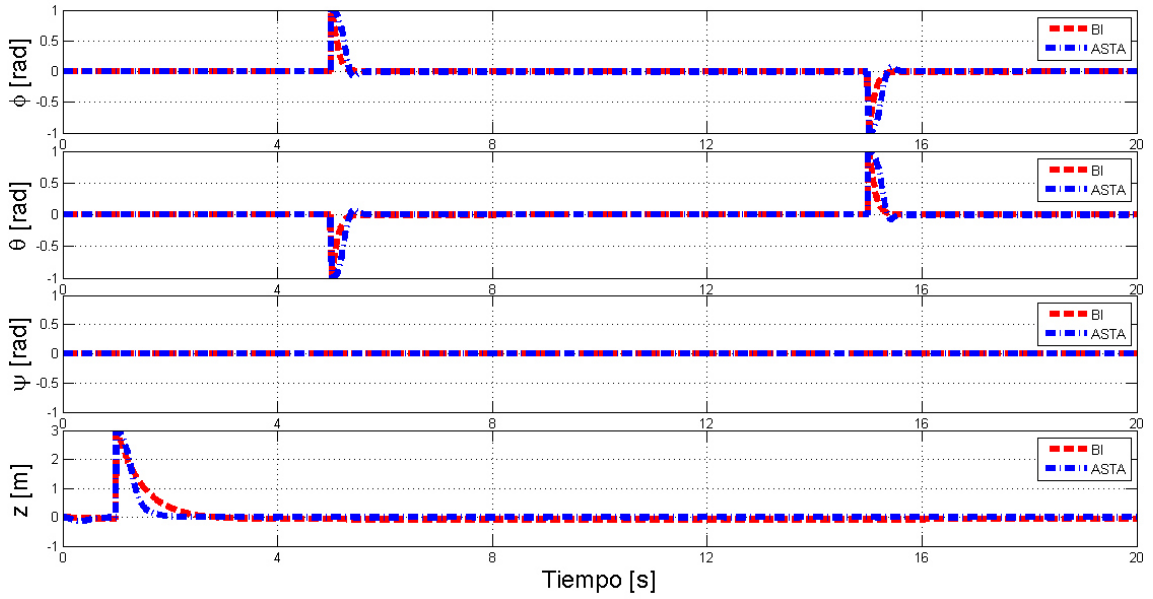


Figura 6.2: Error de seguimiento escalón ( $\phi, \theta, \psi, z$ ), en caso nominal

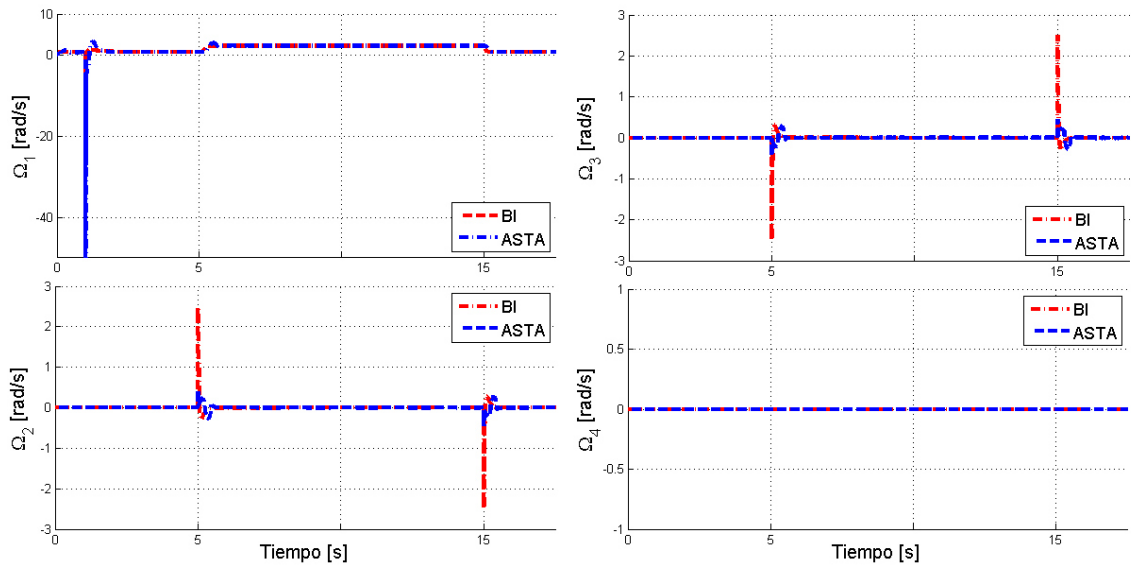


Figura 6.3: Velocidades angulares ( $\Omega_{1,2,3,4}$ ), en caso trayectoria escalón nominal

la guiñada y  $z$  es la altitud.

En la Figura 6.1, se puede apreciar que ambos controladores siguen satisfactoriamente la trayectoria deseada. Además, ambos controladores responden muy bien a los cambios de trayectoria, tanto en la orientación como en la altitud de la aeronave. En consecuencia, se puede apreciar que hay poca diferencia en el comportamiento al



momento del cambio en la trayectoria, presentando una mejor respuesta con el controlador *Backstepping Integral* que el control *Algoritmo Super Twisting Adaptativo*.

En la Figura 6.2 se obtiene el error de seguimiento de ambos esquemas de control, en donde se comparan los dos comportamientos de los controladores ASTA y BI, para determinar su buen funcionamiento y el tiempo de convergencia. De esta manera, se tiene una comprensión más clara del comportamiento de ambos controladores. Además, en la Figura 6.3, se obtuvieron las velocidades angulares del sistema.

Con la finalidad de apreciar si el seguimiento de trayectoria se alcanza bajo diferentes trayectorias deseadas, se propuso hacer pruebas al sistema con diferentes trayectorias deseadas. En las Figuras 6.4 y 6.5 se diseñó una trayectoria de onda senoidal, tanto para alabeo como cabeceo.

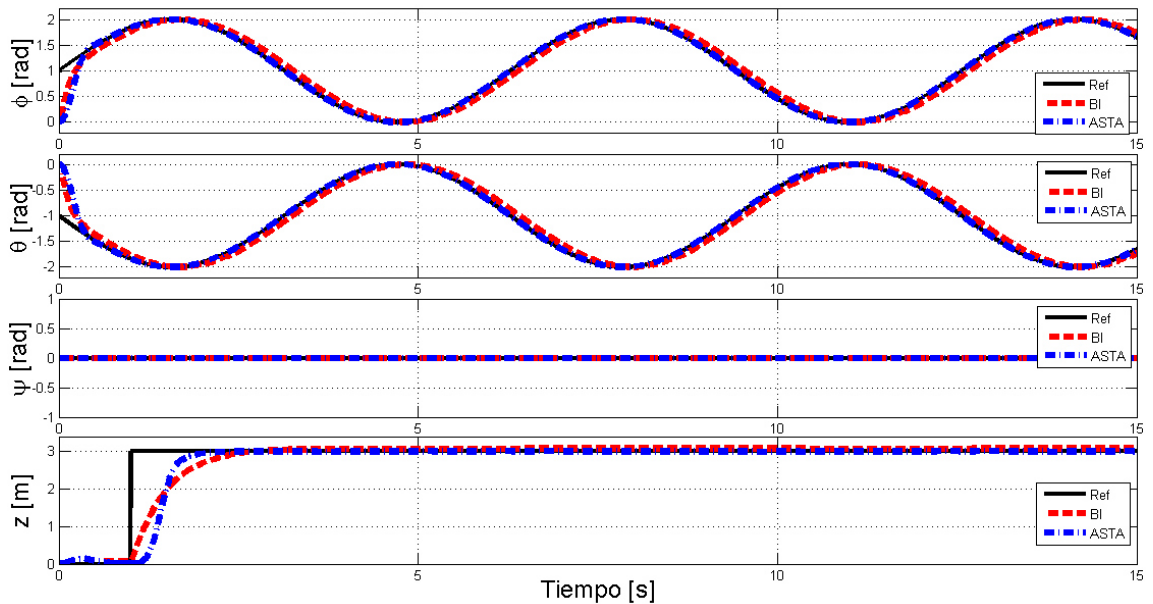


Figura 6.4: Seguimiento de trayectorias senoidal  $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso nominal

