

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS ADAPTABLES DIRECTOS  
QUE ESTABILIZAN A SISTEMAS MULTI-ENTRADA MULTI-SALIDA**

**POR**

**ING. JOSÉ MANUEL ZAMORA MARTÍNEZ**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DICIEMBRE, 2018**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS ADAPTABLES DIRECTOS QUE  
ESTABILIZAN A SISTEMAS MULTI-ENTRADA MULTI-SALIDA**

**POR**

**ING. JOSÉ MANUEL ZAMORA MARTÍNEZ**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS  
DR. RENÉ GALINDO OROZCO**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO**

**DICIEMBRE, 2018**



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis Diseño de controladores Robustos Adaptable Directos que Estabilizan a Sistemas Multi Entrada Multi Salida realizada por el alumno(a) José Manuel Zamora Martínez, con número de matrícula 1880643, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

El Comité de Tesis

Dr. René Galindo Orozco  
Director

Dr. Daniel Ulises Campos Delgado  
Revisor

Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán  
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado



FINE

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, 5 de noviembre de 2018

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres que nunca me dejaron de apoyar, aun en la distancia, siempre estuvieron cuando los necesite. A mis padres y a mi hermanas Valeria y Sophia, les agradezco infinitamente su apoyo y su inspiración para ser mejor cada día. Agradezco también a Ana Olay, por su infinito amor y apoyo a lo largo de este viaje, por su ayuda académica y su apoyo emocional, gracias por ser parte de este proyecto llamado vida. No hay palabras que describan lo mucho que los amo.

Agradezco también, al Dr. René Galindo Orozco por su paciencia y todas sus enseñanzas, tanto académicas como cotidianas, este trabajo es tan suyo como mío, una vez más, le agradezco. Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo financiero a lo largo de este trabajo, así como a la Universidad Autónoma de Nuevo León y a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por todo su apoyo académico y extra académico.

Un agradecimiento muy especial a la familia Esquivel Galán, sin su apoyo esto no hubiera sido posible. Al consejo de las malas decisiones, por su apoyo a lo largo de estos años, son los mejores amigos que un neet pudiera desear, solo me queda decirles que; gradua3 chavones. Agradezco también, a mis colegas Luis y Jorge, por su apoyo académico y su amistad.

*Para mi querida familia y mi amada novia*

*Knowledge is power.*

El control robusto logra preservar la estabilidad y el desempeño del sistema retroalimentado bajo la presencia de perturbaciones e incertidumbres, cuando se conocen las cotas superiores de las normas de dichas perturbaciones e incertidumbres o la ganancia finita de las incertidumbres. Por su parte el control adaptable no requiere información previa sobre estas cotas, si no que auto-ajusta (auto-sintoniza) los parámetros del controlador en el control adaptable directo. En esta tesis se presenta una solución en línea para el problema control robusto de sensibilidad mezclada, con un método de auto-sintonización para los parámetros libres de control. Se consideran plantas lineales, multi-salida, de entrada múltiple (MIMO) estabilizables y detectables. Esto crea un vínculo entre el control robusto y el control adaptable, manteniendo los beneficios tales como la atenuación tanto de perturbaciones a bajas y altas frecuencias. La incertidumbre no estructurada está representada por un modelo de incertidumbre de retroalimentación. Las expresiones analíticas del controlador se escriben en términos del espacio de estados de la planta y el controlador pertenece a la parametrización de todos los controladores estabilizantes de la parametrización de Youla. No se necesita de un modelo para el proceso de autoajuste. La estabilidad del criterio de sensibilidad mezclada se analiza mediante el Teorema de pequeñas ganancias utilizando la medida de las señales de interés. De manera similar, el Teorema de pequeñas ganancias para sistemas no lineales se utiliza para asegurar la estabilidad del sistema en general con el proceso de ajuste automático. Un esquema de control robusto adaptable que utiliza el método de algoritmo gradiente para la adaptación del parámetro libre del controlador es presentado.

**Palabras clave:**

*control robusto adaptable, parametrización de todos los controladores estabilizantes, auto-sintonización, sistemas retroalimentados.*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	10
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	11
1.3. Hipótesis . . . . .	14
1.4. Objetivos . . . . .	14
1.4.1. Objetivo General . . . . .	14
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	14
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	15
<b>2. Antecedentes</b>	<b>16</b>
2.1. Descripción del capítulo . . . . .	16
2.2. Control adaptable . . . . .	16
2.3. Parametrización de los controladores estabilizantes . . . . .	19
2.4. Expresiones analíticas de los controladores estabilizantes . . . . .	20
2.5. Criterio de sensibilidad mezclada . . . . .	21
2.6. Esquemas de control adaptable directo . . . . .	23
2.7. Problemas de inestabilidad . . . . .	25
2.8. Leyes de adaptación con normalización. . . . .	29
2.9. Método de diseño mediante Lyapunov-SPR. . . . .	31
<b>3. Resultados; Control Robusto Adaptable Directo</b>	<b>34</b>
3.1. Introducción . . . . .	34
3.2. Parámetros libres en términos de la norma infinito de la incertidumbre . . . . .	35
3.3. Estructura del controlador robusto adaptable directo. . . . .	36
3.4. Solución al problema de sensibilidad mezclada. . . . .	39
3.5. Análisis de estabilidad del control robusto adaptable. . . . .	43
3.6. Ley de adaptación mediante Lyapunov SPR. . . . .	44
3.7. Adaptación del parámetro libre mediante algoritmo gradiente . . . . .	46

<b>4. Ejemplo de aplicación</b>	<b>53</b>
4.1. Descripción del capítulo . . . . .	53
4.2. Implementación del control robusto adaptable . . . . .	55
4.3. Implementación del algoritmo diseñado por Lyapunov SPR . . . . .	58
4.4. Implementación del controlador robusto adaptable por algoritmo gradiente . . . . .	62
<b>5. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>67</b>
<b>Apéndice A: Mixed sensitivity robust adaptive control in a one degree of   freedom feedback configuration.</b>	<b>74</b>



# Índice de figuras

1.1. Esquema de control de un parámetro. . . . .	13
2.1. Esquema del controlador con ganancias ajustables. . . . .	17
2.2. Diagrama a bloques del controlador retroalimentado con ganancia fija. . . . .	18
2.3. Esquema de control de dos parámetros. . . . .	21
2.4. Esquema de control adaptable directo. . . . .	23
2.5. Diagrama del sistema interconectado. . . . .	26
3.1. Esquema de control con modelo de incertidumbre retroalimentado. . . . .	36
3.2. Esquema de control con retroalimentación de incertidumbre y auto sintonización. . . . .	40
3.3. Relación geométrica entre $\ S_{ol}\ _{\infty}$ y $\ T_{u\Delta y_{\Delta}h}\ _{\infty}$ . . . . .	41
3.4. Esquema de control con retroalimentación de incertidumbre y auto sintonización. . . . .	45
3.5. Esquema de control con modelo de referencia y planta incierta. . . . .	47
4.1. Salidas del sistema. . . . .	54
4.2. Salidas del sistema incierto. . . . .	55
4.3. Salidas del sistema nominal con $r$ fijo. . . . .	55
4.4. Salidas del sistema incierto con $r$ fijo. . . . .	56
4.5. Valor dinámico de $r(t)$ . . . . .	56
4.6. Control Signal ( $u$ ). . . . .	57
4.7. Respuesta con incertidumbres de altas frecuencias. . . . .	58
4.8. Respuesta con incertidumbres de bajas frecuencias. . . . .	58
4.9. Condición del Teorema de Pequeñas Ganancias $\gamma_1\gamma_2 \leq 1$ . . . . .	59
4.10. Salida del modelo de referencia. . . . .	59
4.11. Salida de la planta. . . . .	60
4.12. Convergencia de la salida de la planta $y_p$ a $y_m$ . . . . .	60
4.13. Error entre los estados del modelo de referencia y la planta. . . . .	61
4.14. Error entre las salidas del modelo de referencia y la planta. . . . .	61
4.15. Comportamiento dinámico del parámetro $\theta$ . . . . .	62

4.16. Comportamiento dinámico del parametro $\phi$ . . . . .	62
4.17. Salida del modelo de referencia. . . . .	63
4.18. Salida de la planta con $r$ adaptable. . . . .	64
4.19. Error entre las salidas del modelo de referencia y la planta. . . . .	64
4.20. Comportamiento dinámico de $\dot{\theta}$ . . . . .	65
4.21. Comportamiento dinámico de $r$ . . . . .	65

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo, se habla sobre el estado del arte, presentando una breve descripción de lo que es el control adaptable y el control robusto, se presentan además los objetivos perseguidos durante el presente trabajo, así como el planteamiento del problema que se ataca y la hipótesis bajo la cual se desarrolla esta tesis.

### 1.1. Estado del arte

Incertidumbres tales como variaciones paramétricas, dinámicas no modeladas, o debidas a desgaste o envejecimiento de los componentes, perturbaciones tales como cambios de carga, señales de interferencia o ruido en la medición, y la extensión de las técnicas de control clásico a sistemas multi-entrada multi-salida, han motivado el desarrollo del control robusto [1]. Por otro lado, los algoritmos de control adaptable [2] pueden ser inestables bajo la presencia de estas incertidumbres o perturbaciones, por lo que por ejemplo en los trabajos de [3], [4] y [5] se han desarrollado algoritmos de control adaptable robusto que logran la auto-sintonización del controlador preservando la estabilidad y el desempeño del sistema en lazo cerrado, bajo la presencia de incertidumbres y perturbaciones. Estos trabajos abarcan sistemas de fase no-mínima e inestables a diferencia de los algoritmos de control adaptable basados en el control de modelo interno [6] que se restringen a plantas estables. Además, hay pocos trabajos sobre control robusto adaptable basados en la parametrización de todos los controladores estabilizantes, tales como los de [4], [7] y [8].

En esta tesis se propone utilizar las expresiones analíticas de los controladores estabilizantes propuestas por [9], [10] y [11] con la finalidad de simplificar las relaciones entre los parámetros libres de los controladores estabilizantes en términos de la norma de la incertidumbre no estructurada o de la ganancia finita. Esto aunado a que las funciones de sensibilidad son funciones afines de los parámetros libres cuando se utiliza la parametrización de todos los controladores estabilizantes [12], hace factible el desarrollo de algoritmos de control adaptable robustos. Un primer intento en esta dirección es el trabajo de [13], en el cual se propuso un modelo de incertidumbre no estructurado basado en linealización parcial, la ganancia finita de esta incertidumbre se obtuvo en línea y el parámetro libre del controlador estabilizante se actualizó en línea resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada, garantizando estabilidad robusta mediante el Teorema de pequeñas ganancias. En el trabajo de [13] el controlador estabilizante es diseñado para una planta nominal ideal con información completa del estado y matriz de entrada invertible, por lo que para su implementación se requiere una pseudo-inversa de la matriz de entrada y análisis de estabilidad, a diferencia de los trabajos de [9], [10] y [11] que no requieren dicha pseudo-inversa y garantizan estabilidad para la planta nominal.

## 1.2. Planteamiento del problema

En este trabajo se ha eliminado el uso de la matriz pseudo-inversa a la entrada, pues se han considerado que los sistemas a los que es aplicable son mecánicos completamente actuados, y que además, se tiene la información completa del estado. Se ha considerado también, que se puede tener información de la posición o de la velocidad, pero no de ambas.

El objetivo es resolver un problema de control de sensibilidad mezclada, utilizando la parametrización de todos los controladores estabilizantes. En donde el parámetro libre  $R(s)$  es la solución de dicho problema. El cual, inicialmente, será visto como un parámetro constante, posteriormente se busca analizar la estabilidad de todo el sistema en lazo cerrado considerando ahora a  $R(s)$  variante en el tiempo. Dicho parámetro  $R(s)$  se usa también para el proceso de auto-

sintonización del controlador, logrando el efecto de adaptación.

Para el problema de control robusto adaptable mediante algoritmo de descenso gradiente, donde el parámetro libre del controlador  $K(s)$  será el adaptable. Se supondrá también, al modelo de referencia como la planta nominal sin incertidumbres.

Se supondrá que la norma  $\mathcal{H}_2$  de las perturbaciones permanecerá acotada. Donde  $P(s)$  representa a la planta,  $u(s)$  y  $y(s)$  son la entrada y salida de la planta, respectivamente,  $e(s)$  es la señal del error, y  $d_i(s)$ ,  $d_o(s)$  y  $d_m(s)$  son perturbaciones externas a la entrada, a la salida y en la medición de la planta, respectivamente. La entrada de la planta  $u(s)$  es generada por una señal linealmente independiente, esto es

$$u(s) = K(s)e(s) + d_i(s) \quad (1.2.1)$$

donde

$$e(s) = y_d(s) - (y(s) + d_m(s)) \quad (1.2.2)$$

y  $K(s)$  es el controlador de un parámetro.

Se supone que se tiene información completa del estado o la existencia de un observador y el uso del principio de separación. Esta tesis se enfoca en el diseño de un controlador para la planta  $(sI_n - A)^{-1}B$ .

En lo siguiente considérese que  $R(s) = rI \in \mathcal{R}$ , donde primero  $r$  será fija y real, para después ser una función del tiempo en el diseño de la ley de control adaptable. Se supone que  $(F, G, J)$  es una realización mínima de la planta  $P(s)$  en la cual la dimensión del estado  $n$  es par, el tamaño de la entrada  $m$  es  $m = n/2$  y la dimensión de la salida  $p$  es  $p = m$ . Utilizando el cambio de coordenadas  $\bar{x} = T_1x$  dado por el Lema 1 de [10], se logra alcanzar una estructura deseada para el diseño del controlador

$$\begin{cases} T_1 = \begin{bmatrix} I_m & -G_1 G_2^{-1} \\ V_1 \Theta_1 & I_m \end{bmatrix} \\ T_1^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_1^{-1} & \Delta_1^{-1} G_1 G_2^{-1} \\ -V_1 \Theta_1 \Delta_1^{-1} & I_m - V_1 \Theta_1 \Delta_1^{-1} G_1 G_2^{-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

donde se supone que  $G_2$  es una matriz no singular y

$$\begin{cases} V_1 := (F_{12} - G_1 G_2^{-1} F_{22})^{-1} \\ \Theta_1 := (F_{11} - G_1 G_2^{-1} F_{21}) \\ \Delta_1 := I_m - G_1 G_2^{-1} V_1 \Theta_1 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

siendo  $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, G_1$  y  $G_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  los elementos de las particiones, la cual es acorde a las dimensiones de la entrada y de la salida, de las matrices  $F$  y  $G$  respectivamente. Lo cual resulta en la siguiente realización del sistema en las nuevas coordenadas, con  $A = T_1 F T_1^{-1}$ ,  $B = T_1 G$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, C = J T_1^{-1} \quad (1.2.5)$$

Se supone que se tiene información completa del estado o la existencia de un observador y el uso del principio de separación. Esta tesis se enfoca en el diseño de un controlador para la planta  $(sI_n - A)^{-1}B$ .

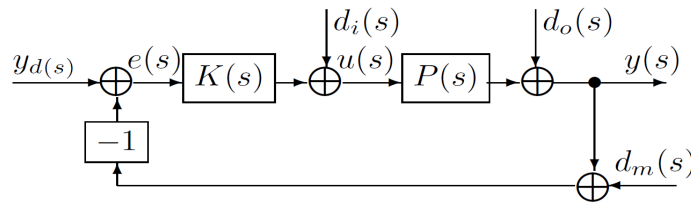


Figura 1.1: Esquema de control de un parámetro.

Donde  $P(s)$  representa a la planta,  $u(s)$  y  $y(s)$  son la entrada y salida de la planta, respectivamente,  $e(s)$  es la señal del error, y  $d_i(s)$ ,  $d_o(s)$  y  $d_m(s)$ , son perturbaciones externas a la entrada, a la salida y en la medición de la planta, respectivamente.

### **1.3. Hipótesis**

Para sistemas lineales multi-entrada multi-salida, controladores estabilizantes de uno y dos grados de libertad dados en [9], [10] y [11], y un ambiente sujeto a incertidumbres de norma infinito acotada y perturbaciones de norma dos acotada; se pueden determinar las condiciones sobre los parámetros libres de los controladores estabilizantes, minimizando un criterio de sensibilidad mezclada, en términos de la norma de la ganancia finita, la cual se obtiene en línea.

### **1.4. Objetivos**

#### **1.4.1. Objetivo General**

Diseñar controladores estabilizantes auto-ajustando sus parámetros libres, para satisfacer un criterio de sensibilidad mezclada. Estos controladores robustos adaptables directos están basados en la ganancia finita obtenida en línea, con base a mediciones de la entrada y de la salida de la planta.

#### **1.4.2. Objetivos específicos**

Los objetivos específicos son:

1. Revisión bibliográfica de control robusto en un esquema de control adaptable directo, para sistemas lineales multi-entrada multi-salida.
2. Estudiar y comprender la función de los parámetros libres de los controladores.
3. Proponer un algoritmo de auto-ajuste de los parámetros libres de los controladores.

4. Garantizar estabilidad del esquema de control propuesto.
5. Análisis del desempeño del esquema control en lazo cerrado.

## **1.5. Estructura de la tesis**

En el capítulo 2, se da una descripción de la parametrización de los controladores estabilizantes que se utiliza a lo largo del presente trabajo, así como la solución a la ecuación Diofantina utilizada. Se habla también de todo lo referente al problema de control de sensibilidad mezclada solucionado, de los esquemas de control adaptable directos y de todos los aspectos relacionados al mismo control.

En el capítulo 3 se presentan los resultados del control robusto adaptable, se habla de los parámetros libres que se utilizan para resolver los problemas tanto de sensibilidad mezclada como de la auto-sintonización, se presentan además, las pruebas de estabilidad en lazo cerrado y se describen las herramientas utilizadas. Se presentan también los esquemas de control basados en Lyapunov y en un algoritmo de descenso de gradiente, en los que se trata de establecer una relación entre el control adaptable y el robusto.

En el capítulo 4 se presentan las aplicaciones del algoritmo a un sistema robótico planar completamente actuado llamado doble péndulo, además de una comparación entre un algoritmo adaptable y uno tradicional.

Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y se habla del trabajo a futuro.



# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Descripción del capítulo

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de esta tesis como lo son la parametrización de los controladores estabilizantes [12], se presentan también las expresiones analíticas de dicha parametrización las cuales están dadas por [10]. Se habla también acerca de lo que se considera en el criterio de sensibilidad mezclada a resolver [13]. Para finalizar, se describen los esquemas de control adaptable directo, así como las condiciones de convergencia y los problemas de inestabilidad que dichos esquemas presentan [2].

### 2.2. Control adaptable

De acuerdo al diccionario, la palabra adaptar significa *"Modificar [un ser vivo] alguna de sus características o tener unas características que le permiten desarrollarse en un lugar o situación distintos a los originales o idóneos"*, los términos como *"control adaptable"* y *"sistemas adaptables"* han sido utilizados desde principios de 1950 [14]. En un principio, la motivación que inició con estos diseños era la de crear *pilotos automáticos* para aeronaves de alto desempeño, aeronaves que operaban en una amplia gama de velocidades y altitudes, cuyas dinámicas son no lineales y además, variantes en el tiempo [14]. Para un punto de operación dado, especificado por la velocidad de la aeronave, es posible aproximar el comporta-

miento a un modelo lineal. Por ejemplo, para un punto de operación  $i$ , el modelo lineal de la aeronave tiene la forma [15]

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u, x(0) = x_0 \\ y = C_i x + D_i u \end{cases} \quad (2.2.1)$$

donde  $A_i, B_i, C_i$  y  $D_i$  están descritas en función del punto de operación  $i$ . Conforme la aeronave cambia las condiciones de vuelo, el punto de operación cambia, lo que a su vez conlleva cambios en las matrices  $A_i, B_i, C_i$  y  $D_i$ . Debido a que la señal de salida  $y(t)$  contiene información del estado  $x$  así como de los parámetros, se puede argumentar que, bajo estos principios, seleccionando un controlador en lazo cerrado con retro-alimentación debería ser capaz de *aprender* acerca de los cambios en los parámetros al procesar la señal de salida  $y(t)$ . Esta suposición lleva a la selección de un esquema de control en la cual se basa el control adaptable, la cual consiste en un lazo de retro-alimentación y un controlador con ganancias *auto-ajustables*, como se muestra en la Fig. 2.1. La manera en la que las ganancias del controlador se ajustan sucede en respuesta al comportamiento de la planta y a las perturbaciones que la afectan, esto distingue a un esquema de otro [14].

