Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico-Matemáticas

Un modelo de programación binivel para un problema de regulación del mercado: aplicación a la industria petroquímica

Una tesis presentada por:

Héctor Saib Maravillo Gómez

Como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

con

Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
Julio 2018

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico-Matemáticas

Un modelo de programación binivel para un problema de regulación del mercado: aplicación a la industria petroquímica

Una tesis presentada por:

Héctor Saib Maravillo Gómez

Como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

con

Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
Julio 2018

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico-Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis, por este medio, certifican que han leído la tesis presentada por **Héctor Saib Maravillo Gómez** y que es totalmente adecuada en alcance y calidad como un requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Orientación en Matemáticas, por lo que es aceptada.

Dr. José Fernando Camacho Vallejo
Universidad Autónoma de Nuevo León
Asesor

Dra. Martine Labbé
Université Libre de Bruxelles
Co-asesor

Dr. Justo Puerto Albandoz
Universidad de Sevilla
Co-asesor

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Sinodal

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Sinodal

Vo. Bo.

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
Julio 2018

Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Fernando Camacho Vallejo por aceptarme como su estudiante y darme la oportunidad de realizar la tesis bajo su dirección. Así como por el conocimiento, la experiencia y los consejos que me transmitió. De la misma forma, agradezco a mis co-asesores, la Dra. Martine Labbé y el Dr. Justo Puerto, por la hospitalidad y la orientación que me otorgaron.

Le doy gracias a mi hermano, a mi madre y a mi padre que siempre me han brindado su ayuda y comprensión incondicional. También agradezco el ejemplo de perseverancia y firmeza ante la vida de mi abuela Amelia, que en paz descanse. Agradezco a mi compañera de vida Guadalupe que, con su amor y confianza, me motivó a continuar.

Gracias a la Universidad Autónoma de Nuevo León, particularmente a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas por la calidad académica que ofrece. También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría y por la beca mixta que me permitió realizar una estancia de investigación en la Universidad de Sevilla, España.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

La regulación de la economía a través de la intervención del Estado asume diferentes formas de acuerdo con las condiciones y motivaciones históricas existentes, por ejemplo, como política fiscal (impuestos y subsidios), legislación antimonopolio, control de precios o cantidades, nacionalización [47]. En México, esta intervención asumió una forma particular durante varias décadas en la industria petroquímica. Se caracterizaba por el monopolio estatal de la producción de los insumos principales de esta industria, tales como petrolíferos y lo que se denominó petroquímica básica. Otra característica era la existencia de empresas de propiedad estatal que competían con las empresas privadas en el mercado de productos finales (petroquímica secundaria).

El marco institucional definía a la industria petroquímica como aquella que realizaba procesos químicos o físicos para la elaboración de compuestos a partir de hidrocarburos naturales del petróleo o de sus productos y subproductos derivados de operaciones de refinación. De estos productos, aquellos que fuesen susceptibles de servir como materias primas industriales básicas, resultado de la primera transformación química o física, fueron clasificados como parte de la petroquímica básica; los demás se incluyeron en la categoría de petroquímica secundaria [6].

Concretamente, en noviembre de 1958 se publicó en el Diario Oficial la *Ley Reglamentaria del Aríiculo 27 Constitucional en el Ramo del Petróleo*, y entre otras cosas, establecía que "sólo la Nación podrá llevar a cabo explotaciones de los hidrocarburos que constituyen la industria petrolera" [4] e incluía dentro de la industria petrolera a "la elaboración, el almacenamiento, la distribución y las ventas de primera mano de aquellos derivados del petróleo que sean susceptibles de servir como materias primas industriales básicas" [4]. Al año siguiente se publicó un reglamento correspondiente a dicha ley, donde se especificaba que los particulares no podrían tener participación de ningún tipo en la producción de petroquímicos básicos [5]. Por otro lado, para la elaboración de productos petroquímicos secundarios podrían operar indistintamente el Estado y la iniciativa privada [5]. Correspondía a Petróleos Mexicanos (PEMEX) y a sus empresas subsidiarias o asociadas materializar la intervención del Estado en ambas industrias [1] y, a partir de 1992, a sus órganos descentralizados: Pemex-Gas y Petroquímica Básica y Pemex-Petroquímica [3]. A través de los años existieron múltiples clasificaciones de los productos que pertenecían a la petroquímica básica y secundaria ([5],

[1], [6], [7], [8], [9], [2]), sin embargo, esta división y el monopolio del Estado de la primera perduraron hasta que se abrogó la Ley Reglamentaria el 11 de agosto de 2014.

El monopolio del Estado de la producción de los insumos necesarios también existió en el sector agrícola. Por ejemplo, durante los años que van de 1970 a 1986, el gobierno mexicano tuvo el monopolio de la producción, la importación y la distribución de fertilizantes por medio de la empresa estatal FERTIMEX, aplicando una política de subsidios a los pequeños productores, a partir de la fijación de un único precio oficial subsidiado para todos los fertilizantes en México [22]. El gobierno también regulaba la distribución del agua para consumo agrícola, fijaba precios mínimos al productor, definía metas de producción para los agricultores y restringía las transacciones de tierra y los mercados agrícolas [30].

Este tipo de regulación económica no es exclusiva de México. De acuerdo con [44], la tendencia a usar instrumentos gubernamentales directos y extensivos en la economía ha sido fuerte en países en desarrollo, principalmente en los sectores de industrias de materias primas. Un indicador indirecto es el gran número de expropiaciones a nivel mundial, principalmente en la industria petrolera durante la década de 1970 (véase [32], [36], [27]). Aunque esta tendencia disminuyó durante las siguientes tres décadas, y en muchos casos se observó el fenómeno contrario de privatización, aún es un objeto de estudio interesante. Por ejemplo, se pueden mencionar las nacionalizaciones petroleras de 2006 en Bolivia, Ecuador, Venezuela y Rusia [27].

1.1 Descripción del problema

El problema que se aborda en esta investigación es una generalización del marco institucional que tuvo la industria petroquímica en México durante el periódo entre 1958 y 2014. El problema considera dos industrias interdependientes entre sí de tal manera que una de ellas produce los insumos necesarios para la segunda. El Estado tiene el monopolio de la primera industria, mientras que, en la segunda, la empresa de propiedad estatal compite con empresas privadas en la producción de bienes de consumo final (considerados así para esa industria). Las empresas privadas tomarán sus decisiones buscando maximizar su ganancia. Por otro lado, el Estado al tener un carácter público tiene un objetivo diferente, ya que espera obtener un beneficio social. En esta tesis planteamos que el objetivo del Estado es lograr el equilibrio del mercado, esto es, minimizar la diferencia entre la oferta y la demanda de los bienes de consumo final de la industria petroquímica.

La situación privilegiada en la que se encuentra el Estado, le permite decidir tanto la cantidad de bienes de consumo final que elaborará en sus empresas, como la cantidad de insumos que ofrecerá a las empresas privadas, regulando indirectamente con ello la producción. Analíticamente, esto implica que existe una relación jerarquíca entre los dos tipos de agentes económicos. Además, por las características técnicas y tecnológicas de las industrías de materias primas, es fundamental considerar las limitaciones de producción, tanto por la escasez natural de recursos como por la capacidad productiva de las plantas. Ambos elementos (limitación productiva y jerarquía de decisión) permiten estudiar el problema desde el punto de vista de la programación matemática y expresarlo como un modelo de programación binivel, en donde el Estado asumirá el papel de líder, y las empresas privadas el de seguidor.

1.2 Motivación

La intervención del Estado en la economía puede ser motivada por distintas razones, dentro de las cuales destacan los fallos del mercado y el interés por la equidad social [43]. En torno a ello existe un amplio debate sobre su eficacia y pertinencia, pero independientemente de su valoración, es deseable que existan herramientas analíticas para resolver el problema cuando éste es un hecho dado. Es decir, que el gobierno que conduce al Estado pueda optimizar su objetivo de lograr un beneficio social, cuando el mercado por sí mismo no es capaz de hacerlo.

La regulación de la economía por medio de una empresa de propiedad estatal ha sido analizada en múltiples investigaciones. Pero como se describe en el apartado 2.1, únicamente se plantea el caso para un sólo mercado. La mayoría de las investigaciones existente estudian sus problemas basados en la propuesta de Stackelberg en [42] para resolver el problema del duopolio y el oligopolio considerando una jerarquía entre los agentes. Justamente en ese libro, Stackelberg también analiza la relación entre dos mercados de acuerdo con la estructura de cada uno de ellos. Sin embargo, en la revisión de literatura no hemos encontrado a nadie que estudie el problema de la intervención estatal por medio de empresas estatales, de una industria formada por dos mercados interrelacionados. Tampoco hemos encontrado un caso como el estudiado en esta tesis, en donde la empresa de propiedad estatal tiene el monopolio en un mercado. Esto último le brinda originalidad y da una justificación para el problema bajo estudio.

Este problema puede plantearse bajo un esquema de teoría de juegos. La esencia del problema está en la interdependencia entre las decisiones del Estado y las empresas privadas, así como con la relación jerárquica que existe entre ellos. Lo primero implica que el conjunto de opciones factibles disponibles para cualquiera de los jugadores son interdependientes, así la decisión del líder afecta las acciones permitidas y la función de pago del seguidor, y viceversa [10]. Lo segundo puede expresarse como un juego de Stackelberg, en el cual el líder decide primero, y al hacerlo debe anticipar todas las respuestas posibles de su oponente, denominado seguidor [10], considerando que a cada decisión suya, el seguidor buscará optimizar su función de pagos. Otra forma de estudiar esa situación es mediante la programación binivel, en donde se tiene un problema de optimización con una función objetivo, sujeta a una región de restricción implícitamente determinada por otro problema de optimización [10].

1.3 Objetivos

El principal objetivo de esta tesis consiste en estudiar el problema de la intervención del Estado a través de empresas públicas en dos mercados interrelacionados cuando tiene el monopolio de la producción de materias primas. Para hacer esto, se propone un modelo nuevo de programación binivel. Ya que los modelos de programación binivel son complicados para resolverlos a optimalidad, otro de los objetivos es proponer diferentes formas de obtener soluciones de buena calidad en tiempo computacional aceptable.

Proponemos tres reformulaciones que transforman el modelo binivel en uno de un sólo nivel, y tres algoritmos heurísticos para obtener soluciones de buena calidad. Para ello se aprovechan las características particulares del problema como la linealidad del nivel superior e inferior y la inalterabilidad del poliedro que define al problema dual asociado al problema del nivel inferior. Dada la existencia de múltiples soluciones óptimas del problema binivel, y la importancia económica de conocerlas, elaboramos un algoritmo para obtener diversas soluciones óptimas múltiples partiendo de una solución óptima inicial.

1.4 Metodología

Para realizar esta tesis y cumplir con los objetivos se realizaron los siguientes pasos, que integran en su conjunto la metodología aplicada.

(1) Estudio de la intervención estatal en la industria petroquímica en México.

(2) Revisión de literatura sobre programación binivel.

(3) Revisión de literatura sobre la participación de empresas de propiedad estatal en la economía.

(4) Planteamiento del problema como generalización de la situación mexicana descrita anteriormente.

(5) Modelación matemática del problema.

(6) Reformulación del problema binivel en problemas de un sólo nivel.

(7) Diseño e implementación de algorítmos heurísticos para resolver el problema binivel, en colaboración con la Dra. Martine Labbé y el Dr. Justo Puerto.

(8) Diseño e implementación de un algorítmo para obtener múltiples soluciones óptimas.

(9) Construcción de instancias pseudoreales con algunos parámetros aleatorias.

(10) Realización de experimentos computacionales de las tres reformulaciones y los tres algoritmos heurísticos.

(11) Comparación de los resultados computacionales.

(12) Presentación de los avances de la investigación en el XXIII ENOAN, el VI CSMIO y el IWOBIP'18.

(13) Realización de una estancia de investigación en la Universidad de Sevilla.

1.5 Estructura de la tesis

El capítulo 1 sirve de introducción a la tesis. Primero, se describe el origen del problema derivado del marco institucional que tuvo la industria petroquímica durante medio siglo en México. Despúes, se argumenta la importancia del objeto de estudio y de enfocarlo desde un punto de vista de programación binivel. Por último, se explica el objetivo de la tesis y la metodología para conseguirlo.

En el capítulo 2, se realiza una revisión de literatura clásica de la participación de empresas de propiedad estatal en la economía. También se describen las características básicas que definen a la programación binivel (en particular, el caso lineal), y la relación que tiene con los juegos de Stackelberg.

En el capítulo 3, se plantea detalladamente el problema y su formulación matemática como un modelo de programación binivel lineal (BLP, por sus siglas en inglés). Además, se explican los supuestos que se consideran durante la investigación. Por último, se analizan las características del problema del nivel inferior y su dual asociado.

En el capítulo 4, se presentan tres reformulaciones del problema binivel, las cuales lo reducen a uno de un sólo nivel. En la primera reformulación se utiliza el teorema de dualidad fuerte en el nivel inferior y el hecho de ser un BLP, para reformularlo como un problema no lineal. La segunda reformulación aplica la lógica anterior, pero a partir de las condiciones de holgura complementaria, convirtiendo el problema en uno entero mixto. La tercera reformulación parte también de la primera reformulación, pero discretiza una de las variables para evitar la no linealidad del problema.

En el capítulo 5, se proponen tres algoritmos heurísticos para resolver directamente el problema binivel. Los primeros dos algoritmos son nuevos y el tercero es un híbrido que combina los dos primeros. Finalmente, se incluye un algoritmo para obtener un conjunto de soluciones óptimas, una vez que se ha obtenido la primera.

El capítulo 6 contiene los resultados obtenidos de la experimientación computacional en donde se utilizaron instancias creadas asemejando la realidad de la industria petroquímica mexicana.

En el capítulo 7, se presentan las conclusiones de la investigación de esta tesis y algunas posibles extensiones de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

En este capítulo se revisan diversos materiales de la literatura económica y matemática que permiten entender el contexto del problema estudiado en esta tesis y las formas comunes de resolverlo.

En el primer apartado se revisan los artículos clásicos que abordan la intervención estatal por medio de empresas públicas para regular el mercado. Principalmente, la revisión está enfocada en los trabajos sobre oligopolios mixtos, los cuales se asemejan al esquema del problema aquí estudiado. Además, se mencionan otros artículos que estudian elementos que forman parte del problema, particularmente a la integración vertical de dos mercados. Se hace énfasis en los supuestos de cada modelo, en los objetivos de las empresas y sus funciones de costo, y en la motivación que justifica la investigación.

En el segundo apartado se muestra el modelo general de un problema de programación binivel lineal. También se introducen definiciones importantes de los conceptos básicos necesarios para su análisis. Además, se presentan resultados especifícios para los problemas binivel lineales y se mencionan dos trabajos en programación binivel relacionados con la tesis.

2.1 Regulación del mercado con empresas públicas

El primer trabajo que establece la idea de la regulación del mercado por medio de una empresa de propiedad estatal [a] es el artículo de Merril y Schneider de 1966 *Government firms in oligopoly industries: A short-run analysis*. En dicho artículo, se plantea un entorno industrial diferente a los que hasta ese momento la literatura económica estudiaba: la propiedad y el control completo por empresas privadas, la propiedad y el control completo por el gobierno, y cuando la propiedad privada era restringida por una supervisión del gobierno en forma de regulación y leyes antimonopolio. Lo que caracterizaba el entorno industrial estudiado en [35] era que el gobierno controlaba algunas instancias productivas y competía con otras de

[a] En la literatura se utilizan diferentes conceptos para este tipo de empresas, aquí se utilizará indiferentemente empresa o firma pública, de propiedad estatal, o de gobierno. Se entiende por todos ellos una empresa que pertenece al Estado y que es dirigida por el gobierno con un objetivo diferente al de las empresas privadas

propiedad privada.

En el modelo de [35] existen tres empresas privadas que producen un bien homogéneo, tienen una estructura de costos idéntica y buscan maximizar sus ganancias. Asumen que la entrada de nuevas firmas no está permitida y la única forma que tiene el gobierno para entrar en la industria es comprando una de las empresas privadas. Además, para poder entrar en la industria, dicha adquisición no podía ocasionar pérdidas a las firmas privadas y el precio fijado no debía ser tan bajo implicando que la demanda excediera a la capacidad industrial. Como su análisis es de corto plazo, la tecnología y la capacidad productiva son parámetros fijos. Por último, establecen que el objetivo del gobierno es maximizar la producción industrial total, teniendo como variable la política de precios.

De forma parecida, Harris y Wiens [28] proponen un nuevo análisis con el objetivo de promover la eficiencia económica estática en una estructura de mercado no competitiva, donde los instrumentos gubernamentales se limitan al conjunto de variables bajo control de la empresa que es de propiedad estatal. Parten de la interdependencia estratégica entre los agentes privados y públicos, y asumen que la empresa pública funge el papel dominante, anunciando una política de producción a la cual se ven obligadas a responder las empresas privadas. Para esto, la empresa de gobierno calcula el nivel de producción de la industria para que el costo marginal sea igual al precio del producto; luego anuncia que compensará cualquier diferencia entre este objetivo y el nivel de producción de las empresas privadas. Es por esto, que se establece que la función del gobierno es la maximización del bienestar social, representado por el excedente del consumidor más el excedente del productor.

Por otro lado, Sertel [40] toma como base un oligopolio lineal, esto es, con funciones lineales de demanda y costos. Además, en dicho oligopolio se consideran costos fijos y variables promedio idénticos para todas las empresas privadas, suponiendo que los últimos nunca exceden a los de la empresa pública. También introduce el concepto de *regulación por participación*, muy útil debido a que permite diferenciar estos modelos de otros tipos de regulación de mercados por el Estado, aunque después no ha sido retomado en la literatura.

La investigación de Cremer, Marchand y Thisse [18] busca aclarar si es socialmente óptima la existencia de una empresa pública en un oligopolio de Cournot. En caso de que si sea óptima la participación de empresas públicas en ese esquema, hay que decidir cuantas empresas de este tipo deberían existir. Suponen la existencia de rendimientos crecientes a escala de las empresas, una función lineal de la demanda, y costo fijo y costo marginal constante a fin de simplificar el modelo. Introducen una restricción presupuestaria a la empresa pública para obligarla a obtener ganancias no negativas. De esa forma evitan el déficit presupuestario del gobierno, que era posible bajo el esquema de Harris y Wiens [28].

Otros de los trabajos que pueden ser considerados clásicos en este tema es el de De Fraja y Delbono [21]. Ellos proponen el concepto de oligopolio mixto, y lo definen como aquel mercado donde un bien homogéneo o diferenciado es ofertado por un “pequeño” número de firmas y, la función objetivo de al menos una de ellas es diferente a las de los demás. Cierto número de empresas son de propiedad privada y buscan maximizar sus beneficios, mientras que las que son de propiedad pública buscan optimizar objetivos sociales. Generalmente, para conseguir esto último se busca maximizar el excedente del consumidor y del productor.

En De Fraja y Delbono [21], se presenta una revisión de la literatura sobre los oligopolios mixtos, en la cual analizan los supuestos e hipótesis asumidos en cada trabajo revisado (para un estudio más amplio del tema véase [20]). En [21] consideran el problema del agente-principal, cuando el cumplimiento del objetivo del agente depende de la ejecución que realice el gerente de la empresa, así como la discusión sobre la ineficiencia de las empresas públicas. También indican que todos los artículos excluyen cualquier incertidumbre y asumen que la autoridad pública tiene el conocimiento pleno de las características de todos los productores. En cuanto a las hipótesis, dividen el análisis en tres ejes: el objetivo de la autoridad pública, la tecnología de la industria y el orden de toma de acciones en los juegos. En el primer aspecto, argumenta que bajo el equilibrio parcial la suposición más obvia es que la función de pago de la autoridad gubernamental sea la función del excedente del consumidor y del productor. Esto ocurre en la mayoría de las investigaciones, la única excepción es la función considerada en [35] descrita anteriormente. En cuanto a la tecnología, mencionan que siempre se establece que la función de costos es dos veces diferenciable y el costo marginal es no negativo. Señalan que debido a que el interés de la mayoría de los artículos se concentra en la naturaleza y los efectos de la competencia entre empresas privadas y públicas, generalmente se asumen los costos de la manera más simple, es decir, con costo fijo y costo marginal constante. Explican que casi todas las investigaciones analizan la competencia de cantidad y el equilibro parcial, por lo que sólo se considera un tipo de mercado y la tecnología es fija y dada. Concluyen que no existe una teoría general de oligopolios mixtos, ni existe un marco unificado y aceptado para realizar el análisis, ya que los diversos modelos difieren en sus hipótesis básicas [21].

Ambos autores [21] observan que un campo de oportunidad en esta área de investigación es considerar restricciones presupuestarias, lo que implica pasar del enfoque de equilibrio parcial al general. Además, ven la necesidad de contar con modelos generales para equilibrio, donde los bienes son producidos por empresas privadas y públicas, y la autoridad pública maximiza el bienestar social en toda la economía, lo cual obliga a considerar la interacción entre los mercados. Esta tesis toma en cuenta estas áreas de oportunidad y líneas de investigación sugeridas ya que considera restricciones presupuestarias del gobierno y propone un modelo matemático en el cual se consideran varios mercados directamente relacionados.

En Nett [37] puede encontrarse una amplia revisión del marco básico de la teoría del oligopolio mixto. El autor divide los temas principales de esta teoría en 5 ejes: la política de precios óptima de las empresas públicas; el impacto de la regulación por las firmas públicas; la comparación de los costos de producción entre empresas públicas y privadas; los contratos de inversión en duopolios mixtos; y el ingreso a mercados con oligopolio mixto. Coincidiendo con De Fraja y Delbono [21], el autor señala que no existe una suposición uniforme respecto a la función objetivo que debe tener la empresa pública.

