

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS DE
SEGURIDAD EN UN VEHÍCULO (ABS, AS, EPS)

POR

ALEJANDRO ANGELBERTO MONTEMAYOR SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

AGOSTO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS DE
SEGURIDAD EN UN VEHÍCULO (ABS, AS, EPS)

POR

ALEJANDRO ANGELBERTO MONTEMAYOR SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

AGOSTO, 2017

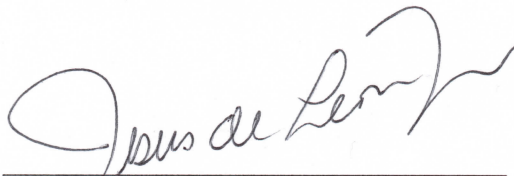
Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Subdirección de Estudios de Posgrado

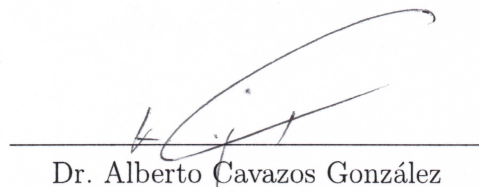
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Algoritmos de Control para Sistemas de Seguridad en un Vehículo (ABS, AS, EPS)», realizada por el alumno Alejandro Angelberto Montemayor Sánchez, con número de matrícula 1427066, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría En Ciencias De La Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis



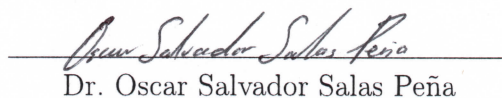
Dr. Jesús De León Morales

Asesor



Dr. Alberto Cavazos González

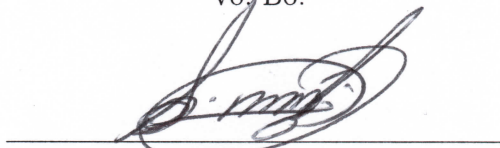
Revisor



Dr. Oscar Salvador Salas Peña

Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, a 10 de agosto 2017

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	xiv
Resumen	xv
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	4
1.2. Justificación	8
1.3. Alcance	9
1.4. Objetivos	9
1.4.1. General	9
1.4.2. Particulares	10
1.5. Metodología	10
2. Algoritmos de control	13
2.1. Descripción del capítulo	13
2.2. Introducción	13
2.2.1. Algoritmo de Control	13

2.3. Estrategias de control	14
2.3.1. Controlador PID	14
2.3.2. Linealización por retroalimentación de estados	16
2.3.3. Backstepping	19
2.3.4. Control por modos deslizantes	22
2.3.5. Asignación de polos	29
3. Sistema de Frenos ABS	32
3.1. Descripción del capítulo	32
3.2. Introducción	32
3.2.1. ABS	33
3.2.2. Funcionamiento	34
3.3. Estudio de la dinámica del sistema de Frenos ABS	35
3.4. Planteamiento del problema	39
3.5. Algoritmos de control aplicados al sistema	40
3.5.1. Modelo Matemático	40
3.5.2. Control Proporcional Integral Derivativo	44
3.5.3. Control por modos deslizantes convencional	44
3.5.4. Control por modos deslizantes super-twisting	46
4. Suspensión activa	49
4.1. Descripción del capítulo	49

4.2. Introducción	49
4.2.1. Suspensión activa	50
4.2.2. Clasificación	51
4.3. Estudio de la dinámica del sistema de suspensión	52
4.4. Planteamiento del problema	56
4.5. Algoritmos de control aplicados al sistema	56
4.5.1. Modelo Matemático	56
4.5.2. Linealización por retroalimentación de estados	60
4.5.3. Control por modos deslizantes super-twisting	62
4.5.4. Control Backstepping	63
5. Dirección Asistida	66
5.1. Descripción del capítulo	66
5.2. Introducción	66
5.2.1. Dirección Asistida Electrónicamente	67
5.2.2. Clasificación del Sistema de Dirección Asistida Electrónicamente	67
5.3. Funcionamiento	69
5.4. Análisis de la dinámica del sistema de Dirección Asistida	69
5.5. Planteamiento del problema	73
5.6. Algoritmos de control aplicados al sistema	74
5.6.1. Estructuración del sistema en un modelo matemático	74

5.6.2. Asignación de polos	77
5.6.3. Control por modos deslizantes super-twisting	83
6. Resultados y conclusiones	88
6.1. Descripción del capítulo	88
6.2. Introducción	88
6.3. Resultados para el sistema de frenos ABS	89
6.3.1. Parámetros y condiciones del sistema	89
6.3.2. Resultados para el algoritmo de control PID	91
6.3.3. Resultados para el algoritmo de control por modos deslizantes convencional	95
6.3.4. Resultados para el algoritmo de control por modos deslizantes super-twisting	98
6.4. Resultados para el sistema de Suspensión Activa	101
6.4.1. Parámetros y condiciones del sistema	101
6.4.2. Control por modos deslizantes super-twisting	103
6.4.3. Retroalimentación de estado	105
6.4.4. Backstepping	108
6.5. Resultados para el sistema de Dirección Asistida Electrónicamente . .	111
6.5.1. Parámetros y condiciones del sistema	111
6.5.2. Control por retroalimentación de estados con la forma canónica de Brunovsky	113

6.5.3. Control por medio del algoritmo super-twisting	118
6.6. Criterio de Evaluación	122
6.7. Conclusiones	124
6.7.1. Conclusiones para el sistema de frenos ABS	124
6.7.2. Conclusiones para el sistema de suspensión activa	125
6.7.3. Conclusiones para el sistema de dirección asistida	125
6.8. Trabajos Futuros	126
Bibliografía	131
Anexos	132
A. Derivada de Lie	133
B. Grado Relativo	135
C. Teorema Lasalle-Yoshizawa y teorema Lasalle	137
D. Algoritmo de asignación de polos para el sistema EPS (desarrollo)	139

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Estructura general del controlador PID	15
2.2. Condición para la existencia del régimen deslizante	24
3.1. Sistema de Frenos Anti-bloqueo (ABS)	33
3.2. Diagrama cuerpo libre sistema ABS	35
4.1. Sistema de Suspensión Activa	50
4.2. Diagrama cuerpo libre sistema Suspensión Activa	53
4.3. Fuerzas que interactúan en el sistema de Suspensión Activa	55
5.1. Sistema de Dirección Asistida Electrónicamente	68
5.2. Representación del sistema de Dirección Asistida Electrónicamente . .	70
5.3. Diagrama de cuerpo libre del EPS	72
5.4. Estructura de control por retroalimentación de estado incluyendo un servoposicionador de las variables θ_s y θ_r	81
5.5. Estructura en subsistemas del sistema de Dirección Asistida	84
6.1. Salida del sistema ABS aplicando el algoritmo PID	92

6.2. Error de salida del sistema ABS aplicando el algoritmo PID	93
6.3. Entrada de control PID para el sistema ABS	93
6.4. Velocidades del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo PID	94
6.5. Posiciones del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo PID	94
6.6. Objetivo de control MDC del sistema ABS	95
6.7. Superficie deslizante del sistema ABS aplicando MDC	96
6.8. Entrada de control MDC para el sistema ABS	96
6.9. Velocidades del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo MDC	97
6.10. Posiciones del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo MDC	97
6.11. Objetivo de control MD Super-twisting del sistema ABS	98
6.12. Superficie deslizante del sistema ABS aplicando MD Super-twisting	99
6.13. Entrada de control MD Super-twisting para el sistema ABS	99
6.14. Velocidades del vehículo y la rueda aplicando MD Super-twisting	100
6.15. Posiciones del vehículo y la rueda aplicando MD Super-twisting	100
6.16. Superficie deslizante del Sistema SA aplicando MD Super-twisting	104
6.17. Entrada de control MD Super-twisting para el sistema de SA	104
6.18. Comportamiento del sistema de SA aplicando MD Super-twisting	105
6.19. Entrada de control por retro de estados para el sistema de SA	106
6.20. Comparación entre el sistema SA original y retro de estados	107
6.21. Sistema de SA Transformado	107

6.22. Entrada de control Backstepping para el sistema de SA	109
6.23. Control Virtual Backstepping para el sistema de SA	109
6.24. Variable de error Backstepping para el sistema SA	110
6.25. Comparación del sistema de SA original y Backstepping	110
6.26. Objetivo de control θ_r aplicando la retro de estados	115
6.27. objetivo de control θ_s aplicando la retro de estados	116
6.28. Entrada de control U_1 para el sistema EPS por retro de estados . . .	116
6.29. Entrada de control U_2 para el sistema EPS por retro de estados . . .	117
6.30. Comportamiento del sistema EPS aplicando la retro de estados	117
6.31. Objetivo de control θ_s aplicando el algoritmo Super-twisting	119
6.32. Objetivo de control θ_r aplicando el algoritmo Super-twisting	119
6.33. Subsistema 1 del sistema EPS controlado por Super-twisting	120
6.34. Subsistema 2 del sistema EPS controlado por Super-twisting	121
6.35. Subsistema 3 del sistema EPS controlado por Super-twisting	122

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Variables del sistema de Frenos ABS	36
4.1. Parámetros del sistema de Suspensión Activa	54
4.2. Cambio de coordenadas para el modelo matemático	57
5.2. Parámetros EPS	71
5.3. Designación de variables para el modelo matemático del EPS	75
6.1. Valores paramétricos para el sistema de ABS	90
6.2. Condiciones iniciales para el sistema ABS	91
6.3. Resultados de ganancias PID para el sistema ABS	92
6.4. Valores de ganancias del control MD Super-twisting	98
6.5. Parámetros del sistema de Suspensión Activa	102
6.6. Condiciones iniciales para el sistema SA	102
6.7. Valores de ganancias del control MD Super-twisting del sistema de SA	103
6.9. Parámetros del sistema de Dirección Asistida	112
6.10. Condiciones iniciales para el sistema de Dirección Asistida	113

6.11. Valores de ganancias del control por retro de estados, sistema EPS . .	115
6.12. Comparativa de algoritmos de control para el sistema de frenos ABS .	123
6.13. Comparativa de algoritmos de control para el sistema de SA	124
6.14. Comparativa de algoritmos de control para el sistema EPS	124

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos

Agradezco profundamente...

A mi asesor de tesis el Dr. Jesús de León Morales por facilitarme las bases ante este trabajo, así como compartirme su conocimiento para enriquecer mi formación académica y con ello llevar a cabo la culminación de esta tesis.

A los Drs. encargados de revisar el contenido de esta presentación, por sus sugerencias y comentarios para lograr una redacción y descripción correcta que sirva de base para futuros trabajos e investigaciones.

A mi familia y amigos, por su comprensión y tolerancia sobre el tiempo y necesidades dedicadas a este informe, agradezco su compañía y ánimos, que me ayudaron mucho en su momento.

A esa persona especial que me a llenado de alegría y motivación desde que empece este nuevo proyecto.

Tanto a la Universidad Autónoma De Nuevo León como a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, por crear este programa de posgrado y así llevar a cabo esta investigación.

Y por último, al CONACYT, por su apoyo económico y lazos con la facultad para fomentar la dedicación al estudio y desarrollo de la investigación.

RESUMEN

Alejandro Angelberto Montemayor Sánchez.

Candidato para obtener el grado de Maestría En Ciencias De La Ingeniería Eléctrica.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS DE SEGURIDAD
EN UN VEHÍCULO (ABS, AS, EPS).

Número de páginas: 143.

RESUMEN Las funciones del sistema eléctrico en expansión y la reducción necesaria de los consumos y las emisiones contaminantes requieren la introducción de estrategias de control que aseguran la robustez del sistema eléctrico y que de alguna forma regulen el trabajo necesario para realizar las acciones de seguridad. Para este estudio, se procederá a elegir una arquitectura de vehículo híbrido, tomando en cuenta los sistemas que conforman dicho vehículo, enfatizando en aquellos que pertenezcan a la seguridad activa del vehículo. Se pretende dividir el vehículo en varios sistemas conformados por: la suspensión activa, la dirección asistida y los frenos ABS. Después, se planteará la problemática de diseñar distintas estrategias de control para dichos sistemas. Se determinarán sus respectivos modelos matemáticos, tomando en cuenta modelos simplificados de un cuarto de vehículo, en los cuales se aplicarán distintas estrategias y leyes de control, cuyo propósito será obtener la configuración

más adecuada, en relación a los objetivos planteados. Se analizarán y compararán los resultados de las distintas técnicas de control y se llegará a una conclusión sobre la eficiencia y optimización los sistemas.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Estudio de la eficiencia de los algoritmos de control utilizados en los sistemas de seguridad activa de un vehículo.

Firma del asesor: _____

Dr. Jesús De León Morales

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

A principios del siglo xx existieron diferentes medios de transporte tanto de personas como de materias. Los principales medios de transporte en esa época eran el tren y las carretas tiradas por caballos.

Con el paso del tiempo y el desarrollo de nuevas tecnologías, hace la aparición un nuevo medio de transporte, conocido ahora como automóvil, el cual podía ser propulsado, ya sea por una máquina de combustión interna o por motores eléctricos. Sin embargo, con el comienzo de la primera guerra mundial, los vehículos de combustión interna tuvieron un mayor desarrollo.

En años recientes, como consecuencia de los problemas del cambio climático, provocados por las emisiones de CO_2 producidas principalmente por los vehículos de combustión interna, se ha motivado la búsqueda de nuevas alternativas de medios de transporte menos contaminantes. Una solución a esta problemática es la introducción del vehículo eléctrico.

Como respuesta a esta situación, las grandes empresas automotrices han ido transformando los vehículos propulsados con motores de combustión interna en vehículos propulsados con motores eléctricos. Esto ha dado lugar, por un lado, a remplazar sistemas mecánicos por sistemas eléctricos o electrónicos. Por otro lado, esto ha provocado un gran aumento en el consumo de energía eléctrica. De este mo-

do, existe una necesidad de suministrar energía a los diferentes sistemas eléctricos del vehículo.

Dentro de los principales sistemas que existen en el vehículo, se encuentran los que están relacionados con la seguridad y el confort. En particular, los sistemas de seguridad requieren de un constante suministro de energía, ya que deben estar alerta en todo momento. Para garantizar estos requerimientos, se han estado buscando estrategias de gestión de energía. Para poder analizar las posibles estrategias de gestión de rendimiento, se han estudiado los diferentes sistemas que intervienen en el área de la seguridad. Entre los principales sistemas maestros de seguridad destacan: el sistema de frenado, el sistema de suspensión y el sistema de dirección.

El tema de la seguridad en vehículos adquirió una gran importancia después de los años 50s, debido al aumento de potencia en los sistemas de propulsión, con el cual se alcanzaron grandes velocidades de desplazamiento. Esto provocó un aumento en el número de accidentes viales. Por este motivo, se buscó aumentar la seguridad de los pasajeros.

La industria automotriz ha introducido en sus nuevos vehículos diferentes elementos de seguridad, entre los que se encuentran: el cinturón de seguridad , las bolsas de aire , la columna de dirección , la suspensión y los frenos.

Los sistemas de seguridad en el vehículo se puede clasificar de la siguiente manera.

- Sistemas de seguridad activa.

Su principal función es estabilizar la respuesta en el manejo del vehículo en situaciones críticas y de este modo mantener su maniobrabilidad.

- Sistemas de seguridad pasiva.

Estos sistemas están diseñados para proteger a los ocupantes del vehículo de lesiones graves en caso de un accidente. Reducen el riesgo de lesiones y por lo

tanto la gravedad de las consecuencias de un accidente.

Por otro lado, los problemas de carácter ambiental, los nuevos desarrollos tecnológicos, y satisfacer las demandas de los clientes, han motivado que la industria automotriz evolucione, buscando mejorar el desempeño energético de los diversos sistemas que interactúan en el vehículo, a través del diseño estructural y aerodinámico del vehículo, con el fin de reducir el consumo de energía, aumentar la seguridad y mejorar el confort de los pasajeros.

Una forma de lograr estos objetivos es mediante estrategias de control y adaptarlas a las nuevas tecnologías que son implementadas en los diferentes sistemas del vehículo.

Entre las principales áreas de investigación relacionadas con los sistemas de seguridad se encuentran las siguientes:

- Sistemas de dirección y frenado.
- Rendimiento y conducción vehicular.
- Seguridad y confort de los tripulantes.
- Sistemas de administración y gestión de energía.

De esta forma, para controlar los diversos subsistemas de control empleados en el vehículo, se utilizan distintos métodos. Estos se pueden organizar en: Controles Clásicos como el PID, asignación de polos, LQR; o Controles Modernos como por ejemplo, control backstepping, linealización por retroalimentación de estados, control por modos deslizantes clásicos y de alto orden, etc. Sin embargo, para poder implementar estos controles en la mayoría de los vehículos de nueva generación, existe un componente muy importante el cual es conocido como la unidad de control electrónico (ECU).

Este dispositivo se encarga del control de aquellos subsistemas que interviene en la seguridad y el confort del vehículo. Esta unidad de control está conectada a los diferentes sensores y actuadores de los subsistemas del vehículo, además cuenta con un software cuya lógica le permite tomar decisiones (operar los actuadores) según la información proporcionada por los sensores.

Básicamente, este dispositivo es un sistema embebido que controla principalmente los sistemas que intervienen en un vehículo, los que son:

- El motor (motor de combustión interna o motor eléctrico).
- La transmisión mecánica.
- El sistema de bolsas de aire.
- El sistema de enfriamiento.
- Los frenos ABS.
- Fuel injection.
- El sistema electrónico de estabilidad (ESP).
- La dirección asistida electrónicamente (EPS).

1.1 ESTADO DEL ARTE

Con la invención de los automóviles, se produjo un aumento en el índice de mortalidad de la población mundial. Esto ocasionó que las compañías automotrices centraran su atención en el tema de la seguridad.

Las técnicas aplicadas a vehículos se han ido perfeccionando para garantizar la estabilidad del sistema y la seguridad de los pasajeros, por medio del uso de sistemas de control. Estos sistemas se encargan de activar o controlar algún dispositivo actuador que resuelva el problema de control existente en cada sistema de seguridad.

En el caso del sistema de ABS, han sido propuesto de distintas formas de análisis, algunas investigaciones se basan en el análisis del modelo del vehículo completo [1], [2], otros en el análisis del modelo tipo bicicleta [3] y por ultimo en el análisis del modelo de 1/4 de vehículo [4], [5]. Este sistema prevee que las ruedas se bloqueen durante la acción de frenado, por medio del control del índice de deslizamiento.

Unos trabajos suponen como entrada de control, el par o torque de frenado directamente [4], [6], mientras que otros se basan en la presión hidráulica necesaria para aplicar este torque [1], [7].

Para controlar este sistema de ABS se han propuesto diversos algoritmos de control. Por ejemplo, se han utilizado controles simples como el control ON/OFF, para regular las válvulas de presión en el sistema de frenado [8].

Algunos trabajos utilizan algoritmos sencillos para el control del sistema de frenos ABS, entre ellos destacan el controlador PID [5], [9], control robusto, control por relé o histéresis [10], etc.

Por otro lado, se han implementado técnicas de control no lineal, como el control por modos deslizantes [1], [4], [6], entre los cuales destacan algoritmos tales como, el super-twisting [9]. Otros trabajos introducen un algoritmo de super-twisting con ganancias adaptativas, para atenuar el efecto del chattering [11], estos controles convergen en tiempo finito y son robustos ante perturbaciones.

También se han propuesto otro tipo de técnicas de control no lineal, las cuales son robustas ante perturbaciones pero que convergen asintóticamente, tales como, el control por backsteeping [7].

Por otra parte, en lo que se refiere al sistema de suspension activa, cuya tarea es corregir los errores de deflexión del neumático y de la suspensión -que es la diferencia entre la superficie de la carretera y la masa no suspendida- cuando el vehiculo se desplaza sobre la superficie irregular de la carretera; modelos de 1/4, 1/2 y vehículo completo [12] han sido utilizados para el diseño de los algoritmos de control, con el

fin de mejorar el confort y la maniobrabilidad en el vehículo.

Algunos autores consideran algoritmos de control basados en la fuerza del actuador directamente como entrada de control [13], [14], mientras que otros autores incluyen un análisis de la dinámica del actuador, siendo la entrada de control el voltaje que activa el desplazamiento del actuador [12], [15], [16].

Para alcanzar el objetivo de control para el sistema de suspensión activa, se han propuesto distintas técnicas de control de deflexión en la suspensión y en el neumático. Por un lado, diseños de control lineal han sido presentados, entre los cuales destacan los diseños basados en las técnicas de control óptimo LQR [12], [17] y LQG [16], [18], o en los métodos de control robusto [16], [17], [19] y de control digital [20]. Sin embargo, al considerar en sistema de la suspensión las componentes no-lineales, entonces es necesario utilizar algoritmos de tipo no lineal. Dentro de las diferentes estrategias de diseño de control robusto, se pueden mencionar aquellas basadas en las técnicas de modos deslizantes [15], y su extensión de super-twisting [14], así como el control backstepping [21], entre otros.

Además, existen otros métodos del tipo heurístico, tales como: las redes neuronales y la lógica difusa [22] que han sido utilizados para el diseño de controladores, los cuales no serán utilizados en esta tesis.

Por otro lado, la carretera por donde se desplaza el vehículo presenta irregularidades en su superficie, las cuales son de carácter desconocido e influyen en el sistema de suspensión activa. Además, para poder implementar los algoritmos de control diseñados, se requieren del conocimiento de todo el vector de estado, así como de sus parámetros. Entonces, y puesto que no se tiene conocimiento exacto de todas las variables del vector de estado, una forma de resolver este problema es, reconstruyendo el vector de estado mediante la utilización de observadores. Dentro del diseño de observadores estudiados hasta la actualidad se tienen: los observadores basados en alta ganancia y los basados en modos deslizantes.

Otro sistema de gran importancia en el automóvil que será estudiado en esta

tesis, es el sistema de dirección asistida. Anteriormente la acción de direccionar el volante exigía demasiada fuerza al conductor, por lo que se buscaron distintas formas de reducir este esfuerzo. De este modo, se logró mejorar el desempeño en el manejo de la dirección, pero era necesario dar muchos giros que cansaban o limitaban la respuesta ante maniobras de emergencia. Con el paso del tiempo y el avance de la tecnología, se han aplicado nuevos métodos para reducir el esfuerzo sobre el volante conservando la seguridad en el vehículo, el resultado es conocido como dirección asistida.

En este trabajo se toma en cuenta el sistema de dirección asistida electrónicamente (EPS), cuyo objetivo es ayudar al conductor para vencer o superar la fuerza de auto-alineamiento de las ruedas, por medio de un motor eléctrico que producirá un torque de asistencia en función del esfuerzo ejercido sobre el volante. De esta forma, la fuerza que el conductor deberá aplicar, más la fuerza que aplicará el motor de asistencia serán iguales a la fuerza de auto-alineamiento. Haciendo que el conductor solo ejerza entre un 20 % a un 30 % de la fuerza total de auto-alineamiento.

En la mayoría de las investigaciones sobre el control de estos sistemas, un modelo que describe la dinámica de la dirección y del motor de asistencia es considerado para resolver el problema de seguimiento de corrientes para el motor de asistencia, que son calculadas por medio de un mapa de curvas de asistencia [23]. Estas curvas dependen de la velocidad del vehículo y del par o torque sensado en el volante. De este modo, el motor proporcionará la corriente necesaria para corregir la dirección.

Por otro lado, existen trabajos donde se considera el modelo de la fuerza de resistencia y auto-alineamiento de la dirección [24], [25].

Para controlar el motor en el EPS, comunmente se proponen tres tipos de estrategias de control. La primera estrategia se basa en el control de corriente, la segunda estrategia se basa en el control de voltaje, por último se encuentra la estrategia relacionada con el control del par o torque en el motor [26].

Estas estrategias estan basadas en los algoritmos de control tales como PID

[27], [28], lógica difusa [29] y modos deslizantes [30], aplicados al driver del motor de asistencia. Algunos trabajos están basados en un modelo de un motor DC sin escobillas conocido como "Brushless" [31], mientras que otros utilizan el modelo de un motor DC de imanes permanentes [26].

1.2 JUSTIFICACIÓN

Se estima que en un futuro cercano se apreciará un gran incremento en la demanda de vehículos híbrido-eléctricos, esto implicará un incremento de componentes eléctrico/electrónicos en los vehículos. Como consecuencia, los requerimientos de energía eléctrica tendrán un aumento considerable.

Con los componentes del sistema eléctrico en expansión, aparte de la reducción necesaria de los consumos energéticos y las emisiones contaminantes, los vehículos requieren la introducción de estrategias de control de energía que aseguren la robustez del sistema eléctrico y la gestión de la energía óptima para todas las condiciones operativas del vehículo.

Además, se busca obtener un mejor rendimiento y aprovechamiento de la energía con la intención de hacer que las unidades sean más seguras, rentables y ahorradoras.

En este trabajo se busca analizar la dinámica de los principales subsistemas de seguridad en un automóvil: el sistema de frenos ABS, el sistema de suspensión activa y el sistema de dirección asistida electrónicamente. Se pretende emplear distintas técnicas de control para obtener una mejor respuesta de estos subsistemas actuando bajo distintas condiciones.

Con los resultados obtenidos se logrará hacer una comparación entre los distintos algoritmos de control utilizados, con el fin de elegir el algoritmo más adecuado correspondiente a las necesidades propuestas.

La simulación de los subsistemas es implementada mediante el software Matlab. Se diseñan programas que describen la dinámica de los subsistemas, a los cuales se les aplican las distintas leyes de control para analizar las respuestas de salida y finalmente, llegar a una conclusión.

1.3 ALCANCE

El alcance de esta investigación consiste en:

- 1.- Presentar un análisis de la dinámica de los subsistemas de seguridad.
- 2.- Obtener los modelos matemáticos de cada subsistema de seguridad.
- 3.- Determinar los parámetros y las restricciones físicas.
- 4.- Calcular y aplicar los algoritmos de control.
- 5.- Desarrollar la simulación en Matlab de los distintos subsistemas de seguridad .
- 6.- Analizar las respuestas de cada sistema, de acuerdo a los objetivos de control propuestos.
- 7.- Comparar los resultados obtenidos.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 GENERAL

Se pretende analizar los distintos modelos matemáticos referentes a los subsistemas de seguridad activa de un vehículo, así como desarrollar diversas técnicas para

su control, con el fin de evaluar el desempeño dinámico de estos sistemas y realizar una comparativa que sirva de base para su optimización.

1.4.2 PARTICULARES

Con el propósito de cumplir el objetivo general, se definen los siguientes objetivos particulares.

- Analizar las estructuras que conforman la arquitectura del vehículo en cuanto a los sistemas de seguridad.
- Desarrollar los modelos matemáticos que describen la dinámica de los diferentes subsistemas de seguridad.
- Comparar los algoritmos de control en base a ciertos criterios de desempeño propuestos.

1.5 METODOLOGÍA

Para lograr los objetivos establecidos, se considerarán diferentes estrategias de control para los subsistemas que intervienen en el sistema de seguridad del vehículo, las cuales serán estudiadas en forma de subsistemas individuales.

A partir de modelos matemáticos que describen la dinámica de los principales sistemas de seguridad, se diseñarán las distintas estrategias de control para cada uno de ellos. Además, se compararán las distintas técnicas para elegir la opción más adecuada, con el fin de satisfacer los objetivos propuestos.

Primeramente, se diseñará un sistema de control para el sistema de frenado conocido como ABS, el cual proporcione una rápida respuesta de frenado bajo una

razón de deslizamiento que garantice la disminución de velocidad lo mas pronto posible, para un perfil de manejo específico.

Posteriormente, se presentará el diseño de un sistema de control para el sistema de suspensión en configuración tipo activa. Por medio de un actuador adicional, se pretende entregar energía adicional al sistema para corregir los errores de deflexión, todo esto con la finalidad de proporcionar estabilidad y confort en presencia de imperfecciones en la carretera.

Finalmente, se diseñará un algoritmo de control para el seguimiento de trayectoria en el sistema de dirección, que facilite la conducción, el cual es conocido como: dirección asistida electrónicamente (EPS). Este sistema proporciona asistencia de manejo al conductor para mantener una trayectoria deseada, bajo condiciones de maniobras de emergencia.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera.

En el capítulo 2 se introducen los conceptos y el desarrollo de los distintos algoritmos de control utilizados para los subsistemas de seguridad.

Posteriormente, en el capítulo 3 se estudiará el sistema de frenado ABS, donde el modelo dinámico del sistema así como las estrategias de control empleadas en el sistema serán presentadas.

Ademas, el control del sistema de suspensión será estudiado en el capítulo 4, donde un modelo dinámico así como las estrategias de control utilizadas serán presentados.

Por otro lado, el capítulo 5 tratará sobre el control del sistema de dirección asistida, donde se incluye, desde un modelo dinámico del sistema hasta los algoritmos de control implementados en el sistema.

Los resultados referentes a las simulación de los distintos sistemas de seguridad estudiados, así como las conclusiones de esta tesis y la propuesta de trabajos futuros,

conformarán el capítulo 6.

CAPÍTULO 2

ALGORITMOS DE CONTROL

2.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presentan los conceptos relacionados con los diferentes algoritmos de control utilizados en esta investigación. Se introducen los diseños de los algoritmos de control tales como el controlador de PID, linealización por retroalimentación de estados, backstepping, control por modos deslizantes y modos deslizantes super-twisting, los cuales serán aplicados a los diferentes subsistemas de seguridad.

2.2 INTRODUCCIÓN

2.2.1 ALGORITMO DE CONTROL

Cuando se pretende controlar un sistema, éste generalmente está descrito por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser lineales o no lineales. Generalmente, para describir la dinámica de un sistema descrito con ecuaciones diferenciales ordinarias se utiliza la teoría de control moderno, la cual se basa en una representación de variables de estado. En base a esta

representación en variables de estado, se puede clasificar a los sistemas en sistemas lineales y no lineales.

Existen diversos algoritmos de control, los cuales se pueden clasificar en sistemas de control clásico, en donde el control PID es uno de los mas implementados; y los algoritmos de control mas recientes basados en técnicas de control no lineal, entre los cuales se encuentran: retroalimentación de estado linealizante, backstepping, modos deslizantes, y en particular, el algoritmo super-twisting y modos deslizantes de alto orden. De los algoritmos anteriores se puede distinguir lo siguiente, la técnica de retroalimentación de estado linealizante requiere el conocimiento de las no linealidades del sistema para poderlas cancelar, lo cual limita su robustez. Por otro lado, la técnica basada en el control backstepping es robusta y converge asintóticamente, en cambio los modos deslizantes también son robustos pero convergen en tiempo finito.

2.3 ESTRATEGIAS DE CONTROL

A continuación, se presentan los algoritmos de control utilizados en los subsistemas de seguridad estudiados en este trabajo. Con estos algoritmos se pretende resolver el problema u objetivo de control correspondiente a cada subsistema.

2.3.1 CONTROLADOR PID

Este algoritmo está basado en la retroalimentación de términos, cuya finalidad es llevar al sistema a una referencia deseada.

Considere un sistema escalar lineal invariante en el tiempo de una entrada - una salida, representado en espacio de estados de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$ representa el estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ representa la entrada y $y(t) \in \mathbb{R}$ es representada como la salida. Por otro lado, definiendo el error de seguimiento como la diferencia entre la salida deseada y la salida original de sistema: $e(t) = y_d(t) - y(t)$ y asumiendo que el sistema es controlable y observable, entonces, se puede diseñar una ley de control tipo PID.