Podemos determinar que en los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  de la Figura 6.4 existe una respuesta más lenta para el controlador BI. Además, en la Figura 6.5 podemos visualizar que en los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  oscila más la respuesta en el controlador BI que en el contro-

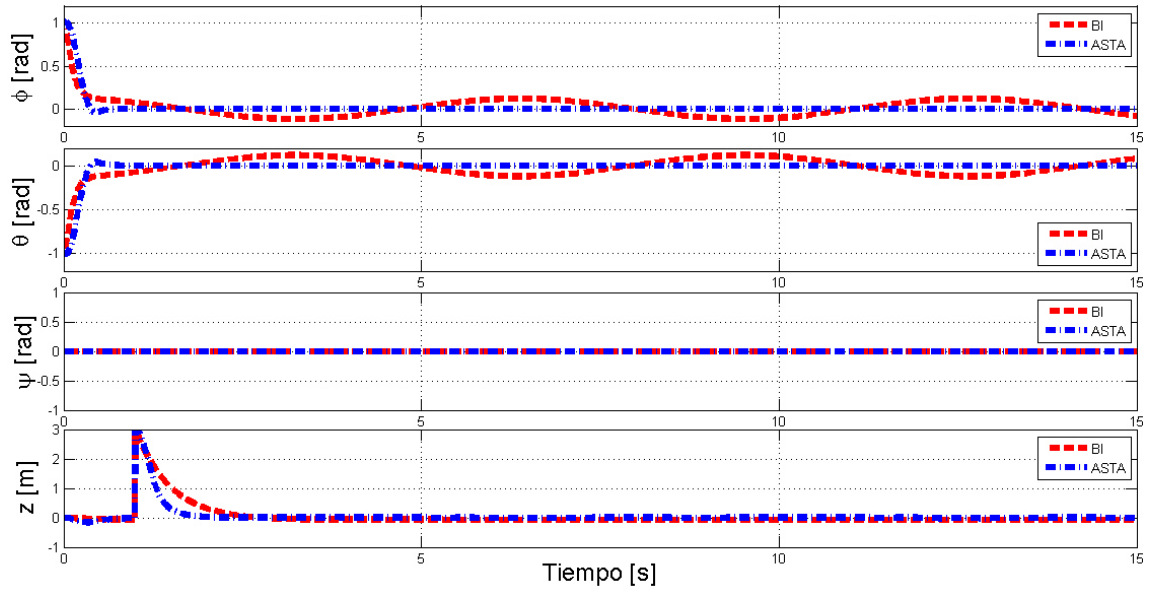


Figura 6.5: Error de seguimiento senoidal ( $\phi, \theta, \psi, z$ ), en caso nominal

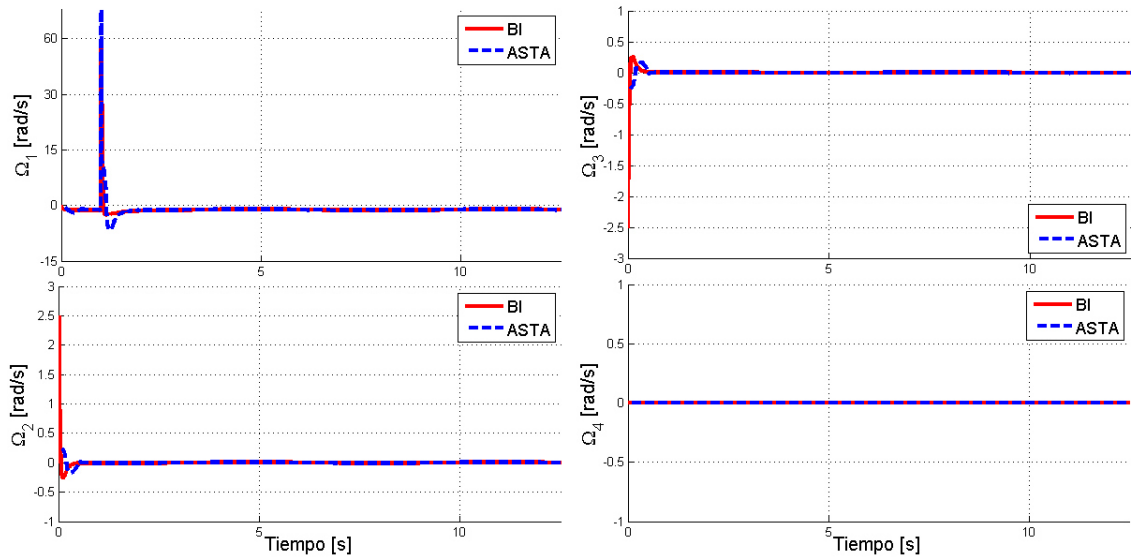


Figura 6.6: Velocidades angulares ( $\Omega_{1,2,3,4}$ ), en caso trayectoria senoidal nominal

lador ASTA. Por otro lado, en la Figura 6.6, se muestran las velocidades angulares del sistema. Por último, se puede concluir que en general ambas trayectorias tienen una respuesta satisfactoria.

### 6.2.2 CASO PERTURBADO

En esta sección, se presentarán las respuestas de los controladores ASTA y BI, bajo diferentes perturbaciones, tales como ruido en la salida del modelo y perturbaciones externas. Con el fin de determinar la robustez en el seguimiento de trayectorias ante dichas perturbaciones.

Con la finalidad de apreciar si el seguimiento de trayectoria se alcanza bajo diferentes trayectorias deseadas, a continuación se presenta las Figuras 6.7 y 6.10, las cuales son sometidas a ruido en la salida del modelo, utilizando un bloque de Simulink que genera un ruido blanco con una potencia de 30 PSD (por sus siglas en inglés “*power spectral density*”) y con un muestreo de 0.0005s.

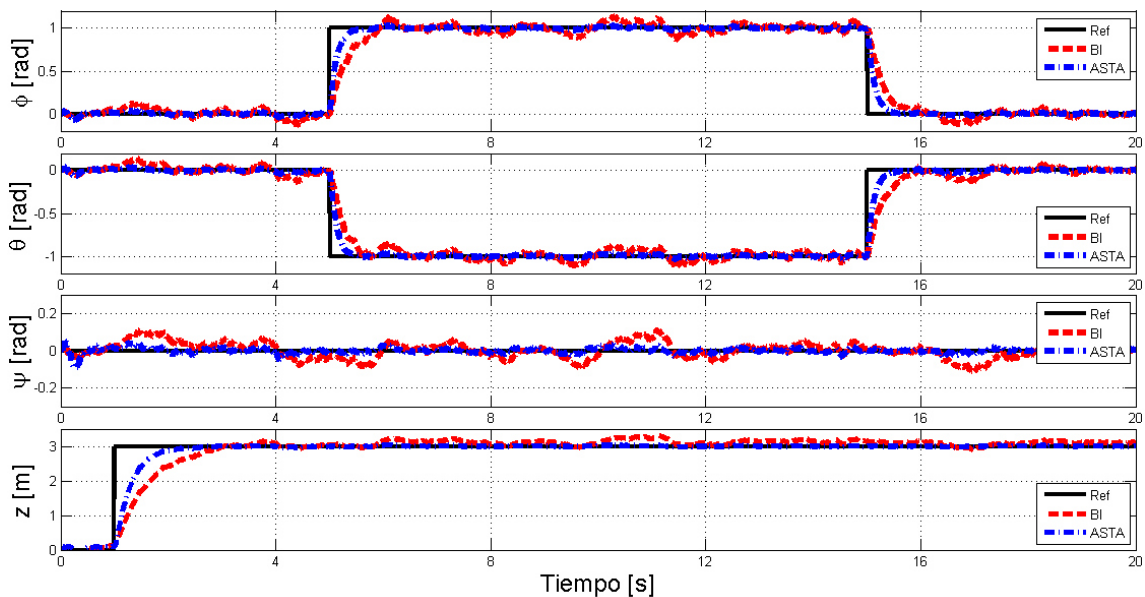


Figura 6.7: Seguimiento de trayectorias escalón  $(\phi, \theta, \psi, z)$ , en caso perturbado