Stackelberg [42] establece una tipología muy útil para analizar la interacción entre dos mercados. Inicia considerando que cada mercado se compone de dos lados, el de la oferta y el de la demanda. Dependiendo del número de agentes económicos, cada lado puede ser de tres formas distintas: de libre competencia, oligopolio y monopolio. La combinación de estas tres categorías forma nueve tipos diferentes de mercados. Al considerar la interrelación de dos mercados A y B, distingue tres tipos de relaciones

- Relación de demanda primaria: Cuando los demandantes en el mercado A son al mismo tiempo demandantes en el mercado B.
- Relación de oferta primaria: Cuando los ofertantes del mercado A lo son también del mercado B.
- Relación vertical de demanda primaria: Cuando los demandantes en el mercado A son proveedores en el mercado B. El mercado A es el "líder" y el mercado B el "seguidor", y se puede hablar de una relación jerárquica entre los dos mercados.

En ese trabajo únicamente se consideran las relaciones primarias, donde la relación entre el mercado A y B es directa, aunque se reconoce la existencia de relaciones secundarias cuando las relaciones de los agentes de A y B se dan a través de un tercer mercado. Por otro lado, en la presente tesis, se analiza una relación vertical de demanda primaria, donde el mercado A es un monopolio (monopolio en la oferta y libre competencia en la demanda), y el mercado B es de libre competencia, y los demandantes en A son ofertantes en B.

En la revisión de literatura, la única investigación que se encontró que considera la regulación por participación de empresas públicas en industrias verticalmente integradas es la de Wiens [47]. Su propuesta es que el gobierno debe ingresar en las etapas de la producción donde sospecha que las empresas ejercen su poder de mercado, y utilizar el mismo esquema que en [28], donde el gobierno anuncia que compensará la diferencia entre su objetivo de producción industrial y la elección de producción de las empresas.

2.2 Programación binivel

La literatura coincide en reconocer el modelo de duopolio líder-seguidor de Stackelberg [42] como el primer antecedente a la programación binivel. En el duopolio de Stackelberg dos empresas compiten entre sí produciendo un bien homogéneo, bajo una relación de interdependencia y jerarquía. El precio de la mercancía es establecido por la cantidad que ambas empresas deciden producir, sin embargo, es visto de diferente forma por cada una de ellas. A una de estas empresas, denominada *seguidor*, se le presenta el precio como algo externo a su decisión, determinado por la otra empresa, llamada *líder*. Entonces para cada cantidad producida por el líder, el seguidor reacciona maximizando su beneficio. Por su parte, el líder debe anticipar cualquier reacción del seguidor a sus decisiones y maximizar su beneficio tomando en cuenta ese conjunto de reacciones.

Su modelo puede expresarse desde la teoría de juegos como un juego de dos jugadores con información perfecta. El jugador 1 elige el control $u_1 \in \mathbb{R}$ y el jugador 2 escoge el control $u_2 \in \mathbb{R}$. La función de beneficios asociada con el jugador 1 es $J_1(u_1, u_2)$ y la del jugador 2 es $J_2(u_1, u_2)$. Se designa al jugador 1 como el líder y al jugador 2 como el seguidor. Para cada control u_1 escogido por el líder, el seguidor elige $u_2 = T_2(u_1)$ donde T_2 es un mapeo de u_1 a u_2 tal que $J_2(u_1, T_2(u_1)) \geq J_2(u_1, u_2)$ para todo u_2. Por simplicidad, se asume que para cada u_1, $T_2(u_1)$ produce un único u_2. El líder elige u_1^* tal que $J_1(u_1^*, T_2(u_1^*)) \geq J_1(u_1, T_2(u_1))$ para todo u_1. Se dice que la estrategia u_1^* es la estrategia de Stackelberg para el líder, y $u_2^* = T_2(u_1^*)$ la estrategia de Stackelberg del seguidor [19].

En la programación binivel, el líder representa el *nivel superior*, en donde hay una función a optimizar que depende de dos conjuntos de variables de decisión, sujeta a una región factible que se encuentra implícitamente determinada por otro problema de programación matemática, denominado *nivel inferior*, que representa al seguidor. La función de beneficio de cada jugador corresponde a las funciones objetivo a optimizar en el problema binivel, y el conjunto de estrategias de cada jugador puede ser representando por soluciones en cada nivel. Comúnmente, se suele conservar la terminología del juego líder-seguidor por su capacidad explicativa, pero en sentido estricto es un sólo problema que tiene anidado otro problema de optimización en sus restricciones. Es importante notar que no estamos considerando dos problemas separados.

El primer trabajo donde se presenta explícitamente un problema de programación binivel es en el de Bracken y McGill en 1973 [12]. Pero son Candler y Townsley [13] quienes en 1977 utilizan por primera vez los términos *programación binivel* y *multinivel*. Rápidamente la programación binivel atrajo la atención de muchos investigadores debido a la amplia diversidad de aplicaciones que tiene. Por ejemplo, muchas aplicaciones pueden verse en las diferentes revisiones bibliográficas sobre programación binivel y multinivel: [33], [46], [11], [45], [23], [24], [16], [17], [29], [31] y [41]. Así como las monografías [10] y [25].

En el inicio, la programación multinivel era utilizada principalmente para modelar problemas de planificación descentralizada, donde las variables de decisión dependen de diferentes niveles jerarquizados, cada uno de los cuales tienen sus propios objetivos que pueden ser contradictores entre sí [33], [11]. Pero después se descubrieron otras áreas donde también se encontraba la estructura jerarquizada y la interrelación de decisiones, tales como la gestión de ingresos, el manejo de la contaminación, la estimación de matrices origen-destino en problemas de ruteo, el manejo de materiales peligrosos, problemas de diseño de red, el problema director-agente, los juegos de Stackelberg-Nash [17]; asignación de recursos en dos niveles, asignación binivel para modelos de cadena de suministros, logística humanitaria [31], entre otros.

En [14], Candler y Townsley proponen un juego de Stackelberg en el cual el primer jugador puede afectar los recursos disponibles del segundo jugador. Bajo el contexto de una economía mixta, modela dicho juego como un problema binivel lineal, donde el nivel inferior corresponde a los individuos privados y el nivel superior a los responsables políticos. Ese problema puede ser visto como una forma general del problema estudiado en esta tesis, que tiene como idea esencial el control de recursos por parte del gobierno, pero aplicado a una industria conformada por dos mercados verticalmente integrados. También existe un trabajo que estudia el caso de mercados verticalmente integrados desde la programación binivel, pero únicamente para empresas privadas [34]. En dicho artículo se estudia el problema de una industria que puede modelarse como una red de oligopolios en dos etapas. Analizan la existencia, singularidad y el cálculo de soluciones de un equilibrio de Stackelberg. En esa industria existe un conjunto de firmas involucradas en la primera etapa de producción, las cuales producen un bien semi-terminado o materia prima, la cual venden a un segundo conjunto de empresas que utilizan esos insumos para producir bienes de consumo final. Finalmente, existe un tercer conjunto de empresas, verticalmente integradas en ambas etapas, que actúan como líderes respecto a las empresas del segundo conjunto y compiten contra ellas en la producción de bienes de consumo final.

La formulación matemática de un problema de programación binivel hecha por Bard [10] es la siguiente: sea $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ el vector bajo control del líder y $\mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$ el vector controlado por el seguidor. Sean F y f las funciones objetivo a optimizar del líder y el seguidor respectivamente, donde $F, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ son funciones continuas y dos veces diferenciables. Entonces el problema de programación binivel puede expresarse (sin pérdida de generalidad) como:

$$\min_{\mathbf{x}\in X, \mathbf{y}\in Y} \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.1}$$

$$\text{sujeto a:} \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \tag{2.2}$$

$$\min_{y\in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.3}$$

$$\text{sujeto a:} \qquad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \tag{2.4}$$

Además de este modelo, es necesario introducir varias definiciones para facilitar la comprensión de los capítulos restantes de esta tesis.

a) Región de restricciones del problema binivel:

$$S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \tag{2.5}$$

b) Conjunto factible del seguidor para cada $\mathbf{x} \in X$ fijo:

$$S(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in Y : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \tag{2.6}$$

c) Proyección de S dentro del espacio de decisión del líder:

$$S(X) = \{\mathbf{x} \in X : \exists \mathbf{y} \in Y, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \tag{2.7}$$

d) Conjunto de reacciones racionales del seguidor para cada $\mathbf{x} \in S(X)$:

$$P(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} \in argmin[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in S(\mathbf{x})]\} \tag{2.8}$$

e) Región inducible:

$$IR = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S, \mathbf{y} \in P(\mathbf{x})\} \tag{2.9}$$

En esta tesis se nombrará como solución *factible* o *inducible* al par de valores $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que pertenezcan a la región inducible, ya que representa el único conjunto sobre el que el líder puede optimizar, una vez contemplada la *respuesta racional* del seguidor **y** $\in S(\mathbf{x})$. Una solución óptima al problema binivel es aquel par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in IR$ que minimiza F. Obsérvese que una solución $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ puede encontrarse dentro S, cumpliendo las restricciones de ambos niveles, sin ser factible para el problema binivel (en caso de no ser la solución óptima del nivel inferior).

Para asegurar que un problema está bien definido, se asume que el conjunto S es no vacío y compacto. Además, para cada decisión del líder, el seguidor tiene posibilidad de responder, es decir que $P(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. Sin embargo, esto no es suficiente para asegurar la existencia de una solución óptima. Para ello es necesario que $P(\mathbf{x})$ contenga un único óptimo para cada **x**, de otra manera no es posible asegurar que el líder encuentre el mínimo sobre IR. Cuando esto no ocurre es necesario introducir otros supuestos para decidir cuál de las soluciones $\mathbf{y} \in P(\mathbf{x})$ deberá elegirse. Si se supone cierto comportamiento cooperativo se habla de la posición *optimista*, en caso contrario se tiene la posición *pesimista* (para profundizar en el debate y las implicaciones matemáticas véase [24]). Nosotros asumimos el enfoque optimista, ya que está implicado al poner que el líder optimiza para ambas variables $\mathbf{x} \in X$ y $\mathbf{y} \in Y$.

En particular, un problema de programación binivel lineal es aquel en el que las funciones F, G, f y g son todas lineales. Se ha demostrado que este tipo de problemas son fuertemente NP-Duro [10]. De esto deriva la dificultad para tratar el problema en un tiempo computacional razonable, y la motivación a utilizar algorítmos heurísticos para resolver el problema.

En un problema de programación binivel lineal, la región inducible puede ser representada por una restricción lineal de igualdad a trozos compuesta por hiperplanos que soportan S. Por lo tanto, es posible que la región inducible sea no-convexa o no-conexa. También se ha demostrado que las soluciones óptimas de un problema de programación binivel lineal se encuentran en un vértice de IR y de S, de lo cual se deriva que si **x** es punto extremo de IR entonces también lo es de S [10]. Este resultado será clave en el método de solución propuesto para resolver el problema estudiado en esta tesis.

Capítulo 3

Modelación del problema

3.1 Planteamiento del problema

El problema estudiado en esta tesis se ha descrito en el capítulo 1, pero se resume a continuación. Considere una industria conformada por dos mercados (de materia prima y de consumo final) de múltiples productos. En un mercado se produce la materia prima (insumos) del otro. Además, en esta industria hay una empresa de propiedad estatal verticalmente integrada, esto es, que tiene producción en ambos mercados. En el mercado de materia prima, la empresa pública monopoliza la producción, mientras que en el mercado de consumo final compite con empresas privadas. Todas las empresas están limitadas por una capacidad productiva máxima; y la empresa de gobierno está obligada a superar un ingreso mínimo. El objetivo del gobierno es lograr un equilibrio de mercado a partir de su intervención. Para lograr esto minimiza la proporción faltante y sobrante de la oferta de bienes de consumo final respecto a su demanda. Entonces, debe determinar la cantidad de bienes finales que producirá su empresa y la cantidad de insumos que ofertará a las empresas privadas. Por su parte, las empresas privadas buscarán maximizar sus beneficios.

Las decisiones del gobierno limitan las posibilidades de producción de las empresas privadas, mientras que las decisiones de éstas influyen en el objetivo del gobierno, por lo cual puede hablarse de una interdependencia entre sí. Además, el monopolio del Estado de la producción de materias primas muestra la existencia de una relación de jerarquía. Esta circunstancia puede modelarse como un juego de Stackelberg con múltiples seguidores, tal como aparece en el Anexo B. O bien, mediante un modelo de programación binivel, tal como se hace en esta tesis.

Se supone que existe un organismo que regula la demanda de materias primas, determinando la cantidad de insumos que le corresponde a cada empresa privada. No es una situación tan común, sin embargo, este tipo de instituciones han existido históricamente, principalmente en economías donde el Estado interviene. Por ejemplo, cuando el Estado crea organismos de regulación de la competencia y establece contratos particulares con cada empresa privada fijando los insumos que le venderá a cada una. Otro caso ocurre cuando las empresas se agrupan y crean un organismo superior al que le delegan la capacidad de distribuir las materias primas entre las empresas, teniendo en cuenta el interés general de las empresas de toda la industria.

En particular, este críterio era el que regía la organización ejidal en el caso de la producción agrícola. Bajo este supuesto, el gobierno actuaría como el líder y el organismo superior como el seguidor. Es claro que el organismo superior busca maximizar el beneficio general de las empresas privadas.

Además, se establecen los siguientes supuestos económicos:

(a) Es un análisis estático, es decir, la tecnología es fija, y por lo tanto los costos también.

(b) Existe información completa, es decir, el gobierno conoce las funciones de costo y producción de las empresas privadas.

(c) Los productos son homogéneos y las materias primas no sustituibles.

(d) Cada bien de consumo final tiene un insumo propio indispensable para su producción.

(e) La economía es cerrada, es decir, no se consideran importaciones ni exportaciones.

(f) Las funciones de costos son lineales y el costo fijo es normalizado a cero.

(g) Las funciones de producción son de variable continua [a] y lineales.

(h) La demanda de cada producto es un valor fijo y conocido.

(i) El precio de los bienes de consumo final es un parámetro. Puede entenderse como un mercado de competencia perfecta donde el precio es algo externo a sus decisiones. El precio de las materias primas se encuentra contenido en las funciones de costos de las empresas privadas. Como el gobierno es monopolista en este mercado y no intenta maximizar su ganancia, puede establecer el precio como la suma de sus costos de producción más una ganancia fija. Por lo tanto, el precio no depende de las variables del problema y es un parámetro.

Como ya se mencionó, este problema puede modelarse como un problema de programación binivel lineal de variables continuas, donde el nivel superior le corresponde a la empresa de propiedad estatal (líder), y el nivel inferior está asociado con el órgano de cooperación de las empresas privadas (seguidor).

3.2 Formulación matemática

A continuación, se presenta la formulación matemática del problema descrito anteriormente. Se definen los conjuntos, parámetros y variables de decisión del problema, así como la representación del modelo matemático y su explicación.

Conjuntos:

[a] Este supuesto es válido para bienes que se producen en términos continuos, por ejemplo, litros de gasolina, toneladas de cemento, kilovatio-hora para la energía eléctrica, toneladas de carbón, etc. Para los bienes que se producen por unidades (número de motores, piezas de refacción), sería necesario utilizar una función de variable discreta.

$I =$ conjunto de bienes de consumo final.

$J =$ conjunto de empresas privadas.

Cabe aclarar que $|\cdot|$ denota la cardinalidad del conjunto, es decir, el número de elementos contenidos en dicho conjunto.

Parámetros:

$t =$ mínima utilidad neta que la empresa pública debe asegurar para sí misma.

$p_i =$ precio del bien de consumo final $i \in I$.

$d_i =$ demanda del bien de consumo final $i \in I$.

$q_i^A =$ capacidad productiva máxima de la empresa pública para producir el bien de consumo final $i \in I$.

$q_i^B =$ capacidad productiva máxima de la empresa pública para producir la materia prima $i \in I$.

$m_j =$ capacidad productiva máxima de la empresa $j \in J$.

$c_i^G =$ costo de producción unitario del bien de consumo final $i \in I$ para la empresa pública .

$c_{ij}^E =$ costo de producción unitario del bien de consumo final $i \in I$ para la empresa privada $j \in J$.

$a_{ij} =$ requerimiento de la materia prima necesaria para la producción de una unidad de consumo final $i \in I$ por la empresa privada $j \in J$.

$b_{ij} =$ nivel de producción requerido de una unidad del producto final $i \in I$ por la empresa privada $j \in J$.

Variables de decisión del líder:

$x_i =$ cantidad del bien de consumo final $i \in I$ producido por la empresa pública.

$z_i =$ cantidad de la materia prima $i \in I$ que ofertará la empresa pública a las empresas privadas.

Variables de decisión del seguidor:

$y_{ij} =$ cantidad del bien de consumo final $i \in I$ producido por la empresa privada $j \in J$.

Variables auxiliares:

$r_i =$ proporción faltante del bien de consumo final $i \in I$ para satisfacer la demanda.

s_i = proporción sobrante del bien de consumo final $i \in I$ para igualar la demanda.

Por el supuesto (d), el conjunto de materias primas tiene la misma cardinalidad que I, y están en relación uno a uno con los bienes de consumo final, por lo tanto, se utiliza el mismo índice. Por simplicidad, con "materia prima i" se hace referencia a la materia prima necesaria para producir el bien de consumo final i, distinguiendo que se trata de productos diferentes. Con A y B en las capacidades productivas máximas del gobierno se distingue entre bienes de consumo final y materias primas. Mientras que G y E sirven para diferenciar entre la empresa de gobierno y las empresas privadas. Las variables de decisión se representarán por medio de los siguientes vectores: $x = (x_1, ..., x_{|I|})$, $z = (z_1, ..., z_{|I|})$, $r = (r_1, ..., r_{|I|})$, $s = (s_1, ..., s_{|I|})$ y $y_j = (y_{1j}, ..., y_{|I|j})\ \forall j \in J$.

El modelo matemático del problema presentado es el siguiente, en donde las variables del líder están en rojo y las del seguidor en azul:

Modelo Binivel:

$$\min_{x,z,r,s,y} \sum_{i \in I} (r_i + s_i) \tag{3.1}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \frac{\sum_{j \in J} y_{ij} + x_i}{d_i} + r_i - s_i = 1 \qquad \forall i \tag{3.2}$$

$$t \leq \sum_{i \in I} (p_i - c_i^G) x_i \tag{3.3}$$

$$0 \leq x_i \leq q_i^A \qquad \forall i \tag{3.4}$$

$$0 \leq z_i \leq q_i^B \qquad \forall i \tag{3.5}$$

$$r_i \geq 0 \qquad \forall i \tag{3.6}$$

$$s_i \geq 0 \qquad \forall i \tag{3.7}$$

$$\max_{y} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (p_i - c_{ij}^E) y_{ij} \tag{3.8}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} y_{ij} \leq z_i \qquad \forall i \tag{3.9}$$

$$\sum_{i \in I} b_{ij} y_{ij} \leq m_j \qquad \forall j \tag{3.10}$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, \forall j \tag{3.11}$$

El problema del nivel superior está definido por (3.1)-(3.7), en donde (3.1) representa la función objetivo del líder, en la cual se busca minimizar las proporciones de sobrantes y faltantes de producción con respecto a la demanda total. La restricción (3.2) busca equilibrar la demanda de cada bien $i \in I$ de consumo final con la suma total de la producción ofrecida de ese mismo bien por parte del conjunto de las empresas privadas y la empresa pública, respectivamente. En (3.3) se asegura que la utilidad de la empresa pública por la producción de bienes de consumo final sea mayor o igual a una cota mínima. En (3.4) se limita la producción del bien $i \in I$ de la empresa pública por determinada capacidad productiva máxima, y se asegura su no negatividad, mientras en (3.5) se asegura lo mismo para las cantidades de materia prima que ofrecerá el gobierno. En (3.6) y (3.7) se establece que las variables auxiliares correspondientes a las proporciones faltantes y sobrantes del bien $i \in I$ sean no-negativas. El problema del nivel inferior se determina por las ecuaciones (3.8)-(3.11). La función objetivo del seguidor aparece en (3.8) y busca maximizar la utilidad neta del conjunto de empresas privadas. En (3.9) se limita la cantidad producida del bien de consumo final $i \in I$ por el total de empresas privadas a través de la cantidad de insumos que el gobierno les ofrece. La restricción (3.10) implica que la producción total de cada empresa $j \in J$ está limitada por una capacidad máxima de producción. Finalmente (3.11) hace no negativa la producción de cada empresa privada.

Debido a que es posible que el problema del nivel inferior tenga múltiples óptimos (al ser un problema lineal si hay más de un óptimo entonces hay un número infinito de ellos), se ha asumido el enfoque optimista [24]. Esto significa que se elige la solución óptima y^* al problema del nivel inferior que minimiza la función objetivo del líder, y se expresa al colocar la variable y dentro de las variables a optimizar por el líder en la ecuación (3.1). Esta idea concuerda con el problema, ya que es posible suponer que si hay regulación estatal y un órgano superior a las empresas privadas, exista cierto grado de cooperación entre ambos sectores.

3.3 Análisis del nivel inferior

Una vez que se tiene una solución del líder, sus respectivas variables son conocidas en el nivel inferior. En particular, el vector z sería un parámetro en ese problema. Entonces, el nivel inferior es un problema lineal y se puede escribir su problema dual asociado de la siguiente forma, con α y β vectores correspondientes a las variables duales:

Problema dual asociado al nivel inferior:

$$\min_{\alpha,\beta} \sum_{i\in I} \alpha_i z_i + \sum_{j\in J} \beta_j m_j \tag{3.12}$$

$$\text{sujeto a:} \quad a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j \geq (p_i - c_{ij}^E) \quad \forall i,\ \forall j \tag{3.13}$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad \forall i \tag{3.14}$$

$$\beta_j \geq 0 \quad \forall j \tag{3.15}$$

Tanto para el problema primal del nivel inferior como para su respectivo problema dual, el espacio de soluciones factibles es acotado. Por consecuencia del Teorema Fundamental de Dualidad se sabe que ambos problemas tienen soluciones factibles óptimas y los valores objetivos óptimos de los dos problemas son iguales ([10]: *Teorema 2.5.3*). Y a la inversa, cuando las funciones objetivo, definidas en (3.8) y (3.12), son iguales para soluciones factibles del problema dual y primal es porque son soluciones óptimas, respectivamente. Estas son las condiciones necesarias y suficientes para optimalidad.