El diagrama a bloques 2.1 ilustra la acción del controlador PID.

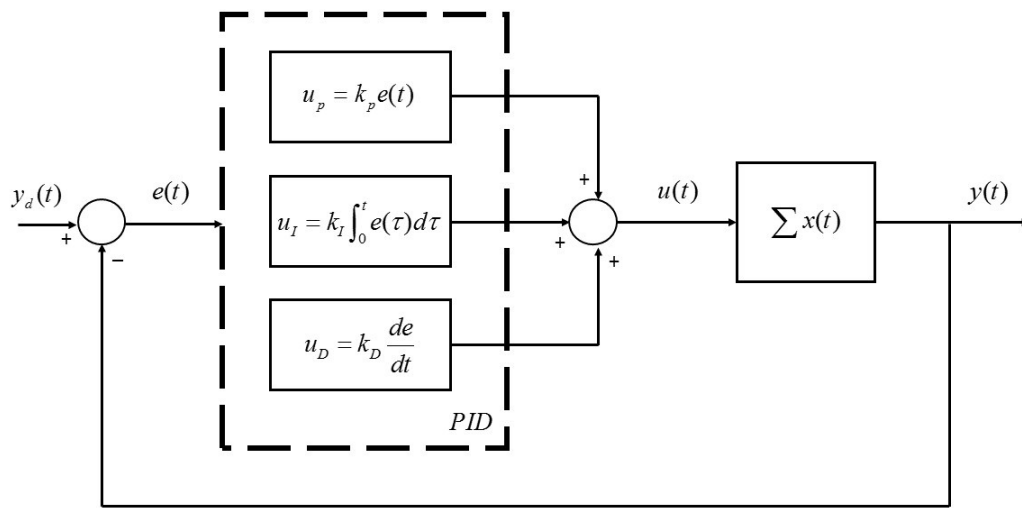


Figura 2.1: Estructura general del controlador PID

El controlador PID se compone de 3 acciones básicas: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D).

P.- La acción proporcional está dada por el producto del error de seguimiento y una ganancia.

$$u_p = k_p e(t) \quad (2.2)$$

I.- La acción integral depende de la integral el error de seguimiento multiplicado por una ganancia.

$$u_I = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

D.- La acción derivativa se expresa como la derivada del error de seguimiento multiplicada por una ganancia.

$$u_D = k_D \frac{de}{dt} \quad (2.4)$$

Combinando estas 3 acciones obtenemos la ley de control para un controlador PID , tal como se muestra en la figura 2.1, donde la entrada será igual a la suma de los términos representados por las acciones de control

$$u_{PID} = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de}{dt} \quad (2.5)$$

Para obtener un buen desempeño de este algoritmo se requiere sintonizar las ganancias de control, las cuales son: la ganancia proporcional k_p , la ganancia integral k_I y la ganancia derivativa k_D .

Los métodos de ajuste mas utilizados son los propuestos por Ziegler y Nichols (1942).

1.- Método de oscilación o método de respuesta en la frecuencia, basado en el análisis de las oscilaciones de un sistema con un lazo retroalimentado por una ganancia proporcional.

2.- Método basado en la curva reacción o método de respuesta al escalón , donde se analiza la respuesta al sistema en lazo abierto con una entrada escalón unitario y se calculan las ganancias dependiendo de la pendiente máxima de la curva.

Actualmente se utilizan programas capaces de sintonizar las ganancias de control de forma directa; como Matlab-Simulink.

2.3.2 LINEALIZACIÓN POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS

La linealización por retroalimentación de estados es un método de diseño de sistemas de control no lineales que transforma sistemas no lineales (total o parcial-

mente) en sistemas lineales, con la finalidad de aplicar una ley de control lineal a la dinámica lineal resultante.

Considerando el siguiente sistema constituido de una entrada - una salida sin presencia de incertidumbres de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, & x \in R^n, u \in R \\ y &= h(x), & y \in R \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde f y g son campos vectoriales suaves sobre R^n , además $h : R^n \rightarrow R$ es una función suave de tal manera que $h(0) = 0$.

A continuación, se introducen los siguientes resultados relacionados con el grado relativo ρ de un sistema no lineal.

Nota. El grado relativo puede determinarse como el número de veces que es necesario derivar la función de salida para que aparezca la entrada de control de forma explícita (Anexo B).

Lema 1. Se asume que el sistema (2.6) es de grado relativo $\rho < \infty$. Entonces el grado relativo será menor o igual al número de estados en el sistema $\rho \leq n$, además

$$\text{rango}\{dh, \dots, d(L_f^{j-1}h)\}(x) = j, \quad \forall x \in U_o \quad (2.7)$$

para cada $j = 1, \dots, \rho$ y donde $L_f^{j-1}h$ es la derivada de lie con respecto a h . (Para la definición de la derivada de Lie revisar Anexo A).

Lema 2. Se asume que $\rho \leq n$ para el sistema (2.6). Entonces existen $n - \rho$ funciones $\xi_i(x)$, $1 \leq i \leq n - \rho$, de tal manera que:

(i) las funciones

$$\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \dots, L_f^{\rho-1}h(x) \quad (2.8)$$

forman un difeomorfismo local alrededor del origen;

(ii) $\langle d\xi_1(x), g \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n - \rho.$

Considerando el siguiente cambio de coordenadas locales

$$\begin{aligned} (\xi, z) &= (\xi(x), z(x)) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), z_1(x), \dots, z_\rho(x)) \\ (\xi, z) &= (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \dots, L_f^{\rho-1}(x)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

el sistema (2.6) es expresado de la siguiente forma (forma normal).

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por otro lado, si el grado relativo global ρ está bien definido con $\rho \leq n$ y

(iii) los campos vectoriales

$$\bar{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \quad \bar{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g \quad (2.11)$$

son completos, entonces existe un difeomorfismo que transforma al sistema (2.6) en la forma (2.10).

Lema 3. Si el sistema (2.6) tiene grado relativo $\rho \leq n$, entonces se puede hacer una linealización por retroalimentación de estados local de forma parcial. Se define el control por retroalimentación de estado como

$$L_f^\rho h + (L_g L_f^{\rho-1} h) u = v \quad (2.12)$$

Por lo tanto,

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} (-L_f^\rho h + v) \quad (2.13)$$

y sustituyendo la entrada de control u en (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= v \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sin embargo, aplicar un controlador auxiliar v que lleve a los estados de la dinámica lineal asintóticamente a cero, no garantiza que el estado completo del sistema llegue de forma asintótica al equilibrio x_0 . Para que esto ocurra, es necesario

que los estados de la dinámica interna del sistema también tiendan de forma asintótica a cero. En general, se tendrá que buscar una función de Lyapunov, de tal forma que, los estados de la dinámica interna converjan de forma asintótica a cero.

Para comprobar el hecho de la convergencia del sistema completo, se deberán tomar en cuenta las siguientes definiciones.

Dinámica cero. Se asume que $\rho < n$ en U_0 para el sistema (2.6). Sea $z_i = L_f^{i-1}h(x)$, $1 \leq i \leq \rho$. Además, se define la variedad $(n - \rho)$ dimensional $M = \{x \in U_0 : h(x) = 0, \dots, L_f^{\rho-1}h(x) = 0\}$. La dinámica del sistema (2.6) limitado por M será llamada *dinámica cero*.

Fase mínima. De acuerdo al Lema 3, la *dinámica cero* del sistema (2.6) está dada en coordenadas locales, como

$$\dot{\xi} = \phi(\xi, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-\rho} \quad (2.15)$$

y se obtiene haciendo $z_1 = 0, \dots, z_p = 0$ en la parte lineal del sistema (2.10), ya que

$$M = \{(\xi, z) \in V_0 \subset U_0 : z_1 = 0, \dots, z_p = 0\} \quad (2.16)$$

Dado el sistema (2.6) con $\rho < n$ se dice que es de *fase mínima* si el origen $\xi = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable para la *dinámica cero*.

2.3.3 BACKSTEPPING

Una de las ventajas del *backstepping* es que en lugar de eliminar las no linealidades, las toma en cuenta para mejorar el rendimiento de la *dinámica transitoria* en el sistema.

El principio del *backstepping* es diseñar un controlador para sistemas no lineales, de forma recursiva, introduciendo variables auxiliares que actúan como *controles virtuales*, a cada etapa de diseño.

Para diseñar un algoritmo basado en el método de backstepping, son consideradas las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0 \quad (2.17)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. Entonces, existe una ley de control por retroalimentación continuamente diferenciable

$$u = \alpha(x), \quad \alpha(0) = 0 \quad (2.18)$$

y una función suave definida positiva y radialmente no acotada, es decir, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para hacer $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ tal que,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\alpha(x)] \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.19)$$

donde $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es semidefinida positiva.

Bajo esta hipótesis, el control (2.18), aplicado al sistema (2.17), garantiza el acotamiento global de $x(t)$, y por medio del teorema de LaSalle-Yoshizawa (ver anexo C), la regulación de $W(x(t))$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0. \quad (2.20)$$

A partir del teorema de LaSalle (ver anexo C), se obtiene una fuerte convergencia con $\Omega = \mathbb{R}^n$: i.e. $x(t)$ converge al conjunto invariante mas grande M contenido en el conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(x) = 0\}$. Claramente, si $W(x)$ es definida positiva, el control (2.18) fuerza al estado a tender al origen $x = 0$, siendo el equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema (2.17).

A continuación se introduce un lema que muestra el cálculo de backstepping para el caso mas sencillo.

Lema 1. (Integrador Backstepping). Sea el sistema (2.17), aumentado por un integrador

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (2.21)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (2.22)$$

y se supone que la ecuación (2.21) satisface la Hipótesis 1 con $\xi \in \mathbb{R}$ como el control.

(i) Si $W(x)$ es definida positiva, entonces

$$V_a(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2} [\xi - \alpha(x)]^2 \quad (2.23)$$

es una función de Lyapunov del sistema completo, es decir, existe un control por retroalimentación $u = a_a(x, \xi)$, lo que da lugar a que el punto de equilibrio ($x = 0, \xi = 0$) sea un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema compuesto por (2.21) y (2.22). El control resulta ser de la forma,

$$u = -c(\xi - \alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x), \quad c > 0. \quad (2.24)$$

(ii) Si $W(x)$ solo es semidefinida positiva, entonces existe un control por retroalimentación que hace $\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi) \leq 0$, tal que $W_a(x, \xi) > 0$ para cualquier $W(x) > 0$ o $\xi \neq \alpha(x)$. Esto garantiza la cota global y la convergencia de $\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$ al conjunto invariante mas grande M_a contenido en el conjunto $E_a = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid W(x) = 0, \xi = \alpha(x) \right\}$.

El resultado anterior se puede extender a una cadena de N integradores, el cual se establece en el siguiente corolario.

Corolario 1. (Cadena de Integradores) Considere el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= u \end{aligned} \quad (2.25)$$

el cual satisface la hipótesis 1, tal que $\alpha(x) = \alpha_i(x)$, con $i = 0, \dots, k - 1$ para cada una de las etapas. Para este sistema, el Lema 1 se aplica de forma recursiva con

ξ_1, \dots, ξ_k como controles virtuales y considerando la siguiente función de Lyapunov

$$V_a(x, \xi_1, \dots, \xi_k) = V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\xi_i - \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})]^2, \quad (2.26)$$

se demuestra que el punto de equilibrio ($x = 0, \xi_1 = \dots = \xi_k = 0$) es asintóticamente estable.

Para cualquier control por retroalimentación de estado que haga $\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi_1, \dots, \xi_k) \leq 0$, con $W_a(x, \xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ solo si $W(x) = 0$ y $\xi_i \neq \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})$ para $i = 1, \dots, k$, garantiza que $[x^T(t), \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]^T$ es globalmente acotada y converge al conjunto invariante mas grande M_a contenido en el conjunto,

$$E_a = \left\{ [x^T, \xi_1, \dots, \xi_k]^T \in \mathbb{R}^{n+k} \mid W(x) = 0, \xi_i = \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}), i = 1, \dots, k \right\}.$$

Además, si $W(x)$ es definida positiva, esto es, si $x = 0$ puede demostrarse como globalmente asintóticamente estable a través de ξ_1 , entonces (2.26) es una función de Lyapunov para el sistema (2.25) y el equilibrio $x = 0, \xi_1 = \dots = \xi_k = 0$ podrá demostrarse como globalmente asintóticamente estable a través de u .

2.3.4 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

Recientemente, los algoritmos por modos deslizantes han tenido un mayor interés dadas sus propiedades de robustez ante presencia de perturbaciones en sistemas no lineales.

El principio de diseño del control por modos deslizantes consiste en forzar las trayectorias del sistema a permanecer sobre una superficie deslizante ante perturbaciones y variaciones paramétricas.

Sin embargo, este control es discontinuo lo que da lugar a fenómenos indeseables, los cuales aparecen debido al efecto de la conmutación. Estos efectos se conocen como “chattering”, siendo la principal desventaja de este tipo de algoritmo.

Debido a los efectos del chattering se han propuesto nuevos algoritmos, tales como modos deslizantes de orden superior y otras técnicas como el supertwisting o el quasi-continuo, para reducir este efecto de chattering.

2.3.4.1 CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN (SIRA-RAMIREZ 1988 UTKIN 1992)

Considere un sistema de control no lineal de una entrada - una salida de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada del sistema.

Se define una función suave $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que cumpla con el objetivo de control $\vartheta(x) = 0$, a partir de la cual se determina una superficie, conocida como superficie deslizante o de conmutación en el espacio de estados.

Ahora, para lograr que las trayectorias del sistema converjan a la superficie de deslizamiento ϑ será necesario aplicar una ley de control $u(x)$. Para ello, la ley de control esta definida por medio de la función signo como,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases} \rightarrow u = \begin{cases} u^+(x); & \text{si } \vartheta(x) > 0 \\ u^-(x); & \text{si } \vartheta(x) < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Aplicando la ley de control (2.28), el sistema (2.27) en lazo cerrado resulta en dos subsistemas continuos, dependiendo del signo de $\vartheta(x)$:

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x, u^+) = F^+(x); & \text{si } \vartheta(x) > 0 \\ F(x, u^-) = F^-(x); & \text{si } \vartheta(x) < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Por otro lado, para garantizar que la dinámica de las trayectorias del sistema se mantenga sobre la superficie deslizante, el sistema debe cumplir la siguiente desigualdad

$$\dot{\vartheta}(x)\vartheta(x) < 0 \quad (2.30)$$

Este análisis es representado gráficamente en la figura 2.2.

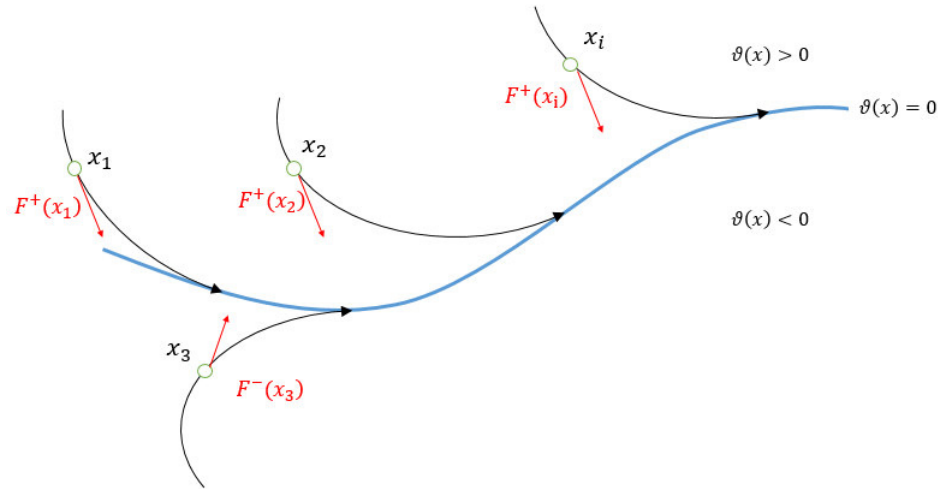


Figura 2.2: Condición para la existencia del régimen deslizante

Ahora, considerando el caso particular donde el sistema se representa de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.31)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, además f y g representan campos vectoriales suaves definidos en \mathbb{R}^n .

Para el sistema (2.31), se supone una superficie deslizante ϑ cuya derivada a lo largo de los campos f y g , expresada en términos de la derivada de Lie, está dada por

$$\dot{\vartheta} = L_f\vartheta + L_g\vartheta u \quad (2.32)$$

Aplicando la ley de control definida en (2.28), la condición de existencia del régimen deslizante se expresa como:

$$\dot{\vartheta} = \begin{cases} L_f\vartheta + L_g\vartheta u^+ < 0 & \text{si } \vartheta(x) > 0 \\ L_f\vartheta + L_g\vartheta u^- < 0 & \text{si } \vartheta(x) < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

donde es necesario que se cumpla:

$$L_g\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} g(x) \neq 0 \quad (2.34)$$

la cual es conocida como condición de transversalidad.

En términos de control, la condición de transversalidad es equivalente a determinar que el grado relativo del sistema sea igual a 1, considerando como salida a la superficie deslizante ϑ .

Puesto que la ley de control (2.28) es aplicada al sistema (2.31), este presenta discontinuidades en el lado derecho de la ecuación, por lo que no se satisface la condición de unicidad de la solución y no se garantiza $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces se requiere de otras herramientas para estudiar esta clase de sistemas, como las inclusiones diferenciales.

Otras maneras de contrarrestar estos inconvenientes se basan en métodos en los que se involucra algún tipo de transformación o aproximación a un sistema continuo, el cual tenga una única solución y se le puedan aplicar las técnicas de control moderno. A esta sustitución del problema se lo conoce como regularización.

En este trabajo, se empleará el método del control equivalente por lo que se da una breve explicación a continuación.

MÉTODO DE CONTROL EQUIVALENTE.

Este método de regularización consiste en remplazar la ley de control discontinua por una ley de control equivalente u_{eq} , que satisfaga las siguientes condiciones de diseño:

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= 0 \\ \dot{\vartheta}(x) &= L_{(f+gu)}\vartheta(x) = 0, \quad u = u_{eq} \end{aligned} \tag{2.35}$$

las cuales garantizan el régimen deslizante.

La expresión del control equivalente será obtenida de la condición anterior, es decir

$$\dot{\vartheta}(x) = L_f\vartheta(x) + L_g\vartheta(x)u_{eq}(x) = 0 \tag{2.36}$$

donde

$$u_{eq}(x) = -\frac{L_f\vartheta(x)}{L_g\vartheta(x)} \tag{2.37}$$

En el caso que las trayectorias del sistema no se encuentren sobre la superficie deslizante ϑ , se empleará el uso de un control adicional u_{ad} que atraiga las trayectorias del sistema para que se mantengan sobre la superficie deslizante. Este control está determinado por la siguiente restricción

$$\vartheta \dot{\vartheta} \leq -\eta_{\vartheta} |\vartheta| \quad (2.38)$$

y es agregado a la expresión (2.36) de la siguiente manera:

$$\dot{\vartheta}(x) = L_f \vartheta(x) + L_g \vartheta(x) [u_{eq}(x) - u_{ad}(x)] \quad (2.39)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación 2.39 en 2.38 se procede a obtener el control adicional u_{ad} de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \vartheta [L_f \vartheta(x) + L_g \vartheta(x) u_{eq}(x) - L_g \vartheta(x) u_{ad}(x)] &\leq -\eta_{\vartheta} |\vartheta| \\ -L_g \vartheta(x) u_{ad}(x) &\leq -\eta_{\vartheta} \frac{|\vartheta|}{\vartheta} - L_f \vartheta(x) - L_g \vartheta(x) u_{eq}(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Aplicando las propiedades necesarias se llega a la siguiente expresión

$$u_{ad}(x) \geq \frac{\eta_{\vartheta}}{L_g \vartheta(x)} \frac{|\vartheta|}{\vartheta} \quad (2.41)$$

La ley de control equivalente total esta dada por la siguiente expresión.

$$u_T = u_{eq} - u_{ad} \operatorname{sgn}(\vartheta). \quad (2.42)$$

2.3.4.2 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES SUPER-TWISTING

El control por modos deslizantes de segundo orden mas popular es el super-twisting, utilizado para sistemas no lineales con presencia de perturbaciones. Sin embargo, el algoritmo super-twisting es también empleado para eliminar el efecto del chattering en la dinámica de sistemas de grado relativo igual a 1.

La ley de control super-twisting clásica consiste en una función de control continua que fuerza a la variable deslizante ϑ y a su derivada $\dot{\vartheta}$ hacia cero en un

tiempo finito, en presencia de perturbaciones suaves con gradiente acotado, cuando este es conocido. Para aplicar este algoritmo se requiere que la variable deslizante sea de grado relativo 1.

A continuación se muestra el desarrollo del algoritmo de control.

Considere un sistema no lineal incierto tipo SISO una entrada-una salida.

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.43)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial parcialmente diferenciable y $g(x, t) \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave.

A continuación se introducen las siguientes hipótesis:

1. Se designa una variable deslizante $\vartheta = \vartheta(x, t) \in \mathbb{R}$ para que el sistema (2.43) alcance la dinámica deseable en modos deslizantes $\vartheta = \vartheta(x, t) = 0$.

2. El grado relativo del sistema con respecto a la variable deslizante $\vartheta = \vartheta(x, t)$ es igual a 1. Además, la dinámica interna del sistema es asintóticamente estable, o en otras palabras el sistema es de fase mínima.

Entonces, la dinámica entrada-salida puede ser representada como

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} g(x)u \quad (2.44)$$

donde $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} f(x, t) = a(x, t)$ y $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} g(x) = b(x, t)$ por lo que

$$\dot{\vartheta} = a(x, t) + b(x, t)u \quad (2.45)$$

Definiendo $\omega = b(x, t)u$ se obtiene

$$\dot{\vartheta} = a(x, t) + \omega \quad (2.46)$$

donde $\omega = b(x, t)u \leftrightarrow u = b^{-1}(x, t)\omega$

3. La función $b(x, t) \in \mathbb{R}$ es conocida y diferente de cero $\forall x$ y $t \in [0, \infty)$

4. La función $a(x, t) \in \mathbb{R}$ es acotada por $|a(x, t)| \leq \delta |\vartheta|^{1/2}$ donde el limite finito $\delta > 0$ existe pero no se conoce.

El control por modos deslizantes clásico y los controles por modos deslizantes de segundo orden, incluido el super-twisting, funcionan y son robustos si la cota de la perturbación es conocida.

Sin embargo, si el sistema presenta perturbaciones que son desconocidas con cotas desconocidas, se hará uso de métodos que utilizan ganancias adaptativas. Uno de estos métodos es el algoritmo de modos deslizantes super-twisting con ganancias adaptativas.

El control por modos deslizantes super-twisting propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned}\omega &= -\alpha |\vartheta|^{1/2} \text{sign}(\vartheta) + \nu \\ \dot{\nu} &= -\beta \text{sign}(\vartheta)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde las ganancias adaptativas estan definidas como

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(\vartheta, \dot{\vartheta}, t) \\ \beta &= \beta(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)\end{aligned}\tag{2.48}$$

Aplicando el control (2.47) en el sistema (2.46) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= -\alpha |\vartheta|^{1/2} \text{sign}(\vartheta) + \nu + a(x, t) \\ \dot{\nu} &= -\beta \text{sign}(\vartheta)\end{aligned}\tag{2.49}$$

Entonces, el problema de diseño es reducido a diseñar un algoritmo de control por modos deslizantes adaptativo que obligue a ϑ y su derivada a ir a cero en tiempo finito en presencia de perturbaciones con cotas desconocidas.

El cálculo de las ganancias adaptativas es presentado por el siguiente teorema.

Teorema 1: Considere el sistema (2.45). Suponga que la perturbación $a(x, t)$ satisface la hipótesis 4 para alguna constante desconocida $\delta > 0$. Entonces para alguna condición inicial $x(0)$, ϑ la superficie deslizante $\vartheta = 0$ será alcanzada en

tiempo finito por medio del algoritmo de modos deslizantes super-twisting (2.47) con las ganancias adaptativas

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}, & \vartheta \neq 0 \\ 0, & \vartheta = 0 \end{cases} \\ \beta &= 2\varepsilon\alpha + \lambda + 4\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde $\varepsilon, \lambda, \gamma_1, \omega_1$ son constantes positivas.

2.3.5 ASIGNACIÓN DE POLOS

En algunos casos, los sistemas lineales son una buena opción para efectuar un análisis simplificado de la dinámica de operación del sistema físico ya que conservan la mayor parte de su información. Además, la implementación de los algoritmos de control en sistemas lineales es una muy buena aproximación para controlar procesos.

Uno de los algoritmos mas utilizados en sistemas lineales es el método de asignación de polos. Este diseño se basa en la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado, de modo que las condiciones transitorias sean llevadas a cero de forma preestablecida. Un sistema de esta naturaleza, donde la salida de referencia siempre es cero o una constante, se le conoce como regulación.

Por otro lado, existe una condición para que este algoritmo funcione, esta es, que el sistema sea completamente controlable. Para cerciorarse de que el sistema cumpla esa condición, se debe obtener la matriz de controlabilidad y concluir que esta matriz sea de rango pleno.

Teniendo esto en cuenta, se procede al desarrollo del algoritmo.

Sea el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.51)$$

$$Y = Cx + Du \quad (2.52)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{nx1}$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control, $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es la matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{nx1}$ es la matriz de entrada, $Y \in \mathbb{R}$ es la señal de salida, $C \in \mathbb{R}^{1 \times nxn}$ es la matriz de salida y $D \in \mathbb{R}$ es la matriz de transmisión directa.

Se selecciona la ley de control

$$u = -Kx \quad (2.53)$$

donde K es una matriz de $(1 \times n)$ y se denomina matriz de ganancia de retroalimentación de estado. Además, se asume que todas las variables de estado están disponibles para su retroalimentación.

Al sustituir la ley de control (2.53) en la ecuación de estado (2.51) se obtiene la ecuación en lazo cerrado

$$\dot{x} = (A - BK)x(t) \quad (2.54)$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) \quad (2.55)$$

donde $x(0)$ es el estado inicial. La estabilidad y las características de respuesta transitoria se determinan mediante los valores propios de la matriz $A - BK$. Si los valores de K se eligen de forma adecuada, la matriz $A - BK$ es estable.

A continuación se enumeran los pasos para determinar la matriz K utilizando el método de sustitución directa:

1. Verificar la controlabilidad del sistema por medio de la matriz de controlabilidad.

$$Co = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] \quad (2.56)$$

$$rank(Co) = n$$

2. Determinar el polinomio del sistema deseado.

$$p_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (2.57)$$

Esto dependerá del tipo de respuesta que se desea obtener.

3. Determinar el polinomio característico de $(A - BK)$.

Se supone que el sistema (2.51) está en la forma canónica controlador, esto es,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.58)$$

Entonces,

$$p_{(A-BK)}(s) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 + k_2)s + (\alpha_0 + k_1) \quad (2.59)$$

Nota: en el caso de que el sistema (2.51) no se encuentre en la forma canónica de controlador, se deberá aplicar una transformación tal que el sistema cumpla con las condiciones de diseño (este tema se presentará de forma detallada en el capítulo 5 aplicando el ejemplo del sistema de dirección asistida).

4. Determinar los valores de K por medio de la formula,

$$k_i = \alpha_{i-1} + a_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.60)$$

donde α son los coeficientes del polinomio característico deseado y a son los coeficientes del polinomio característico de $(A - BK)$.

5. Realizar la retroalimentación de estados con la ley de control (2.53).

CAPÍTULO 3

SISTEMA DE FRENOS ABS

3.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO

Este capítulo describe el modelo de un sistema de frenado ABS, donde se presenta el objetivo de control, así como el desarrollo de las técnicas o algoritmos de control propuestos para cumplir con este objetivo.

3.2 INTRODUCCIÓN

En particular, para un vehículo existen dos tipos de frenado, los cuales son frenos de tambor y frenos de disco. Para el modo de frenado se tiene la configuración convencional o el sistema de ABS.

Comparado con el sistema de frenos convencional, el sistema de frenos ABS proporciona mayor seguridad. El ABS utiliza la unidad de control ECU, que monitorea el comportamiento de las llantas y regula la presión de cada llanta por separado, para evitar la pérdida de adherencia con la carretera. En cambio, el sistema de frenos convencional solo está diseñado para aplicar presión a todas las llantas de forma proporcional a la fuerza ejercida en el pedal de freno, lo cual no garantiza la estabilidad

ni el anti-bloqueo de las llantas.

En casos de acciones de emergencia, con el sistema de ABS, el conductor tiene completo control del vehículo en la etapa de frenado, mientras que con el freno convencional, el conductor tendrá muchas dificultades para mantener su trayectoria. Cabe resaltar que, el sistema de ABS se hace presente por medio de la vibración del pedal de freno, mientras que el sistema convencional no tiene esta aplicación.

3.2.1 ABS

El sistema de frenos anti-bloqueo representado en la figura (3.1), esta integrado por diversos elementos electrónicos, mecánicos e hidráulicos.

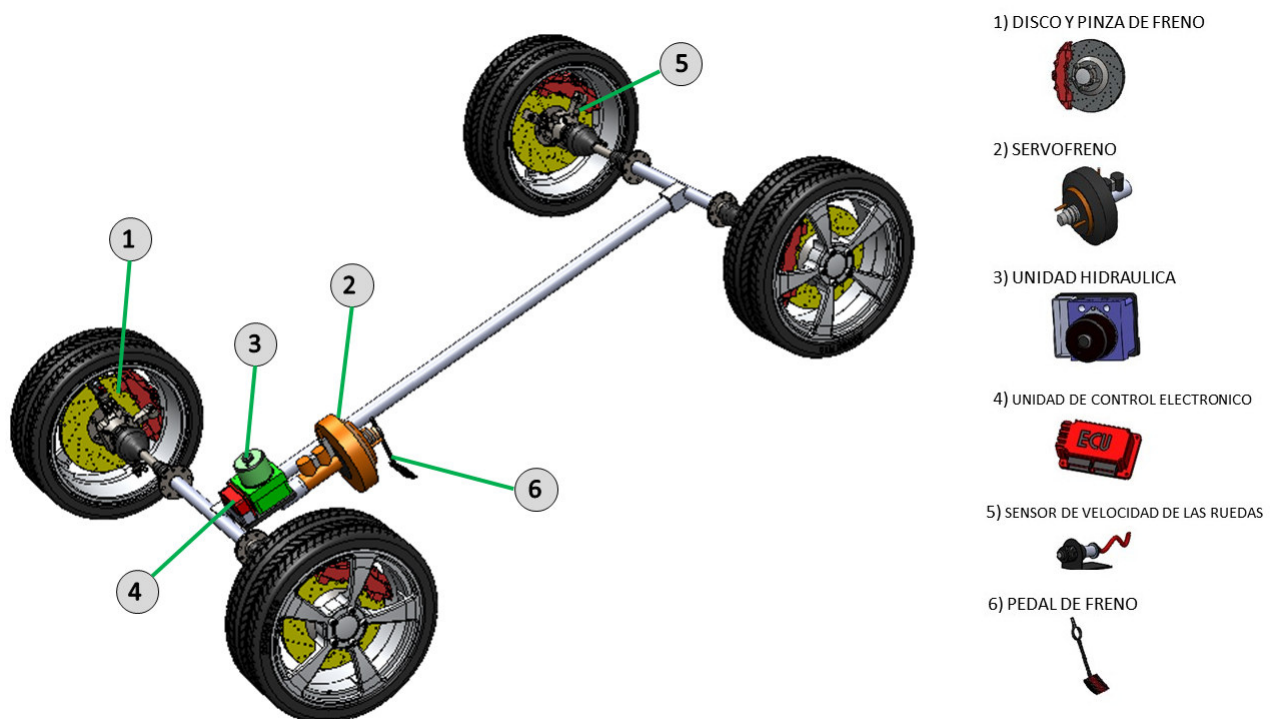


Figura 3.1: Sistema de Frenos Anti-bloqueo (ABS)

En conjunto estos elementos tienen como finalidad ayudar al conductor a man-

tener el control del vehículo durante la etapa de frenado, bajo condiciones referentes con la intensidad de frenado y lo resbaladizo de la superficie de la carretera. Bajo estas condiciones se evita la pérdida de tracción entre la superficie de la carretera y los neumáticos del vehículo.

