

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

**REVISIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LUZ EN FIBRAS
ÓPTICAS DE ÍNDICE ESCALONADO**

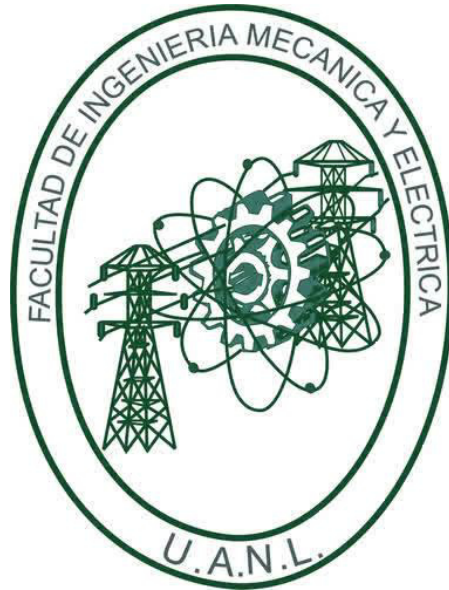
POR

FRANCISCO ALEJO VILLANUEVA VÁZQUEZ

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

MARZO, 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TESIS

**REVISIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LUZ EN FIBRAS
ÓPTICAS DE ÍNDICE ESCALONADO**

POR

FRANCISCO ALEJO VILLANUEVA VÁZQUEZ

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

MARZO DE 2018

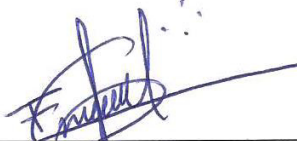
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Revisión de la propagación de luz en fibras ópticas de índice escalonado”, realizada por el alumno Francisco Alejo Villanueva Vázquez, con número de matrícula 1424590, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

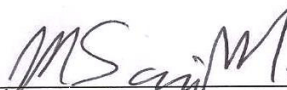
El Comité de Tesis



Dra. Norma Patricia Puente Ramírez
Director




Dr. Jesús Emmanuel Gómez Correa
Revisor



Dr. Manuel García Méndez
Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez **FIME**
Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Marzo de 2018

Agradecimientos

A mi madre Lucía Vázquez y a mi hermana Lucía Villanueva por su apoyo incondicional.

A mis compañeros y profesores.

A la Dra. Norma Patricia por su asesoría en la elaboración de este trabajo.

Al Dr. Jesús Gómez por sus comentarios en la revisión de la tesis.

A mi familia.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	VI
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Metodología	3
1.3. Sinopsis de la tesis	3
2. Fibra óptica	4
2.1. Características de una fibra óptica	5
2.1.1. Perfiles de índice de refracción	6
2.1.2. Dimensiones radiales	7
2.2. Tipos de fibra óptica	8
3. Propagación de luz en fibra óptica	9
3.1. Ley de Snell	9

Índice general	IV
3.1.1. Ángulo de aceptación	11
3.2. Teoría electromagnética	14
3.2.1. La ecuación de Helmholtz	14
3.2.2. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas	17
4. Solución a la ecuación de Helmholtz	20
4.1. Solución a la ecuación de onda en la región del núcleo	22
4.2. Solución a la ecuación de onda en la región del revestimiento	23
4.3. Condiciones de frontera	24
4.4. Expresiones para las componentes E_r , E_ϕ , H_r y H_ϕ	25
4.5. La ecuación característica de una fibra óptica	28
4.5.1. Parámetro V	28
4.6. Modos de propagación en una fibra óptica	29
4.6.1. Modos transversales $l = 0$	30
4.6.2. Modos híbridos $l \neq 0$	31
4.6.3. Notación para modos de propagación	33
4.6.4. Constantes de propagación	33
4.6.5. Modos linealmente polarizados	40
4.7. Densidad de potencia modal	42
5. Resultados	44
5.1. Consideraciones	44

Índice general	V
5.2. Fibra óptica monomodo	46
5.2.1. Modo $LP_{0,1}$	47
5.3. Fibra óptica multimodo	49
5.3.1. Modo $LP_{0,1}$	50
5.3.2. Modo $LP_{1,1}$	52
5.3.3. Modo $LP_{0,2}$	56
5.3.4. Modo $LP_{2,1}$	58
5.3.5. Modo $LP_{3,1}$	61
6. Conclusiones	65
6.1. Trabajo a futuro	66
Bibliografía	67
Índice de figuras	71
Índice de tablas	74

Resumen

La propagación de luz a través de fibras ópticas de índice escalonado es analizada por medio de las ecuaciones de Maxwell. Esta tesis pretende mejorar la comprensión de dicho fenómeno.

La luz que se propaga en una fibra óptica se descompone en modos de propagación, estos modos son las soluciones a las ecuaciones de Maxwell considerando las características de la fibra óptica.

En el caso particular de una fibra óptica de índice escalonado se presentan los modos linealmente polarizados, los cuales se forman a partir de grupos de modos de propagación.

En este trabajo se obtienen expresiones que definen los campos electromagnéticos de los modos de propagación y los modos linealmente polarizados. Estas expresiones permiten caracterizar los campos electromagnéticos vectoriales y las distribuciones de potencia de cada modo de propagación.

Con la finalidad de exponer los resultados se analizan dos fibras ópticas de índice escalonado, una monomodo $9/125 \mu m$ y una multimodo $50/125 \mu m$, en ambas fibras ópticas se considera una fuente de luz incidente con longitud de onda estándar en sistemas de comunicaciones ópticos, $\lambda = 1550 nm$.

Palabras clave: fibra óptica de índice escalonado, modos de propagación, modos linealmente polarizados.

Capítulo 1

Introducción

Desde la aparición comercial en 1980 de la primera generación de sistemas de comunicación por luz guiada, la fibra óptica ha sido usada como un medio de transmisión de datos [1].

La luz que se propaga a través de una fibra óptica es representada por los modos de propagación; los modos de propagación son las distintas distribuciones que adopta la luz al propagarse en una fibra óptica [1, 2].

De acuerdo al número de modos de propagación, la fibra óptica se clasifica como monomodo o multimodo. La fibra óptica monomodo presenta solo un modo de propagación y la fibra óptica multimodo presenta dos o más modos de propagación [3, 4].

Tradicionalmente se ha preferido el uso de las fibras monomodo sobre las multimodo, debido a la limitación en la velocidad de transmisión causada por la dispersión modal presente en la fibra multimodo [1].

En la actualidad se sabe que debido a la creciente demanda de ancho de banda, la fibra monomodo está cerca de alcanzar su máxima capacidad de canal [5, 6], por ello en los últimos cinco años se han propuesto esquemas de multiplexación

en fibra óptica [7].

La multiplexación ha sido mayormente implementada en fibra con múltiples núcleos donde cada núcleo representa un canal distinto [8–12] y en fibra multimodo donde los modos de propagación son aprovechados como canales por medio de multiplexación por división de modos (MDM, Mode Division Multiplexing) [13–18].

La aplicación de multiplexación por división de modos en fibra óptica se encuentra limitada por los efectos no lineales presentes en la fibra óptica y por los acoplamientos aleatorios entre los distintos modos de propagación [19].

Las investigaciones anteriormente mencionadas despiertan el interés de estudiar la propagación de la luz a través de la fibra óptica, por lo que este trabajo pretende mejorar la comprensión de dicho fenómeno.

En esta tesis la propagación de luz en fibra óptica se estudiará desde la perspectiva de la teoría electromagnética. Con la finalidad de acotar el contenido, la discusión se enfocará únicamente en la fibra óptica de índice escalonado.

1.1 Objetivos

El objetivo general de esta tesis es modelar la propagación de luz en fibras ópticas de índice escalonado. A continuación se enumeran los objetivos particulares:

1. Identificar los modos de propagación presentes en fibras ópticas de índice escalonado.
2. Caracterizar los campos electromagnéticos de los modos de propagación.

1.2 Metodología

1. Revisión del estado del arte.
2. Implementar un algoritmo que calcule los modos de propagación en fibras ópticas de índice escalonado.
3. Seleccionar las fibras ópticas de índice escalonado que serán analizadas y considerar una fuente de luz incidente.
4. Obtener las componentes vectoriales del campo electromagnético para cada modo de propagación.
5. Graficar los campos vectoriales electromagnéticos y las distribuciones de potencia de cada modo de propagación.
6. Calcular los modos linealmente polarizados y graficar sus respectivos diagramas de amplitud.
7. Analizar los resultados obtenidos.

1.3 Sinopsis de la tesis

El capítulo 1 presenta la introducción. El capítulo 2 versa sobre la fibra óptica en general. Se explica que es una fibra óptica y se mencionan sus características.

En el capítulo 3 se explica la propagación de luz en fibra óptica y se expone una introducción a la teoría electromagnética en el contexto de la fibra óptica.

En el capítulo 4 se definen los modos de propagación como soluciones a las ecuaciones de Maxwell. Se presenta la clasificación de los modos de propagación y sus respectivos campos electromagnéticos.

El capítulo 5 exhibe los resultados obtenidos para los casos considerados. Finalmente, el capítulo 6 presenta las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Fibra óptica

Una guía de onda es cualquier estructura física que propaga ondas electromagnéticas. La guía de onda es dieléctrica cuando está formada por uno o varios materiales dieléctricos, caracterizándose por carecer de materiales conductores [20].

Una fibra óptica es una guía de onda dieléctrica con forma cilíndrica [2], consiste en una barra cilíndrica y dieléctrica muy delgada y larga, rodeada por una capa concéntrica de otro material dieléctrico. La barra central se denomina núcleo y la capa es llamada revestimiento o recubrimiento. El grosor total del conjunto es tan pequeño, que por su aspecto filamentario se le da el nombre de fibra [4].

La fibra óptica común es fabricada con un vidrio transparente, este vidrio es obtenido a través de un proceso de refinamiento, en donde la materia prima es el dióxido de silicio [4].

El dióxido de silicio es dopado con otros materiales, como germanio o pentóxido de fósforo, para aumentar su índice de refracción; o bien, si se desea reducir éste, entonces se dopa con boro [4]. La mezcla con mayor índice de refracción se usa para el núcleo; y la de menor índice, para el revestimiento [4], como se ilustra en la Fig. 2.1.

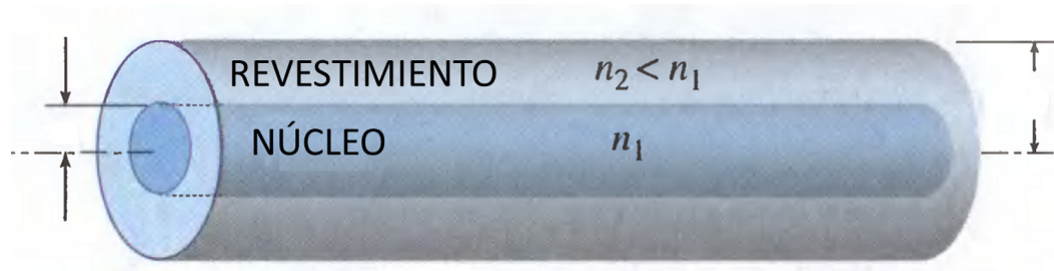


Figura 2.1: Ilustración de una fibra óptica, n_1 y n_2 son los índices de refracción del núcleo y del revestimiento respectivamente [2].

La diferencia entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, aun siendo pequeña, permite que la luz (onda electromagnética) se propague a través de la fibra óptica por reflexiones internas sucesivas en la frontera núcleo-revestimiento [2], esto será explicado a detalle en el siguiente capítulo.

En general, el tipo de luz que viaja por una fibra óptica corresponde a longitudes de onda pertenecientes al infrarrojo cercano o al infrarrojo lejano del espectro electromagnético [4].

No existe un rango específico para estas longitudes de onda, en [4] se expone que las longitudes de onda mayormente usadas para transmitir información por fibra óptica se encuentran en el rango de los 800 nm a los 1620 nm .

2.1 Características de una fibra óptica

En esta sección se discutirán algunos detalles sobre los índices de refracción y las dimensiones radiales de la fibra.

En cualquier fibra óptica es necesario que $n_2 < n_1$, esta diferencia da lugar al fenómeno de reflexión total interna; el cual permite utilizar la fibra como una guía de onda dieléctrica [2]. El índice de refracción n_1 usualmente varía de 1.44 a 1.46 [2].