En la Figura 6.7 se aprecia que la respuesta del controlador ASTA contrarresta más rápida el efecto del ruido, como resultado el ruido es mejor atenuado con el controlador ASTA que con el controlador BI. Pasando a la Figura 6.8 donde podemos notar la diferencia del error en cada uno de los casos de los controladores, lo cual podemos decir que el controlador ASTA que es más robusto que el BI en presencia de

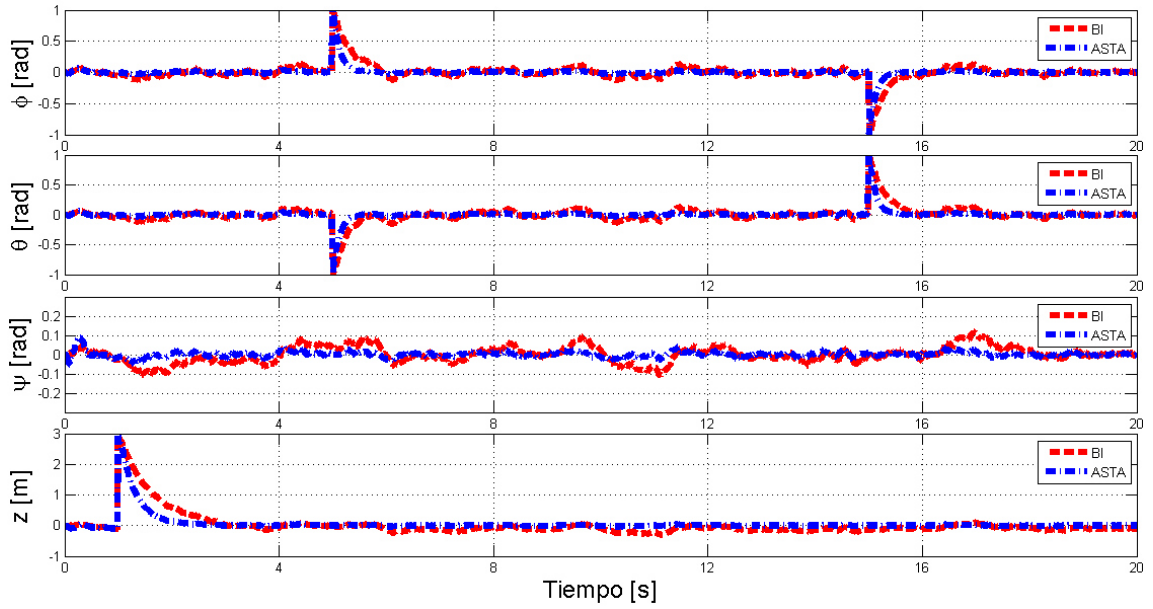


Figura 6.8: Error de seguimiento escalón ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $z$ ), en caso perturbado

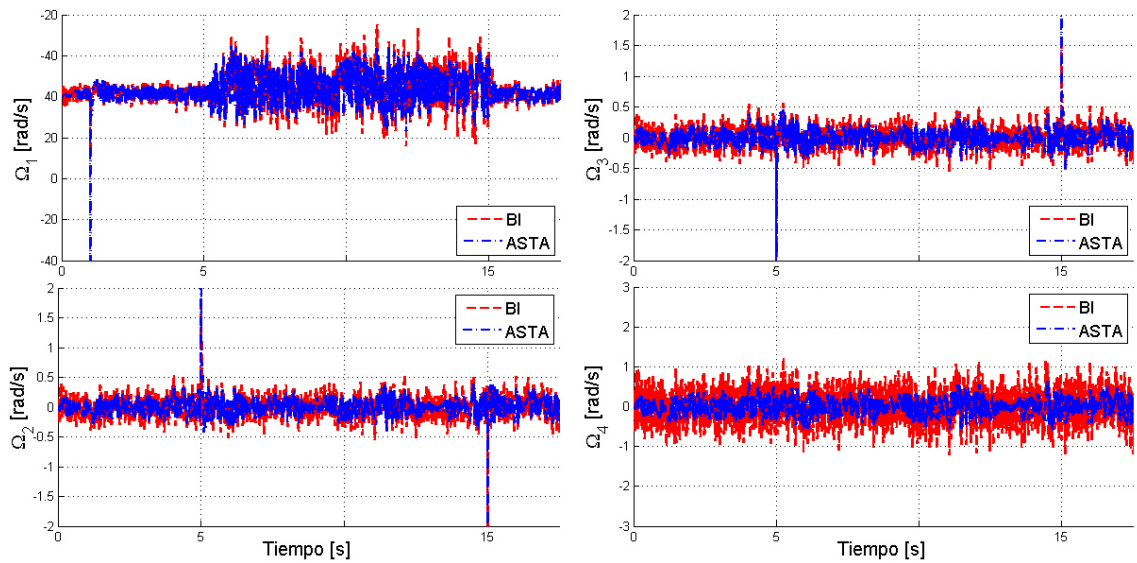


Figura 6.9: Velocidades angulares ( $\Omega_{1,2,3,4}$ ), caso trayectoria escalón con perturbación

esta perturbación. Además, en la Figura 6.9, podemos notar el esfuerzo del control para las cuatro trayectorias.

En las Figuras 6.10 y 6.11, se muestran las respuestas del sistema, con trayectorias senoidales para  $\phi$  y  $\theta$ , bajo la acción de dos perturbaciones externas: el ruido

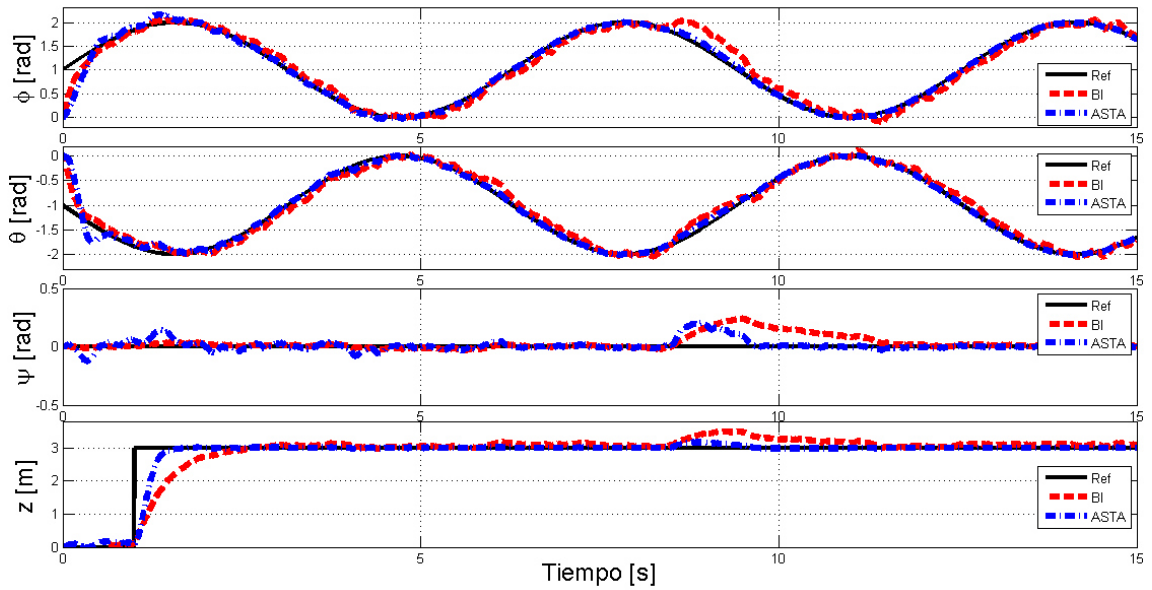


Figura 6.10: Seguimiento de trayectorias senoidal ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $z$ ), en caso perturbado