3.2.2 FUNCIONAMIENTO

El ABS combina el sistema de frenos tradicional con una unidad hidráulica moduladora de presión que es controlada de forma inteligente por una unidad electrónica ECU.

La velocidad angular de las ruedas y la aceleración lineal del vehículo son medidas con sensores, los cuales mandan señales eléctricas hacia el ECU. Esta unidad de control está constantemente procesando estas señales, y es quien decide, que acción tomar según sea el caso.

En el caso de un frenado de emergencia, esto es, una desaceleración excesiva en una de las ruedas, el controlador lo detectará e inmediatamente mandará una señal a la unidad hidráulica moduladora, la cual reducirá la presión en el cilindro de freno. Cuando esta situación se haya normalizado y la aceleración en las ruedas sea la indicada, el controlador dará la orden para que el sistema permita liberar la presión sobre los frenos. Este ciclo se efectuará repetidamente, lo que se traduce en que el conductor percibirá una vibración en el pedal del freno.

Cuando el conductor frena de forma normal sin acciones abruptas ni esfuerzos mayores, el ECU no detectará condiciones críticas de bloqueo. Por lo que el sistema de ABS, si bien está siempre operando y esperando a un posible bloqueo de las llantas, no estará involucrado en el proceso de frenado y permanece totalmente pasivo y solo actuará el sistema de frenos tradicional.

3.3 ESTUDIO DE LA DINÁMICA DEL SISTEMA DE FRENOS ABS

El sistema de frenos ABS, ilustrado en la figura(3.2), es una representación equivalente del sistema original, el cual está compuesto por dos ruedas colocadas una encima de la otra, donde la rueda inferior representa el movimiento relativo del vehículo sobre la carretera mientras que la rueda superior simula el movimiento de la rueda del vehículo. Además, están colocados dos encoder de rotación en cada una de las ruedas para así medir su velocidad angular. Así mismo, la rueda superior es equipada con un sistema de disco de freno que es manipulado por medio de un pequeño motor DC. Por otro lado, en la rueda inferior, está acoplado un motor DC plano que suministra la energía para acelerar la rueda inferior; durante la etapa de frenado este motor es desconectado.

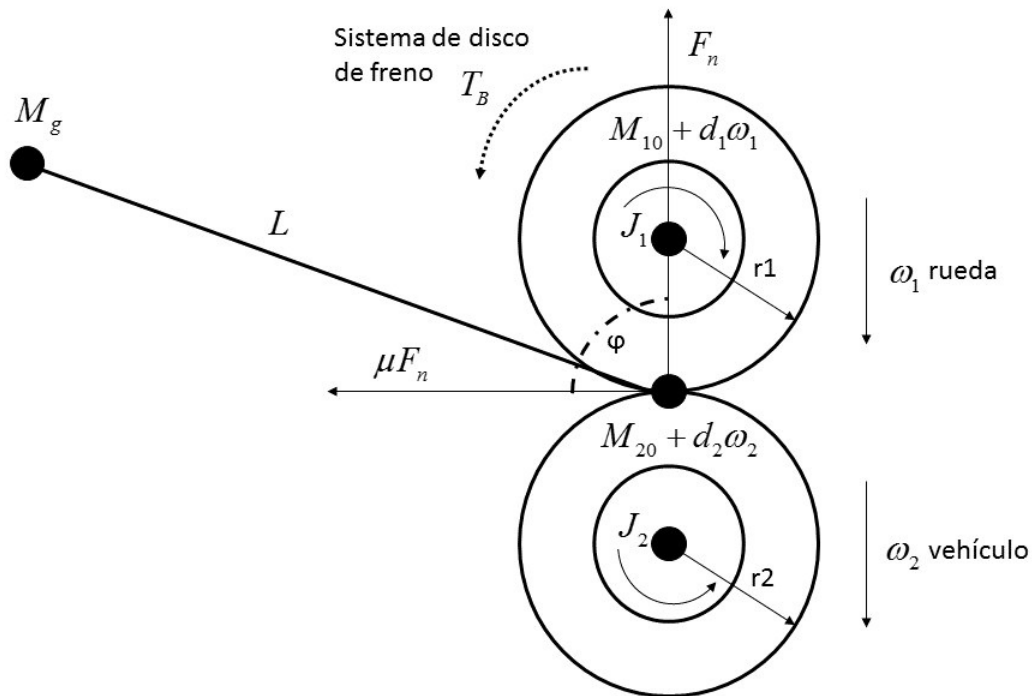


Figura 3.2: Diagrama cuerpo libre sistema ABS

En condiciones de funcionamiento (durante la etapa de frenado), el par o torque de frenado se aplica a la rueda superior, lo que provoca que su velocidad disminuya. En consecuencia a esta acción, la fuerza de fricción generada entre la rueda superior y la rueda inferior provoca que la velocidad de la rueda inferior también disminuya.

En la tabla (3.1) se describen las variables que intervienen en el sistema.

Nombre	Descripción
ω_1	Velocidad angular de la rueda superior - <i>rpm</i>
ω_2	Velocidad angular de la rueda inferior - <i>rpm</i>
T_B	Torque de frenado - <i>Nm</i>
r_1	Radio de la rueda superior - <i>m</i>
r_2	Radio de la rueda inferior - <i>m</i>
J_1	Momento de inercia de la rueda superior - <i>kgm²</i>
J_2	Momento de inercia de la rueda inferior - <i>kgm²</i>
d_1	Coefficiente de fricción de la rueda superior - <i>kgm²/s</i>
d_2	Coefficiente de fricción de la rueda inferior - <i>kgm²/s</i>
F_n	Fuerza total normal - <i>N</i>
μ	Coefficiente de adherencia de la carretera
λ	Deslizamiento
M_{10}	Fricción estática de la rueda superior - <i>Nm</i>
M_{20}	Fricción estática de la rueda inferior - <i>Nm</i>
F_t	Fuerza de fricción de la carretera - <i>N</i>
M_g	Momento de gravedad - <i>N</i>

Tabla 3.1: Variables del sistema de Frenos ABS

Para facilitar en análisis del sistema se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis:

- 1.- Se utiliza un modelo de 1/4 de vehículo por lo que se asume que no existe interacción entre las cuatro llantas.

2.- Solo se considera la dinámica longitudinal en el vehículo, esto implica que los movimientos laterales y verticales serán despreciados.

3.- Durante la etapa de desaceleración de un vehículo, se sabe que el par o torque de frenado es aplicado para hacer que la velocidad de este disminuya.

4.- Se introducirán algunos conceptos para el análisis completo del sistema, tales como el deslizamiento y el coeficiente de adherencia a la carretera.

■ Deslizamiento.

Bajo condiciones normales de operación, la velocidad rotacional de la rueda del vehículo coincide con la velocidad de avance de este. Como se mencionó anteriormente, cuando se aplica el freno, se genera una fuerza entre la rueda del vehículo y la superficie del camino, la cual causa que la velocidad de la rueda disminuya. Cuando esta fuerza de frenado aumenta se produce el deslizamiento entre el neumático y la superficie de la carretera. El parámetro que representa este cambio o variación de condiciones es conocido como deslizamiento, y está definido por

$$\lambda = \frac{\nu - r_r \omega_r}{\nu} \quad (3.1)$$

donde ν corresponde a la velocidad lineal del vehículo, r_r es el radio de la rueda del vehículo y ω_r es la velocidad angular de la rueda del vehículo.

Además, la velocidad lineal del vehículo se obtiene a partir de la velocidad angular de la rueda inferior multiplicada por el radio de la misma, y la velocidad angular de la rueda del vehículo será equivalente a la velocidad angular de la rueda superior, esto es:

$$\lambda = \frac{r_2 \omega_2 - r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} \quad (3.2)$$

Analizando esta fórmula, se puede ver que, si el deslizamiento es igual a cero, la velocidad del vehículo será la misma que la velocidad de la rueda

$$\lambda = \frac{r_2 \omega_2 - r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} \Bigg|_{r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2} \rightarrow \lambda = 0 \quad (3.3)$$

y si el deslizamiento toma el valor de 1, la velocidad de la rueda será igual a cero

$$\lambda = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2\omega_2} \Big|_{r_1\omega_1=0} \rightarrow \lambda = 1 \quad (3.4)$$

Esto indica que el carro se está derrapando, y la rueda queda bloqueada haciendo casi imposible el control del vehículo.

- El coeficiente de adherencia a la carretera.

Este coeficiente está definido como la oposición de la fuerza de fricción de la carretera a la carga del vehículo. Este coeficiente es una función no lineal que involucra algunas variables físicas, entre ellas el deslizamiento

$$\mu(\lambda) = \frac{c_4\lambda^p}{\alpha + \lambda^p} + c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda \quad (3.5)$$

Existen varios métodos para identificar el rango de valores de deslizamiento que maximice este coeficiente de adherencia.

- De acuerdo con algunos estudios, para alcanzar el óptimo rendimiento del sistema, este rango debe encontrarse entre los valores de 0.08 y 0.3 para el deslizamiento.

Analizando el sistema de ABS, se observa que existen 3 torques actuando sobre la rueda superior, estos son el torque de frenado T_B , el torque de fricción entre las ruedas $F_t r_1$ y el torque de fricción en la parte superior del rodamiento $d_1 w_1$. De manera similar, existen 2 torques actuando sobre la rueda inferior, los cuales son el torque de fricción entre ruedas $F_t r_2$ y el torque de fricción en la parte inferior del rodamiento $d_2 w_2$, véase la figura (3.2) para más detalles.

Ahora, considerando la segunda ley de Newton y la relación entre torque, aceleración angular y momento de inercia, están dados por:

$$\sum \tau = I \cdot a_a \quad (3.6)$$

Finalmente se muestran las ecuaciones del movimiento del sistema ABS

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J_1} (F_t r_1 - d_1 \omega_1 - M_{10} - T_B) \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_2} (-F_t r_2 - d_2 \omega_2 - M_{20})\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde F_t está dada por la ley de Coulomb

$$F_t = \mu(\lambda) F_n\tag{3.8}$$

y F_n es calculada como

$$F_n = \frac{d_1 \omega_1 + M_{10} + T_B + M_g}{L(\sin(\phi) - \mu(\lambda) \cos(\phi))}\tag{3.9}$$

donde L es la distancia entre el punto de contacto de las ruedas y el eje rotacional de la palanca de equilibrio. Por último, ϕ es el ángulo ente la normal en el punto de contacto y la lineal L .

3.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El funcionamiento del ABS presentado en la subsección 3.2.2, tiene como objetivo principal prevenir el bloqueo de las llantas en el vehículo cuando el ECU detecta una desaceleración excesiva en el momento de frenar. Esto se logra básicamente, maximizando la adherencia de los neumáticos con el pavimento por medio del índice de deslizamiento, manteniendo sus valor por debajo de la unidad. Para frenar el vehículo lo mas pronto posible, sin perder el control de la dirección y mantener el coeficiente de adherencia, existe un rango de eficiencia óptimo para el deslizamiento, el cual fluctúa entre 0.08 y 0.3. Por lo que el problema para este sistema se centrará en controlar y mantener el parámetro de deslizamiento dentro de este rango propuesto.

3.5 ALGORITMOS DE CONTROL APLICADOS AL SISTEMA

En este apartado, se diseñarán los algoritmos de control para solucionar la problemática presentada para el sistema de frenos ABS.

3.5.1 MODELO MATEMÁTICO

Para diseñar los algoritmos de control es necesario el uso de un modelo matemático que describa al sistema en variables de estado.

A continuación, se presenta el modelo matemático que describe al sistema de ABS.

Partiendo del sistema (3.7), se definen las variables del modelo matemático. Estas variables están conformadas por entradas, salidas, estados de control y perturbaciones. El par o torque ejercido por el disco de freno T_b es seleccionado como la entrada de control y que será denotada por la letra U .

Los estados de control para este sistema serán: la velocidad angular de la rueda superior y la velocidad angular de la rueda inferior, los cuales son representados por x_1 y x_2 ; respectivamente.

La salida a controlar será la razón de deslizamiento, la cual se representa por la letra y .

Las perturbaciones son las fuerzas de fricción $M10$, $M20$ y el momento de gravedad Mg .

Variable Sistema Original	Variable Modelo Matemático
ω_1 velocidad angular de la rueda superior	x_1
ω_2 velocidad angular de la rueda inferior	x_2
T_B par o torque de frenado	U
λ deslizamiento	y
M_{10} fricción estática rueda superior	M_{10}
M_{20} fricción estática rueda inferior	M_{20}
M_g momento de gravedad	M_g

Entonces el modelo matemático queda representado como

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J_1} (F_t r_1 - d_1 \omega_1 - M_{10} - T_B) & \rightarrow & \quad \dot{x}_1 = \frac{1}{J_1} (F_t r_1 - d_1 x_1 - M_{10} - U) \\
 \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_2} (-F_t r_2 - d_2 \omega_2 - M_{20}) & & \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{J_2} (-F_t r_2 - d_2 x_2 - M_{20})
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_t &= \mu(y) F_n \\
 F_n &= \frac{d_1 x_1 + M_{10} + U + M_g}{L(\sin(\phi) - \mu(y)\cos(\phi))} \\
 \mu(y) &= \mu(\lambda) = \frac{c_4 y^p}{\alpha + y^p} + c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y \\
 y &= \lambda = \frac{r_2 x_2 - r_1 x_1}{r_2 x_2}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Vale la pena notar que este modelo matemático es No lineal.

Por último, es preciso señalar que estos estados deben ser medibles para poder tomarlos directamente del modelo, si esto no fuere así, será necesario el uso de un observador de estado.

3.5.1.1 ANÁLISIS DEL GRADO RELATIVO Y DINÁMICA INTERNA DEL SISTEMA

Antes de diseñar una ley de control, es necesario analizar las propiedades de controlabilidad del sistema de frenos ABS. Sin embargo, realizar un análisis completo de controlabilidad resulta ser una tarea muy compleja, por lo que solo se tomarán

en cuanto los aspectos mas importantes para este análisis.

Considere el siguiente modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un sistema ABS, el cual está definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{J_1} (F_t r_1 - d_1 x_1 - M_{10} - U) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_2} (-F_t r_2 - d_2 x_2 - M_{20}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Este sistema es de dimension 2 siendo la entrada el torque de freno U y la salida

$$y = h = \lambda = \frac{r_2 x_2 - r_1 x_1}{r_2 x_2} = 1 - \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2} \quad (3.13)$$

Se asume que el parámetro F_n es constante y además no existen perturbaciones en el sistema (caso nominal). Entonces, el sistema de ABS se puede representar de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\mu(x_1, x_2) F_n r_1}{J_1} - \frac{d_1 x_1}{J_1} \\ -\frac{\mu(x_1, x_2) F_n r_2}{J_2} - \frac{d_2 x_2}{J_2} \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Ahora, aplicando la definición del apéndice B, se determina el grado relativo del sistema (3.14), esto es

$$L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (3.16)$$

donde $\frac{\partial h}{\partial x_1} = -\frac{r_1}{x_2 r_2}$.

Suponiendo que el dominio de x_2 esta definido como $\forall x_2 > \bar{x}_2 > 0$, se concluye que $-\frac{r_1}{x_2 r_2} \neq 0$. Por lo que el grado relativo es igual a 1.

Observación 1. Para fines prácticos, el dominio de operación para x_2 está bien definido, ya que el sistema de ABS opera a partir de una velocidad positiva y comienza a desacelerar hasta llegar a un valor mínimo de velocidad.

Puesto que el sistema es de grado relativo igual a 1 y la dimension del sistema es igual a 2, entonces se tiene un subsistema no controlable (dinámica interna) de dimension 1.

Ahora, considerando el siguiente cambio de coordenadas.

$$z_1 = h(x) \quad (3.17)$$

y a partir de la condición

$$\langle d\xi, g \rangle = \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dx_1} & \frac{d\xi}{dx_2} \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

entonces

$$\xi = x_2. \quad (3.19)$$

Considerando la siguiente transformación

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ x_2 \end{bmatrix} = T(x) \quad (3.20)$$

Se analiza el Jacobiano de la transformación

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{x_2 r_2} & 0 \\ \frac{x_1 r_1}{x_2^2 r_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde la matriz de transformación es no singular y, aplicando el teorema de la función inversa, califica como un difeomorfismo.

Para conocer si la dinámica cero del sistema es de fase mínima se realiza un análisis utilizando el segundo método de Lyapunov.

Se elige la función $V(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 = \frac{1}{2}x_2^2 > 0$. Entonces, tomando la derivada de $V(\xi)$ con respecto al tiempo se tiene,

$$\dot{V}(\xi) = x_2 \dot{x}_2 = \frac{-\mu(x_1, x_2) F_n r_2 x_2}{J_2} - \frac{d_2 x_2^2}{J_2} \leq 0 \quad (3.22)$$

Analizando la ecuación anterior se puede ver que es siempre semidefinida negativa, ya que el término relacionado con el coeficiente de adherencia siempre es positivo, así como el término x_2^2 . Por lo que se concluye que el sistema de ABS es de fase mínima.

3.5.2 CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO

Como se explicó en el capítulo 2, el algoritmo de control PID implica ajustar las ganancias de control proporcional k_P , integral k_I y derivativo k_D , con el fin de anular el error de salida.

Así, la ley de control para este algoritmo esta dada por,

$$u_c = k_P e + k_I \int e dt + k_D \dot{e} \quad (3.23)$$

donde el error de salida para el sistema de ABS está definido como la variable de deslizamiento y menos la referencia y_{ref} , tal que

$$e = y - y_{ref} = \lambda - \lambda_{ref} \quad (3.24)$$

Para simplificar el trabajo de sintonización de ganancias, se empleó el programa Matlab Simulink, el cual hace el cálculo de las ganancias directamente.

3.5.3 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES CONVENCIONAL

Ahora se diseñará un algoritmo de control basado en modos deslizantes.

El control por modos deslizantes es un tipo de control no lineal que es robusto en presencia de perturbaciones. Pero tiene la desventaja del presentar el efecto del chattering, el cual se produce por las conmutaciones del algoritmo de control. Físicamente esto conlleva a un desgaste en los actuadores reduciendo su vida útil.

Para el sistema de ABS con el modelo (3.10), se propone un control deslizante de 1er orden para obtener la trayectoria del deslizamiento de referencia λ_{ref} en la presencia de perturbaciones. Para ello se procede a definir una superficie deslizante igual al error de seguimiento, esto es:

$$\vartheta = \lambda - \lambda_{ref} \quad (3.25)$$

Ahora, se verificará que se cumpla la condición de transversalidad. Esto se logra determinando que el grado relativo de la superficie deslizante sea igual a 1.

Al momento de derivar la superficie deslizante, aparece la entrada de control T_B . Por lo que el grado relativo es igual a 1.

Aplicando el método de control equivalente; es decir para que la trayectoria de la variable de estado permanezca sobre la superficie deslizante o exista el régimen deslizante, se establecen las siguientes condiciones de diseño.

$$\vartheta = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0 \quad (3.26)$$

El control que mantiene al estado sobre la superficie deslizante es llamado control equivalente. Para calcular este control será necesario verificar las siguientes condiciones

$$\dot{\vartheta} = \dot{\lambda} - \dot{\lambda}_{ref} = 0 \quad (3.27)$$

entonces

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_{ref} \quad (3.28)$$

Se asume que la variable de deslizamiento de referencia es un término constante, por lo que la derivada de este con respecto al tiempo es igual a cero.

$$\dot{\lambda}_{ref} = 0 \quad (3.29)$$

Ahora derivando la variable de deslizamiento

$$\dot{\lambda} = -\frac{r_1}{r_2} \left(\frac{\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1}{x_2^2} \right) = \frac{r_1 x_1 \dot{x}_2}{r_2 x_2^2} - \frac{r_1 \dot{x}_1}{r_2 x_2} \quad (3.30)$$

y sustituyendo las derivadas de las variables de estado del sistema de ABS (3.10) en la ecuación anterior se tiene

$$\dot{\lambda} = \frac{r_1}{r_2 x_2 J_1} (-F_t r_1 + d_1 x_1 + M_{10} + U) - \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2^2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}). \quad (3.31)$$

Despejando el control equivalente U se tiene

$$U_{eq} = \frac{x_1 J_1}{x_2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}) + F_t r_1 - d_1 x_1 - M_{10} \quad (3.32)$$

Por otro lado, si la trayectoria del sistema no se encuentra sobre la superficie deslizante, será necesario un control adicional para atraer la trayectoria. Este control es determinado por medio de la siguiente condición

$$\vartheta \dot{\vartheta} \leq -\varepsilon |\vartheta| \quad (3.33)$$

donde la ganancia ε es una constante estrictamente positiva. En términos de las variables de estado la ecuación anterior queda representada como

$$\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2 x_2 J_1} (-F_t r_1 + d_1 x_1 + M_{10} + U) - \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2^2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}) \right) \leq -\varepsilon |\vartheta| \quad (3.34)$$

Sustituyendo la entrada del sistema U por $U_{ed} + U_{al}$, esto es

$$\frac{\vartheta r_1}{r_2 x_2 J_1} (-F_t r_1 + d_1 x_1 + M_{10} + (U_{eq} + U_{al})) - \frac{\vartheta r_1 x_1}{r_2 x_2^2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}) \leq -\varepsilon |\vartheta| \quad (3.35)$$

Tomando en cuenta el valor de U_{eq} en (3.32), se despeja el control U_{al}

$$U_{al} \leq -\frac{r_2 x_2 J_1}{r_1} \varepsilon \quad (3.36)$$

Entonces la ley de control sera compuesta por la entrada de control equivalente mas la entrada de control de alcance, esta última multiplicada por la función signo.

$$U_c = U_{eq} + U_{al} \text{sgn}(\vartheta) \quad (3.37)$$

3.5.4 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES SUPER-TWISTING

El control por modos deslizantes super-twisting es considerado como uno de los métodos mas efectivos de control, para sistemas que operan bajo condiciones de incertidumbre o perturbaciones, gracias a su precisión y propiedades de robustez. El controlador super twisting se utiliza para controlar sistemas cuya salida sea de grado relativo igual a 1. Con este control, se asegura que la superficie de deslizamiento se alcanza en tiempo finito, esto es que las condiciones $\vartheta = 0$ y $\dot{\vartheta} = 0$ se cumplen en tiempo finito.

Dada la estructura de la superficie deslizante con grado relativo igual a 1 propuesta en la ecuación (2.45)

$$\dot{\vartheta} = a(x, t) + b(x, t)u \quad (3.38)$$

Aplicando una ley de retroalimentación de estados linealizante de la forma

$$u = b^{-1}(t, x)(-\alpha(t, x) + \omega) \quad (3.39)$$

donde ω es el término de control adicional que proviene del algoritmo super-twisting que mantiene a la trayectoria sobre la superficie de deslizamiento (2.47), la cual está dada por

$$\begin{aligned} \omega &= -\alpha |\vartheta|^{1/2} \operatorname{sgn}(\vartheta) + \nu \\ \dot{\nu} &= -\beta \operatorname{sgn}(\vartheta) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Entonces, la ley de control está dada por

$$u = b^{-1}(t, x)(-a(t, x) - \alpha |\vartheta|^{1/2} \operatorname{sgn}(\vartheta) - \beta \int_0^t \operatorname{sgn}(\vartheta(\tau)) d\tau) \quad (3.41)$$

garantiza que el sistema en lazo cerrado converja en tiempo finito.

Observación 2: La prueba de la convergencia en tiempo finito de las variables de salida a cero fue demostrada por Moreno y Polyakov en 2009. La prueba está basada en la construcción de una función de Lyapunov estricta de forma cuadrática que garantiza la convergencia en tiempo finito.

Para el estudio del sistema de ABS (3.10) se aplicó el algoritmo de super-twisting de la siguiente manera.

El controlador es diseñado a partir de la definición del error de seguimiento $e = \lambda - \lambda_{ref}$.

Después se define la superficie deslizante, la cual será igual al error de seguimiento, esto es

$$\vartheta = e \quad (3.42)$$

Entonces, la dinámica entrada-salida será representada como

$$\dot{\vartheta} = \dot{e} \quad (3.43)$$

donde el grado relativo de la superficie es igual a 1.

Se asume que la trayectoria deseada, su derivada así como los estados del sistema, son acotados. De lo anterior, se tiene

$$\dot{\vartheta} = \dot{\lambda} - \dot{\lambda}_{ref} = \frac{r_1}{r_2 x_2 J_1} (-F_t r_1 + d_1 x_1 + M_{10} + U) - \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2^2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}) \quad (3.44)$$

donde $\dot{\lambda}_{ref} = 0$.

Procediendo de manera similar a la obtención de la ecuación (2.45), resulta que

$$\dot{\vartheta} = \frac{r_1}{r_2 x_2 J_1} (-F_t r_1 + d_1 x_1 + M_{10}) - \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2^2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}) + \frac{r_1}{r_2 x_2 J_1} U \quad (3.45)$$

Entonces la ley de control (3.39) está dada por

$$u_c = \frac{r_2 x_2 J_1}{r_1} \left\{ - \left[\frac{r_1}{r_2 x_2 J_1} (-F_t r_1 + d_1 x_1 + M_{10}) - \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2^2 J_2} (F_t r_2 + d_2 x_2 + M_{20}) \right] + \omega \right\} \quad (3.46)$$

El término ω corresponde al control por modos deslizantes super-twisting descrito por (2.47), donde las ganancias α y β son elegidas de tal manera que se cumpla la convergencia en tiempo finito.

CAPÍTULO 4

SUSPENSIÓN ACTIVA

4.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presentan los detalles referentes al sistema de Suspensión Activa en un vehículo. Asimismo, se introduce el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de la suspensión activa, el cual será utilizado para diseñar los distintos algoritmos de control; expuestos en esta sección.

4.2 INTRODUCCIÓN

En general, existen tres grupos de suspensión.

1.- Suspensión rígida o dependiente: en este caso, la suspensión de una rueda esta interconectada con la suspensión de la rueda opuesta, situada sobre el mismo eje. Esto ocasiona que las vibraciones de movimiento se transmitan directamente de una rueda a otra y afecten considerablemente el control de la maniobrabilidad del vehículo.

2.- Suspensión semirígida: muy similar a la suspensión rígida, con la diferencia en que los valores de las masas no suspendidas son menores.

3.- Suspensión independiente: en este tipo de suspensión el movimiento de cada rueda es independiente, por lo que una perturbación en una de las ruedas no se transmite directamente a su opositora. Lo que mejora las características de conducción.

4.2.1 SUSPENSIÓN ACTIVA

El sistema de suspensión en un vehículo (ver figura 4.1), está integrado por aquellos elementos que se encargan de mejorar la comodidad y el confort así como la maniobrabilidad y manejo durante la conducción. Esto se logra por medio del aislamiento del chasis y manteniendo las ruedas dentro del perfil de la carretera.

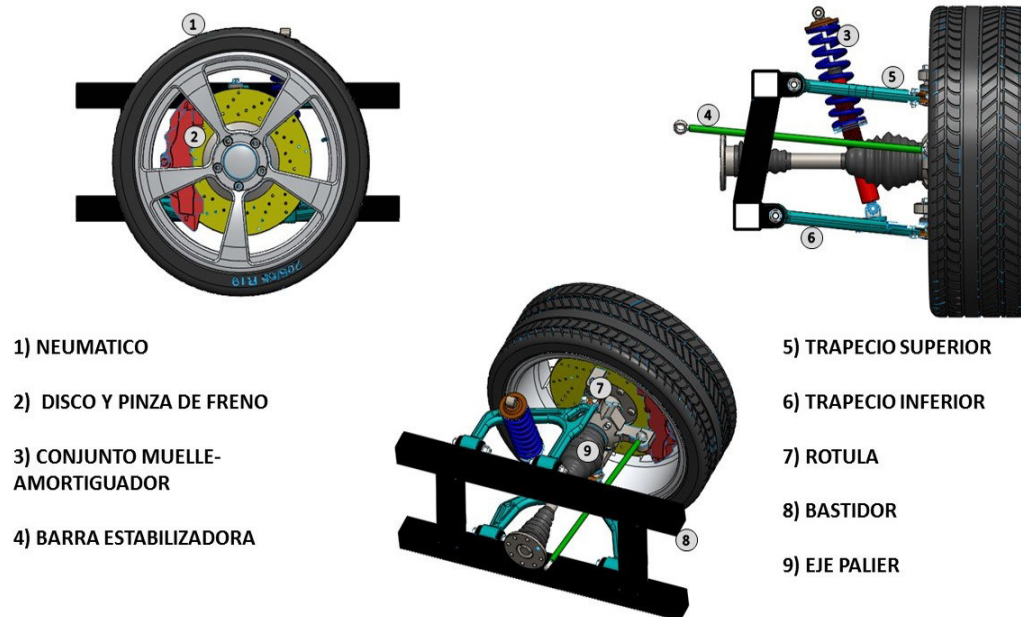


Figura 4.1: Sistema de Suspensión Activa

El sistema de Suspensión Activa asegura el control de dirección durante las maniobras o movimientos abruptos. Además se encarga de que el vehículo responda de forma favorable a las fuerzas que se producen por la aceleración, el frenado o

las curvas en el camino. También aísla las vibraciones a altas y bajas frecuencias provocadas por las irregularidades de la carretera.

Todo esto con del fin de evitar accidentes y garantizar el confort de los pasajeros en el vehículo.

4.2.2 CLASIFICACIÓN

El sistema de suspensión se puede clasificar dependiendo del control aplicado:

- La suspensión pasiva: en esta configuración los parámetros del sistema son fijos por lo que no se pueden regular automáticamente.
- La suspensión semiactiva: para esta configuración, se regulan los mecanismos de amortiguación y rigidez por medio de los componentes regulables que forman parte del sistema.
- La suspensión activa: en ese tipo de configuración se emplea un actuador adicional, el cual se encarga de suministrar energía al sistema necesaria para mejorar la respuesta de conducción del vehículo.

Comparado con el sistema de suspensión pasiva, el sistema de suspensión activa responde de forma mas efectiva en cuanto al confort y la maniobrabilidad en el vehículo. Esto debido a que el sistema de suspensión activa esta regulado por un actuador externo, mientras que el sistema de suspensión pasiva es carente de fuerzas externas. Por otro lado, existe el sistema de suspensión semiactiva el cual se caracteriza por tener un índice de amortiguamiento regulable por medio del ECU. Además presenta resultados similares al sistema de suspensión activa. Sin embargo, su diseño e implementación resulta ser mas complicado.