Es importante observar que mientras la región factible del problema primal se modifica conforme cambie el valor de la variable z del líder, la región factible del problema dual permanece constante ante cualquier valor de las variables del líder. Denominaremos P al poliedro que representa la región factible del problema dual asociado al nivel inferior, es decir, aquel par de vectores α, β que cumplen (3.13)-(3.15). Esta característica será explotada en el algoritmo propuesto para resolver el problema binivel.

Capítulo 4

Reformulaciones del problema binivel

La forma más común de resolver un problema binivel lineal es mediante su reformulación a un problema de un sólo nivel. Para lograr esto, se aprovechan las características del problema del nivel inferior y la relación existente entre el respectivo problema primal y el dual correspondiente.

En esta tesis se realizan tres reformulaciones para reducir el problema binivel a uno de un solo nivel. Cabe mencionar que las dos primeras reformulaciones son equivalentes al problema original, mientras que la tercera acota superiormente el problema original. La primera reformulación asegura que la solución óptima del modelo reformulado pertenezca a la región inducible del problema binivel, utilizando un corolario del teorema de dualidad fuerte. El resultado es un modelo no lineal de un sólo nivel. La segunda reformulación sustituye la restricción no lineal, utilizando las condiciones de holgura complementaria, convirtiendo el modelo en uno entero-mixto lineal, con tres nuevas variables binarias. La tercera reformulación discretiza una variable del líder, lo que permite sustituir la restricción no lineal de la primera reformulación por un conjunto de nuevas restricciones lineales, pero requiere la introducción de dos restricciones, una continua y una binaria.

4.1 Reformulación 1: Dualidad fuerte (No lineal)

La primera reformulación consiste en introducir al *Modelo Binivel* las restricciones del problema dual asociado al nivel inferior (3.12-3.15) y utilizar las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad ([10]: *Proposición 2.5.3*) para asegurar que la decisión del seguidor pertenezca al conjunto de reacciones racionales. Por lo tanto, se agrega la siguiente restricción que iguala el valor de la función objetivo del problema primal del nivel inferior (3.8) con el valor objetivo del dual correspondiente (3.12), para algún valor de z de la empresa pública:

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c_{ij}^E)y_{ij} = \sum_{i\in I}\alpha_i z_i + \sum_{j\in J}\beta_j m_j \tag{4.1}$$

De esa forma, el problema de programación binivel lineal es transformado en un problema de un sólo nivel no lineal con $5|I| + |J| + |I||J|$ variables continuas y $4|I| + |J| + |I||J| + 2$ restricciones (sin considerar restricciones de no negatividad), tal como aparece a continuación:

Reformulación 1. Dualidad fuerte (No lineal)

$$\min_{x,z,r,s,y,\alpha,\beta} \sum_{i\in I}(r_i + s_i) \tag{4.2}$$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeto a: } \frac{\sum_{j\in J} y_{ij} + x_i}{d_i} + r_i - s_i &= 1 && \forall i && (4.3)\\
t &\leq \sum_{i\in I}(p_i - c_i^G)x_i && && (4.4)\\
0 \leq x_i &\leq q_i^A && \forall i && (4.5)\\
0 \leq z_i &\leq q_i^B && \forall i && (4.6)\\
r_i &\geq 0 && \forall i && (4.7)\\
s_i &\geq 0 && \forall i && (4.8)\\
\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq z_i && \forall i && (4.9)\\
\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq m_j && \forall j && (4.10)\\
y_{ij} &\geq 0 && \forall i,\ \forall j && (4.11)\\
a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j &\geq (p_i - c_{ij}^E) && \forall i,\ \forall j && (4.12)\\
\alpha_i &\geq 0 && \forall i && (4.13)\\
\beta_j &\geq 0 && \forall j && (4.14)\\
\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c_{ij}^E)y_{ij} &= \sum_{i\in I}\alpha_i z_i + \sum_{j\in J}\beta_j m_j && && (4.15)
\end{aligned}
$$

Este modelo tiene la función objetivo y las restricciones lineales, salvo la última que es cuadrática (4.15). Esa ecuación puede representarse de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c_{ij}^E)y_{ij} + \sum_{i\in I}\alpha_i z_i + \sum_{j\in J}\beta_j m_j &\leq 0 && (4.16)\\
\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c_{ij}^E)y_{ij} - \sum_{i\in I}\alpha_i z_i - \sum_{j\in J}\beta_j m_j &\leq 0 && (4.17)
\end{aligned}
$$

Es evidente que tanto el primer elemento, como el último de la suma en 4.16, son funciones convexas ya que son sumas de productos entre variables y parámetros. Se prueba la convexidad del elemento intermedio no lineal de la siguiente forma: sea el vector no negativo $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, con Q un poliedro y la función $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+i}$. Considere dos vectores $x, y \in Q$ tal que:

$$
\begin{aligned}
h(x+y) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)(x_{n+i}+y_{n+i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+i} + \sum_{i=1}^{n}(x_{n+i}y_i + x_i y_{n+i}) + \sum_{i=1}^{n} y_i y_{n+i} \\
&= h(x) + (\nabla h(x), y) + \sum_{i=1}^{n} y_i y_{n+i} \\
h(x+y) &\geq h(x) + (\nabla h(x), y)
\end{aligned}
$$

Entonces el término $\sum_{i\in I}\alpha_i z_i$ es una función convexa [39].

Cada elemento de la suma en (4.16) es convexo, por lo tanto, su suma es convexa. De esto se deriva que la función que define (4.16) es convexa, y (4.17) es cóncava. Por lo cual, la *Reformulación 1* no puede ser abordada con las técnicas tradicionales para los programas matemáticos con restricciones cuadráticas (*QCP* por sus siglas en inglés), y lo convierte en un problema no lineal más general, de programación no convexa.

4.2 Reformulación 2: Holgura complementaria

La segunda reformulación se basa en las condiciones de holgura complementaria ([10]: *Teorema 2.5.4*), que aseguran la optimalidad del nivel inferior, y por medio de procedimientos algebraicos se recupera la linealidad que se había perdido en la restricción (4.1). Para conseguir dicha linealización se introducen las siguientes restricciones:

$$
\alpha_i\left(z_i - \sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij}\right) = 0 \qquad \forall i \tag{4.18}
$$

$$
\beta_j\left(m_j - \sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij}\right) = 0 \qquad \forall j \tag{4.19}
$$

$$
y_{ij}\left(a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j - (p_i - c^E_{ij})\right) = 0 \qquad \forall i,\ \forall j \tag{4.20}
$$

Cada una de estas restricciones sigue siendo no lineal, sin embargo, pueden linealizarse de manera sencilla. Se introducen los parámetros M^1, M^2 y M^3 los cuales representan números positivos suficientemente grandes. Además, se incluyen las variables binarias $\gamma_i \in \{0,1\}\ \ \forall i \in I$, $\delta_j \in \{0,1\}\ \ \forall j \in J$ y $\epsilon_{ij} \in \{0,1\}\ \ \forall i \in I, \forall j \in J$. Las restricciones

(4.18)-(4.20) se sustituyen por los siguientes pares de restricciones:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &\leq M^1\gamma_i && \forall i && (4.21)\\
z_i - \sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq M^1(1-\gamma_i) && \forall i && (4.22)\\
\beta_j &\leq M^2\delta_j && \forall j && (4.23)\\
m_j - \sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq M^2(1-\delta_j) && \forall j && (4.24)\\
y_{ij} &\leq M^3\epsilon_{ij} && \forall i,\ \forall j && (4.25)\\
a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j - (p_i - c_{ij}^E) &\leq M^3(1-\epsilon_{ij}) && \forall i,\ \forall j && (4.26)
\end{aligned}
$$

La *Reformulación 2* resulta ser un modelo de programación mixta-entera con restricciones lineales que tiene $6|I|+2|J|+2|I||J|$ variables y $6|I|+3|J|+3|I||J|+1$ restricciones (sin considerar restricciones de no negatividad o binarias).

Reformulación 2. Holgura complementaria

$$\min_{x,z,r,s,y,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon} \sum_{i\in I}(r_i+s_i) \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a: } \frac{\sum_{j\in J} y_{ij}+x_i}{d_i}+r_i-s_i &= 1 && \forall i && (4.28)\\
t &\leq \sum_{i\in I}(p_i-c_i^G)x_i && && (4.29)\\
0\leq x_i &\leq q_i^A && \forall i && (4.30)\\
0\leq z_i &\leq q_i^B && \forall i && (4.31)\\
r_i &\geq 0 && \forall i && (4.32)\\
s_i &\geq 0 && \forall i && (4.33)\\
\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq z_i && \forall i && (4.34)\\
\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq m_j && \forall j && (4.35)\\
y_{ij} &\geq 0 && \forall i,\ \forall j && (4.36)\\
a_{ij}\alpha_i+b_{ij}\beta_j &\geq (p_i-c_{ij}^E) && \forall i,\ \forall j && (4.37)\\
\alpha_i &\geq 0 && \forall i && (4.38)\\
\beta_j &\geq 0 && \forall j && (4.39)\\
\alpha_i &\leq M^1\gamma_i && \forall i && (4.40)\\
z_i-\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq M^1(1-\gamma_i) && \forall i && (4.41)\\
\beta_j &\leq M^2\delta_j && \forall j && (4.42)\\
m_j-\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq M^2(1-\delta_j) && \forall j && (4.43)\\
y_{ij} &\leq M^3\epsilon_{ij} && \forall i,\ \forall j && (4.44)\\
a_{ij}\alpha_i+b_{ij}\beta_j-(p_i-c_{ij}^E) &\leq M^3(1-\epsilon_{ij}) && \forall i,\ \forall j && (4.45)\\
\gamma_i,\ \delta_j,\ \epsilon_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i,\ \forall j && (4.46)
\end{aligned}$$

4.2.1 Ajuste del valor de las constantes M

En el problema bajo estudio, los parámetros $a_{ij},\ b_{ij}$ son siempre positivos, lo que significa que si hay más producción de bienes de consumo final, se requieren más insumos y se utiliza más capacidad productiva de la empresa privada. Además, la resta $p_i - c_{ij}^E$ siempre es no negativa ya que, de lo contrario, las empresas privadas estarían teniendo pérdidas, lo que supondría su salida del mercado en cierto plazo.

Se define la cota superior $UB(\cdot) \in \mathbb{R}$ de un vector, como un número real que es mayor o igual a todos los componentes del vector.

Para ajustar el valor de M^1 se busca primero encontrar una cota superior para $\alpha_i\ \forall i \in I$, tal que α es parte de una solución óptima al problema dual. El peor escenario ocurre cuando $\beta_j = 0\ \forall j \in J$, entonces se debe cumplir por (4.37) que $\alpha_i \geq \frac{p_i - c^E_{ij}}{a_{ij}}\ \ \forall i \in I, \forall j \in J$. Debido a que (3.12) minimiza, entonces la solución óptima ocurre en la igualdad. Por lo tanto, una cota superior para cualquier valor óptimo de α es:

$$UB(\alpha) = \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{a_{ij}}\} \tag{4.47}$$

Análogamente, se puede proceder para el caso de la variable dual β y obtener la siguiente cota superior:

$$UB(\beta) = \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{b_{ij}}\} \tag{4.48}$$

La demostración formal se hace por contradicción. Sea (α^*, β^*) una solución óptima del problema dual D definido por (3.12)-(3.15) para un z determinado. Sea $(\alpha^{'}, \beta^{'})$ tal que todos los elementos de ambos vectores son iguales a la solución óptima, salvo para un $i^{'} \in I$ particular, en el que $\alpha^{'}_{i^{'}} = \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{a_{ij}}\}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{a_{ij}}\} &\geq \frac{p_{i'} - c^E_{i'j}}{a_{i'j}} \quad \forall j \\
a_{i'j} \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{a_{ij}}\} &\geq p_{i'} - c^E_{i'j} \quad \forall j \\
a_{ij} \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{a_{ij}}\} + b_{ij} \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c^E_{ij}}{b_{ij}}\} &\geq p_i - c^E_{ij} \quad \forall i, \forall j
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\alpha^{'}, \beta^{'})$ es una solución factible del problema D. Supongamos que $\alpha^*_{i^*} > \alpha^{'}_{i^{'}}$, esto implica que

$$\begin{aligned}
\alpha^*_{i^*} z_{i^*} &> \alpha^{'}_{i^{'}} z_{i^*} \\
\sum_{i \in I} \alpha^*_i z_i + \sum_{j \in J} \beta^*_j m_j &> \sum_{i \in I} \alpha^{'}_i z_i + \sum_{j \in J} \beta^{'}_j m_j
\end{aligned}$$

Lo cual entra en contradicción con la primera suposición que decía que (α^*, β^*) eran solución óptima. Por lo tanto, $\alpha^{'}_{i^{'}}$ acota cualquier solución óptima para $i^{'}$ de la forma en que fue definida. Iterativamente esta conclusión se extiende para toda $i \in I$, y para toda $j \in J$ respecto al vector β.

En el caso de la restricción (4.41), la cota superior se obtiene tomando en cuenta la no negatividad de los componentes de la resta y la restricción (4.34), entonces:

$$\begin{aligned}
z_i - \sum_{j \in J} a_{ij} y_{ij} \leq z_i &\leq q^B_i \quad \forall i \\
UB\left(z_i - \sum_{j \in J} a_{ij} y_{ij}\right) &= \max_{i \in I}\{q^B_i\}
\end{aligned}$$

Análogamente, para el caso de la restricción (4.37) la cota superior es:

$$UB\left(m_j - \sum_{i \in I} b_{ij} y_{ij}\right) = \max_{j \in J}\{m_j\}$$

Para el caso de M^3, obsérvese que por (4.35) se tiene que $b_{ij}y_{ij} \leq \sum_{i \in I} b_{ij}y_{ij} \leq m_j \; \forall i \in I, \forall j \in J$, entonces se cumple $y_{ij} \leq \frac{m_j}{b_{ij}} \; \forall i \in I, \forall j \in J$. Una cota superior para la variable y es:

$$UB(y) = \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{m_j}{b_{ij}}\}$$

Finalmente, por (4.47) y (4.48), se sabe que $a_{ij}UB(\alpha) + b_{ij}UB(\beta) \geq a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j \geq a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j - (p_i - c_{ij}^E) \; \forall i \in I, \forall j \in J$. Por lo cual, para el caso de la restricción (4.46) se tiene la cota superior:

$$\begin{aligned}
UB(a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j - (p_i - c_{ij}^E)) &= \max_{i \in I, j \in J}\{a_{ij}UB(\alpha) + b_{ij}UB(\beta)\} \\
UB(a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j - (p_i - c_{ij}^E)) &= \max_{i \in I, j \in J}\{a_{ij}\}UB(\alpha) + \max_{i \in I, j \in J}\{b_{ij}\}UB(\beta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede establecer M^1, M^2 y M^3 como:

$$M^1 = \max\left\{ \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c_{ij}^E}{a_{ij}}\}, \; \max_{i \in I}\{q_i^B\}\right\} \tag{4.49}$$

$$M^2 = \max\left\{ \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{p_i - c_{ij}^E}{b_{ij}}\}, \; \max_{j \in J}\{m_j\}\right\} \tag{4.50}$$

$$M^3 = \max\left\{ \max_{i \in I, j \in J}\{\frac{m_j}{b_{ij}}\}, \; \max_{i \in I, j \in J}\{a_{ij}\}UB(\alpha) + \max_{i \in I, j \in J}\{b_{ij}\}UB(\beta)\}\right\} \tag{4.51}$$

4.3 Reformulación 3. Discretización

La *Reformulación 3. Discretización* es una relajación lineal del modelo correspondiente a la *Reformulación 1*, que discretiza la variable continua z para sustituir la restricción no lineal (4.1) por otras restricciones lineales. Al ser una relajación, la solución óptima que produce la reformulación, no necesariamente es óptima en el problema binivel. Es decir, esta reformulación obtiene una solución factible que acota superiormente el valor óptimo del problema binivel; esto es así porque optimiza sólo sobre un subconjunto de todos los valores posibles que puede tomar z.

Sea Z_i una colección de conjuntos de valores reales, donde $Z_i = \{\zeta_{il}\}$, $\zeta_{il} \in [0, q_i^B] \; \forall l \in L, \forall i \in I$, y sea $\eta_{il} = \{0, 1\}, \forall i \in I, \; l \in L$ una variable binaria, entonces $z_i = \sum_{l \in L} \zeta_{il}\eta_{il}, \; \forall i \in I$ si se cumple que:

$$\sum_{l \in L} \eta_{il} = 1 \qquad \forall i \tag{4.52}$$

$$\eta_{il} = \{0, 1\} \qquad \forall i, \; \forall l \tag{4.53}$$

La restricción (4.1) se puede sustituir por la siguiente igualdad considerando las restricciones 4.52-4.53.

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c^E_{ij})y_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\alpha_i \sum_{l\in L}\zeta_{il}\eta_{il}\right) + \sum_{j\in J}\beta_j m_j \tag{4.54}$$

Obsérvese que por (4.52), para un $i^{'}$ determinado sólo existe un $l^{'}$ tal que $\eta_{i^{'}l^{'}} = 1$. Por lo tanto, la restricción (4.54) puede convertirse en la siguiente igualdad sin ningún inconveniente (salvo los computacionales):

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c^E_{ij})y_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{l\in L}\alpha_i\zeta_{il}\eta_{il} + \sum_{j\in J}\beta_j m_j \tag{4.55}$$

Sea w una variable continua. Puede mostrarse que $w_{il} = \alpha_i\zeta_{il}\eta_{il},\ \forall i \in I,\ \forall l \in L,\ \forall j \in J$, si se cumplen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
w_{il} &\le \alpha_i\zeta_{il} && \forall i,\ \forall l && (4.56)\\
w_{il} &\ge 0 && \forall i,\ \forall l && (4.57)\\
w_{il} &\le UB(\alpha)\eta_{il}\zeta_{il} && \forall i,\ \forall l && (4.58)\\
\alpha_i\zeta_{il} - UB(\alpha)(1-\eta_{il})\zeta_{il} &\le w_{il} && \forall i,\ \forall l && (4.59)
\end{aligned}$$

donde el término $UB(\alpha)$ representa una cota superior de la variable α, la cual ha sido definida en (4.47). Entonces, puede sustituirse la igualdad (4.55) por las restricciones (4.52), (4.53), (4.56)-(4.59) más la siguiente restricción:

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c^E_{ij})y_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{l\in L} w_{il} + \sum_{j\in J}\beta_j m_j \tag{4.60}$$

La *Reformulación 3* resulta un problema entero mixto de un sólo nivel con $4|I|+|J|+|I||J|+|I||L|$ variables y $5|I| + |J| + |I||J| + 3|I||L| + 2$ restricciones (sin considerar restricciones de no negatividad o binarias), definido como:

Reformulación 3. Discretización

$$\min_{x,r,s,y,\alpha,\beta,\eta,w} \sum_{i\in I}(r_i + s_i) \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a: } \frac{\sum_{j\in J} y_{ij} + x_i}{d_i} + r_i - s_i &= 1 && \forall i && (4.62)\\
t &\leq \sum_{i\in I}(p_i - c_i^G)x_i && && (4.63)\\
0 \leq x_i &\leq q_i^A && \forall i && (4.64)\\
0 \leq \sum_{l\in L}\zeta_{il}\eta_{il} &\leq q_i^B && \forall i && (4.65)\\
r_i &\geq 0 && \forall i && (4.66)\\
s_i &\geq 0 && \forall i && (4.67)\\
\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq \sum_{l\in L}\zeta_{il}\eta_{il} && \forall i && (4.68)\\
\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq m_j && \forall j && (4.69)\\
y_{ij} &\geq 0 && \forall i,\ \forall j && (4.70)\\
a_{ij}\alpha_i + b_{ij}\beta_j &\geq (p_i - c_{ij}^E) && \forall i,\ \forall j && (4.71)\\
\alpha_i &\geq 0 && \forall i && (4.72)\\
\beta_j &\geq 0 && \forall j && (4.73)\\
\sum_{l\in L}\eta_{il} &= 1 && \forall i && (4.74)\\
\eta_{il} &= \{0,1\} && \forall i,\ \forall l && (4.75)\\
w_{il} &\leq \alpha_i\zeta_{il} && \forall i,\ \forall l && (4.76)\\
w_{il} &\geq 0 && \forall i,\ \forall l && (4.77)\\
w_{il} &\leq UB(\alpha)\eta_{il}\zeta_{il} && \forall i,\ \forall l && (4.78)\\
\alpha_i\zeta_{il} - UB(\alpha)(1-\eta_{il})\zeta_{il} &\leq w_{il} && \forall i,\ \forall l && (4.79)\\
\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c_{ij}^E)y_{ij} &= \sum_{i\in I}\sum_{l\in L} w_{il} + \sum_{j\in J}\beta_j m_j && && (4.80)
\end{aligned}$$

4.4 Comparación analítica de las tres reformulaciones

Las tres reformulaciones parten de un núcleo de restricciones y variables que incluyen todas las que corresponden al problema del nivel superior, y al primal y dual del nivel superior; es decir, de $4|I|+|J|+|I||J|+1$ desigualdades lineales y $4|I|+|J|+|I||J|$ variables continuas.