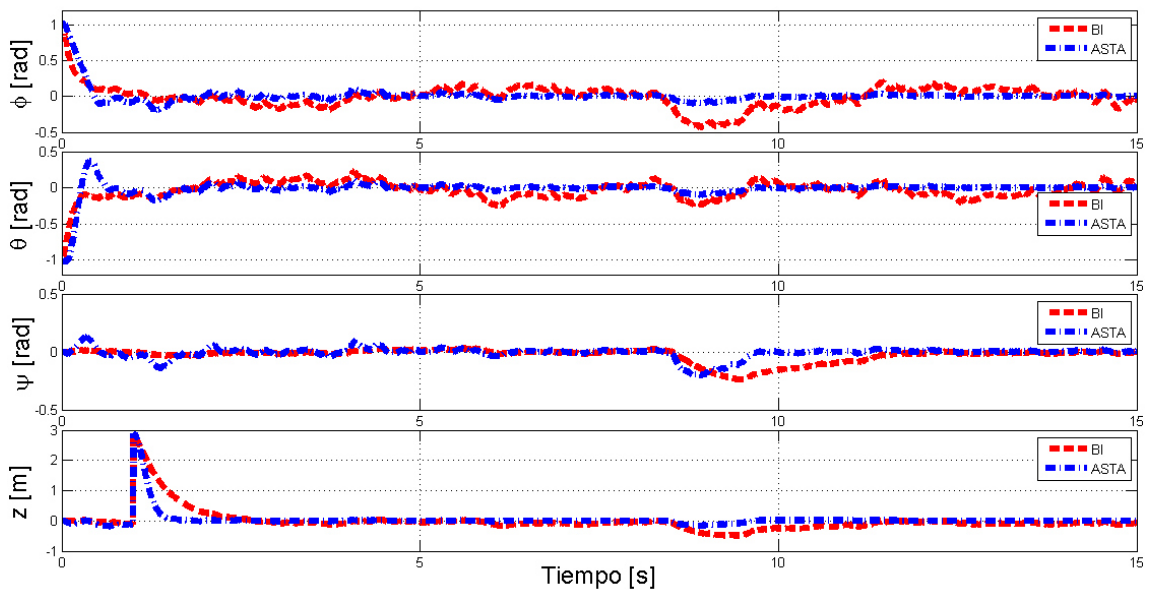


Figura 6.11: Error de seguimiento senoidal ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $z$ ), en caso perturbado

en la salida del modelo, y una fuerza externa, que se traduce como una señal pulso con un paso de tiempo de 8.5s a 9.5s, y un valor final de 10.

En la Figura 6.10 se muestra como las dos perturbaciones afectan al sistema en el seguimiento de trayectorias de manera directa. Se puede confirmar lo que se

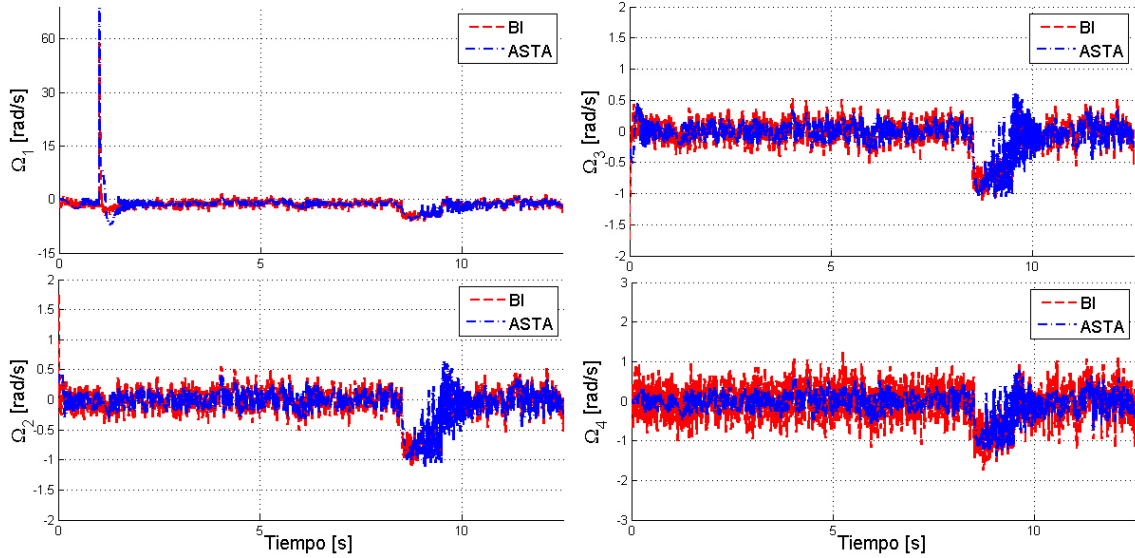


Figura 6.12: Velocidades angulares ( $\Omega_{1,2,3,4}$ ), en caso trayectoria senoidal con perturbación

mencionó en las dos gráficas anteriores, de que ambos controladores reducen con una buena eficiencia el efecto del ruido en la salida del sistema, con una mejor respuesta para el controlador ASTA. Mientras que, con respecto a la perturbación de la fuerza externa, se puede observar que el controlador ASTA actúa de manera más eficiente ante las perturbaciones externas y con una acción más rápida que el controlador BI.

Además, en la Figura 6.11 se puede apreciar que el error de seguimiento ante ambas perturbaciones es menor para el controlador ASTA, lo que lo convierte en un controlador que cumple satisfactoriamente en términos de robustez. En la Figura 6.12, se observa en las cuatro trayectorias que genera un mayor esfuerzo en la perturbación del golpe, esto con el fin de estabilizar la aeronave a su trayectoria deseada. Por otro lado, se puede decir que el controlador BI también cumple satisfactoriamente en términos de robustez, sin embargo, con menor eficiencia que el ASTA.

Finalmente, se calculó el tiempo de cómputo total de los algoritmos de control, con la finalidad de apreciar la comparación entre para ambos controladores. En la Tabla 6.4 se observa el tiempo de cómputo total para los controladores BI y

ASTA, en caso nominal. Para este caso, el controlador BI mostró menor tiempo de cómputo, con una diferencia de tiempo de  $900.2ms$  en comparación con el controlador ASTA. Por otro lado, para el caso perturbado, el controlador BI (como se muestra en la Tabla 6.5) muestra menor tiempo de cómputo con una diferencia de tiempo de  $1160.4ms$ . Sin embargo, se puede concluir que el controlador BI realiza menos tiempo de cómputo que el controlador ASTA.

#### Caso Nominal - 10s de simulación

Controladores	Tiempo - computo total	Diferencia de computo
ASTA	5.840860s	900.2ms
BI	4.940573s	

Tabla 6.4: Comparación de tiempo de computo, caso nominal.

#### Caso Perturbado - 10s de simulación

Controladores	Tiempo - computo total	Diferencia de computo
ASTA	6.652491s	1160.4ms
BI	5.492011s	

Tabla 6.5: Comparación de tiempo de computo, caso perturbado.