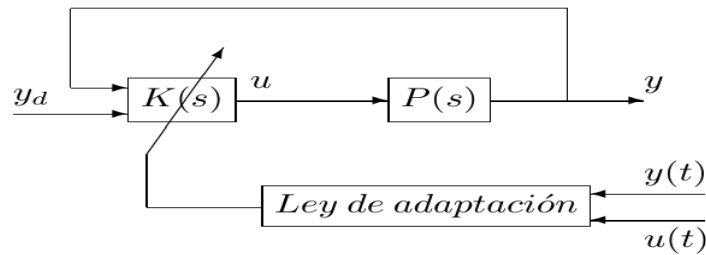


Figura 2.1: Esquema del controlador con ganancias ajustables.

Un esquema de control con retro-alimentación cuyo valor de  $K(s)$  es fijo, es deseable que sea diseñado con la capacidad de hacer frente a los cambios que el sistema presente, dichos cambios se encuentran entre ciertas cotas.

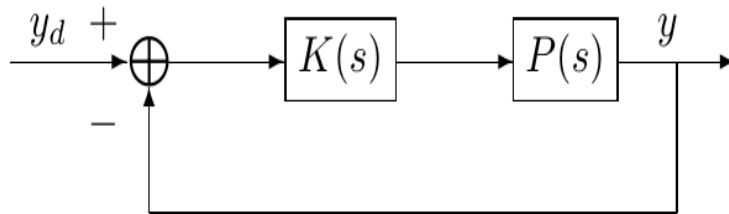


Figura 2.2: Diagrama a bloques del controlador retroalimentado con ganancia fija.

Considérese el diagrama a bloques de la Fig. 2.2, en donde  $G(s)$  es la función de transferencia de la planta y  $K(s)$  es la función de transferencia del controlador. Entonces, la función de transferencia de  $y_d$  a  $y$  está dada por (2.2.2)

$$\frac{y}{y_d} = \frac{K(s)(sI - A)^{-1}B}{1 + K(s)(sI - A)^{-1}B} \quad (2.2.2)$$

Donde  $K(s)$  es elegida tal que, la planta en lazo cerrado sea estable, sin importar la variación paramétrica ni las incertidumbres existentes en la planta  $P(s)$ , y  $y \approx y_d$  dentro del rango de las frecuencias de interés. Esta última condición, se puede satisfacer al seleccionar  $K(s)$  tal que la norma de la ganancia del lazo cerrado  $\|K(j\omega)P(j\omega)\|$  sea tan grande como sea posible en el espectro de la frecuencia de  $y_d$ . Los problemas de seguimiento y estabilización de  $P(s)$  pueden ser logrados con un diseño de  $K(s)$  que considere los cambios de la planta existentes dentro de ciertas cotas.

Este tipo de control se conoce como “control robusto”, el cual no es considerado como un sistema adaptable incluso si su desempeño es correcto bajo cierta clase de incertidumbre paramétrica y dinámicas no modeladas.

## 2.3. Parametrización de los controladores estabilizantes

Las fórmulas explícitas que representan la doble factorización coprima de una función de transferencia, están expresadas en términos de su realización en espacio de estados, la cual debe ser detectable y estabilizable. Estas fórmulas están relacionadas con la solución a la identidad de Bezout o ecuación Diofántica [16].

Otra forma de representar la realización mínima de una planta, se conforma por dos matrices, correspondientes al numerador y al denominador de la función de transferencia de la planta [16]. La factorización coprima derecha de una planta está dada en [16]

$$P(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (2.3.1)$$

y la factorización coprima izquierda

$$P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.3.2)$$

donde  $D(s), \tilde{D}(s)$  representan los denominadores de la función de transferencia de la planta,  $N(s), \tilde{N}(s)$  son los numeradores de la planta. Ambas partes deben pertenecer al conjunto de funciones racionales propias y estables  $\mathcal{RH}_\infty$  [12].

La coprimicidad que implica dicha factorización se debe a que se trata de una realización mínima de la planta, es decir, no existen polos y ceros inestables en común entre el numerador y el denominador. Se sabe que la factorización es coprima si existen funciones  $X(s), Y(s), \tilde{X}(s)$  y  $\tilde{Y}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  pertenecientes al conjunto de funciones racionales, propias y estables tales que resuelvan la identidad de Bezout o las ecuaciones Diofánticas izquierda y derecha [12]. La identidad de Bezout es,

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ D(s) & \tilde{X}(s) \end{bmatrix} = I_{2m} \quad (2.3.3)$$

En el trabajo de [17] se presenta una parametrización diferente a la que se ha utilizado aquí, en ella se propone una estructura para la matriz de salidas  $C$  que sólo considere información de salidas de posiciones, esto sólo es aplicable a sistemas mecánicos con una estructura particular en su espacio de estados,  $C = [C_{11} \ 0]$ , además de tener disponibles las soluciones de ambas ecuaciones diofantinas, la solución a la ecuación derecha es

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a} \left( X_1 s + Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m \right) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_0) B_m \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

donde  $A_{12}, A_{21}, A_{22}$  y  $B_m$  son las particiones de las matrices  $F, G, J$  luego de aplicar la transformación  $T_1$

$$\begin{aligned} Y_0 &:= A_{22} + 3a I_m \\ X_1 &:= Y_0 A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m \end{aligned}$$

lo cual da una solución a la doble factorización coprima dada en [17].

## 2.4. Expresiones analíticas de los controladores estabilizantes

Sean  $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$  y  $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$  cualesquier factorizaciones coprimas izquierda y derecha de  $P(s)$  con  $N(s)$ ,  $\tilde{N}(s)$ ,  $D(s)$  y  $\tilde{D}(s)$  pertenecientes a  $\mathcal{RH}_\infty$ . Entonces, la parametrización de todos los controladores que estabilizan a  $P(s)$  propuesta por [18] [12] está dada por

$$\begin{aligned} K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) = N_k(s)D_k^{-1}(s) \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s), D_k(s) := \tilde{Y}(s) - N(s)\tilde{R}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s), N_k(s) := \tilde{X}(s) + D(s)\tilde{R}(s) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

donde  $R(s)$  y  $\tilde{R}(s)$  pertenecen a  $\mathcal{RH}_\infty$  y son los parámetros libres de control.

La configuración de control de un grado de libertad se muestra en la Fig. 2.2, mientras que la Fig. 2.3 muestra una configuración de control de dos grados de libertad, [12].

Una versión de la configuración de control de dos parámetros se muestra en la Fig. 2.3 [12], donde  $u(s)$  es generada por dos señales independientes diferentes  $y_d(s)$  y  $y(s)$ , esto es

$$u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s) \quad (2.4.2)$$

donde  $y_d$  es la entrada de referencia y  $[K_r(s) \ K(s)]$  es el controlador de dos parámetros.

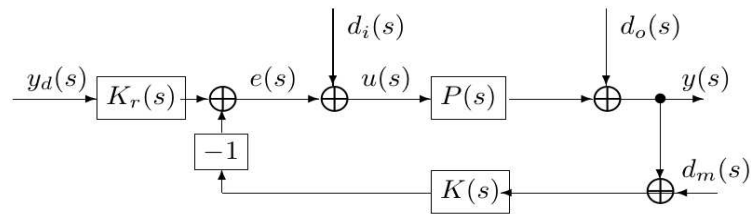


Figura 2.3: Esquema de control de dos parámetros.

## 2.5. Criterio de sensibilidad mezclada

En [19] se considera el lazo retroalimentado de la Fig. 1.1 así como sistemas MEMS (*Multi-Entrada Multi-Salida*) y  $P(s)$  es estabilizada por  $K(s)$  en el lazo cerrado, se supone que no se conoce el tipo de perturbación que presenta el sistema, pero se sabe que estas están acotadas en un rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq \omega_b$ . El objetivo de diseño, es el de encontrar un controlador  $K(s)$  que minimice el peor caso de la norma-2 de la salida  $y(s)$  afectada por cualquier perturbación  $d(s)$ , de norma-2 acotada, y que estabilice el lazo, lo cual se logra al resolver el problema

$$\min_{K(s)} \|S\|_{\infty} \quad (2.5.1)$$

donde  $S$  es una función de sensibilidad genérica.

Considérese ahora una planta incierta denotada por  $P_{\Delta}(s)$  en una configuración de retroalimentación negativa y unitaria. Considere además que utilizando la función genérica de sensibilidad  $S$  utilizada en la Ec. (2.5.1), la función sensibilidad

a la salida  $S_o$ , donde  $S_o(s) = (I + P(s)K(s))^{-1}$  logra minimizar el efecto de las perturbaciones  $\|d(t)\|_2$  sobre la salida  $\|y(t)\|_2$ . El siguiente criterio además atenúa el efecto de incertidumbres de norma infinito acotada

$$J_1 = \left\| \left[ \begin{array}{c} W_1(s)S_o(s) \\ W_2(s)T_{u_\Delta y_\Delta}(s) \end{array} \right] \right\|_\infty \quad (2.5.2)$$

al emplear un controlador estable  $K(s)$  que es diseñado para la planta nominal  $P(s)$ , en donde  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  es la función de transferencia de la salida de la incertidumbre  $y_\Delta$  a la entrada  $u_\Delta$ , y  $W_1(s), W_2(s)$  son funciones de peso pasa-bajas y pasa-altas, respectivamente, además de estables y de fase mínima.

Utilizando un controlador estabilizante, dado por la parametrización de todos los controladores estabilizantes, es posible convertir este problema en uno de seguimiento de modelo, el cual dependerá principalmente del parámetro libre, y  $J_1$  es minimizado por el Teorema de Nehari [20] resolviendo ecuaciones de Riccati (ver [21] [22] [23]).

Entonces, el índice (2.5.2) es transformado en [24], obteniendo

$$J_2 = \left\| \left[ \begin{array}{c} S_{ol} \\ T_{u_\Delta y_\Delta h} \end{array} \right] \right\|_\infty \quad (2.5.3)$$

donde  $S_{ol}$  representa la función sensibilidad a la salida minimizada en bajas frecuencias y  $T_{u_\Delta y_\Delta h}$  representa la función de transferencia de la salida  $y_\Delta$  a la entrada  $u_\Delta$  en altas frecuencias.

Siendo esto, un problema de sensibilidad mezclada con matrices cuyos elementos son reales y sin un sistema aumentado, lo que implica que el orden de  $K(s)$  no será más grande que el de  $P(s)$ . El índice  $J_2$  involucra la minimización simultanea de las normas  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$  y  $\|S_{ol}\|_\infty$ , es decir

$$\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty \quad (2.5.4)$$

sujeto a

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (2.5.5)$$

## 2.6. Esquemas de control adaptable directo

El control adaptable directo o esquema de modelo de referencia, actualiza los parámetros del controlador directamente, es decir, no se hace un estimado explícito o identificación de los parámetros inciertos de la planta. Una manera típica de realizar este procedimiento consiste en identificar y derivar la señal de error, la cual tiene una dependencia lineal al error de parámetros  $\tilde{\theta} := \theta - \theta^*$  donde  $\theta$  es el valor real y  $\theta^*$  es el valor estimado. La señal de error a la salida  $e(t) = y_p(t) - y_m(t)$ , siendo  $y_p(t)$  la salida de la planta y  $y_m(t)$  la salida del modelo de referencia, es la base para los esquemas de control adaptable basadas en el error [2].

Considere, como ejemplo [2] de este tipo de esquemas, una planta  $P(s)$  cuya función de transferencia está dada por

$$P(s) = \frac{k_p}{s + a} = \frac{y_p}{u} \quad (2.6.1)$$

donde  $a > 0$ ,  $k_p > 0$  y  $k_p$  es desconocido.

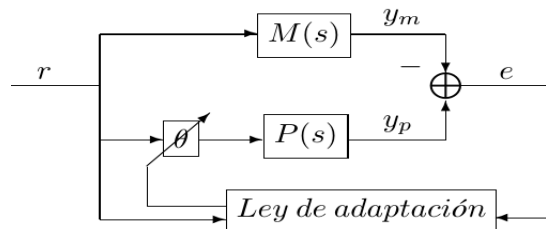


Figura 2.4: Esquema de control adaptable directo.

En la Fig. 2.4 se presenta un esquema de control adaptable directo con modelo de referencia, el cual se rediseña utilizando el método de Lyapunov.

Sea la ecuación del modelo

$$M(s) = \frac{1}{s + a} \quad \text{o} \quad \dot{y}_m = -ay_m + r \quad (2.6.2)$$



y la ecuación de la planta

$$P(s) = \frac{k_p}{s+a} \quad \text{o} \quad \dot{y}_p = -ay_p + k_p \theta r \quad (2.6.3)$$

Se puede apreciar que, la elección lógica sería  $\theta = \frac{1}{k_p}$  para de esta manera lograr que  $\dot{y}_p = \dot{y}_m \rightarrow y_p - y_p(0) = y_m - y_m(0)$ , con lo cual *el valor nominal o verdadero* de  $\theta$  es

$$\theta^* = \frac{1}{k_p} \quad \rightarrow \quad \dot{y}_m = -ay_m + k_p \theta^* r \quad (2.6.4)$$

y el error de seguimiento

$$\dot{e} = -ae + k_p(\theta - \theta^*)r \quad (2.6.5)$$

Donde se define el error paramétrico como  $\phi := \theta - \theta^*$ . Dado que  $\theta^*$  es fijo, pero desconocido, se puede suponer que

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} \quad (2.6.6)$$

Definiendo la función de Lyapunov como

$$V := e^2 + k_p \phi^2 \quad > 0 \quad (2.6.7)$$

lo que resulta en la función

$$\dot{V} = -2ae^2 + 2k_p(er + \dot{\theta})\phi \quad ; \quad a > 0 \quad (2.6.8)$$

seleccionando la ley de adaptación como

$$\dot{\theta} = -er \quad (2.6.9)$$

entonces

$$\dot{V} = -2ae^2 \leq 0 \quad (2.6.10)$$

Lo que implica que  $e$  y  $\phi$  son acotadas.

## 2.7. Problemas de inestabilidad

Uno de los mayores retos al diseñar un controlador es el desempeño ante incertidumbres y perturbaciones, usualmente, para sistemas donde las perturbaciones son pequeñas y acotadas, es suficiente con el diseño de un control robusto, el cual garantiza un buen desempeño y estabilidad en lazo cerrado para cierto rango de incertidumbres y perturbaciones. Por otra parte, el control adaptable puede ser usado para superar las incertidumbres y perturbaciones mediante la adaptación del controlador [25].

Los controladores adaptables son en esencia, controles no lineales, es decir, el sistema en lazo cerrado es no lineal. La estabilidad de un sistema no lineal depende de las entradas del sistema, incluidas las perturbaciones. Para algunos sistemas no lineales asintóticamente estables, las perturbaciones de energía finita pueden llevar al sistema a un estado donde las trayectorias no convergen hacia el origen. En los sistemas de control adaptable, es necesario tomar en cuenta la presencia de incertidumbres en el análisis de estabilidad [25].

Se sabe además, que el control adaptable es sensible a las condiciones iniciales, lo cual puede reflejarse en problemas de inestabilidad debido a que no existe una convergencia al origen o a la referencia deseada puesto que el controlador en su estado inicial no logra una adaptación satisfactoria [2].

Por lo anterior, es necesario realizar un análisis del sistema en lazo cerrado utilizando el Teorema de pequeñas ganancias (*Small Gain Theorem*) [26], el cual da las condiciones suficientes para determinar la estabilidad de un sistema Lure consistente en la interconectado de un sistema lineal y un no lineal sin memoria. Mediante este Teorema se pueden detectar los incrementos / decrementos que sufre la señal en cuestión, mediante una medición de su norma, mientras ésta pasa por el sistema.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (2.7.1)$$

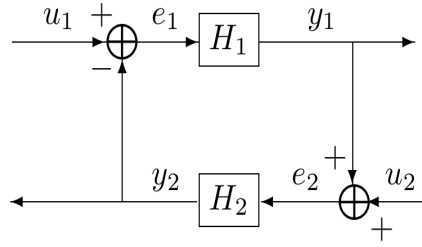


Figura 2.5: Diagrama del sistema interconectado.

**Teorema 1 (Teorema de pequeñas ganancias)** *Supóngase un diagrama a bloques como el que se muestra en la Fig. 2.5, en donde ambos sistemas son de ganancia finita  $\mathcal{L}_2$  estable, es decir, señales de energía finita, suponga además que el sistema retroalimentado está bien definido en sentido de que, para cada par de entradas  $u_1 \in \mathcal{L}_{2e}^m$  y  $u_2 \in \mathcal{L}_{2e}^q$  existen unas únicas salidas  $e_1, y_2 \in \mathcal{L}_{2e}^m$  y  $e_2, y_1 \in \mathcal{L}_{2e}^q$ , donde  $\mathcal{L}^q$  es en esencia el mismo espacio que  $\mathcal{L}^m$ , excepto que el número de salidas variables  $q$ , es en general, diferente del número de entradas variables  $m$  y  $\mathcal{L}_e^m$  es un espacio lineal que contiene al espacio  $\mathcal{L}^m$  como un sub espacio, el cual nos permite lidiar con señales no acotadas monótonamente crecientes y el sub índice  $\tau$  denota un truncamiento, la conexión retroalimentada de la Fig. 2.5, tiene ganancia finita  $\mathcal{L}_2$  estable si  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ .  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  denotan las ganancias finitas de los sistemas interconectados.*

**Prueba:**

$u_\tau$  es un truncamiento de  $u$  definido como

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

Suponiendo la existencia de una solución se puede escribir

$$e_{1\tau} = u_{1\tau} - (H_2 e_2)_\tau, \quad e_{2\tau} = u_{2\tau} + (H_1 e_1)_\tau \quad (2.7.2)$$

entonces

$$\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|(H_2 e_2)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 \quad (2.7.3)$$

$$\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 (\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1) + \beta_2 \quad (2.7.4)$$

$$= \gamma_1 \gamma_2 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + (\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) \quad (2.7.5)$$

Como  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ ,

$$\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) \quad (2.7.6)$$

para todo  $\tau \in [0, \infty)$ . De manera similar

$$\|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1 + \gamma_1 \beta_2) \quad (2.7.7)$$

Para todo  $\tau \in [0, \infty)$ . La prueba se completa al notar que, el error,  $\|e\|_{\mathcal{L}} \leq \|e_1\|_{\mathcal{L}} + \|e_2\|_{\mathcal{L}}$  lo cual se obtiene al utilizar la desigualdad del triángulo. ■

El siguiente Teorema establece propiedades generales del algoritmo de descenso gradiente y garantiza la existencia de una solución cuando el vector  $w$ , que origina el identificador, es una función del tiempo continua a trozos. El Teorema es válido para cualquier vector  $w$ , sin importar su dimensión [2].

**Teorema 2** *Considere la ecuación lineal del error,*

$$e_1 = \phi^T w$$

*junto con el algoritmo de descenso gradiente normalizado*

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} = -g \frac{e_1 w}{1 + \gamma w^T w}$$

*donde  $w : \mathcal{K}_+ \Rightarrow \mathcal{K}^{2n}$  es una función continua a trozos, entonces*

$$\begin{cases} \frac{e_1}{\sqrt{1+\gamma w^T w}} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty \\ \phi \in \mathcal{L}_\infty, \dot{\phi} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty \\ \beta = \frac{\phi^T w}{1+\|w_t\|} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty \end{cases} \quad (2.7.8)$$

**Prueba:**

Sea  $v = -\phi^T \phi$  entonces

$$\dot{v} = -\frac{2ge_1^2}{1+\gamma w^T w} \leq 0 \quad (2.7.9)$$

por lo tanto,  $0 \leq v(t) \leq v(0)$  para todo  $t \geq 0$ , de modo que  $v, \phi, \frac{e_1}{\sqrt{1+\gamma w^T w}}, \beta \in \mathcal{L}_\infty$ . Usando el hecho de que  $\frac{x}{1+x} \leq$  para todo  $x \geq 0$ , se tiene que  $|\dot{\phi}| \leq (\frac{g}{\gamma}|\phi|)$  y  $\dot{\phi} \in \mathcal{L}_\infty$ . Dado que  $v$  es una función positiva y monotonamente decreciente, el límite  $v(\infty)$  es bien definido y

$$-\int_0^\infty \dot{v} dt < \infty \quad (2.7.10)$$

lo que implica que  $\frac{e_1}{\sqrt{1+\gamma w^T w}} \in \mathcal{L}_2$ . Nótese que

$$\beta = \frac{e_1}{\sqrt{1+\gamma w^T w}} \frac{\sqrt{1+\gamma w^T w}}{1+\|w_t\|_\infty} \quad (2.7.11)$$

donde el primer término está en  $\mathcal{L}_2$  y el segundo término en  $\mathcal{L}_\infty$ , tal que  $\beta \in \mathcal{L}_2$  puesto que

$$|\dot{\phi}|^2 \leq \frac{g^2}{\gamma} \frac{\phi^2}{1+\gamma w^T w} \quad (2.7.12)$$

resultando en  $\dot{\phi} \in \mathcal{L}_2$

■

## 2.8. Leyes de adaptación con normalización.

Existen muchos ejemplos que ilustran el diseño de varios tipos de leyes de adaptación suponiendo que se tiene disponible el estado completo de la planta para medirse, que la planta es estable y que su entrada es acotada [14].