La *Reformulación 1. Dualidad fuerte* agrega sólamente una igualdad no convexa. Por su parte, tanto la *Reformulación 2. Holgura Complementaria*, como la *Reformulación 3. Discretización* son modelos de programación lineal mixta-entera. La *Reformulación 2* agrega $2|I| + 2|J| + 2|I||J|$ restricciones lineales y tres variables binarias bajo los índices $i,\ j$ y ij.

Además, es necesario realizar varios procesos computacionales para encontrar $M^1,\ M^2,\ M^3$. Mientras que la *Reformulación 3* agrega $|I| + 3|I||L| + 1$ desigualdades lineales, así como una variable continua y una variable binaria, ambas con los índices il. Para un valor de $|L|$ "pequeño" es claro que la *Reformulación 2* es más compleja que la *Reformulación 3*. Sin embargo, debido a que la relación de la *Reformulación 3* requiere de una gran cantidad de valores reales ζ_{il} para mejorar sus resultados, es de esperar que este sea el modelo computacionalmente más costoso.

Capítulo 5

Algoritmos heurísticos

5.1 Algoritmo 1: Algoritmo iterado sobre puntos extremos (AIPE)

En la sección 3.3 se resaltó que el poliedro que define la región factible del problema dual del nivel inferior es independiente de las variables del líder y, por lo tanto, es constante en todo el problema binivel. Si se conocieran todos los vértices de este poliedro, la igualdad (4.1) y las restricciones duales de la *Reformulación 1. Dualidad fuerte* podrían sustituirse por el conjunto de restricciones asociadas a los vértices del poliedro asegurando que se cumpla sólo una de estas restricciones. Esto reemplazaría a las variables duales por parámetros que representen a esos vértices.

La idea del *Algoritmo iterado sobre puntos extremos (AIPE)* es explotar esta característica del problema dual. Iterativamente se generan vértices del poliedro dual, y se resuelve un problema de programación entera mixta llamado el *Problema Maestro*, el cual asegura encontrar una solución factible del problema binivel. El algoritmo se detiene cuando es imposible mejorar el valor de la función objetivo del problema binivel.

Sea P el poliedro asociado a las restricciones del problema dual (3.13)-(3.15); y $v_k = (\alpha^k, \beta^k) \in P,\ k = 1, ..., |P|$ los vértices del poliedro P, donde $|P|$ define el número de vértices que tiene dicho poliedro, con $\alpha^k = (\alpha_1^k, ..., \alpha_{|I|}^k),\ \ \beta^k = (\beta_1^k, ..., \alpha_{|J|}^k)$. Sea F la función objetivo del problema binivel (3.1), f y g las funciones objetivo del problema primal (3.8) y del dual (3.12) del nivel inferior, respectivamente. Sea $\chi = (x, z, r, s)$ un vector que agrupa las variables del líder; $\Upsilon = (y_1, ..., y_{|J|})$, un vector que contiene a las variables del seguidor. Se define φ como el conjunto de los vértices de P que se han explorado hasta el momento; en cada iteración se actualiza $K = |\varphi|$ con $k \in K$ como índice de los vértices conocidos. Con $UB(z_i)$ se representa una cota superior de la variable z_i, la cual naturalmente es el parámetro q_i^B.

Problema Maestro (PM):

$$\min_{x,z,r,s,y,\lambda} \sum_{i \in I} (r_i + s_i) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a: } \frac{\sum_{j \in J} y_{ij} + x_i}{d_i} + r_i - s_i &= 1 && \forall i && (5.2)\\
t &\leq \sum_{i \in I} (p_i - c_i^G) x_i && && (5.3)\\
0 \leq x_i &\leq q_i^A && \forall i && (5.4)\\
0 \leq z_i &\leq q_i^B && \forall i && (5.5)\\
r_i &\geq 0 && \forall i && (5.6)\\
s_i &\geq 0 && \forall i && (5.7)\\
\sum_{j \in J} a_{ij} y_{ij} &\leq z_i && \forall i && (5.8)\\
\sum_{i \in I} b_{ij} y_{ij} &\leq m_j && \forall j && (5.9)\\
y_{ij} &\geq 0 && \forall i,\ \forall j && (5.10)\\
\sum_{i \in I} \alpha_i^k z_i + \sum_{j \in J} \beta_j^k m_j &\geq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (p_i - c_{ij}^E) y_{ij} && \forall k && (5.11)\\
\sum_{i \in I} \alpha_i^k z_i + \sum_{j \in J} \beta_j^k m_j - (1 - \lambda_k)(\sum_{i \in I} \alpha_i^k UB(z_i) + \sum_{j \in J} \beta_j^k m_j) &\leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (p_i - c_{ij}^E) y_{ij} && \forall k && (5.12)\\
\sum_{k \in K} \lambda_k &= 1 && && (5.13)\\
\lambda_k &\in \{0, 1\} && \forall k && (5.14)
\end{aligned}$$

Las últimas restricciones (5.11)-(5.14), aseguran que la igualdad $f(\Upsilon) = g(\chi, v_k)$ se cumpla para un sólo vértice, utilizando la variable binaria auxiliar λ. Con ello, se tiene la certeza que la solución resultante Υ^* pertenece al conjunto de reacción racional del seguidor. Esto es así porque al cumplirse la igualdad de valores entre la función objetivo dual y el primal del nivel inferior se sabe que ambas soluciones son óptimas por el criterio de optimalidad suficiente ([10]: *Teorema 2.5.2*). De lo anterior, se deduce que la solución óptima del *Problema Maestro* es una solución factible (en la región inducible) del problema binivel.

Se representa como *Dual*$(z) \rightarrow v$ el proceso por el cual se resuelve el problema dual (3.12)-(3.15) para un vector **z** fijo y se obtiene una solución óptima $v = (\alpha, \beta)$. Y por *PM*$(\varphi) \rightarrow (\chi, \Upsilon)$ al proceso por el cual se resuelve el *Problema Maestro* para un conjunto de vértices φ, y da como resultado las soluciones (χ, Υ). La descripción estructurada del algoritmo se presenta en el Pseudocódigo 5.1.

Este algoritmo es heurístico ya que no asegura la optimalidad del problema binivel, debido a que es posible que, durante el proceso, la función objetivo no registre mejoría. Esto puede ocurrir cuando el valor z^k obtenido en la iteración k produce un vértice v_k que ya está dentro del conjunto φ o cuando simplemente $F(\chi^k, \Upsilon^k) \geq F(\chi^{k-1}, \Upsilon^{k-1})$.

Algoritmo 5.1.1 *Algoritmo iterado sobre puntos extremos (AIPE)*

Paso 1. Inicialización: $\varphi = \emptyset,\ \rho = \infty$;
Paso 2. Encontrar vértices iniciales $D(\mathbf{0}) \to v_1$. $D(q_i^B) \to v_2$. $\varphi = \varphi \cup \{v_1, v_2\}$;
Paso 3. Resolver Problema Maestro: $PM(\varphi) \to (\chi^k, \Upsilon^k)$. $\pi = F(\chi^k, \Upsilon^k)$;
Paso 4. Encontrar vértice k: $D(z^k) \to v_k$;
Paso 5. Evaluar función objetivo:

- **Si** $\rho > \pi$ **entonces** $\varphi = \varphi \cup \{v_k\},\ \rho = \pi$. Regresar al **Paso 3**;
- **Si** $\rho \leq \pi$ **entonces** pare.

Reportar: $\pi, (\chi^k,\ \Upsilon^k)$

5.2 Algoritmo 2: Algoritmo de penalización de la holgura del nivel inferior (APHNI)

La idea del *Algoritmo de penalización de la holgura del nivel inferior (APHNI)* es encontrar una solución factible utilizando vértices del problema dual construido a partir de soluciones no necesariamente factibles.

El *Algoritmo de penalización de la holgura del nivel inferior (APHNI)* consiste en resolver iterativamente un problema mixto-entero de un sólo nivel denominado *Problema Maestro Modificado (PMM)*. Este modelo permite la existencia de una holgura entre la función objetivo primal del nivel inferior y su función objetivo dual evaluada en los vértices del poliedro dual, pero lo penaliza en la función objetivo del modelo, es decir, la función objetivo que corresponde al líder, para acercarse a una buena solución factible. Debido a que se permite que el valor de la función primal y dual sea diferente de cero, se da libertad para encontrar nuevos vértices duales utilizando soluciones que pertenecen a la región de restricciones del problema binivel, pero no necesariamente a la región inducible. Por lo tanto, al finalizar las iteraciones es necesario resolver otro problema, denominado *Problema Resultante* para encontrar una solución factible. El *Problema Resultante* es un problema lineal de un sólo nivel definido por las restricciones del líder y el seguidor (3.1)-(3.7), (3.9)-(3.11), pero que toma como parámetro el último valor obtenido de **z** en las iteraciones. Para asegurar la factibilidad de la solución, incluye una restricción que iguala la función $f(\Upsilon)$ con el valor de la función dual g evaluada en **z**. Es decir, agregar la siguiente igualdad, donde $\psi = g(z^k)$ representa un parámetro:

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (p_i - c_{ij}^E) y_{ij} = \psi \tag{5.15}$$

La diferencia es normalizada por una constante M y multiplicada por un coeficiente μ para restarle importancia sobre lo que es el objetivo real, es decir, equilibrar la proporción de la oferta con la demanda. Un posible valor de M puede ser el valor máximo de todos los valores óptimos del problema dual para cada iteración.

Problema Maestro Modificado (PMM):

$$\min_{x,z,r,s,y,\lambda,\varepsilon} \sum_{i\in I}(r_i+s_i)+\frac{\varepsilon}{M}\mu \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a: } \frac{\sum_{j\in J} y_{ij}+x_i}{d_i}+r_i-s_i &= 1 && \forall i && (5.17)\\
t &\leq \sum_{i\in I}(p_i-c_i^G)x_i && && (5.18)\\
0\leq x_i &\leq q_i^A && \forall i && (5.19)\\
0\leq z_i &\leq q_i^B && \forall i && (5.20)\\
r_i &\geq 0 && \forall i && (5.21)\\
s_i &\geq 0 && \forall i && (5.22)\\
\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq z_i && \forall i && (5.23)\\
\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq m_j && \forall j && (5.24)\\
y_{ij} &\geq 0 && \forall i,\ \forall j && (5.25)\\
\sum_{k\in K}\lambda_k &= 1 && && (5.26)\\
\lambda_k &\in \{0,1\} && \forall k && (5.27)\\
\varepsilon^k+\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i-c_{ij}^E)y_{ij} &= \sum_{i\in I}\alpha_i^k z_i+\sum_{j\in J}\beta_j^k m_j && \forall k && (5.28)\\
\varepsilon^k &\geq 0 && \forall k && (5.29)\\
\varepsilon &\geq 0 && && (5.30)\\
\varepsilon &\geq \varepsilon^k-(1-\lambda_k)M && \forall k && (5.31)
\end{aligned}$$

Problema Resultante (PR):

$$\min_{x,r,s,y} \sum_{i\in I}(r_i + s_i) \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a: } \frac{\sum_{j\in J} y_{ij} + x_i}{d_i} + r_i - s_i &= 1 && \forall i && (5.33)\\
t &\leq \sum_{i\in I}(p_i - c_i^G)x_i && && (5.34)\\
0 \leq x_i &\leq q_i^A && \forall i && (5.35)\\
r_i &\geq 0 && \forall i && (5.36)\\
s_i &\geq 0 && \forall i && (5.37)\\
\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} &\leq \hat{z}_i && \forall i && (5.38)\\
\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} &\leq m_j && \forall j && (5.39)\\
y_{ij} &\geq 0 && \forall i,\ \forall j && (5.40)\\
\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c_{ij}^E)y_{ij} &= \psi && && (5.41)
\end{aligned}$$

Análogamente se define *PPM*$(\varphi, M) \rightarrow (\chi, \Upsilon)$ para el *Problema Maestro Modificado* como en el primer algoritmo propuesto, y se representará la función objetivo 5.16 por F^*. Mientras que por *PR*$(\varphi, \psi, \hat{z}) \rightarrow (\chi, \Upsilon)$ se entiende el proceso de resolver el *Problema Resultante* para el conjunto de vectores φ, el valor real ψ y el parámetro $\hat{z} = z^k$, que corresponde al valor de z para la última iteración del algoritmo. La estructura de este algoritmo se muestra en el Pseudocódigo 5.2.

Algoritmo 5.2.1 *Algoritmo de penalización de la holgura del nivel inferior (APHNI)*

Paso 1. Inicialización: $\varphi = \emptyset$, $\rho = \infty$, $M = Max\{1,\ D(q_i^B)\}$;
Paso 2. Resolver Problema Maestro Modificado: $PMM(\varphi, M) \rightarrow (\chi^k, \Upsilon^k)$. $\pi = F^*(\chi^k, \Upsilon^k)$;
Paso 3. Encontrar vértice k: $D(z^k) \rightarrow v_k$. $M = Max\{M,\ D(z^k)\}$;
Paso 4. Evaluar función objetivo:

- **Si** $\rho > \pi$ **entonces** $\varphi = \varphi \cup \{v_k\}$, $\rho = \pi$. Regresar al **Paso 2**;
- **Si** $\rho \leq \pi$ **entonces** Ir al **Paso 5**;

Paso 5. Encontrar solución factible: $\psi = D(z_k)$. $PR(\varphi, \psi, \hat{z}) \rightarrow (\chi^*, \Upsilon^*)$. $\pi = F(\chi^*, \Upsilon^*)$;
Reportar: $\pi,\ (\chi^*, \Upsilon^*)$

5.3 Algoritmo híbrido (AH)

El *Algoritmo iterado sobre puntos extremos (AIPE)* por sus características, no puede asegurar que se encuentre un nuevo vértice en cada interación o que ese vértice mejore la solución actual. Una idea intuitiva es utilizar el *Algoritmo de penalización de la holgura del nivel inferior (APHNI)* para superar ese defecto; ya que tiene la ventaja de poder desplazarse en cada iteración por soluciones que no pertenecen a la región inducida, y explorar nuevos vértices que de otra forma no podrían obtenerse.

La idea del *Algoritmo híbrido (AH)* es reproducir los pasos del *Algoritmo iterado sobre puntos extremos (AIPE)*, hasta que se detenga. Una vez que eso ocurre, se introduce una subrutina que resuelve el *Problema Maestro Modificado* y busca un nuevo vértice, y con éste se busca otra solución factible. Si la nueva exploración permite mejorar la función objetivo se continúa con el proceso, hasta que ya no sea posible. El esquema se muestra en el Pseudocódigo 5.3.

Algoritmo 5.3.1 *Algoritmo Híbrido (AH)*

Paso 1. Inicialización: $\varphi = \emptyset,\ \rho = \infty;$

Paso 2. Encontrar vértices iniciales $D(\mathbf{0}) \to v_1.\ D(q_i^B) \to v_2.\ \varphi = \varphi \cup \{v_1, v_2\},\ M = Max\{D(\mathbf{0}),\ D(q_i^B)\};$

Paso 3. Resolver Problema Maestro: $PM(\varphi) \to (\chi^k, \Upsilon^k).\ \pi = F(\chi^k, \Upsilon^k);$

Paso 4. Encontrar vértice k: $D(z^k) \to v_k.\ \varphi = \varphi \cup \{v_k\},\ M = Max\{M,\ D(z^k)\};$

Paso 5. Evaluar función objetivo:

- **Si** $\rho > \pi$ **entonces** Ir al **Paso 6**;
- **Si** $\rho \leq \pi$ **entonces**
  $PMM(\varphi, M) \to (\chi^{k^*}, \Upsilon^{k^*}).\ D(z^{k^*}) \to v_{k^*}.\ \varphi = \varphi \cup \{v_{k^*}\};$
  $PM(\varphi) \to (\chi^k, \Upsilon^k).\ \pi = F(\chi^k, \Upsilon^k).\ D(z^k) \to v_k,\ \varphi = \varphi \cup \{v_k\},\ M = Max\{M,\ D(z^k)\}.$

Paso 6. Reevaluar de la función objetivo:

- **Si** $\rho > \pi$ **entonces** $\rho = \pi$. Regresar al **Paso 3**;
- **Si** $\rho \leq \pi$ **entonces** Pare.

Reportar: $\pi,\ (\chi^k,\ \Upsilon^k)$

5.4 Algoritmo para identificar múltiples óptimos

Debido a las características particulares del problema abordado en esta tesis, pueden existir múltiples soluciones óptimas. Estas son relevantes para la problemática real, debido a que implican diferentes configuraciones de las cantidades producidas por la empresa pública y las empresas privadas, manteniendo el mismo nivel de equilibrio respecto a la demanda, y aseguran diferentes niveles de ganancias de las empresas privadas. Conocer este conjunto de soluciones óptimas dotaría al gobierno de información relevante, no sólo para equilibrar la demanda con la oferta sino también para poder establecer la cantidad de ganancia que podrían obtener en conjunto las empresas privadas.

Matemáticamente esto tiene una complicación. Si bien una solución de un problema de programación binivel lineal ocurre en un vértice de la región inducible y de la región de restricciones; dado que la región inducida de un problema de este tipo, en general, no es convexa, el conjunto de soluciones óptimas cuando no está compuesto de un único elemento, no es necesariamente convexo [10]. Lo cual no permite dar una descripción sencilla en forma analítica del conjunto de soluciones óptimas.

Supongamos que se tiene una solución óptima (o una solución factible suficientemente buena) (χ^*, υ^*) y el valor de la función objetivo $\Theta = F(\chi^*, \upsilon^*)$. Entonces es posible reformular el *Modelo Binivel* como problema lineal de un sólo nivel, nombrado *Reformulación auxiliar*, para obtener otras soluciones factibles con el mismo valor de la función objetivo.

La *Reformulación auxiliar* mantiene las restricciones del líder y del seguidor para que la solución pertenezca a la región de restricciones del problema binivel. Se introduce la igualdad de la función objetivo del nivel superior 5.1 con el valor óptimo Θ encontrado anteriormente. Se coloca la función objetivo del nivel inferior 5.8 como la nueva función objetivo de la *Reformulación auxiliar*, con lo que se asegura que la solución Υ pertenezca al conjunto de reacciones racionales del seguidor. Por último, se incluye una restricción que obliga a la función objetivo a ser menor a cierta cota máxima. Esto tiene el significado económico de encontrar diferentes configuraciones de producción que mantienen el mismo nivel de equilibrio del mercado, pero con diferentes niveles de ganancia para el seguidor.

Reformulación auxiliar

$$\max_{x,z,r,s,y} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c^E_{ij})y_{ij} \tag{5.42}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \sum_{i\in I}(r_i + s_i) = \Theta \tag{5.43}$$

$$\frac{\sum_{j\in J} y_{ij} + x_i}{d_i} + r_i - s_i = 1 \qquad \forall i \tag{5.44}$$

$$t \leq \sum_{i\in I}(p_i - c^G_i)x_i \tag{5.45}$$

$$0 \leq x_i \leq q^A_i \qquad \forall i \tag{5.46}$$

$$0 \leq z_i \leq q^B_i \qquad \forall i \tag{5.47}$$

$$r_i \geq 0 \qquad \forall i \tag{5.48}$$

$$s_i \geq 0 \qquad \forall i \tag{5.49}$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}y_{ij} \leq z_i \qquad \forall i \tag{5.50}$$

$$\sum_{i\in I} b_{ij}y_{ij} \leq m_j \qquad \forall j \tag{5.51}$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,\ \forall j \tag{5.52}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(p_i - c^E_{ij})y_{ij} \leq \iota \tag{5.53}$$

El algoritmo consiste en resolver iterativamente la *Reformulación auxiliar*, actualizando el valor de ι por el valor de la función objetivo 5.42 de la iteración anterior menos un parámetro ε, esto es, $\iota = f(\Upsilon^{k-1}) - \varepsilon$. En la primera iteración se establece que $\iota = \infty$; con lo cual se obtiene no sólo una solución optima al problema binivel, sino que además tiene la característica de ser la solución óptima con la mayor ganancia para el seguidor. Además, debe resaltarse que la posibilidad de encontrar nuevas soluciones dependerá del valor del ε determinado, por lo cual no se puede asegurar que se encuentren todas las soluciones óptimas del problema binivel.

Capítulo 6

Experimentación computacional

6.1 Ambiente computacional

Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora personal modelo Dell Inspiron 5558, con las siguientes características: un procesador Intel(R) Core i3 con una velocidad de 2.10 GHz, 6.00 GB de memoria RAM y sistema operativo Windows 10.

La *Reformulación 2. Holgura complementaria* y la *Reformulación 3. Discretización*, así como todos los algoritmos descritos en el capítulo 5 fueron implementados en Microsoft Visual Studio 2017 en el lenguaje de programación C++, utilizando como optimizador CPLEX 12.7.1. Mientras que, la *Reformulación 1. Dualidad fuerte (no lineal)* fue implementada en AMPL y resuelta con el optimizador Baron 18.5.8.

6.2 Generación de las instancias

Para evaluar el desempeño de las reformulaciones y los algorítmos heurísticos se hicieron comparaciones directas de los resultados obtenidos en cuanto a calidad y tiempo requerido. Las pruebas se hicieron sobre dos conjuntos de instancias. Las instancias de tipo A (aleatorias) fueron creadas de forma aleatoria utilizando rangos arbitrarios que aseguren que el problema sea factible y se pueda resolver, es decir, que el gobierno pueda producir toda la demanda por sí mismo. Por otro lado, las instancias de tipo R (realistas) utilizaron rangos basados en datos reales de la industria petroquímica mexicana.

Se crearon dos grupos de 30 instancias para cada tipo con los siguientes tamaños:

- $|I| = 10$, $|J| = 10$
- $|I| = 25$, $|J| = 25$
- $|I| = 25$, $|J| = 75$
- $|I| = 50$, $|J| = 100$
- $|I| = 75$, $|J| = 125$

- $|I| = 150, |J| = 200$

Para establecer esos tamaños se tomó como referencia el número de unidades econónomicas registradas en la fabricación de productos químicos básicos órganicos por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía en los censos económicos realizados en 1999, 2004, 2009 y 2014. El mayor número de estas unidades fue en 2004 con 159, lo que sirve de límite superior del número de empresas privadas dedicadas a la petroquímica secundaria. En el caso de la cantidad de productos, se consideró el número de productos clasificados como petroquímicos básicos y secundarios por la legislación mexicana en distintos años, lo cual se muestra en la tabla 6.1.