## 6.3 CONCLUSIONES

En este capítulo, se realizó un estudio comparativo de las respuestas obtenidas de los controladores *algoritmo super twisting adaptativo* y *backstepping integral* en simulación aplicados al cuadrirrotor. Además, se consideraron dos casos de estudio, caso nominal y caso perturbado, dónde dos señales fueron utilizadas: señal pulso y señal senoidal, para representar el comportamiento real de la aeronave. Con estos controladores no lineales se demostró la robustez ante dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Como consecuencia de las

---

respuestas obtenidas en simulación, la que mejor desempeño tuvo fue el controlador por *Modos Deslizantes de Alto Orden*, ya que su respuesta es más rápida ante perturbaciones. Cabe mencionar que las ganancias de este controlador son adaptativas, lo que reduce el esfuerzo del control. En el caso nominal, ambos controladores presentan una robustez similar. Finalmente, cabe mencionar que si la perturbación es mayor a la cota del control, el sistema deja de ser estable. Por otro lado, se concluyó que el esfuerzo de cómputo es menor para el controlador BI que para el controlador ASTA, tanto para el caso nominal como el perturbado.



# CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

## 7.1 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron dos esquemas de control no lineal robustos para el control de un vehículo aéreo no tripulado del tipo cuadrirrotor en presencia de dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Con la finalidad de comparar la eficiencia de estas dos técnicas de control, estudios en simulación han sido presentados.

Debido a que el cuadrirrotor es un sistema subactuado y no lineal, se propuso usar dos controladores con buena robustez. Primero, el enfoque por *Modos Deslizantes de Alto Orden*, en particular el *Algoritmo Super Twisting Adaptativo*. Por otro lado, está el enfoque *Backstepping*, el cual se le agregó la parte integral para mejorar la parte de la robustez. Dichas técnicas se aplicaron al modelo reducido del cuadrirrotor, el cual es un sistema subactuado.

En la comparación de estas técnicas, la que mejor desempeño tuvo fue el controlador por *Modos Deslizantes de Alto Orden*, ya que su respuesta es más rápida ante perturbaciones, además las ganancias de este controlador son adaptativas, por lo que reduce el esfuerzo del control. Uno de las ventajas de esta técnica es la reducción del *chattering*, en comparación con sus técnicas antecesoras, además de que

posee la propiedad convergencia en tiempo finito. Sin embargo, cabe mencionar que al momento de efectuar el tiempo de cómputo, el controlador *backstepping integral* tiene una respuesta más rápida que el controlador ASTA.

Entonces, de los resultados obtenidos y haciendo una comparación con los objetivos trazados se puede concluir que:

- Se diseñó un controlador con base en las técnicas de *Modos Deslizantes de Alto Orden*, por sus propiedades de robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Resultados: se obtuvo una mejor robustez en términos del seguimiento de trayectorias ante perturbaciones en comparación con el controlador BI.
- Se diseñó un controlador con base en el enfoque *backstepping integral* para el modelo del cuadricóptero. Resultados: se obtuvo menor tiempo de cómputo que el controlador ASTA, con un desempeño de robustez aceptable.
- Aplicación de turbulencias como perturbaciones externas y verificación del desempeño de los controladores. Resultados: se pudo observar el comportamiento de los controladores ASTA y BI, cumpliendo los objetivos de robustez planteados.
- Se realizó un estudio de comparación para estas dos técnicas de control. Resultados: Se analizó y constató que el controlador ASTA es más robusto que el controlador BI, en el seguimiento de trayectorias ante perturbaciones.

Se puede concluir que se obtuvieron los resultados esperados, alcanzando los objetivos de robustez. En general, los controladores ASTA y BI tienen buenas propiedades para combatir este tipo de problemática de robustez.

## 7.2 TRABAJOS FUTUROS

Para darle continuidad a este trabajo de tesis se recomienda los siguientes trabajos de investigación:

- Diseñar un Observador no lineal por *Modos Deslizantes de alto Orden* para estimar variables no medibles del sistema.
- Realizar un simulador de vuelo en 3D, para una mejor visualización de las simulaciones.
- Diseñar controles para el control de la posición de un cuadrirrotor.
- Validar los resultados en una base experimental.
- Considerar efectos de retardo existentes en los medios de comunicación en el UAV.

Cabe mencionar que esta tesis tiene un amplia area de investigación, como los trabajos futuros ya mencionados. De igual manera a este modelo se le pueden implementar una amplia variedad de controladores para determinar sus comportamientos, para futuras investigaciones.

## APÉNDICE A

# PLATAFORMA EXPERIMENTAL

---

En este apéndice, se mostrarán las partes principales que contienen la plataforma experimental. Con la finalidad de conocer el funcionamiento y conformación de la plataforma experimental, se describirán cada una de las componentes que lo constituyen.

En la Figura A.1, se muestra la plataforma experimental realizado en la Universidad Autónoma de Nuevo León, esta plataforma experimental se construyó para implementar leyes de control con el fin de estabilizar la aeronave, controlando la orientación y altitud de la aeronave.

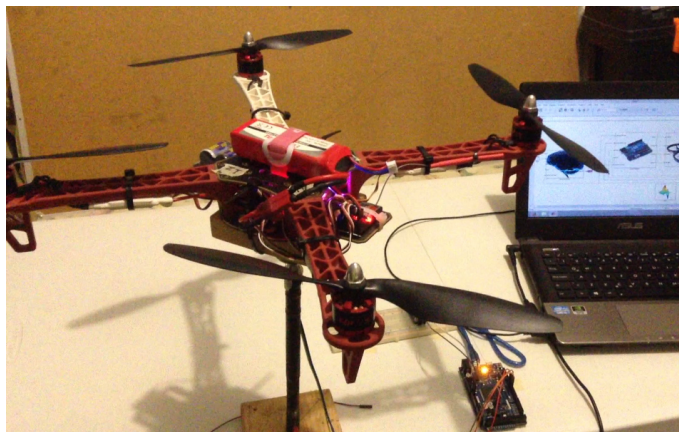


Figura A.1: Plataforma experimental

Los componentes que constituyen la plataforma experimental son los siguientes:

- Motores (DJI 2212/920KV) y helices
- Controladores electrónicos de velocidad ó ESC(DJI 30A opto)
- Sensores
  - Giroscopio (L3G4200D)
  - Acelerómetro (ADXL345)
  - Magnetómetro (HMC5883L)
  - Sensor de presión barométrica (BMP085)
  - Sensor de proximidad (HRXL-Maxbotix-WRL)
  - GPS (3DR U-BLOX)
- Unidad de control (Arduino Due)
- Transmisión de datos (Xbee pro S2B)
- Batería

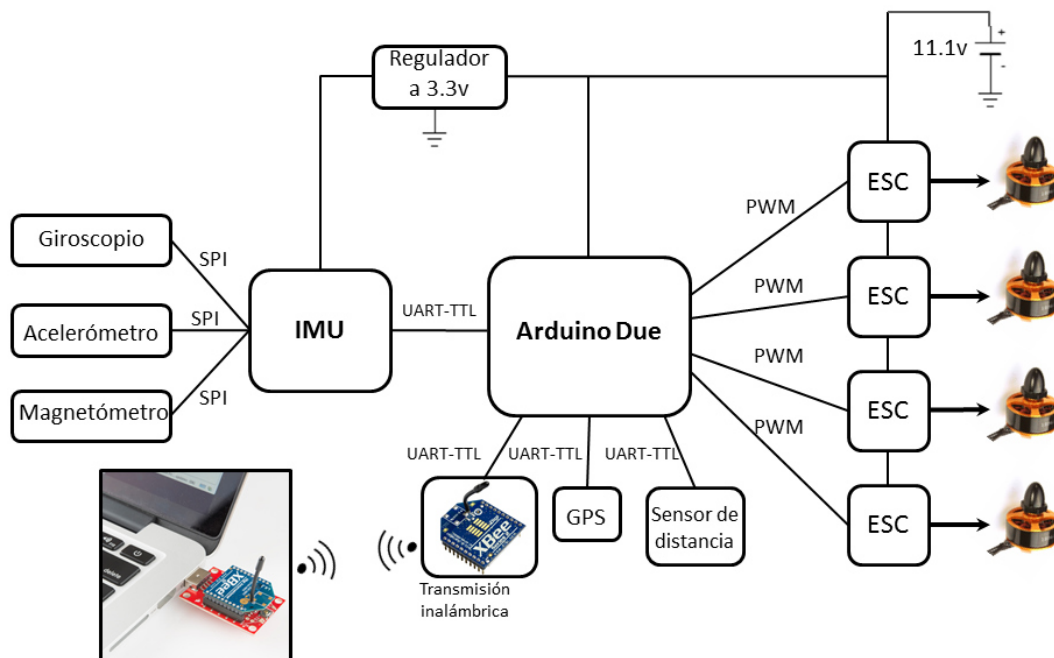


Figura A.2: Esquema de los componentes del cuadricóptero

En la Figura A.2 se muestra el esquema general de la plataforma experimental del cuadrirrotor, que representa la distribución de la estructura de cada uno de los componentes que lo conforman.