Consideremos una planta general *Single Input Single Output*, SISO por sus siglas en inglés, descrita por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.8.1)$$

donde  $x \in \mathcal{R}^n$  y sólo  $y, u$  están disponibles para medirse, la ecuación (2.8.1) puede escribirse también como

$$y(s) = C(sI - A)^{-1} Bu(s) + C(sI - A)^{-1} x_0 \quad (2.8.2)$$

que puede ser expresada como

$$y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} u(s) + \frac{C \text{adj}(sI - A) x_0}{D(s)} \quad (2.8.3)$$

donde *adj* denota la matriz adjunta y  $N(s), D(s)$  tienen la forma

$$\begin{cases} Z(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0 \\ R(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \end{cases}$$

Las constantes  $a_i, b_i \forall i = 0, 1, \dots, n-1$  son los parámetros de la planta. Seleccionando una parametrización conveniente puede permitir la selección de alguno de los métodos de identificación propuestos en [2], [14].

Sea

$$\theta^* = [b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0] \quad (2.8.4)$$

el vector que contiene los parámetros conocidos de la planta. Dicho vector  $\theta^*$  es de dimensión  $2n$ . Si algunos de los coeficientes de  $N(s)$  son cero y conocidos, es decir,  $N(s)$  tiene grado de libertad  $m < n-1$  donde  $m$  es conocido, entonces la dimensión de  $\theta^*$  podría reducirse. En [14] se presentan 3 posibles parametrizaciones

$$\begin{cases} z = \theta^{*T} \phi + \eta_0 \\ y = \theta_\lambda^{*T} \phi + \eta_0 \\ y = W(s)\theta_\lambda^{*T} \psi + \eta_0 \end{cases} \quad (2.8.5)$$

en donde

$$z = W_1(s)y, \quad \phi = H(s) \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \quad \psi = H_1(s) \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \quad \eta_0 = (c_0)^T e^{\wedge_c t} B_0 x_0, \quad \theta_\lambda^* = \theta^* - b_\lambda$$

$W_1(s), H(s), H_1(s)$  son matrices de transferencia propias y con polos estables  $b_\lambda = [0, \lambda^T]^T$  es un vector conocido y  $\wedge_c$  es una matriz estable que hace que  $\eta_0$  sea una exponencial decayente a cero, dicho término no es cero debido a sus condiciones iniciales. La función de transferencia  $W(s)$  es una función de transferencia conocida y estrictamente propia con un grado relativo 1, con polos y ceros estables.

Ahora, en vez de manejar cada modelo paramétrico por separado, considérese el siguiente modelo general [14]

$$z = W(s)(\theta^*)^T \psi + \eta_0 \quad (2.8.6)$$

$W(s)$  es una función de transferencia propia y con polos estables,  $z \in \mathbb{R}^1, \psi \in \mathbb{R}^{2n}$  son vectores de señales que están disponibles para ser medidos y  $\eta_0 = (c_0)^T e^{\wedge_c t} B_0 x_0$ . Inicialmente, se puede asumir  $\eta_0 = 0$

$$z = W(s)(\theta^*)^T \psi \quad (2.8.7)$$

esto con el fin de desarrollar leyes de adaptación con la estimación de  $\theta^*$  en línea.

## 2.9. Método de diseño mediante Lyapunov-SPR.

Este es el método dominante en la literatura correspondiente a esquemas de control adaptable ([14], [27], [28], [29]), dicho método implica el desarrollo de una ecuación diferencial que relaciona la estimación o estimación normalizada del error con el parámetro a adaptar mediante una función de transferencia estrictamente positiva real, *SPR por sus siglas en inglés*. Una vez en esta forma, se pueden utilizar los Lemas *Kalman-Yakubovich-Popov*, (*KYP*) o *Mayer-Kalman-Yakubovich* (*MKY*) para seleccionar la función de Lyapunov  $V$  apropiada cuya derivada respecto al tiempo  $\dot{V}$  sea no positiva, es decir  $\dot{V} \leq 0$  mediante la correcta selección de la ecuación diferencial de la ley de adaptación.

El desarrollo de tales ecuaciones de error con *SPR* ha sido uno de los más desafiantes problemas del control adaptable desde su origen, ([27], [28], [29], [30], [31]). En ese entonces, los esfuerzos estaban concentrados en encontrar una transformación apropiada o generar las señales apropiadas que permitan la expresión de la ecuación del error de la estimación/parámetro en la forma deseada.

En esta sección se habla del método de diseño mediante una función de Lyapunov *estrictamente positiva real* para estimar  $\theta^*$  para el diseño de la ley de adaptación utilizando el modelo paramétrico dado por la Ec.(2.8.7), en donde  $\theta^*$  es un vector constante, entonces se puede reescribir dicha ecuación en la forma

$$z = W(s)L(s)(\theta^*)^T \phi \quad (2.9.1)$$

donde

$$\phi = L^{-1}(s)\psi$$

$L(s)$  es escalar y se selecciona tal que  $L^{-1}(s)$  sea una función de transferencia propia y estable y  $W(s)L(s)$  es una función de transferencia propia *estrictamente real positiva*. Sea  $\theta(t)$  el estimado de  $\theta^*$  en cualquier tiempo  $t$ , entonces  $\hat{z}$  es el estimado de  $z$  en tiempo  $t$

$$\hat{z} = W(s)L(s)(\theta)^T \phi \quad (2.9.2)$$



la estimación del error  $\epsilon_1$  se obtiene como

$$\epsilon_1 = z - \hat{z} \quad (2.9.3)$$

y la señal normalizada del error es

$$\epsilon = z - \hat{z} - W(s)L(s)\epsilon\eta_s^2 = \epsilon_1 - W(s)L(s)\epsilon\eta_s^2 \quad (2.9.4)$$

donde  $\eta_s$  es la señal normalizante que se diseña para satisfacer

$$\frac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty, m^2 = 1 + (\eta_s)^2 \quad (2.9.5)$$

Se examinan las propiedades de  $\epsilon$  expresando la Ec. (2.9.4) en términos del error del parámetro  $\tilde{\theta} \triangleq \theta - \theta^*$ , al sustituir  $z$ ,  $\hat{z}$  en la Ec. (2.9.4) se obtiene

$$\epsilon = WL(-\theta^T \phi - \epsilon\eta_s^2) \quad (2.9.6)$$

Cuando  $\phi \in \mathcal{L}_\infty$ , la Ec. (2.9.5) se satisface con  $m = 1$ , por ejemplo,  $\eta_s = 0$  en cuyo caso  $\epsilon = \epsilon_1$

Si  $W(s)$  es de fase mínima, se puede seleccionar  $L(s) = W^{-1}(s)$ , lo cual implica que  $W(s)L(s) = 1$ . Para todo  $WL = 1$ , la ecuación (2.9.6) se convierte en

$$\epsilon = \frac{z - \hat{z}}{m^2} = \frac{\tilde{\theta}^T \phi}{m^2} \quad (2.9.7)$$

donde  $m^2 = (1 + \eta_s)^2$ . En estos casos, no es necesario utilizar los Lemas de KYP o MKY puesto que si la función  $V$  de Lyapunov tiene la forma

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma_a^{-1} \tilde{\theta}}{2} \quad (2.9.8)$$

donde  $\Gamma_a$  es una ganancia arbitraria, entonces seleccionando la ley de adaptación

$$\dot{\theta} = -\Gamma_a \epsilon \phi \quad (2.9.9)$$

y utilizando la Ec.(2.9.7)

$$\dot{V} = -\epsilon^2 m^2 \quad (2.9.10)$$

Durante esta sección se hizo una breve descripción de los antecedentes y conocimientos previos a la presente tesis. A continuación, a lo largo del siguiente capítulo, se presentan los resultados obtenidos.

# Capítulo 3

## Resultados; Control Robusto Adaptable Directo

### 3.1. Introducción

En la presente sección se dan a conocer los resultados obtenidos al realizar esta tesis. Se habla de manera detallada de los parámetros libres de la factorización utilizada del controlador dadas en la sección 2.3, y de cómo es que se utilizaron para lograr la adaptación deseada. Se explica con detalle el tipo de incertidumbres y perturbaciones bajo las cuales fue diseñado el controlador, así como también se habla del control de sensibilidad mezclada de la sección 2.5, de cómo fue que se resolvió el problema de control de sensibilidad mezclada adaptable. La implementación del algoritmo de control robusto adaptable en función del parámetro libre  $r$ , el diseño de un esquema de control con la técnica de Lyapunov SPR y el esquema de control robusto adaptable de dos grados de libertad, son parte de este capítulo, además de las pruebas de estabilidad realizadas. Estos esquemas de control aportan una relación directa entre la parametrización de Youla y la adaptación, pues ésta se realiza entorno al parámetro libre.

### 3.2. Parámetros libres en términos de la norma infinito de la incertidumbre

En el capítulo anterior se presentaron las bases de la parametrización de controladores estabilizantes, así como las expresiones analíticas en su forma general. A lo largo de la presente sección, se expondrán los resultados de la parametrización y en las siguientes secciones la sintonización del controlador para resolver el problema de sensibilidad mezclada con un parámetro libre del controlador  $r$  que es fijo al inicio para resolver dicho problema y posteriormente es considerado como variante en el tiempo como consecuencia de la adaptación.

Considere el esquema de control de la Fig. ?? donde  $P(s) = J(sI - F)^{-1}G \in \mathcal{R}^{p \times m}(s)$  representa la planta nominal,  $K(s)$  es el control adaptable,  $r$  es el parámetro libre,  $u(s)$  y  $y(s)$  son la entrada y salida de la planta respectivamente,  $x_d$  es la referencia deseada para el estado,  $T_1$  es una transformación de similaridad,  $H$  es información conocida del modelo no lineal de incertidumbre propuesto e incluida en la función de transferencia de la salida  $y_\Delta(t)$  a la entrada  $u_\Delta(t)$  de la retroalimentación, siendo  $(G, F, J)$  una representación en espacio de estados de  $P(s)$  en coordenadas originales y  $\Delta := \hat{x}^3 := [x_1^3, \dots, x_n^3]^T$ , representa cada uno de los estados elevado al cubo [10]. El controlador  $K(s)$  es utilizado para resolver un problema de auto ajuste paramétrico de  $r$  en línea mediante la solución de un problema de control de sensibilidad mezclada.

Los controladores estabilizantes son obtenidos de las expresiones de las factorizaciones cooprims izquierda y derecha bajo el cambio de coordenadas  $T_1$  en la configuración del esquema de control mostrado en la fig. ?? para la planta  $(sI_n - A)^{-1}B$ , dadas en [10].

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ B_m s \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \\ I_m s \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (3.2.2)$$

donde  $0 < a \in \mathcal{R}$ ,  $B_m \in \mathcal{R}^{m \times m}$  y  $A_{12}$  son matrices no singulares y

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - A_{22}s - A_{21}A_{12}) \quad M := 2aI_m + A_{22} \quad (3.2.3)$$

La solución de la ecuación Diofántica dada por [10] es

$$X(s) = \begin{bmatrix} a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} & M \end{bmatrix}, \quad Y(s) = B_m \quad (3.2.4)$$

Es importante saber y entender las características de los parámetros libres de la parametrización de todos los controladores estabilizantes descrita en esta sección para un modelo de incertidumbre retroalimentado, pues la ley de adaptación se efectúa sobre ellos.

### 3.3. Estructura del controlador robusto adaptable directo.

Durante esta tesis, se utilizó un diagrama de control con modelo de incertidumbre retroalimentada a la entrada, mostrado en la Fig. 3.1 [13], donde  $T_1$  es una transformación de similaridad,  $G, F, J$  representan la planta nominal, antes de aplicar la transformación  $T_1$ ,  $H$  es conocida e incluida en la función de transferencia de la salida  $y_\Delta$  a la entrada  $u_\Delta$  del modelo de incertidumbre retroalimentada

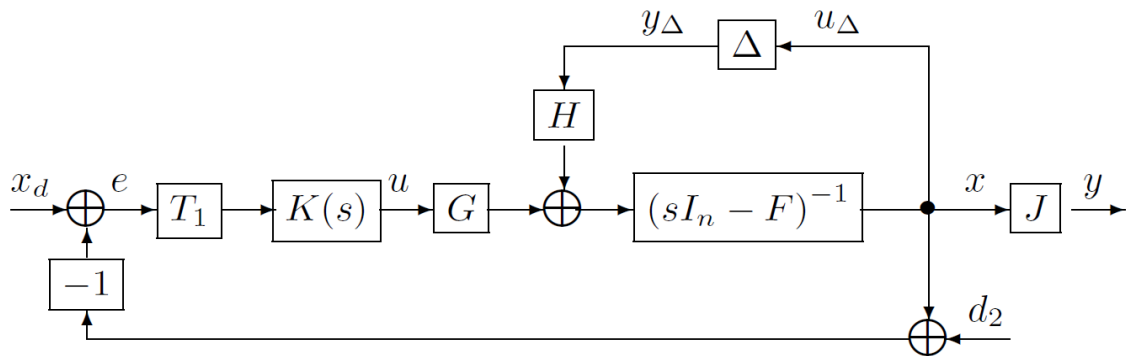


Figura 3.1: Esquema de control con modelo de incertidumbre retroalimentado.

Las ecuaciones (3.2.2) a (3.2.4) son utilizadas para obtener  $K(s)$  de (2.4.1), el modelo de incertidumbre retroalimentada está dado por [13] basado en una linealización parcial del modelo. Considérese un sistema no lineal descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y_p(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones no lineales continuas y diferenciables,  $x(t) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ,  $y_p(t) \in \mathcal{R}^{p \times 1}$  y  $u(t) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  son el estado, la salida y la entrada del sistema, respectivamente.

En el trabajo de [13] existe una proposición hecha para cortar los términos de la expansión de la serie de Taylor, llegando a un modelo parcialmente linealizado cuyo comportamiento se aproxima más al del sistema no lineal. El siguiente modelo es una versión reducida de dicha proposición, después de aplicar la transformación de coordenadas  $T_1$

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t) + H_0[x_1^3, \dots, x_n^3]^T \\ y_p(t) = C\xi(t) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

donde  $H_0 := T_1 H$ .

Dicho modelo es utilizado puesto que su comportamiento resulta más cercano al modelo no lineal linealizado alrededor del punto de equilibrio de interés, esto sucede debido a que el modelo que no incluye el término  $H_0 \hat{x}^3$  logra comportarse de manera similar sólo en una vecindad muy cercana al punto de equilibrio.

Dadas las factorizaciones coprimas izquierda y derecha, el controlador tiene la forma dada por la Ec. (2.4.1)  $K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) = N_k(s)D_k^{-1}(s)$  en donde  $\tilde{D}_k^{-1}(s)$ ,  $\tilde{N}_k(s)$ ,  $N_k(s)$ ,  $D_k^{-1}(s)$  están definidas por la Ec.(2.4.1). Se puede apreciar que las matrices que conforman el controlador son funciones afín con el parámetro libre  $R$ , lo cual resulta ventajoso, puesto que es posible encontrar una representación en espacio de estados de  $K(s)$  i.e.  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$ , tal que se tome en cuenta dicha afinidad para lograr el proceso de auto sintonización, puesto que la representación

mediante una función de transferencia no permite una auto sintonización en línea del parámetro libre.

Sustituyendo las ecuaciones (3.2.2), (3.2.1), (3.2.4) en la Ec. (3.3.3) [32]

$$K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) = (Y(s) - R(s)\tilde{N}(s))^{-1}(X(s) + R(s)\tilde{D}(s)) \quad (3.3.3)$$

en donde

$$\tilde{D}_k(s) = B_m - \left( R(s) \frac{1}{(s+a)^2} \right) \begin{bmatrix} B_m \\ B_m s \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

con  $R_1 = rI_m$  y  $R_2 = 0$ ,  $R = [R_1 \quad R_2]$  se obtiene

$$\tilde{D}_k(s) = \left( \frac{I_m(s+a)^2 - rI_m}{(s+a)^2} \quad B_m \right) \quad (3.3.5)$$

y

$$\tilde{N}_k(s) = \begin{bmatrix} a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} + R_1 \Gamma(s) A_{12}^{-1} & M + R_2 \Gamma(s) \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

donde  $M := 2aI_m + A_{22}$  y sustituyendo  $\Gamma(s)$

$$\tilde{N}_k(s) = \begin{bmatrix} a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} + \frac{r}{(s+a)^2} (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12}) A_{12}^{-1} & M \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

Utilizando la forma canónica de controlabilidad para sistemas MIMO se llega a la representación en espacio de estados dada por [32]

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (r-a^2)I_n & -2aI_n \end{bmatrix}; B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ C_k &= \begin{bmatrix} N_3^k - (a^2-r)N_1^k & N_2^k - 2aN_1^k \end{bmatrix}; D_k = N_1^k \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

donde  $N_1^k := B_m^{-1} [(a^2+r)A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M]$

$N_2^k := B_m^{-1} [(2a^3-r)A_{12}^{-1} + 2aI_m \quad 2aM]$

$N_3^k := B_m^{-1} [a^4 A_{12}^{-1} + (a^2-r)A_{21} \quad a^2 M]$

Una vez definida la estructura que tiene el controlador y su afinidad con el parámetro libre, en la siguiente sección se plantea y se da solución al problema de sensibilidad mezclada que dé una solución analítica a este parámetro.

### 3.4. Solución al problema de sensibilidad mezclada.

El problema de sensibilidad mezclada a resolver está dado por la Ec. (2.5.2), la cual deberá ser minimizada. Para lograr estabilidad robusta, la norma  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$  tiene que ser minimizada en altas frecuencias y al mismo tiempo, para obtener desempeño robusto la norma  $\|S_{ol}\|_\infty$  debe ser minimizada en bajas frecuencias, donde  $S_{ol} := \lim_{s \rightarrow 0} S_o(s)$  y  $T_{u_\Delta y_\Delta h} := \lim_{s \rightarrow \infty} T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$ , siendo  $S_o(s)$  la función de transferencia que representa el desempeño nominal del sistema controlado y  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  es la función de transferencia del sistema de  $y_\Delta(t)$  a  $u_\Delta(t)$ . La minimización simultánea de las normas conduce a la solución del problema de control de sensibilidad mezclada, tal que el control robusto obtenido garantiza estabilidad robusta y desempeño robusto bajo la presencia de incertidumbres y perturbaciones admisibles, donde  $S_o(s)$  es la función de transferencia de  $x_d(t)$  a  $e(t)$ , cuando esta norma infinito se minimiza en bajas frecuencias, entonces utilizando el Lema de Parseval  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0$  cuando la norma-2 de  $x_d(t)$  es acotada y cuando la norma infinito de  $T_{u_\Delta y_\Delta}$  se minimiza en altas frecuencias se garantiza la estabilidad robusta utilizando el Teorema de pequeñas ganancias dado en la sección 2.7. Lograr esto implica que el parámetro libre de la parametrización de Youla  $r$  se pueda *auto sintonizar* bajo el esquema de control propuesto en la Fig. 3.2.

La solución analítica de  $r$ , es presentada por

#### **Lema 3 (Expresión analítica en términos de la norma infinito de la incertidumbre)**

*Considere la función de transferencia de  $y_\Delta(t)$  a  $u_\Delta(t)$ ,  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  y la función de transferencia del desempeño nominal del sistema controlado  $S_o(s)$  en un esquema de control como el que se muestra en la Fig. 3.2. Considere una realización dada por la ecuación (3.3.8) en espacio de estados asumiendo que la planta es observable y controlable utilizando el cambio de base dado en (1.2.3), en el esquema de control de la Fig. 3.2 y la solución de la ecuación Diofantina dada por la Ec. (3.2.4). Sea la referencia al estado*



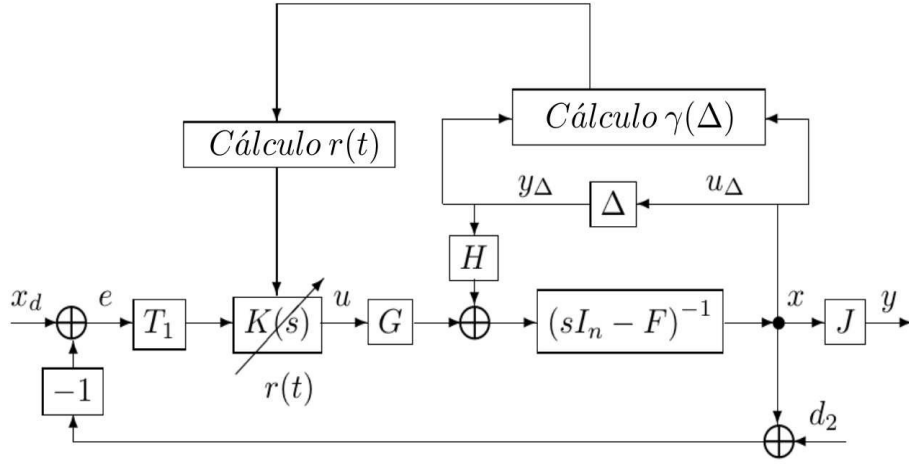


Figura 3.2: Esquema de control con retroalimentación de incertidumbre y auto sintonización.

deseado  $x_d(t) = [y_d(t) \ 0]^T$ , el parámetro libre  $R(s) := [R_1(s) \ R_2(s)] \in \mathcal{KH}_\infty$  donde  $R_1(s) = rI_m \in \mathcal{K}^{m \times m}$  y  $R_2(s) = 0 \in \mathcal{KH}_\infty$ .