Tabla 6.1: Clasificación de productos petroquímicos

Año de clasificación	Petroquímicos básicos	Petroquímicos secundarios
1960	16	-
1986	34	26
1989	8	13
1992	20	35

Elaboración propia con datos de [1], [7], [8], [9]

En las instancias tipo R, se partió de los datos obtenidos en el compendio estadístico del sector energía de la Secretaría de Energía sobre la demanda, los precios y la capacidad productiva de 47 productos petroquímicos de 1980 a 2002. La demanda d_i se construyó tomando un número aleatorio entre el promedio de las demandas en ese periodo para cada producto i menos su desviación estándar y el promedio de las demandas más su desviación estándar. El precio p_i y la capacidad productiva del gobierno q_i^A se definieron de manera aleatoria entre 1 y el precio máximo o la capacidad máxima de cada producto i, respectivamente.

El costo del gobierno c_i^G se obtuvo como un coeficiente aleatorio entre 0.22 y 0.60 multiplicado por el precio de cada producto i. Estos rangos provienen de la razón entre el costo de ventas y los ingresos totales de PEMEX durante los años 1988-2000, 2011-2013 y 2015-2016.

La utilidad mínima que debe obtener la empresa pública se calculó como el 30% del total de beneficios que obtendría el gobierno si pudiera satisfacer por sí mismo toda la demanda de petroquímicos del mercado.

La capacidad productiva del gobierno q_i^B para las materias primas i se calculó multiplicando el máximo coeficiente de producción de las empresas privadas por la capacidad máxima del gobierno para producir bienes de consumo final. De esta forma, la empresa con mejor tecnología podría igualar la capacidad productiva de la empresa del gobierno para algún producto específico.

Los costos de producción c_{ij}^E de las empresas privadas j corresponden a coeficientes aleatorios en el rango de 0.784 y 0.884 multiplicados por el precio de cada producto i. El rango corresponde a los valores mínimo y máximo de los promedios de la división del costo de ventas sobre los ingresos por año de cinco empresas privadas investigadas que intervienen en el sector petroquímicas: Alpek, Kuo (UEN hule sintético), Kuo (UEN poliestireno), Mexichem y Grupo Pochteca.

Los coeficientes técnicos de producción a_{ij} son números aleatorios entre 0.085 y 2.111, lo cual corresponde a los rangos determinados por el promedio menos la desviación estándar de todas las sustancias petroquímicas consideradas en el informe de la CEPAL [15] y el promedio más la desviación estándar.

Los niveles de producción b_{ij} son números aleatorios entre 1 y 95. El rango inferior es debido a que dichos coeficientes deben ser necesariamente positivos, mientras que el límite superior es igual al promedio de las estimaciones de los niveles de producción de cada sustancia de las plantas petroquímicas de PEMEX, las cuales fueron consideradas individualmente.

Las capacidades productivas m_j de las empresas privadas j son números aleatorios entre $4,665$ y $20,825$, datos provenientes del promedio y la desviación estandar de las capacidades productivas de cinco complejos petroquímicos de PEMEX.

6.3 Resultados

En las tablas 6.2-6.7 y 6.8-6.13, se presentan los tiempos de solución y el valor objetivo obtenido de las tres reformulaciones y los algoritmos heurísticos, para las instancias aleatorias y las realistas, respectivamente. Para todas las instancias probadas, la *Reformulación 2. Holgura complementaria* obtuvo soluciones óptimas del problema binivel, lo cual posteriormente es utilizado para el cálculo de la holgura de optimalidad obtenida por los heurísticos propuestos.

Para la *Reformulación 1. Dualidad fuerte (no lineal)* y la *Reformulación 3. Discretización* se estableció como tiempo máximo $1,000$ segundos CPU. La *Reformulación 2. Holgura complementaria* y los algoritmos heurísticos se ejecutaron sin tiempo límite. En el caso de la *Reformulación 3. Discretización*, se utilizaron únicamente cuatro valores para cada z_i, específicamente el vector $\mathbf{0}$ y los intervalos resultantes de dividir q_i^B entre tres. Con el símbolo "-" se representa el caso en el que después de pararse la ejecución, el optimizador no fue capaz de encontrar una solución factible.

Tabla 6.2: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias de tamaño 10×10

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
A-10x10-1	0	0.23	0	0.08	0	0.59	0	0.06	0.15378	0.11	0	0.06
A-10x10-2	0	0.44	0	0.16	0	0.45	0.18247	0.08	0	0.10	0	0.17
A-10x10-3	0	0.17	0	0.13	0	0.41	0	0.07	0	0.14	0	0.13
A-10x10-4	0	0.63	0	0.11	0	0.45	0	0.09	0	0.11	0	0.09
A-10x10-5	0	0.13	0	0.16	0	0.81	0	0.08	0	0.10	0	0.12
A-10x10-6	0	0.13	0	0.23	0	0.38	0	0.12	0	0.09	0	0.07
A-10x10-7	0	0.23	0	0.14	0	0.95	0	0.09	0	0.10	0	0.06
A-10x10-8	0	0.14	0	0.13	0	0.41	0.02209	0.08	0	0.10	0	0.16
A-10x10-9	0	0.19	0	0.11	0	0.73	0	0.21	0	0.11	0	0.08
A-10x10-10	0	0.27	0	0.08	0	0.02	0	0.07	0	0.11	0	0.07
A-10x10-11	0	1.56	0	0.13	0	0.28	0	0.07	0	0.09	0	0.07
A-10x10-12	0	0.14	0	0.13	0	0.03	0	0.08	0	0.10	0	0.07
A-10x10-13	0	0.28	0	0.16	0	0.55	0	0.07	0	0.10	0	0.07
A-10x10-14	0	0.13	0	0.19	0	0.39	0	0.09	0	0.10	0	0.08
A-10x10-15	0	0.13	0	0.17	0	0.47	0	0.08	0	0.10	0	0.06
A-10x10-16	0	0.14	0	0.14	0	0.42	0	0.07	0	0.11	0	0.12
A-10x10-17	0	0.25	0	0.19	0	0.02	0	0.11	0	0.13	0	0.13
A-10x10-18	0	0.34	0	0.16	0	0.39	0	0.07	0	0.09	0	0.07
A-10x10-19	0	0.22	0	0.09	0.09009	0.42	0	0.12	0	0.16	0	0.08
A-10x10-20	0	0.14	0	0.16	0	0.55	0	0.10	0	0.08	0	0.14
A-10x10-21	0	0.19	0	0.27	0	0.41	0	0.07	0	0.08	0	0.09
A-10x10-22	0	0.17	0	0.13	0	0.70	0	0.07	0.03132	0.10	0	0.07
A-10x10-23	0	0.14	0	0.11	0	0.39	0	0.08	0	0.10	0	0.07
A-10x10-24	0	0.16	0	0.14	0	0.41	0	0.06	0	0.10	0	0.07
A-10x10-25	0	0.28	0	0.13	0	0.50	0	0.08	0	0.10	0	0.07
A-10x10-26	0	0.11	0	0.13	0	0.53	0	0.08	0	0.12	0	0.10
A-10x10-27	0	0.50	0	0.16	0	0.36	0	0.09	0	0.12	0	0.11
A-10x10-28	0	0.14	0	0.19	0	0.39	0	0.10	0	0.14	0	0.13
A-10x10-29	0	0.14	0	0.13	0	0.64	0	0.07	0	0.10	0	0.07
A-10x10-30	0	0.14	0	0.09	0	0.02	0	0.05	0	0.06	0	0.05
Promedio	**0.00000**	**0.26**	**0.00000**	**0.14**	**0.00300**	**0.44**	**0.00682**	**0.08**	**0.00617**	**0.10**	**0.00000**	**0.09**

Tabla 6.3: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias de tamaño 25×25

Instancia	Reformulación 1		Reformulación 2		Reformulación 3		AIPE		APHNI		AH	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
A-25x25-1	0	2.05	0	1.39	0	3.69	0	0.09	0.01453	0.15	0	0.11
A-25x25-2	0	272.05	0	2.50	0	7.31	0	0.13	0.02692	0.15	0	0.12
A-25x25-3	0	2.39	0	0.78	0	11.72	0	0.12	0.02849	0.26	0	0.13
A-25x25-4	0	3.00	0	1.30	0	2.20	0	0.15	0	0.15	0	0.14
A-25x25-5	0	3.77	0	1.47	0	8.59	0	0.07	0	0.08	0	0.07
A-25x25-6	0	5.16	0	0.95	0	4.45	0	0.07	0	0.09	0	0.07
A-25x25-7	0	2.56	0	1.66	0	6.48	0	0.13	0.13280	0.17	0	0.13
A-25x25-8	0	1.95	0	1.45	0	1.13	0	0.07	0	0.09	0	0.07
A-25x25-9	0	5.52	0	1.20	0	13.50	0	0.11	0	0.13	0	0.10
A-25x25-10	0	1.66	0	2.17	0	4.45	0	0.11	0.02264	0.16	0	0.11
A-25x25-11	0	3.17	0	1.38	0	9.95	0	0.12	0	0.16	0	0.11
A-25x25-12	0	3.63	0	1.34	0	1.73	0	0.11	0.11083	0.17	0	0.12
A-25x25-13	0	3.14	0	1.88	0	12.38	0	0.07	0	0.11	0	0.17
A-25x25-14	0	5.72	0	1.20	0	2.77	0	0.12	0.02047	0.17	0	0.11
A-25x25-15	0	1.38	0	0.89	0	12.31	0	0.17	0	0.20	0	0.10
A-25x25-16	0	2.92	0	0.92	0	7.63	0	0.12	0	0.15	0	0.13
A-25x25-17	0	2.30	0	1.92	0	2.48	0	0.08	0	0.08	0	0.08
A-25x25-18	0	7.11	0	1.75	0	2.28	0	0.27	0	0.17	0	0.12
A-25x25-19	0	2.27	0	0.72	0	1.64	0	0.07	0	0.08	0	0.07
A-25x25-20	0	3.28	0	2.00	0	2.06	0	0.10	0	0.12	0	0.13
A-25x25-21	0	1.77	0	1.03	0	27.19	0	0.14	0.10169	0.24	0	0.18
A-25x25-22	0	1.33	0	2.27	0	8.63	0	0.09	0	0.09	0	0.10
A-25x25-23	0	1.61	0	1.61	0	24.16	0	0.12	0.02840	0.15	0	0.12
A-25x25-24	0	2.02	0	1.44	0	1.03	0	0.12	0	0.15	0	0.11
A-25x25-25	0	17.98	0	1.16	0	4.08	0	0.13	0.05881	0.15	0	0.11
A-25x25-26	0	2.09	0	1.64	0	5.66	0	0.07	0	0.08	0	0.08
A-25x25-27	0	3.83	0	1.80	0	2.52	0	0.11	0.07218	0.28	0	0.11
A-25x25-28	0	2.36	0	1.42	0	0.91	0	0.07	0	0.10	0	0.07
A-25x25-29	0.36778	500.13	0	0.95	0	3.38	0	0.11	0	0.16	0	0.11
A-25x25-30	0	2.08	0	0.67	0	7.11	0	0.07	0	0.08	0	0.07
Promedio	**0.01226**	**29.01**	**0.00000**	**1.43**	**0.00000**	**6.78**	**0.00000**	**0.11**	**0.02059**	**0.14**	**0.00000**	**0.11**

Tabla 6.4: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias de tamaño 25×75

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
A-25x75-1	0	10.50	0	3.47	0	1.50	0	0.19	0	0.25	0	0.20
A-25x75-2	0	4.34	0	3.23	0	2.44	0	0.20	0.00713	0.25	0	0.20
A-25x75-3	0	3.59	0	4.23	0	3.27	0	0.10	0	0.12	0	0.11
A-25x75-4	0	22.89	0	3.30	0	5.20	0	0.20	0.04949	0.15	0	0.20
A-25x75-5	0	11.38	0	2.73	0	0.16	0	0.19	0.04303	0.24	0	0.19
A-25x75-6	0	4.03	0	5.50	0	0.20	0	0.10	0	0.11	0	0.10
A-25x75-7	0	7.97	0	3.72	0	2.34	0	0.20	0.03056	0.24	0	0.20
A-25x75-8	0	5.72	0	2.50	0	2.61	0	0.14	0	0.21	0	0.14
A-25x75-9	0	8.25	0	2.45	0	6.55	0	0.19	0.00626	0.23	0	0.20
A-25x75-10	0	4.63	0	3.17	0	0.38	0	0.10	0	0.11	0	0.10
A-25x75-11	0	12.61	0	3.03	0.18015	28.11	0	0.19	0.02573	0.24	0	0.19
A-25x75-12	0	15.86	0	3.16	0	19.19	0	0.21	0.00865	0.27	0	0.19
A-25x75-13	0	10.02	0	2.98	0	4.69	0	0.20	0	0.25	0	0.20
A-25x75-14	0	13.44	0	4.11	0	2.58	0	0.20	0.09289	0.25	0	0.20
A-25x75-15	0	42.52	0	2.91	0	2.06	0	0.19	0.01128	0.22	0	0.19
A-25x75-16	0	7.28	0	3.20	0	3.09	0	0.19	0.06677	0.22	0	0.20
A-25x75-17	0	17.89	0	5.77	0	10.73	0	0.33	0.03634	0.26	0	0.39
A-25x75-18	0	5.89	0	5.02	0	0.25	0	0.19	0	0.24	0	0.18
A-25x75-19	0	7.44	0	3.41	0	9.47	0	0.10	0	0.12	0	0.11
A-25x75-20	0	15.81	0	3.89	0	5.09	0	0.11	0	0.12	0	0.10
A-25x75-21	0	11.34	0	4.98	0	3.22	0	0.21	0.07988	0.22	0	0.22
A-25x75-22	0	16.00	0	2.61	0	1.98	0	0.13	0	0.12	0	0.11
A-25x75-23	0	7.45	0	3.44	0	3.50	0	0.21	0.04617	0.25	0	0.20
A-25x75-24	0	6.31	0	3.05	0	4.86	0	0.21	0	0.25	0	0.20
A-25x75-25	0	10.47	0	5.05	0	2.14	0	0.25	0.02375	0.27	0	0.23
A-25x75-26	0	10.34	0	3.19	0	1.92	0	0.10	0	0.12	0	0.10
A-25x75-27	0	8.06	0	3.20	0	3.06	0	0.11	0	0.12	0	0.11
A-25x75-28	0	9.83	0	3.00	0	16.61	0	0.11	0	0.12	0	0.10
A-25x75-29	0	9.17	0	3.55	0	1.84	0	0.20	0.02886	0.34	0	0.20
A-25x75-30	0	7.05	0	5.73	0	3.45	0	0.18	0	0.25	0	0.20
Promedio	**0.00000**	**10.94**	**0.00000**	**3.65**	**0.00600**	**5.08**	**0.00000**	**0.17**	**0.01856**	**0.20**	**0.00000**	**0.17**

Tabla 6.5: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias de tamaño 50×100

Instancia	Reformulación 1		Reformulación 2		Reformulación 3		AIPE		APHNI		AH	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
A-50x100-1	0	44.38	0	34.17	0	66.45	0	0.19	0	0.25	0	0.20
A-50x100-2	0	26.45	0	29.67	0	40.70	0	0.20	0.00713	0.25	0	0.20
A-50x100-3	0	42.56	0	39.84	0.49487	125.80	0	0.10	0	0.12	0	0.11
A-50x100-4	0	21.25	0	27.89	0	47.52	0	0.20	0.04949	0.15	0	0.20
A-50x100-5	0	38.41	0	34.11	0	47.45	0	0.19	0.04303	0.24	0	0.19
A-50x100-6	0	252.28	0	34.34	0.03034	65.23	0	0.10	0	0.11	0	0.10
A-50x100-7	0	26.75	0	62.83	0	35.17	0	0.20	0.03056	0.24	0	0.20
A-50x100-8	0	113.11	0	32.06	0	55.19	0	0.14	0	0.21	0	0.14
A-50x100-9	0	104.34	0	33.70	0	59.09	0	0.19	0.00626	0.23	0	0.20
A-50x100-10	0	39.72	0	30.14	0	58.36	0	0.10	0	0.11	0	0.10
A-50x100-11	0	74.11	0	33.05	0	8.38	0	0.19	0.02573	0.24	0	0.19
A-50x100-12	0	57.42	0	27.75	0	27.77	0	0.21	0.00865	0.27	0	0.19
A-50x100-13	1.70762	501.30	0	30.36	0	45.14	0	0.20	0	0.25	0	0.20
A-50x100-14	0	91.67	0	30.30	0	45.28	0	0.20	0.09289	0.25	0	0.20
A-50x100-15	0	37.03	0	39.05	0	7.97	0	0.19	0.01128	0.22	0	0.19
A-50x100-16	0	45.92	0	31.77	0	111.36	0	0.19	0.06677	0.22	0	0.20
A-50x100-17	0	121.81	0	25.83	0.05345	80.55	0	0.33	0.03634	0.26	0	0.39
A-50x100-18	0	48.11	0	54.23	0	73.47	0	0.19	0	0.24	0	0.18
A-50x100-19	0	34.41	0	33.98	0	8.53	0	0.10	0	0.12	0	0.11
A-50x100-20	0	30.38	0	36.45	0	48.70	0	0.11	0	0.12	0	0.10
A-50x100-21	0	96.69	0	31.72	0.00001	67.33	0	0.21	0.07988	0.22	0	0.22
A-50x100-22	0	68.28	0	58.11	0	57.58	0	0.13	0	0.12	0	0.11
A-50x100-23	0	40.89	0	39.59	0.44042	80.25	0	0.21	0.04617	0.25	0	0.20
A-50x100-24	0	68.59	0	32.25	0	8.77	0	0.21	0	0.25	0	0.20
A-50x100-25	0	40.28	0	36.78	0	45.67	0	0.25	0.02375	0.27	0	0.23
A-50x100-26	0	21.27	0	37.92	0	19.58	0	0.10	0	0.12	0	0.10
A-50x100-27	0	46.80	0	32.05	0	25.19	0	0.11	0	0.12	0	0.11
A-50x100-28	0	20.73	0	36.94	0	15.20	0	0.11	0	0.12	0	0.10
A-50x100-29	0	28.59	0	33.09	0	58.06	0	0.20	0.02886	0.34	0	0.20
A-50x100-30	0	24.56	0	25.53	0	113.63	0	0.18	0	0.25	0	0.20
Promedio	**0.05692**	**73.60**	**0.00000**	**35.52**	**0.03397**	**51.65**	**0.00000**	**0.17**	**0.01856**	**0.20**	**0.00000**	**0.17**

Tabla 6.6: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias de tamaño 75×125

Instancia	Reformulación 1		Reformulación 2		Reformulación 3		AIPE		APHNI		AH	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
A-75x125-1	-	-	0	109.48	0	103.25	0	1.67	0	2.42	0	2.95
A-75x125-2	0	91.47	0	69.44	0	116.64	0	0.35	0.10797	0.40	0	0.34
A-75x125-3	0	84.66	0	78.36	0	304.47	0	0.41	0.03526	0.52	0	0.42
A-75x125-4	0	117.09	0	94.19	0	22.72	0	0.48	0.11007	0.53	0	0.46
A-75x125-5	0	72.27	0	80.22	0	57.33	0	0.37	0.09663	0.39	0	0.33
A-75x125-6	0	151.97	0	88.83	0	21.55	0	0.42	0.10604	0.45	0	0.39
A-75x125-7	0	88.52	0	62.70	0	178.97	0	0.40	0.04509	0.48	0	0.36
A-75x125-8	0	101.50	0	74.61	0	26.38	0	1.06	0.00603	1.58	0	0.72
A-75x125-9	0	106.94	0	167.27	0	40.14	0	0.80	0	1.38	0	0.68
A-75x125-10	0	223.73	0	97.53	0	18.91	0	0.41	0.09641	0.49	0	0.38
A-75x125-11	0	135.61	0	95.92	0	149.47	0	0.44	0.12595	0.49	0	0.39
A-75x125-12	0	57.27	0	84.53	0	42.14	0	0.41	0.02465	0.48	0	0.38
A-75x125-13	0	98.31	0	72.78	0	30.50	0	0.51	0.06017	0.57	0	0.43
A-75x125-14	0	123.89	0	75.77	0	17.13	0	0.57	0	1.08	0	0.66
A-75x125-15	0	89.13	0	98.38	0.07835	219.53	0	0.39	0.04346	0.42	0	0.42
A-75x125-16	0	56.81	0	99.61	0	36.94	0	0.60	0.04924	0.54	0	0.54
A-75x125-17	0	133.25	0	129.56	0	71.17	0	0.59	0.00718	0.61	0	0.50
A-75x125-18	0	76.19	0	78.11	0	23.91	0	0.48	0.05583	0.45	0	0.37
A-75x125-19	0	141.98	0	78.48	0	17.95	0	0.59	0.14957	0.79	0	0.57
A-75x125-20	0	101.31	0	67.05	0	20.66	0	0.52	0.03152	0.49	0	0.41
A-75x125-21	0	214.77	0	74.66	0	201.22	0	0.42	0.06349	0.51	0	0.41
A-75x125-22	0	226.31	0	169.25	0	213.52	0	0.86	0	1.55	0	0.72
A-75x125-23	0	76.55	0	88.75	0	129.69	0	0.92	0.79983	1.66	0	0.84
A-75x125-24	0	100.61	0	91.91	0	20.39	0	0.77	0.04397	0.69	0	0.72
A-75x125-25	-	-	0	78.39	0	16.86	0	0.91	0	0.95	0	0.66
A-75x125-26	0	67.98	0	81.83	0	230.67	0	0.64	0.10593	0.72	0	0.60
A-75x125-27	0	97.78	0	102.42	0	20.48	0	0.38	0.13056	0.49	0	0.38
A-75x125-28	0	223.67	0	72.19	0	24.14	0	0.43	0.08092	0.54	0	0.43
A-75x125-29	0	59.55	0	72.77	0	146.52	0	0.38	0.10829	0.45	0	0.37
A-75x125-30	0	206.08	0	79.44	0	49.95	0	0.82	0.09365	0.70	0	0.38
Promedio	**0.00000**	**118.76**	**0.00000**	**90.48**	**0.00261**	**85.77**	**0.00000**	**0.60**	**0.08592**	**0.76**	**0.00000**	**0.57**