## A.1 MOTORES

Los motores son los componentes principales del cuadrirrotor, ya que son los encargados de impulsar a la aeronave. Existen dos tipos de motores mayor mente utilizados para el aerodelismo, los cuales son los motores de DC y los motores *brushless*. En este caso se utilizara el motor *brushless* por la característica que posee, el cual definiremos a continuación.

### **Motor *Brushless***

Los motores *brushless* son muy utilizados en los vehículos aéreos no tripulados para realizar diferentes tareas o maniobras, gracias a que tienen mejor relación en potencia-peso, menor tamaño y mayor eficiencia. En la Figura A.3 se muestra un motor de este tipo.

Motor *brushless* mejor conocido en español como “motor sin escobillas”, se llaman así debido a que carecen de colector y escobillas o carbones, esta característica los hace más eficientes. Sin embargo, tienen un costo más elevado con respecto a los motores de CD.

Las ventajas de los motores *brushless* son las siguientes:

- Mayor eficiencia.
- Mayor rendimiento (con respecto a la batería).
- Menor peso para la misma potencia.
- Requieren menos mantenimiento al no tener escobillas.



Figura A.3: Motor *brushless* DJI 2212/920KV

- Relación velocidad/par motor es casi una constante.
- Mayor potencia para el mismo tamaño.

Las desventajas son las siguientes:

- Mayor coste de construcción.
- El control es complejo.
- Se necesita un control electrónico de velocidad para que funciones, lo que incrementa el costo.

Enseguida se muestran las especificaciones de los motores *brushless* utilizados en la aeronave de prueba:

- **Modelo:** DJI 2212/920KV
- **Dimensiones:** 28X24mm
- **Rpm/V:** 920kv
- **Peso:** 56gr

- **Corriente estándar:** 15-25A **Corriente máxima:** 30A
- **Voltaje requerido:** 3S,4S (11.1v 14.8v)
- **hélices recomendadas:** 10x4.5(11.1v), 8x4.5(14.8v)

### Hélices

La hélice es un dispositivo mecánico formado por un conjunto de elementos denominados palas, montados de forma concéntrica que, al girar, las palas trazan un movimiento rotativo en un plano. Provocando una diferencia de velocidades entre el fluido de una cara y de la otra. Según el principio de Bernoulli esta diferencia de velocidades conlleva una diferencia de presiones, y por lo tanto aparece una fuerza perpendicular al plano de rotación de las palas hacia la zona de menos presión. Esta fuerza es la que se conoce como fuerza propulsora de aeronave.

## A.2 CONTROLADORES ELECTRÓNICOS DE VELOCIDAD (ESC)

El controlador electrónico de velocidad o *ESC* por sus siglas en inglés “*Electronic Speed Control*” ver Figura A.4, es un circuito electrónico que se encarga de generar una señal trifásica que alimenta el motor. La velocidad de rotación se varía mediante una señal suministrada por el PWM.

Además, incorpora varios tipos de protección:

- **Protección de baja tensión.** Esta protección sirve para apagar el motor de inmediato o bajar la potencia cuando la entrada de tensión cae por debajo del umbral de protección.
- **La pérdida de la protección de señal.** Se reduce la potencia automáticamente al 20 % o menos cuando se pierde la señal durante 1 segundo



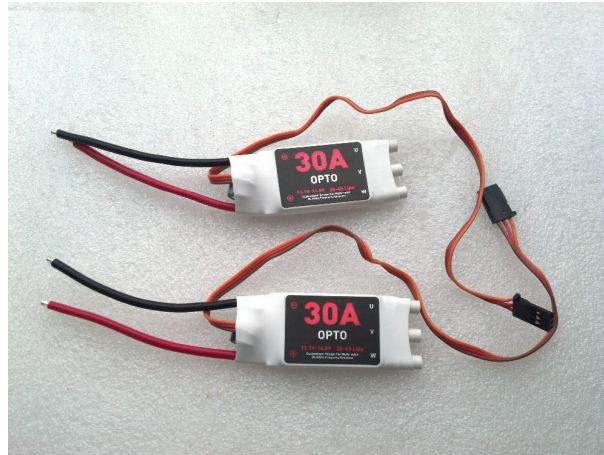


Figura A.4: Controlador electrónico de velocidad DJI 30A OPTO

- **La protección del sobre calentamiento.** Cuando la temperatura aumenta hasta por encima de  $110^{\circ}\text{C}$ , la potencia es reducida hasta un 35%.
- **Hardware auto-comprobación.** El sistema comprobara por si mismo cuando la batería este conectada. Cualquier falla de hardware, provocara 20 sonidos cortos en forma de “Beep”.

Enseguida se muestran las especificaciones de los controladores electrónicos de velocidad que serán utilizados en la aeronave de prueba:

- **Modelo:** DJI 30A OPTO
- **Corriente:** 30A
- **Frecuencia compatible:** 30Hz - 450Hz
- **Voltaje requerido:** 3S,4S (11.1v 14.8v)

### A.3 SENSORES

Los sensores son dispositivos que miden magnitudes físicas, tales como desplazamiento, velocidad angular, aceleración, presión, etc. transformándolas en variables

eléctricas.

Los utilizados en esta plataforma experimental son el giroscopio, magnetómetro, acelerómetro, sensor de presión, sensor de proximidad y GPS; de los cuales los primeros cuatro sensores vienen integrados en una IMU (por sus siglas en inglés “*Inertial Measurement Unit*”) con 10 grados de libertad (10DOF), como se muestra en la Figura A.5. Además, tanto el sensor de proximidad como el GPS están conectados por separado.

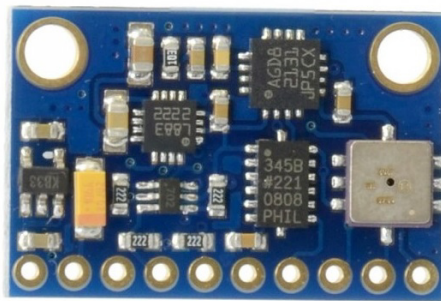


Figura A.5: IMU con 10DOF

### A.3.1 GIROSCOPIO

Un giroscopio o giróscopo es un objeto esférico, o en forma de disco, montado en un soporte cardánico, montado de manera que puedan girar libremente en cualquier dirección.

Una vez puesto en movimiento mantiene siempre la orientación, y se orienta hacia el norte geográfico, de esta manera, el giroscopio da una orientación precisa, de otra manera, indica los desplazamientos que tiene en sus ejes y proporciona la posición exacta respecto al punto de partida.

Los movimientos giroscópicos han tenido un gran número de aplicaciones. La tendencia a mantener fija la orientación en el espacio del eje de rotación del giróscopo

se emplea para estabilizar barcos, en los sistemas de navegación automática de los aviones, en el sistema de dirección de torpedos y misiles, etc.