4.3 ESTUDIO DE LA DINÁMICA DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN

El presente modelo de suspensión está basado en la configuración de suspensión activa, el cual es ilustrado en la figura (4.2), compuesto principalmente por la masa suspendida (m_s) representando al chasis del vehículo, la masa no suspendida (m_u) en representación de la rueda del vehículo, y sus respectivos componentes de amortiguamiento y rigidez, así como el actuador adicional empleado para realizar el control del sistema. La tabla (4.1) presenta la simbología utilizada.

El sistema de suspensión incluye sensores en los extremos del chasis y en las ruedas, con el fin de medir la velocidad y la aceleración. De la misma manera, incluye transductores lineales ubicados entre las ruedas y el chasis, utilizados para medir el desplazamiento entre ellos.

Observación 2. El número de grados de libertad del sistema estará en función del tipo de análisis aplicado, es decir, que para el modelo de 1/4 de vehículo se presentan 2 grados de libertad, lo que restringe el modelo a solo la dinámica vertical. Por otro lado, si se quisiera incluir el movimiento de cabeceo sería necesario el análisis del modelo de la mitad del vehículo ocasionando un aumento de grados de libertad de 2 a 4. Ahora, si se pretende un análisis mucho más detallado considerando también las propiedades de anti-vuelco y anti-derrape se necesitaría del modelo completo del vehículo, el cual consta de 7 grados de libertad.

En la siguiente tabla (4.1) se presentan las variables implicadas en el sistema.

En este trabajo se realizó un análisis simplificado del modelo, tomando en cuenta varias hipótesis y suposiciones.

1.- Se eligió el modelo de 1/4 de vehículo, donde solo se implica el movimiento vertical de las masas, es decir que los movimientos de bamboleo y cabeceo son des-

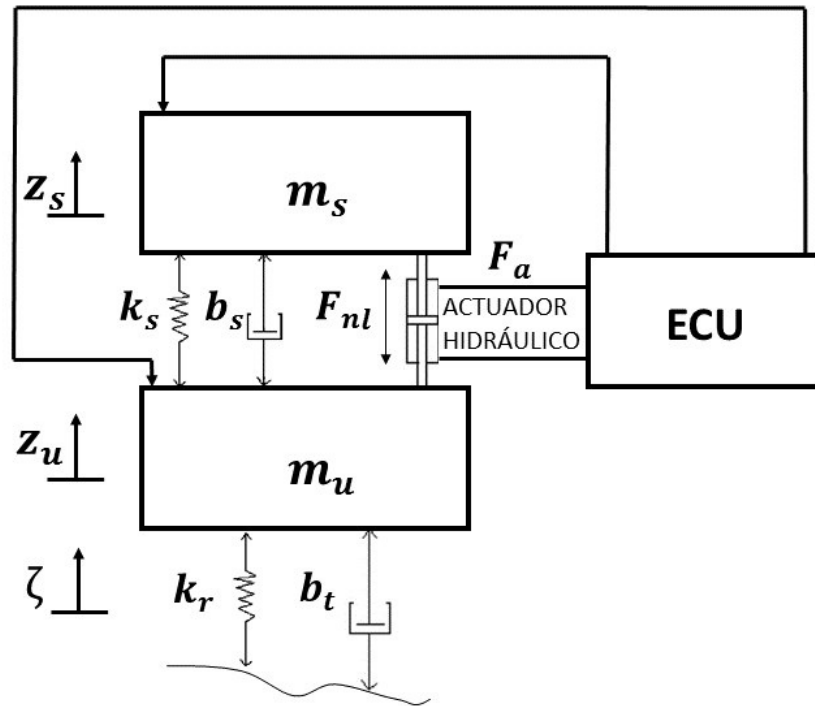


Figura 4.2: Diagrama cuerpo libre sistema Suspensión Activa

preciados. A pesar de esta simplificación, el sistema incorpora las restricciones de confort y maniobrabilidad y considera las irregularidades de la carretera, lo que lo hace, una representación adecuada para el análisis del sistema.

2.- No es necesario modelar la dinámica del actuador hidráulico ya que para este estudio se propone como la entrada de control.

3.- Se define la deflexión de la suspensión como la diferencia entre el desplazamiento de la masa suspendida y la masa no suspendida $z_s - z_u$, además la deflexión del neumático es definida como la diferencia entre el desplazamiento de la masa no suspendida y la irregularidad presente en la carretera $z_u - \zeta$.

4.- Para la dinámica del sistema, se asume que la derivada del desplazamiento genera velocidad y la derivada de la velocidad determina la aceleración.

Nombre	Descripción
m_s	Masa suspendida (chasis) - kg
m_u	Masa no suspendida (rueda) - kg
k_s	Constante lineal de rigidez en la suspensión - N/m
b_s	Constante lineal de amortiguamiento en la suspensión - Ns/m
k_{snl}	Constante no lineal de rigidez en la suspensión - N/m
b_{snl}	Constante no lineal de amortiguamiento en la suspensión - Ns/m
k_r	Constante de rigidez en el neumático - N/m
b_t	Constante de amortiguamiento en el neumático - Ns/m
z_s	Desplazamiento de la masa suspendida - m
z_u	Desplazamiento de la masa no suspendida - m
ζ	Irregularidades de la carretera - cte
z_{su}	Diferencia entre desplazamientos ($z_s - z_u$) - m
F_{nl}	Fuerzas no lineales actuando en la suspensión - N
F_a	Fuerza del actuador hidráulico - N

Tabla 4.1: Parámetros del sistema de Suspensión Activa

En la ilustración (4.3), se determinan las fuerzas de acción reacción que actúan sobre los componentes del sistema.

Con ayuda de la segunda ley de newton se determinan las ecuaciones de movimiento, donde la sumatoria de fuerzas es igual a la masa por la aceleración

$$\sum F = m \cdot a \quad (4.1)$$

Para el análisis, las fuerzas dirigidas en sentido al desplazamiento serán positivas, mientras que las fuerzas opuestas se tomarán como negativas.

Entonces, la ecuación que modela la dinámica para la parte entre el chasis y la rueda está representada como,

$$m_s \ddot{z}_s = -k_s z_{su} - b_s \dot{z}_{su} - F_{nl} + F_a \quad (4.2)$$

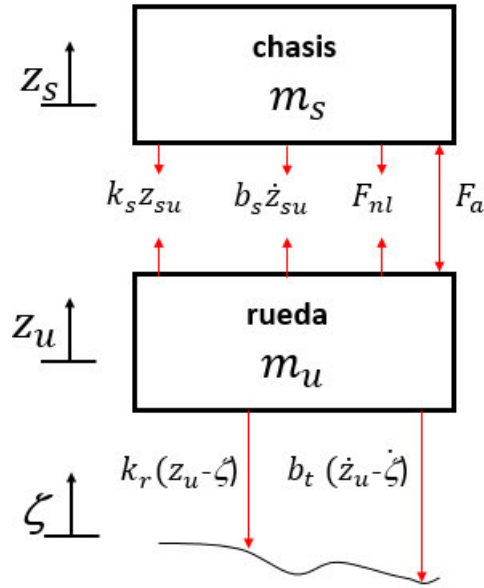


Figura 4.3: Fuerzas que interactúan en el sistema de Suspensión Activa

mientras que para la parte entre la rueda y la superficie de la carretera, se representa por la siguiente ecuación

$$m_u \ddot{z}_u = k_s z_{su} + b_s \dot{z}_{su} - k_r (z_u - \zeta) - b_t (\dot{z}_u - \dot{\zeta}) + F_{nl} - F_a \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} z_{su} &= z_s - z_u \\ F_{nl} &= k_{snl} z_{su}^3 + b_{snl} \sqrt{|\dot{z}_{su}|} \operatorname{sgn}(\dot{z}_{su}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Siendo F_{nl} la no linealidad de la dinámica del sistema de suspensión, particularmente del comportamiento del actuador externo, donde el término $k_{snl} z_{su}^3$ representa el efecto de la inclinación en la suspensión, mientras que el término $b_{snl} \sqrt{|\dot{z}_{su}|} \operatorname{sgn}(\dot{z}_{su})$ corresponde al comportamiento del fluido hidráulico fluyendo a través del actuador.

4.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema que se pretende resolver, parte del hecho de controlar o manipular el sistema de suspensión, esto con el propósito de determinar y mejorar el rendimiento del sistema, para ello se consideran los criterios de aceleración y del desplazamiento vertical de la masa suspendida, así como considerar el grado de sensibilidad del cuerpo humano, esto para la evaluación del confort. Por otro lado, será necesario el análisis de la deflexión del neumático para evaluar la maniobrabilidad del sistema; también se registra el comportamiento de la deflexión de la suspensión para obtener las características de diseño del recorrido del sistema sobre la carretera. Cabe añadir que el sistema de suspensión ideal debe minimizar la respuesta a frecuencias en el rango de 0.2 a 10 Hz, para evitar el mareo y los movimientos bruscos en la cabeza de los ocupantes del vehículo, así como brindar una buena maniobrabilidad y conducción en presencia de perturbaciones por las imperfecciones de la carretera.

4.5 ALGORITMOS DE CONTROL APLICADOS AL SISTEMA

En esta sección se presentan los algoritmos empleados para solucionar el problema de control del sistema de suspensión.

4.5.1 MODELO MATEMÁTICO

Después del planteamiento de problema, el análisis y el desarrollo de la dinámica del sistema, se procede a obtener el modelo matemático, el cual será necesario para implementar los algoritmos. Partiendo del sistema original, constituido por las ecuaciones (4.2) y (4.3), se realiza la declaración de variables para el modelo ma-

temático. Donde la fuerza del actuador adicional hace referencia a la entrada de control U del modelo.

Además, para las variables de estado, se tendrá en cuenta: la deflexión de la suspensión como x_1 , la velocidad vertical de la masa suspendida representada por x_2 , la deflexión del neumático corresponderá a x_3 y la velocidad vertical de la masa no suspendida tomará la variable x_4 . En el caso de la salida de control, se propone la regularización de la variable x_1 . Por otro lado, el parámetro para las irregularidades de la carretera será declarado como una perturbación, la cual para simplicidad del diseño se supone es constante. Cabe mencionar que físicamente, el parámetro ζ no es constante y no es conocido, ya que las irregularidades de la carretera son aleatorias. Por otro lado, si se pretende obtener un resultado mas preciso del modelo de suspensión, se necesitará la intervención de algún observador que modele la dinámica de ζ , para después aplicar las estrategias de control. Debido a que el sistema y los procedimientos se vuelven muy complejos, esto no será incluido en esta tesis.

La tabla (4.2) hace referencia al cambio de coordenadas del sistema original al modelo matemático de las variables antes mencionadas.

Variable Sistema Original	Variable Modelo Matemático
z_{su} deflexión de la suspensión	x_1
\dot{z}_s velocidad de la masa suspendida	x_2
$z_u - \zeta$ deflexión del neumático	x_3
\dot{z}_u velocidad de la masa no suspendida	x_4
F_a fuerza del actuador	U
z_{su} deflexión de la suspensión	Y
ζ irregularidades de la carretera	ζ

Tabla 4.2: Cambio de coordenadas para el modelo matemático

Entonces el modelo matemático se transforma en,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 - x_4 \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{k_s}{m_s}x_1 - \frac{b_s}{m_s}x_2 + \frac{b_s}{m_s}x_4 - \frac{1}{m_s}F_{nl}(x) + \frac{1}{m_s}U \\
 \dot{x}_3 &= x_4 - \dot{\zeta} \\
 \dot{x}_4 &= \frac{k_s}{m_u}x_1 + \frac{b_s}{m_u}x_2 - \frac{k_r}{m_u}x_3 - \frac{(b_s+b_t)}{m_u}x_4 + \frac{1}{m_u}F_{nl}(x) + \frac{b_t}{m_u}\dot{\zeta} - \frac{1}{m_u}U
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $F_{nl}(x)$ esta definido como, $F_{nl}(x) = k_{snl}x_1^3 + b_{snl}\sqrt{|x_2 - x_4|}\operatorname{sgn}(x_2 - x_4)$.

Este modelo matemático es no lineal.

4.5.1.1 ANÁLISIS DEL GRADO RELATIVO Y DINÁMICA INTERNA DEL SISTEMA

Antes de entrar en este análisis, es preciso mencionar que, el sistema de suspensión activa puede ser representado por un modelo lineal o un modelo no lineal. Según sea el caso, su análisis será diferente. Una forma simple de comprobar la controlabilidad de un sistema lineal es por medio de la matriz de controlabilidad, la cual deberá ser de rango pleno para asegurar que el sistema sea completamente controlable. Por otro lado, la comprobación de controlabilidad en un sistema no lineal resulta ser bastante complicada. Esta comprobación se realiza por medio del análisis de grado relativo o índice característico con respecto a la salida del sistema y la involutividad de los paréntesis de Lie entre los campos f y g .

Además, en el caso de que el sistema (lineal o no lineal) no sea completamente controlable, se analizará la dinámica interna de la parte no controlable, esto para asegurar que los estados sean estabilizables y poder trabajar en el sistema, de no ser así se dice que el sistema es inestable, por lo que no es posible realizar el control del mismo.

Sea el sistema no lineal (4.5), se procede a calcular el grado relativo. Esto se logra derivando la salida Y las veces que sean necesarias para que la entrada U aparezca explícita.

Tomando en cuenta que $Y = x_1$ y derivando una vez esta salida se tiene,

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_4 \quad (4.6)$$

Ahora, derivando por segunda vez la salida Y se tiene,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_4 \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{k_s}{m_s}x_1 - \frac{b_s}{m_s}x_2 + \frac{b_s}{m_s}x_4 - \frac{1}{m_s}F_{nl}(x) + \frac{1}{m_s}U - \\ &\left[\frac{k_s}{m_u}x_1 + \frac{b_s}{m_u}x_2 - \frac{k_r}{m_u}x_3 - \frac{(b_s+b_t)}{m_u}x_4 + \frac{1}{m_u}F_{nl}(x) + \frac{b_t}{m_u}\dot{\zeta} - \frac{1}{m_u}U \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Debido a que la ecuación (4.7) presenta la entrada U de forma explícita, se concluye que el grado relativo ρ para el sistema no lineal de la suspensión activa es igual a 2.

Ya que, el grado relativo ρ es menor que el número de estados n , esto es, $2 < 4$, se procede a analizar la dinámica interna del sistema. Una manera de simplificar este proceso es por medio del análisis de la dinámica cero de un sistema transformado (Lema 2 sección 2.3.2).

Entonces existen 2 funciones ξ representadas por

$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= x_3 \\ \xi_2(x) &= m_s x_2 + m_u x_4 \end{aligned} \quad (4.8)$$

las cuales completan el difeomorfismo

$$d\xi_1(x), d\xi_2(x), dh(x), dL_f h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_u & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank} = 4 \quad (4.9)$$

donde $z_1 = h$ y $z_2 = L_f h$.

Además se cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} \langle d\xi_1, g \rangle &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T = 0 \\ \langle d\xi_2, g \rangle &= \begin{bmatrix} 0 & m_s & 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ahora analizando la dinámica cero ($z_1 = 0, z_2 = 0$), esto es

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= x_4 - \dot{\zeta} \\ \dot{\xi}_2 &= -k_r x_3 - b_t x_4 + b_t \dot{\zeta}\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde se supone que el término de perturbación ζ es cte. por lo que $\dot{\zeta} = 0$. Entonces se puede acomodar el sistema en la forma canónica controlador,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_r & -b_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\tag{4.12}$$

con $x_3 = \xi_1$ y $x_4 = \frac{\xi_2}{m_s + m_u}$. Esta forma garantiza que la dinámica cero sea asintóticamente estable, es decir que la dinámica es de fase mínima.

Después de demostrar estos conceptos, se procede al cálculo y desarrollo de algoritmos.

4.5.2 LINEALIZACIÓN POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS

Sea el sistema no lineal (4.5) de grado relativo 2 con respecto a la salida Y .

Se definen los campos f y g como,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_4 \\ -\frac{k_s}{m_s} x_1 - \frac{b_s}{m_s} x_2 + \frac{b_s}{m_s} x_4 - \frac{1}{m_s} F_{nl}(x) \\ x_4 - \dot{\zeta} \\ \frac{k_s}{m_u} x_1 + \frac{b_s}{m_u} x_2 - \frac{k_r}{m_u} x_3 - \frac{(b_s + b_t)}{m_u} x_4 + \frac{1}{m_u} F_{nl}(x) + \frac{b_t}{m_u} \dot{\zeta} \end{bmatrix}\tag{4.13}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

Se aplica la transformación (2.10) descrita en el lema 2 de la sección 2.3.2 del

capítulo 2. Esto es,

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= x_4 - \dot{\zeta} \\
 \dot{\xi}_2 &= -k_r x_3 - b_t x_4 + b_t \dot{\zeta} \\
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= L_f^2 h + u L_g L_f h \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde por medio del Lema 3 de la sección 2.3.2, se define el control por retroalimentación de estados (2.12) y despeja el control u de la siguiente forma,

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} (-L_f^2 h + v) \tag{4.16}$$

donde

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = f_1 = x_2 - x_4 \tag{4.17}$$

$$L_f^2 h = \frac{\partial f_1}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = f_2 - f_4 = \dot{x}_2 - \dot{x}_4 \tag{4.18}$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial f_1}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \tag{4.19}$$

Sustituyendo el control u en el sistema (4.15) se obtiene la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= x_4 - \dot{\zeta} \\
 \dot{\xi}_2 &= -k_r x_3 - b_t x_4 + b_t \dot{\zeta} \\
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= v
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

donde el control auxiliar v es propuesto como $v = -kz$, que es la ley de control para la asignación de polos de la parte lineal.

Por otro lado, en la sección 4.5.1.1 se demostró que la parte no lineal ξ (4.11) es asintóticamente estable.

4.5.3 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES SUPER-TWISTING

Existen diversos métodos modernos de control por modos deslizantes que trabajan con sistemas de grado relativo igual a 1 y tienen como finalidad reducir los efectos del chattering. Tal es el caso del control por modos deslizantes super-twisting, que será utilizado para el sistema de suspensión activa.

Se considera la superficie deslizante

$$\vartheta = x_2 - x_4 \quad (4.21)$$

donde, similar al caso anterior por medio de (4.7) se calcula que el grado relativo ρ es igual a 1.

Ahora se supone la estructura (2.45) para el sistema de suspensión

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \dot{x}_2 - \dot{x}_4 \\ \dot{\vartheta} &= \underbrace{\left(\frac{1}{m_u} + \frac{1}{m_s} \right) (-k_s x_1 - b_s x_2 + b_s x_4 - F_{nl}) + \frac{k_r}{m_u} x_3 + \frac{b_t}{m_u} x_4 - \frac{b_t}{m_u} \dot{\zeta}}_{a(x,t)} + \underbrace{\left(\frac{1}{m_u} + \frac{1}{m_s} \right)}_{b(x,t)} U \end{aligned} \quad (4.22)$$

de donde se define la ley de control puesto que $\omega = b(x, t)U$, esto es

$$U = \frac{m_s m_u}{m_s + m_u} \omega \quad (4.23)$$

Y se propone el control por modos deslizantes (2.47), esto es

$$\begin{aligned} \omega &= -\alpha \text{sign}(\vartheta) + \nu \\ \dot{\nu} &= -\beta \text{sign}(\vartheta) \end{aligned} \quad (4.24)$$

con las ganancias adaptativas,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}, & \vartheta \neq 0 \\ 0, & \vartheta = 0 \end{cases} \\ \beta &= 2\varepsilon\alpha + \lambda + 4\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde $\varepsilon, \lambda, \gamma_1, \omega_1$ son constantes positivas.

4.5.4 CONTROL BACKSTEPPING

Otro método eficaz para el control de sistemas no lineales en presencia de perturbaciones es el Backstepping.

En el caso del sistema de Suspensión Activa (4.5), se procede a emplear el algoritmo Backstepping de la siguiente forma.

El objetivo del control es regular la variable de deflexión de la suspensión x_1 para mejorar el confort y maniobrabilidad en el vehículo, de manera que $x_1 \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$.

Este algoritmo está basado principalmente en el Corolario 1 expuesto en 2.3.3 Backstepping. Para aplicar el algoritmo, se tomó en cuenta solo una parte del sistema (4.5), esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_4 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_s}{m_s}x_1 - \frac{b_s}{m_s}x_2 + \frac{b_s}{m_s}x_4 - \frac{1}{m_s}F_{nl}(x) + \frac{1}{m_s}U \end{aligned} \quad (4.26)$$

además se asume que $W(x)$ es definida positiva.

Inicialmente, se propone un control virtual $\alpha(x_1)$ de tal manera que $\dot{V}(x_1) < 0$ siendo $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, por lo que

$$\alpha(x_1) = x_4 - c_1x_1 \quad (4.27)$$

De manera similar, definiendo una variable de error como $z_1 = x_2 - \alpha(x_1)$

(condición $x_2 \neq \alpha(x_1)$) y determinando su derivada,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}(x_1) \\ \dot{z}_1 &= \left(\frac{1}{m_u} + \frac{1}{m_s}\right) (-k_s x_1 - b_s x_2 + b_s x_4 - F_{nl} + U) + \frac{k_r}{m_u} x_3 + \frac{b_t}{m_u} x_4 - \frac{b_t}{m_u} \dot{\zeta} - c_1^2 x_1 + z_1 c_1\end{aligned}\quad (4.28)$$

se calcula una ley de control U por medio de $V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$, de tal forma que, la variable de error z_1 tienda asintóticamente a cero ($\dot{V}(z_1) < 0$). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}U &= k_s x_1 + b_s x_2 - b_s x_4 + F_{nl} - \frac{m_s k_r}{(m_s + m_u)} x_3 - \frac{m_s b_t}{(m_s + m_u)} x_4 \\ &+ \frac{m_s b_t}{(m_s + m_u)} \dot{\zeta} + \frac{m_s m_u}{(m_s + m_u)} (c_1^2 - 1) x_1 - \frac{m_s m_u}{(m_s + m_u)} z_1 c_2\end{aligned}\quad (4.29)$$

Entonces, aplicando la ley de control (4.29), la variable \dot{z}_1 se simplifica en la siguiente expresión,

$$\dot{z}_1 = -x_1 - z_1(c_2 - c_1).\quad (4.30)$$

Considerando una función de Lyapunov similar a (2.26), se calcula

$$V_2(x_1, z_1) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2.\quad (4.31)$$

Analizando la derivada de V_2 ,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_1, z_1) &= x_1 \dot{x}_1 + z_1 \dot{z}_1 \\ \dot{V}_2(x_1, z_1) &= x_1(-c_1 x_1 + z_1) + z_1[-x_1 - z_1(c_2 - c_1)] \\ \dot{V}_2(x_1, z_1) &= -c_1 x_1^2 - z_1^2(c_2 - c_1)\end{aligned}\quad (4.32)$$

y tomando en cuenta que $x_2 = z_1 + x_4 - c_1 x_1$, se determina que $\dot{V}_2(x_1, z_1) \leq 0$ siempre que $c_2 > c_1$, siendo estas constantes de diseño.

Para el resto del sistema (4.5) se realiza un cambio de coordenadas $x_3 = z_2$ y $x_4 = z_3$, esto es

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= c_1 x_1 + \alpha_1(x) + \dot{\zeta} \\ \dot{z}_3 &= -\frac{b_t}{m_u} \left[1 + \frac{m_s}{(m_s + m_u)}\right] \left[c_1 x_1 + \alpha_1(x) - \dot{\zeta}\right] - \frac{k_r}{m_u} \left[1 + \frac{m_s}{(m_s + m_u)}\right] z_2 - \frac{m_s(c_1^2 - 1)}{(m_s + m_u)} x_1 + \frac{m_s c_2}{(m_s + m_u)} z_1\end{aligned}\quad (4.33)$$

Suponiendo que las variables x_1 y z_1 alcanzaron el objetivo ($x_1 = 0, z_1 = 0$) y la perturbación $\zeta = cte \rightarrow \dot{\zeta} = 0$. El sistema (4.33) se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \alpha_1(x) \\ \dot{z}_3 &= -\frac{b_t}{m_u} \left[1 + \frac{m_s}{(m_s + m_u)}\right] \alpha_1(x) - \frac{k_r}{m_u} \left[1 + \frac{m_s}{(m_s + m_u)}\right] z_2\end{aligned}\quad (4.34)$$

el cual, tiene la forma canónica del controlador, esto es

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C_{T1} & -C_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ \alpha_1(x) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

donde $C_{T1} = \frac{k_r}{m_u} \left[1 + \frac{m_s}{(m_s+m_u)} \right]$ y $C_{T2} = \frac{b_t}{m_u} \left[1 + \frac{m_s}{(m_s+m_u)} \right]$ y $\alpha_1(x) \approx z_3$. Se observa claramente que el sistema (4.35) tiene valores propios negativos, por lo que se concluye que el sistema es asintóticamente estable.

CAPÍTULO 5

DIRECCIÓN ASISTIDA

5.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO

En esta sección se describe la información referente a la dirección asistida del vehículo. Se introduce el concepto de Dirección Asistida Electrónicamente (EPS por sus siglas en inglés). Después se muestra el análisis del sistema para luego exponer la obtención del modelo matemático a partir de un diagrama físico ilustrativo, tomando en cuenta las restricciones que rigen el modelo, enseguida se describe el planteamiento del problema así como el objetivo de control y por último se muestra el desarrollo de las técnicas o algoritmos de control propuestos para la solución de éste.

5.2 INTRODUCCIÓN

La dirección es un mecanismo diseñado para controlar el curso de las ruedas del vehículo, de acuerdo con la intención del conductor. Por otro lado, la dirección asistida es un sistema mediante el cual se reduce el par o torque que ha de ejercer el conductor sobre el volante de un vehículo, con el fin de accionar la dirección.

Existen 3 tipos de asistencia en la dirección: hidráulica, electro-hidráulica y

eléctrica o electrónica. La ventaja de la dirección asistida electrónicamente frente a las direcciones hidráulicas y electro-hidráulicas es que, su asistencia es por medio de un motor eléctrico, sin la necesidad de la intervención de una bomba hidráulica, por lo que la dirección se vuelve mas ligera y simple y se reduce el consumo de combustible. Por tal motivo, en este trabajo se optó por la configuración de dirección asistida electrónicamente.

5.2.1 DIRECCIÓN ASISTIDA ELECTRÓNICAMENTE

En este tipo de dirección se sustituye todo el circuito hidráulico por un motor eléctrico, que acciona la cremallera de la dirección por medio de un mecanismo reductor. Un sistema de EPS tiene dos funciones principales. En primer lugar, es capaz de reducir el par o torque ejercido por el conductor y presentar sensaciones de confort en la conducción. En segundo lugar, el sistema EPS puede mejorar el retorno del volante cuando es dirigido, así como mantener una trayectoria estable en situaciones de emergencia.

5.2.2 CLASIFICACIÓN DEL SISTEMA DE DIRECCIÓN ASISTIDA ELECTRÓNICAMENTE

La dirección asistida electrónicamente se puede clasificar de acuerdo al componente donde se aplica la asistencia, esto es:

- Columna de dirección. Esta configuración es la mas demandada ya que tiene el menor costo. Es utilizada sobre todo en vehículos pequeños, cuyo peso sobre el tren de direccion delantero es bajo. Básicamente, el motor eléctrico se instala sobre la parte de la columna de dirección situada en el habitáculo, lo que soluciona el problema de las altas temperaturas debajo del capo.

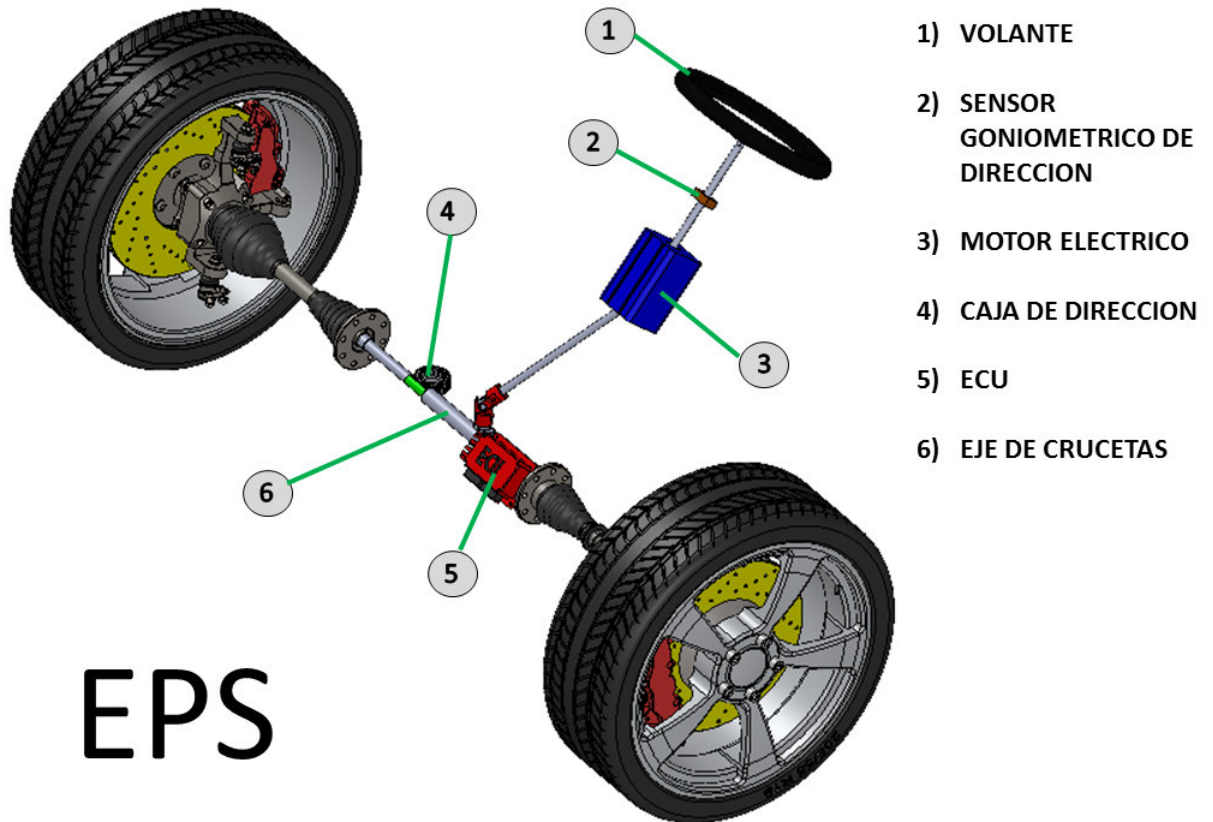


Figura 5.1: Sistema de Dirección Asistida Electrónicamente

- Piñón de la dirección. Es el más simple en términos de implementación, en este caso el motor eléctrico se encuentra al pie de la columna de dirección a la entrada de la cremallera. De esta manera, la columna y las cardanes no se ven afectadas por el par suministrado por el motor eléctrico.
- Cremallera de la dirección. Montaje presente en los vehículos de gama alta, ya que el peso sobre el eje delantero es superior a una tonelada. Para esta configuración el motor eléctrico está integrado en la cremallera.

5.3 FUNCIONAMIENTO

Para comprender mejor el sistema de EPS se procede a describir su funcionamiento.