La mayoría de las fibras ópticas utilizadas en comunicaciones tienen un ligero contraste en la diferencia de sus índices de refracción, por lo que es común que $n_1 \approx n_2$ [20].

2.1.1 Perfiles de índice de refracción

El perfil de índice de refracción de una fibra óptica representa la distribución del cambio en el índice de refracción en la interfaz núcleo-revestimiento [2], de acuerdo a la forma de este perfil existen dos clases de fibra.

2.1.1.1 Fibra óptica de índice escalonado

La fibra de índice escalonado tiene valores específicos para los índices de refracción de su núcleo y de su revestimiento, n_1 y n_2 , respectivamente [2].

En la Fig. 2.2 se presenta el perfil de índice de refracción de una fibra óptica de índice escalonado y se aprecia el cambio abrupto entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento.

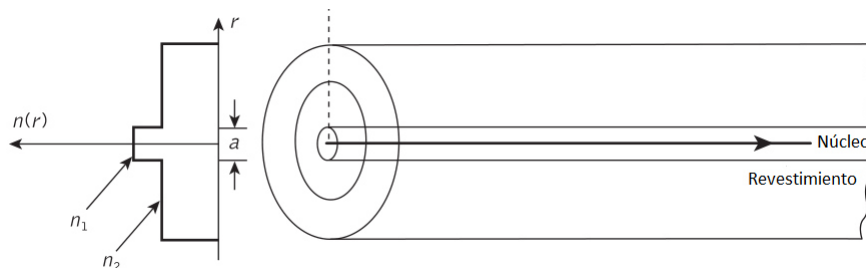


Figura 2.2: Ilustración del perfil de índice de refracción escalonado [3].

2.1.1.2 Fibra óptica de índice gradual

El núcleo de una fibra de índice gradual tiene un índice de refracción que varía, de tal forma que adquiere su máximo valor en el centro y decrece gradualmente

hasta llegar a su menor valor en la interfaz núcleo-revestimiento [2]. Esto es representado por la Fig. 2.3.

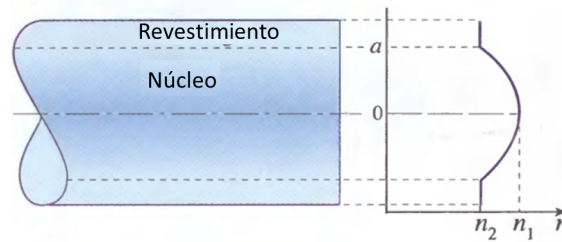


Figura 2.3: Ilustración del perfil de índice de refracción gradual [2].

2.1.2 Dimensiones radiales

La fibra óptica es muy delgada, su grosor está en el orden de los micrómetros μm . Algunos ejemplos de diámetros estándar son $2a/2b = 8/125, 50/125, 62.5/125, 85/125$ y $100/140$ en unidades de μm [2], como se muestra en la Fig. 2.4, a es el radio del núcleo y b es el radio externo de la fibra.

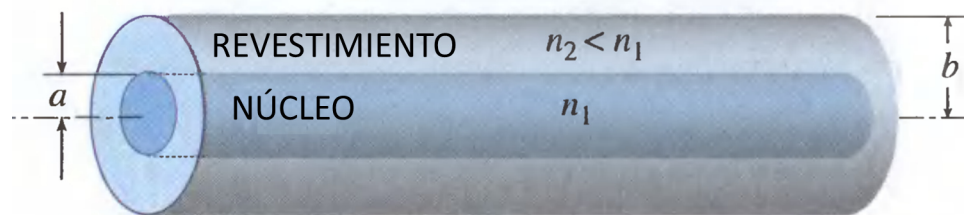


Figura 2.4: Dimensiones radiales de una fibra óptica [2].

El diámetro del núcleo, $2a$, usualmente mide unos cuantos micrómetros para el caso de la fibra monomodo y poco menos de $100 \mu m$ para la fibra multimodo, para ambas fibras el diámetro exterior $2b$ estándar es $125 \mu m$ [21].

2.2 Tipos de fibra óptica

Existen varios tipos de fibra óptica fabricadas de distintos materiales, las cuales son descritas en [22]. Sin embargo, no serán mencionadas, debido a que esta tesis se encuentra enfocada a las fibras ópticas construidas con dióxido de silicio y mayormente usadas para la transmisión de información [22].

Considerando las características expuestas en la sección anterior, existen principalmente tres tipos de fibra óptica: monomodo de índice escalonado, multimodo de índice escalonado y multimodo de índice gradual [4].

Capítulo 3

Propagación de luz en fibra óptica

En este capítulo se utilizará la ley de Snell para dar una explicación digerible e intuitiva sobre cómo se propaga la luz en una fibra óptica, posteriormente la teoría electromagnética será explicada, este orden pretende facilitar el entendimiento.

3.1 Ley de Snell

Cuando un rayo de luz incide en la interfaz entre dos medios con diferente índice de refracción ocurre el fenómeno de refracción [2].

Por ejemplo, si un rayo proveniente del medio 1 incide con un ángulo ϕ_1 en la frontera con un medio 2, este será refractado con un ángulo ϕ_2 . Los ángulos están referenciados a la normal con respecto a la interfaz entre ambos medios, esto se ilustra en la Fig. 3.1.

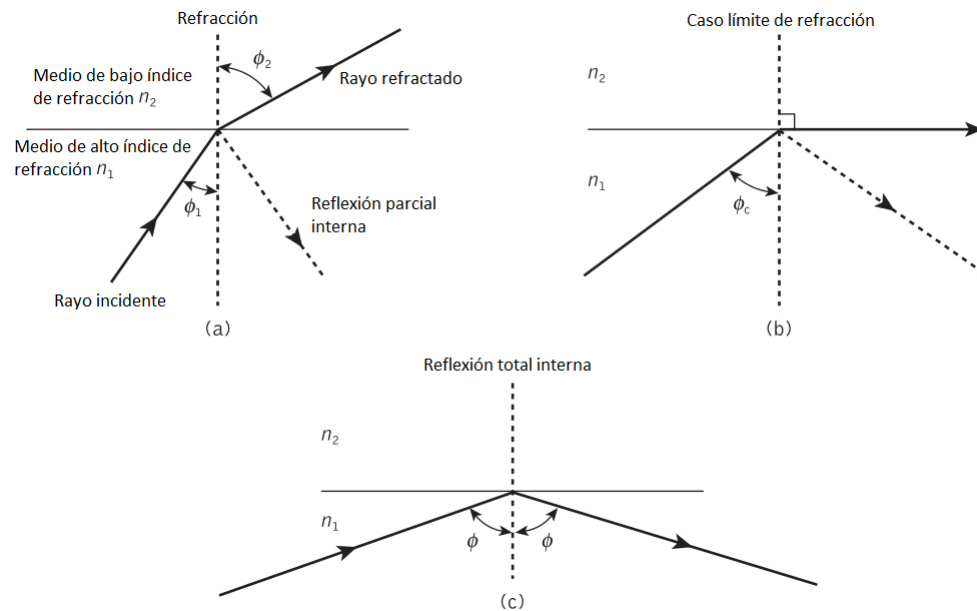


Figura 3.1: Rayo de luz incidiendo entre dos medios: (a) refracción, (b) caso límite de refracción, donde ϕ_c es el ángulo crítico y (c) reflexión total interna, donde $\phi > \phi_c$ [3].

En la Fig. 3.1 se considera la condición $n_2 < n_1$, la cual es propia de una fibra óptica, donde el medio 1 representa el núcleo y el medio 2 representa el revestimiento.

La ley de Snell relaciona los índices de refracción de ambos medios con los ángulos de incidencia y de refracción por medio de la siguiente expresión [3]:

$$n_1 \text{ sen } \phi_1 = n_2 \text{ sen } \phi_2. \tag{3.1}$$

La Fig. 3.1(a) representa el fenómeno de refracción, donde una pequeña cantidad de luz sufre una reflexión parcial interna. Dado que n_1 es mayor que n_2 , el ángulo de refracción ϕ_2 es siempre mayor que el ángulo de incidencia ϕ_1 [3].

En la Fig. 3.1(b) el ángulo de refracción es igual a 90 grados y el rayo refractado viaja paralelo a la interfaz entre ambos medios, este es el caso límite de refracción y el ángulo de incidencia correspondiente recibe el nombre de ángulo crítico [3].

El valor del ángulo crítico se obtiene sustituyendo $\phi_2 = 90$ en la ecuación (3.1), obteniendo así la siguiente expresión [2, 3],

$$\text{sen } \phi_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.2)$$

Por último, en la Fig. 3.1(c) se exhibe el fenómeno de reflexión total interna, en el cual la refracción es nula y el rayo de luz se refleja de vuelta al medio de origen [3]. Este fenómeno sucede cuando el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico [3].

En el contexto de la Fig. 3.1(c), el fenómeno de reflexión total interna ocurre únicamente cuando $n_2 < n_1$ [2, 3]. En otras palabras, este fenómeno se presenta cuando la luz incide en la frontera con otro medio de menor índice de refracción [3].

El fenómeno de reflexión total interna es el responsable de la propagación de luz a través de la fibra óptica y por esta razón en una fibra óptica el índice de refracción del núcleo es mayor que el índice de refracción del revestimiento [2].

En la fibra óptica la luz se propaga dentro del núcleo reflejándose continuamente en la frontera con el revestimiento [2]. Esto se aprecia en la Fig. 3.2, donde el ángulo ϕ es mayor que el ángulo crítico ϕ_c .

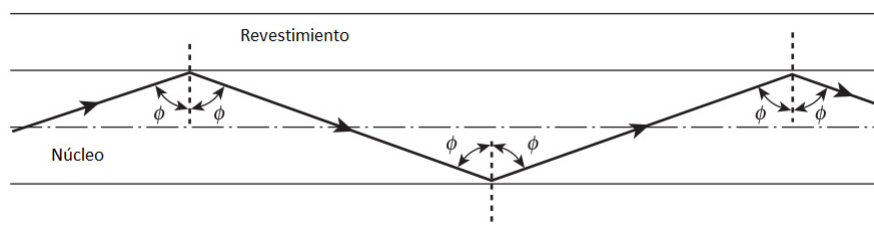


Figura 3.2: Transmisión de un rayo de luz en fibra óptica.

3.1.1 Ángulo de aceptación

La Fig. 3.3 ilustra el cono de aceptación de una fibra óptica; únicamente los rayos de luz que incidan dentro de este cono serán propagados a través del núcleo

[1,3]. Es decir, para que un rayo de luz se propague tiene que incidir en el núcleo con un ángulo menor o igual al ángulo de aceptación θ_a .

El rayo B representa el caso contrario, al incidir fuera del cono de aceptación este rayo no cumple con la condición del ángulo crítico y terminara atenuándose en el revestimiento [3].

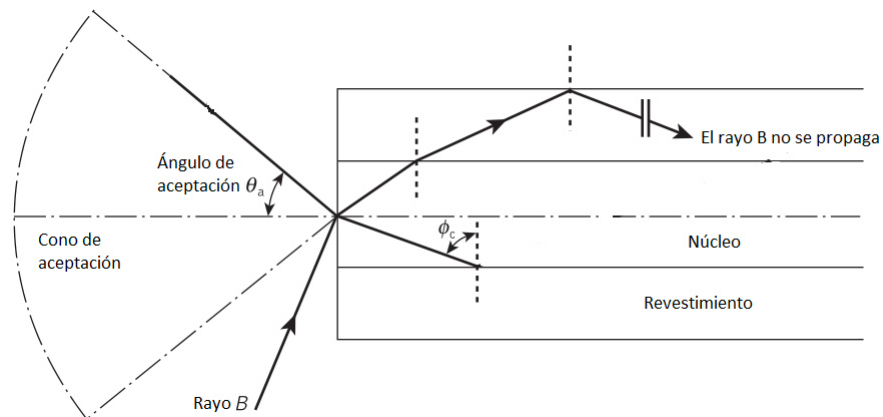


Figura 3.3: Ángulo de aceptación θ_a para rayos de luz incidentes [3].

En conclusión, θ_a es el ángulo máximo al que puede incidir un rayo de luz que será propagado y por ello θ_a es conocido como el ángulo de aceptación [3].

3.1.1.1 Apertura numérica

En esta sección se obtendrá una relación entre el ángulo de aceptación y los índices de refracción de los tres medios involucrados, que son el aire, el núcleo y el revestimiento. Esta relación es conocida como apertura numérica [2, 23].