En la Figura A.6, se muestra un giroscopio de tres ejes, que normalmente están presentes en las IMU.

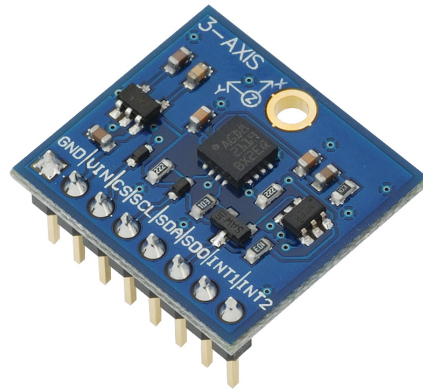


Figura A.6: Giroscopio de 3 ejes

### A.3.2 ACELERÓMETRO

Los acelerómetros son dispositivos electromecánicos que detectan las fuerzas de aceleración, ya sean estáticas o dinámicas. Las fuerzas estáticas incluyen la gravedad, mientras que las fuerzas dinámicas pueden incluir vibraciones y movimientos.

Los acelerómetros son dispositivos que miden la aceleración, que es la razón de cambio de la velocidad de un objeto. Esto se mide en metros por segundo al cuadrado ( $m/s^2$ ) o en las fuerzas G ( $g$ ). Los acelerómetros son útiles para detectar las vibraciones en los sistemas o para aplicaciones de orientación. En la Figura A.7 se muestra un acelerómetro de tres ejes.

Cabe mencionar que tanto el acelerómetro como el giroscopio son sensores fundamentales para medir la orientación del vehículo aéreo no tripulado.

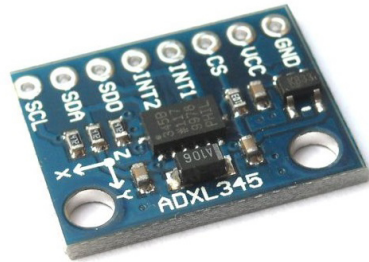


Figura A.7: Acelerómetro de 3 ejes

### A.3.3 MAGNETÓMETRO

Un magnetómetro es un sensor capaz de medir el campo magnético terrestre y mostrarlo en 3 componentes cartesianas, es decir, un valor para cada uno de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . De esta forma mediante un magnetómetro y sus datos se puede obtener datos muy precisos de la orientación del sensor respecto al polo norte, como una brújula digital. Debido a estas propiedades los magnetómetros son muy utilizados en aeronaves. En la Figura A.8 se muestra un magnetómetro o brújula digital.

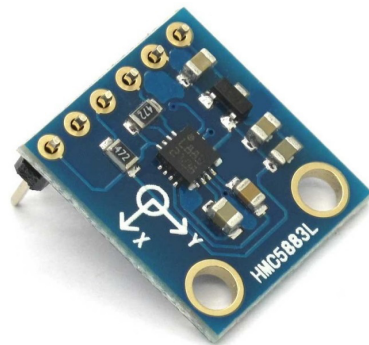


Figura A.8: Magnetómetro de 3 ejes

### A.3.4 SENSOR DE PRESIÓN BAROMÉTRICA

El sensor de presión barométrica es una tarjeta electrónica que permite lecturas de presión y temperatura de alta precisión y bajo consumo de energía. El sensor de

presión ofrece un rango de medición de 300 a 1100 hPa (Hecto Pascal), con una precisión absoluta de hasta 0.03 hPA. Este sensor utiliza la tecnología piezo-resistiva con robustez EMC, alta precisión y linealidad, así como con estabilidad a largo plazo. Este tipo de sensores pueden ser utilizados para calcular la altitud con bastante precisión, por lo que son muy útiles en UAVs. En la Figura A.9 se muestra un sensor de presión barométrica.



Figura A.9: Sensor de presión barométrica

### A.3.5 SENSOR DE PROXIMIDAD

Un sensor de proximidad es un transductor que detecta objetos o señales que se encuentran cercanos del elemento sensor. Existen varios tipos, en este caso usaremos el sensor ultrasónico.

Los sensores ultrasónicos A.10 son detectores de proximidad que detectan objetos a distancias que van desde pocos centímetros hasta varios metros. El sensor emite un sonido y mide el tiempo que la señal tarda en regresar. Estos reflejan en un objeto, el sensor recibe el eco producido y lo convierte en señales eléctricas, las cuales son elaboradas en el aparato de valoración. Estos sensores trabajan solamente en el aire, y pueden detectar objetos con diferentes formas, diferentes colores, superficies o de diferentes materiales. Los sensores operan según el tiempo de transcurso del eco, es decir, se valora la distancia temporal entre el impulso de emisión y el impulso del eco.

Una de las ventajas de estos sensores es que no necesitan contacto físico con el objeto. Por otro lado, las desventajas que presentan estos dispositivos son las zonas ciegas y el problema de las falsas alarmas.



Figura A.10: Sensor ultrasónico

### A.3.6 SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS)

El sistema de posicionamiento global o GPS (por sus siglas en inglés “*Global Positioning System*”) A.11, es un sistema de navegación basado en un conjunto de satélites, que permite determinar la posición de un objeto (una persona, un vehículo o un objeto) en cualquier parte de la tierra con cierta precisión.

Ahora bien, para determinar la posición de un objeto, el GPS calcula el valor de la longitud, en referencia al meridiano de Greenwich, el valor de la latitud y, por último, el valor de la altitud. Para ubicar un punto, es esencial como mínimo cuatro satélites, y el receptor GPS recibe las señales y hora de cada uno de ellos, y a través de la triangulación calcula la posición donde se encuentra dicho objeto.

## A.4 UNIDAD DE CONTROL

En nuestra plataforma se usará el Arduino Due como una unidad de control que se encargará de procesar toda la información.

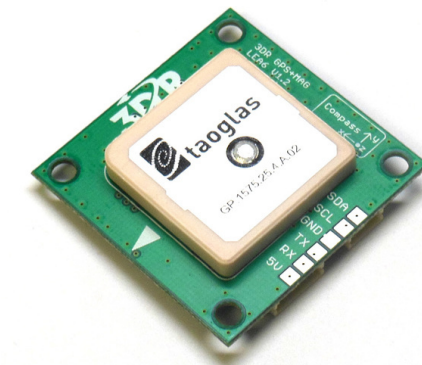


Figura A.11: Sistema de posicionamiento global 3DR U-BLOX

El Arduino Due es la primera placa de desarrollo de Arduino basado en ARM (microcontrolador mejorado). Esta placa esta basada en un potente microcontrolador ARM CortexM3 de 32bit, programable mediante el IDE (Ambiente de desarrollo integrado por sus siglas en inglés “*Integrated Development Environment*”) de Arduino. Por otro lado, aumenta la potencia de cálculo disponible para los usuarios de Arduino, manteniendo el lenguaje de programación lo más compatible posible para cualquier otro dispositivo.

El Arduino Due [1] se muestra en la Figura A.12, dispone de 54 pines digitales de entrada / salida (los cuales 12 pueden utilizarse para salidas PWM), 12 entradas analógicas, 4 UARTs (del inglés “*Universal Asynchronous Receiver Transmitter*”), un reloj de 84 MHz, una conexión USB OTG (del inglés “*On-The-Go*”), 2 DAC (del inglés “*Discretionary Access Control*”) digital a analógico, 2 TWI (del inglés “*Two-Wired-Interface*”), un conector de alimentación, un cabezal SPI (del inglés “*Serial Peripheral Interface*”), un cabezal JTAG (del inglés “*Joint Test Action Group*”), un botón de reinicio y un botón de borrado. También tiene algunas características interesantes como DACs, Audio, DMA (del inglés “*Direct Memory Access*”), una biblioteca multitarea experimental y más.