En un estado de operación normal, cuando se giran las ruedas para cambiar la dirección del vehículo, aparece una fuerza que actúa sobre el neumático, dicha fuerza tiende a alinear la dirección de la rueda con la del vehículo y es generada debido a la resistencia del neumático a ser deformado por la fricción con el suelo y a la posición adelantada del centro de presiones respecto al centro de la rueda.

El sistema de dirección asistida se encarga de ayudar al conductor a vencer esta fuerza. De esta forma la fuerza que deba ejercer el conductor más la fuerza que aplica la dirección serán iguales a la fuerza de auto-alineamiento de la rueda, esto es $TRueda = TAsistencia + TConductor$.

La fuerza de auto-alineamiento que genere la rueda dependerá del vehículo y la velocidad; a menor velocidad mayor resistencia.

Una de las principales ventajas que aportan los sistemas de dirección controlados electrónicamente es que puede generar una asistencia variable en función de la velocidad, por lo que la conducción del vehículo se vuelve más cómoda.

5.4 ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL SISTEMA DE DIRECCIÓN ASISTIDA

El sistema de EPS (figura 5.2) está integrado principalmente por la columna de dirección y el mecanismo de engranaje-cremallera. Dichos elementos son los encargados de transmitir la dirección en un vehículo. Además el sistema consta de un motor DC de imanes permanentes, utilizado para crear el par o torque de asistencia.

Todos estos comandados por la unidad de control ECU, encargada de monitorear y controlar el funcionamiento del sistema por medio de sensores y señales digitales.

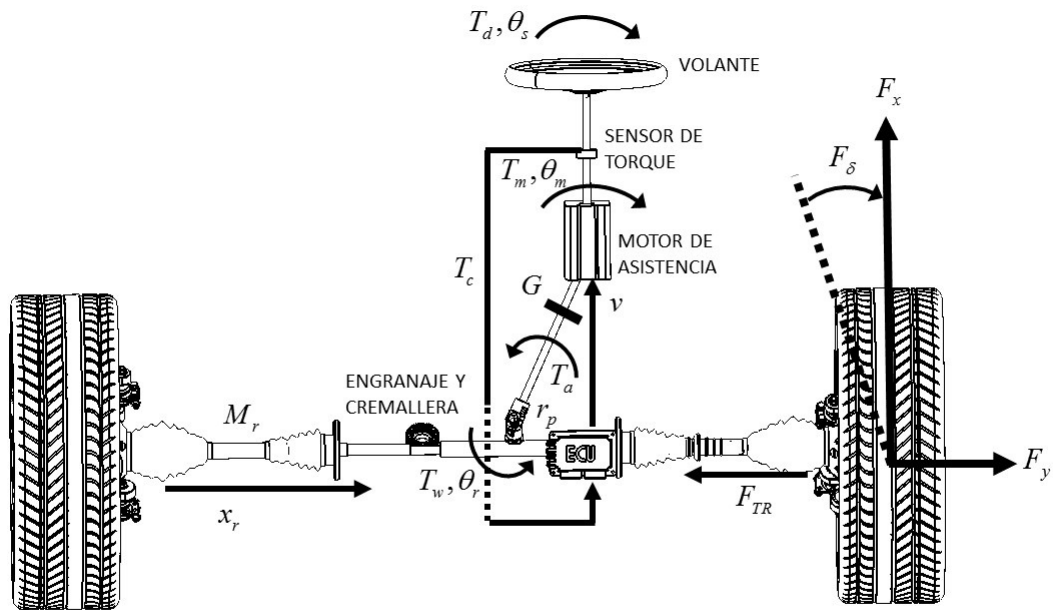


Figura 5.2: Representación del sistema de Dirección Asistida Electrónica

En la tabla (5.2) se presentan los parámetros implicados en el sistema.

Nombre	Descripción
T_d	Par o torque ejercido por el conductor - Nm
θ_s	Posición angular en la entrada del eje de dirección (volante)- rad
J_s	Momento de inercia en la entrada del eje de dirección - kgm^2
B_s	Coefficiente de amortiguamiento en la entrada del eje de dirección - $Nm/(rad/s)$
K_s	coeficiente de rigidez en la entrada el eje de dirección - Nm/rad
T_c	Par o torque opositor en la entrada del eje de dirección - Nm
T_w	Par o torque opositor en la salida del eje de dirección - Nm
θ_r	Posición angular en la salida del eje de dirección - rad
J_r	Momento de inercia en la salida del eje de dirección - kgm^2
B_r	Coefficiente de amortiguamiento en la salida del eje de dirección - $Nm/(rad/s)$
T_a	Par o torque de asistencia - Nm
x_r	Desplazamiento de la cremallera - m
m_r	Masa equivalente del piñón y la cremallera kg
b_r	Coefficiente de amortiguamiento en la cremallera - $Nm/(rad/s)$
r_p	Radio del piñón - m
F_{TR}	Fuerza de auto-alineamiento
k_r	Constante de resorte en las llantas
F_δ	Señal aleatoria de la superficie de la carretera
T_m	Par o torque electromagnético del motor - Nm
θ_m	Posición angular en el eje del motor - rad
J_m	Momento de inercia en el motor - kgm^2
B_m	Coefficiente de amortiguamiento en el motor - $Nm/(rad/s)$
K_m	Coefficiente de rigidez en el motor - Nm/rad
k_a	Coefficiente de par o torque del motor - Nm/rad
G	Relación de engranaje del moto-reductor

Tabla 5.2: Parámetros EPS

Considerando el diagrama de cuerpo libre presentado en la figura (5.3) y hacien-

do uso de las leyes de Newton, se obtienen las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del sistema de Dirección Asistida.

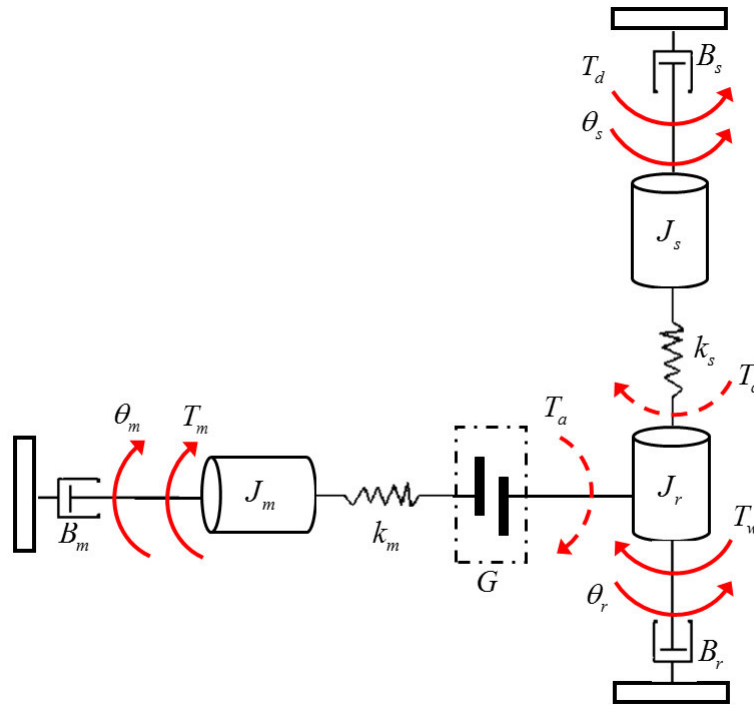


Figura 5.3: Diagrama de cuerpo libre del EPS

Para la parte superior del diagrama, que incluye parte de la columna de dirección, esto es el volante y la barra de dirección, se obtiene la siguiente ecuación,

$$J_s \ddot{\theta}_s + B_s \dot{\theta}_s + T_c = T_d \quad (5.1)$$

donde el par o torque sensado T_c ejercido en la barra de torsión es directamente proporcional a la diferencia entre la entrada y la salida del eje de dirección. Esto es, $T_c = K_s (\theta_s - \theta_r)$.

Al analizar las fuerzas que actúan en el eje del motor, se tomó en cuenta la siguiente ecuación,

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m = T_m - T_a \quad (5.2)$$

donde, para simplificar el modelo del motor y moto-reductor, el par o torque de asistencia queda representado como $T_a = K_m (\theta_m - G\theta_r)$. Por otro lado el par o

torque electromagnético T_m generado por el motor puede ser expresado como $T_m = k_a I$.

Ahora, en la parte inferior del diagrama en la figura (5.3), donde se relacionan la flecha del motor y la barra de dirección se hace el siguiente análisis.

Se formula la ecuación que describe las fuerzas actuando a la salida del eje de dirección como,

$$J_r \ddot{\theta}_r + B_r \dot{\theta}_r - T_c - GT_a = -T_w \quad (5.3)$$

donde el par o torque opuesto en la salida del eje de dirección T_w esta asociado a la ecuación que describe la dinámica del engranaje y la cremallera, esto es

$$m_r \ddot{x}_r + b_r \dot{x}_r = \frac{T_w}{r_p} - F_{TR} \quad (5.4)$$

La fuerza de auto-alineamiento F_{TR} representa la fuerza generada por la resistencia de dirección y el auto-alineamiento de los neumáticos. Esta fuerza también es influenciada por parámetros como la velocidad del vehículo, las condiciones de la superficie de la carretera, la velocidad en la que se gira el volante entre otras. En este caso de estudio será simplificada por la expresión $F_{TR} = k_r x_r + F_\delta$.

Para determinar la relación que existe entre (5.3) y (5.4) se emplea la aproximación $\theta_r \approx \frac{x_r}{r_p}$. Entonces el análisis de la salida del eje de dirección se simplifica y toma la forma

$$M_T \ddot{x}_r + B_T \dot{x}_r + k_T x_r = -F_\delta + \frac{K_s}{r_p} \theta_s + \frac{GK_m}{r_p} \theta_m \quad (5.5)$$

donde $M_T = (m_r + \frac{J_r}{r_p^2})$, $B_T = (b_r + \frac{B_r}{r_p^2})$, $k_T = (k_r + \frac{K_s + G^2 K_m}{r_p^2})$.

5.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para el estudio del sistema de EPS en esta tesis, se propone un objetivo poco convencional, el cual consta de obligar a la trayectoria de un vehículo a seguir una trayectoria propuesta, donde el conductor ejerza aproximadamente el 25 % del torque

total, mientras que el motor proporcione un torque de asistencia del 75 %. Este proceso pretende hacerse solo con la retroalimentación de los estados del sistema, sin la intervención de las curvas de asistencia como comúnmente es implementado el sistema de dirección asistida.

En resumen, se pretende simular un caso donde el conductor se encuentre en un estado de emergencia vial. Por lo que el sistema de EPS actuará, obligando al vehículo a trazar una trayectoria segura con el fin de evitar accidentes.

Para ello se pretende controlar el ángulo de entrada en el eje de dirección θ_s así como el ángulo de salida del eje de dirección θ_r , este último por medio del control del desplazamiento de la cremallera x_r .

5.6 ALGORITMOS DE CONTROL APLICADOS AL SISTEMA

En esta sección se presentan los algoritmos empleados para solucionar el problema de control del sistema de Dirección Asistida.

5.6.1 ESTRUCTURACIÓN DEL SISTEMA EN UN MODELO MATEMÁTICO

Antes de entrar al tema de los algoritmos de control es necesario convertir el sistema de Dirección Asistida (descrito en la sección 5.4) en un modelo matemático más práctico, para aplicar estos algoritmos. Para ello se procede a realizar la declaración de variables que conformarán el modelo matemático. Con estas variables se definen las entradas, salidas, estados de control y perturbaciones del sistema.

El par o torque que ejerce el conductor T_d y el par o torque ejercido por el

motor T_m serán considerados como las entradas de control u_1 y u_2 respectivamente.

Para las variables de estado se tomarán en cuenta, la posición angular en la entrada del eje de dirección θ_s representada como x_1 , la velocidad angular en la entrada del eje de dirección $\dot{\theta}_s$ como x_2 , el desplazamiento de la cremallera x_r será considerada como el estado x_3 , la velocidad en la cremallera \dot{x}_r como x_4 , la posición angular en el eje del motor θ_m corresponderá a x_5 , la velocidad angular en el eje del motor $\dot{\theta}_m$ corresponderá a x_6 .

Se pretende controlar los estados representados por, la posición angular en la entrada del eje de dirección x_1 , la posición angular en la salida del eje de dirección θ_r (por medio del desplazamiento de la cremallera x_3) y la posición angular en la flecha del motor x_5 , por lo que serán propuestos como las salidas y_1 , y_2 y y_3 del sistema respectivamente.

Variable Sistema Original	Variable Modelo Matemático
θ_s posición angular entrada eje de dirección	x_1
$\dot{\theta}_s$ velocidad angular entrada eje de dirección	x_2
x_r desplazamiento de la cremallera	x_3
\dot{x}_r velocidad de la cremallera	x_4
θ_m posición angular eje del motor	x_5
$\dot{\theta}_m$ velocidad angular eje del motor	x_6
T_d par o torque ejercido por el conductor	u_1
T_m par o torque suministrado por el motor	u_2
θ_s posición angular entrada eje de dirección	y_1
θ_r posición angular en la salida del eje de dirección	y_2
θ_m posición angular eje del motor	y_3

Tabla 5.3: Designación de variables para el modelo matemático del EPS

Aplicando las propiedades necesarias el modelo matemático para el sistema de

dirección asistida queda expresado como

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_s} \left(-K_s x_1 - B_s x_2 + \frac{K_s}{r_p} x_3 + u_1 \right) \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_T} \left(\frac{K_s}{r_p} x_1 - k_T x_3 - B_T x_4 + \frac{GK_m}{r_p} x_5 - F_\delta \right) \\
 \dot{x}_5 &= x_6 \\
 \dot{x}_6 &= \frac{1}{J_m} \left(\frac{GK_m}{r_p} x_3 - K_m x_5 - B_m x_6 + u_2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Analizando este modelo matemático se concluye que el sistema es de tipo lineal y puede expresarse en espacio de estados como sigue

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s}{J_s} & -\frac{B_s}{J_s} & \frac{K_s}{J_s r_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_s}{r_p M_T} & 0 & -\frac{K_T}{M_T} & -\frac{B_T}{M_T} & \frac{GK_m}{r_p M_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{GK_m}{r_p J_m} & 0 & -\frac{K_m}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_\delta \tag{5.7}$$

donde F_δ es considerado como una perturbación.

5.6.1.1 COMPROBACIÓN DE LA CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA

Una vez determinado el modelo matemático y analizado el tipo de sistema (en este caso tipo lineal) se procede a comprobar la controlabilidad del sistema, esto con la finalidad de elegir los algoritmos de control mas adecuados para lograr el objetivo de control propuesto.

Se considera que el sistema descrito por (5.7) no cuenta con perturbaciones, esto es $F_\delta = 0$, entonces puede expresarse de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$ donde la matriz

A es descrita como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s}{J_s} & -\frac{B_s}{J_s} & \frac{K_s}{J_s r_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_s}{r_p M_T} & 0 & -\frac{K_T}{M_T} & -\frac{B_T}{M_T} & \frac{GK_m}{r_p M_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{GK_m}{r_p J_m} & 0 & -\frac{K_m}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

y la matriz B se define como

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Con esto se pretende resolver la matriz de controlabilidad descrita en la sección 2.3.5 de esta tesis, la cual debe ser de rango pleno, entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

Nota. Una forma sencilla de resolver la matriz de controlabilidad de este sistema es hacerlo por medio del software Matlab. Además es necesario conocer los valores paramétricos del sistema, por lo que el desarrollo y resultados de esta matriz serán presentados en el Anexo C de esta tesis.

5.6.2 ASIGNACIÓN DE POLOS

Como se menciona en el capítulo 2, en la sección 2.3.5 referente al algoritmo de control por asignación de polos, no todos los sistemas de control se presentan en su forma canónica de controlador, tal es el caso del sistema de dirección asistida (5.7), en el cual, será necesario la aplicación de una transformación para llevar el sistema a su forma canónica de controlador o también llamada forma canónica de Brunvosky.

Se considera el sistema de Dirección Asistida (5.7), donde la matriz B se separa en

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

del cual se diseña la matriz de controlabilidad

$$C_o = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \dots & A^5b_1 & b_2 & Ab_2 & \dots & A^5b_2 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Ahora se construye la matriz L con las columnas linealmente independientes de C_o . A partir de esta matriz, se obtienen los índices de controlabilidad μ_1 y μ_2 , que son iguales al número de columnas linealmente independientes asociadas con b_1 y b_2 y satisfacen $\mu_1 + \mu_2 = n$.

Para este caso

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 & A^3b_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

teniendo en cuenta que $\mu_1 = 2$ y $\mu_2 = 4$

Entonces se propone una matriz P

$$P = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1A \\ q_2 \\ q_2A \\ q_2A^2 \\ q_2A^3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

donde q_1 corresponde al μ_1 reglón de L^{-1} y q_2 corresponde al $\mu_1 + \mu_2$ reglón de L^{-1} .

Con la que se realiza la transformación del sistema en forma canónica de Brunovsky-Luenberger. Esto es

$$A_b = PAP^{-1} \quad B_b = PB \quad (5.14)$$

$$\text{donde } A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{bmatrix} \text{ y } B_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{b1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{b2} & B_{b3} \end{bmatrix}$$

A continuación se define la ley de control $U_b = k_{bn}x_b$ y se calculan la matriz de ganancias k_{bn} , de tal manera que cada subsistema tome la forma canónica controlable.

Para ello, se calcula el sistema en lazo cerrado $A_{blc} = (A_b - B_b k_{bn})$, el cual tiene la forma,

$$A_{blc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{blc21} & A_{blc22} & A_{blc23} & A_{blc24} & A_{blc25} & A_{blc26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{blc61} & A_{blc62} & A_{blc63} & A_{blc64} & A_{blc65} & A_{blc66} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

donde $A_{blc2i} = \alpha_i - B_{b1}k_{bn1i}$ $i = 1, \dots, 6$ y $A_{blc6i} = \beta_i - B_{b2}k_{bn1i} - B_{b3}k_{bn2i}$ $i = 1, \dots, 6$

Ahora, para simplificar el sistema y dividirlo en m subsistemas (ya que la matriz B es de dimension $n \times m$) y aplicar la asignación de polos simultáneamente, se suponen m polinomios característicos deseados. Estos polinomios serán de grado μ_1 y μ_2 , estos son

$$s^2 + a_{11des} + a_{12des} \quad (5.16)$$

$$s^4 + a_{12des}s^3 + a_{22des}s^2 + sa_{32des} + a_{42des} \quad (5.17)$$

donde por medio del cálculo de la matriz de ganancias k_{bn} , se obtiene la matriz que contiene los subsistemas en forma canónica controlable.

$$A_{FC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12ref} & -a_{11ref} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_{42ref} & -a_{32ref} & -a_{22ref} & -a_{12ref} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

La transformación de la matriz de ganancias k_{bn} al sistema original se realiza por medio de $k = Pk_{bn}$.

Así mismo, para controlar la posición de θ_s y θ_r , de manera que estas tengan un error nulo ante la perturbación que causa F_δ , será necesario utilizar un servoposicionador, esto provoca que el sistema tome la estructura mostrada en la figura (5.4), la cual incluye una integración de la señal de error de las variables controladas θ_s y θ_r .

Para calcular el valor de la matriz de ganancias K_0 y el valor de la matriz de ganancias \tilde{k} de retroalimentación de estado, se parte del polinomio deseado del sistema en lazo cerrado, al cual (según el método) se le añade un polo menos significativo por cada variable a controlar. En el caso del sistema de dirección asistida este polinomio será de octavo grado.

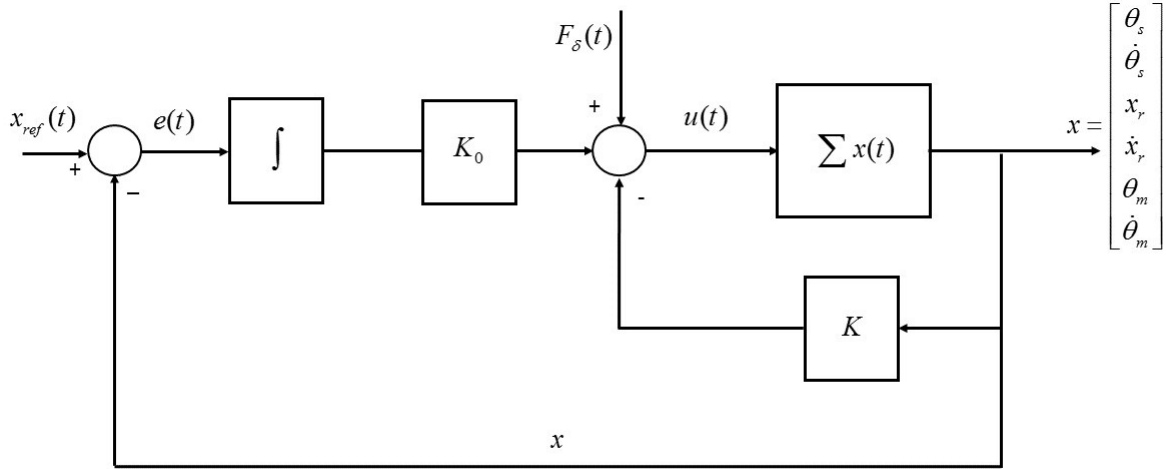


Figura 5.4: Estructura de control por retroalimentación de estado incluyendo un servoposicionador de las variables θ_s y θ_r .

Entonces, la matriz A_r que corresponde a la dinámica del sistema retroalimentado en variable de fase tiene la estructura,

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & -CP^{-1} \\ PBK_0 & P(A - BK)P^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

donde $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $K = k_{bn} + \tilde{k}$. Entonces,

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{b2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{b1}k_{01} & B_{b1}k_{02} & -a_{21ref+\tilde{k}(1,1)} & -a_{11ref+\tilde{k}(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{b2}k_{01}+B_{b3}k_{03} & B_{b2}k_{02}+B_{b3}k_{04} & 0 & 0 & -a_{42ref+\tilde{k}(2,3)} & -a_{32ref+\tilde{k}(2,4)} & -a_{22ref+\tilde{k}(2,5)} & -a_{12ref+\tilde{k}(2,6)} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Suponiendo $B_{b1}k_{02} = 0$ y $B_{b2}k_{01} + B_{b3}k_{03} = 0$, se puede dividir el sistema Ar en dos subsistemas A_{r1} y A_{r2} , de tal forma que $p_s(A_r) = p_s(A_{r1}) + p_s(A_{r2})$, esto con el fin de calcular los valores de \tilde{k} de manera mas sencilla.

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & -C_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ B_{b1}k_{01} & -a_{21ref} + \tilde{k}_{(1,1)} & -a_{11ref} + \tilde{k}_{(1,2)} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$A_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & -C_{b2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{b2}k_{02} + B_{b3}k_{04} & -a_{42ref} + \tilde{k}_{(2,3)} & -a_{32ref} + \tilde{k}_{(2,4)} & -a_{22ref} + \tilde{k}_{(2,5)} & -a_{12ref} + \tilde{k}_{(2,6)} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Igualando los polinomios característicos $p_s(A_{r1})$ y $p_s(A_{r2})$ con los polinomios deseados respectivamente, se obtienen los valores de ganancias K_0 y \tilde{k} que realizan el objetivo de control.

Nota. Para una mejor comprensión de este algoritmo, revisar el anexo C, donde se desarrolla el algoritmo con los valores numéricos del sistema de dirección asistida. Cabe mencionar que para este algoritmo de asignación de polos se utilizaron 3 ganancias distintas. La matriz de ganancias K_{bn} se utilizó para transformar el sistema original en una forma canónica de Brunovsky, mientras que la matriz de ganancias \tilde{k} y la matriz de ganancias K_0 fueron sintonizadas para mejorar la respuesta del sistema y realizar el control de posición.

5.6.3 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES SUPER-TWISTING

Como se mencionó anteriormente, el control por modos deslizantes super-twisting es utilizado para sistemas que operan bajo condiciones de incertidumbre o perturbaciones, debido a su precisión y propiedades de robustez. Además, trabaja con sistemas cuya salida sea de grado relativo igual a 1.

Con este tipo de control, se asegura que la superficie de deslizamiento se alcance en tiempo finito y se garantiza la estabilidad en tiempo finito del sistema de conmutación. Todo esto referente a la sección 2.3.4 de este trabajo.

Para aplicar este tipo de algoritmo de control en el sistema de Dirección Asistida se tendrán en cuenta varias hipótesis, presentadas a continuación.

Hipótesis 1. Se supone que el sistema de Dirección Asistida representado por (5.6) se divide en 3 subsistemas estructurados de la siguiente forma.

El subsistema 1 esta representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_s} \left(u_1 - K_s x_1 - B_s x_2 + \frac{K_s}{r_p} x_3 \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde x_3 será tratado como una perturbación, la cual se supone es acotada y conocida. Esto debido que el comportamiento de este estado es estable en el sistema original. La variable u_1 representa la entrada del subsistema 1.

La salida se propone como la diferencia el error entre el ángulo de entrada en el eje de dirección y el ángulo de entrada de referencia $e_1 = x_1 - x_{1ref}$.

Ahora, el subsistema 2 sera definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_T} \left(\frac{K_s}{r_p} x_1 - k_T x_3 - B_T x_4 + \frac{GK_m}{r_p} x_5 - F_\delta \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde x_1 y F_δ serán tratados como perturbaciones y se suponen acotadas. En este subsistema la variable x_5 representará la entrada de control.

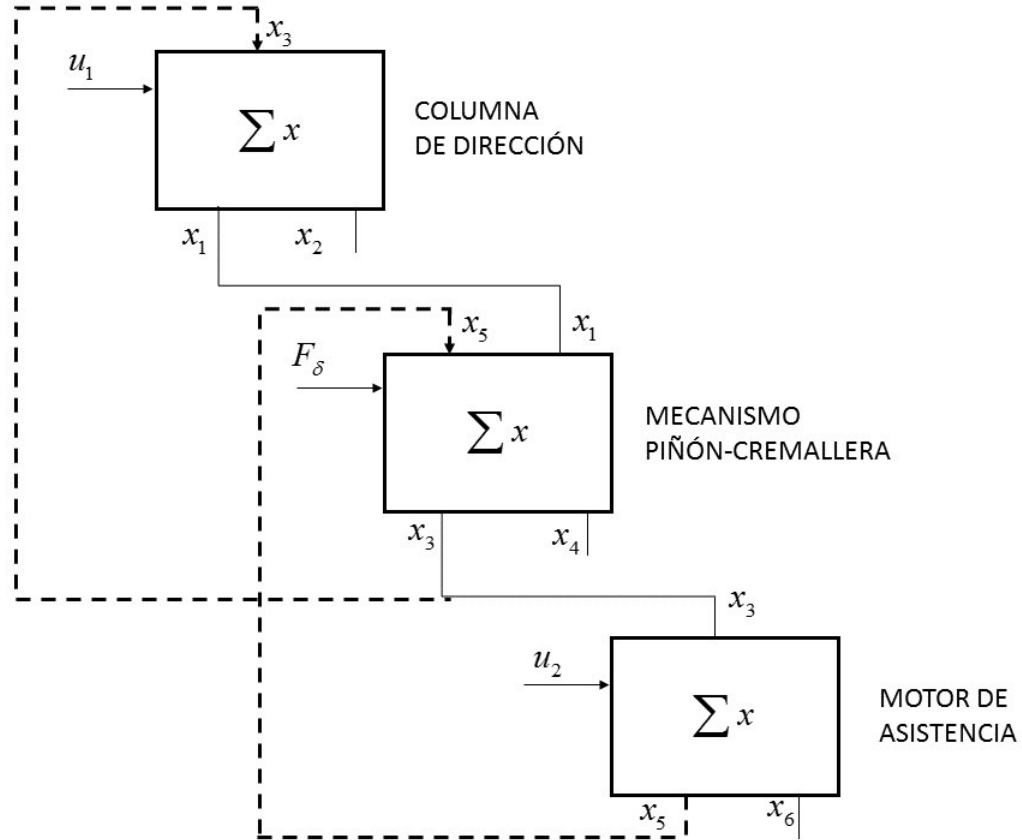


Figura 5.5: Estructura en subsistemas del sistema de Dirección Asistida

Como el objetivo de control propuesto es seguir una trayectoria deseada, la salida será definida como el error entre el desplazamiento de la cremallera y el desplazamiento de la cremallera propuesto $e_2 = x_3 - x_{3ref}$.

Por ultimo, el subsistema 3 se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{1}{J_m} \left(\frac{GK_m}{r_p} x_3 - K_m x_5 - B_m x_6 + u_2 \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde x_3 será tratado como una perturbación, la cual se supone es acotada y conocida; ya que el comportamiento de este estado es estable en el sistema original. Además la variable u_2 representará la entrada de control del subsistema.

La salida representará el error entre la posición angular del eje del motor y la

posición angular del eje del motor necesaria para lograr el objetivo de control, esto es $e_3 = x_5 - x_{5ref}$.

El sistema original se divide en subsistemas.

Para el subsistema 1 representado por (5.23).

Se declara la superficie deslizante,

$$\vartheta_1 = \dot{e}_{x_1} + \varepsilon_1 e_{x_1} \quad (5.26)$$

la cual es de grado relativo igual a 1 con respecto a la entrada y ε_1 es una constante positiva.

Se define el error de seguimiento e_{x_1} de la forma

$$\begin{aligned} e_{x_1} &= x_1 - x_{1ref} = z_1 \\ \dot{e}_{x_1} &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref} = x_2 - \dot{x}_{1ref} = z_2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Se transforma el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1ref} = \frac{1}{J_s} \left(u_1 - K_s x_1 - B_s x_2 + \frac{K_s}{r_p} x_3 \right) - \ddot{x}_{1ref} = \bar{u}_1 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Entonces se despeja la entrada de control

$$u_1 = (\bar{u}_1 + \ddot{x}_{1ref}) J_s + K_s x_1 + B_s x_2 - \frac{K_s}{r_p} x_3 \quad (5.29)$$

donde se aplica la ley de control super-twisting

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -k_1 |\vartheta_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\vartheta_1) + v \\ \dot{v} &= -k_2 \operatorname{sgn}(\vartheta_1) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ahora, para el subsistema 2 representado por (5.24).

Se declara la superficie deslizante,

$$\vartheta_2 = \dot{e}_{x_3} + \varepsilon_2 e_{x_3} \quad (5.31)$$

donde ε_2 es una constante positiva de diseño. Esta superficie es de grado relativo igual a 1 con respecto a la entrada.

Se define el error de seguimiento e_{x_3} de la forma

$$\begin{aligned} e_{x_3} &= x_3 - x_{3ref} = z_3 \\ \dot{e}_{x_3} &= \dot{x}_3 - \dot{x}_{3ref} = x_4 - \dot{x}_{3ref} = z_4 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Se transforma el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \dot{x}_4 - \ddot{x}_{3ref} = \frac{1}{M_T} \left(\frac{K_s}{r_p} x_1 - k_T x_3 - B_T x_4 + \frac{GK_m}{r_p} x_5 - F_\delta \right) - \ddot{x}_{3ref} = \bar{u}_{x_5} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Entonces se despeja la entrada de control

$$x_{5e} = \left(\bar{u}_{x_5} + \ddot{x}_{3ref} - \frac{K_s}{r_p M_T} x_1 + \frac{k_T}{M_T} x_3 + \frac{B_T}{M_T} x_4 \right) \frac{r_p M_T}{GK_m} \quad (5.34)$$

donde se aplica la ley de control super-twisting

$$\begin{aligned} \bar{u}_{x_5} &= -k_3 |\vartheta_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\vartheta_2) + v \\ \dot{v} &= -k_4 \operatorname{sgn}(\vartheta_2) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por ultimo, para el subsistema 3 representado por (5.25).