Para obtener la relación deseada se tomará como referencia la Fig. 3.4, en la cual un rayo de luz entra en el cono de aceptación y por lo tanto este rayo se propagara rebotando en la interfaz núcleo-revestimiento [3].

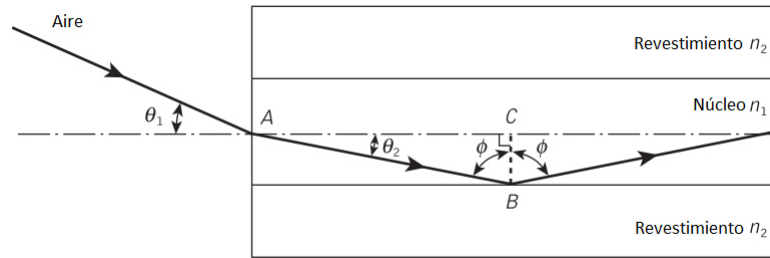


Figura 3.4: Ilustración de un rayo de luz que entra en el núcleo a un ángulo menor que el ángulo de aceptación ($\theta_1 < \phi_a$).

Aplicando la ley de Snell en la interfaz aire-núcleo se obtiene la siguiente igualdad [23],

$$n_0 \sen \theta_1 = n_1 \sen \theta_2. \quad (3.3)$$

Considerando el triángulo rectángulo formado por los segmentos ABC. Se sabe que $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_2$, donde ϕ es mayor que el ángulo crítico ϕ_c .

La trigonometría básica permite afirmar que $\sen \theta_2 = \cos \phi$, sustituyendo esto en (3.3) se obtiene la siguiente expresión [23],

$$n_0 \sen \theta_1 = n_1 \cos \phi. \quad (3.4)$$

Usando la identidad trigonométrica $\sen^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, la ecuación anterior adopta la siguiente forma [23],

$$n_0 \sen \theta_1 = n_1 (1 - \sen^2 \phi)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Cuando el caso límite de reflexión total interna es considerado, el ángulo ϕ se iguala al ángulo crítico ϕ_c y por ende θ_1 se convierte en el ángulo de aceptación θ_a [2]. Partiendo de la ecuación (3.2) y sustituyendo lo ya mencionado se llega a la siguiente ecuación [23],

$$n_0 \sen \theta_a = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Finalmente, sustituyendo el índice de refracción del aire $n_0 = 1$ se encuentra la expresión correspondiente a la apertura numérica NA [23]:

$$NA = \sen \theta_a = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

La apertura numérica permite conocer el ángulo de aceptación θ_a en función de los índices de refracción del núcleo y del revestimiento de la fibra óptica [23].

3.2 Teoría electromagnética

La luz es una onda electromagnética y como todo fenómeno electromagnético, la propagación de luz en fibra óptica es gobernada por la ecuación de Helmholtz, la cual tiene su fundamento en las ecuaciones de Maxwell [1, 24, 25].

Al analizar la propagación de luz en una fibra óptica es necesario considerar sus características en las ecuaciones de Maxwell [22]. Este proceso es realizado en esta sección.

3.2.1 La ecuación de Helmholtz

Las ecuaciones de Maxwell son [26]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.11)$$

donde \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{J} y ρ representan campo eléctrico, campo magnético, densidad de flujo eléctrico, densidad de flujo magnético, densidad de corriente y densidad de carga respectivamente [26].

En una fibra óptica la luz es propagada a través de un medio dieléctrico. Debido a la naturaleza aislante de los materiales dieléctricos se puede afirmar que la luz es propagada en un medio carente de corrientes y cargas libres [22].

Esto implica que para el caso de una fibra óptica, la densidad de corriente y la densidad de carga son nulas, $\vec{J} = 0$ y $\rho = 0$. Por ello, las ecuaciones de Maxwell adoptan la siguiente forma [23]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.15)$$

Estas expresiones se relacionan por medio de las siguientes ecuaciones [26]:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (3.16)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.17)$$

ϵ y μ representan permitividad y permeabilidad del medio de propagación [26]. A su vez, estos parámetros están definidos por [24]:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad (3.18)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (3.19)$$

donde ϵ_r , ϵ_0 , μ_0 , μ_r representan permeabilidad relativa, permeabilidad en el vacío, permitividad en el vacío y permitividad relativa respectivamente [26].

Asumiendo que los dieléctricos que componen la fibra óptica son homogéneos e isotrópicos; se establece que ϵ y μ son constantes a lo largo de toda la fibra [22].

Por definición los materiales dieléctricos se caracterizan por tener una permitividad relativa cercana a la unidad, $\mu_r \approx 1$ [20]. Esto implica que la permitividad de una fibra óptica sea aproximadamente igual a la permitividad en el vacío, $\mu \approx \mu_0$ [20].

Por simplicidad se consideran los campos electromagnéticos como ondas planas, esto implica que los vectores \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} y \vec{B} sean fasores con dependencia $e^{-j\omega t}$

en el tiempo [27], donde w es la frecuencia angular y está dada por [26]:

$$w = 2\pi f, \quad (3.20)$$

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad (3.21)$$

f y λ representan la frecuencia y la longitud de la onda electromagnética que se propaga en el medio, c es la velocidad de la luz en el vacío $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. Esta dependencia exponencial implica que el diferencial con respecto al tiempo sea igual a $-jw$. Por lo tanto (3.12) y (3.13) se escriben en la siguiente forma [22]:

$$\nabla \times \vec{E} = jw\mu\vec{H}, \quad (3.22)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -jw\epsilon\vec{E}. \quad (3.23)$$

Al aplicar el operador rotacional en estas ecuaciones [22],

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = jw\mu\nabla \times \vec{H}, \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -jw\epsilon\nabla \times \vec{E}. \quad (3.25)$$

Posteriormente, sustituyendo (3.22) en (3.25) y (3.23) en (3.24) se obtienen las siguientes ecuaciones para \vec{E} y \vec{H} :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = jw\mu\nabla \times \vec{H} = w^2\epsilon\mu\vec{E}, \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -jw\epsilon\nabla \times \vec{E} = w^2\epsilon\mu\vec{H}. \quad (3.27)$$

Utilizando la siguiente identidad [26],

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}, \quad (3.28)$$

se escriben las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E}, \quad (3.29)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2\vec{H}. \quad (3.30)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.14) se concluye que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y de la misma manera sustituyendo (3.17) en (3.15) se obtiene $\nabla \cdot \vec{H} = 0$. Esto implica que las ecuaciones (3.29) y (3.30) adopten la siguiente forma:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2\vec{E}, \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}. \quad (3.32)$$

Considerando (3.26) en (3.31) y (3.27) en (3.32), se concluye que:

$$\nabla^2 \vec{E} + w^2 \epsilon \mu \vec{E} = 0, \quad (3.33)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + w^2 \epsilon \mu \vec{H} = 0. \quad (3.34)$$

Este par de ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Helmholtz [25, 28], como se puede apreciar (3.33) corresponde al campo eléctrico y (3.34) al magnético. Las soluciones a estas ecuaciones son campos vectoriales \vec{E} y \vec{H} , estos campos electromagnéticos vectoriales representan la propagación de las ondas electromagnéticas a través del medio [29].

Usualmente el término $w^2 \epsilon \mu$ es reemplazado por k^2 , donde k es el número de onda en el medio de propagación y se define por la siguiente expresión [28]:

$$k = w\sqrt{\epsilon\mu} = nk_0, \quad (3.35)$$

donde k_0 es el número de onda en el espacio libre definido como [28]:

$$k_0 = 2\pi/\lambda = w\sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \quad (3.36)$$

A su vez, el índice de refracción del medio de propagación está relacionado con la permeabilidad y la permitividad [28],

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (3.37)$$

En la siguiente sección, las características geométricas de la fibra óptica son consideradas.

3.2.2 La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas

La ecuaciones (3.33) y (3.34) son equivalentes a las siguientes expresiones [22],

$$\nabla^2 \vec{E} + (nk_0)^2 \vec{E} = 0, \quad (3.38)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + (nk_0)^2 \vec{H} = 0, \quad (3.39)$$

donde:

$$n = \begin{cases} n_1, & \text{en el núcleo } (r < a), \\ n_2, & \text{en el revestimiento } (r > a), \end{cases}$$

Considerando a como el radio del núcleo de la fibra óptica.

La fibra óptica es cilíndrica y por esta razón es conveniente trabajar con el sistema de coordenadas cilíndricas [2], en la Fig. 3.5 se muestran estas coordenadas referenciadas a un campo eléctrico.

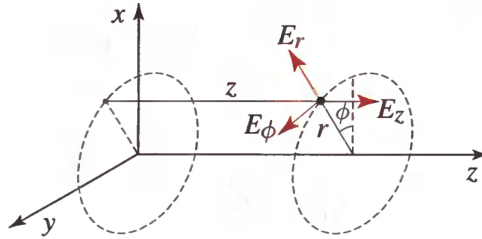


Figura 3.5: Componentes del campo \vec{E} en coordenadas cilíndricas [2].

Por lo tanto, el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{H} son expresados de manera vectorial en coordenadas cilíndricas en las siguientes ecuaciones [22]:

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z}, \quad (3.40)$$

$$\vec{H} = H_r \hat{r} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z}. \quad (3.41)$$

La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas es definida por las siguientes expresiones para el campo eléctrico y magnético [22],

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + (nk_0)^2 \vec{E} &= \left(\nabla^2 E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} - \frac{E_r}{r^2} + (nk_0)^2 E_r \right) \hat{r} \\ &+ \left(\nabla^2 E_\phi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{E_\phi}{r^2} + (nk_0)^2 E_\phi \right) \hat{\phi} \\ &+ (\nabla^2 E_z + (nk_0)^2 E_z) \hat{z} = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{H} + (nk_0)^2 \vec{H} = & \left(\nabla^2 H_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \frac{H_r}{r^2} + (nk_0)^2 H_r \right) \hat{r} \\
& + \left(\nabla^2 H_\phi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{H_\phi}{r^2} + (nk_0)^2 H_\phi \right) \hat{\phi} \\
& + (\nabla^2 H_z + (nk_0)^2 H_z) \hat{z} = 0,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

donde el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas se define como [22]:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.44}$$

En el siguiente capítulo se resolverá la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas, obteniendo así expresiones para los campos eléctricos E_z , E_r y E_ϕ y magnéticos H_z , H_r y H_ϕ .

Capítulo 4

Solución a la ecuación de Helmholtz

A continuación, se resolverán las ecuaciones de Helmholtz (3.42) y (3.43) tomando como referencia el procedimiento propuesto en [22].

Se comenzará por encontrar la componente E_z , esta solución a su vez es válida para la componente H_z , debido a que las ecuaciones (3.42) y (3.43) presentan la misma forma [23].

Utilizando (3.44), la componente en z de la ecuación (3.42) es expresada de la siguiente manera [22],

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + (nk_0)^2 E_z = 0. \quad (4.1)$$

La ecuación diferencial (4.1) es resuelta por el método de separación de variables [30], de manera que la componente E_z es expresada como el producto de tres funciones individuales para r , ϕ y z [22, 23],

$$E_z(r, \phi, z) = F(r)\Phi(\phi)Z(z). \quad (4.2)$$

Sustituyendo (4.2) en (4.1) y aplicando los diferenciales se obtiene la siguiente expresión [22],

$$\begin{aligned} F''(r)\Phi(\phi)Z(z) + \frac{1}{r}F'(r)\Phi(\phi)Z(z) + \frac{1}{r^2}F(r)\Phi''(\phi)Z(z) \\ + F(r)\Phi(\phi)Z''(z) + (nk_0)^2F(r)\Phi(\phi)Z(z) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

esta expresión será manipulada para obtener tres ecuaciones diferenciales que correspondan a cada una de las funciones $F(r)$, $\Phi(\phi)$ y $Z(z)$, al dividir la ecuación (4.3) entre $F(r)\Phi(\phi)Z(z)$ se obtiene,

$$\left[\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} + (nk_0)^2 \right] + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0. \quad (4.4)$$

Para cumplir con la igualdad a cero en esta expresión, es obvio que el factor entre corchetes tiene que ser igual a $-\frac{Z''(z)}{Z(z)}$ y por lo tanto se consideran las siguientes igualdades, donde β es conocida como la constante de propagación [27].

$$\left[\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} + (nk_0)^2 \right] = \beta^2, \quad (4.5)$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\beta^2, \quad (4.6)$$

$$\beta^2 - \beta^2 = 0. \quad (4.7)$$

Multiplicando (4.5) por r^2 y reagrupando factores se obtienen la siguientes ecuaciones:

$$\left[r^2 \frac{F''(r)}{F(r)} + r \frac{F'(r)}{F(r)} + ((nk_0)^2 - \beta^2)r^2 \right] + \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -l^2. \quad (4.9)$$

En (4.8) se considera que el término entre corchetes como l^2 y el otro término como $-l^2$. Multiplicando (4.8) por $\frac{F(r)}{r^2}$ y considerando (4.9) se obtiene la siguiente ecuación,

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + [(nk_0)^2 - \beta^2]F(r) = \frac{l^2}{r^2} F(r). \quad (4.10)$$

Considerando (4.6), (4.9) y (4.10) se define el siguiente grupo de ecuaciones diferenciales [22, 23, 27]:

$$Z''(z) + \beta^2 Z(z) = 0, \quad (4.11)$$

$$\Phi''(\phi) + l^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (4.12)$$

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + [(nk_0)^2 - \beta^2]F(r) - \frac{l^2}{r^2} F(r) = 0. \quad (4.13)$$

Al resolver esta terna de ecuaciones diferenciales encontraremos las funciones $Z(z)$, $\Phi(\phi)$ y $F(r)$ para posteriormente sustituirlas en (4.2).