Tabla 6.7: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias de tamaño 150×200

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
A-150x200-1	0	445.20	0	216.94	0	90.59	0	1.64	0.14093	1.79	0	1.64
A-150x200-2	0	501.31	0	118.06	0	38.05	0	2.35	0.20318	2.38	0	1.75
A-150x200-3	0	501.30	0	164.41	0	64.17	0	1.62	0.28081	1.63	0	1.61
A-150x200-4	0	191.92	0	208.42	0	98.73	0	1.60	0.23282	1.59	0	1.43
A-150x200-5	0	87.89	0	164.28	0	221.20	0	1.46	1.53583	1.50	0	1.33
A-150x200-6	0	501.30	0	152.69	0	34.36	0	1.54	0.17926	1.57	0	1.44
A-150x200-7	0	313.67	0	186.72	0	35.23	0	1.55	0.20316	1.58	0	1.50
A-150x200-8	0	501.34	0	115.70	0	40.58	0	1.60	0.44346	1.57	0	1.52
A-150x200-9	-	-	0	149.98	0	34.70	0	2.06	0.18154	1.73	0	1.49
A-150x200-10	0	501.44	0	133.11	0	21.19	0	1.47	0.25914	1.62	0	1.35
A-150x200-11	0	498.97	0	141.33	0	132.38	0	1.90	0.87788	2.34	0	3.06
A-150x200-12	0	501.39	0	122.53	0	84.41	0	1.47	0.26044	1.50	0	1.34
A-150x200-13	0	180.80	0	129.00	0	96.66	0	1.55	0.24704	1.69	0	1.48
A-150x200-14	17.2436	502.39	0	188.81	0	29.92	0	2.67	0.26963	2.06	0	1.63
A-150x200-15	0	369.53	0	166.33	0	36.63	0	2.15	2.98784	1.93	0	1.87
A-150x200-16	0	501.33	0	191.22	0	45.20	0	1.62	0.14698	1.66	0	1.53
A-150x200-17	1.1799	503.23	0	167.73	0	56.91	0	3.92	0.12530	1.86	0	1.61
A-150x200-18	0	501.56	0	280.73	0	36.97	0	1.49	0.11434	1.53	0	1.41
A-150x200-19	0	206.81	0	158.36	0	28.80	0	1.60	0.27911	1.57	0	1.37
A-150x200-20	0	502.42	0	141.28	0	96.11	0	1.64	0.25584	1.71	0	1.56
A-150x200-21	0	504.00	0	189.42	0	56.05	0	2.15	0.19771	2.33	0	2.01
A-150x200-22	0	483.91	0	87.66	0	29.52	0	1.57	0.08702	1.61	0	1.44
A-150x200-23	29.6156	502.95	0	600.33	0	30.08	0	1.47	0.17239	1.55	0	1.36
A-150x200-24	0	167.97	0	84.30	0	54.08	0	1.59	0.21532	1.61	0	1.52
A-150x200-25	0	502.17	0	158.42	0	33.14	0	1.70	1.14758	1.79	0	1.59
A-150x200-26	0	400.56	0	136.52	0	44.83	0	1.61	1.46026	1.82	0	1.49
A-150x200-27	0	502.39	0	186.03	0	87.69	0	1.48	0.10911	1.58	0	1.35
A-150x200-28	0	391.36	0	153.42	0	72.91	0	1.47	0.36689	1.51	0	1.37
A-150x200-29	0	502.02	0	166.72	0	34.78	0	1.94	0.18153	1.85	0	1.71
A-150x200-30	0	250.91	0	743.98	0	46.13	0	1.51	0.13589	1.64	0	1.40
Promedio	**1.65652**	**414.55**	**0.00000**	**193.48**	**0.00000**	**60.40**	**0.00000**	**1.78**	**0.44327**	**1.74**	**0.00000**	**1.57**

Tabla 6.8: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas de tamaño 10×10

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
R-10x10-1	1.8580	500.11	1.8580	0.34	2.9215	1.67	2.24454	0.23	1.9989	0.16	1.87450	0.55
R-10x10-2	0	0.83	0	0.09	0.3066	1.38	0.19282	0.16	0	0.16	0	0.35
R-10x10-3	0	3.25	0	0.09	0.2500	2.16	0.20063	0.09	0	0.32	0	0.26
R-10x10-4	1.0722	5.28	1.0722	0.09	1.5028	1.38	1.07222	0.16	1.0722	0.10	1.07222	0.38
R-10x10-5	0.8652	500.20	0.8504	0.27	2.6469	1.66	0.86518	1.76	1.1346	0.36	0.86518	2.60
R-10x10-6	0	9.05	0	0.17	0.0847	2.31	0.31856	0.17	0.5180	0.11	0	0.30
R-10x10-7	0.6866	500.14	0.6866	0.14	1.3385	1.61	0.78640	0.14	0.6866	0.18	0.68661	0.29
R-10x10-8	0	1.84	0	0.13	0	0.66	0.59622	0.17	0.1733	0.11	0	0.53
R-10x10-9	0.6698	500.20	0.6698	0.34	1.1631	1.88	0.66979	0.55	1.2147	0.13	0.66979	0.62
R-10x10-10	0.2540	17.13	0.2540	0.14	1.0535	0.77	0.25397	0.26	0.2540	0.15	0.25397	0.30
R-10x10-11	0.4701	500.16	0.4701	0.42	1.0031	3.20	0.54369	0.25	1.6050	0.23	0.47012	0.36
R-10x10-12	0.8000	21.16	0.8000	0.14	1.0388	2.44	1.41047	0.09	0.9702	0.25	0.82657	0.42
R-10x10-13	0.6848	500.11	0.6791	0.16	1.1426	2.25	0.68477	0.16	0.7799	0.10	0.68477	0.24
R-10x10-14	0.6749	500.17	0.4485	0.09	0.9938	1.72	1.42049	0.08	0.6749	0.11	0.67493	0.23
R-10x10-15	0.1963	500.20	0.1963	0.33	0.7408	3.25	0.25247	0.17	0.2123	0.18	0.19633	0.34
R-10x10-16	0.4417	6.05	0.4417	0.06	2.2849	1.94	0.94794	0.08	0.4417	0.10	0.44174	0.27
R-10x10-17	0.1833	500.14	0.0354	0.17	0.7424	1.03	0.62021	0.12	1.9108	0.15	0.25983	0.29
R-10x10-18	0.7689	500.06	0.7603	0.11	1.0688	3.08	1.33868	0.07	3.6766	0.10	0.76887	0.25
R-10x10-19	1.8839	500.14	0.7146	0.11	1.0384	1.45	0.71456	0.08	1.8975	0.10	0.71456	0.13
R-10x10-20	1.0114	2.73	1.0114	0.05	1.7193	0.36	1.01138	0.14	1.0114	0.11	1.01138	0.20
R-10x10-21	0	1.61	0	0.08	0.7833	1.52	0.19628	0.08	0	0.10	0	0.18
R-10x10-22	0.8232	500.14	0.8132	0.22	1.6366	3.39	1.20901	0.09	0.8284	0.14	0.82321	0.50
R-10x10-23	0.8749	71.44	0.8749	0.22	1.9465	1.52	1.11677	0.23	1.0981	0.11	0.87485	0.37
R-10x10-24	0.6072	500.17	0.6072	0.16	1.9217	1.36	1.15625	0.17	0.6313	0.22	0.60725	0.35
R-10x10-25	0.3355	3.34	0.3355	0.16	0.5404	1.92	0.33554	0.13	0.3355	0.18	0.33554	0.17
R-10x10-26	0.0167	500.14	0	0.19	0.7790	0.94	0.01673	0.44	0.0167	0.18	0.01673	0.32
R-10x10-27	0.2609	500.14	0.2211	0.42	1.5292	1.66	1.17414	0.11	0.2278	0.21	0.22426	0.53
R-10x10-28	1.3781	12.80	1.3781	0.13	1.8736	0.56	1.60414	0.24	1.3781	0.14	1.37809	0.47
R-10x10-29	0	3.66	0	0.14	0.5458	1.30	0	0.28	0	0.21	0	0.22
R-10x10-30	0	4.33	0	0.11	0.4267	2.97	0.27989	0.10	0	0.11	0	0.18
Promedio	**0.56059**	**255.56**	**0.50595**	**0.18**	**1.16745**	**1.78**	**0.77446**	**0.23**	**0.8249**	**0.16**	**0.52438**	**0.41**

Tabla 6.9: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas de tamaño 25×25

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
R-25x25-1	5.89146	500.20	1.24885	2.16	5.00487	23.25	1.47337	0.56	1.40883	0.13	1.24885	1.01
R-25x25-2	11.27360	500.30	1.32583	2.03	4.83813	786.41	2.23217	0.19	1.57012	0.33	1.57012	1.06
R-25x25-3	8.28643	500.22	2.08249	0.95	5.41233	45.22	2.79348	0.14	2.22014	0.41	2.11221	0.44
R-25x25-4	27.10320	500.42	0.71140	1.64	2.64678	33.75	0.75434	0.13	0.71140	0.23	0.71140	0.40
R-25x25-5	10.02710	500.28	2.11494	0.86	4.70915	133.38	3.02167	0.15	2.11494	0.25	2.11494	0.46
R-25x25-6	27.71790	500.23	0.73211	3.42	2.84746	38.25	1.78110	0.16	1.02446	0.42	0.76095	0.56
R-25x25-7	5.96093	500.20	0.80768	0.70	3.58940	67.41	0.81044	0.13	0.82213	0.23	0.80768	0.37
R-25x25-8	5.14820	500.16	0.33333	0.72	2.59170	33.55	0.83411	0.20	0.33333	0.30	0.33333	0.48
R-25x25-9	46.69850	500.33	1.03877	1.13	2.30217	62.03	1.67784	0.41	1.03877	0.36	1.03877	0.74
R-25x25-10	7.96789	500.33	0.75968	2.05	4.26904	105.78	1.30804	0.66	0.83769	0.23	0.83769	1.09
R-25x25-11	4.80716	500.19	0.91693	0.41	3.78253	107.05	1.00070	0.42	0.91693	0.22	0.91693	0.90
R-25x25-12	12.63720	500.25	0.87500	1.34	3.32275	48.17	1.04933	0.13	0.87500	0.21	0.87500	0.38
R-25x25-13	9.24229	500.13	1.98928	0.36	5.47034	23.19	2.41371	0.19	2.04194	0.24	1.98928	0.46
R-25x25-14	44.58090	500.31	0.40799	1.27	3.32966	35.61	0.60433	0.98	0.44259	0.16	0.44259	1.47
R-25x25-15	2.26182	500.30	0.95086	1.50	5.64291	227.38	1.13489	0.32	0.95244	0.23	0.95240	0.90
R-25x25-16	5.36897	500.23	0	2.50	3.44187	98.94	0.10765	0.38	0	1.73	0	0.64
R-25x25-17	16.28490	500.23	0.28263	2.80	2.63467	200.81	1.18000	0.22	0.28263	0.41	0.28263	0.89
R-25x25-18	3.14645	500.27	2.59652	1.42	5.33528	18.20	4.16553	0.31	2.60937	0.49	2.60566	1.34
R-25x25-19	2.05158	500.17	0.96838	2.08	3.85728	211.88	1.44895	0.22	1.77736	0.30	1.00974	0.64
R-25x25-20	20.50000	500.30	1.04645	1.70	4.82539	61.47	1.42111	0.24	1.04645	0.67	1.04645	0.68
R-25x25-21	13.41630	500.38	1.66665	1.89	6.01161	25.09	1.72174	0.54	3.41627	0.25	1.66959	0.71
R-25x25-22	28.39420	500.31	0.74373	2.27	3.51327	139.03	1.31217	0.32	0.74373	0.27	0.74373	0.72
R-25x25-23	11.55560	500.20	1.31346	2.27	3.49630	105.95	2.28757	0.15	1.32707	0.34	1.32707	0.63
R-25x25-24	13.08000	500.23	1.93737	2.53	3.65259	31.03	3.21169	0.17	2.16568	0.29	1.93737	0.54
R-25x25-25	5.69675	500.16	0	2.06	4.44557	180.20	0.64278	0.32	0	0.26	0	0.63
R-25x25-26	30.35220	500.33	0.67754	3.75	4.07079	68.94	0.92683	0.22	0.72614	0.34	0.67754	0.58
R-25x25-27	5.09217	500.20	0	2.31	2.07210	47.78	1.91418	0.23	0	0.23	0	0.65
R-25x25-28	30.71760	500.27	0	1.78	1.85604	384.17	0.00800	0.52	0	0.22	0	0.72
R-25x25-29	7.98240	500.25	0.81245	0.75	2.40699	192.27	1.13778	0.31	0.91419	0.23	0.81245	0.62
R-25x25-30	3.51992	500.34	1.65373	5.08	3.28176	403.30	2.73520	0.13	2.81158	0.45	1.76482	0.53
Promedio	**14.22545**	**500.26**	**0.99980**	**1.86**	**3.82202**	**131.32**	**1.57036**	**0.30**	**1.17104**	**0.35**	**1.01964**	**0.71**

Tabla 6.10: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas de tamaño 25×75

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
R-25x75-1	4.09640	500.42	0.60013	7.70	4.78375	84.83	1.44809	0.29	0.61424	0.54	0.60811	1.20
R-25x75-2	6.00244	500.39	0	3.78	2.79713	38.27	0.52819	0.31	0	0.39	0	0.58
R-25x75-3	1.91762	500.63	0.33509	6.05	3.98888	49.25	0.33509	0.21	0.33509	0.58	0.33509	0.30
R-25x75-4	6.28042	500.30	1.43641	4.23	5.69170	34.13	1.68920	0.47	1.45926	0.50	1.45922	1.18
R-25x75-5	6.74454	500.84	0	7.02	3.46642	36.80	0.71489	0.46	0.17997	0.29	0.17997	1.30
R-25x75-6	2.92744	500.28	1.03389	5.70	5.60744	28.83	2.77294	0.25	1.15445	0.25	1.11898	0.80
R-25x75-7	14.84280	500.31	1.20022	4.70	4.84920	73.80	1.72971	0.33	1.20022	0.35	1.20022	0.81
R-25x75-8	68.10200	500.55	0	5.03	4.65959	52.61	0	0.61	0	0.38	0	0.59
R-25x75-9	1.96756	500.47	0	5.58	2.40124	49.73	0.01554	0.43	0	0.38	0	0.82
R-25x75-10	2.59637	500.38	1.67678	2.98	4.43869	27.00	1.76175	0.99	1.67678	0.21	1.67678	1.65
R-25x75-11	5.10053	500.31	0	4.84	2.20656	52.89	0.48485	0.25	0	0.54	0	0.52
R-25x75-12	1.86605	500.80	0	3.38	3.06360	43.89	0.98683	0.54	0	0.57	0	0.88
R-25x75-13	3.23722	500.23	0.598	2.25	4.20712	81.80	0.93983	0.73	0.67262	0.24	0.67262	1.71
R-25x75-14	1.34266	500.22	0	2.06	2.51393	12.80	0.13008	0.75	0.02059	0.39	0	1.22
R-25x75-15	67.85680	500.91	0.97959	3.36	3.35312	42.53	1.98914	0.26	0.98865	0.40	0.97959	0.75
R-25x75-16	33.09680	500.66	0.72917	4.83	3.67204	46.48	0.72917	0.95	0.74023	0.40	0.72917	1.21
R-25x75-17	8.40060	500.56	0.05816	4.88	2.72411	14.42	0.66738	0.26	0.16414	0.33	0.10124	1.49
R-25x75-18	61.97970	500.52	0.12409	2.86	2.81464	50.72	0.50797	0.63	0.12409	0.35	0.12409	1.22
R-25x75-19	2.21211	500.36	0	2.72	4.23394	45.63	0	0.35	0	0.34	0	0.35
R-25x75-20	21.56510	500.45	0.63789	6.58	5.52097	36.64	0.75444	0.21	0.63789	0.31	0.63789	0.61
R-25x75-21	0.73718	500.58	0	2.84	4.56878	61.59	0.19932	0.25	0	0.27	0	0.57
R-25x75-22	1.99111	500.25	0.57991	3.08	3.12969	151.97	0.57991	0.19	0.57991	0.38	0.57991	0.36
R-25x75-23	7.47514	500.48	0.17166	5.28	5.66431	13.55	1.50964	0.23	0.32660	0.36	0.17166	0.78
R-25x75-24	6.34334	500.23	0.86089	4.69	3.66140	38.19	2.11275	0.25	0.92952	0.42	0.92952	0.85
R-25x75-25	5.01102	500.44	0.49871	4.17	3.98915	17.73	0.90652	0.40	0.51522	0.25	0.51522	1.31
R-25x75-26	14.95680	500.64	2.03752	2.13	6.98670	27.25	2.76321	0.41	2.29595	0.20	2.21672	1.09
R-25x75-27	1.80160	500.25	0.55635	3.81	3.62047	51.03	1.00143	0.78	0.55635	0.36	0.55635	1.69
R-25x75-28	4.54328	500.58	1.50636	2.98	5.75281	20.28	2.06133	1.36	1.50685	0.24	1.50685	1.95
R-25x75-29	2.97935	500.30	0.19060	7.53	4.03239	52.50	1.04189	0.58	0.26584	1.23	0.26584	1.59
R-25x75-30	5.07558	500.36	0	3.81	3.08401	60.55	0.38220	0.56	0	0.35	0	1.37
Promedio	**12.43499**	**500.46**	**0.52705**	**4.36**	**4.04946**	**46.59**	**1.02478**	**0.48**	**0.56481**	**0.39**	**0.55217**	**1.02**

Tabla 6.11: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas de tamaño 50×100

Instancia	Reformulación 1		Reformulación 2		Reformulación 3		AIPE		APHNI		AH	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
R-50x100-1	-	-	2.06704	50.16	10.1283	781.05	3.65157	1.67	2.06704	1.44	2.06704	3.03
R-50x100-2	97.99000	500.61	0.75666	26.05	7.46212	306.22	1.03442	1.39	0.75666	1.19	0.79066	3.30
R-50x100-3	-	-	3.35988	57.84	8.72120	478.38	5.20423	0.80	3.49646	0.58	3.39315	3.46
R-50x100-4	423.27000	631.05	1.38636	44.16	9.61425	2000.25	2.01954	3.11	1.62977	1.29	1.62977	7.09
R-50x100-5	-	-	1.08604	105.92	8.07367	2000.13	1.77265	2.58	1.09103	0.79	1.09103	4.83
R-50x100-6	98.12590	500.86	0.63474	61.34	9.58843	339.64	1.20208	3.43	0.63474	1.47	0.63474	7.44
R-50x100-7	-	-	1.57740	46.13	9.86201	1711.77	3.22452	3.46	1.92563	1.45	1.57740	6.86
R-50x100-8	114.54600	500.55	0	35.34	6.09315	172.53	0.28224	7.25	0	2.78	0	7.54
R-50x100-9	283.39000	500.66	0.9634	63.38	8.29434	356.98	1.44288	5.49	0.97968	0.97	0.97968	10.36
R-50x100-10	354.06300	500.44	2.00208	37.14	7.34354	632.14	2.55015	0.86	2.11737	0.81	2.11737	3.61
R-50x100-11	495.62200	500.50	1.34783	49.48	12.9279	1328.09	1.34783	5.27	1.36203	1.26	1.34783	6.08
R-50x100-12	75.41750	500.61	0	40.05	8.15863	1382.33	1.40558	1.42	0.13144	1.73	0	2.21
R-50x100-13	66.35870	500.56	0.48514	94.20	11.4436	534.63	1.95612	2.75	0.48514	2.03	0.48514	12.05
R-50x100-14	110.18600	500.53	0.04329	68.13	7.56455	420.50	1.05016	0.85	0.04329	1.37	0.04329	2.30
R-50x100-15	423.79400	896.77	1.72323	70.73	9.52281	2000.25	2.48139	2.48	1.72323	0.67	1.72323	5.11
R-50x100-16	438.00400	500.69	0.29476	44.20	10.2604	257.67	0.39528	0.98	0.31539	1.18	0.31539	4.08
R-50x100-17	-	-	1.95173	25.78	7.38062	238.83	2.34419	0.87	1.99343	1.19	1.99343	4.32
R-50x100-18	75.85080	500.63	3.21941	60.92	7.60790	1893.81	4.92223	1.40	3.60243	0.56	3.26912	4.22
R-50x100-19	-	-	0.16757	28.44	4.81403	163.05	2.11385	0.93	0.16757	0.77	0.16757	2.78
R-50x100-20	171.56200	500.59	0.12877	57.50	10.0383	903.72	0.52554	2.07	0.14566	1.25	0.14566	4.92
R-50x100-21	284.69500	500.61	0	35.58	6.16143	1065.30	0.63604	2.94	0	0.88	0	5.24
R-50x100-22	394.40700	500.59	1.33083	34.19	8.72016	281.08	2.66656	2.07	1.59571	1.05	1.59571	4.51
R-50x100-23	228.42400	500.48	0	60.30	7.89570	560.52	0.58789	0.99	0	0.61	0	1.80
R-50x100-24	228.84500	1312.05	0.97297	37.20	6.83478	361.94	1.59338	6.54	0.97297	1.02	1.01369	8.82
R-50x100-25	2.87177	500.88	0.50003	27.48	4.80642	124.27	1.25869	3.77	0.50003	0.81	0.50003	6.51
R-50x100-26	94.48650	500.64	1.24908	42.03	8.00286	171.19	3.44977	1.70	1.42292	1.12	1.42292	4.20
R-50x100-27	47.05790	500.73	2.04569	50.13	12.10700	2000.59	3.05517	1.86	2.15072	1.25	2.15072	6.29
R-50x100-28	90.67510	500.64	0.58195	82.44	7.99727	356.20	1.22494	0.67	0.58195	1.20	0.58195	2.36
R-50x100-29	-	-	0.00276	64.52	10.0007	2000.17	2.12177	0.82	0.04177	0.92	0.04177	6.65
R-50x100-30	269.35700	500.67	1.65337	93.86	9.47941	2000.17	3.71952	1.26	2.01837	0.59	1.65337	3.38
Promedio	**211.69562**	**558.80**	**1.05107**	**53.15**	**8.56352**	**894.11**	**2.04134**	**2.39**	**1.13175**	**1.14**	**1.09106**	**5.18**