Se declara la superficie deslizante,

$$\vartheta_3 = \dot{e}_{x_5} + \varepsilon_3 e_{x_5} \quad (5.36)$$

donde ε_3 es una constante positiva de diseño. Esta superficie es de grado relativo igual a 1 con respecto a la entrada.

Se define el error de seguimiento e_{x_5} de la forma

$$\begin{aligned} e_{x_5} &= x_5 - x_{5ref} = z_5 \\ \dot{e}_{x_5} &= \dot{x}_5 - \dot{x}_{5ref} = x_6 - \dot{x}_{5ref} = z_6 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Se transforma el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \dot{x}_6 - \ddot{x}_{5ref} = \frac{1}{J_m} \left(\frac{GK_m}{r_p} x_3 - K_m x_5 - B_m x_6 + u_2 \right) - \ddot{x}_{5ref} = \bar{u}_2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Entonces se despeja la entrada de control

$$u_2 = (\bar{u}_2 + \ddot{x}_{5ref}) J_m - \frac{GK_m}{r_p} x_3 + K_m x_5 + B_m x_6 \quad (5.39)$$

donde se aplica la ley de control super-twisting

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= -k_5 |\vartheta_3|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\vartheta_3) + v \\ \dot{v} &= -k_6 \operatorname{sgn}(\vartheta_3) \end{aligned} \quad (5.40)$$

CAPÍTULO 6

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

6.1 DESCRIPCIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presentan los resultados de los algoritmos de control, los cuales fueron empleados en los distintos sistemas de seguridad activa propuestos en esta tesis. Dichos resultados se muestran por medio de simulaciones hechas en la plataforma de Matlab simulink, además se establecen los valores paramétricos y consideraciones físicas involucradas en los sistemas, así como las gráficas referentes al comportamiento de estos. Por último se dictaminan las conclusiones con respecto a esta investigación.

6.2 INTRODUCCIÓN

Antes de concluir con esta investigación, será necesario analizar los resultados para cada subistema de seguridad en sus distintas formas de control, esto con el propósito de realizar una comparación con respecto a un criterio de evaluación propuesto. La idea de un algoritmo de control que cumpla con las demandas y necesidades para los sistemas de seguridad activa de un vehículo, se resume en una efectiva acción de gestión de energía.

Es preciso señalar que en este apartado se presentan solo los resultados más destacados para cada sistema de seguridad. Aunque se intentaron aplicar los mismos algoritmos para todos los sistemas, no todos los resultados fueron satisfactorios, en algunos casos el algoritmo falló, demandó demasiada energía o no pudo utilizarse debido a la estructura del sistema.

6.3 RESULTADOS PARA EL SISTEMA DE FRENOS ABS

A continuación se presentan los resultados de los algoritmos utilizados para resolver el problema de control en el sistema de frenos ABS propuesto en el capítulo 2.

6.3.1 PARÁMETROS Y CONDICIONES DEL SISTEMA

Antes de abordar el tema de resultados, es necesario presentar los valores numéricos correspondientes a los parámetros y condiciones iniciales definidos para el sistema de frenos ABS, estos valores son utilizados para obtener las gráficas que representan el comportamiento del sistema así como la acción de control de los algoritmos.

Parámetro	Nombre	Valor
r_1	Radio de la rueda superior	0.0995m
r_2	Radio de la rueda inferior	0.099m
J_1	Momento de inercia de la rueda superior	0.00753kgm ²
J_2	Momento de inercia de la rueda inferior	0.0256kgm ²
d_1	Coefficiente de fricción de la rueda superior	0.00011874kgm ² /s
d_2	Coefficiente de fricción de la rueda inferior	0.00021468kgm ² /s
$F_n(\text{cte})$	Fuerza total normal	58.214N
M_{10}	Fricción estática de la rueda superior	0.0032Nm
M_{20}	Fricción estática de la rueda inferior	0.0925Nm
M_g	Momento de gravedad	19.62N
c_1	Constante 1	-0.04240011450454
c_2	Constante 2	0.00000000029375
c_3	Constante 2	0.03508217905067
c_4	Constante 2	0.40662691102315
α	Constante α	0.00025724985785
p	Constante p	2
L	Distancia de la palanca de equilibrio	0.37m
ϕ	Angulo de inclinación de la palanca de equilibrio	65.61°

Tabla 6.1: Valores paramétricos para el sistema de ABS

Una vez identificados los valores numéricos de los parámetros, serán declaradas las condiciones iniciales de los estados del sistema. Estas condiciones corresponden a los valores de velocidades que presentan la rueda y el vehículo al momento de iniciar la etapa de frenado.

Variable modelo matemático	Nombre	Valor inicial
x_1	Velocidad angular de la rueda superior	1720 rpm
x_2	Velocidad angular de la rueda inferior	1720 rpm

Tabla 6.2: Condiciones iniciales para el sistema ABS

Donde x_1 representará a la velocidad de la rueda del vehículo y x_2 representará a la velocidad aproximada del vehículo en rpms (recordar que $\nu = x_2 r_2$ en unidades $\frac{m}{s}$ esto es, $\frac{\nu}{r_2} = x_2$ en unidades *rpm*).

Nota. En la ejecución de la simulación se debe tener en cuenta el dominio de operación de los estados del sistema, en particular del estado x_2 , ya que si x_2 pasa por el origen, esto es $x_2 = 0$, el grado relativo del sistema ($\rho = -\frac{r_1}{x_2 r_2}$) no estará bien definido y el algoritmo de control no logrará su objetivo.

Dicho anteriormente, el objetivo de estos algoritmos consta de dirigir y mantener el valor de deslizamiento λ en un valor de referencia constante $\lambda_{ref} = 0.25$, esto para garantizar el anti-bloqueo de las ruedas durante la etapa de frenado y hacer que la velocidad de la rueda x_1 , así como la velocidad del vehículo x_2 , tiendan a cero en el menor tiempo posible.

Una vez indicados estos valores y condiciones se realizan las correspondientes simulaciones de los algoritmos.

6.3.2 RESULTADOS PARA EL ALGORITMO DE CONTROL PID

Como se mencionó antes, el algoritmo PID está basado en la retroalimentación de ganancias (proporcional P , integral I y derivativa D) con la finalidad de anular el error de salida.

Para el caso del sistema de ABS, el error de salida está definido como el desli-

zamiento menos el deslizamiento de referencia, esto es $e = \lambda - 0.25$. Por otro lado, la sintonización de ganancias se obtuvo por medio del bloque PID en Matlab simulink, el cual determinó los siguientes valores.

Ganancia	valor calculado
k_P	-164.107426970474
k_I	-3061.13240878788
k_D	0.329618809033384

Tabla 6.3: Resultados de ganancias PID para el sistema ABS

Aplicando estos valores de ganancia en la ley de control PID (3.23) propuesta en el capítulo 3, se obtuvieron los siguientes resultados gráficos.

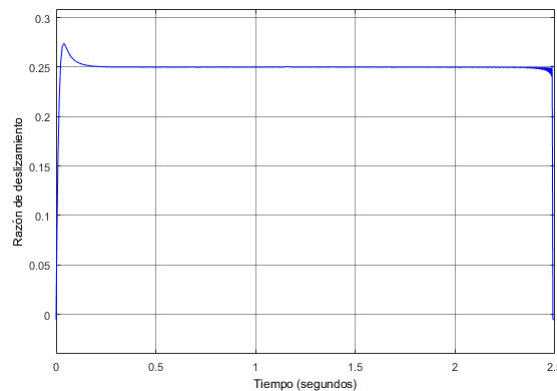


Figura 6.1: Salida del sistema ABS aplicando el algoritmo PID

En la figura 6.1 se muestra la respuesta a la salida del sistema, que hace referencia a la razón de deslizamiento λ . En esta gráfica se puede observar que el objetivo de control es alcanzado, ya que λ se mantiene en el valor de referencia constante establecido $\lambda_{ref} = 0.25$.

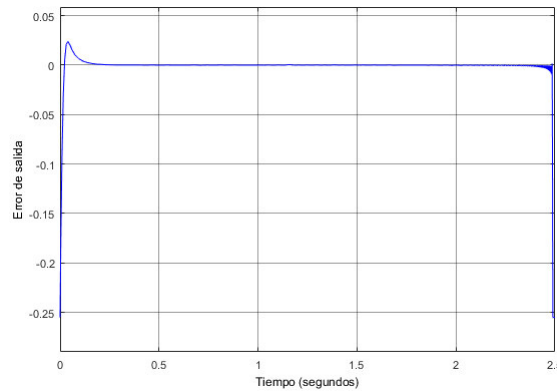


Figura 6.2: Error de salida del sistema ABS aplicando el algoritmo PID

La figura 6.2 representa el error de salida con respecto al tiempo, donde $e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

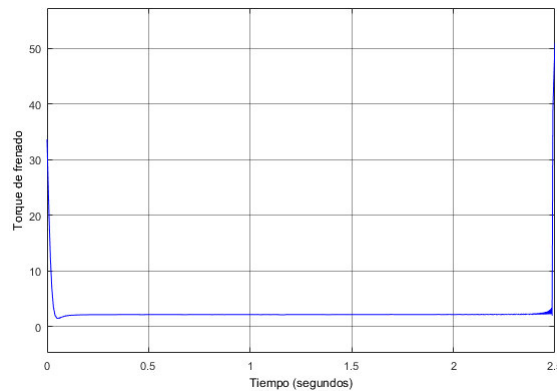


Figura 6.3: Entrada de control PID para el sistema ABS

La figura 6.3 corresponde al par o torque de frenado utilizado en el sistema de ABS para lograr el objetivo de control.

La figura 6.4 ilustra las velocidades de la rueda y el vehículo en unidades RPM. Con el algoritmo de PID se logra llevar estas velocidades asintóticamente a cero en un tiempo de 2.5 segundos aproximadamente, esto manteniendo la razón de deslizamiento dentro de un valor que garantice el anti-bloqueo de las ruedas del vehículo.

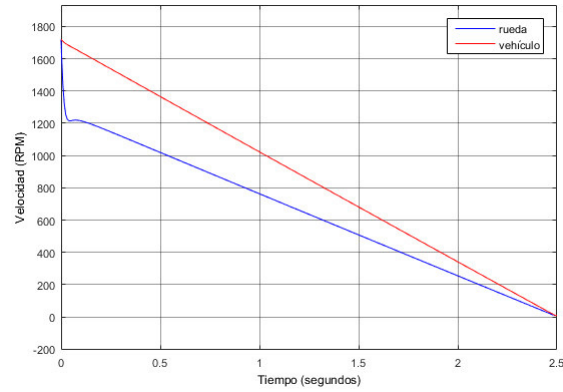


Figura 6.4: Velocidades del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo PID

En la figura 6.5 se muestran las gráficas de la distancia recorrida por el vehículo y la rueda en la etapa de frenado.

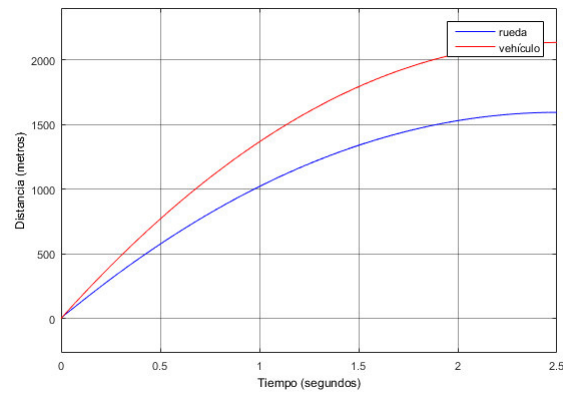


Figura 6.5: Posiciones del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo PID

Unos instantes antes de que la simulación se de por terminada, el valor de par o torque aumenta considerablemente, esto se debe a que en algún instante de tiempo, la razón de deslizamiento toma valores negativos, este suceso genera un comportamiento inestable en el sistema. Con la finalidad de corregir esta inestabilidad, será necesario apagar el sistema de ABS antes de que ocurra el intercambio de velocidades ($x_1 > x_2$) que hacen negativa la razón de deslizamiento λ , todo esto con el fin de mejorar el control del vehículo y así cumplir con el objetivo de control.

6.3.3 RESULTADOS PARA EL ALGORITMO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES CONVENCIONAL

Ahora toca el turno al algoritmo de control por modos deslizantes en su forma convencional. Como se explicó en el capítulo 3 este algoritmo es robusto ante perturbaciones pero presenta la desventaja del chattering. Para este algoritmo, se determinó la superficie deslizante $\vartheta = \lambda - \lambda_{ref} = \lambda - 0.25$, la cual es de grado relativo igual a 1. Además se utilizó un control adicional U_{al} para garantizar la atracción de la trayectoria sobre la superficie deslizante. Aplicando la ley de control (3.37) y tomando en cuenta la cte $\epsilon = 1.2$ se obtuvieron los siguientes resultados.

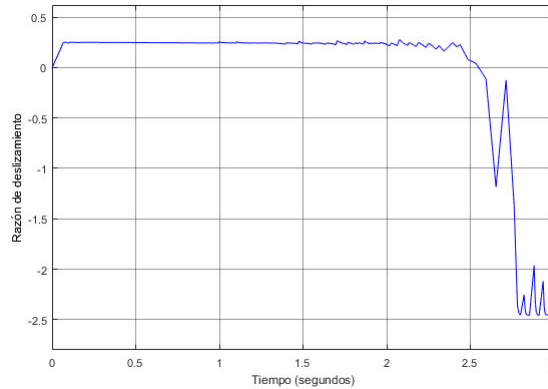


Figura 6.6: Objetivo de control MDC del sistema ABS

La figura 6.6 representa la respuesta a la salida del sistema, la cual corresponde a la razón de deslizamiento. El objetivo de control se cumple solo por cierto tiempo, ya que, como se mencionó en los resultados anteriores; la relación entre la velocidad de la rueda y la velocidad del vehículo es mayor a uno ($\frac{x_1}{x_2} > 1$), esto ocasiona que la razón de deslizamiento sea negativa.

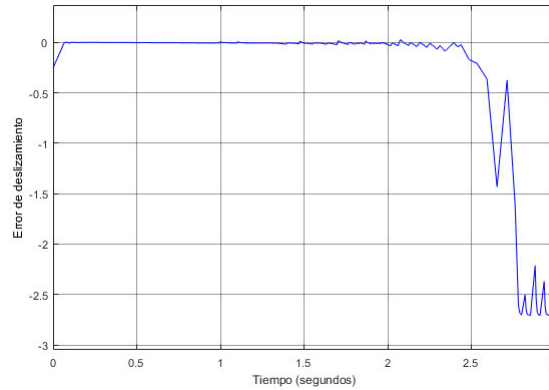


Figura 6.7: Superficie deslizante del sistema ABS aplicando MDC

La figura 6.7 representa el comportamiento de la superficie deslizante propuesta, la cual logra la convergencia en tiempo finito $\vartheta \rightarrow 0$.

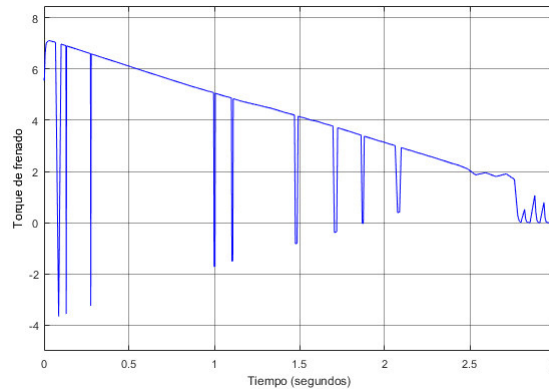


Figura 6.8: Entrada de control MDC para el sistema ABS

La figura 6.8 corresponde al par o torque de frenado que fue determinado por el algoritmo de modos deslizantes y fue utilizado en el sistema para cumplir el objetivo de control. Cabe destacar que en esta gráfica se puede notar el efecto de chattering producido por este algoritmo.

La figura 6.9 ilustra las velocidades de la rueda y el vehículo en unidades RPM, con el algoritmo de modos deslizantes se logra acercar estas velocidades al reposo, en un tiempo de 3 segundos aproximadamente, esto manteniendo la razón

de deslizamiento dentro de un valor que garantice el anti-bloqueo de las ruedas del vehículo.

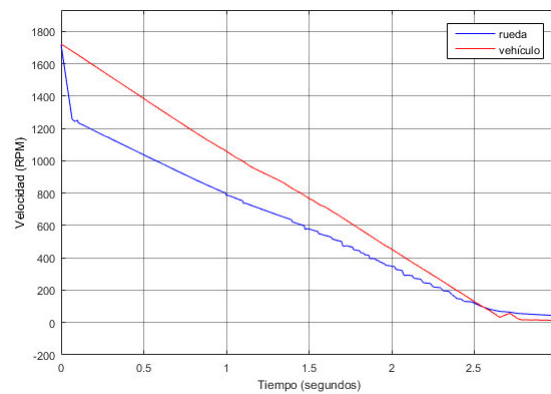


Figura 6.9: Velocidades del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo MDC

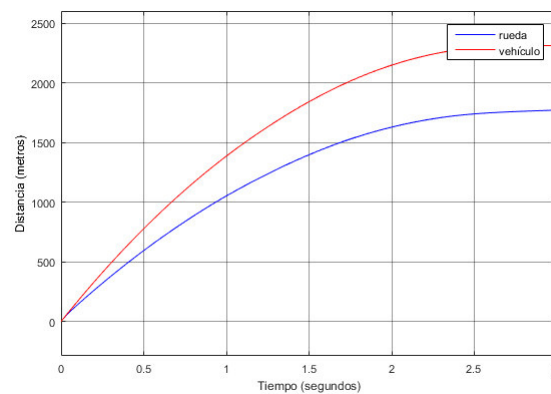


Figura 6.10: Posiciones del vehículo y la rueda aplicando el algoritmo MDC

En la figura 6.15 se muestran las gráficas de la distancia recorrida por el vehículo y la rueda en la etapa de frenado.

Estrictamente hablando, este algoritmo no logra cumplir el objetivo de control, ya que la razón de deslizamiento deja de seguir la referencia en el segundo 2.3 aproximadamente, esto debido a la relación de velocidades $\frac{x_1}{x_2} > 1$. Por otro lado, de forma mas práctica, este algoritmo puede utilizarse hasta el tiempo de 2.3 segundos, donde las velocidades se mantienen cerca del reposo. En estas circunstancias, el bloqueo de las ruedas presenta muy pocas probabilidades de ocurrir, por lo que el sistema de

ABS puede apagarse y así mantener el control del vehículo.

6.3.4 RESULTADOS PARA EL ALGORITMO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES SUPER-TWISTING

En el siguiente caso, para el algoritmo de control por modos deslizantes super-twisting descrito en el capítulo 3 de esta tesis, se determinó la superficie deslizante $\vartheta = \lambda - 0.25$, para después aplicar la ley de control establecida en (3.41), donde el valor final de las ganancias α y β después de adaptarse, está ilustrado en la tabla (6.4), garantizando así la convergencia del sistema en tiempo finito.

Ganancia	valor calculado
α	-164.107
β	0.329

Tabla 6.4: Valores de ganancias del control MD Super-twisting

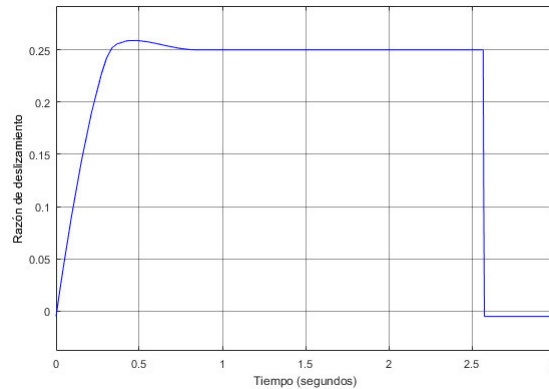


Figura 6.11: Objetivo de control MD Super-twisting del sistema ABS

La figura 6.11 representa la respuesta a la salida del sistema, la cual corresponde a la razón de deslizamiento. Aquí se demuestra que el objetivo de control se cumple de forma satisfactoria. La caída espontánea de la gráfica en el tiempo de 2.55 segundos aprox., se debe a que las velocidades tienden a cero.

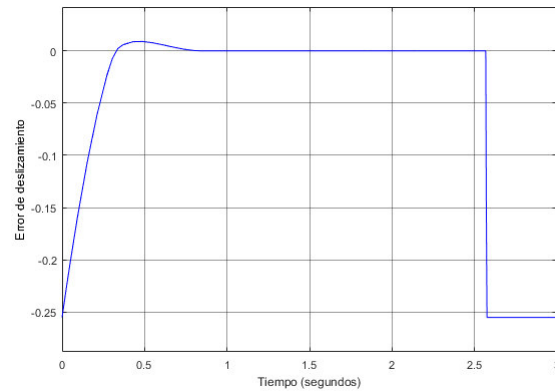


Figura 6.12: Superficie deslizante del sistema ABS aplicando MD Super-twisting

La figura 6.12 representa a la superficie deslizante, donde fácilmente se puede notar su convergencia en tiempo finito.

La figura 6.13 corresponde al torque de frenado que fue empleado en el sistema para cumplir el objetivo de control. Es importante mencionar que con el algoritmo de super-twisting, el efecto del chattering es atenuado.

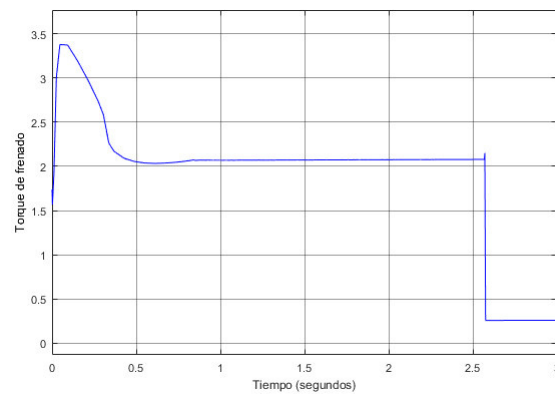


Figura 6.13: Entrada de control MD Super-twisting para el sistema ABS

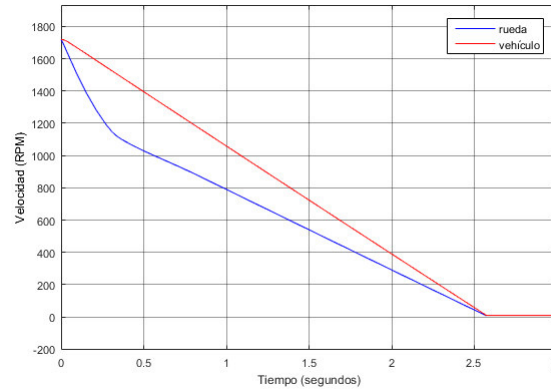


Figura 6.14: Velocidades del vehículo y la rueda aplicando MD Super-twisting

En la figura 6.14 se muestran las velocidades de la rueda y el vehículo en unidades RPM. Como se aprecia en la gráfica, el algoritmo de modos deslizantes super-twisting fue capaz de llevar estas velocidades muy cerca del reposo en un tiempo aproximado de 2.55 segundos.

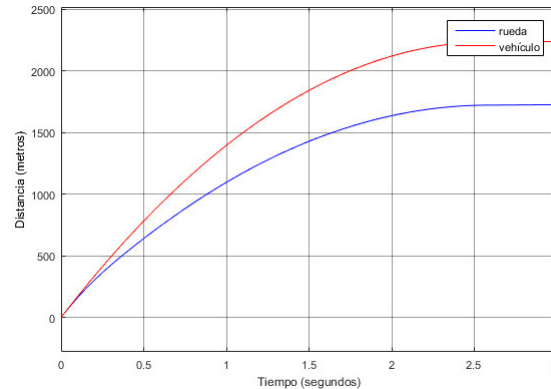


Figura 6.15: Posiciones del vehículo y la rueda aplicando MD Super-twisting

En la figura 6.15 se muestran las gráficas de la distancia recorrida por el vehículo y la rueda en la etapa de frenado.

En comparación con el algoritmo de modos deslizantes convencional, el algoritmo super-twisting presentó mejores resultados en todos los aspectos, desde lograr el objetivo de control hasta mejorar el tiempo de respuesta del sistema. Respecto al algoritmo de PID, el algoritmo super-twisting presenta resultados muy similares, pero

tiene la ventaja de utilizar menos energía. Desafortunadamente, si hablamos de una implementación física, emplear este algoritmo presenta la desventaja de los pequeños efectos de chattering, lo que ocasiona un desgaste prematuro en los componentes del vehículo.

6.4 RESULTADOS PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN ACTIVA

A continuación se presentan los resultados de los algoritmos de control, los cuales fueron desarrollados para el sistema de Suspensión Activa, correspondiente al capítulo 4.

6.4.1 PARÁMETROS Y CONDICIONES DEL SISTEMA

Antes de abordar el tema de resultados, es necesario conocer los valores paramétricos y condiciones iniciales referentes al sistema de Suspensión Activa (Tabla 6.5). Estos valores son utilizados para implementar las simulaciones, y así, obtener las gráficas que representan el comportamiento del sistema, así como la acción de control de los algoritmos.

Parámetro	Nombre	Valor
m_s	Masa suspendida (chasis)	342.5kg
m_u	Masa no suspendida (rueda)	40kg
k_s	Constante lineal de rigidez en la suspensión	200000N/m
b_s	Constante lineal de amortiguamiento en la suspensión	1000Ns/m
k_{snl}	Constante no lineal de rigidez en la suspensión	1000N/m
b_{snl}	Constante no lineal de amortiguamiento en la suspensión	50Ns/m
k_r	Constante de rigidez en el neumático	268000N/m
b_t	Constante de amortiguamiento en el neumático	14.6Ns/m
ζ	Irregularidades de la carretera	28

Tabla 6.5: Parámetros del sistema de Suspensión Activa

Ya que los valores paramétricos han sido fijados, se procede a declarar las condiciones iniciales de los estados del sistema de Suspensión. Estas condiciones se muestran en la tabla 6.6.

Variable Modelo Matemático	Nombre	Valor inicial
x_1	Deflexión de la suspensión ($z_s - z_u$)	0.1 m
x_2	Velocidad de la masa suspendida	0 m/s
x_3	Deflexión del neumático ($z_u - \zeta$)	0.01 m
x_4	Velocidad de la masa no suspendida	0 m/s

Tabla 6.6: Condiciones iniciales para el sistema SA

Nota. En la ejecución de la simulación en Matlab/simulink, se utilizó un bloque de switch para limitar la entrada de control de los algoritmos, esto con el propósito de obtener mejores resultados en el sistema.

Como se planteó en el capítulo 4, el objetivo de control del sistema de suspensión consiste en mejorar el rendimiento de la suspensión del vehículo y mantener

el confort de los pasajeros, esto por medio de la regulación de la deflexión de la suspensión y la deflexión del neumático. Básicamente, el análisis del sistema, se basa en la comparación entre la respuesta del sistema de suspensión activa y la respuesta del sistema de suspensión pasiva ($F_a = 0$).

6.4.2 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES SUPER-TWISTING

El algoritmo de control por modos deslizantes super-twisting fue uno de los algoritmos aplicados en el sistema de suspensión activa de este trabajo. Este algoritmo implica definir una superficie deslizante que sea estrictamente de grado relativo igual a 1, por lo que se eligió la superficie $\vartheta = x_2 - x_4$. Aplicando la ley de control descrita por las ecuaciones 4.23 y 4.24, donde las ganancias del controlador son fijadas en los valores mostrados en la tabla (6.7), se obtuvieron los siguientes resultados.

Ganancia	valor calculado
α	28
β	0.056
ω_1	10
γ_1	2
λ	2
ε	0.001

Tabla 6.7: Valores de ganancias del control MD Super-twisting del sistema de SA

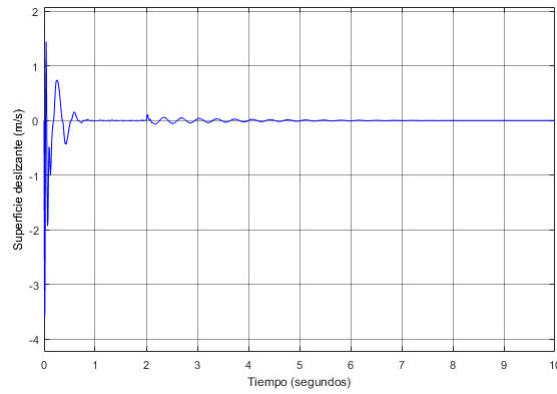


Figura 6.16: Superficie deslizante del Sistema SA aplicando MD Super-twisting

En la figura 6.16 se muestra el comportamiento de la superficie deslizante a través del tiempo. Analizando la gráfica se puede notar que la convergencia hacia cero es alcanzada en aproximadamente 0.8 segundos.

La figura 6.17 representa la fuerza empleada por el actuador externo para regular el sistema de suspensión. Como se había mencionado anteriormente, esta entrada de control está limitada a un tiempo de 2 segundos.

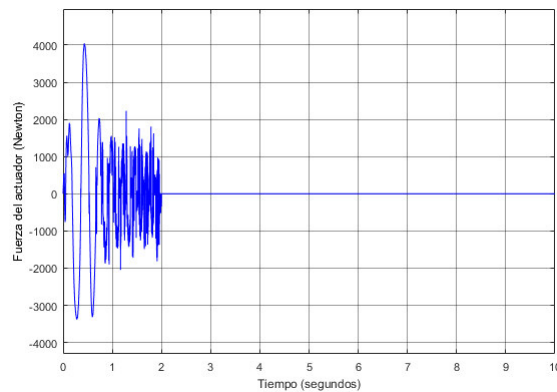


Figura 6.17: Entrada de control MD Super-twisting para el sistema de SA

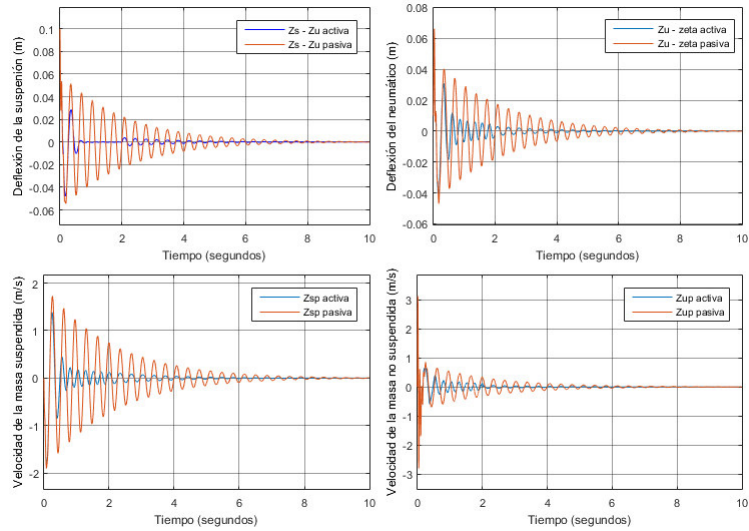


Figura 6.18: Comportamiento del sistema de SA aplicando MD Super-twisting

La figura 6.18 ilustra la comparación de los distintos estados del sistema de suspensión activa y pasiva. En esta figura se puede notar claramente el beneficio de tener un actuador externo para mejorar la respuesta del sistema en todos los aspectos.