Las soluciones a estas ecuaciones diferenciales son obtenidas de acuerdo a las características físicas del medio de propagación [22]. En el caso de una fibra óptica es necesario obtener las soluciones para el núcleo y para el revestimiento de manera independiente [27], por ello se describen a continuación las soluciones en ambas regiones.

4.1 Solución a la ecuación de onda en la región del núcleo

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) presentan las siguientes soluciones de forma exponencial [30].

$$Z(z) = e^{j\beta z}, \quad (4.14)$$

$$\Phi(\phi) = e^{jl\phi}, \quad (4.15)$$

Existen dos soluciones para (4.13) que corresponden con el signo del factor $[(nk_0)^2 - \beta^2]$, cuando este factor es considerado positivo la solución es una oscilación representada por funciones de Bessel de primer y segundo tipo [22], cuando se considera negativo la solución es una atenuación exponencial representada por funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo [22].

En la literatura es bien conocido que la solución en la región del núcleo es una oscilación descrita por las funciones de Bessel y por lo tanto se considerara el factor $[(nk_0)^2 - \beta^2]$ con signo positivo [2, 22, 23].

La solución para (4.13) en la región del núcleo es [22, 23]:

$$F(r) = e J_l(Kr) + f N_l(Kr), \quad (4.16)$$

donde,

$$K^2 = (n_1 k_0)^2 - \beta^2. \quad (4.17)$$

En (4.16) $J_l(Kr)$ y $N_l(Kr)$ son funciones de Bessel de orden l del primer tipo y del segundo tipo respectivamente.

Al considerar la interpretación física de la ecuación (4.16), el término $fN_l(Kr)$ es eliminado por que presenta una discontinuidad en $r = 0$ [31].

Considerando las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16) en (4.2), se obtienen las soluciones para E_z y H_z en la región del núcleo [2, 22, 23, 27]:

$$E_z(r, \phi, z) = AJ_l(Kr)e^{j\beta z + jl\phi}, \quad (4.18)$$

$$H_z(r, \phi, z) = BJ_l(Kr)e^{j\beta z + jl\phi}. \quad (4.19)$$

donde A y B son constantes que cumplen la función de satisfacer las condiciones de frontera [22, 26], en la sección condiciones de frontera se explicará como calcular dichas constantes.

4.2 Solución a la ecuación de onda en la región del revestimiento

En la literatura se sabe que la solución óptima para (4.13) en la región del revestimiento es representada por una atenuación exponencial y por lo tanto se considera el factor $[(nk_0)^2 - \beta^2]$ con signo negativo [2, 22, 23],

La solución para la ecuación (4.13) en la región del revestimiento es [22, 23]:

$$F(r) = eI_l(\gamma r) + fK_l(\gamma r), \quad (4.20)$$

donde,

$$-\gamma^2 = (n_2k_0)^2 - \beta^2. \quad (4.21)$$

En 4.20 $I_l(\gamma r)$ y $K_l(\gamma r)$ son funciones de Bessel modificadas de orden l de primer y segundo tipo respectivamente.

La interpretación física de la ecuación (4.20) supone una atenuación exponencial [22], esto implica que el término $eI_l(\gamma r)$ sea eliminado por que que crece con cada incremento en r [31].

Las soluciones para las ecuaciones (4.11) y (4.12) en la región del núcleo son también validas en la región del revestimiento [22], por lo tanto las soluciones (4.14) y (4.15) serán consideradas en el revestimiento [22].

Considerando las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.20) en (4.2), se obtienen las soluciones para E_z y H_z en la región del revestimiento [2, 22, 23, 27]:

$$E_z(r, \phi, z) = CK_l(\gamma r)e^{j\beta z + jl\phi}, \quad (4.22)$$

$$H_z(r, \phi, z) = DK_l(\gamma r)e^{j\beta z + jl\phi}. \quad (4.23)$$

donde C y D son constantes que cumplen las condiciones de frontera [22, 26], en la siguiente sección se abordará este tema.

4.3 Condiciones de frontera

Cualquier onda electromagnética que incida en la frontera entre dos medios tiene que cumplir las condiciones de frontera, estas condiciones surgen de las ecuaciones de Maxwell [24, 25, 28].

En [22, 23] se aplican las condiciones de frontera para el caso de una fibra óptica concluyendo que las componentes tangenciales E_z , E_ϕ , H_z y H_ϕ de los campos electromagnéticos en ambas regiones deben ser iguales en la frontera $r = a$.

Para cumplir con esta condición se consideran constantes que multiplican a las componentes E_z y H_z de ambas regiones.

El valor de las constantes A y C se encuentra igualando (4.18) y (4.22) en la frontera núcleo-revestimiento $r = a$. Esta igualdad garantiza la continuidad de la componente E_z y da lugar a la siguiente relación [22]:

$$AJ_l(Ka) = CK_l(\gamma a), \quad (4.24)$$

al despejar es posible expresar C en función de A ,

$$C = \frac{J_l(Ka)A}{K_l(\gamma a)}; \quad (4.25)$$

de la misma manera se encuentra el valor de D en función de B considerando la continuidad de H_z , igualando (4.19) y (4.23) [22]:

$$D = \frac{J_l(Ka)B}{K_l(\gamma a)}. \quad (4.26)$$

Con lo anterior, se satisfacen las condiciones de frontera para las componentes E_z y H_z [22].

Una vez encontradas las expresiones que definen E_z y H_z en la región del núcleo y en la región del revestimiento, el resto de las componentes son obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell [22, 23, 27],

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega\epsilon\vec{E}, \quad (4.27)$$

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H}, \quad (4.28)$$

en la siguiente sección se presenta este proceso.

4.4 Expresiones para las componentes E_r , E_ϕ , H_r y H_ϕ

Aplicando el operador rotacional en coordenadas cilíndricas definido en (4.29) en la ecuación (4.27) se obtienen las relaciones (4.30) a (4.32) [22, 23, 27],

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\phi & H_z \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -j\omega\epsilon E_r, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -j\omega\epsilon E_\phi, \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = -j\omega\epsilon E_z. \quad (4.32)$$

Posteriormente repitiendo el mismo proceso para el campo eléctrico, se parte de (4.28) y se obtienen las siguientes expresiones [22, 23, 27]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = jw\mu H_r, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = jw\mu H_\phi, \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{r} \frac{(\partial r E_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = jw\mu H_z. \quad (4.35)$$

Las ecuaciones (4.30) y (4.34) son despejadas para E_r y H_ϕ en términos de E_z y H_z , las ecuaciones (4.31) y (4.33) son despejadas para E_ϕ y H_r en términos de E_z y H_z . Considerando la relación $\frac{\partial}{\partial z} = j\beta$, se obtienen las siguientes ecuaciones [22, 23, 27]:

$$E_r = \frac{j}{K^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + w\mu \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right), \quad (4.36)$$

$$E_\phi = \frac{j}{K^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - w\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (4.37)$$

$$H_r = \frac{j}{K^2} \left(-w\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (4.38)$$

$$H_\phi = \frac{j}{K^2} \left(w\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right), \quad (4.39)$$

$$K^2 = (nk_0)^2 - \beta^2. \quad (4.40)$$

Las componentes de los campos electromagnéticos dentro de la región del núcleo son obtenidas insertando las ecuaciones (4.18) y (4.19) en (4.36) a (4.39), considerando las características del núcleo, constante dieléctrica ϵ_1 e índice de refracción n_1 [22].

$$E_r(r, \phi, z) = \frac{j}{K^2} \left(A\beta K J_l'(Kr) + Bw\mu \frac{j l}{r} J_l(Kr) \right), \quad (4.41)$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = \frac{j}{K^2} \left(A \frac{\beta}{r} j l J_l(Kr) - Bw\mu K J_l'(Kr) \right), \quad (4.42)$$

$$H_r(r, \phi, z) = \frac{j}{K^2} \left(-Aw\epsilon_1 \frac{j l}{r} J_l(Kr) + B\beta K J_l'(Kr) \right), \quad (4.43)$$

$$H_\phi(r, \phi, z) = \frac{j}{K^2} \left(Aw\epsilon_1 K J_l'(Kr) + B \frac{\beta}{r} j l J_l(Kr) \right), \quad (4.44)$$

$$K^2 = (n_1 k_0)^2 - \beta^2, \quad (4.45)$$

donde el factor $e^{j\beta z + jl\phi}$ multiplica a las ecuaciones (4.41) a (4.44).

Las componentes de los campos electromagnéticos dentro de la región del revestimiento son obtenidas insertando las ecuaciones (4.22) y (4.23) en (4.36) a (4.39), considerando las características del revestimiento, constante dieléctrica ϵ_2 e índice de refracción n_2 [22].

$$E_r(r, \phi, z) = \frac{-j}{\gamma^2} \left(C\beta\gamma K_l'(\gamma r) + Dw\mu \frac{jl}{r} K_l(\gamma r) \right), \quad (4.46)$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = \frac{-j}{\gamma^2} \left(C \frac{\beta}{r} jl K_l(\gamma r) - Dw\mu\gamma K_l'(\gamma r) \right), \quad (4.47)$$

$$H_r(r, \phi, z) = \frac{-j}{\gamma^2} \left(-Cw\epsilon_2 \frac{jl}{r} K_l(\gamma r) + D\beta\gamma K_l'(\gamma r) \right), \quad (4.48)$$

$$H_\phi(r, \phi, z) = \frac{-j}{\gamma^2} \left(Cw\epsilon_2\gamma K_l'(\gamma r) + D \frac{\beta}{r} jl K_l(\gamma r) \right), \quad (4.49)$$

$$-\gamma^2 = (n_2 k_0)^2 - \beta^2, \quad (4.50)$$

donde el factor $e^{j\beta z + jl\phi}$ multiplica a las ecuaciones (4.46) a (4.49).

Las ecuaciones (4.41) a (4.44) definen las componentes transversales del campo electromagnético vectorial en cualquier coordenada (r, ϕ, z) de la región del núcleo [22, 23, 27].

De igual forma, las ecuaciones (4.46) a (4.49) definen las componentes transversales del campo electromagnético vectorial en cualquier coordenada (r, ϕ, z) de la región del revestimiento [22, 23, 27].

En la siguiente sección se considerarán las condiciones de frontera entre ambas regiones núcleo y revestimiento, estas condiciones definen las relaciones entre los coeficientes A , B , C y D , esto a su vez da lugar a la ecuación característica [22, 23, 27].