El parámetro libre  $r$  que resuelve la ecuación

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (3.4.1)$$

para una salida de un modelo con incertidumbre retroalimentada es

$$r = a^2 - \frac{a^4 \|T_1^{-1} H_0\|_\infty}{\omega_h \|A_{12} A_{21}\|_\infty} \quad (3.4.2)$$

donde  $H_0 = T_1 H$ ,  $a > 0$  y  $a \in \mathcal{R}$  es un parámetro de control, y  $\omega_h$  es una frecuencia fija en el ancho de banda de altas frecuencias de la planta.

### Prueba:

El diseño del controlador  $K(s)$  está pensado en las nuevas coordenadas después de aplicar la transformación  $T_1$ . De la Fig. ??, la función de transferencia de  $y_\Delta(t)$  a  $u_\Delta(t)$  es  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s) = T_1^{-1} [I + (sI - A)^{-1} BK]^{-1} (sI - A)^{-1} H_0$  donde  $H_0 = T_1 H$ , la aproximación en altas frecuencias es  $\Gamma(s)$  y  $K(s)$  están dadas por la Ec. (3.4.3), dado

que  $R_1(s) = rI_m$  y  $R_2(s) = 0$ ,

$$\begin{cases} \Gamma_h = I_m \\ K_h = B_m^{-1} \left[ (a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M \right] \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Entonces, la aproximación en altas frecuencias de  $T_{u_{\Delta}y_{\Delta}}(s)$  es,

$$T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h} = T_1^{-1} \left[ I + \frac{1}{\omega_h} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \left[ (a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M \right] \right]^{-1} \frac{1}{\omega_h} H_0 \quad (3.4.4)$$

donde  $M := 2aI_m + A_{22}$ . Entonces,  $T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h}$  también puede ser aproximada en altas frecuencias,

$$T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h} = T_1^{-1} \frac{1}{\omega_h} H_0 \quad (3.4.5)$$

La aproximación en bajas frecuencias de  $\Gamma(s)$  y  $K(s)$  se puede obtener de la misma manera, puesto que  $R_1(s) = rI_m$ ,  $R_2(s) = 0$  y de la Ec. (3.2.3),

$$\begin{cases} \Gamma_l = \frac{-1}{a^2} A_{21} A_{12} \\ K_l = B_m^{-1} \left[ \frac{a^4}{a^2 - r} A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M \right] \end{cases} \quad (3.4.6)$$

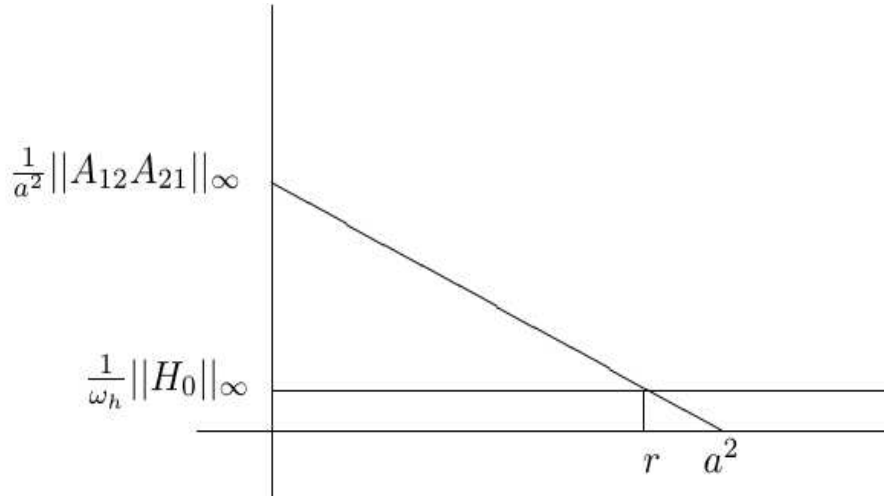


Figura 3.3: Relación geométrica entre  $\|S_{ol}\|_{\infty}$  y  $\|T_{u_{\Delta}y_{\Delta}h}\|_{\infty}$ .

$S_{ol}$  se obtiene de  $S_{ol} = I - N_l \tilde{N}_{kl}$  [12]

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} A_{12} (\frac{r}{a^2} - 1) A_{21} & -\frac{1}{a^2} A_{12} M \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

Con estas aproximaciones se puede obtener una expresión analítica de  $r$  mediante la interpretación de la relación geométrica existente mostrada en la Fig. 3.3. Esta expresión es calculada sabiendo que la norma  $\|S_{ol}\|_\infty$  decrece conforme el parámetro  $r$  crece, tomando ventaja de la relación geométrica entre ambas aproximaciones, usando la ecuación de la pendiente. Como la referencia de la entrada es  $x_d(t) = [y_d(t) \ 0]^T$  se considera para resolver (3.4.1) siendo

$$\begin{cases} \|S_{ol}\|_\infty = \frac{1}{a^2} |\frac{r}{a^2} - 1| \|A_{12} A_{21}\|_\infty \\ \|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \frac{1}{\|T_1^{-1} \frac{1}{\omega_h} H_0\|_\infty} \end{cases} \quad (3.4.8)$$

La Fig. 3.3 muestra una línea recta para cada  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$  y  $\|S_{ol}\|_\infty$  respectivamente, entonces la ecuación de restricción  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$  tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas, esto es  $mr + b = (\frac{1}{a^4}) \|A_{12} A_{21}\|_\infty (1 - (\frac{1}{a^4})r)$ .

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{0 - \frac{\|A_{12} A_{21}\|_\infty}{a^2}}{a^2 - 0} r + \frac{1}{a^2} \|A_{12} A_{21}\|_\infty = \frac{1}{\omega_h} \|H_0\|_\infty \quad (3.4.9)$$

lo que implica el resultado (3.4.2). ■

Con este método es posible obtener una solución de  $r$  que logre la auto sintonización, debido a que dicha solución aprovecha que  $r$  es afín a las matrices del espacio de estados del controlador, logrando que pueda cambiar si dichas matrices cambian, logrando la *adaptación* del controlador, aun cuando existen incertidumbres en el proceso. En la siguiente sección se analiza la estabilidad de todo el conjunto del sistema de la Fig. 3.2.

### 3.5. Análisis de estabilidad del control robusto adaptable.

Esta sección esta dedicada específicamente a la prueba de la estabilidad de todo el sistema de la Fig. 3.4. El problema principal de todo esto es que el sistema tiene una dinámica no lineal, esto sucede como consecuencia del proceso de auto sintonización aunado al modelo de la incertidumbre, el cual es no lineal. Para probar la estabilidad del sistema como conjunto, incluyendo las no linealidades previamente descritas, se utiliza el *Teorema de pequeñas ganancias* dado en la sección 2.7 para sistemas no lineales [25]. Siguiendo la estructura del esquema presentado en la Fig. 3.2 y el cambio de coordenadas de  $T_1$  las ecuaciones para el sistema son

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + H_0 y_\Delta(t) + Bu(t) \\ \dot{\xi}_k(t) = A_k(r)\xi_k(t) + B_k(\xi_d(t) - u_\Delta(t)) \\ u(t) = C_k(r)\xi_k(t) + D_k(r)(\xi_d(t) - u_\Delta(t)) \end{cases} \quad (3.5.1)$$

donde de la Fig. 3.2  $x = u_\Delta$  y  $\xi = T_1 x = T_1 u_\Delta(t)$ , para el análisis de estabilidad puede suponerse que  $\xi_d(t) = 0$ , entonces, las ecuaciones en lazo cerrado son

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k(t) &= A_k(r)\xi_k(t) - B_k(u_\Delta(t)) \\ \dot{u}_\Delta(t) &= Au_\Delta(t) + BH_0 y_\Delta(t) + B[C_k(r)\xi_k(t) - D_k(r)(u_\Delta(t))] \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

de la Ec. (3.5.2) se obtiene el siguiente espacio de estados de  $T_{u_\Delta y_\Delta}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_k(t) \\ \dot{u}_\Delta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_k(r) & -B_k \\ BC_k(r) & A - BD_k(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ BH_0 \end{bmatrix} y_\Delta(t) \\ u_\Delta(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Dado por el Teorema de pequeñas ganancias para sistemas no lineales, la condición que se debe satisfacer para garantizar estabilidad es

$$\gamma_1(\Delta)\gamma_2(T_{u_\Delta y_\Delta}) < 1 \quad (3.5.4)$$

Dado el modelo de incertidumbre no lineal, como el propuesto en la Fig. 3.2 la ganancia finita de la incertidumbre  $\gamma_1(\Delta)$  puede ser obtenida en línea. Utilizando el criterio del sector para sistemas no lineales [25] la incertidumbre  $\gamma_1(\Delta)$  es calculada utilizando las normas  $\|y_\Delta(t)\|_2$  y  $\|u_\Delta(t)\|_2$  respectivamente como se muestra en la Fig. 3.4,

$$\|y_\Delta(t)\|_2 \leq \gamma(\Delta)\|u_\Delta(t)\|_2 + \beta \quad (3.5.5)$$

El valor  $\gamma_1$  se conoce de la Ec. (3.5.5) por la medición de las normas  $\|y_\Delta(t)\|_2$  y  $\|u_\Delta(t)\|_2$ . De manera similar, es posible obtener  $\gamma_2$  utilizando el criterio del sector

$$\left\| \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \gamma_2 \|y_\Delta\|_2 + \beta_2 \quad (3.5.6)$$

Por lo tanto, si las normas  $\left\| \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} \right\|_2$  y  $\|y_\Delta\|_2$  cumplen la condición de la desigualdad (3.5.4)  $\forall t \in [t_0, t_f]$  entonces el sistema como conjunto es estable.

Las pruebas de estabilidad presentadas en esta sección demuestran la viabilidad de dicho controlador, sin embargo, se compara en las siguientes secciones con técnicas de control adaptable para su análisis.

### 3.6. Ley de adaptación mediante Lyapunov SPR.

El diseño de leyes de adaptación utilizando funciones de Lyapunov es sin dudas, una de las maneras más populares de realizar dicha ley, donde *SPR* significa *estrictamente positivo real* por sus siglas en inglés. En la presente tesis se realizó el diseño de una ley de adaptación bajo esta técnica, utilizando un esquema de control diferente a los presentados hasta ahora, dicho esquema puede ser apreciado en la Fig.3.4 donde las ecuaciones del modelo y de la planta linealizada están dadas por.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= Ax_m + B\theta^*\mathcal{V} + H_0[x_1^3, \dots, x_n^3]^T \\ y_m &= Cx_m + D\theta^*\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

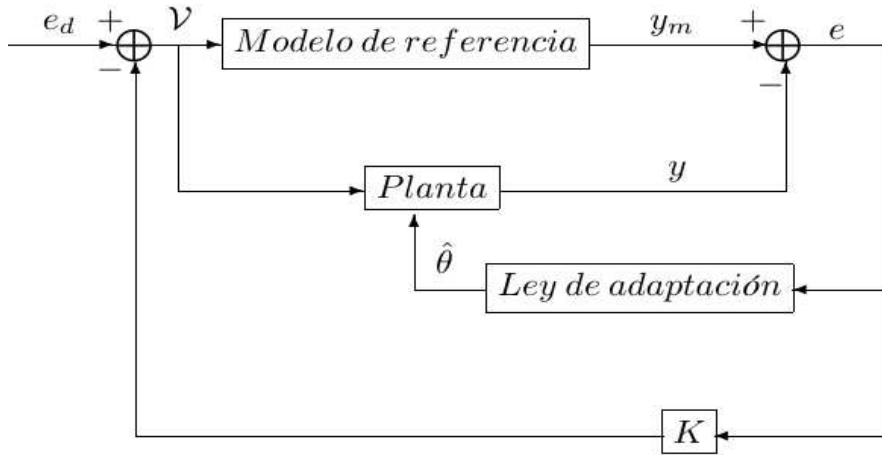


Figura 3.4: Esquema de control con retroalimentación de incertidumbre y auto sintonización.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\theta\mathcal{V} + H[\xi_1^3, \dots, \xi_n^3]^T \\ y &= Cx + D\theta\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Tal como se menciona en la sección 2.9, es posible generar una ecuación del error entre la planta y el modelo en función del vector de parámetros  $\tilde{\theta}$ , para posteriormente, proponer una función de Lyapunov  $V$  que lleve a una ley de adaptación capaz de solucionar el problema. En este caso, la ecuación del error está descrita por

$$\dot{e}_x = A(x_m - \xi) + B(\theta^* - \theta)\mathcal{V} \quad (3.6.3)$$

esto es

$$\dot{e}_x = Ae_x + B\tilde{\theta}\mathcal{V} \quad (3.6.4)$$

dada la ecuación Ec. (3.6.3) se propone una función candidata de Lyapunov de la forma

$$V(\dot{x}_m, \tilde{\theta}) = e_x^T e_x + r\tilde{\theta}^2 \quad (3.6.5)$$

y su derivada, la función  $\dot{V}$  es

$$\dot{V}(e_x, \tilde{\theta}) = 2e_x^T \dot{e}_x + 2r\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \quad (3.6.6)$$

sustituyendo la Ec. (3.6.4) en la Ec. (3.6.6)

$$\dot{V}(e_x, \phi) = 2e_x^T A e_x + 2\phi(e_x^T B \mathcal{V} + r\dot{\phi}) \quad (3.6.7)$$

de esta manera se puede ver que  $-2e_x^T A e_x > 0$ , puesto que  $A$  es definida negativa utilizando el criterio de Sylvester y la estructura del vector de parámetros es  $\dot{\tilde{\theta}} = -e_x^T B \mathcal{V}$ .

Tomando como motivación el uso de un método clásico dentro del control adaptable, como el método de Lyapunov SPR, en la siguiente sección se presenta un nuevo esquema que combine las técnicas clásicas de control robusto y control adaptable.

### 3.7. Adaptación del parámetro libre mediante algoritmo gradiente

A lo largo de la sección 3.3 se proponen las bases para la realización de un controlador robusto adaptable, mediante la solución a un problema de sensibilidad mezclada, esto mientras el parámetro  $r$  varía en el tiempo. Durante esta sección, se presentan los resultados al solucionar el problema de la auto sintonización de manera diferente, ya que se propuso un esquema de control diferente a los ya presentados, con el fin de proceder a diseñar la ley de adaptación utilizando un algoritmo gradiente.

Como se aprecia en la Fig. 3.5, existe un modelo de referencia, sin incertidumbres, y una planta incierta. La idea de este esquema es la de encontrar una ecuación del error entre el modelo y la planta para generar la ley de adaptación, existe además una *señal de excitación persistente*, SEP por sus siglas, y un controlador  $K(s, r)$  de la parametrización de todos los controladores estabilizantes del trabajo de [17], donde la planta incierta está dada por la ecuación (3.3.2). Durante el desarrollo de esta





$$\begin{aligned}\tilde{D}_k(s) &= \frac{1}{s+a} \left( sI_m + Y_0 - \frac{1}{s+a} R_1(s) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) &= \frac{1}{s+a} \left[ X_1 s + Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m + (s+a) R_1(s) \Gamma(s) \right] A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}\end{aligned}\tag{3.7.3}$$

Así, es posible determinar una ley de adaptación en que el controlador  $K(s)$  de la planta *adapte* el parámetro libre  $r$  al valor dado por el modelo. Al utilizar la parametrización de todos los controladores estabilizantes, al igual que en la sección 3.3, es necesario encontrar una representación en espacio de estados del controlador, pues su representación en función de transferencia no permite la modificación del parámetro libre  $r$ . Para ello fue necesario obtener las representaciones en espacio de estados individual tanto de  $\tilde{D}_k^{-1}(s)$  como  $\tilde{N}_k(s)$  ya que existe un alto grado de complejidad al obtenerlo como un todo.

La representación en espacio de estados de  $\tilde{D}_k^{-1}(s)$  se obtiene partiendo de la ecuación diferencial (3.7.3), donde

$$u = K(s)e$$

$$u = \left( \tilde{D}_k^{-1}(s) \tilde{N}_k(s) \right) e$$

$$u = \left[ (s+a)^2 B_m^{-1} [(sI_m + Y_0)(s+a) - R_1]^{-1} \tilde{N}_k(s) \right] e\tag{3.7.4}$$

la ecuación de la entrada está dada por,

$$u = (s+a)^2 B_m^{-1} \zeta$$

definiendo al sistema auxiliar,

$$\zeta(s) = [(sI_m + Y_0)(s+a) - R_1]^{-1} \tilde{e}(s)\tag{3.7.5}$$

donde  $\tilde{e}(s) = \tilde{N}_k e$ , entonces

$$\left[ s^2 I_m + s I_m a + Y_0 s + Y_0 a - R_1 \right] \zeta(s) = \tilde{e}(s)\tag{3.7.6}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace a la Ec. (3.7.6),

$$\ddot{\zeta} = -(I_m a + Y_0)\dot{\zeta} - (Y_0 a - R_1)\zeta + \tilde{e}(s) \quad (3.7.7)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace y sustituyendo la Ec. (3.7.7),

$$\begin{aligned} u &= B_m^{-1} (\ddot{\zeta} + 2a\dot{\zeta} + a^2\zeta) \\ &= B_m^{-1} (-(I_m a + Y_0 - 2aI_m)\dot{\zeta} - (Y_0 a - R_1 - a^2 I_m)\zeta + \tilde{e}(s)) \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

seleccionando las variables de estado como  $x_{k1} = \zeta$  ;  $x_{k2} = \dot{\zeta}$ , la realización del espacio de estados de  $\tilde{D}_k^{-1}$  es

$$\begin{aligned} A_{Dk} &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -(Y_0 a - R_1)I_m & -(I_m a + Y_0) \end{bmatrix}; B_{Dk} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \\ C_{Dk} &= (B_m)^{-1} [-(Y_0 a - R_1 - a^2 I_m) \quad -(I_m a + Y_0 - 2a^2 I_m)]; D_{Dk} = B_m^{-1} \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Siguiendo un procedimiento similar para la realización del espacio de estados correspondiente a  $\tilde{N}_k$ , utilizando la forma canónica de controlabilidad.

sustituyendo  $\Gamma(s)$

$$\tilde{N}_k(s) = \left[ \frac{(X_1 s + Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m)(s + a) + R_1 (s^2 I_m - s A_{22} - A_{21} A_{12})}{(s + a)^2} \right] \quad (3.7.10)$$

definiendo una variable auxiliar

$$\beta := Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m$$

factorizando

$$\tilde{N}_k(s) = \frac{s^2(X_1 + R_1 I_m) + s(X_1 a + \beta - R_1 A_{22}) + (\beta a - R_1 A_{21} A_{12})}{s^2 + 2as + a^2} A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$$

de donde se puede llevar a la forma

$$\begin{aligned} A_{Nk} &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -a^2 I_m & -2a I_m \end{bmatrix}; B_{Nk} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \\ C_{Nk} &= \begin{bmatrix} N_3^k - a^2 N_1^k & N_2^k - 2a N_1^k \end{bmatrix}; D_{Nk} = N_1^k \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

donde

$$\begin{aligned} N_1^k &= (X_1 + R_1 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\ N_2^k &= (a X_1 - 2a R_1 + \beta - R_1 A_{22}) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\ N_3^k &= (\beta a - R_1 A_{21} A_{12}) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \end{aligned}$$

**Lema 4** Considere las expresiones analíticas que forman los controladores  $K(s, r)$  y  $K(s, r_m)$  dado por la Ec. (2.4.1) utilizando la parametrización descrita en la Ec. (3.7.3), bajo el esquema de la Fig. 3.5. Considere la realización en espacio de estados de  $\tilde{N}_k$  y  $\tilde{D}_k^{-1}$  dadas por las ecuaciones (3.7.9) y (3.7.11) bajo la suposición de que la planta es observable y controlable y la solución de la ecuación Diofantina dada por la Ec. (2.3.4). Sea la referencia de entrada deseada  $x_d(t) = \begin{bmatrix} y_d(t) & 0 \end{bmatrix}^T$ , el parámetro libre del controlador  $R(s) := \begin{bmatrix} R_1(s) & R_2(s) \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$ , donde  $R_1(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Sea  $R_1 = r I_m \in \mathcal{R}^{m \times m}$  y  $R_2(s) = 0 \in \mathcal{RH}_\infty$ .