Debido al comportamiento amortiguado del sistema de suspensión, el hecho de limitar la entrada de control a un tiempo de 2 segundos no afecta la funcionalidad del algoritmo, ni tampoco la estabilidad ni el rendimiento del sistema. Por otro lado, con esta acción preventiva, se logra ahorrar mas energía y el sistema responde de mejor forma a las irregularidades de la carretera. Físicamente, este sistema de suspensión activa actúa cuando se registra una condición de deflexión elevada, y se desactiva cuando es alcanzado un valor de deflexión mínimo.

6.4.3 RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO

Otro algoritmo de control empleado en el sistema de suspensión activa, es el denominado control por retroalimentación de estados. Con la ayuda de la ley

de control (4.16), este algoritmo transforma el sistema de suspensión activa en un nuevo sistema (4.20), el cual está compuesto por una parte lineal (a la cual puede aplicarse cualquier algoritmo de control lineal), y otra parte no lineal (que presenta una dinámica interna estable). Para la parte lineal se aplicó el clásico algoritmo de asignación de polos $v = -kz$, donde $k_1 = 10$ y $k_2 = 5$, este es un control auxiliar que está incluido en la ley de control original (4.20). Por otro lado, para la parte no lineal, se presentan los resultados de la estabilidad asintótica de ξ_1 y ξ_2 (figura 6.21).

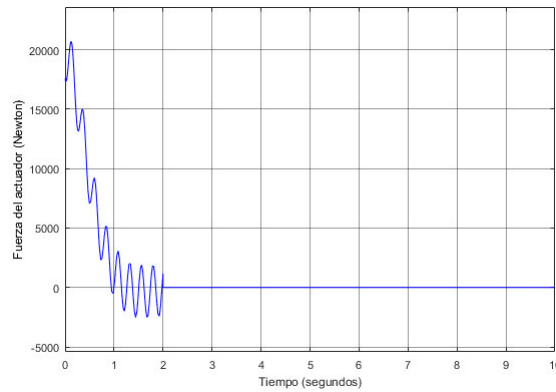


Figura 6.19: Entrada de control por retro de estados para el sistema de SA

La figura 6.19 representa la fuerza empleada por el actuador externo para regular el sistema de suspensión. Como se había mencionado anteriormente, para este sistema de suspensión, la entrada de control está limitada a un tiempo de 2 segundos. Cabe mencionar que esta gráfica corresponde a la ley de control descrita en la ecuación (4.16), la cual es la ley de control del sistema completo.

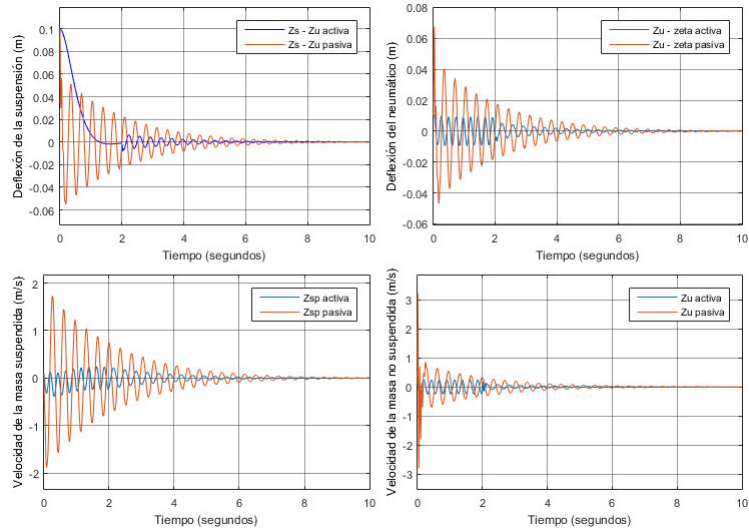


Figura 6.20: Comparación entre el sistema SA original y retro de estados

La figura 6.20 ilustra la comparación de los distintos estados del sistema de suspensión activa (4.5 con $U = u$) y pasiva (4.5 con $U = 0$) en su forma original. En esta gráfica se observa que, aplicar el control de retroalimentación, mejora notablemente las características del sistema. Además, se toma en cuenta que, la respuesta del sistema dependerá de forma significativa del valor de ganancias k_1 y k_2 que sean elegidas.

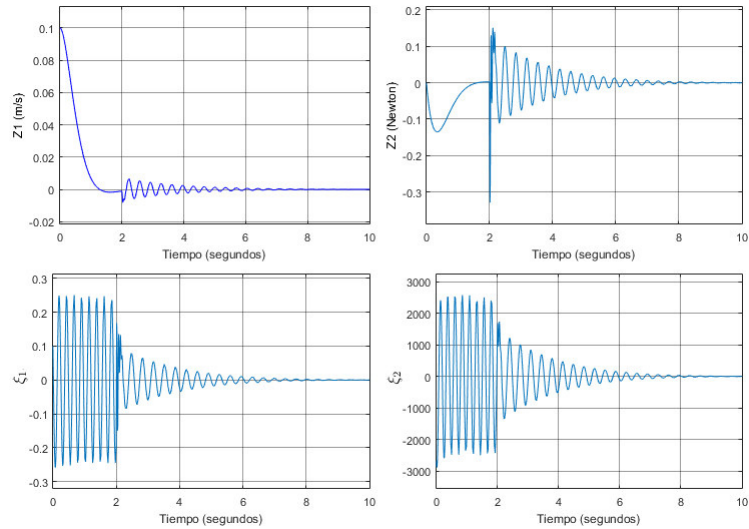


Figura 6.21: Sistema de SA Transformado

La figura 6.21 muestra el comportamiento del sistema transformado. En estas gráficas se puede notar que, tanto la parte lineal (z_1, z_2) como la parte no lineal (ξ_1, ξ_2) de este sistema tienden asintóticamente a cero, por lo que se comprueba que el sistema es estable.

Con el hecho de mejorar la respuesta en las deflexiones del sistema original, se puede decir que el algoritmo de control por retroalimentación de estados cumple el objetivo de mejorar la maniobrabilidad del vehículo y el confort de los pasajeros. Por otro lado, se observa que, limitar la entrada de control a un tiempo específico no afecta de forma significativa la efectividad del sistema.

6.4.4 BACKSTEPPING

Ahora, se presenta el caso donde el sistema de suspensión activa es controlado por medio del algoritmo de control Backstepping. Este algoritmo es muy eficaz para controlar sistemas no lineales en presencia de perturbaciones. El objetivo de este algoritmo, es regular el sistema de suspensión por medio de la variable de deflexión x_1 . Para ello, se propuso un método basado en el corolario 1 (apartado 2.3.3), el cual consta de un control virtual junto con una variable de error y el análisis de una función de Lyapunov, con los cuales se determinó la ley de control backstepping (4.29), donde $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 1.5$.

Hay que mencionar que este algoritmo se utilizó de forma parcial en el sistema, y se realizó un cambio de coordenadas en la parte del sistema restante, para comprobar su convergencia en tiempo finito. Toda esta información se encuentra detallada en el capítulo 4 de esta tesis.

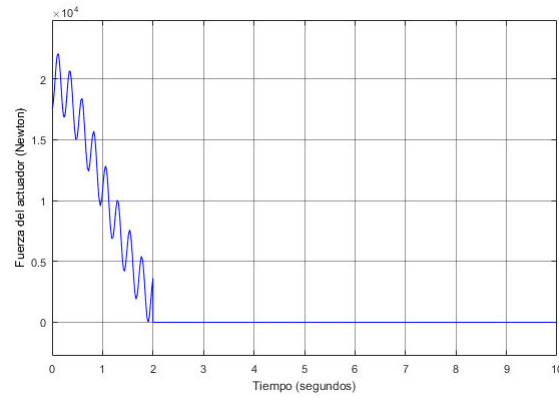


Figura 6.22: Entrada de control Backstepping para el sistema de SA

La figura 6.22 representa la fuerza suministrada por el actuador para regular el sistema de suspensión. De la misma forma que en los algoritmos anteriores, esta entrada de control también está limitada a un tiempo de 2 segundos.

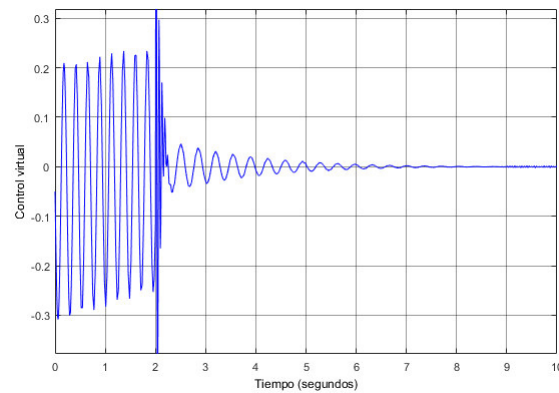


Figura 6.23: Control Virtual Backstepping para el sistema de SA

La figura 6.23 representa el control virtual definido en el algoritmo.

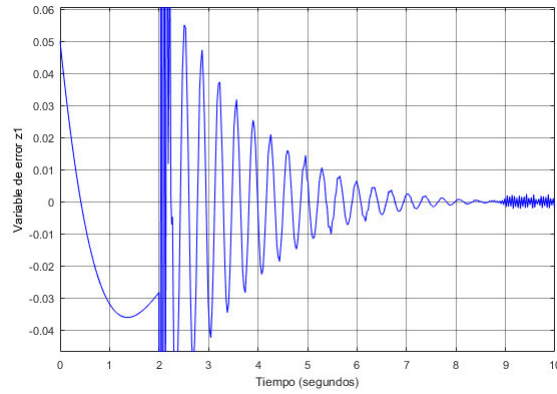


Figura 6.24: Variable de error Backstepping para el sistema SA

En la figura 6.24 se muestra el comportamiento de la variable de error, la cual tiende asintóticamente a cero gracias a la ley de control (4.29), por lo que se comprueba su efectividad.

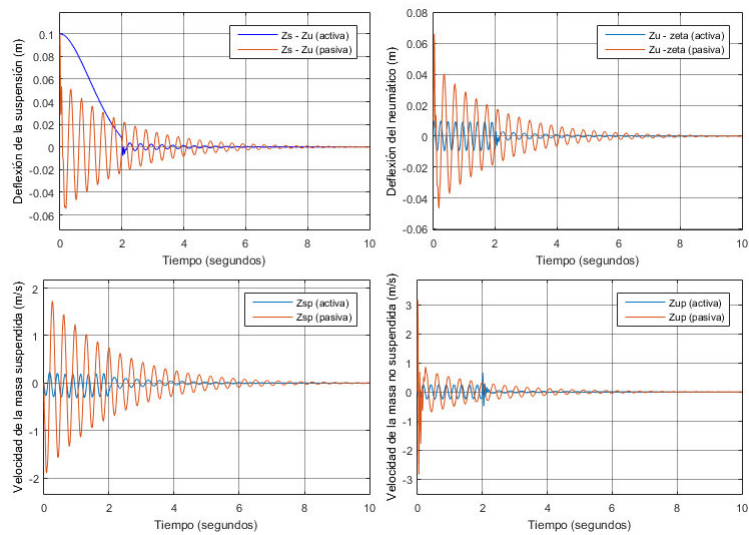


Figura 6.25: Comparación del sistema de SA original y Backstepping

La figura 6.25 ilustra la comparación de los distintos estados del sistema de suspensión en su forma activa (backstepping) y pasiva. En la gráfica correspondiente a la deflexión de la suspensión, se puede notar que el sistema de suspensión activa responde de forma mas lenta, pero es mejor en cuanto a la regulación del sistema. Cabe mencionar que, este comportamiento puede ser alterado por medio de la

sintonización de ganancias c_1 y c_2 del controlador.

Aunque el objetivo de control de este algoritmo sea regular únicamente la deflexión de la suspensión, este hecho influye en el comportamiento de todo el sistema, por lo que este algoritmo, califica como viable, para su implementación en un sistema físico, aparte de presentar la ventaja de no sufrir efectos de chattering.

6.5 RESULTADOS PARA EL SISTEMA DE DIRECCIÓN ASISTIDA ELECTRÓNICAMENTE

En esta sección, se exponen los resultados obtenidos para resolver el problema de control en el sistema de Dirección Asistida, a partir de los algoritmos de control desarrollados en el capítulo 5.

6.5.1 PARÁMETROS Y CONDICIONES DEL SISTEMA

Antes de abordar el tema de resultados, es necesario fijar los valores numéricos correspondientes a los parámetros y condiciones iniciales definidos en el sistema de Dirección Asistida. Estos valores son implementados en las simulaciones del sistema, para así, obtener las gráficas que describen el comportamiento del sistema y la acción de control de los algoritmos.

Parámetro	Descripción	Valor
J_s	Momento de inercia en la entrada del eje de dirección	$4.5 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$
B_s	Coefficiente de amortiguamiento en la entrada del eje de dirección	$7.2 \times 10^{-2} \text{ Nm/(rad/s)}$
K_s	Coefficiente de rigidez en la entrada el eje de dirección	115 Nm/rad
B_T	Coefficiente de amortiguamiento total en la salida del eje de dirección	3820 Nm/(rad/s)
M_T	Masa total en la salida del eje de dirección	32 kg
k_T	Constante de resorte total en la salida del eje de dirección	$56.13 \times 10^7 \text{ Nm}$
r_p	Radio del piñón	$7.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
J_m	Momento de inercia en el motor	$4.52 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
B_m	Coefficiente de amortiguamiento en el motor	$33.39 \times 10^4 \text{ Nm/(rad/s)}$
K_m	Coefficiente de rigidez en el motor	125 Nm/rad
k_a	Coefficiente de torque del motor	$4 \times 10^{-2} \text{ Nm/rad}$
G	Relación de engranaje del moto-reductor	16

Tabla 6.9: Parámetros del sistema de Dirección Asistida

Una vez identificados los valores numéricos de los parámetros, toca el turno de declarar las condiciones iniciales de los estados del sistema de Dirección Asistida.

Nota. Para el sistema de Dirección Asistida se realizaron dos tipos de simulaciones, la primera (correspondiente al algoritmo de control por retroalimentación de estados) es presentada de forma completa como un solo sistema de 6 estados, en la segunda (referente al algoritmo de control por modos deslizantes super-twisting) se dividió el sistema original en tres subsistemas enlazados entre si. Por otro lado, la variable F_δ que representa una señal aleatoria de la superficie de la carretera fue

Variable Modelo	Nombre	Valor inicial
$x_1 (\theta_s)$	Posición angular en la entrada del eje de dirección	$2\pi/180 \text{ rad}$
$x_2 (\dot{\theta}_s)$	Posición angular en la entrada del eje de dirección	$2\pi/180 \text{ rad/s}$
$x_3 (x_r)$	Desplazamiento de la cremallera	$1.73 \times 10^{-3} \text{ m}$
$x_4 (\dot{x}_r)$	Desplazamiento de la cremallera	$1 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
$x_5 (\theta_m)$	Posición angular en el eje del motor	2 rad
$x_6 (\dot{\theta}_m)$	Posición angular en el eje del motor	1 rad/s

Tabla 6.10: Condiciones iniciales para el sistema de Dirección Asistida

simulada por medio de un bloque de numero aleatorio (Random).

Recordando lo planteado en el capítulo 5, el objetivo principal de este sistema consiste en obligar a la trayectoria de un vehículo a seguir una trayectoria propuesta. Esta acción se realiza por medio del control del ángulo de entrada en el eje de dirección θ_s , así como del control del ángulo en la salida del eje de dirección θ_r . En este caso de estudio se pretende seguir una trayectoria de referencia θ_{ref} senoidal de 20 grados, y un ángulo de referencia $\theta_{ref} = 5^\circ$.

Nota. Se tomo como referencia un ángulo $\theta_{ref} = 5^\circ$ para la entrada en el eje de dirección (volante), esto con la finalidad de simular que el conductor realiza una acción de movimiento mínima para el control del vehículo. En otras palabras, puede interpretarse como un reflejo del conductor para evadir algún obstáculo.

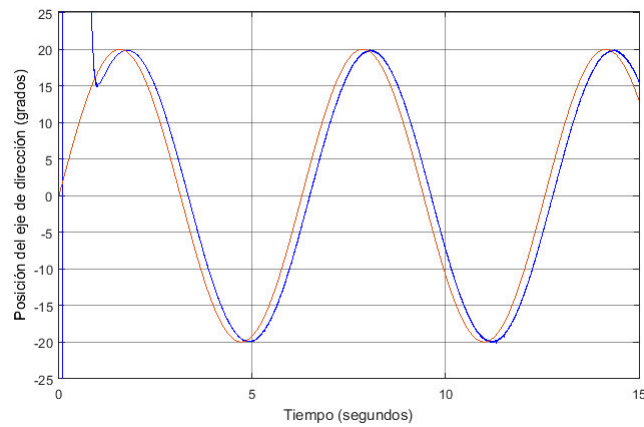
6.5.2 CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS CON LA FORMA CANÓNICA DE BRUNOVSKY

El algoritmo de retroalimentación de estados o también llamado asignación de polos es un tipo de control aplicado comúnmente a sistemas de control lineales. Como se expuso en el capítulo 5, este algoritmo se basa en la ubicación de polos del

sistema en lazo cerrado, de tal manera que se logre la regulación del sistema. Esto se realiza por medio de la igualación de polinomios característico y de referencia, donde los polos de referencia son diseñados de acuerdo a los requerimientos del sistema. Cuando el sistema de control presenta mas de una entrada, y además tiene un basto número de estados, el cálculo del polinomio característico se vuelve muy complicado. Uno de los métodos para simplificar el cálculo del polinomio característico de un sistema MIMO es el método de transformación del sistema en la forma canónica de Brunovsky. Este método separa el sistema original en m subsistemas (siendo m el número de entradas), donde la multiplicación de polos de los m subsistemas es igual al polinomio característico del sistema original. Por otro lado, para lograr el objetivo de control propuesto en el capítulo 5, se utilizó la técnica del servoposicionador, donde por medio de una modificación en el arreglo del sistema, se calcularon los nuevos valores de ganancias K y K_0 necesarias para cumplir el control de posición de las variables θ_s y x_r . (Recordar que $K = k_{bn} + \tilde{k}$) En la tabla (6.11) se presentan los valores de las ganancias utilizadas en este algoritmo.

Ganancia	valor calculado	Ganancia	valor calculado
$k_{bn(1,1)}$	$-152817/61$	$k_{bn(1,2)}$	$-29/51$
$k_{bn(1,3)}$	2.61×10^{12}	$k_{bn(1,4)}$	0
$k_{bn(1,5)}$	0	$k_{bn(1,6)}$	0
$k_{bn(2,1)}$	$9552/61$	$k_{bn(2,2)}$	$269/74379$
$k_{bn(2,3)}$	-3.05×10^{11}	$k_{bn(2,4)}$	-1.62×10^8
$k_{bn(2,5)}$	-1.78×10^7	$k_{bn(2,6)}$	$-8651/185$
$\tilde{k}_{(1,1)}$	$39999/4$	$\tilde{k}_{(1,2)}$	1×10^4
$\tilde{k}_{(1,3)}$	0	$\tilde{k}_{(1,4)}$	0
$\tilde{k}_{(1,5)}$	0	$\tilde{k}_{(1,6)}$	0
$\tilde{k}_{(2,1)}$	0	$\tilde{k}_{(2,2)}$	0
$\tilde{k}_{(2,3)}$	2.56×10^{11}	$\tilde{k}_{(2,4)}$	1.91×10^{10}
$\tilde{k}_{(2,5)}$	6.4×10^8	$\tilde{k}_{(2,6)}$	8×10^6
$k_{0(1,1)}$	$459/4$	$k_{0(1,2)}$	0
$k_{0(2,1)}$	$-169/2601$	$k_{0(2,2)}$	$216613/3$

Tabla 6.11: Valores de ganancias del control por retro de estados, sistema EPS

Figura 6.26: Objetivo de control θ_r aplicando la retro de estados

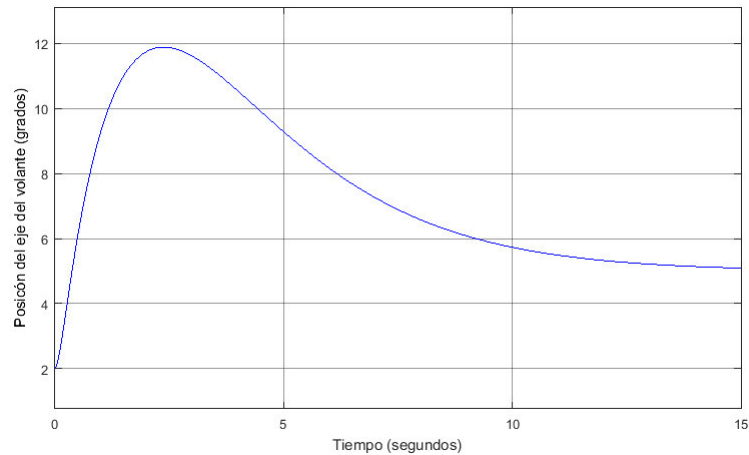


Figura 6.27: objetivo de control θ_s aplicando la retro de estados

Las figuras 6.26 y 6.27 representa la respuesta a la salida del sistema. La figura 6.26 corresponde a la trayectoria del eje de salida θ_r . En la gráfica se observa que el objetivo de control se logra cumplir de forma satisfactoria, aunque existe un pequeño error de seguimiento. Por otro lado, la figura 6.27 representa la posición angular en la entrada del eje de dirección (volante) θ_s . En este caso la gráfica llega a estabilizarse en el valor de 5° , por lo que el objetivo de control es alcanzado.

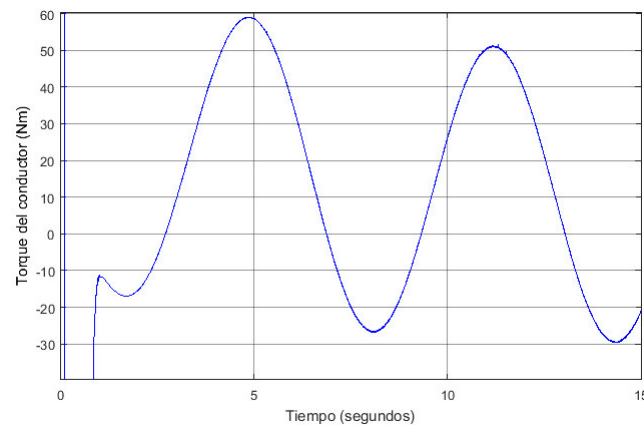


Figura 6.28: Entrada de control U_1 para el sistema EPS por retro de estados

La figura 6.28 corresponde al par o torque ejercido por el conductor. Así mismo, la figura 6.29 corresponde al torque suministrado por el motor de asistencia.

Estas entradas fueron utilizadas en el algoritmo de asignación de polos con servoposicionador para alcanzar los objetivos de control. Cabe mencionar que la entrada T_d tiene mayor influencia en la respuesta de θ_s , mientras que la entrada T_m causa mayor efecto en la respuesta de θ_r , esto debido a la estructura del sistema.

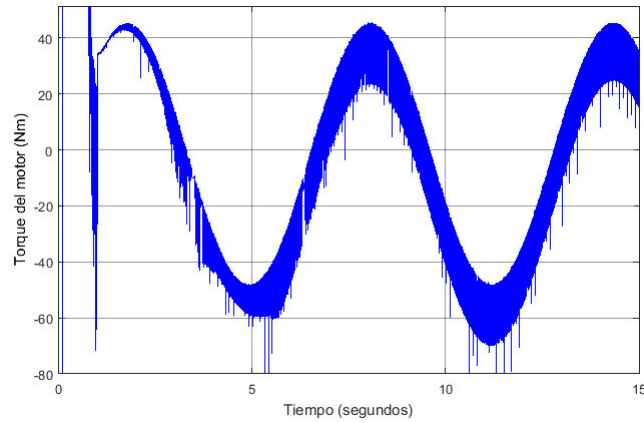


Figura 6.29: Entrada de control U_2 para el sistema EPS por retro de estados

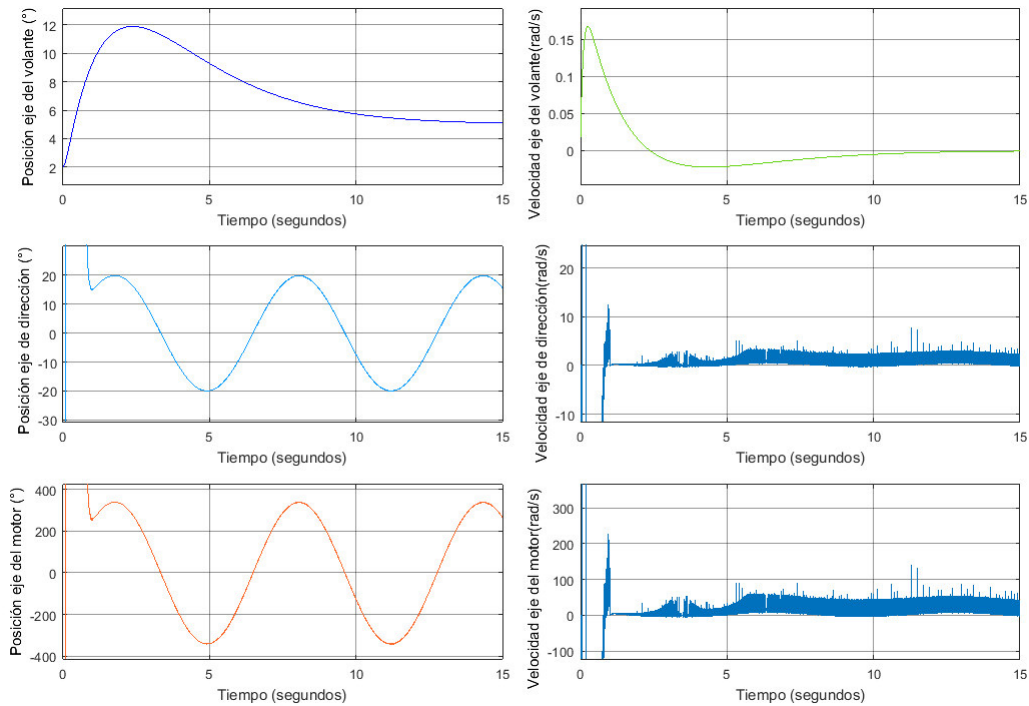


Figura 6.30: Comportamiento del sistema EPS aplicando la retro de estados

La figura 6.30 ilustra las gráficas que comprenden a los distintos estados del

sistema de dirección asistida. En esta gráfica se observa el comportamiento de los estados a través del tiempo. Se debe tomar en cuenta que, para aplicar un control de retroalimentación efectivo, será necesario hacer un análisis minucioso de estabilidad, así como de respuesta en el tiempo del sistema.

Cabe aclarar que, debido a que el par o torque ejercido por el conductor T_d es considerado como una entrada de control, este demanda demasiada energía (en este caso un valor de par o torque muy elevado) para ser aplicado por un ser humano. A pesar de eso, el análisis presentado en esta tesis, puede servir de referencia para la investigación en vehículos tele-operados. En cuanto a la entrada ejercida por el motor de asistencia T_m , es necesario un valor de par o torque factible, para un motor DC de pequeño tamaño.

6.5.3 CONTROL POR MEDIO DEL ALGORITMO SUPER-TWISTING

Para aplicar el algoritmo de super-twisting al sistema de dirección asistida, fue necesario dividir el sistema (5.6) en 3 subsistemas representados por (5.23), (5.24) y (5.25). Además, se definieron superficies deslizantes de grado relativo 1 para cada uno de estos subsistemas (para mas detalles consultar el capitulo 5 seccion 5.6.3). De este modo, para el subsistema (5.23) con superficie deslizante $\vartheta_1 = \dot{e}_{x_1} + \varepsilon_1 e_{x_1}$, se definieron las ganancias $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ y la constante $\varepsilon_1 = 1$. Así mismo, para el subsistema (5.24) con superficie deslizante $\vartheta_2 = \dot{e}_{x_3} + \varepsilon_2 e_{x_3}$, se definieron las ganancias $k_3 = 2500$, $k_4 = 20$ y la constante $\varepsilon_2 = 14.8$. Mientras que, para el subsistema (5.25) con superficie deslizante $\vartheta_3 = \dot{e}_{x_5} + \varepsilon_3 e_{x_5}$, se definieron las ganancias $k_5 = 80$, $k_6 = 180$ y la constante $\varepsilon_3 = 220$. Cabe resaltar que los valores de ganancias y constantes fueron calculados de forma empírica.

Aplicando la ley de control (5.30) para el subsistema (5.23), la ley de control (5.35) para el subsistema (5.24) y la ley de control (5.40) para el subsistema (5.25) se obtuvieron los siguientes resultados.

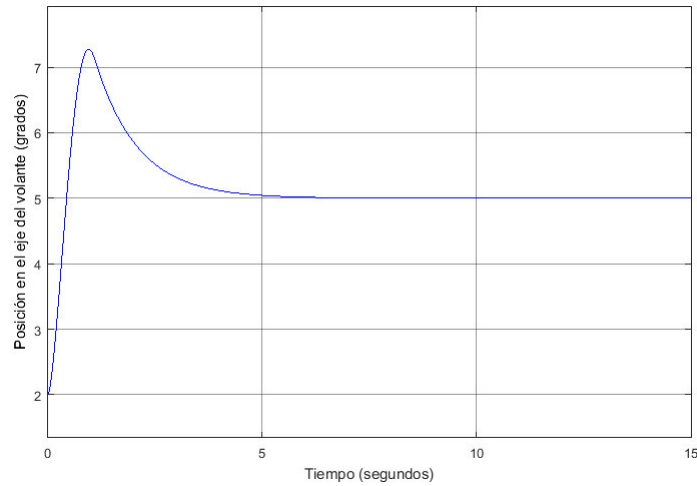


Figura 6.31: Objetivo de control θ_s aplicando el algoritmo Super-twisting

La figura 6.31 representa la respuesta a la salida y_1 del sistema, la cual corresponde a la posición en el eje del volante θ_s . En la gráfica se observa que el objetivo de control es alcanzado.

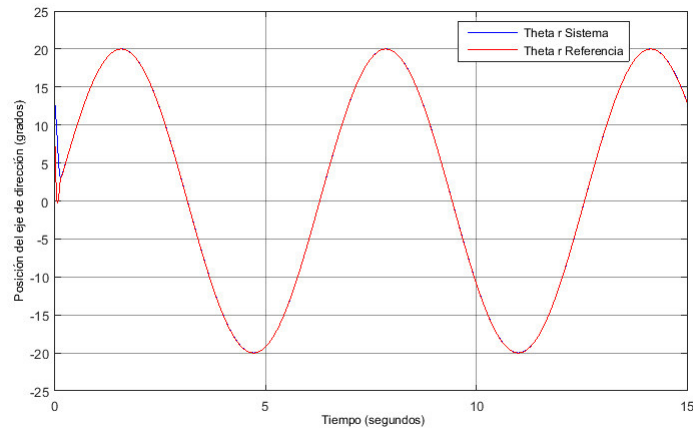


Figura 6.32: Objetivo de control θ_r aplicando el algoritmo Super-twisting

La figura 6.32 representa la respuesta a la salida y_2 del sistema, la cual corresponde a la trayectoria del eje de salida θ_r . En la gráfica se observa que el objetivo de control se logra cumplir de forma satisfactoria y el error de salida es nulo.