4.5 La ecuación característica de una fibra óptica

Con la finalidad de satisfacer las condiciones de frontera para las componentes en ϕ de los campos electromagnéticos, se sustituirán (4.25) y (4.26) en las expresiones para E_ϕ y H_ϕ en ambas regiones. Posteriormente, igualando (4.42) con (4.47) y (4.44) con (4.49) se deduce el siguiente par de ecuaciones [22].

$$A\beta l \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) + jBw\mu \left(\frac{J'_l(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma aK_l(\gamma a)} \right) = 0, \quad (4.51)$$

$$Aw \left(\frac{\epsilon_1 J'_l(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{\epsilon_2 K'_l(\gamma a)}{\gamma aK_l(\gamma a)} \right) + jB\beta l \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) = 0. \quad (4.52)$$

Para que existan soluciones no triviales para A y B , el determinante de los coeficientes de (4.51) y (4.52) tiene que ser igual a cero [22], de esto se obtiene la expresión (4.53), la cual es conocida como la ecuación característica para una fibra óptica con índice escalonado [22, 23, 27],

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J'_l(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma aK_l(\gamma a)} \right) \left(\frac{J'_l(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma aK_l(\gamma a)} \right) \\ & = \left[\frac{\beta l}{n_1 k_0} \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Por lo tanto, se concluye que solo los valores de Ka y γa que cumplan con (4.53) podrán satisfacer las condiciones en la frontera núcleo-revestimiento [22], estos valores se relacionan entre sí por medio del parámetro V .

4.5.1 Parámetro V

Para el caso de una fibra óptica de índice escalonado, el parámetro V esta definido por las siguientes ecuaciones [2, 22, 23, 27]:

$$V^2 = (Ka)^2 + (\gamma a)^2, \quad (4.54)$$

a su vez,

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (4.55)$$

Como se aprecia el parámetro V relaciona la ecuación característica (4.53) con las características de la fibra óptica, radio del núcleo a , índice de refracción del núcleo n_1 , índice de refracción del revestimiento n_2 y la longitud de onda de la luz que incide en la fibra λ .

A continuación, se expone de que manera se encuentra ligado el parámetro V al concepto de modos de propagación.

4.6 Modos de propagación en una fibra óptica

El valor del parámetro V es definido por (4.55); de manera que cada pareja de valores Ka y γa que solucione (4.53) y (4.54), es también una solución a la ecuación de onda cumpliendo con las condiciones de frontera [22, 23].

Estas soluciones son conocidas como modos de propagación, cada modo de propagación corresponde a una solución y cuenta con su respectiva constante de propagación β [22, 23].

La luz que se propaga a través de una fibra óptica se divide en distintos modos de propagación [4]. Estos modos de propagación son ondas electromagnéticas que conservan la misma distribución de campo electromagnético al propagarse a lo largo de la fibra óptica [4].

El parámetro V es directamente proporcional al número de modos de propagación [2, 22]. Al apreciar (4.55) se concluye que el número de modos de propagación depende de las características de la fibra óptica y de la longitud de onda de la fuente de luz que incide en la misma [4].

Las soluciones a la ecuación característica varían dependiendo del índice l ; para el caso $l = 0$ se les conoce como modos transversales y cuando $l \neq 0$ como modos híbridos [22].

4.6.1 Modos transversales $l = 0$

Cuando $l = 0$, la ecuación (4.15) muestra que la dependencia ϕ se vuelve constante y entonces los modos de propagación son considerados transversales [22].

La ecuación característica se simplifica con $l = 0$, dado que el orden de las funciones de Bessel se reduce y el lado derecho de la ecuación (4.53) es igual a cero.

Por lo tanto, la ecuación (4.53) adopta la siguiente forma [22]:

$$\left(\frac{J'_0(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \frac{K'_0(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} \right) \left(\frac{J'_0(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_0(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} \right) = 0, \quad (4.56)$$

en la cual uno de los dos factores multiplicados a la izquierda tiene que ser cero para cumplir la igualdad.

Si el factor,

$$\frac{J'_0(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \frac{K'_0(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)}, \quad (4.57)$$

es igualado a cero, se tiene $A = 0$, lo cual corresponde con la componente $E_z = 0$ y por definición los modos asociados a esta igualdad son llamados *TE* (transversal eléctrico) [22, 23]. Considerando las relaciones [22],

$$J'_0 = -J_1(x), \quad (4.58)$$

$$K'_0 = -K_1(x), \quad (4.59)$$

se obtiene la siguiente expresión [22]:

$$\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0, \text{ para modos } TE. \quad (4.60)$$

Cuando el factor,

$$\frac{J'_0(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_0(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)}, \quad (4.61)$$

es igualado a cero, se tiene $B = 0$, lo cual corresponde con la componente $H_z = 0$ y por definición los modos asociados a esta igualdad son llamados

TM (transversal magnético) [22]. De igual forma al considerar (4.58) y (4.59) se encuentra la siguiente expresión [22]:

$$\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0, \text{ para modos } TM. \quad (4.62)$$

El número de soluciones $(\gamma a, Ka)$ posibles para (4.60) es el número de modos TE existentes en una fibra óptica con un parámetro V dado por (4.55) [4], de igual forma el número de soluciones $(\gamma a, Ka)$ para (4.62) corresponde con el número de modos TM en una fibra óptica con un parámetro V dado por (4.55) [4].

4.6.2 Modos híbridos $l \neq 0$

Considerando la siguiente aproximación [22],

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \approx 1, \quad (4.63)$$

que tiene su origen en la condición $n_1 \approx n_2$ presente en las fibras ópticas de índice escalonado [32].

La ecuación (4.53) es simplificada de manera considerable en la siguiente expresión [22],

$$\frac{J'_l(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = \pm l \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right). \quad (4.64)$$

Debido a que en una fibra óptica de índice escalonado solo las componentes con un ángulo muy superficial se pueden propagar, se considera la siguiente aproximación [22]:

$$\beta \approx n_1 k_0. \quad (4.65)$$

A continuación, la relación B/A es deducida a partir de (4.51), (4.52) y (4.64) [22]:

$$\frac{B}{A} = -\frac{\beta}{j\omega\mu} \frac{l \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right)}{\pm l \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right)}. \quad (4.66)$$

Considerando (4.65) en (4.66) se obtiene (4.67) [22],

$$j\frac{B}{A} = \pm \frac{1}{\eta_1}, \quad (4.67)$$

donde,

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}}; \quad (4.68)$$

utilizando la notación propuesta por Snitzer [33], los modos híbridos serán representados por soluciones a la ecuación (4.64), considerando signo positivo para los modos EH y signo negativo para los modos HE .

La ecuación (4.67) puede adoptar las siguientes dos formas (4.69) y (4.70), las cuales están asociadas al signo del índice l y por lo tanto (4.69) corresponde a modos HE y (4.70) corresponde a modos EH [22, 33]:

$$j\frac{B}{A}\eta_1 = +1, \quad (4.69)$$

$$j\frac{B}{A}\eta_1 = -1. \quad (4.70)$$

Con la finalidad de obtener expresiones simplificadas se consideran las siguientes identidades para las funciones de Bessel [22]:

$$J'_l(x) = J_{l-1}(x) - \frac{l}{x}J_l(x), \quad (4.71)$$

$$K'_l(x) = -K_{l-1}(x) - \frac{l}{x}K_l(x), \quad (4.72)$$

$$J'_l(x) = -J_{l+1}(x) + \frac{l}{x}J_l(x), \quad (4.73)$$

$$K'_l(x) = -K_{l+1}(x) + \frac{l}{x}K_l(x). \quad (4.74)$$

Utilizando la ecuación (4.64) con el signo negativo y considerando (4.71) y (4.72) se deduce (4.75) para modos HE [22],

$$\frac{J_{l-1}(Ka)}{KaJ_l(Ka)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0, \text{ para modos } HE, \quad (4.75)$$

de la misma forma considerando el signo positivo en (4.64) en conjunto con (4.73) y (4.74) se deduce (4.76) para modos EH [22],

$$\frac{J_{l+1}(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0, \text{ para modos } EH. \quad (4.76)$$

Las soluciones $(\gamma a, ka)$ para (4.75) corresponden con el número de modos de propagación HE [4] y de igual forma, las soluciones para (4.76) corresponden con el número de modos de propagación EH [4], en ambos casos, se considera una fibra óptica con un parámetro V dado por (4.55).

4.6.3 Notación para modos de propagación

Los modos de propagación son enumerados con dos subíndices l y m .

El valor de l indica el orden de las funciones de Bessel, para los modos transversales se considera $l = 0$ y los modos híbridos corresponden a valores enteros de l que son positivos y diferentes de cero [22].

m es un número entero, positivo y diferente de cero que ordena los modos de propagación de acuerdo a su constante de propagación [27]. El orden es de mayor a menor, de manera que $m = 1$ se asocia al modo con mayor constante de propagación y el máximo valor de m corresponde al modo con menor constante de propagación [22].

Es importante aclarar que este subíndice es independiente para cada uno de los cuatro tipos de modos TE , TM , HE y EH [33].

Por ejemplo, para el caso de los modos TE se tiene la notación $TE_{0,m}$, donde $TE_{0,1}$ es el modo TE con mayor constante de propagación; esto es igual para los modos TM donde se considera $TM_{0,m}$. El mismo razonamiento aplica para los modos híbridos, donde se tiene $HE_{l,m}$ y $EH_{l,m}$ [33].

4.6.4 Constantes de propagación

Con la intención de conocer los campos electromagnéticos de cada modo de propagación, es necesario sustituir sus respectivas constantes de propagación en las ecuaciones (4.41) a (4.45) y (4.46) a (4.50).

Por ello, existe la necesidad de encontrar las constantes de propagación. Para encontrarlas hay que resolver (4.60), (4.62), (4.75) y (4.76), obteniendo las parejas de valores $(\gamma a, Ka)$ que a su vez cumplan con el parámetro V dado por (4.54) [22]. Al sustituir estos valores en (4.45) o en (4.50) se encuentran las constantes de propagación.

Se utilizará un método gráfico para aproximar las soluciones. Este método consiste en plasmar las 4 ecuaciones modales (4.60), (4.62), (4.75) y (4.76) en el espacio $(\gamma a, Ka)$, evaluándolas cuando γa tiende a cero y cuando γa tiende a infinito, esto permite apreciar las intersecciones con la circunferencia de (4.54) [4]. Cada intersección representa una solución [22].

Se comenzara con los modos TE , representados por (4.60), evaluando el límite,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \left[\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0 \right], \quad (4.77)$$

esto implica que,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} \gg 1, \quad (4.78)$$

para satisfacer (4.77),

$$\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} \ll -1, \quad (4.79)$$

esto es posible cuando,

$$J_0(Ka) \rightarrow 0-, \quad (4.80)$$

$0-$ significa un número negativo que se acerca a cero. De esto se concluye que cuando $\gamma a \rightarrow 0$, los valores ka corresponden con las raíces de $J_0(Ka)$ [22].

Por otro lado,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow \infty} \left[\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0 \right], \quad (4.81)$$

en consecuencia,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow \infty} \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0, \quad (4.82)$$

para satisfacer (4.81),

$$\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} = 0, \quad (4.83)$$

por lo que,

$$J_1(Ka) = 0. \quad (4.84)$$

Por lo tanto, cuando $\gamma a \rightarrow \infty$, los valores de Ka corresponden con las raíces de $J_1(Ka) = 0$ [22].

En el caso de los modos TM , se considera la siguiente ecuación [22],

$$\frac{J_1(Ka)}{KaJ_0(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0, \quad (4.85)$$

esta ecuación es parecida a la de los modos TE , la única diferencia es el factor $\frac{n_2}{n_1}$.

En esta tesis se consideran fibras ópticas de índice escalonado y por definición estas fibras cumplen con la condición $n_1 \approx n_2$ [2]. Esta condición implica que $\frac{n_2}{n_1} \approx 1$ y por ello, al evaluar $\gamma a \rightarrow 0$ y $\gamma a \rightarrow \infty$ en (4.85) se llega a las mismas conclusiones previamente obtenidas para el caso de los modos TE [22].

En la Fig. 4.1 se gráfica la circunferencia de la ecuación del parámetro V (4.54) junto con las ecuaciones para modos TE (4.60) y para modos TM (4.62). Las curvas representan las ecuaciones (4.60) y (4.62) al ser evaluadas en $\gamma a \rightarrow 0$ y $\gamma a \rightarrow \infty$.