La ecuación del error (3.7.1) es parametrizada de la forma

$$e_y = \theta^T \phi + \eta \quad (3.7.12)$$

donde  $\theta$  es el vector de parámetros estimados  $R_1$ . Siendo  $\phi = w(s)\psi$ , el parámetro  $\psi$  representa señales conocidas o medibles,  $y_{\Delta 1}$ ,  $w(s)$  es un parámetro de diseño que representa una función de transferencia estrictamente propia y real. El término  $\eta$  representa las dinámicas no modeladas de la planta.

Donde la ley de adaptación está definida por

$$\dot{\theta} = -g \frac{e w}{1 + \gamma w^T w} \quad (3.7.13)$$

Con ello, el parámetro libre  $r(s)$  en la configuración de un grado de libertad del controlador, se adapta al parámetro  $r_m(s)$  del controlador del modelo de referencia.

**Prueba:** El controlador  $K(s)$  es diseñado en las nuevas coordenadas después de aplicar la transformación  $T_1$ . De la Fig. 3.5 la ecuación del error para la configuración del esquema de la Fig. 3.5 es

$$e_y = C(\xi - \xi_m) \quad (3.7.14)$$

el error en la salida  $e_y$  se puede definir en términos de la parametrización como

$$e_y = \theta^T \phi = S_o(s)(sI - A)^{-1} H_0 y_\Delta$$

en base a lo anterior, para llegar a la forma deseada se sustituye la Ec. (3.7.2) en la Ec. (3.7.14)

$$e_y = C \left( \left[ (sI - A)^{-1} BK(r, s) + I \right]^{-1} (sI - A)^{-1} H_0 y_\Delta \right) \quad (3.7.15)$$

donde la función sensibilidad a la salida, en el esquema de control de un parámetro libre es

$$S_o(s) = (I + PK)^{-1} = [I + (sI - A)^{-1} BK(s, r)]^{-1} = [I - N\tilde{N}_k]x_d$$

Esta parametrización es posible al obtener la expresión numérica analítica correspondiente a la Ec. (3.7.15). Esto debido a que  $N\tilde{N}$  son funciones afín del parámetro libre  $r$ , o en su defecto,  $R_1$ , además de que  $(sI - A)^{-1}$  genera combinaciones lineales de dichas funciones afín, por lo que, siguen conteniendo al parámetro  $r$ .

El vector de señales medibles  $\psi$  se selecciona como la salida  $y_\Delta$  de la perturbación,  $w(s)$  es un parámetro de diseño correspondiente a una función de transferencia estrictamente propia y real, en este caso, seleccionada como

$$w(s) = \frac{s^4 + 18s^3 + 119s^2 + 342s + 360}{s^4 + 22s^3 + 164s^2 + 488s + 480}$$

teniendo como grado máximo del polinomio el mismo que la planta, dado lo anterior, se puede definir

$$\phi = w(s)\psi \quad (3.7.16)$$

Una vez que  $e_y$  dado, la Ec. (3.7.1) es llevada a la forma de la Ec. (3.7.12), se selecciona la ley de adaptación diseñada por algoritmo gradiente, utilizando su forma normalizada de la Ec. (3.7.13), donde  $g, \gamma > 0$ , son ganancias de adaptación que ayudan a una convergencia en tiempo finito que garantiza el Teorema 3 de la sección 2.7. La adaptación se completa cuando el error  $\tilde{\theta} = \theta^* - \theta$  que se logra con la adición de una *señal de excitación persistente*.

■

A lo largo del siguiente capítulo se aplican a un robot rotacional planar los resultados obtenidos de los esquemas de control desarrollados en la presente tesis.

# Capítulo 4

## Ejemplo de aplicación

### 4.1. Descripción del capítulo

A lo largo de las secciones anteriores se han presentado las bases y los resultados de este trabajo. En esta sección se describe un ejemplo, en el cual fueron probados los resultados con ayuda del software de simulación Matlab Simulink.

Considere el mecanismo robótico rotacional planar, completamente actuado de 2 articulaciones llamado *dobles péndulo* de la Fig. 4.1, donde  $q_1$  es el ángulo que el eslabón 1 hace respecto al eje horizontal,  $q_2$  es el ángulo que el eslabón 2 hace con el eslabón 1,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los eslabones 1 y 2, respectivamente,  $L_1$  y  $L_2$ , son las longitudes de los eslabones 1 y 2, respectivamente,  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$  son las distancias a los centros de masa de los eslabones 1 y 2, respectivamente. Este robot tiene un actuador en el hombro (eslabón 1) y otro en el codo (eslabón 2). Los eslabones 1 y 2 se mueven independiente uno de otro, y el objetivo de control es el de seguir una referencia dada.

Usando el cambio de coordenadas dado por la Ec. (1.2.3), la realización en espacio de estados del modelo parcialmente linealizado está dada por la Ec. (3.3.2) del doble péndulo en sus nuevas coordenadas

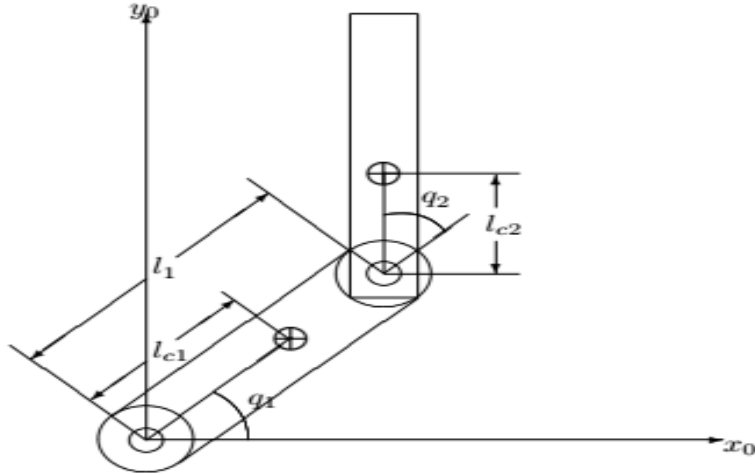


Figura 4.1: Salidas del sistema.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 & 0 & 0 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 1/m_2 \end{bmatrix} \\
 H_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21.3215 & 26.8458 & 0 & 0 \\ 22.0457 & -56.1250 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

donde  $k_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2$  y  $k_2 = m_2 l_{c2}$ .

Se considera el parámetro de control  $a = 10$ , la frecuencia  $\omega_h = 600$  rad/s, las posiciones y velocidades deseadas son  $x_{d1} = 3$ ,  $x_{d2} = 2$ ,  $\dot{x}_{d1} = 0$  y  $\dot{x}_{d2} = 0$ . A dicho sistema se le aplicaron los controles realizados en el capítulo 3, cada uno cuenta con una sección donde se presentan los resultados obtenidos.

## 4.2. Implementación del control robusto adaptable

En esta sección se presentan los resultados correspondientes a lo desarrollado en la sección 3.3, con el controlador dado por la Ec. (3.3.8) y el Lemma 2.

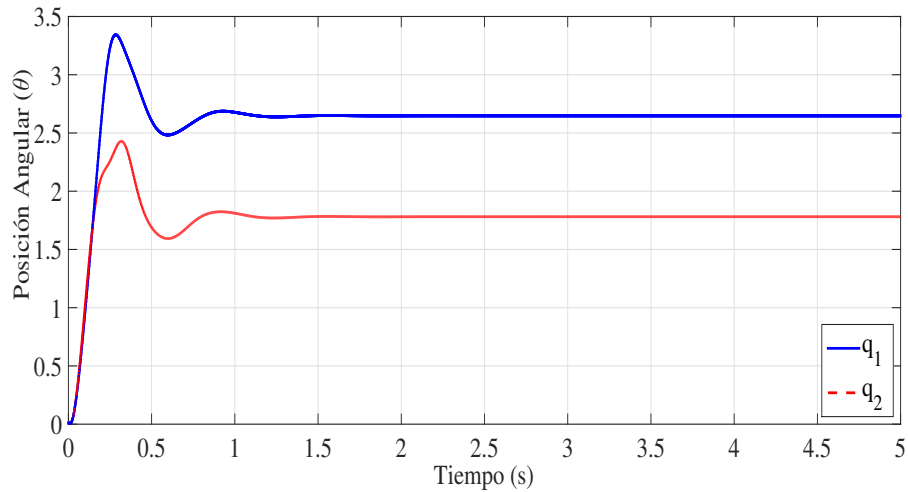


Figura 4.2: Salidas del sistema incierto.

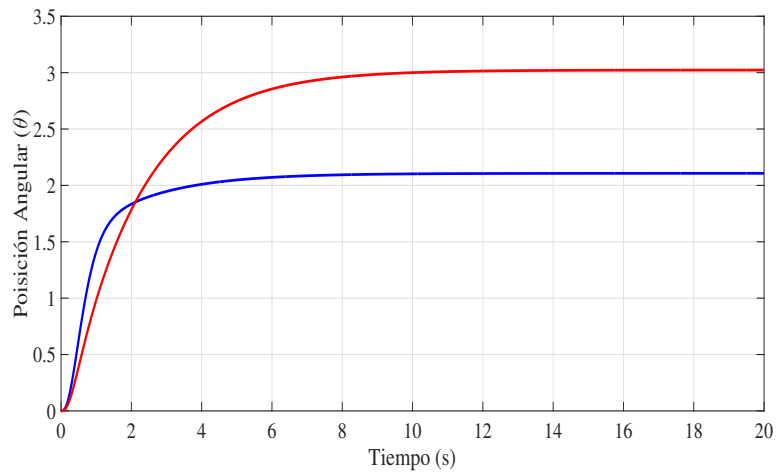


Figura 4.3: Salidas del sistema nominal con  $r$  fijo.

En las Figs 4.2,4.3 y 4.4, se presentan las salidas del sistema incierto, sistema nominal con  $r$  fijo y al sistema incierto con  $r$  fijo, que corresponden a las posiciones



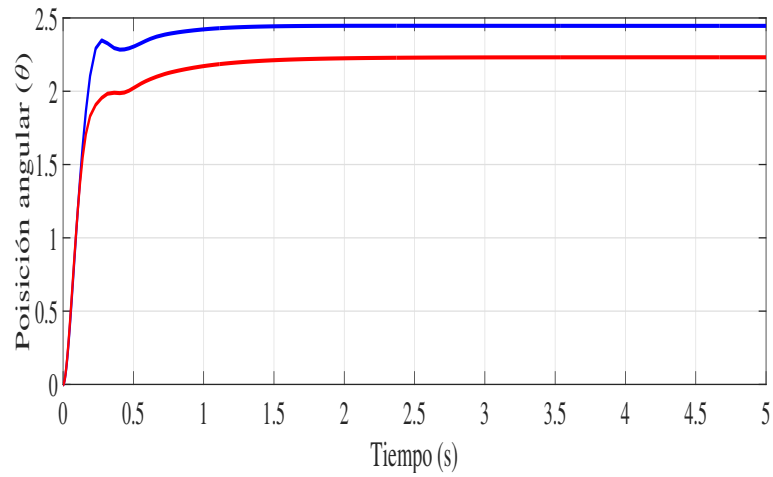


Figura 4.4: Salidas del sistema incierto con  $r$  fijo.

de los eslabones 1 y 2, respectivamente, con una posición de referencia deseada de 2 y 3, respectivamente, en ellas se observa que a pesar de existir incertidumbres en la planta el controlador logra atenuarlas y presentar un buen resultado.

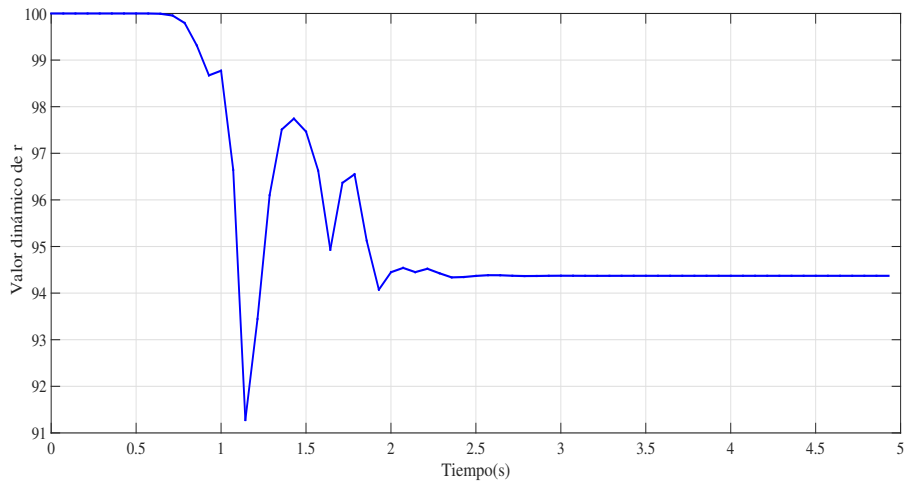


Figura 4.5: Valor dinámico de  $r(t)$ .

Se aprecia un “*buen*” desempeño del controlador, garantizando estabilidad robusta en presencia de incertidumbres, las cuales son atenuadas. En la Fig. 4.5 se aprecia, además, como es que el valor de  $r(t)$  varía con el tiempo, hecho que representa la

adaptación deseada, se puede observar que al inicio del proceso cambia de manera dramática, para finalmente estabilizarse en un valor. Todo esto es debido a que se resuelve el criterio de sensibilidad mezclada. En la sección 3.4 se resuelve un criterio de sensibilidad mezclada para  $r$  fijo y en la sección 3.5 para  $r(t)$ , esto sucede porque al realizarse la auto sintonización en línea, el parámetro  $r$  es tratado como variante en el tiempo.

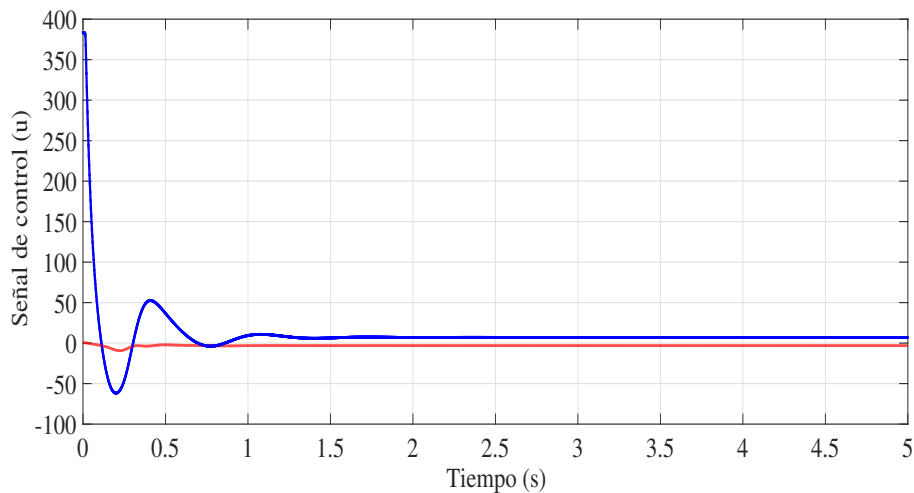


Figura 4.6: Control Signal ( $u$ ).

En la Fig. 4.6 se presenta la señal de control  $u(t)$ , que si bien requiere mucha energía al inicio, se puede saturar para evitar que el mecanismo sufra algún daño, pues realmente el transitorio no es tan grande en esta señal.

Se espera que el algoritmo de sensibilidad mezclada atenúe perturbaciones de  $1\text{ kHz}$  con la selección de  $w_h = 600\text{ rad/s}$ , y la ubicación de los polos en  $-10$  con  $a = 10$  permite atenuar perturbaciones de  $100\text{ Hz}$ , como se muestra en las Figs. 4.8 y 4.7. Las incertidumbres de altas frecuencias representan el ruido en la entrada de medición representado como  $d_2$  en el diagrama de la Fig. 2.1, mientras que las bajas frecuencias se sumaron en la entrada de control  $u(t)$ .

El Teorema de Pequeñas Ganancias garantiza estabilidad robusta si la condición  $\gamma_1\gamma_2 < 1$  se cumple  $\forall t \in [t_0, t_f]$ , en la Fig. 4.9 se muestra el valor de  $\gamma_1\gamma_2$ , satisfaciendo dicho Teorema.

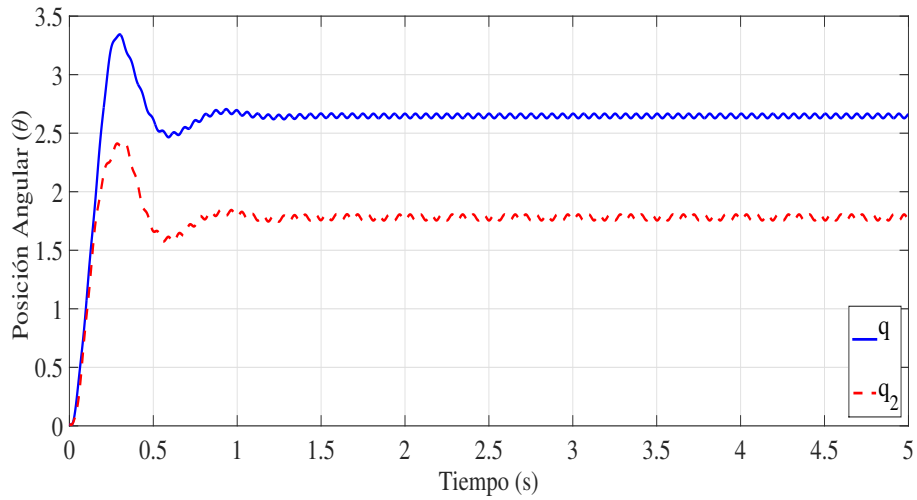


Figura 4.7: Respuesta con incertidumbres de altas frecuencias.

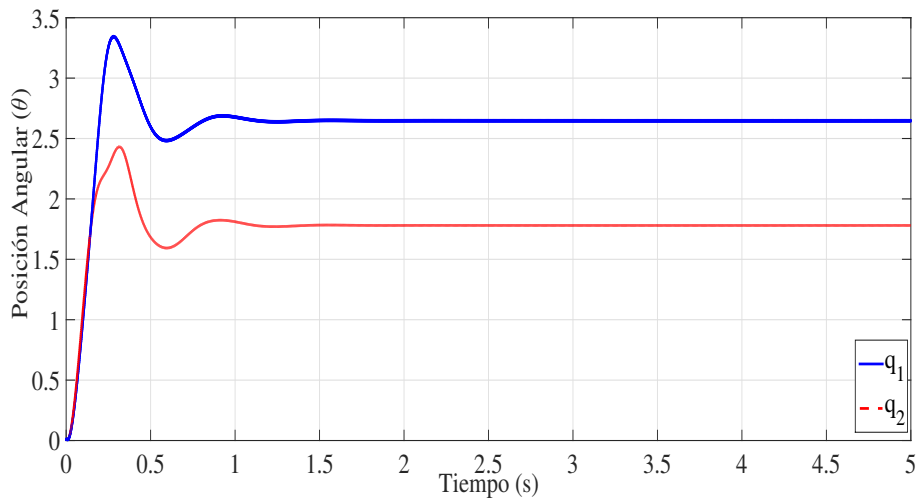


Figura 4.8: Respuesta con incertidumbres de bajas frecuencias.

### 4.3. Implementación del algoritmo diseñado por Lyapunov SPR

A lo largo de esta sección se presentan los resultados al implementar el algoritmo diseñado en la sección 3.6, utilizando la misma planta que en el esquema anterior. Para este método, se utilizó un modelo de referencia, que es la misma planta, con incertidumbre, tanto en la planta como en el modelo, el modelo tiene el parámetro

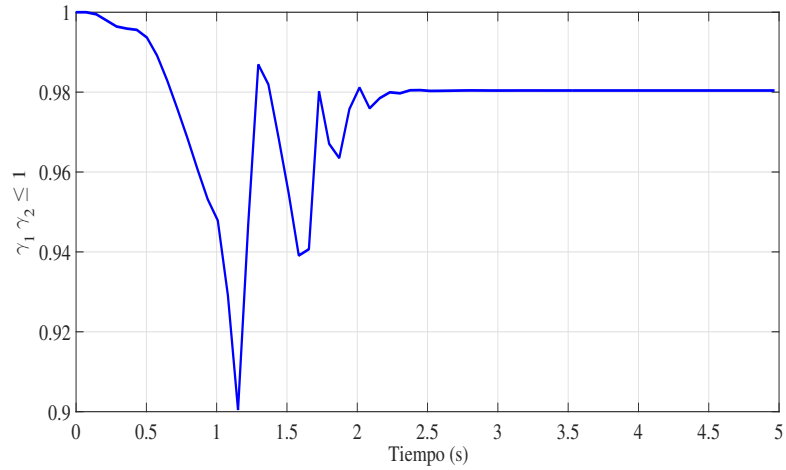


Figura 4.9: Condición del Teorema de Pequeñas Ganancias  $\gamma_1 \gamma_2 \leq 1$ .

a estimar  $\theta$  fijo, mientras que en la planta se estima en línea  $\theta^*$ .