Tabla 6.12: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas de tamaño 75×125

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
R-75x125-1	374.39800	500.81	1.71610	219.61	15.01	2000.22	2.15240	7.70	1.91172	2.36	1.76198	14.77
R-75x125-2	-	-	1.31465	207.38	11.84	1877.03	1.80979	9.64	1.41793	2.19	1.38141	40.37
R-75x125-3	-	-	2.53629	302.28	12.6625	2000.17	3.35493	1.49	2.54434	2.44	2.54123	10.59
R-75x125-4	-	-	1.08409	242.78	14.4271	2000.16	1.57994	10.22	1.33812	6.36	1.32967	19.24
R-75x125-5	-	-	1.00580	465.83	10.9431	2000.39	1.80046	8.31	1.21565	5.00	1.20660	22.53
R-75x125-6	-	-	1.03876	296.47	13.3844	2000.19	1.51789	8.15	1.03876	1.80	1.03876	13.90
R-75x125-7	-	-	1.59792	281.06	10.7237	2000.20	1.60406	24.82	1.60406	6.81	1.60406	27.88
R-75x125-8	147.27000	501.28	0.81768	292.61	12.1921	2000.31	1.81218	3.76	0.88462	4.87	0.87244	19.86
R-75x125-9	440.22700	501.28	2.34563	274.69	14.9434	2000.28	2.95915	6.83	2.51361	3.36	2.51361	14.45
R-75x125-10	813.53600	501.02	0.93750	332.06	10.7925	590.56	1.37968	7.83	0.93750	3.52	0.93750	14.74
R-75x125-11	556.66300	500.95	3.18036	351.97	12.4618	2000.27	3.74657	9.43	3.29665	1.65	3.17919	20.41
R-75x125-12	-	-	0.60859	286.00	10.3977	2000.38	2.01581	4.70	2.08721	1.26	0.60859	8.19
R-75x125-13	204.13100	501.20	1.06552	290.05	14.9693	2000.23	1.47233	10.83	1.20819	1.26	1.20819	28.67
R-75x125-14	-	-	1.76034	180.80	12.3376	2000.27	2.00895	20.22	1.85826	2.32	1.78633	45.83
R-75x125-15	-	-	3.48274	386.81	15.0515	2000.31	6.13988	1.60	3.48583	13.67	3.48274	16.98
R-75x125-16	-	-	2.96232	158.16	18.2641	2000.45	4.06199	5.93	3.01321	3.01	3.01300	16.23
R-75x125-17	366.01800	501.27	0.16393	141.34	10.2346	2001.17	0.24005	8.94	0.24005	1.96	0.24005	19.13
R-75x125-18	242.02600	501.45	2.32678	324.75	13.3747	2000.17	2.95314	14.25	2.50108	3.08	2.39943	39.51
R-75x125-19	696.31700	501.27	0.83333	183.59	9.51547	2000.42	3.65818	2.46	0.83372	3.13	0.83372	16.10
R-75x125-20	290.61400	501.00	0	65.70	8.17903	2000.34	1.39596	4.20	0	1.90	0	6.30
R-75x125-21	715.00900	501.59	1.67326	364.80	14.2524	2000.47	2.27540	13.22	1.95919	14.16	1.9592	33.10
R-75x125-22	279.69700	500.88	1.30008	328.48	12.7701	1577.88	2.38486	1.48	4.22799	0.90	1.3001	5.85
R-75x125-23	-	-	0.78214	192.80	9.56851	902.05	1.09738	1.94	0.94563	3.08	0.9456	12.93
R-75x125-24	618.61500	501.28	3.46936	319.33	15.2063	2000.28	5.18133	6.78	3.61929	1.40	3.6321	19.00
R-75x125-25	366.12700	500.98	1.10084	376.75	16.2866	2000.19	1.17510	18.73	1.10593	2.65	1.1008	37.95
R-75x125-26	616.12500	502.61	1.98326	241.81	14.6763	2000.33	2.22903	11.84	2.24348	3.46	2.2290	14.86
R-75x125-27	267.81100	501.23	2.38208	160.64	16.2776	2000.27	2.86891	8.72	2.51457	3.08	2.5106	16.84
R-75x125-28	-	-	0.82222	256.53	13.8221	2000.34	2.70350	7.29	0.92283	5.48	0.9228	23.29
R-75x125-29	303.30200	501.11	0.60359	220.20	10.6339	2000.20	0.97131	16.38	0.60359	2.41	0.6036	24.51
R-75x125-30	462.60600	501.17	1.49245	321.41	11.9906	2000.25	1.62156	8.91	2.25116	1.87	1.4925	16.55
Promedio	**431.13844**	**501.24**	**1.54625**	**268.89**	**12.90630**	**1898.53**	**2.33906**	**8.89**	**1.81081**	**3.68**	**1.62116**	**20.69**

Tabla 6.13: Valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas de tamaño 150×200

Instancia	**Reformulación 1**		**Reformulación 2**		**Reformulación 3**		**AIPE**		**APHNI**		**AH**	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
R-150x200-1	-	-	2.41722	3341.75	44.90850	2001.02	2.46934	160.80	2.49022	11.16	2.46934	174.89
R-150x200-2	-	-	2.06746	4287.25	34.24300	2000.56	2.12453	96.57	2.19475	8.78	2.12453	125.83
R-150x200-3	-	-	4.40332	1405.06	309.09600	2000.36	4.68745	94.34	4.85709	9.09	4.68745	109.02
R-150x200-4	-	-	3.85659	3245.16	72.91700	2000.55	3.94358	95.48	4.34695	7.41	3.94358	111.25
R-150x200-5	-	-	2.19470	1420.30	35.93120	2000.20	3.23175	14.78	2.67958	7.75	2.22567	66.71
R-150x200-6	-	-	0.91330	2751.23	38.57320	2000.66	0.91834	184.40	0.91834	8.16	0.91834	200.01
R-150x200-7	-	-	3.47624	2925.22	419.77700	2000.30	4.17167	102.84	4.25976	29.58	3.79882	171.35
R-150x200-8	-	-	2.13692	3111.61	36.42240	2000.67	2.44086	136.55	18.58300	43.08	2.20729	220.29
R-150x200-9	-	-	2.00789	4854.84	31.98880	2000.61	3.48690	38.98	2.43496	9.04	2.27696	91.37
R-150x200-10	-	-	2.94266	2076.50	520.81100	2000.25	3.66402	41.02	3.32456	12.61	3.66402	49.86
R-150x200-11	-	-	1.06885	1633.47	38.11500	2000.31	1.96836	101.23	1.15430	10.56	1.13153	181.68
R-150x200-12	-	-	3.38819	5053.45	38.24480	2000.66	4.88016	32.64	6.50678	6.92	3.55297	127.70
R-150x200-13	-	-	3.47243	1975.83	459.20300	2000.34	5.40003	17.18	3.78429	5.33	3.49852	52.11
R-150x200-14	-	-	3.84627	1490.59	420.92400	2000.72	4.21769	46.87	3.96447	4.45	3.84627	71.16
R-150x200-15	-	-	3.72368	1466.97	201.46000	2000.30	4.13224	28.60	5.18427	8.17	3.83566	84.39
R-150x200-16	-	-	6.70522	6592.55	32.42020	2000.48	7.65016	50.61	6.89852	26.16	6.83941	85.96
R-150x200-17	-	-	4.07613	1212.44	33.27480	2000.50	6.64272	18.64	4.44374	41.15	4.43140	67.62
R-150x200-18	-	-	6.32885	2993.58	118.98300	2000.66	6.41341	32.92	9.77437	10.98	6.41341	42.86
R-150x200-19	-	-	2.81911	3185.02	37.65000	2000.30	3.66137	24.32	2.94108	6.75	2.84901	73.76
R-150x200-20	-	-	4.51829	1154.23	35.46510	2000.36	5.69412	13.87	4.69292	8.76	4.68860	58.59
R-150x200-21	-	-	0.77041	4768.11	217.12400	2000.55	1.31036	58.50	0.78597	8.26	0.77959	112.26
R-150x200-22	-	-	3.08359	2558.58	286.12500	2000.47	3.47086	30.05	3.44113	10.14	3.46498	71.44
R-150x200-23	-	-	3.52257	2859.95	36.76240	2000.42	5.31728	26.72	22.73770	4.78	3.64376	61.20
R-150x200-24	-	-	3.96395	468.88	35.92990	2000.23	5.26234	95.79	6.58042	8.10	4.08536	241.76
R-150x200-25	-	-	1.57415	2417.69	172.91500	2000.70	2.33876	41.41	2.04685	4.55	2.01595	178.58
R-150x200-26	-	-	3.94302	2239.72	32.28220	2000.31	4.28904	106.83	4.28904	7.58	4.28904	125.35
R-150x200-27	-	-	3.83712	1512.63	36.03280	2000.52	4.08275	33.00	4.02471	8.72	3.93380	58.25
R-150x200-28	-	-	3.11795	1337.83	492.76800	2000.64	3.28326	59.84	3.12084	7.04	3.12084	138.65
R-150x200-29	-	-	3.00807	2393.92	37.15190	2000.25	3.25209	63.84	3.19011	16.39	3.14276	185.83
R-150x200-30	-	-	5.18926	5905.95	44.28110	2000.64	9.46244	5.86	5.45293	10.41	5.42295	27.85
Promedio	**-**	**-**	**3.27911**	**2754.68**	**145.05934**	**2000.48**	**4.12893**	**61.82**	**5.03679**	**12.06**	**3.44339**	**112.25**

De las tablas anteriores (6.2)-(6.13) puede apreciarse que debido a la complejidad computacional, la *Reformulación 1* y la *Reformulación 3* no siempre lograron resolver los problemas a optimalidad en el tiempo máximo definido. En particular, las instancias del tipo R parecen ser más difíciles de resolver. Es importante notar que los valores óptimos de todas las instancias se obtienen mediante la *Reformulación 2*. Además, en algunas instancias ambas reformulaciones obtienen el valor óptimo, pero sin asegurar la optimalidad; es decir, no alcanzan a cerrar la holgura de optimalidad dentro de los parámetros utilizados por los algoritmos del optimizador. Es de esperarse que en algunas instancias solamente encuentran soluciones factibles.

Para las instancias más grandes (ver la tabla 6.13), la *Reformulación 1* no logra encontrar ninguna solución factible. El número de instancias resueltas a optimalidad por cada reformulación se encuentra en la tabla 6.14. Cabe resaltar que la *Reformulación 3* es una relajación lineal, por lo cual, aún las soluciones encontradas a optimalidad por esa reformulación no necesariamente son soluciones óptimas del problema binivel, aunque siempre son cotas superiores. El tiempo máximo establecido tanto en CPLEX como en BARON para la resolución de la *Reformulación 1* y la *Reformulación 3*, respectivamente fue de $1,000$ segundos. Sin embargo, los tiempos máximos arrojados en el caso de la *Reformulación 1* son de 500 segundos aproximadamente, y de $2,000$ segundos para la *Reformulación 3*, esto se debe a las características de ambos optimizadores que una vez pasados los $1,000$ segundos pueden considerar el tiempo que dura terminar la iteración o por el contrario considerar el tiempo hasta la iteración anterior al corte.

Tabla 6.14: Número de instancias resueltas a optimalidad

Tipo	Tamaño	Reformulación 1	Reformulación 2	Reformulación 3
A	$\|I\| = 10, \|J\| = 10$	30	30	30
	$\|I\| = 25, \|J\| = 25$	29	30	30
	$\|I\| = 25, \|J\| = 50$	30	30	30
	$\|I\| = 50, \|J\| = 100$	29	30	30
	$\|I\| = 75, \|J\| = 125$	28	30	30
	$\|I\| = 150, \|J\| = 200$	13	30	30
R	$\|I\| = 10, \|J\| = 10$	15	30	30
	$\|I\| = 25, \|J\| = 25$	0	30	30
	$\|I\| = 25, \|J\| = 75$	0	30	30
	$\|I\| = 50, \|J\| = 100$	0	30	24
	$\|I\| = 75, \|J\| = 125$	0	30	4
	$\|I\| = 150, \|J\| = 200$	0	30	0

Los promedios de los valores objetivos y tiempos obtenidos por cada reformulación y por cada algoritmo propuesto para cada tamaño y cada tipo de instancia se resumen en las tablas 6.15 y 6.16. Es importante mencionar que en las tablas anteriores el símbolo "-" significaba que no se encontró solución factible antes de agotar el tiempo límite. Esas instancias fueron omitidas para calcular el promedio presentado a continuación.

Tabla 6.15: Promedio del valor objetivo y tiempo de solución de las instancias aleatorias

Tamaño	Reformulación 1		Reformulación 2		Reformulación 3		AIPE		APHNI		AH	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
$\|I\| = 10, \|J\| = 10$	0	0.26	0	0.14	0.003	0.44	0.007	0.08	0.006	0.10	0	0.09
$\|I\| = 25, \|J\| = 25$	0.012	29.01	0	1.43	0	6.78	0	0.11	0.021	0.14	0	0.11
$\|I\| = 25, \|J\| = 75$	0	10.94	0	3.65	0.006	5.08	0	0.17	0.019	0.20	0	0.17
$\|I\| = 50, \|J\| = 100$	0.057	73.60	0	35.52	0.034	51.65	0	0.29	0.170	0.31	0	0.28
$\|I\| = 75, \|J\| = 125$	0	118.76	0	90.48	0.003	85.77	0	0.60	0.086	0.76	0	0.57
$\|I\| = 150, \|J\| = 200$	1.657	414.55	0	193.48	0	60.40	0	1.78	0.443	1.74	0	1.57

Tabla 6.16: Promedio del valor objetivo y tiempo de solución de las instancias realistas

Tamaño	Reformulación 1		Reformulación 2		Reformulación 3		AIPE		APHNI		AH	
	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo	FO	Tiempo
$\|I\| = 10, \|J\| = 10$	0.561	255.56	0.506	0.18	1.167	1.78	0.774	0.23	0.825	0.16	0.524	0.41
$\|I\| = 25, \|J\| = 25$	14.225	500.26	1.000	1.86	3.822	131.32	1.570	0.30	1.171	0.35	1.020	0.71
$\|I\| = 25, \|J\| = 75$	12.435	500.46	0.527	4.36	4.049	46.59	1.025	0.48	0.565	0.39	0.552	1.02
$\|I\| = 50, \|J\| = 100$	211.696	558.80	1.051	53.15	8.564	894.11	2.041	2.39	1.132	1.14	1.091	5.18
$\|I\| = 75, \|J\| = 125$	431.138	501.24	1.546	268.89	12.906	1898.53	2.339	8.89	1.811	3.68	1.621	20.69
$\|I\| = 150, \|J\| = 200$	-	-	3.279	2754.68	145.059	2000.48	4.129	61.82	5.037	12.06	3.443	112.25

De las tablas anteriores (6.15 y 6.16), la *Reformulación 1* y la *Reformulación 3* obtienen promedios cercanos al promedio de los valores óptimos encontrados por la *Reformulación 2* en las instancias de tipo A. Sin embargo, para las instancias de tipo R estos promedios comienzan a alejarse conforme crece el tamaño de las instancias. Dado que la *Reformulación 1* es un modelo no lineal y tanto la *Reformulación 2* como la *Reformulación 3* son modelos MILP, los tiempos promedios de resolución crecen de manera no-polinomial respecto al tamaño de las instancias.

En el caso de los heurísticos, se encontró que para las instancias tipo A, el *Algoritmo iterado sobre puntos extremos (AIPE)* y el *Algoritmo híbrido (AH)* tienen un promedio casi igual al promedio del óptimo para todos los tamaños. Para las instancias de tipo R, el *AH* es el que tiene el promedio más bajo de todos los heurísticos. Mientras que el desempeño del AIPE y del *Algoritmo de penalización de la holgura del nivel inferior (APHNI)* depende drásticamente del tamaño de las instancias. En cuanto al tiempo promedio de solución, el *APHNI* tiene el mejor resultado en las instancias de tipo R. Consideramos que esto ocurre porque el algoritmo permite explorar puntos no necesariamente dentro de la región inducida, acercándose más rápidamente a la solución óptima binivel. El *AH* es el heurístico que requiere en promedio más tiempo, ya que además de realizar todos los pasos del *AIPE* en cada iteración puede resolver hasta 4 problemas de programación matemática extra (2 lineales y 2 MILP). Sin embargo, la cantidad de tiempo requerida no es tan significativa.

Para comparar la eficiencia y la calidad de las soluciones se calculó la holgura entre el valor óptimo del problema binivel obtenido por la *Reformulación 2* y valor correspondiente a la solución factible obtenida con los algoritmos heurísticos. Como en algunos casos el valor óptimo es igual a cero, se optó por utilizar la siguiente fórmula para calcular la holgura (GAP):

$$GAP = \frac{\textit{Valor óptimo} - \textit{Valor heurístico}}{\textit{Valor heurístico}} * 100$$

Para el cálculo del ahorro relativo de tiempo (ART) se utilizó una formula análoga a la anterior, pero utilizando el tiempo requerido para resolver la instancia.

Los promedios obtenidos del GAP y el ART de los heurísticos se muestran en las tablas 6.17 y 6.18, respectivamente.

Tabla 6.17: GAP y ART promedio de las instancias aleatorias

Tamaño	AIPE		APHNI		AH	
	GAP	ART	GAP	ART	GAP	ART
$\|I\| = 10, \|J\| = 10$	6.67%	79%	10.00%	42%	0%	69%
$\|I\| = 25, \|J\| = 25$	0%	1332%	46.67%	1038%	0%	1283%
$\|I\| = 25, \|J\| = 75$	0%	2189%	50.00%	1895%	0%	2192%
$\|I\| = 50, \|J\| = 100$	0%	13714%	90.00%	12176%	0%	14466%
$\|I\| = 75, \|J\| = 125$	0%	16773%	90.00%	14272%	0%	18485%
$\|I\| = 150, \|J\| = 200$	0%	11561%	100.00%	11377%	0%	12781%

Tabla 6.18: GAP y ART promedio de las instancias realistas

Tamaño	AIPE		APHNI		AH	
	GAP	ART	GAP	ART	GAP	ART
$\lvert I\rvert = 10, \lvert J\rvert = 10$	42.27%	12%	29.60%	15%	7.68%	-48%
$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 25$	40.15%	746%	11.70%	534%	1.67%	190%
$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 75$	53.78%	1156%	19.67%	1101%	7.04%	445%
$\lvert I\rvert = 50, \lvert J\rvert = 100$	54.29%	3418%	10.72%	5418%	6.02%	1176%
$\lvert I\rvert = 75, \lvert J\rvert = 125$	33.20%	5269%	12.26%	10696%	5.64%	1499%
$\lvert I\rvert = 150, \lvert J\rvert = 200$	19.29%	9210%	17.20%	30206%	4.92%	3324%

El *AH* es el que presenta la mejor calidad de las soluciones factibles encontradas: en las instancias de tipo A (tabla 6.17) su holgura promedio es igual 0%, mientras que en las instancias de tipo R (tabla 6.18) tiene una holgura promedio inferior al 8% para todos los tamaños. El *AIPE* presenta una muy buena holgura promedio para las instancias tipo A en comparación con el *APHNI*, pero esta situación se invierte en las instancias de tipo R. En cuanto al tiempo, los tres heurísticos presentan un gran ahorro relativo, el cual aumenta conforme crece el tamaño de la instancia siendo el *APHNI* el que presenta el mayor ahorro relativo de tiempo para las instancias realistas. Sin embargo, el aumento en tiempo es de esperarse y más aún, es controlado. Es conveniente notar que para las instancias de tipo A de tamaño 10x10, el *AH* presenta un ahorro relativo de tiempo promedio negativo, esto significa que la *Reformulación 2* es más rápida en encontrar la solución óptima que el algoritmo para encontrar una buena solución. Esto tiene sentido debido a que el *AH* en cada interación resuelve por lo menos dos problemas (un MILP y un problema lineal), mientras que la *Reformulación 2* resuelve solamente un MILP. Pero, la diferencia entre la complejidad de los problemas que resuelve el heurístico respecto a la reformulación comienza a tener sentido conforme la instancia aumenta de tamaño.

Las conclusiones anteriores se confirman al observar el número de soluciones óptimas encontradas por cada heurístico en la tabla 6.19. En ella se tiene que *AH* es el heurístico con mayor número de soluciones óptimas encontradas. Mientras que el *AIPE* es mejor que el *APHNI* para las instancias aleatorias, y viceversa para las realistas. Todo esto muestra la importancia de haber combinado las ventajas de ambos heurísticos para crear *Algorítmo Híbrido*.