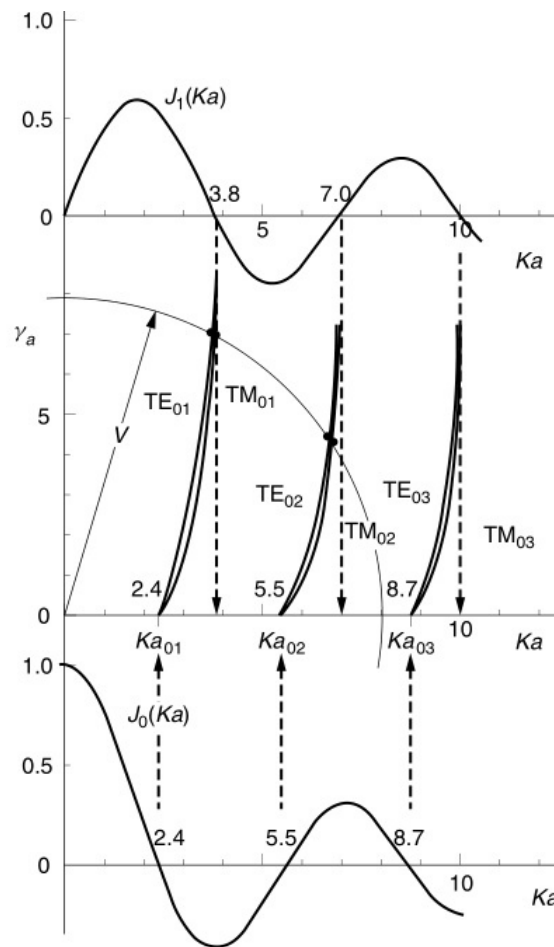


Figura 4.1: Curvas de las ecuaciones de los modos $TE_{0,m}$ y $TM_{0,m}$ [22].

En la Fig. 4.1 se aprecia que las curvas de los modos TE y TM son similares y que cada intersección con la circunferencia del parámetro V , representa un modo de propagación.

Cada modo de propagación se encuentra asociado a una frecuencia de corte [4]. La frecuencia de corte representa el valor mínimo del parámetro V a partir del cual un modo de propagación se presenta en la fibra óptica [22]. La frecuencia de corte es el valor de Ka cuando $\gamma a \rightarrow 0$ [22].

Los valores de las raíces de la función de Bessel de primer tipo y orden 0, $J_0(Ka)$ son las frecuencias de corte para cada uno de los modos transversales [22]. Al observar la Fig. 4.1 se puede concluir que los modos TE y TM tienen las mismas

frecuencias de corte.

Estas frecuencias de corte obedecen el siguiente patrón; cada pareja de modos $TE_{0,m}$ y $TM_{0,m}$ tiene una frecuencia de corte que corresponde con la raíz número m de la función $J_0(Ka)$ [22].

Por ejemplo, la frecuencia de corte de la pareja $TE_{0,3}$ y $TM_{0,3}$ es la tercera raíz de la función $J_0(Ka)$, es decir, su frecuencia de corte es 8.7.

Las frecuencias de corte dan la posibilidad de estimar el número de modos que se presentan [4]. Para que un modo de propagación se presente, el parámetro V debe ser mayor que su frecuencia de corte [4], por ejemplo, en la Fig. 4.1 se presentan los modos $TE_{0,1}$, $TM_{0,1}$, $TE_{0,2}$ y $TM_{0,2}$.

A continuación, se aplicará el mismo razonamiento para el caso de los modos híbridos. En el caso de los modos HE [22],

$$\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \left[\frac{J_{l-1}(Ka)}{KaJ_l(Ka)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \right], \quad (4.86)$$

para analizar esta ecuación hay que considerar dos situaciones, cuando $l = 1$ y $l \geq 2$ [22].

Cuando $\gamma a \rightarrow 0$, se consideran las siguientes identidades [22],

$$\frac{K_0(\gamma a)}{\gamma a K_1(\gamma a)} = \ln \left[\frac{2}{(1.782)(\gamma a)} \right], \quad \text{donde } l = 1, \quad (4.87)$$

$$\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = \frac{1}{2(l-1)}, \quad \text{donde } l \geq 2. \quad (4.88)$$

Al analizar el caso $l \geq 2$, se aplica (4.88) en (4.86) y se obtiene [22],

$$\frac{J_{l-1}(Ka)}{KaJ_l(Ka)} = \frac{1}{2(l-1)}. \quad (4.89)$$

Utilizando la siguiente identidad [22],

$$J_{q+1}(z) + J_{q-1}(z) = \frac{2q}{z} J_q(z). \quad (4.90)$$

Considerando $q = l - 1$, $z = Ka$ y (4.89) en (4.90) se obtiene [22],

$$KaJ_{l-2}(Ka) = 0. \quad (4.91)$$

De (4.91) se concluye que cuando $l \geq 2$ las frecuencias de corte de los modos $HE_{l \geq 2, m}$ corresponden con las raíces m de $J_{l-2}(Ka)$ [22]. Por ejemplo, el modo $HE_{2,1}$ tiene como frecuencia de corte la primera raíz de $J_0(Ka)$. El caso $Ka = 0$ no fue considerado como raíz de (4.91) por que rompe la identidad (4.89) [22].

Cuando $l = 1$, se considera la identidad (4.87) y por lo tanto [22],

$$\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \frac{K_0(\gamma a)}{\gamma a K_1(\gamma a)} \gg 1, \quad (4.92)$$

para satisfacer (4.86) es necesario que [22],

$$\frac{J_0(Ka)}{Ka J_1(Ka)} \gg 1, \quad (4.93)$$

esto implica que [22],

$$Ka J_1(Ka) = 0, \quad (4.94)$$

Con (4.94) se concluye que para $l = 1$, las frecuencias de corte de los modos $HE_{1, m}$ están dadas por las raíces m de $J_1(Ka)$ [22].

Por ejemplo, la frecuencia de corte del modo $HE_{1,1}$ corresponde con la primera raíz de $J_1(Ka)$, la cual es igual a 0 [22, 23]. Debido a que carece de frecuencia de corte este modo es conocido como el modo fundamental y por ello, está presente en cualquier fibra óptica que propague luz [22, 23].

Al evaluar,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow \infty} \left[\frac{J_{l-1}(Ka)}{Ka J_l(Ka)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \right], \quad (4.95)$$

por lo tanto,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow \infty} \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0, \quad (4.96)$$

$$\frac{J_{l-1}(Ka)}{Ka J_l(Ka)} = 0, \quad (4.97)$$

esto implica que,

$$J_{l-1}(Ka) = 0, \quad (4.98)$$

de manera que cuando $\gamma a \rightarrow \infty$, los valores de Ka corresponden con las raíces de $J_{l-1}(Ka)$ [22].

Para los modos EH ,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \left[\frac{J_{l+1}(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \right], \quad (4.99)$$

el segundo término de (4.99) tiende a ser infinito y por lo tanto, el denominador del primer término debe ser [22],

$$KaJ_l(Ka) = 0, \quad (4.100)$$

Las frecuencias de corte de los modos $EH_{l,m}$ están dadas por las raíces de (4.100), al considerar la siguiente identidad [22],

$$J_l(Ka) = \frac{1}{l!} \left(\frac{Ka}{2} \right)^l, \quad (4.101)$$

en el primer término de (4.99), se aprecia que cuando $Ka = 0$ este término no tiende a ser infinito y por ello, la raíz $ka = 0$ es descartada [22]. Finalmente, las frecuencias de corte de los modos $EH_{l,m}$ son definidas por las raíces m de la función $J_l(Ka)$ [22].

Al considerar,

$$\lim_{\gamma a \rightarrow \infty} \left[\frac{J_{l+1}(Ka)}{KaJ_l(Ka)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \right], \quad (4.102)$$

el segundo término de (4.102) tiende a ser 0 y por ello, el numerador del primer término tiene que ser [22],

$$J_{l+1}(Ka) = 0, \quad (4.103)$$

por lo que las raíces de (4.103) representan los valores de Ka cuando $\gamma a \rightarrow \infty$ [22].

En esta sección se ha encontrado que los valores de $(\gamma a, Ka)$ que solucionan cada una de las 4 ecuaciones modales (4.60), (4.62), (4.75) y (4.76), están entre $(\gamma a \rightarrow 0, Ka)$ y $(\gamma a \rightarrow \infty, Ka)$ [4]. En la siguiente tabla se exponen las conclusiones [4, 22].

Modos	Frecuencia de corte, ($\gamma a \rightarrow 0, Ka$)	Caso ($\gamma a \rightarrow \infty, Ka$)
$TE_{0,m}, TM_{0,m}$	$J_0(Ka) = 0$	$J_1(Ka) = 0$
$HE_{1,m}$	$J_1(Ka) = 0$	$J_l(Ka) = 0$, donde $Ka \neq 0$
$HE_{l \geq 2,m}$	$J_{l-2}(Ka)$, donde $Ka \neq 0$	$J_l(Ka) = 0$, donde $Ka \neq 0$
$EH_{l,m}$	$J_{l-1}(Ka) = 0$	$J_{l+1}(Ka) = 0$

Tabla 4.1: Límites $\gamma a \rightarrow 0$ y $\gamma a \rightarrow \infty$ evaluados en las ecuaciones modales.

4.6.5 Modos linealmente polarizados

En esta tesis se consideran fibras ópticas de índice escalonado, que por definición cumplen con la condición de $n_1 \approx n_2$ [2]. En este caso particular, existen grupos de modos de propagación que cuentan con la misma constante de propagación [2, 22].

En la Fig. 4.2, se aprecia como estos modos se agrupan por sus frecuencias de corte.

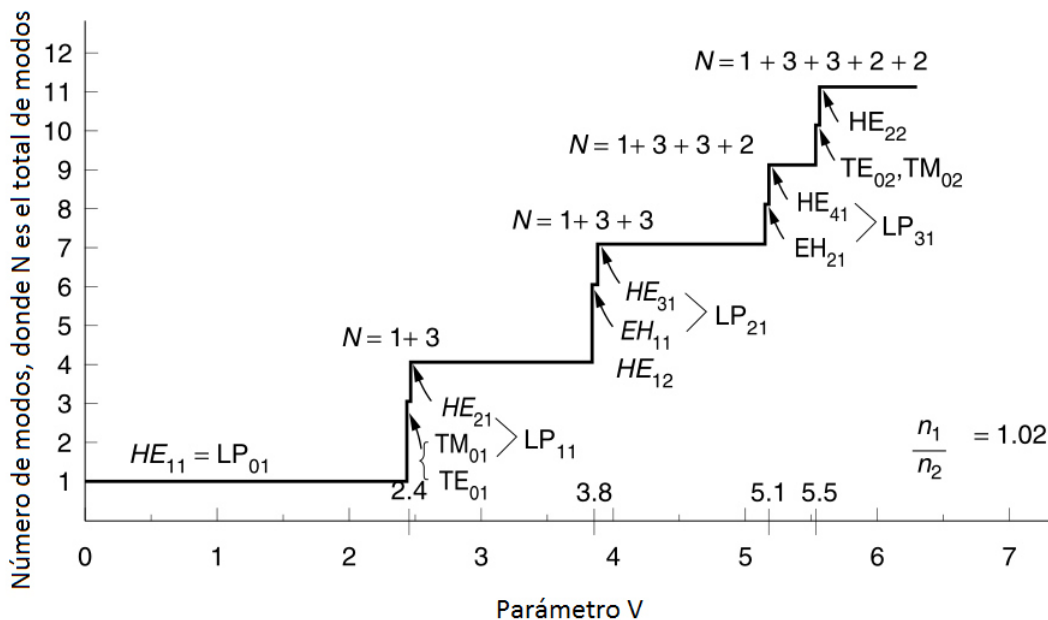


Figura 4.2: Número de modos en una fibra óptica de índice escalonado en función del parámetro V [22].

En la Fig. 4.2 se observa que una fibra óptica de índice escalonado que opere con la condición de un $V \leq 2.4$ funcionara como fibra óptica monomodo, propagando unicamente el modo fundamental $HE_{1,1}$ [4]. En caso contrario, funcionará como fibra óptica multimodo y propagará varios modos de propagación [4].

En [32] se propuso el concepto de modos linealmente polarizados o modos LP , que consiste en identificar como modos LP a los grupos de modos que cuentan con la misma constante de propagación.

Los modos LP son nombrados de acuerdo a las siguientes reglas [27]:

1. Cada modo $LP_{0,m}$ corresponde a un modo $HE_{1,m}$.
2. Cada modo $LP_{1,m}$ corresponde a un trío de modos $TE_{0,m}$, $TM_{0,m}$ y $HE_{2,m}$.
3. Cada modo $LP_{x,m}$, donde $x \geq 2$, corresponde a una pareja de modos $HE_{x+1,m}$ y $EH_{x-1,m}$.