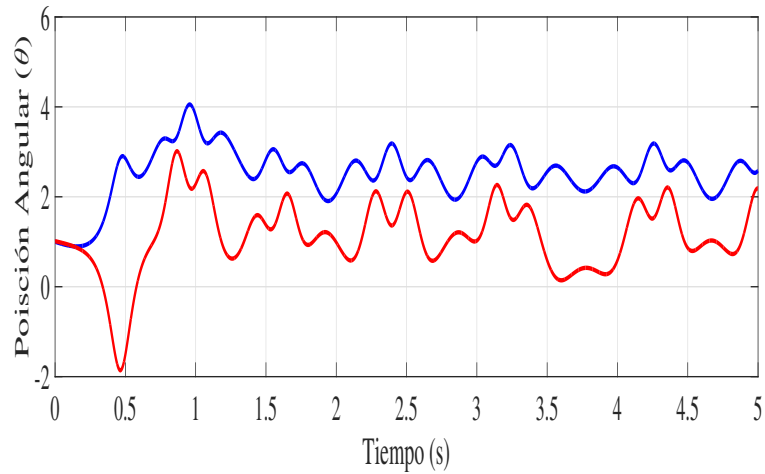


Figura 4.10: Salida del modelo de referencia.

En las Figs. 4.10 y 4.11 se observan las salidas del modelo de referencia y de la planta, respectivamente. En ellas se aprecia además, que la salida tiene un comportamiento no deseado, esto se debe en gran medida a la manera en que se trató la incertidumbre. Esta manera de atacar el problema no fue la más adecuada, sin embargo, el algoritmo hace lo que debería, pues logra la convergencia entre las salidas

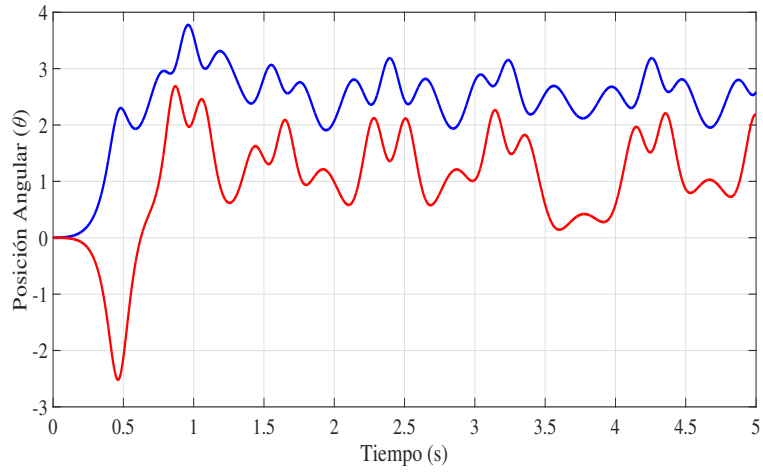


Figura 4.11: Salida de la planta.

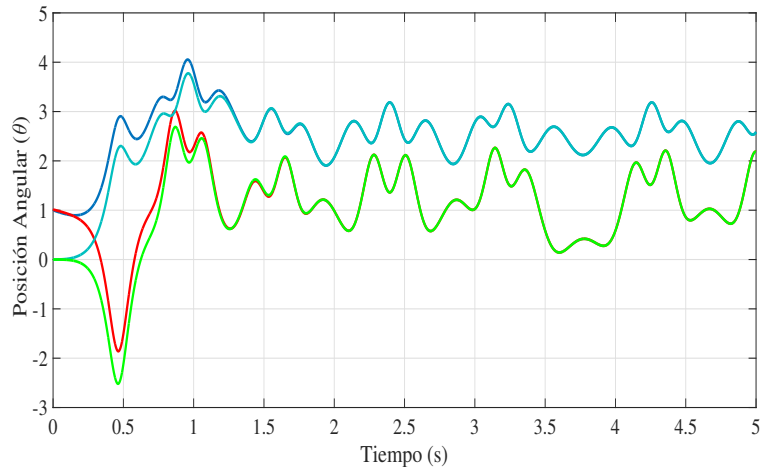


Figura 4.12: Convergencia de la salida de la planta  $y_p$  a  $y_m$ .

No solo las salidas logran una convergencia, como se nota en la Fig. 4.12, el error entre los estados del modelo de referencia y la planta se vuelve cero.

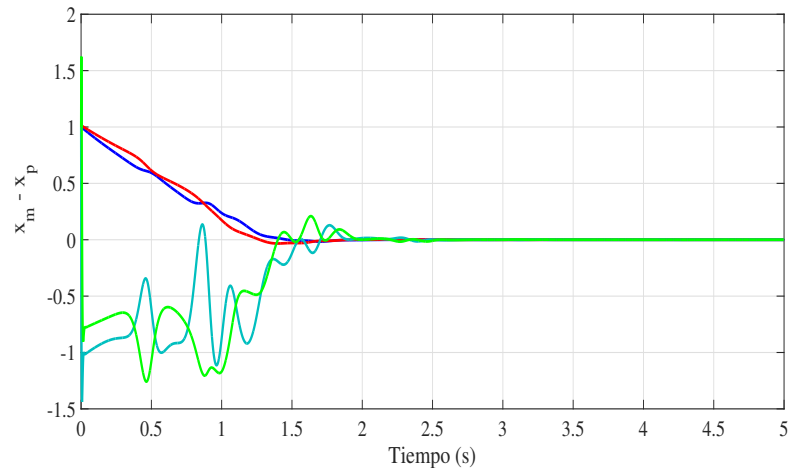


Figura 4.13: Error entre los estados del modelo de referencia y la planta.

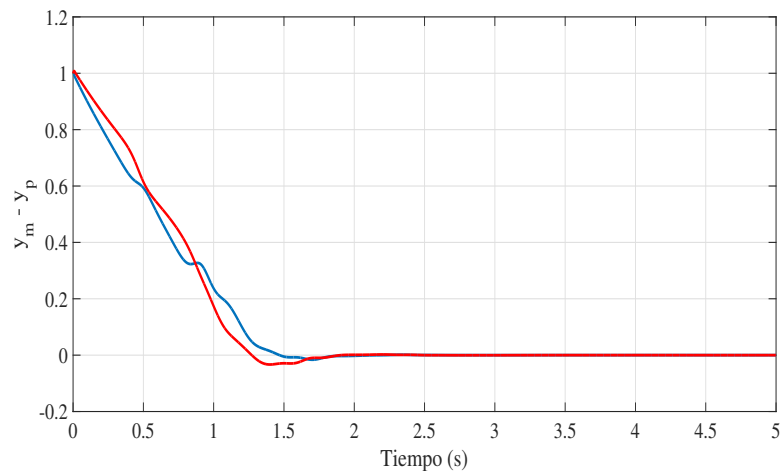


Figura 4.14: Error entre las salidas del modelo de referencia y la planta.

El vector de parámetros estimados  $\theta$  tiene la forma que muestra la Fig. 4.15, mientras que  $\phi = \theta - \theta^*$  tiene el comportamiento de la Fig. 4.16, el valor de  $\theta^* = 5$ . La Fig. 4.15 muestra que  $\theta$  tiende a  $\theta^*$

Estos resultados pueden calificarse de buenos, si de lograr la adaptación se tratara, pero el objetivo es que la salida  $y$  tenga un *mejor* comportamiento y que sea capaz de llegar a la referencia de posición deseada, motivados por los resultados obtenidos por los métodos anteriores, se planteó el tercer esquema de control, el

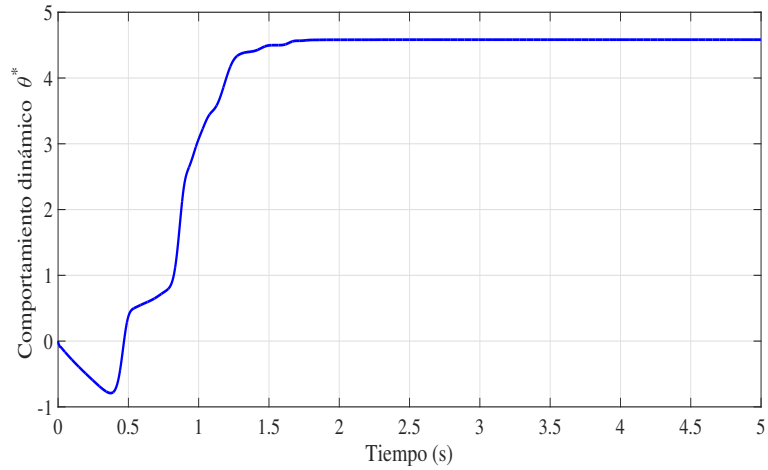


Figura 4.15: Comportamiento dinámico del parámetro  $\theta$ .

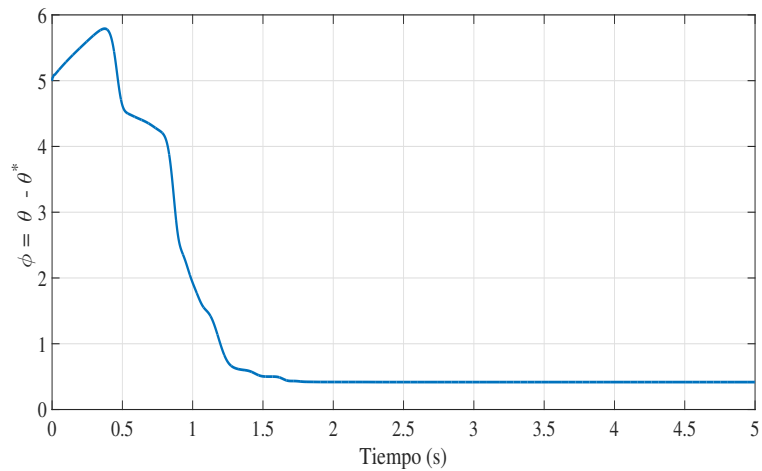


Figura 4.16: Comportamiento dinámico del parámetro  $\phi$ .

cual se implementó en la siguiente sección.

#### 4.4. Implementación del controlador robusto adaptable por algoritmo gradiente

Los resultados de las secciones anteriores motivaron la obtención de un controlador que sea robusto y que a su vez, sea capaz de auto sintonizarse en línea,

para ello se optó por utilizar una técnica convencional propia de los algoritmos de *control adaptable* como lo es el algoritmo de descenso gradiente. Utilizando el esquema que se muestra en la Fig. 3.7 , se planteó una parametrización mediante la cual se puede separar lo que es el vector de parámetros estimados  $\theta$ , del resto del sistema, con la finalidad de estimarlo en línea. Dicho parámetro tiene que estar en función del parámetro libre de la parametrización de todos los controladores estabilizantes, al igual que en la sección 3.3, en una configuración de dos grados de libertad, una diferencia respecto al que se presenta en dicha sección, es que esta vez se incluye un modelo de referencia al que se adapta; esto es, en el modelo de referencia sin incertidumbre, el parámetro  $r$  es fijo y a su vez es la solución analítica del problema de sensibilidad mezclada, mientras que en la planta se considera que  $r(t)$  es un parámetro libre en función del tiempo.

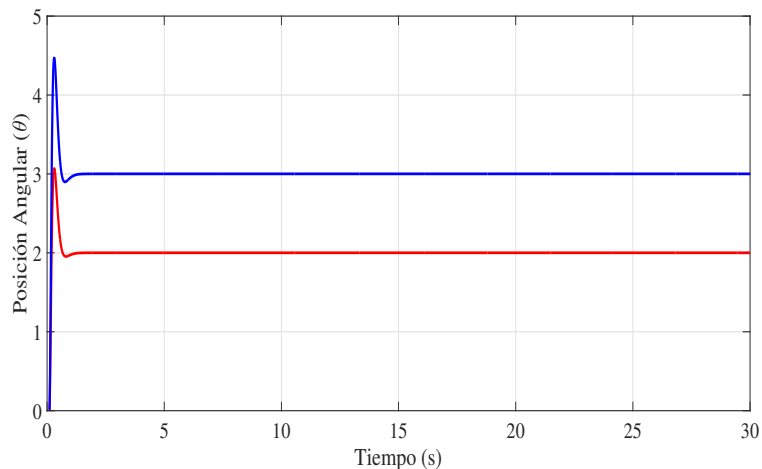


Figura 4.17: Salida del modelo de referencia.

En las Figs. 4.18 a 4.19 se aprecian, la salida del modelo, de la planta y el error que existe entre ambas, respectivamente. Si bien es cierto que el error no logra ser minimizado hasta 0, se logra una aproximación bastante *buena*, con una convergencia exponencial en tiempo finito, donde el error en estado estacionario es menor a 2% después de un cierto tiempo.

En las Figs. 4.20 y 4.21 se muestran los cambios dinámicos de  $\dot{\theta}$  y  $r$  para dicho esquema, respectivamente. En ellas se puede observar que el valor de  $r$  dinámico



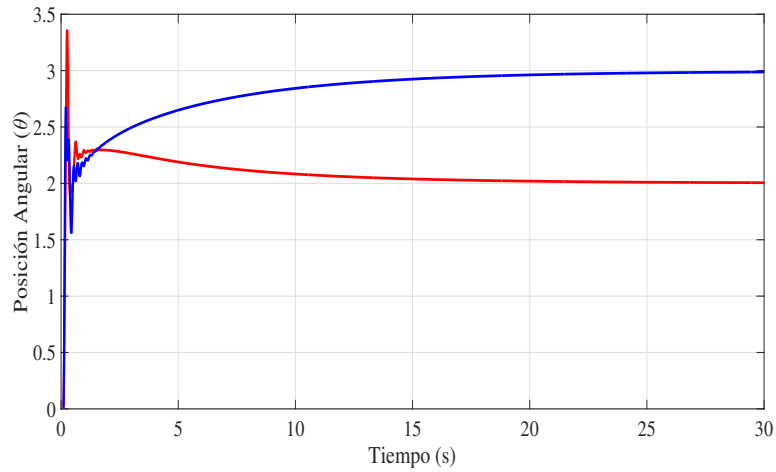


Figura 4.18: Salida de la planta con  $r$  adaptable.

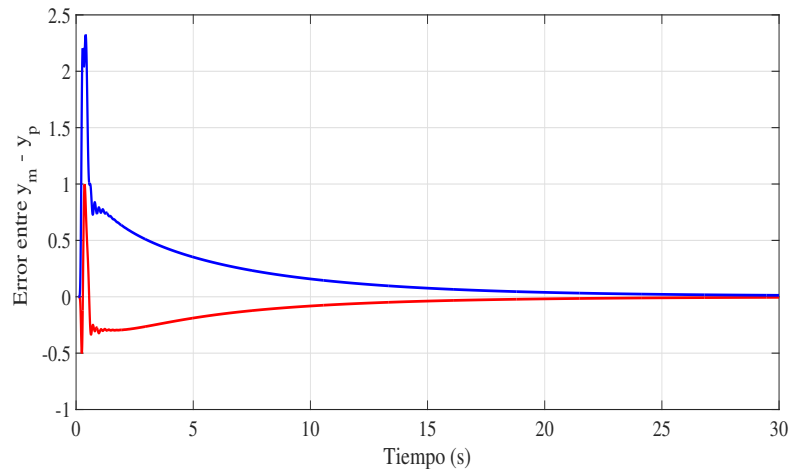


Figura 4.19: Error entre las salidas del modelo de referencia y la planta.

oscila muy cercano a 30, puesto que la solución analítica indica que al problema de sensibilidad mezclada dada en [15] ese es el valor. Además se observa que, el valor de  $\dot{\theta}$  es prácticamente 0 en todo instante de tiempo, lo que significa una convergencia del algoritmo de descenso gradiente.

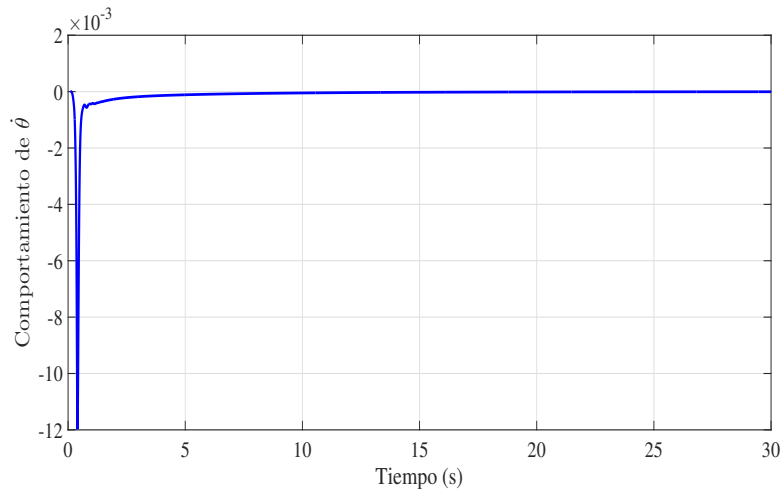


Figura 4.20: Comportamiento dinámico de  $\dot{\theta}$ .

Algo importante de resltar sobre los algoritmos de control adaptables es que son sensibles, *muy sensibles*, a condiciones iniciales, puesto que si esta condición no esta cercana al valor que debe converger, el algoritmo no lo hará.

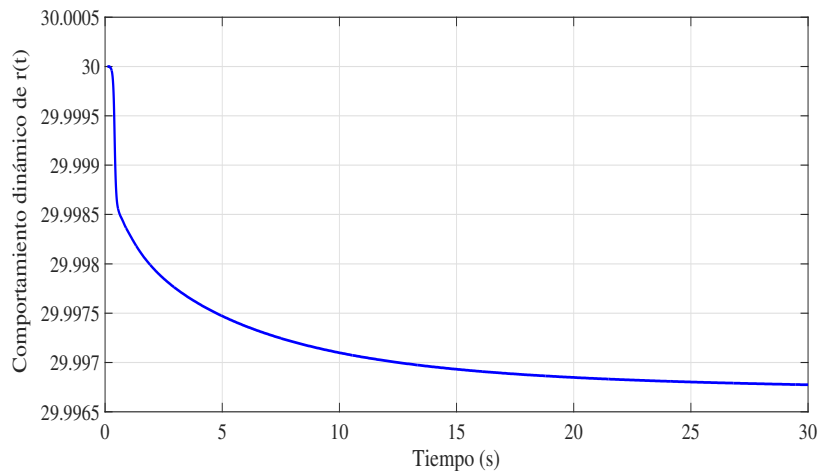


Figura 4.21: Comportamiento dinámico de  $r$ .

Finalmente, en el siguiente capítulo se dan las conclusiones y trabajos futuros.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

A lo largo del presente trabajo se presenta una solución para un problema de control de sensibilidad mezclada bajo un modelo de incertidumbre de retroalimentación. Dicho controlador robusto está diseñado de manera que sus matrices estén relacionadas con el parámetro libre de la parametrización de Youla  $r$  primero como una constante. La expresión analítica de  $r$  se obtiene al minimizar las normas  $\|S_o\|_\infty$  y  $\|T_{u_\Delta y_\Delta}\|_\infty$  y su relación geométrica. Para la ley de adaptación, el parámetro  $r(t)$  ahora se supone como variante en el tiempo, en dicho esquema y bajo las suposiciones presentadas a lo largo de la sección 3.3 no se necesita un modelo de referencia para el efecto del proceso de ajuste automático.

Para la estabilidad de todo el sistema en lazo cerrado, se usa el Teorema de Pequeñas Ganancias. Los resultados se aplican al sistema completamente actuado de un péndulo doble. Los resultados de la simulación muestran un rendimiento "bueno" a pesar de las incertidumbres y las perturbaciones, las cuales se atenúan debido a la solución al problema de sensibilidad mezclada que se resuelve. Las posiciones que se desean no se pueden alcanzar sin aumentar la energía necesaria en la señal de control  $u(t)$ , esto implica un compromiso entre ellas. Incluso si se cambian los valores de  $a$  y  $\omega_h$ , que tienen que ver con la ubicación de los polos en lazo cerrado y el ancho de banda de lazo cerrado, respectivamente. El obtener una mejor respuesta, llevará a una entrada de control que demande más energía, aunque sea por un instante de tiempo muy pequeño, lo cual no es deseable. Algunas posibles soluciones a este problema son el incluir una saturación en la entrada

de control, que evite que dicha señal lleve a la entrada de la planta a valores que no son físicamente realizables por el actuador. En las Figs. de las salidas se muestra que llegan a valores razonables con funciones suaves por lo que no se tiene el problema de posiciones inalcanzables.