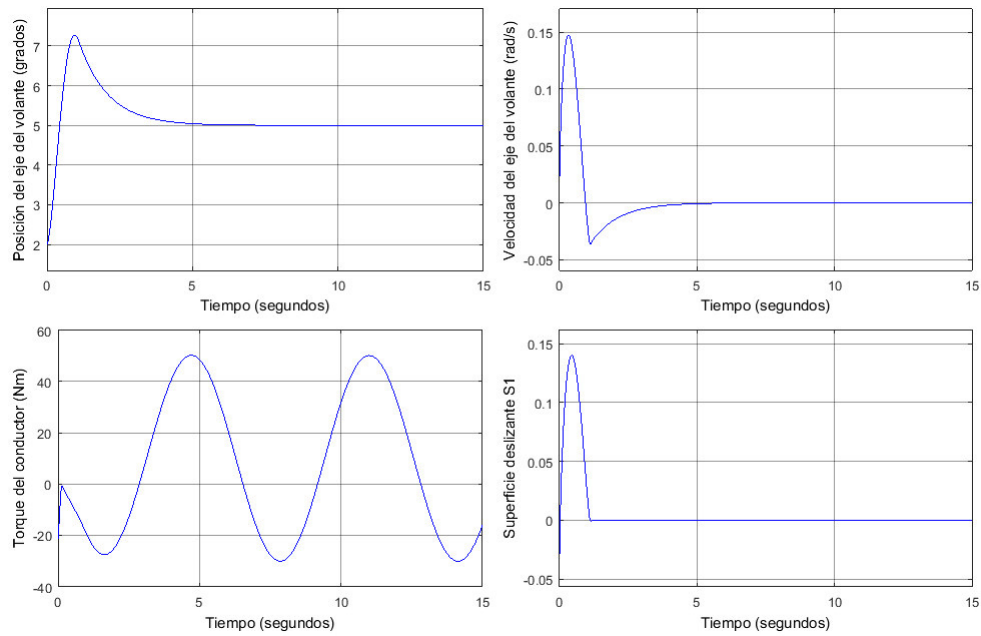


Figura 6.33: Subsistema 1 del sistema EPS controlado por Super-twisting

La figura 6.33 representa al subsistema 1, compuesto por las variables x_1 y x_2 que corresponden al ángulo de dirección del volante y su velocidad angular. En la gráfica inferior izquierda se muestra el par o torque empleado por el conductor T_d , para lograr el objetivo de llevar la variable x_1 a una referencia de 5 grados.

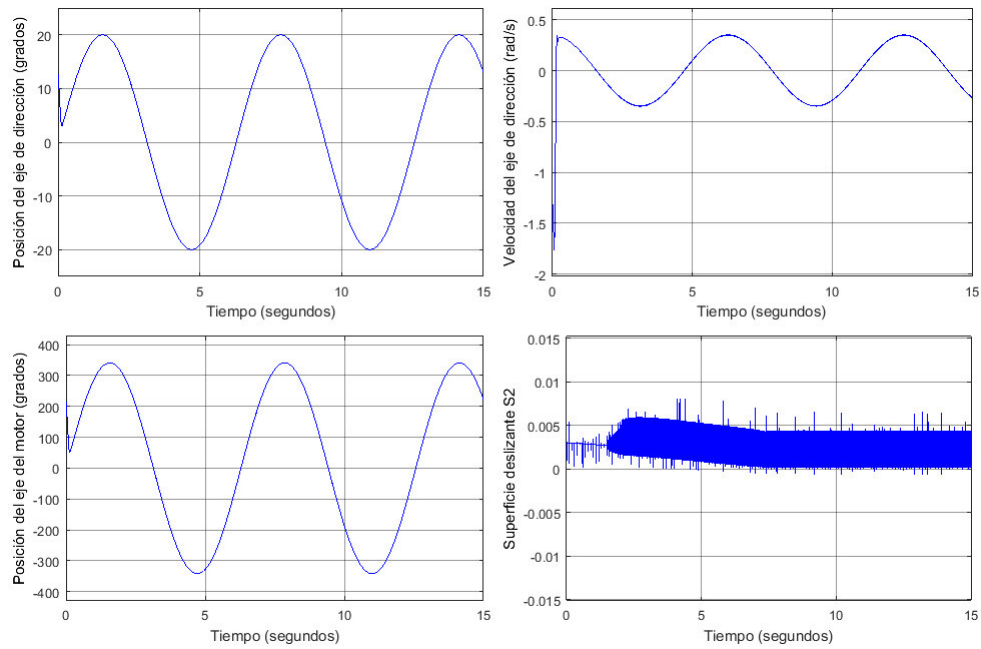


Figura 6.34: Subsistema 2 del sistema EPS controlado por Super-twisting

En la figura 6.34 se presenta el subsistema 2, correspondiente a la dirección del vehículo e incluye las variables x_3 y x_4 que muestran la trayectoria que toma el vehículo, la velocidad en la salida del eje de dirección, así como el ángulo de giro del motor necesario para lograr el objetivo de control. Cabe mencionar que la gráfica inferior derecha, correspondiente a la superficie deslizante S_2 , muestra un comportamiento oscilatorio y de amplitud muy pequeña.

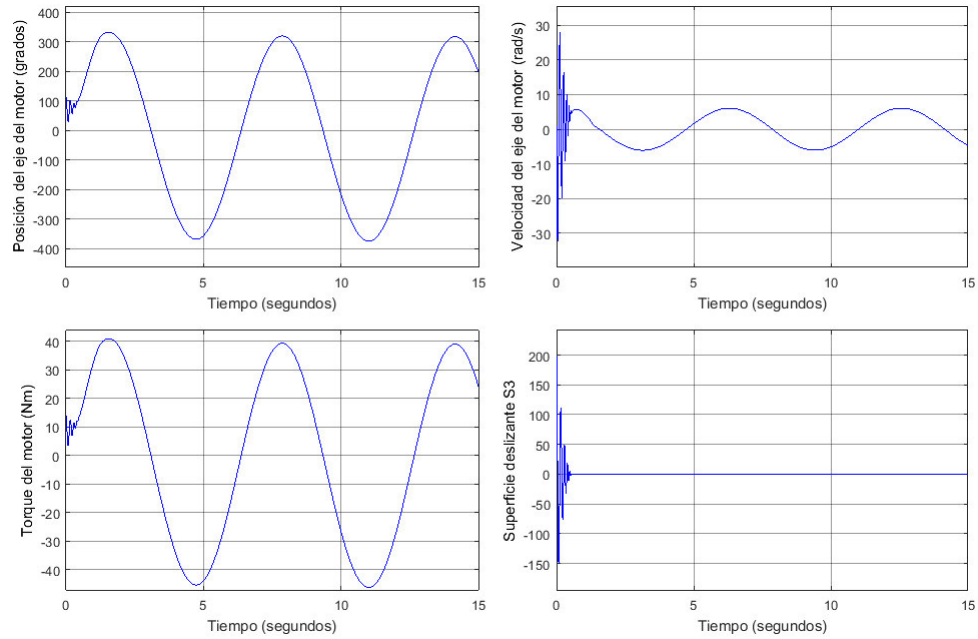


Figura 6.35: Subsistema 3 del sistema EPS controlado por Super-twisting

La figura 6.35 hace referencia a las variables del sistema de dirección asistida x_5 y x_6 , las cuales conforman el sistema 3. Así mismo, se presenta la entrada de par o torque usado por el motor de asistencia T_m y el comportamiento de la superficie deslizante S_3 .

De manera similar al caso anterior, el hecho de incluir el par o torque ejercido por el conductor T_d como una entrada de control, afecta significativamente a la respuesta del sistema. Así mismo, implica emplear un par o torque excesivo para la fisiología de un ser humano. El hecho de aplicar al sistema un torque de entre 40-50 Nm , entra en el rango de operación para un motor DC de dimensiones pequeñas.

6.6 CRITERIO DE EVALUACIÓN

Para realizar la comparación de algoritmos y determinar la energía utilizada por estos, se estableció un criterio de evaluación, el cual esta enfocado en el índice de desempeño.

El índice de desempeño se define como un valor que funge como parámetro de evaluación, el cual evalúa la calidad de la respuesta de un sistema ante una entrada de control. Así la optimización de la respuesta y características de un sistema de control dependerá de mejorar el índice de comportamiento. Para que un criterio de desempeño sea útil, debe ser fácilmente computable, es decir, su optimización debe ser factible tanto experimental como analíticamente; debe ser selectivo, ya que debe proporcionar valores exactos que indiquen la optimización real del sistema y debe estar en función de los parámetros del sistema de control.

Considerando el control de los sistemas de seguridad de un vehículo. Sea u_i la i -ésima entrada necesaria para lograr el objetivo de control del sistemas y considerando que la magnitud de tal entrada al cuadrado $|u_i|^2$ es proporcional a la razón de gasto de energía. Para minimizar el gasto de energía en los sistemas presentados en este trabajo, se plantea el siguiente índice de desempeño:

$$J = \int_0^t \sum_{i=1}^m |u_i|^2 dt. \quad (6.1)$$

A continuación, en manera de tablas comparativas, se muestran los resultados para el índice de desempeño referente a cada sistema de seguridad.

Sistema de frenos ABS		
Algoritmo de control	Energía (criterio de evaluación)	Tiempo de respuesta
PID	$T_b = 43.19$	2.5 segundos
Modos deslizantes de 1er orden	$T_b = 37.76$	3 segundos
Modos deslizantes super-twisting	$T_b = 12.35$	2.55 segundos

Tabla 6.12: Comparativa de algoritmos de control para el sistema de frenos ABS

La tabla 6.12 corresponde a la comparativa del consumo de energía, entre los distintos algoritmos de control, empleados en el sistema de frenos ABS.

En la tabla 6.13 se presentan los valores de consumo, para los algoritmos de

Sistema de Suspensión Activa		
Algoritmo de control	Energía (criterio de evaluación)	Tiempo de aplicación
Modos deslizantes super-twisting	$F_a = 5.0772 \times 10^6$	2 segundos
Linealización por retro de estados	$F_a = 1.4 \times 10^8$	2 segundos
Backstepping	$F_a = 3.3 \times 10^8$	2 segundos

Tabla 6.13: Comparativa de algoritmos de control para el sistema de SA

control, utilizados en el sistema de suspensión activa.

Sistema de Dirección Asistida		
Algoritmo de control	Energía (criterio de evaluación)	Tiempo de respuesta
Asignación de polos	$T_d = 1.374 \times 10^4$ $T_m = 2.081 \times 10^4$	15 segundos
Modos deslizantes super-twisting	$T_d = 1.2374 \times 10^4$ $T_m = 1.378 \times 10^4$	15 segundos

Tabla 6.14: Comparativa de algoritmos de control para el sistema EPS

La tabla 6.14 muestra los valores obtenidos para el consumo de energético empleado en los algoritmos de control aplicados al sistema de dirección asistida.

6.7 CONCLUSIONES

Para finalizar, se presentan las conclusiones de cada sistema de seguridad por separado.

6.7.1 CONCLUSIONES PARA EL SISTEMA DE FRENOS ABS

Realizando la comparativa de los 3 algoritmos presentados anteriormente para el sistema de frenos ABS, se concluyó que el algoritmo de modos deslizantes super-twisting es el algoritmo más eficiente para cumplir el objetivo de control con la menor

energía posible. Aunque este algoritmo tarda mas tiempo en obligar al deslizamiento a seguir el valor de referencia, el comportamiento del sistema no se ve afectado. Se pudiera optar por utilizar el algoritmo de PID, ya que responde de manera mas rápida en cuanto a cumplir el objetivo y frenar el vehículo. Sin embargo, si se trata de optimizar el sistema, el algoritmo PID no es la mejor opción ya que es el que utiliza mas energía.

6.7.2 CONCLUSIONES PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN ACTIVA

Analizando los resultados de los algoritmos empleados en el sistema de suspensión activa, se llego a la conclusión de que el algoritmo de modos deslizantes super-twisting se lleva la ventaja ampliamente, esto en cuanto a respuesta del sistema, consumo de energía y cumplimiento del objetivo de control, por lo que se decide que es la mejor opción de optimizacion.

6.7.3 CONCLUSIONES PARA EL SISTEMA DE DIRECCIÓN ASISTIDA

Por último, para los algoritmos de control utilizados en el sistema de dirección asistida, los métodos y suposiciones planteadas fueron eficientes para lograr el objetivo de control. En el caso del algoritmo de asignación de polos, éste presentó un error de seguimiento mayor a comparación del algoritmo super-twisting, ya que la salida θ_r muestra una notable diferencia en cuanto a la referencia. Así mismo, aunque con alguna dificultad, las ganancias del servoposicionador lograron seguir la trayectoria de referencia (volante) θ_s a los 15 segundos. Cabe aclarar que, para mejorar la respuesta del sistema este algoritmo debe configurarse proponiendo un polinomio característico que vuelva la respuesta del sistema mas rápida y calculando otras ganancias para el servoposicionador. Por otro lado, para el caso del algoritmo super-twisting aplicado en los subsistemas, éste deberá ser implementado físicamente para verificar si es una

configuración factible del sistema de dirección y no es afectado por otros factores del modelo. Sin embargo, para fines analíticos, el algoritmo super-twisting fue superior en todos los aspectos, en comparación con el algoritmo de asignación de polos, por lo que se concluye que el algoritmo Super-twisting, es la opción mas adecuada para controlar el sistema de Dirección Asistida Electrónicamente.

6.8 TRABAJOS FUTUROS

A lo largo del desarrollo de esta tesis, han surgido diversas cuestiones e incógnitas, las cuales implican abordar líneas de investigación que quedaron sin explorar. Como futuro seguimiento a esta tesis, se han propuesto los siguientes aspectos:

- Emplear el uso de observadores en aquellos sistemas cuya naturaleza es dependiente de los mismos.
- Implementar los modelos de forma física, con el fin de obtener resultados mas acertados.
- Realizar el estudio de optimización, interconectando los sistemas de seguridad activa en conjunto como un sistema único.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Sergey Drakunov, Umit Ozguner, Peter Dix, and Behrouz Ashrafi. Abs control using optimum search via sliding modes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1):79–85, 1995.
- [2] Taehyun Shim, Sehyun Chang, and Seok Lee. Investigation of sliding-surface design on the performance of sliding mode controller in antilock braking systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 57(2):747–759, 2008.
- [3] Gang Liu, Hongbin Ren, Sizhong Chen, and Wenzhu Wang. The 3-dof bicycle model with the simplified piecewise linear tire model. In *Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer (MEC), Proceedings 2013 International Conference on*, pages 3530–3534. IEEE, 2013.
- [4] Yesim Oniz, Erdal Kayacan, and Okyay Kaynak. Simulated and experimental study of antilock braking system using grey sliding mode control. In *2007 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 90–95. IEEE, 2007.
- [5] Nilanjan Patra and Kalyankumar Datta. Sliding mode controller for wheel-slip control of anti-lock braking system. In *Advanced Communication Control and Computing Technologies (ICACCCT), 2012 IEEE International Conference on*, pages 385–391. IEEE, 2012.

-
- [6] Xu Ping and Zheng Yan. Sliding mode control with improved exponential reaching law for antilock braking system. In *2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 2191–2194. IEEE, 2012.
- [7] Wei-En Ting and Jung-Shan Lin. Nonlinear backstepping design of anti-lock braking systems with assistance of active suspensions. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1):97–102, 2005.
- [8] Houhua Jing, Zhiyuan Liu, and Hong Chen. A switched control strategy for antilock braking system with on/off valves. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(4):1470–1484, 2011.
- [9] C Burgara-Motero, J Anzures-Marín, and F Ornelas-Tellez. Super-twisting control algorithm for an antilock braking system. In *Power, Electronics and Computing (ROPEC), 2013 IEEE International Autumn Meeting on*, pages 1–6. IEEE, 2013.
- [10] Inteco User’s Manual. The laboratory antilock braking system controlled from pc. *Inteco Ltd*, pages 27–36, 2006.
- [11] Yuri B Shtessel, Jaime A Moreno, Franck Plestan, Leonid M Fridman, and Alexander S Poznyak. Super-twisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design. In *CDC*, pages 5109–5113, 2010.
- [12] Rajesh Rajamani. *Vehicle dynamics and control*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [13] Jorge Hurel Ezeta, Anthony Mandow, and Alfonso García Cerezo. Los sistemas de suspensión activa y semiactiva: una revisión. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 10(2):121–132, 2013.
- [14] JJ Rath, Suneel K Kommuri, Kalyana C Veluvolu, M Defoort, and S Tatinati. An adaptive modified super-twisting sliding mode controller: Applied to the active suspension system. In *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2015 15th International Conference on*, pages 544–549. IEEE, 2015.

-
- [15] Andrew Alleyne and J Karl Hedrick. Nonlinear adaptive control of active suspensions. *IEEE transactions on control systems technology*, 3(1):94–101, 1995.
- [16] Supavut Chantranuwathana and Huei Peng. Adaptive robust force control for vehicle active suspensions. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 18(2):83–102, 2004.
- [17] AH Shirdel, E Gatavi, and Z Hashemiyani. Comparison of h-8 and optimized-lqr controller in active suspension system. In *2010 Second International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation*, pages 241–246. IEEE, 2010.
- [18] Gong-yu Pan and Xue-ling Hao. Research on modeling and simulation of active seat suspension system based on lqg control. In *Remote Sensing, Environment and Transportation Engineering (RSETE), 2011 International Conference on*, pages 656–659. IEEE, 2011.
- [19] Levent Uzun, Ibrahim B Küçükdemiral, Akın Delibaşı, and Galip Cansever. Lpv control active suspension system. In *Mechatronics (ICM), 2011 IEEE International Conference on*, pages 116–121. IEEE, 2011.
- [20] Dong-Ji Xuan, Jin-Wan Kim, Joung-Il Zang, and Young-Bae Kim. A study on active suspension system using time delay control. In *Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS'07. International Conference on*, pages 388–393. IEEE, 2007.
- [21] Amat Amir Basari, Yahaya Md Sam, and Norhazimi Hamzah. Nonlinear active suspension system with backstepping control strategy. In *2007 2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, pages 554–558. IEEE, 2007.
- [22] Tinnavelli Ramamohan Rao and Punjala Anusha. Active suspension system of a 3 dof quarter car using fuzzy logic control for ride comfort. In *Control, Automa-*

- tion, Robotics and Embedded Systems (CARE), 2013 International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2013.
- [23] Chun-Hua Hu and Ren He. Polygonal curves of assistant torque characteristic design for electric power steering system. In *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*, pages 5505–5508. IEEE, 2011.
- [24] Feng Nenglian, Peng Jiankun, Zhang Xiaolong, Yong Jiawang, and Tang Yanrong. Research on electric power steering system simulation based on 3-dof vehicle model. In *Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE), 2011 International Conference on*, pages 821–824. IEEE, 2011.
- [25] MK Hassan, N Aziah, HM I Nizam, A GA Mutalib, SF Toha, and BSK K Ibrahim. A comparative study of power consumption of electric power steering system. In *Power and Energy (PECon), 2012 IEEE International Conference on*, pages 178–182. IEEE, 2012.
- [26] Chun-hua Hu. Modeling and simulation of automotive electric power steering system. In *Intelligent Information Technology Application, 2008. IITA'08. Second International Symposium on*, volume 3, pages 436–439. IEEE, 2008.
- [27] Lv Wei, Guo Kong-hui, and Zhang Jian-wei. Research on current control algorithm of electric power steering. In *Information Engineering (ICIE), 2010 WASE International Conference on*, volume 3, pages 438–442. IEEE, 2010.
- [28] Hui Zhang, Yuzhi Zhang, Jinhong Liu, Jing Ren, and Yongjun Gao. Modeling and characteristic curves of electric power steering system. In *2009 International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS)*, pages 1390–1393. IEEE, 2009.
- [29] Huaiquan Zang and Shuanyong Chen. Electric power steering simulation analyze based on fuzzy pid current tracking control. *Journal of Computational Information Systems*, 7(1):119–126, 2011.

-
- [30] A Marouf, M Djemai, C Sentouh, and P Pudlo. Sensorless control of electric power assisted steering system. In *Control & Automation (MED), 2012 20th Mediterranean Conference on*, pages 909–914. IEEE, 2012.
- [31] Jeongjun Lee, Hyeongcheol Lee, Jihwan Kim, and Jiyoel Jeong. Model-based fault detection and isolation for electric power steering system. In *Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS'07. International Conference on*, pages 2369–2374. IEEE, 2007.
- [32] Riccardo Marino and Patrizio Tomei. *Nonlinear control design: geometric, adaptive and robust*. Prentice Hall International (UK) Ltd., 1996.
- [33] Miroslav Krstic, Ioannis Kanellakopoulos, and Peter V Kokotovic. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley, 1995.

Anexos

A. DERIVADA DE LIE

En este anexo se presenta la definición de la derivada de Lie, según el libro [32].

Derivada de Lie.

Sea p un punto en E^n espacio Euclidiano n -dimensional, y U una vecindad de p . Si f es un campo vectorial suave sobre U y h es una función suave sobre U , entonces $f(h)$ es la función suave sobre U definida por

$$f(h)(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) (p) \quad (2)$$

Un campo vectorial puede ser interpretado como un operador que mapea la función h dentro de la función $f(h)$. La función $f(h)$ es llamada la derivada de Lie de la función h a lo largo del campo vectorial f ; esto es usualmente denotado como $L_f h$.

Las derivadas de Lie repetidas a lo largo del mismo campo vectorial f son denotadas como

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h), \quad L_f^1 h = L_f h, \quad L_f^0 h = h \quad (3)$$

La derivada de Lie $L_f h$ de una función suave h a lo largo de un campo vectorial f es también denotado por $\langle dh, f \rangle$.

Dados dos campos vectoriales suaves f y g , se define el paréntesis de Lie como

el único campo vectorial que cumple

$$[f, g](h) = f(g(h)) - g(f(h)) = L_f L_g h - L_g L_f h \quad (4)$$

El paréntesis de Lie $[f, g]$ de dos campos vectoriales f y g es también denotado por $ad_f g$ o por $L_f g$. Los paréntesis de Lie repetidos son denotados como

$$ad_f^i g = ad_f(ad_f^{i-1} g), \quad ad_f^1 g = ad_f g, \quad ad_f^0 g = g. \quad (5)$$

B. GRADO RELATIVO

A continuación se presenta la definición de grado relativo, esta definición fue extraída de [32].

El grado relativo o índice característico de controlabilidad esta definido como

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad \forall x \in u_0, \quad 0 \leq i \leq \rho - 2 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &= 0, \quad \forall x \in u_0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde u_0 es una vecindad del origen. Si

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad \forall x \in u_0, \quad \forall i \geq 0 \quad (7)$$

entonces se dice que $\rho = \infty$.

Nota. El estado alrededor del cual se define el grado relativo es tomado sin pérdida de generalidad para ser el origen; este puede ser cualquier estado $x_e \in \mathbb{R}^n$.

En otras palabras, el grado relativo ρ es igual al ultimo orden de la derivada temporal con respecto a la salida, que aparece directamente afectada por la entrada u , esto es

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i} \quad (8)$$

considerando

$$y^{(1)} = \langle dh, \dot{x} \rangle = L_f h + u L_g h \quad (9)$$

Si $\rho = 1$, puesto que por definición $L_g h \neq 0$ en u_0 , entonces $y^{(1)}$ es directamente afectada por la entrada u a lo largo de $x \in u_0$. Cuando $1 < \rho \leq n$, en virtud de la

definición de ρ , esto se calcula como

$$\begin{aligned}y^{(i)} &= L_f^i h, \quad 0 \leq i \leq \rho - 1 \\y^{(\rho)} &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h\end{aligned}\tag{10}$$

Por lo tanto, $y^{(\rho)}$ es la derivada temporal de menor orden la cual es directamente afectada por la entrada u a lo largo de $x \in u_0$. Si $\rho = \infty$, las derivadas temporales de y y de cualquier orden no son afectadas por la entrada u siempre que $x \in u_0$.

C. TEOREMA LASALLE-YOSHIZAWA Y TEOREMA LASALLE

En este apartado se presenta el teorema LaSalle-Yoshizawa, así como el teorema Lasalle, los cuales fueron extraídos de [33] y se utilizaron en la definición del concepto backstepping presentado en el capítulo 2 de esta tesis.

TEOREMA LASALLE-YOSHIZAWA.

Considere el sistema variante en el tiempo

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{11}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a trozos en t y localmente Lipschitz en x .

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (11) y se supone que f es localmente Lipschitz en x uniformemente en t . Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave definida positiva y radialmente no acotada $V(x)$ tal que,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) [f(x) + g(x)\alpha(x)] \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

donde W es una función continua. Entonces, todas las soluciones de (11) son globalmente uniformemente acotadas y satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0. \tag{13}$$

Además, si $W(x)$ es definida positiva, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente uniformemente asintóticamente estable (GUAS).

Para el problema de regulación, donde el diseño del sistema es usualmente invariante

$$\dot{x} = f(x) \tag{14}$$

se utilizarán conjuntos invariantes. Un conjunto M es llamado invariante, si cualquier solución $x(t)$ que pertenece a M en algún instante de tiempo t_1 debe pertenecer a M para todo el tiempo pasado y futuro, esto es:

$$x(t_1) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Un conjunto Ω es positivamente invariante si este está definido solo, para todo tiempo futuro:

$$x(t_1) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \quad \forall t \geq t_1. \tag{16}$$

TEOREMA LASALLE

Sea Ω un conjunto positivamente invariante de (14). Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable $V(x)$ tal que, $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega$. Sea $E = \{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}$, y M el conjunto invariante más largo contenido en E . Entonces, toda solución acotada $x(t)$ que empieza en Ω converge a M cuando $t \rightarrow \infty$.

D. ALGORITMO DE ASIGNACIÓN DE POLOS PARA EL SISTEMA EPS (DESARROLLO)

En este apartado se presenta el desarrollo del algoritmo de asignación de polos por medio de la forma canónica de brunovsky en combinación de un servoposicionador.

La matriz A (5.8) está representada numéricamente como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22549/9 & -80/51 & 321211 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8754/19 & 0 & -17541835 & -955/8 & 88141/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 567279328 & 0 & -829646/3 & -3339/452 \end{bmatrix} \quad (17)$$

La matriz B (5.9) está representada numéricamente como

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10000/459 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 39823/18 \end{bmatrix} \quad (18)$$

La matriz C está representada numéricamente como

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

La matriz Co_1 (20) representa las primeras 6 columnas de la matriz de controlabilidad del sistema de dirección asistida, mientras que la matriz Co_2 (21) representa las 6 columnas restantes de la matriz de controlabilidad (5.11 del sistema de dirección asistida).

$$Co_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10000/459 & -7621/223 & -163594/3 & 513488/3 & 3.36 \times 10^9 \\ 10000/459 & -7621/223 & -163594/3 & 513488/3 & 3360624683 & -3.95 \times 10^{10} \\ 0 & 0 & 0 & 130492/13 & -1214014 & 1.06 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 130492/13 & -1214014 & 1.06 \times 10^8 & -1.1 \times 10^{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.7 \times 10^{12} & -7.3 \times 10^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$Co_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.7 \times 10^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.7 \times 10^{12} & -7.3 \times 10^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 17727479 & -2247173675 & -4.65 \times 10^{12} \\ 0 & 0 & 17727479 & -2247173675 & -4.65 \times 10^{12} & 6.31 \times 10^{14} \\ 0 & 39823/18 & -114403/7 & -611712616 & 9.03 \times 10^9 & 10.22 \times 10^{15} \\ 39823/18 & -114403/7 & -611712616 & 9.03 \times 10^9 & 10.22 \times 10^{15} & -1.35 \times 10^{18} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Por medio del software Matlab se determino el Rango de Co el cual es igual a 6. Esto determina que el la matriz Co es de rango pleno y cumple las condiciones para el diseño del algoritmo.

Ahora, se define la matriz de transformación P (5.13) que transforma al sistema

original en un sistema con forma canónica de Brunovsky

$$P = \begin{bmatrix} 459/10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 459/10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17727479 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/17727479 & 0 & 0 \\ 3/115429 & 0 & -189/191 & -2/297005 & 18/39823 & 0 \\ -54/17405 & 3/115429 & 945/8 & -1666/1685 & -287/5319 & 18/39823 \end{bmatrix} \quad (22)$$

El polinomio desdado del sistema se divide en 2 Para el sistema 1 con $\mu = 2$ ($s^2 + 1s + 0.25$).

Para el subsistema 2 con $\mu = 4$ ($s^4 + 80s^3 + 2400s^2 + 32000s + 160000$)

Las ganancias calculadas a partir de la ley de control $u_b = k_b x_b$ se muestran en la siguiente matriz

$$K_{bruno} = \begin{bmatrix} -10004/87 & -261/10000 & 73718/5 & 0 & 0 & 0 \\ -87044/191 & -39/37166 & 17607519 & 3769/24 & -80507/10 & -321/15187 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Entonces el nuevo sistema en lazo cerrado

$$A_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4+k1 & -1+k2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1.6 \times 10^5 + k3 & -3.2 \times 10^4 + k4 & -2.4 \times 10^3 + k5 & -80 + k6 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Por otro lado, para el control de posición, se propuso la matriz correspondiente a la dinámica del sistema retroalimentado con el servoposicionador, esto es

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{10000}{459} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.77 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{01} & k_{02} & -\frac{1}{4} + k_1 & -1 + k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{16}{28257}k_{01} + k_{03} & \frac{16}{28257}k_{02} + k_{04} & 0 & 0 & -1.6 \times 10^5 + k_3 & -3.2 \times 10^4 + k_4 & -2.4 \times 10^3 + k_5 & -80 + k_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Debido a la estructura que muestra la matriz A_r , se propone dividirla en 2 matrices, las cuales depende solo de una entrada respectivamente, y se comprueba que los polos no se ven afectados.

$$sb1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{10000}{459} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{01} & -\frac{1}{4} - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

El polinomio deseado de la submatriz A_{s1} .

$$s^3 + (k_2 + 1)s^2 + (k_1 + \frac{1}{4})s + \frac{10000}{459}k_{01} \quad s^3 + 10001s^2 + 10000s + 2500$$

$$sb2 = \begin{bmatrix} 0 & -17727479 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16}{28257}k_{02} + k_{04} & -1.6 \times 10^5 - k_3 & -3.2 \times 10^4 - k_4 & -2.4 \times 10^3 - k_5 & -80 - k_6 \end{bmatrix} \quad (27)$$

El polinomio deseado de la submatriz A_{s2} .

$$s^5 + (k_6 + 80)s^4 + (k_5 + 2.4 \times 10^3)s^3 + (k_4 + 3.2 \times 10^4)s^2 + (k_3 + 1.6 \times 10^5)s + (10038k_{02} + 17727479k_{04})$$

El calculo de las ganancias del servoposicionador es entonces:

$$k_0 = \begin{bmatrix} k_{01} & k_{02} \\ k_{03} & k_{04} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 459/4 & 0 \\ -169/2601 & 216613/3 \end{bmatrix} \quad (28)$$