Las distribuciones de amplitud de los modos LP corresponden a las componentes transversales en coordenadas cartesianas de los campos eléctricos de los modos que los componen [27].

Hay dos formas de definir los modos LP , en función de las componentes E_x o utilizando las componentes E_y , esto se explica a continuación [23, 27]:

1. La distribución del modo $LP_{0,m}$ se define por la componente $E_{x|y}^{HE_{1,m}}$.
2. La distribución del modo $LP_{1,m}$ se puede definir dos formas, por la suma de las componentes $E_{x|y}^{TE_{0,m}} + E_{x|y}^{HE_{2,m}}$ o por $E_{x|y}^{TM_{0,m}} + E_{x|y}^{HE_{2,m}}$.
3. La distribución del modo $LP_{x,m}$ se define por la suma de las componentes $E_{x|y}^{HE_{x+1,m}} + E_{x|y}^{EH_{x-1,m}}$.

El índice superior señala a que modo corresponde ese campo eléctrico y el

subíndice $x|y$ representa las dos posibilidades de usar componentes en x o en y para el campo eléctrico.

A continuación, la densidad de potencia modal es calculada considerando las expresiones para las componentes en x , y y z de sus respectivos campos electromagnéticos vectoriales.

4.7 Densidad de potencia modal

La densidad de potencia o densidad de energía por unidad de superficie de cualquier onda electromagnética es descrita por el vector de Poynting [25].

Dado que se consideran campos electromagnéticos en forma fasorial, la expresión para el vector de Poynting adopta la siguiente forma [27]:

$$S_z = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot e_z, \quad (4.104)$$

donde $*$ representa conjugado complejo y e_z el vector unitario en el eje z .

Con la finalidad de simplificar el calculo del vector de Poynting las componentes de los campos electromagnéticos vectoriales serán expresadas en coordenadas cartesianas, el cambio de coordenadas se hará utilizando la matriz Jacobiana.

La matriz Jacobiana define la siguiente relación entre las componentes vectoriales en ambos sistemas de coordenadas [28]:

$$\begin{bmatrix} E_x \hat{x} \\ E_y \hat{y} \\ E_z \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \hat{r} \\ E_\phi \hat{\phi} \\ E_z \hat{z} \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

donde $\hat{}$ representa a los vectores unitarios, de igual forma esta relación es valida para el campo magnético.

Donde las componentes vectoriales E_z , H_z , E_r , E_ϕ , H_r y H_ϕ en la región del núcleo son definidas por las ecuaciones (4.18), (4.19), (4.41), (4.42), (4.43)

y (4.44); en la región del revestimiento estas componentes corresponden a las ecuaciones (4.22), (4.23), (4.46), (4.47), (4.48) y (4.49). Estas expresiones definen el campo electromagnético vectorial en ambas regiones.

La potencia modal en la región del núcleo y en la región del revestimiento es definida por la integral de la sección transversal del vector de Poynting en ambas regiones, como se muestra a continuación [27, 32]:

$$P_n = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r(E_x H_y^* - E_y H_x^*) d\phi dr, \quad (4.106)$$

$$P_r = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} r(E_x H_y^* - E_y H_x^*) d\phi dr, \quad (4.107)$$

donde P_n y P_r representan potencia modal en el núcleo y en el revestimiento respectivamente, b representa el radio total de la fibra óptica incluyendo la sección del revestimiento.

Evaluando estas expresiones con los campos electromagnéticos correspondientes a cada modo de propagación, es posible conocer las potencias modales de los mismos.

La potencia total de un modo de propagación esta dada por $P_n + P_r$ [27]; lo cual representa la potencia total propagada en ambas regiones.

En el siguiente capítulo se exponen los resultados para los casos considerados.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Consideraciones

Se analizaron dos fibras ópticas de índice escalonado con características comerciales, una monomodo con dimensiones radiales de $9/125 \mu m$ y una multimodo con dimensiones radiales $50/125 \mu m$, en estas fibras los valores de los índices de refracción satisfacen la relación $n_1 \approx n_2$, donde $n_1 = 1.46$ y $n_2 = 1.459$.

En ambas fibras se utilizó una fuente de luz con longitud de onda, $\lambda = 1550 nm$, esta longitud de onda es ampliamente usada en los sistemas de comunicaciones ópticos [1–4].

Se consideró que la fuente de luz tiene una potencia, $P_F = 9$ picowatts (pw) y se asume que esta potencia se divide en partes iguales entre los modos de propagación.

Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo computacional, este algoritmo trabaja con la teoría del capítulo anterior.

Al considerar la ecuación (4.105), las componentes de los campos electromagnéticos vectoriales en coordenadas cartesianas son,

$$E_x = E_r \cos \phi - E_\phi \sin \phi, \quad (5.1)$$

$$E_y = E_r \sin \phi + E_\phi \cos \phi, \quad (5.2)$$

$$H_x = H_r \cos \phi - H_\phi \sin \phi, \quad (5.3)$$

$$H_y = H_r \sin \phi + H_\phi \cos \phi, \quad (5.4)$$

donde se consideran las ecuaciones (4.41) a (4.45) para la región del núcleo y las ecuaciones (4.46) a (4.50) para la región del revestimiento.

Evaluando las ecuaciones (5.1) a (5.4) con cada una de las distintas constantes de propagación se obtienen las componentes de los campos electromagnéticos vectoriales para cada uno de los modos de propagación.

Considerando (4.106) y (4.107) se conocen las potencias modales en el núcleo P_n y en el revestimiento P_r . Los coeficientes A , B , C y D de las ecuaciones (4.41) a (4.50) fueron ajustados para que cada modo tuviera la misma potencia total, es decir, al sumar $P_n + P_r$ todos los modos tendrán la misma potencia.

En este capítulo se presentan gráficas del campo vectorial eléctrico, campo vectorial magnético y distribución de potencia para cada modo de propagación. Estas gráficas se acomodan en grupos que corresponden a los modos LP .

Las gráficas de los campos vectoriales electromagnéticos y las gráficas de los modos LP hacen referencia al área de la sección transversal del núcleo.

Las gráficas de las distribuciones de potencia corresponden principalmente al área de la sección transversal del núcleo. La división entre el núcleo y el revestimiento es representada por una línea blanca punteada.

La sección del revestimiento no es totalmente considerada en las gráficas, debido a que sus campos electromagnéticos representan una atenuación exponencial [22, 23]; esto es por la naturaleza de las ecuaciones (4.46) a (4.50).

A continuación se presentan los resultados, primeramente con la fibra monomodo $9/125 \mu m$ y posteriormente con la fibra multimodo $50/125 \mu m$.

5.2 Fibra óptica monomodo

Esta fibra óptica tiene dimensiones radiales de $9/125 \mu m$, estas medidas corresponden con $2a/2b$ y por ello el radio del núcleo es $a = 4.5 \mu m$, como se menciona en la sección anterior se considera $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1.459$ y una fuente de luz de $\lambda = 1550 nm$.

Al considerar estos valores en la ecuación del parámetro V ,

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \tag{5.5}$$

se obtiene $V = 0.985$. En este caso $V \leq 2.4$ y en consecuencia, solo se presenta el modo fundamental $HE_{1,1}$ [22].

En la siguiente tabla se expone el modo $HE_{1,1}$, su constante de propagación β , la potencia modal en el núcleo P_n , la potencia modal en el revestimiento P_r y la frecuencia de corte.

Modos LP	Modos	β	P_n	P_r	Frec. de corte
$LP_{0,1}$	$HE_{1,1}$	5.9071×10^6	$7.4412 pw$	$1.5588 pw$	0

Tabla 5.1: Modo de propagación en fibra óptica monomodo $9/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$.

En el revestimiento las ondas electromagnéticas se atenúan y por ello, se aprecia $P_n > P_r$. Al ser el único modo, este modo recibe toda la potencia de la fuente de luz [22]. La potencia modal total es $P_n + P_r = P_F = 9 pw$.

A continuación, se presentan las gráficas correspondientes a este caso.

5.2.1 Modo $LP_{0,1}$

El modo $LP_{0,1}$ corresponde al modo $HE_{1,1}$.

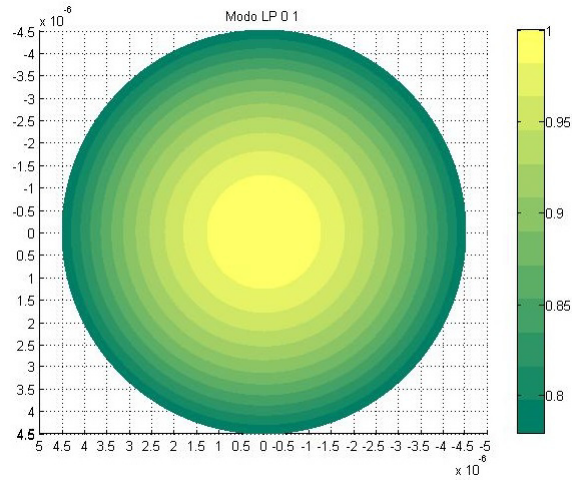
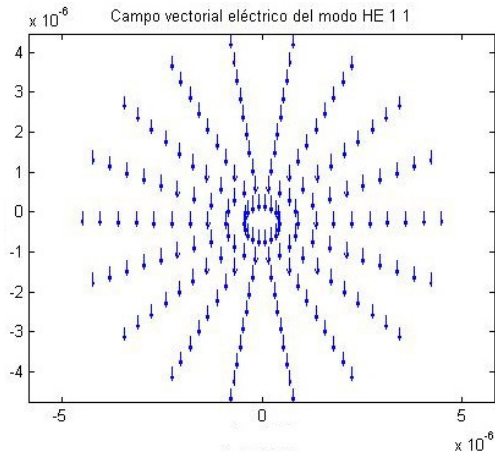


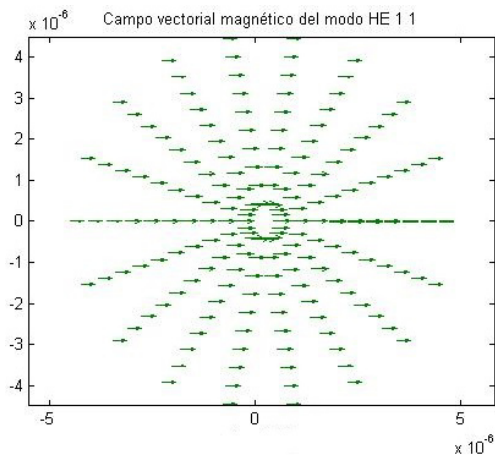
Figura 5.1: Distribución de amplitud del modo $LP_{0,1}$ en fibra óptica monomodo $9/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$.

La Fig. 5.1 representa la amplitud de la componente E_x del modo $HE_{1,1}$.

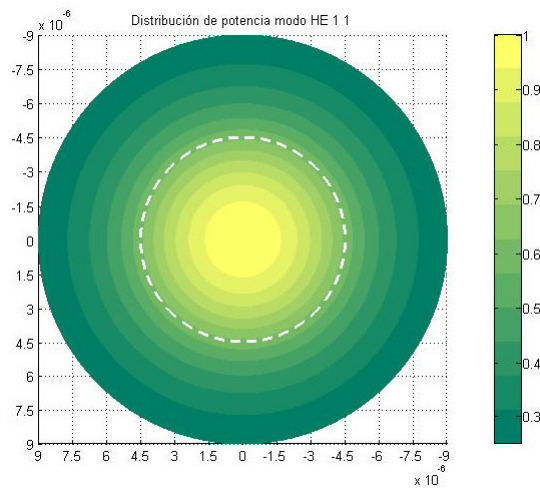
En la siguiente página se aprecian los campos electromagnéticos vectoriales del modo $HE_{1,1}$ y su distribución de potencia.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.2: Modo $HE_{1,1}$ en fibra óptica monomodo $9/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.

5.3 Fibra óptica multimodo

En este caso las dimensiones radiales son $50/125 \mu m$ y por ello, el radio del núcleo es $a = 25 \mu m$, de igual forma se considera $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1.459$ y una fuente de luz de $\lambda = 1550 nm$.