El comportamiento dinámico del parámetro libre conduce al proceso de autoajuste, las variaciones de este parámetro tienen lugar al comienzo del proceso, pero después de un corto período de tiempo, se estabiliza, lo que lleva a la simulación a un "buena" rendimiento. En cuanto a las incertidumbres y perturbaciones se refiere, dentro de las simulaciones se puede observar que el controlador es suficientemente robusto a pesar del autoajuste que realiza del parámetro libre, esto se debe a que al utilizar la parametrización de Youla de todos los controladores estabilizantes, cada parte de ella es propia, racional y estable, lo que conduce a funciones de transferencia de lazo cerrado y controladores de la misma índole, propios, racionales y en este caso, estables, esto además de que la solución en línea de la adaptación del parámetro  $r$  está basada en la solución analítica para resolver el problema de sensibilidad mezclada.

Hablando del esquema de control donde se propone resolver el problema de adaptación utilizando la técnica de Lyapunov SPR, si bien es verdad que las salidas del sistema tienen un comportamiento que no es deseado, el objetivo de adaptación puede ser logrado. El mayor problema de este esquema es que el término de la incertidumbre impacta de manera directa en el diseño del controlador, lo que lleva a una salida con incertidumbres, hacia la cual existe convergencia, como se mencionó anteriormente, este no es el verdadero objetivo que persigue este trabajo, si no el de asegurar que el controlador mantendrá sus características de robustez aún cuando se le agregue la ley de adaptación.

Si bien es cierto que el diseño mediante técnicas basadas en Lyapunov no llevó a los resultados deseados, dió pie y motivación para la implementación de un esquema robusto adaptable con modelo de referencia basado en algoritmo de descenso gradiente como el que se presenta en la sección 3.7.

Dada la previa experiencia utilizando esquemas de control adaptable con modelo de referencia, se replanteó el problema, esta vez pensando en que la planta debe

seguir a un modelo de referencia que sea *ideal*, es decir, que no considere perturbaciones ni incertidumbres, donde todos los parámetros estén disponibles para su medición, esto con la finalidad de que la señal adaptada sea lo más cercana a la deseada. Durante el desarrollo de dicho esquema, surgieron diferentes obstáculos que complicaron su implementación, el primero de ellos fue una incompatibilidad de las dimensiones de las matrices involucradas en el error entre las salidas  $e_y$ , posteriormente, se encontró que el controlador  $K(s)$  resultaba complejo en su expresión analítica para obtener una representación en espacio de estados que fuese afín al parámetro libre  $r$ . Todo esto logró ser superado resultando en el controlador que se presenta en la secciones 3.7 y 4.4. Los resultados de este diseño presentan un buen desempeño, puesto que las salidas del modelo con ley de adaptación logran una convergencia exponencial en tiempo infinito con un error en estado estacionario menor a 2% respecto a las referencias de posición deseadas.

Todo lo que en este trabajo se presenta, fue realizado de manera analítica y simulaciones con el software Matlab-Simulink, pues existen ciertas condiciones que no pueden ser replicadas en una planta real, tal como el caso de poder medir la señal  $y_\Delta$ , que es la salida de la incertidumbre. El siguiente paso para continuar con esta investigación podría ser el encontrar alguna manera de poder medir o estimar esa señal y así tenerla disponible para realizar los cálculos necesarios y la adaptación deseada.

La implementación de controladores robustos adaptables de dos grados de libertad es otro posible enfoque para continuar con el presente trabajo, tratando de adaptar el parámetro libre, tanto en el modelo de referencia como en la planta, o dicho parámetro en  $K(s)$  y  $K_r(s)$  en la planta, mientras que en el modelo de referencia dichos parámetros son resueltos de manera analítica. Podría, además darse el caso del diseño de una ley de control adaptativo que asegure la estabilidad cuando  $\gamma(r(t))$ .

# Bibliografía

- [1] Kemin Zhou, John Comstock Doyle, Keith Glover, et al. *Robust and optimal control*, volume 40. Prentice hall New Jersey, 1996.
- [2] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive control: stability, convergence and robustness*. Courier Corporation, 2011.
- [3] Dionisio A Suarez and Rogelio Lozano. Adaptive control of nonminimum phase systems subject to unknown bounded disturbances. *IEEE transactions on automatic control*, 41(12):1830–1836, 1996.
- [4] P. J. Suchomski. Numerically reliable robust adaptive pole placement in the h1. *Adapt Control Signal Process.*, 2006.
- [5] Yanyu Yang, Yong Wang, and Ping Jia. Adaptive robust control with extended disturbance observer for motion control of dc motors. *Electronics Letters*, 51(22):1761–1763, 2015.
- [6] Karl J Åström and Björn Wittenmark. *Adaptive control*. Courier Corporation, 2013.
- [7] Piotr Suchomski. Numerically robust synthesis of discrete-time h8 estimators based on dual j-lossless factorizations. *Control and Cybernetics*, 32(4):761–802, 2003.
- [8] Lei Cui, Yong Zhang, and Ying Yang. Youla parameterization based adaptive controller design for fault tolerant control. *Asian Journal of Control*, 16(1):292–295, 2014.

- [9] R. Galindo. Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, 223(7):957–971, 2009.
- [10] R. Galindo and C. Conejo. A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems. In *Int. Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control*, page 171–176, 2012.
- [11] René Galindo. Input/output decoupling of square linear systems by dynamic two-parameter stabilizing control. *Asian Journal of Control*, 18(6):2310–2316, 2016.
- [12] M Vidyasagar. Control system synthesis. 1985.
- [13] C.J. Gaspar R. Galindo. Uncertainty model based on partial linearization and robust control. *World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, 2009.
- [14] Miroslav Krstic, Ioannis Kanellakopoulos, Petar V Kokotovic, et al. *Nonlinear and adaptive control design*, volume 222. Wiley New York, 1995.
- [15] Duane T McRuer, Dunstan Graham, and Irving Ashkenas. *Aircraft dynamics and automatic control*, volume 740. Princeton University Press, 2014.
- [16] C Nett, C Jacobson, and M Balas. A connection between state-space and doubly coprime fractional representations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(9):831–832, 1984.
- [17] Bonilla Barenca Alfredo. Expresiones analíticas de la parametrización de controladores estabilizantes y sensibilidad mezclada, 2011.
- [18] Dante Youla, Hamid Jabr, and Jr Bongiorno. Modern wiener-hopf design of optimal controllers—part ii: The multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(3):319–338, 1976.
- [19] Jan Marian Maciejowski. Multivariable feedback design. electronic systems engineering series. *Wokingham, England: Addison-Wesley*, 6:85–90, 1989.



- [20] Zeev Nehari. On bounded bilinear forms. *Annals of Mathematics*, pages 153–162, 1957.
- [21] John Doyle and Gunter Stein. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE transactions on Automatic Control*, 26(1):4–16, 1981.
- [22] BA Francis and JC Doyle. Linear control theory with an h-optimality criterion, slam j. *Control and Opt., to appear. Google Scholar*.
- [23] Keith Glover. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their l<sub>1</sub>-error bounds. *International journal of control*, 39(6):1115–1193, 1984.
- [24] R Galindo, M Malabre, and V Kucera. Mixed sensitivity h<sub>∞</sub>/spl infin/-control for lti systems. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 2, pages 1331–1336. IEEE, 2004.
- [25] Liron Allerhand. Stability of adaptive control in the presence of input disturbances and h<sub>∞</sub> performance. *IFAC-PapersOnLine*, 48(14):76–81, 2015.
- [26] Hassan K Khalil. Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5):5–1, 1996.
- [27] Bo Egardt. *Stability of adaptive controllers*, volume 20. Springer, 1979.
- [28] R Monopoli. Liapunov’s method for adaptive control-system design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(3):334–335, 1967.
- [29] Richard Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474–484, 1974.
- [30] Kumpati S Narendra and Anuradha M Annaswamy. *Stable adaptive systems*. Courier Corporation, 2012.
- [31] KS Narendra and LS Valavani. Stable adaptive controller design–direct control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(4):570–583, 1978.

- [32] R Puente and R Galindo. Pasividad de sistemas lineales modelados en bond graph en una configuración retroalimentada de dos grados de libertad. In *National Congress of Automatic Control 2017, Monterrey, Mexico*, pages 119–124. AMCA, 2017.

# **Apéndice A. Mixed sensitivity robust adaptive control in a one degree of freedom feedback configuration**

Presentado en *Second Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems IFAC 2018*

# Mixed sensitivity robust adaptive control in a one degree of freedom feedback configuration

M. Zamora and R. Galindo

Faculty of Mechanical and Electrical Engineering  
Autonomous University of Nuevo Leon

San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, México

Tel (+52) 8183294020 ext. 5773,

(e-mail: [imtzamora@hotmail.com](mailto:imtzamora@hotmail.com) [rgalindo@gama.fime.uanl.mx](mailto:rgalindo@gama.fime.uanl.mx)).

**Abstract** An on-line solution for a mixed sensitivity, robust control problem is presented as a method of auto tuning of the control parameters. Linear stabilizable and detectable Multi-Input Multi-Output (MIMO) plants are considered. This creates a bond between robust and adaptive control, keeping the benefits such as low frequency disturbance and high frequency unstructured attenuation in the resultant control system. The unstructured uncertainty is represented by a feedback uncertainty model. The analytic expressions of the controller are written in terms of a state space of the plant and the controller belongs to the parameterization of all stabilizing controllers. No model reference is needed for the auto-tuning process. The stability of the Mixed Sensitivity criterion is analyzed by the Small Gain Theorem using the measure of the signals of interest. In a similar way, the Small Gain Theorem for non-linear systems is used to assure the stability of the overall system with the auto-tuning process.

© 2018, IFAC (International Federation of Automatic Control) Hosting by Elsevier Ltd. All rights reserved.

**Keywords:** Robust control, adaptive control, stabilizing controllers, partially linearized systems, non-linear uncertainties, mixed sensitivity, small gain Theorem.

## 1. INTRODUCTION

Uncertainties such as parametric variations, unmodeled dynamics, or uncertainties due to aging or wear of the elements, disturbances such as load changes, interference signals or noise in measurements and the extensions of the techniques of classic control to MIMO systems are some motivations for the usage of the robust control theory and techniques Zhou et al. (1996). The adaptive control can be unstable or their performance can be ameliorated under the presence of this kind of uncertainties and disturbances (Sasthy and Bodson, 2011), so that it is used as motivation in (Suarez and Lozano, 1996), (Suchomski, 2006), Cui et al. (2014). In the work of (Suarez and Lozano, 1996) the robust adaptive control algorithm assures stability under bounded disturbances even for non-minimum phase plants. As resulting of the above, robust control techniques have been developed achieving the self-tuning of the controller preserving robust stability and robust performance in a closed loop under the effect of uncertainties and disturbances. In the work of (Galindo and Gaspar, 2009), a solution is given for a partially linearized model as well, in which control scheme has a left pseudo inverse of the input matrix,  $B^L$  that can cause instability, which in the present work leads to a control configuration without  $B^L$ . This can be achieved using the parametrization of all stabilizing controllers given in Galindo and Conejo (2012), guaranteeing stability under this control scheme. The free control parameter is selected solving a mixed sensitivity control problem. Moreover, based on the measurements

of the norm-2 of the input and the output of the uncertainty, this parameter is used for the auto-tuning of the controller. The control configuration is a direct-adaptive control scheme without model of reference and since the free parameter is time varying, the stability of the system is analyzed in two parts, the first one analyses the stability under the Mixed Sensitivity Criterion, it is, robust stability while the norms of interest are diminished in low and high frequencies, with the purpose of achieving the auto-tune effect of the free control parameter. The other half of the analysis studies the stability of the overall system seen as a non-linear system, this happens as consequence of the auto-tune process. In both cases, the Small Gain Theorem is used to analyze the stability, using the measure of the signals of interest.

**Notation.**  $\mathcal{RH}_\infty$  is the set of proper and stable rational functions in the complex variable  $s$ .  $I_p$  is a  $p \times p$  identity matrix.

## 2. PROBLEM STATEMENT

The considered control scheme is shown in Fig. 1 that differs of the one of (Galindo and Conejo, 2012) in which it does not require  $B^L$ , where  $P(s) = J(sI - F)^{-1}G \in \mathcal{R}^{p \times m}(s)$  represents the nominal plant;  $K(s)$  is the adaptive controller,  $r$  is the free control parameter;  $u(s)$  and  $y(s)$  are the input and the output of the plant, respectively,  $x_d$  is the desired state input reference,  $T_1$  is a similarity transformation,  $H$  is known and included in the transfer function from the output  $y_\Delta(t)$  to the input  $u_\Delta(t)$  of the feedback uncertainty model  $\Delta := \hat{x}^3$ , being  $(A, B, C)$  a

state space realization of  $P(s)$  and  $\hat{x}^3 := [x_1^3, \dots, x_n^3]^T$  see (Galindo and Conejo, 2012). The controller  $K(s)$  is used to solve the problem of parametric auto tuning of  $r$  through the on-line solution of a mixed sensitivity control problem.

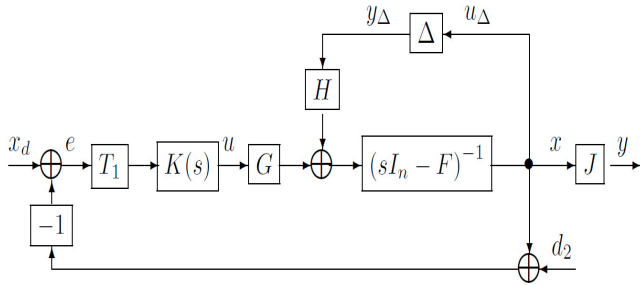


Figure 1. Control scheme with feedback uncertainty model.

Let  $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$  and  $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$  be any right coprime factorization and any left coprime factorization of  $P(s)$  with  $N(s)$ ,  $\tilde{N}(s)$ ,  $D(s)$  and  $\tilde{D}(s)$  belonging to  $\mathfrak{RH}_\infty$ . Then the parametrization of all stabilizing controllers that stabilizes  $P(s)$  as proposed by (Youla et al., 1976) (Vidyasagar, 1985) is given by

$$\begin{aligned} K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) = N_k(s)D_k^{-1}(s) \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s), D_k(s) := \tilde{Y}(s) - N(s)\tilde{R}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s), N_k(s) := \tilde{X}(s) + D(s)\tilde{R}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $R(s)$ ,  $\tilde{R}(s)$  and  $Q(s)$  belong to  $\mathfrak{RH}_\infty$  and are the free control parameters;  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $\tilde{X}(s)$  and  $\tilde{Y}(s)$  belong to  $\mathfrak{RH}_\infty$ , and are the solutions of the Diophantine equations,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m, \tilde{X}(s)\tilde{N}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I_p \quad (2)$$

In the following, it is considered that  $R(s)$  be  $rI \in \mathfrak{R}$  where first  $r$  is fixed and real, then  $r$  is function of time for the adaptive control law. It is assumed that  $(F, G, J)$  is a minimal realization of  $P(s)$ , in which the dimension of the state  $n$  is even, the size of the input  $m = n/2$ , and the dimension of the output  $p = m$ . Using the change of basis  $\xi(t) = T_1 x(t)$  given in the Lemma 1 of (Galindo and Conejo, 2012) in which similarity transformations are proposed to get the special structure that is wanted for the controller design and observer design when the separation principle is applied (Galindo and Conejo, 2012),

$$\begin{cases} T_1 = \begin{bmatrix} I_m & -G_1 G_2^{-1} \\ V_1 \Theta_1 & I_m \end{bmatrix} \\ T_1^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_1^{-1} & \Delta_1^{-1} G_1 G_2^{-1} \\ -V_1 \Theta_1 \Delta_1^{-1} & I_m - V_1 \Theta_1 \Delta_1^{-1} G_1 G_2^{-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

where it is assumed that  $G_2$  is a non-singular matrix and

$$\begin{cases} V_1 := (F_{12} - G_1 G_2^{-1} F_{22})^{-1} \\ \Theta_1 := (F_{11} - G_1 G_2^{-1} F_{21}) \\ \Delta_1 := I_m - G_1 G_2^{-1} V_1 \Theta_1 \end{cases} \quad (4)$$

Being  $F_{11}, F_{12}, F_{22}, G_1$  and  $G_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  the elements of the block partitions of  $F$  and  $G$ , respectively. Resulting in to the following structure realization of the system in new coordinates:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, C = J T_1^{-1} \quad (5)$$

It is assumed the complete information of the state or the existence of a state observer and the use of the separation principle. This work focuses on the design of the controller for the plant  $(sI_n - A)^{-1}B$ .

The stabilizing controllers are obtained using the expressions of the right coprime factorization and left coprime factorization under the change of basis  $T_1$  in the feedback configuration of Fig. 1 for the plant  $(sI_n - A)^{-1}B$ , given by (Galindo and Conejo, 2012),

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ B_m s \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \\ I_m s \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s) \quad (7)$$

where  $0 < a \in \mathfrak{R}$ ,  $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  and  $A_{12}$  are non-singular matrices and

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - A_{22} s - A_{21} A_{12}) \quad (8)$$

The solution of the Diophantine equation is given by (Galindo and Conejo, 2012)

$$X(s) = [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M], Y(s) = B_m \quad (9)$$

Equations (6) to (9) are used to get  $K(s)$  from (1) and the feedback uncertainty model is given by the work of (Galindo and Gaspar, 2009) based on a partially linear model. Consider a non-linear system described by the following differential equations,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (10)$$

where  $f$  and  $g$  are continuous and differentiable non-linear functions,  $x(t) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $y(t) \in \mathfrak{R}^{p \times 1}$  and  $u(t) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  are the state, the output and the input of the system respectively.

In (Galindo and Gaspar, 2009) a proposition is given to cut off the Taylor series expansion arriving to a partially linear model that approaches to the behavior of the non-linear model. The following model is a reduced version of this proposition after the application of the transformation  $T_1$ , which is useful on the double pendulum.

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t) + H_0[x_1^3, \dots, x_n^3]^T \\ y(t) = C\xi(t) \end{cases} \quad (11)$$

where  $H_0 := T_1 H$

This model was used since its behavior is closer to the non-linear model than a non-linear model linearized at a point of equilibrium, the difference between the models occurs because the model without the term  $H_0\hat{x}^3$  is only similar in a neighborhood very close to the equilibrium point.

The structure for the used controller has to be written in a state space form, this is what allows the free parameter of the Youla parametrization  $r$  to be related to the matrices of the space realization of  $K(s)$  i.e.  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$ , the transfer function representation does not allow the online auto-tuning. The following state space representation of the controller is given in Puente and Galindo (2017);

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (r - a^2)I_n & -2aI_n \end{bmatrix}; B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ C_k &= \begin{bmatrix} N_3^k - (a^2 - r)N_1^k & N_2^k - 2aN_1^k \end{bmatrix}; D_k = N_1^k \end{aligned} \quad (12)$$

where  $N_1^k := B_m^{-1} [(a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} M]$ ;  
 $N_2^k := B_m^{-1} [(2a^3 - r)A_{12}^{-1} + 2aI_m \ 2aM]$   
 $N_3^k := B_m^{-1} [a^4 A_{12}^{-1} + (a^2 - r)A_{21} \ a^2 M]$   
 being  $M := 2aI_m + A_{22}$

In to equation (12) all the involved matrices are affine functions of the the free parameter  $r$ , hence it can be modified in each of the matrices that constitute the state space realization of the controller  $K(s)$  allowing the auto tuning.

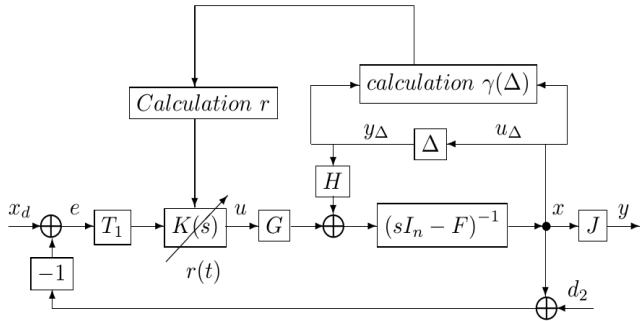


Figure 2. Control scheme with feedback uncertainty model and auto-tuning.