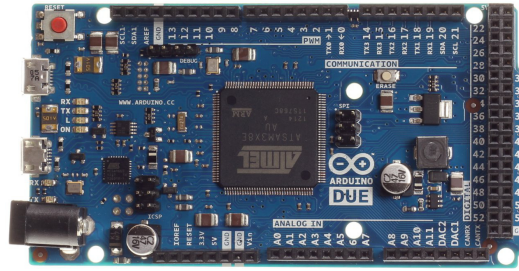


Figura A.12: Arduino Due [1]

## A.5 TRANSMISIÓN DE DATOS

La transmisión de datos de la plataforma experimental se hará mediante una red inalámbrica con los dispositivos Xbee.

Los dispositivos XBee [3], se muestran en la Figura A.13, son pequeños chips azules capaces de comunicarse unos con otros de forma inalámbrica. Los módulos XBee son soluciones integradas para la interconexión y comunicación entre dispositivos por medio de la red inalámbrica. Estos módulos utilizan el protocolo de red llamado IEEE 802.15.4 para crear redes *FAST POINT-TO-MULTIPOINT* (punto a multipunto); o para redes *PEER-TO-PEER* (de punto a punto). Los dispositivos Xbee fueron diseñados para aplicaciones que requieren de un alto tráfico de datos, baja latencia y una sincronización de comunicación predecible.

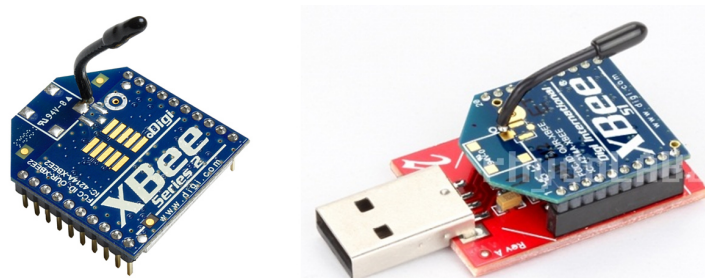


Figura A.13: Dispositivos Xbee [3]



## A.6 BATERÍA LI-PO

Las baterías Li-Po (abreviatura de Litio y polímero), como se muestra en la Figura A.14, son muy usadas en sistemas eléctricos de radiocontrol especialmente en aeronaves, debido a su gran capacidad de almacenamiento de energía y su tamaño reducido.

Las baterías Li-Po tienen 3 ventajas importantes en comparación con las baterías Ni-Cd/Ni-Hmm:

- Ligeras y se pueden construir de casi cualquier tamaño
- Tienen gran capacidad de carga
- Tienen una tasa de descarga alta para alimentar a los sistemas eléctricos más exigentes

Sin embargo, sus principales desventajas son las siguientes:

- Problemas de seguridad, a causa del electrolito volátil, pueden incendiarse o explotar.
- Requieren de un cuidado único y adecuado, para que tengan una vida prolongada.



Figura A.14: Batería Li-Po

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] «Arduino Due», URL <https://www.arduino.cc/en/Main/ArduinoBoardDue>.
- [2] «Quadrotor», URL <https://grabcad.com/library/quadcopter>.
- [3] «Xbee pro S2B», URL <http://www.digi.com/lp/xbee>.
- [4] AMIDI, O., *An Autonomous Vision-Guided Helicopter*, Master's thesis, Carnegie Mellon University, 1996.
- [5] ARAAR, O. y N. AOUF, «Quadrotor control for trajectory tracking in presence of wind disturbances», *2014 UKACC International Conference on Control*, (July), págs. 1–6, 2014.
- [6] AUSTIN, R., *Unmanned Aircraft Systems*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, abril 2010.
- [7] BOUABDALLAH, S., A. NOTH y R. SIEGWART, «PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor», *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, págs. 2451–2456, 2004.
- [8] BOUABDALLAH, S. y R. SIEGWART, «Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro Quadrotor», *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (April), págs. 2247–2252, 2005.
- [9] BOUABDALLAH, S. y R. SIEGWART, «Full control of a quadrotor», *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (1), págs. 153–158, octubre 2007.

- [10] FILIPPOV, A., «Differential equation with discontinuous right-hand side», *Kluwer*, **Netherland**, 1988.
- [11] KHALIL, H., *Nonlinear Systems*, tercera edición, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2002.
- [12] LEISHMAN, J., *Principles of Helicopter Aerodynamics*, segunda edición, Cambridge University Press, 2006.
- [13] LEVANT, A., «Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control», *International Journal of Control*, **58**(6), págs. 1247–1263, 1993.
- [14] LIU, H., X. WANG y Y. ZHONG, «Quaternion-Based Robust Attitude Control for Uncertain Robotic Quadrotors», *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, págs. 1–1, 2015.
- [15] MADANI, T. y A. BENALLEGUE, «Sliding Mode Observer and Backstepping Control for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles», *2007 American Control Conference*, págs. 5887–5892, julio 2007.
- [16] MORENO, J. A. y M. OSORIO, «Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm», *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**(4), págs. 1035–1040, 2012.
- [17] OEMINCHEN, E., «Convertawings Model A», URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/convertawings.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/convertawings.php).
- [18] P. VALAVANIS, K., *Advances in Unmanned Aerial Vehicles*, Springer, University of South Florida, Tampa, Florida, USA, 2007.
- [19] PERRUQUETTI, W. y J. P. BARBOT, *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [20] PETRUŠEVSKI, I. y A. RAKIĆ, «Simple fuzzy solution for quadrotor attitude control», *2014 12th Symposium on Neural Network Applications in Electrical Engineering (Neurel)*, págs. 93–98, 2014.

- [21] POZNYAK, A., *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*, primera edición, Elsevier, Deterministic Techniques, Amsterdam, The Netherlands, 2008.
- [22] RAFFO, G. V., M. G. ORTEGA y F. R. RUBIO, «An integral predictive/nonlinear control structure for a quadrotor helicopter», *Automatica*, **46**(1), págs. 29–39, enero 2010.
- [23] RUMERMAN, J., «Bréguet Richet [1907]», , 2002, URL [http://centennialofflight.net/essay/Rotary/early\\_20th\\_century/HE2G6.htm](http://centennialofflight.net/essay/Rotary/early_20th_century/HE2G6.htm).
- [24] RUMERMAN, J., «Étienne Oehmichen [1924]», , 2002, URL [http://centennialofflight.net/essay/Rotary/early\\_20th\\_century/HE2G2.htm](http://centennialofflight.net/essay/Rotary/early_20th_century/HE2G2.htm).
- [25] RUMERMAN, J., «Georges de Bothezat [1922]», , 2002, URL [http://centennialofflight.net/essay/Rotary/early\\_20th\\_century/HE2G1.htm](http://centennialofflight.net/essay/Rotary/early_20th_century/HE2G1.htm).
- [26] SÁ, R. C., A. L. C. D. ARAÚJO, A. T. VARELA y G. D. A. BARRETO, «Construction and PID Control for Stability of an Unmanned Aerial Vehicle of the Type Quadrotor», *2013 IEEE Latin American Robotics Symposium*, págs. 0–4, 2013.
- [27] SCHREIER, M., «Modeling and adaptive control of a quadrotor», *2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, págs. 383–390, agosto 2012.
- [28] SHTESSEL, Y., M. TALEB y F. PLESTAN, «A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application», *Automatica*, **48**(5), págs. 759–769, mayo 2012.
- [29] TAN, L., L. LU y G. JIN, «Attitude Stabilization Control of a Quadrotor Helicopter using Integral Backstepping», *International Conference on Automatic Control and Artificial Intelligence (ACAI 2012)*, págs. 573–577, 2012.
- [30] UTKIN, V., J. GULDNER y J. SHI, *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, primera edición, Taylor & Francis, London, Philadelphia, 1999.

- 
- [31] WRIGHT, C., «Curtiss-Wright VZ-7», URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/curtiss\\_vz-7.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/curtiss_vz-7.php).