Tabla 6.19: Número de soluciones óptimas encontradas

Tipo	Tamaño	AIPE	APHNI	AH
A	$\lvert I\rvert = 10, \lvert J\rvert = 10$	28	27	30
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 25$	30	16	30
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 75$	30	15	30
	$\lvert I\rvert = 50, \lvert J\rvert = 100$	30	3	30
	$\lvert I\rvert = 75, \lvert J\rvert = 125$	30	3	30
	$\lvert I\rvert = 150, \lvert J\rvert = 200$	30	0	30
R	$\lvert I\rvert = 10, \lvert J\rvert = 10$	7	11	20
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 25$	0	12	19
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 75$	5	13	19
	$\lvert I\rvert = 50, \lvert J\rvert = 100$	1	13	15
	$\lvert I\rvert = 75, \lvert J\rvert = 125$	0	4	9
	$\lvert I\rvert = 150, \lvert J\rvert = 200$	0	0	1

La eficiencia y calidad del *Algoritmo heurístico* conduce a la idea de utilizar las buenas soluciones encontradas como soluciones iniciales de la *Reformulación 2*. Los resultados de aplicar esta idea están reflejados en la tabla 6.20. Es claro que, conforme aumenta el tamaño de la instancia se vuelve más útil utilizar una solución inicial heurística, ya que se encuentra en un tiempo mucho menor una solución óptima al problema binivel. El mejor ejemplo está en las instancias de tamaño 150x200 de tipo realista, en las que el ahorro relativo de tiempo es de 370%.

Tabla 6.20: Tiempo promedio de solución de la *Reformulación 2* utilizando solución inicial heurística

Tipo	Tamaño	Reformulación 2 (Sin solución inicial)	AH	Reformulación 2 (Con solución inicial)	Total (Ref. + Heurístico)
A	$\lvert I\rvert = 10, \lvert J\rvert = 10$	0.14	0.09	0.04	0.13
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 25$	1.43	0.12	0.10	0.22
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 75$	3.65	0.19	0.49	0.68
	$\lvert I\rvert = 50, \lvert J\rvert = 100$	35.52	0.33	1.15	1.48
	$\lvert I\rvert = 75, \lvert J\rvert = 125$	90.48	0.46	2.22	2.68
	$\lvert I\rvert = 150, \lvert J\rvert = 200$	193.48	1.95	7.28	9.23
R	$\lvert I\rvert = 10, \lvert J\rvert = 10$	0.18	0.33	0.07	0.40
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 25$	1.86	0.82	0.39	1.21
	$\lvert I\rvert = 25, \lvert J\rvert = 75$	4.36	1.54	0.80	2.34
	$\lvert I\rvert = 50, \lvert J\rvert = 100$	53.15	6.07	4.24	10.31
	$\lvert I\rvert = 75, \lvert J\rvert = 125$	268.89	20.24	19.73	39.97
	$\lvert I\rvert = 150, \lvert J\rvert = 200$	2754.68	196.38	390.15	586.53

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Conclusiones

El objetivo de esta tesis ha sido estudiar la regulación del mercado por parte del gobierno, bajo las características que tuvo la industria petroquímica mexicana; esto es, cuando el Estado tiene el monopolio de la producción de los insumos industriales de ciertos productos finales, pero compite en la producción de estos productos con empresas privadas. La situación privilegiada del gobierno, quien controla la materia prima, así como la interdependencia de sus objetivos y decisiones, permite analizar naturalmente la problemática como un problema binivel. Esta perspectiva es innovadora, puesto que no hemos encontrado en la literatura un problema de similar al estudiado en esta tesis.

Para resolver el problema binivel se han propuesto tres reformulaciones de un sólo nivel. La primera reformulación, utiliza las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad del nivel inferior para asegurar la optimalidad del problema binivel, dando como resultado un problema no lineal. La segunda reformulación sustituye dichas condiciones, por las condiciones de holgura complementaria, generando un MILP. La tercera reformulación es una relajación lineal de la primera, a partir de la discretización de una variable de decisión del líder, dadn como resultado un MILP. La conclusión a la que llegamos después de la experimentación computacional, es que para este problema, la reformulación más eficiente es la que utiliza las condiciones de holgura complementaria.

Dada la complejidad computacional del problema, se propusieron tres algoritmos heurísticos, dos algoritmos nuevos y un híbrido de ellos, para encontrar soluciones de buena calidad en un tiempo aceptable. Dichos algoritmos explotaban una característica particular de nuestro problema, la cual consistía en que el poliedro asociado al problema dual del nivel inferior no cambiaba para distintas soluciones del líder. La experimentación computacional mostró que la efectividad de *AIPE* y *APHNI* dependía del tipo de instancia que se resolvía. Sin embargo, la combinación de estos algoritmos en el *AH*, logró los mejores resultados en cuanto a eficiencia y calidad de las soluciones. El *AH* logró encontrar para cada instancia de tipo aleatoria una solución óptima, mientras que para las instancias de tipo realista obtuvo desviaciones menores al 8% para todos los tamaños, encontrando por lo menos 50% de las soluciones óptimas para los primeros 4 tamaños de instancias.

Con los resultados de la experimentación computacional podemos concluir que la forma más eficiente de encontrar soluciones óptimas para nuestro problema, es utilizar el *Algorítmo Híbrido* para encontrar buenas soluciones factibles que posteriormente sirvan de inicio para resolver la *Reformulación 2. Holgura complementaria*. De esa manera, con el *AH* se asegura una gran reducción del tiempo computacional, mientras que la *Reformulación 2* asegura encontrar una solución óptima al problema binivel.

Por las características del problema, es de esperar que existan múltiples soluciones óptimas al problema binivel. Cada una de estas soluciones ofrece nuevas posibilidades de decisión al líder, ya que determinan el ingreso del Gobierno y la ganancia que el sector privado obtiene. Por lo tanto, tiene importancia económica la obtención de los múltiples óptimos. En esta tesis realizamos la propuesta de un algorítmo exacto, que permite encontrar diferentes óptimos una vez que se ha obtenido el primero. Analíticamente, es un algoritmo eficiente, dado que únicamente resuelve problemas lineales iterativamente.

Resaltamos la potencialidad que tiene la regulación del mercado por parte del Estado, principalmente cuando éste monopoliza la producción de materias primas. Permite optimizar los recursos, al equilibrar la oferta con la demanda, cuando el mercado por sí mismo no puede hacerlo. Además, mostramos la utilidad de la programación binivel a este tipo de problemas económicos.

7.2 Trabajo a futuro

En esta tesis se ha considerado el caso en el cual existe un órganismo de cooperación o regulación de las empresas privadas. Por lo tanto, una extensión al problema es considerar cuando este órganismo no existe, y las empresas privadas compiten entre sí. Esto puede ser abordado como un juego de Stackelberg de un líder y múltiples seguidores. En el **Apéndice A** describimos las características de éste juego de Stackelberg, en donde el problema del seguidor corresponde a un juego generalizado de Nash, y señalamos las condiciones de la existencia de equilibrio.

Hasta ahora se analizó el caso de la industria petroquímica, que por las características de los productos, las variables eran continuas. Sin embargo, el esquema propuesto puede servir para otras industrias, donde se trabaje con unidades discretas. De esa forma, el problema binivel lineal propuesto se convertiría en uno mixto-entero, lo cual implica una complejidad computacional mayor.

Apéndice A

Competencia en el nivel inferior

A.1 Descripción del juego

Como se explicó en el apartado 3.1, cuando no existe un organismo que regule la distribución de los insumos entre las empresas privadas, es necesario modelar el problema como un juego generalizado de Stackelberg con múltiples seguidores. En este juego el líder determina la cantidad de bienes de consumo final a producir **x**, y la cantidad de materia prima que ofertará a los seguidores **z**. Su objetivo será equilibrar la proporción de la oferta de cada bien final con respecto a su demanda. Tomando en cuenta esta limitante, los seguidores deben optimizar su ganancia individual y encontrar la forma de repartirse los insumos entre sí.

Formalmente el juego es el siguiente: Sea Γ un juego de Stackelberg de N jugadores, con un líder y múltiples seguidores. Se denomina como J_0 a la empresa de propiedad estatal (líder), y $J_1, ..., J_N$ las empresas privadas (seguidores).

El espacio de acción de cada jugador viene determinado por los siguientes poliedros:

$$P_0 : \begin{cases} t \leq \sum_{i \in I}(p_i - c_i^G)x_i & \\ 0 \leq x_i \leq q_i^A & \forall i \\ 0 \leq z_i \leq q_i^B & \forall i \end{cases} \tag{A.1}$$

$$P_h : \begin{cases} \sum_{i \in I} b_{ih} y_{ih} \leq m_h & \\ y_{ih} \geq 0 & \forall i \end{cases} \tag{A.2}$$

donde P_0 corresponde al jugador J_0 y P_h a los jugadores J_h, con $h = 1, ..., N$.

Con $\mathbf{y}_h$ se representa el vector de decisión del jugador J_h. El conjunto de los vectores de decisión de todas las empresas privadas se representa como $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_N)$; y con $\mathbf{y}_{\setminus h}$ se representa la producción de todas las empresas exceptuando el vector de decisión del jugador J_h.

La influencia de las decisiones de los demás jugadores en el espacio de estrategias se representa por medio de una correspondencia de restricción C_h. La aplicación $C_h : P_0 \times P_{\setminus h} \to \mathscr{P}(P^m)$ es definida como:

$$C_h(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\backslash h}) = \{y_h \in P_h : \quad a_{ih}y_{ih} \leq z_i - \sum_{\forall j \in J, j \neq h} a_{ij}y_{ij} \;\; \forall i \in I\} \tag{A.3}$$

donde $\mathscr{P}(P^m)$ representa el espacio de todos los poliedros en $\mathbb{R}^m$, con $m = |I|$. Con $P_{\backslash h}$ se hace referencia al producto de los conjuntos $P_{\backslash h} = P_1 \times ... \times P_{h-1} \times P_{h+1} \times ... \times P_N$.

De esa forma las estrategias de los jugadores son:

$$S_0 = P_0 \tag{A.4}$$

$$S_h(\mathbf{z},\ \mathbf{y}_{\backslash h}) = \{(\mathbf{y}_h) : \quad (\mathbf{y}_h \in C_h(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\backslash h})\} \tag{A.5}$$

Las funciones de pago $\theta_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta_h : S_h \rightarrow \mathbb{R}$ de los jugadores son respectivamente:

$$\theta_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = \sum_{i \in I} |\frac{\sum_{j \in J} y_{ij} + x_i}{d_i} - 1| \tag{A.6}$$

$$\theta_h(\mathbf{y}_h; (\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}_{\backslash h})) = \sum_{i \in I} (p_i - c^E_{ih}) y_{ih} \tag{A.7}$$

Como puede observarse sólo la función θ_0 depende directamente de la decisión de todos los jugadores. Mientras que el espacio de estrategias de la empresa de gobierno es constante en todo el juego. Por otra parte, las funciones de pago de los jugadores $J_h,\ h = 1, ..., N$, no depende directamente de la decisión de los otros jugadores, sin embargo, su espacio de estrategias sí. La decisión de gobierno de los insumos que ofrece y la elección de las demás empresas privadas de los insumos que utilizarán limitan la cantidad de materia prima que cada empresa privada puede disponer.

Debido a que el conjunto factible o espacio de estrategias de cada jugador (salvo del jugador J_0) dependen de la decisión de las estrategias de los jugadores rivales, el juego corresponde a una extensión llamada equilibrio generalizado de Nash [26], [38].

A.2 Existencia del equilibrio

De acuerdo con las condiciones para demostrar la existencia del equilibrio en un juego generalizado de Nash ([38]: *Teorema 1*, *Corolario 1*), para nuestro problema debemos demostrar lo siguiente:

a) S_0 y S_h son subconjuntos no vacíos, convexos y compactos de un espacio Euclidiano.

b) C_h es continua sobre $P_0 \times P_{\backslash h}$.

c) $C_h(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\backslash h})$ es no vacío, cerrado y convexo para todo par $(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\backslash h})$, $\;\mathbf{y}_{\backslash h} \in P_{\backslash h},\ z \in P_0$.

d) Las funciones θ_0 y θ_h son continuas sobre el conjunto de estrategias S_0 y S_h, respectivamente.

e) $\forall r \in \mathbb{R},\ U_{\theta_h}(r) = \{\mathbf{y}_h \in C_h(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\setminus h}) :\ \theta_h(\mathbf{y}_h, \mathbf{y}_{\setminus h}) \geq r\}$ es convexa.
Como el jugador J_0 minimiza, debe probarse que $\forall r \in \mathbb{R},\ U_{\theta_0}(r) = \{$**x,z** $\in P_0 : \theta_0(x, z) \leq r\}$ es convexa.
Esto significa demostrar que $\theta_h(\mathbf{y}_h; (\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}_{\setminus h}))$ es cuasi-cóncava en $C_h(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\setminus h})$. Y que $\theta_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y})$ es cuasi-convexo en P_0.

Es claro que tanto S_0 como S_h son poliedros y por lo tanto son subconjuntos convexos y compactos de un espacio Euclidiano. En el caso de S_h el vector **0** siempre pertenece a ese espacio de estrategias y por lo tanto es no vacío. En el caso de S_0 esto dependerá de los parámetros, es decir, del presupuesto mínimo que el gobierno debe obtener y la capacidad productiva máxima q_i^A. En la práctica, es de esperar que ocurra así, en caso contrario el gobierno se vería obligado a cerrar esa planta o en cambiar sus presupuestos por unos que si pueda cumplir.

La imágen $C_h(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\setminus h})$ es un poliedro en $\mathbb{R}^m$, con $m = |I|$, que por sus características siempre admite al vector **0**, por lo tanto, es no vacío, cerrado y convexo para cualquier par $(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\setminus h})$.

Dado que el parámetro $d_i > 0\ \ \forall i \in I$, por construcción la función θ_0 es claramente continua sobre P_0, en tanto, suma y cociente de funciones continuas. En el caso de θ_h la continuidad es más clara en tanto suma y producto de funciones continuas.

La función θ_h es lineal, entonces es cóncava, por lo tanto, es cuasi-cóncava. Mientras que θ_0 es suma de funciones convexas, por lo tanto, es convexa, entonces es cuasi-convexa.

Bibliografía

[1] Acuerdo que dispone que corresponde a petróleos mexicanos u organizaciones o empresas subsidiarias o asociadas a la misma institución, la elaboración de diversos productos de petroquímica básica. Diario Oficial. México, 9 de abril de 1960.

[2] Decreto por el que se reforma la ley reglamentaria del artículo 27 constitucional en el ramo del petróleo. Diario Oficial de la Federación. México, 13 de noviembre de 1996.

[3] Ley orgánica de petróleos mexicanos y organismos subsidiarios. Diario Oficial de la Federación. México, 16 de julio de 1992.

[4] Ley reglamentaria del artículo 27 constitucional en el ramo del petróleo. Diario Oficial. México, 29 de noviembre de 1958.

[5] Reglamento de la ley reglamentaria del artículo 27 constitucional en el ramo del petróleo. Diario Oficial. México, 25 de agosto de 1959.

[6] Reglamento de la ley reglamentaria del artículo 27 constitucional en el ramo del petróleo, en materia de petroquímica. Diario Oficial. México, 9 de febrero de 1971.

[7] Resolución que clasifica los productos petroquímicos que se indican, dentro de la petroquímica básica o secundaria. Diario Oficial de la Federación. México, 13 de octubre de 1986.

[8] Resolución que clasifica los productos petroquímicos que se indican, dentro de la petroquímica básica o secundaria. Diario Oficial de la Federación. México, 15 de agosto de 1989.

[9] Resolución que clasifica los productos petroquímicos que se indican, dentro de la petroquímica básica o secundaria. Diario Oficial de la Federación. México, 17 de agosto de 1992.

[10] BARD, J. F. *Practical Bilevel Optimization*. Nonconvex Optimization and Its Applications. Springer US, 1998.

[11] BEN-AYED, O. Bilevel linear programming. *Computers & operations research 20*, 5 (1993), 485–501.

[12] BRACKEN, J., AND MCGILL, J. T. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research 21*, 1 (1973), 37–44.

[13] CANDLER, W., AND NORTON, R. Multilevel programming. Tech. Rep. 20, 1977.

[14] CANDLER, W., AND TOWNSLEY, R. A linear two-level programming problem. *Computers & Operations Research 9*, 1 (1982), 59–76.

[15] CEPAL. La industria química en américa latina. Tech. rep., Comisión Econónomia para América Latina y el Caribe, Naciones Unidas, 1963.

[16] COLSON, B., MARCOTTE, P., AND SAVARD, G. Bilevel programming: A survey. *4or 3*, 2 (2005), 87–107.

[17] COLSON, B., MARCOTTE, P., AND SAVARD, G. An overview of bilevel optimization. *Annals of operations research 153*, 1 (2007), 235–256.

[18] CREMER, H., MARCHAND, M., AND THISSE, J.-F. The public firm as an instrument for regulating an oligopolistic market. *Oxford Economic Papers 41*, 2 (1989), 283–301.

[19] CRUZ, J. Leader-follower strategies for multilevel systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 23*, 2 (1978), 244–255.

[20] DE FRAJA, G., AND DELBONO, F. Mixed oligopoly: An overview. Tech. rep., Quaderni-Working Paper DSE, 1988.

[21] DE FRAJA, G., AND DELBONO, F. Game theoretic models of mixed oligopoly. *Journal of Economic Surveys 4*, 1 (1990), 1–17.

[22] DE JANVRY, A., FOR AGRICULTURAL DEVELOPMENT, I. F., AND FOR COOPERATION ON AGRICULTURE, I.-A. I. *Reformas del sector agrícola y el campesinado en México*. Estrategias para mitigar la pobreza rural en América Latina y El Caribe. Fondo Internacional de Desarrollo Agrícola, 1995.

[23] DEMPE, S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 52*, 3 (2003), 333–359.

[24] DEMPE, S. *Bilevel programming: A survey*. Dekan der Fak. für Mathematik und Informatik, 2003.

[25] DEMPE, S., KALASHNIKOV, V., PÉREZ-VALDÉS, G. A., AND KALASHNYKOVA, N. *Bilevel programming problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.

[26] FACCHINEI, F., AND KANZOW, C. Generalized nash equilibrium problems. *4OR 5*, 3 (2007), 173–210.

[27] GURIEV, S., KOLOTILIN, A., AND SONIN, K. Determinants of nationalization in the oil sector: A theory and evidence from panel data. *The Journal of Law, Economics, and Organization 27*, 2 (2011), 301–323.

[28] HARRIS, R. G., AND WIENS, E. G. Government enterprise: An instrument for the internal regulation of industry. *The Canadian Journal of Economics 13*, 1 (1980), 125–132.

[29] HONGLI, G., JUNTAO, L., AND HONG, G. A survey of bilevel programming model and algorithm. In *Computational Intelligence and Design (ISCID), 2011 Fourth International Symposium on* (2011), vol. 2, IEEE, pp. 199–203.

[30] JOHNSON, S. *La transferencia del manejo de la irrigación en México: una estrategia para lograr la sostenibilidad de los distritos de riego.* IWMI Research Report. Instituto Internacional del Manejo de la Irrigación, 1997.

[31] KALASHNIKOV, V. V., DEMPE, S., PÉREZ-VALDÉS, G. A., KALASHNYKOVA, N. I., AND CAMACHO-VALLEJO, J.-F. Bilevel programming and applications. *Mathematical Problems in Engineering 2015* (2015).

[32] KOBRIN, S. J. The nationalisation of oil production, 1918-80. In *Risk and the Political Economy of Resource Development*, D. W. Pearce and H. Siebert, Eds. Springer, 1984, pp. 137–164.

[33] KOLSTAD, C. D. A review of the literature on bi-level mathematical programming. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory Los Alamos, NM, 1985.

[34] LELENO, J. M., AND SHERALI, H. D. A leader-follower model and analysis for a two-stage network of oligopolies. *Annals of Operations Research 34*, 1 (1992), 37–72.

[35] MERRILL, W. C., AND SCHNEIDER, N. Government firms in oligopoly industries: A short-run analysis. *The Quarterly Journal of Economics 80*, 3 (1966), 400–412.

[36] MINOR, M. S. The demise of expropriation as an instrument of ldc policy 1980-1992. *Journal of International Business Studies 25*, 1 (1994), 177–188.

[37] NETT, L. Mixed oligopoly with homogeneous goods. *Annals of Public and Cooperative Economics 64*, 3 (1993), 367–393.

[38] PARK, S. Existence theorems for generalized nash equilibrium problems. *Bangmod International Journal of Mathematics and Computational Sciences 1* (2015).

[39] POLYAK, B. T. *Introduction to Optimization*. Optimization Software, Inc, 1987.

[40] SERTEL, M. R. Regulation by participation. *Journal of Economics 48*, 2 (1988), 111–134.

[41] SINHA, A., MALO, P., AND DEB, K. A review on bilevel optimization: from classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation 22*, 2 (2018), 276–295.

[42] STACKELBERG, H. v. *Market Structure and Equilibrium*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[43] STIGLITZ, J. E. Regulation and failure. In *New Perspectives on Regulation*, D. Moss and J. Cisternino, Eds. Tobin Project, 2009.

[44] VERNON, R. Uncertainty in the resource industries: the special role of state-owned enterprises. In *Risk and the Political Economy of Resource Development*, D. W. Pearce and H. Siebert, Eds. Springer, 1984, pp. 207–223.

[45] VICENTE, L. N., AND CALAMAI, P. H. Bilevel and multilevel programming: A bibliography review. *Journal of Global optimization 5*, 3 (1994), 291–306.

[46] WEN, U.-P., AND HSU, S.-T. Linear bi-level programming problems - a review. *Journal of the Operational Research Society 42*, 2 (1991), 125–133.

[47] WIENS, E. G. Government firm regulation of a vertically integrated industry. *Carleton Economic Paper* (1978), 78–109.