Given the non-linear model of the uncertainty, it is proposed in Fig.2 that the finite gain of the uncertainty  $\gamma(\Delta)$  can be obtained dynamically. Using the Sector Criterion for non-linear systems (Khalil, 1996) the uncertainty  $\gamma(\Delta)$  is calculated using the measures of the norms  $\|y_\Delta(t)\|_2$  and  $\|u_\Delta(t)\|_2$  respectively as shown in Fig.2,

$$\|y_\Delta(t)\|_2 = \gamma(\Delta)\|u_\Delta(t)\|_2 + \beta \quad (13)$$

The Small Gain Theorem is used to guarantee the input-output stability of the system under uncertainties, in this case the interest is in the relation from  $y_\Delta$  input to  $u_\Delta$  output like is shown in Fig. 2. The self-tuning process of the controller is the problem desired to solve, to achieve this it is proposed the resolution of a mixed sensitivity problem.

The tackled problems are

**Problem 1.** For the state space realization  $(A, B, C)$  given by (5), find the solution of a mixed sensitivity control problem supposing  $r$  as a constant.

**Problem 2.** With the mixed sensitivity control problem solved, consider  $r(t)$  as a time function, then analyze the stability of the closed loop system using the Small Gain Theorem Khalil (1996).

In the next section a mixed sensitivity control problem is solved leading to the proposed adaptive control law.

### 3. MIXED SENSITIVITY CONTROL

The mixed sensitivity problem to be solved is (see (Galindo, 2009))

$$\min \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ T_{u_\Delta y_\Delta h} \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (14)$$

In order to get robust stability,  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$  must be diminished in high frequencies and in order to guarantee robust performance  $\|S_{ol}\|_\infty$  must be diminished in low frequencies where  $S_{ol} := \lim_{s \rightarrow 0} S_o(s)$  and  $T_{u_\Delta y_\Delta h} := \lim_{s \rightarrow \infty} T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  being  $S_o(s)$  the transfer function that represents the nominal performance of the controlled system and  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  is the transfer function of the system from  $y_\Delta(t)$  to  $u_\Delta(t)$ . The simultaneous minimization of this norms leads to the solution of the mixed sensitivity control problem, such that a robust controller guarantees robust stability and robust performance under the presence of uncertainties and admissible disturbances, where  $S_o(s)$  is the transfer function from  $r(t)$  to  $e(t)$ , when its infinity norm gets diminished in low frequencies then the  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0$  and when the infinity norm of  $T_{u_\Delta y_\Delta}$  is diminished in high frequencies guarantees robust stability using the Small Gain Theorem.

Achieving this the free parameter of the Youla parametrization  $r$ , can self-tune under the proposed control scheme of Fig. 2 in which exists a feedback uncertainty model.

An analytic expression of  $r$  solving Problem 1 is presented by,

**Lemma 1.** Consider the transfer function from  $y_\Delta(t)$  to  $u_\Delta(t)$ ,  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  and the transfer function of the nominal performance controlled system  $S_o(s)$  on the feedback configuration of the Fig. 2. Consider the state space realization of  $P(s)$  given by (5) under the assumption that the plant is controllable and observable and the change of basis given by (3), in the feedback configuration of Fig. 2 and the solution of the Diophantine equation is given by (9). Let the state reference input be  $x_d(t) = [y_d(t) \ 0]^T$ , the free parameter  $R(s) := [R_1(s) \ R_2(s)] \in \mathfrak{RH}_\infty$  where  $R_1(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  be  $rI_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  and  $R_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$ . A free control parameter  $r$  that solves the equation

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (15)$$

for an output feedback uncertainty model is

$$r = a^2 - \frac{a^4 \|H_0\|_\infty}{\omega_h \|A_{12} A_{21}\|_\infty} \quad (16)$$

where  $a > 0 \in \mathfrak{R}$  is a control parameter, and  $\omega_h$  is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of  $(sI_n - A)^{-1}B$ .

**Proof.** The design of the controller  $K(s)$  is done in the new coordinates after the transformation  $T_1$ . From the Fig.1, the transfer function from  $y_\Delta(t)$  to  $u_\Delta(t)$  is  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s) = [I + (sI - A)^{-1}BK]^{-1}(sI - A)^{-1}H_0$  where  $H_0 = T_1H$ , the high frequency approximation of  $\Gamma(s)$  and  $K(s)$  are given by (17), since  $R_1(s)$  is  $rI_m$  and  $R_2(s) = 0$ ,

$$\begin{cases} \Gamma_h = I_m \\ K_h = B_m^{-1} [(a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \ M] \end{cases} \quad (17)$$

Hence, the high frequency approximation of  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  is,

$$T_{u_\Delta y_\Delta h} = \left[ I + \frac{1}{\omega_h} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} [(a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \ M] \right]^{-1} \frac{1}{\omega_h} H_0 \quad (18)$$

where  $M := 2aI_m + A_{22}$ . So,  $T_{u_\Delta y_\Delta h}$  can be approximated in high frequencies to,

$$T_{u_\Delta y_\Delta h} = \frac{1}{\omega_h} H_0 \quad (19)$$

The low frequency approximation of  $\Gamma(s)$  and  $K(s)$  can be obtained since  $R_1(s)$  is  $rI_m$ ,  $R_2(s) = 0$  and from (8),

$$\begin{cases} \Gamma_l = \frac{-1}{a^2} A_{21} A_{12} \\ K_l = B_m^{-1} \left[ \frac{a^4}{a^2 - r} A_{12}^{-1} + A_{21} \ M \right] \end{cases} \quad (20)$$

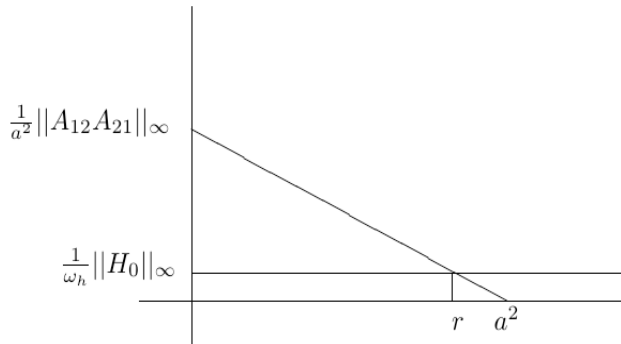


Figure 3. Geometrical relationship between  $\|S_{ol}\|_\infty$  and  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$ .

$S_{ol}$  is obtained from  $S_{ol} = N_l \tilde{N}_{kl}$

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} A_{12} (\frac{r}{a^2} - 1) A_{21} & \frac{-1}{a^2} A_{12} M \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (21)$$

With this approaches an analytic expression for  $r$  can be obtained through a geometrical interpretation as shown in Fig. 3. This expression is calculated knowingly that the norm  $\|S_{ol}\|_\infty$  decreases as the  $r$  parameter grows, thus taking advantage of the geometric relation between both approaches, use the slope equation. Since the reference input is  $x_d(t) = [y_d(t) \ 0]^T$  are considered in order to solve (15) that is

$$\begin{cases} \|S_{ol}\|_\infty = \frac{1}{a^2} \left| \frac{r}{a^2} - 1 \right| \|A_{12} A_{21}\|_\infty \\ \|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \frac{1}{\|H_0\|_\infty} \end{cases} \quad (22)$$

The Fig.3 represents a straight line for each  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$  and  $\|S_{ol}\|_\infty$  respectively, then the equation of restriction  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$  has a solution in the intersection point of this two lines, that is  $mr + b = (\frac{1}{a^4}) \|A_{12} A_{21}\|_\infty (1 - (\frac{1}{a^4})r)$ , this implies the result (16).

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{0 - \frac{\|A_{12} A_{21}\|_\infty}{a^2}}{a^2 - 0} r + \frac{1}{a^2} \|A_{12} A_{21}\|_\infty = \frac{1}{\omega_h} \|H_0\|_\infty \quad (23)$$

■

This method of obtaining  $r$  allows the auto-tune, because all the related matrices can be updated online while this parameter is changing, allowing the adaptation of the controller when exists uncertainties in the process.

In the next section, the stability of the overall system from the Fig.2 is analyzed.

#### 4. STABILITY ANALYSIS OF THE ROBUST ADAPTIVE CONTROL

This section is dedicated to the proof of the stability of the overall system of Fig. 2. The main problem of this is that the system behaves as a non-linear dynamic system, this happens as consequence of the auto tune process and the model of the uncertainty, which is non-linear and affects the system. In order to proof the stability the Small Gain Theorem for non-linear systems will be used see (Khalil, 1996). This Theorem allows us to track how the norm of a signal increases or decreases as it passes through a system. Under the control scheme of the Fig. 2 and the change of basis with  $T_1$  the equations for the system are

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(H_0 y_\Delta(t) + v(t)) \\ \dot{x}_k(t) = A_k(r)x_k(t) + B_k(x_d(t) - u_\Delta(t)) \\ v(t) = C_k(r)x_k(t) + D_k(r)(x_d(t) - u_\Delta(t)) \end{cases} \quad (24)$$

Since that  $\xi = T_1 x = T_1 u_\Delta(t)$  and for the stability analysis it can be assumed that  $x_d(t) = 0$ , then the closed loop equations are

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k(r)x_k(t) - B_k(u_\Delta(t)) \\ \dot{u}_\Delta(t) = Au_\Delta(t) + BH_0 y_\Delta(t) + \\ B[C_k(r)x_k(t) - D_k(r)(u_\Delta(t))] \end{cases} \quad (25)$$

From (25) is obtained the following state space realization of  $T_{u_\Delta y_\Delta}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_k(t) \\ \dot{u}_\Delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(r) & -B_k \\ BC_k(r) & A - BD_k(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 \\ BH_0 \end{bmatrix} y_\Delta(t) \\ u_\Delta(t) = [0 \ I] \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (26)$$

Using the Small Gain Theorem for non-linear systems, the condition that must be met is,

$$\gamma_1(\Delta)\gamma_2(T_{u_\Delta y_\Delta}) < 1 \quad (27)$$

The value of  $\gamma_1$  is known from (12) by the measurement of the norms  $\|y_\Delta(t)\|_2$  and  $\|u_\Delta(t)\|_2$ . In the same way, it is possible to obtain the value of  $\gamma_2$  using the Sector Criterion

$$\left\| \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \gamma_2 \|y_\Delta\|_2 + \beta_2 \quad (28)$$

Thus by the measurements if the norms  $\left\| \begin{bmatrix} x_k(t) \\ u_\Delta(t) \end{bmatrix} \right\|_2$  and  $\|y_\Delta\|_2$  in the condition of inequality (27) is met  $\forall t \in [t_0, t_f]$  then overall system is stable.

The results are illustrated by an example of a double pendulum in the following section

### 5. EXAMPLE

Consider the two-link fully-actuated planar rotational robotic mechanism called double pendulum of the Fig. 4 where  $q_1$  is the angle that the link 1 makes with the horizontal,  $q_2$  is the angle that the link 2 makes with link 1,  $m_1$  is the mass of link 1,  $m_2$  is the mass of link 2,  $L_1$  is the length of the link 1 and  $L_2$  is the length of the link 2,  $l_{c1}$  and  $l_{c2}$  are the distances to the center of the mass of the links 1 and 2 respectively. This robot has an actuator at the shoulder (link 1) and another one at the elbow (link 2). The links 1 and 2 move independently and the control objective is to track a given reference

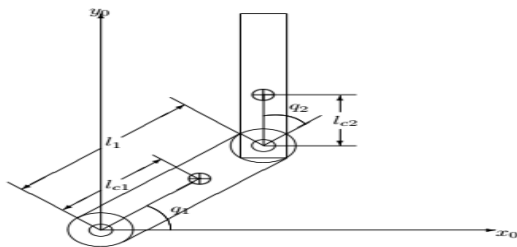


Figure 4. Double pendulum system.

Using the change of coordinates given by (3), the state space realization of the partially linear model given by (11) of the double pendulum is in new coordinates

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 & 0 & 0 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21.3215 & 26.8458 & 0 & 0 \\ 22.0457 & -56.1250 & 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

where:  $k_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2$  and  $k_2 = m_2 l_{c2}$

Setting  $a = 7.5$  and the desired references  $x_{d1} = 2$ ,  $x_{d2} = 3$ ,  $\dot{x}_{d1} = 0$  y  $\dot{x}_{d2} = 0$ .

The proposed adaptive control law is given by (12) and (16) the results are described in figures 5 to 10.

Figures 8 and 9 show “good” performance guaranteeing robust stability in spite of the uncertainties that are

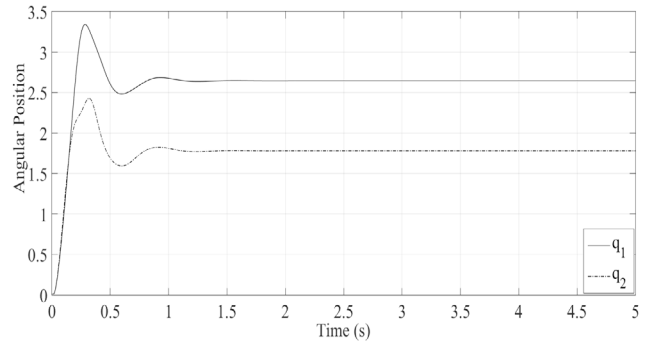


Figure 5. Outputs of the system.

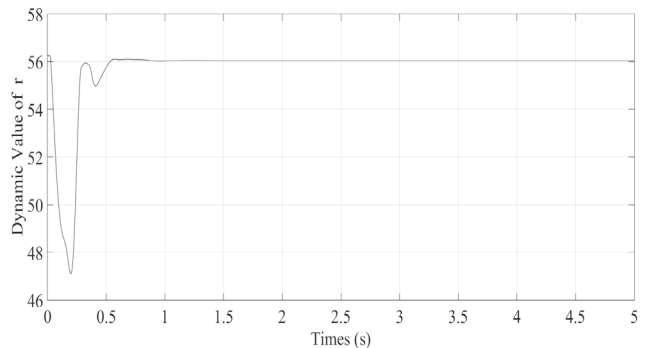


Figure 6. Dynamic behavior of  $r(t)$ .

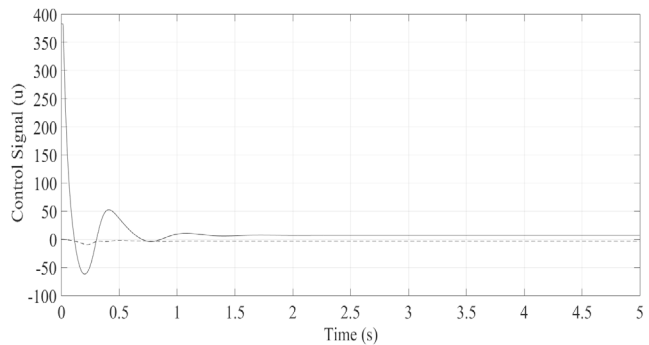


Figure 7. Control Signal ( $u$ ).

attenuated. This is due to the mixed sensitivity criterion and the auto-tuning of the control parameters.

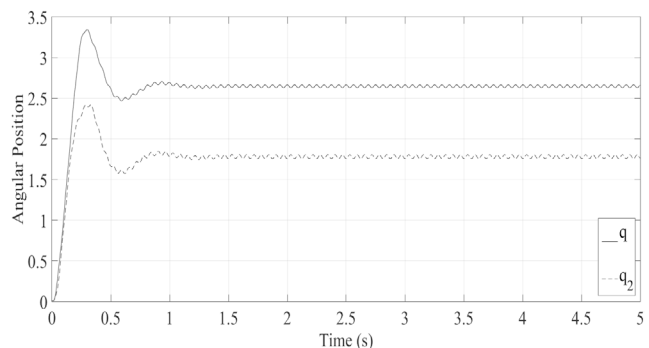


Figure 8. Low frequency disturbance response.

In the Fig. 6 is presented the dynamic changes of the free control parameter, as it can be seen, these changes represent the auto-tuning effect, at the beginning of the process the value changes dramatically to later stabilize.



In the Fig. 8 is presented the response with low frequencies disturbances, the performance remains good, this can be seen as a more severe proof.

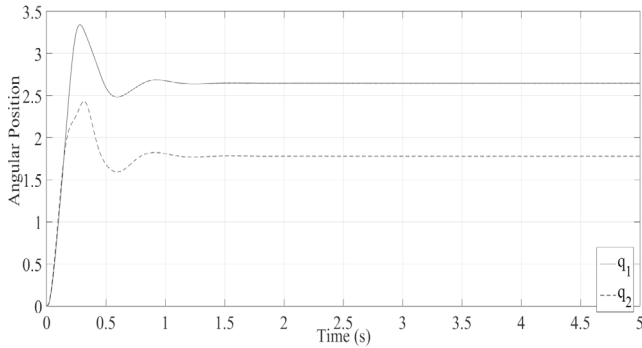


Figure 9. High frequency disturbance response.

Sine waves signals were added as uncertainties,  $1kHz$  for the high frequencies and  $100Hz$  for the low frequency, in both signals, the amplitude is 10. The high frequency uncertainty represents noise at the input of the measure device represented in the Fig. 2 as  $d_2$ , the low frequency disturbance is applied at the plant input added to control signal  $u$ .

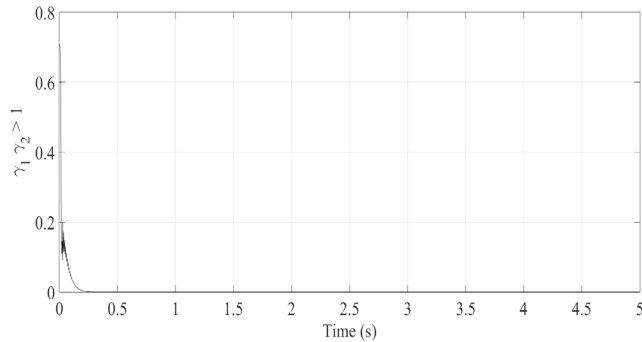


Figure 10. Small Gain Theorem condition  $\gamma_1\gamma_2 \leq 1$ .

The Small Gain Theorem guarantees stability if the inequality condition  $\forall t \in [t_0, t_f]$  is met, the Fig. 10 shows the value of  $\gamma_1\gamma_2$  which satisfies this condition.

## 6. CONCLUSIONS

A solution for a mixed sensitivity control problem under a feedback uncertainty model is presented. A robust controller is designed in a way that its matrices are related to the free parameter of the Youla parametrization  $r$  first as a constant. The analytic expression of  $r$  is obtained by the minimization of the norms  $\|S_o\|_\infty$  and  $\|T_{u\Delta y\Delta}\|_\infty$  and its geometrical relation. For the adaptation law, the  $r(t)$  is now supposed as time variant, and no model reference is needed for the effect of the auto-tuning process. For the stability of the closed loop, the Small Gain Theorem is used. The results are applied to the fully-actuated system of a double pendulum. The simulation results show “good” performance in spite of the uncertainties and disturbances that are attenuated due the Mixed sensitivity problem that is solved. The positions that are desired cannot be reached without increasing the energy needed in the control signal

$u$ , this implies a compromise between them, even if the value of  $a$  is changed in order to get a better response, the energy needed will increase with this. The dynamical behavior of the free parameter leads to the auto-tuning process, the variations of this parameter take place at the beginning of the process but after a short amount of time, it gets stable, leading the simulation to a “good” performance. As next step is the design of an adaptive control law that assures stability when  $\gamma(r(t))$ .

## REFERENCES

- Cui, L., Zhang, Y., Yang, Y., 2014. Youla parameterization based adaptive controller design for fault tolerant control. *Asian Journal of Control* 16 (1), 292–295.
- Galindo, R., 2009. Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering* 223 (7), 957–971.
- Galindo, R., Conejo, C., 2012. A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems. In: *Int. Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control*. p. 171–176.
- Galindo, R., Gaspar, C., 2009. Uncertainty model based on partial linearization and robust control. *World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*.
- Khalil, H. K., 1996. *Non-Linear Systems*. Prentice Hall.
- Puente, R., Galindo, R., 2017. Pasividad de sistemas lineales modelados en bond graph en una configuración retroalimentada de dos grados de libertad. In: *National Congress of Automatic Control 2017, Monterrey, Mexico*. AMCA, pp. 119–124.
- Sastry, S., Bodson, M., 2011. *Adaptive control: stability, convergence and robustness*. Courier Corporation.
- Suarez, D. A., Lozano, R., 1996. Adaptive control of non-minimum phase systems subject to unknown bounded disturbances. *IEEE transactions on automatic control* 41 (12), 1830–1836.
- Suchomski, P. J., 2006. Numerically reliable robust adaptive pole placement in the h1. *Adapt Control Signal Process*.
- Vidyasagar, M., 1985. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. The MIT Press Cambridge.
- Youla, D., Jabr, H., Bongiorno, J., 1976. Modern wiener-hopf design of optimal controllers—part ii: The multi-variable case. *IEEE Transactions on Automatic Control* 21 (3), 319–338.
- Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K., et al., 1996. *Robust and optimal control*. Vol. 40. Prentice hall New Jersey.