Al considerar (5.5) se obtiene un parámetro $V = 5.475$, en este caso $V > 2.4$, lo que implica que se presenten varios modos de propagación [22]. Utilizando la teoría del capítulo anterior se encontró que en este caso se presentan 9 modos de propagación, los cuales se exponen en la siguiente tabla.

Modos LP	Modos	β	P_n	P_r	Frec. de corte
$LP_{0,1}$	$HE_{1,1}$	5.9178×10^6	$.97745 pw$	$.02255 pw$	0
$LP_{1,1}$	$TE_{0,1}$	5.9170×10^6	$.93753 pw$	$.062473 pw$	2.4048
	$TM_{0,1}$	5.9170×10^6	$.93752 pw$	$.062479 pw$	2.4048
	$HE_{2,1}$	5.9170×10^6	$.93753 pw$	$.062472 pw$	2.4048
$LP_{0,2}$	$HE_{1,2}$	5.9156×10^6	$.82959 pw$	$.17041 pw$	3.8317
$LP_{2,1}$	$HE_{3,1}$	5.9159×10^6	$.87292 pw$	$.12708 pw$	3.8317
	$EH_{1,1}$	5.9159×10^6	$.87290 pw$	$.12710 pw$	3.8317
$LP_{3,1}$	$HE_{4,1}$	5.9147×10^6	$.75614 pw$	$.24386 pw$	5.1356
	$EH_{2,1}$	5.9147×10^6	$.75621 pw$	$.24379 pw$	5.1356

Tabla 5.2: Modos de propagación en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$.

En esta tabla se aprecia que los modos de propagación se agrupan en modos LP . Estos modos LP se componen de modos de propagación que tienen la misma constante de propagación β [22].

Al igual que en el caso de la fibra monomodo, las potencias en el núcleo P_n y en el revestimiento P_r cumplen con la condición, $P_n > P_r$. La potencia de la fuente, $P_F = 9 pw$, se dividió en partes iguales para todos los modos, es decir, en cada modo $P_n + P_r = 1 pw$.

A continuación, se presentarán las respectivas gráficas para este caso.

5.3.1 Modo $LP_{0,1}$

El modo $LP_{0,1}$ corresponde al modo $HE_{1,1}$.

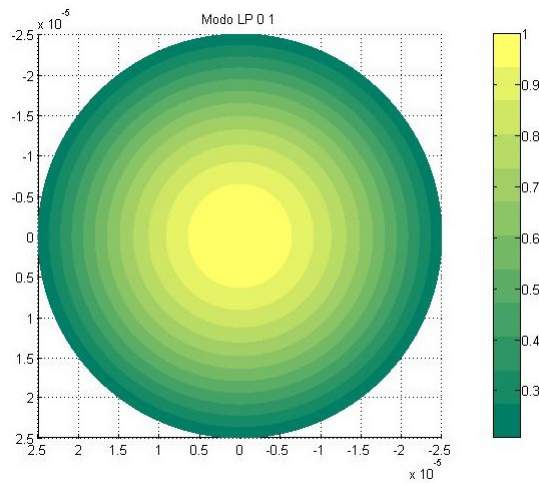
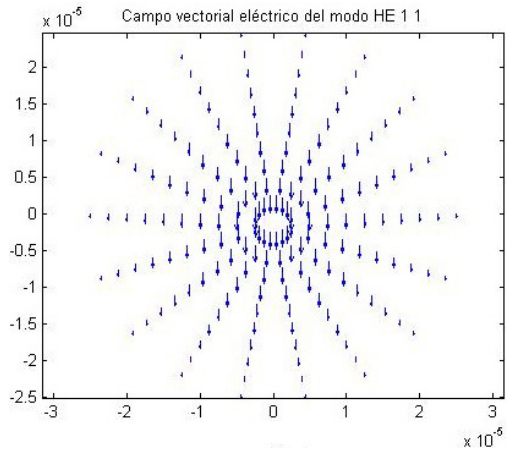


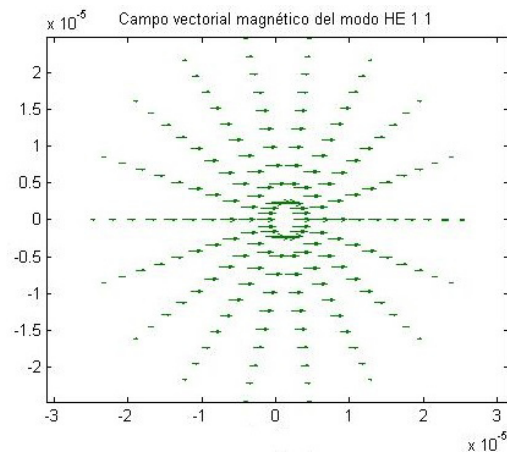
Figura 5.3: Distribución de amplitud del modo $LP_{0,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$.

La Fig. 5.3 representa la amplitud de la componente E_x del modo $HE_{1,1}$.

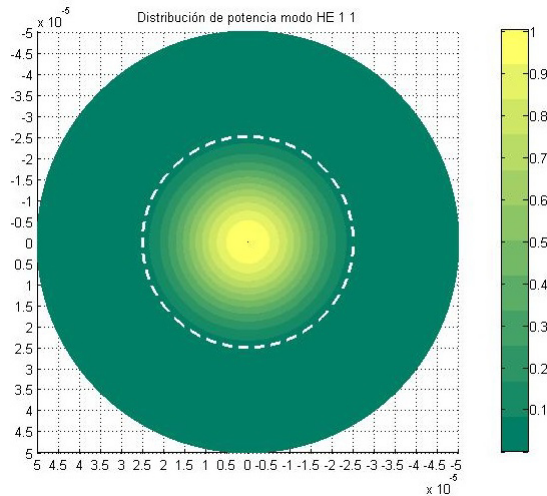
En la siguiente página se aprecian las gráficas de los campos electromagnéticos vectoriales y de la distribución de potencia para el modo $HE_{1,1}$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.4: Modo $HE_{1,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.

5.3.2 Modo $LP_{1,1}$

El modo $LP_{1,1}$ se compone de los modos $TE_{0,1}$, $TM_{0,1}$ y $HE_{2,1}$.

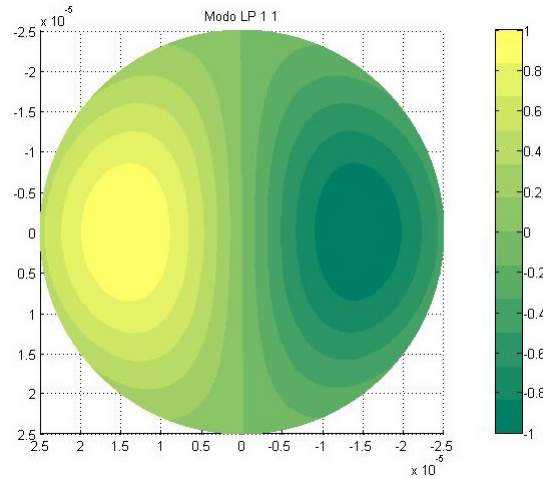
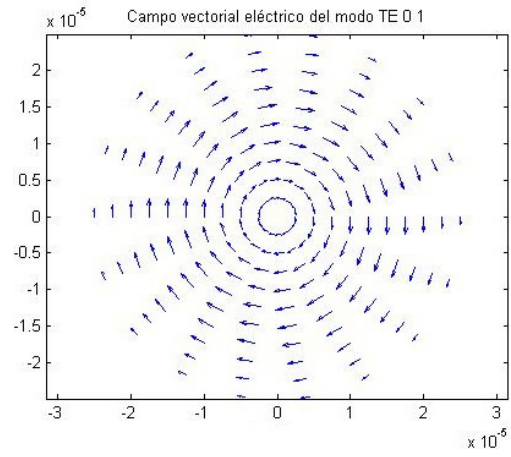


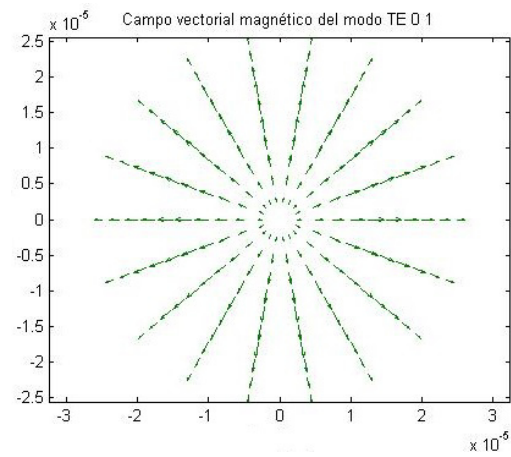
Figura 5.5: Distribución de amplitud del modo $LP_{1,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$.

La Fig. 5.9 representa la amplitud de la suma de las componentes $E_x^{TM_{0,1}} + E_x^{HE_{2,1}}$.

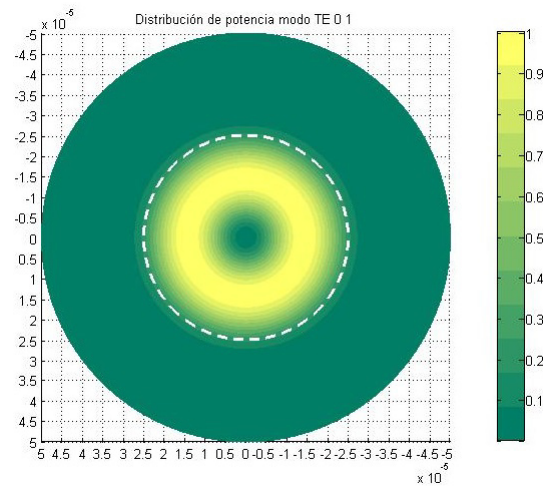
A continuación, se presentan las gráficas de los campos vectoriales y distribuciones de potencia de cada uno de los tres modos.



(a)

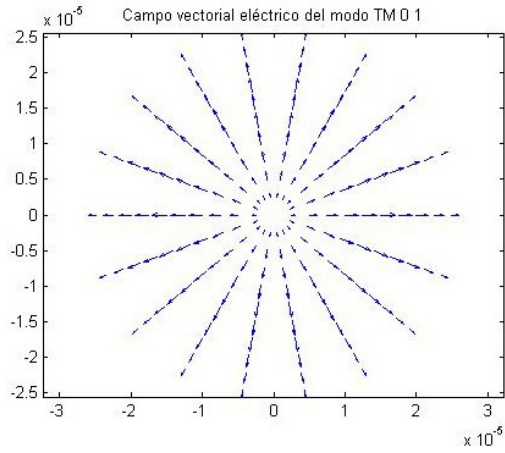


(b)

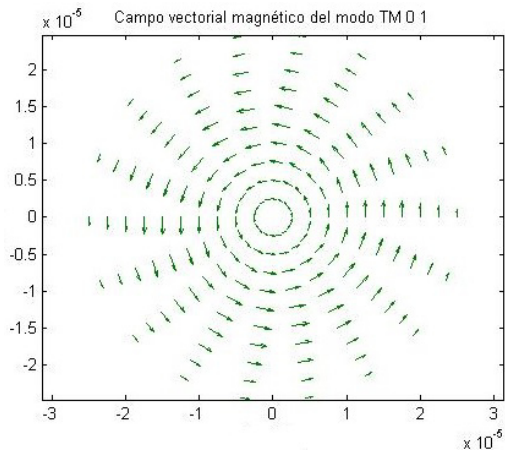


(c)

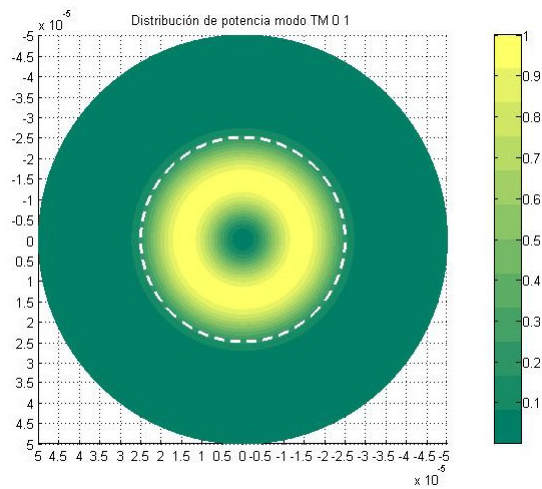
Figura 5.6: Modo $TE_{0,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.



(a)

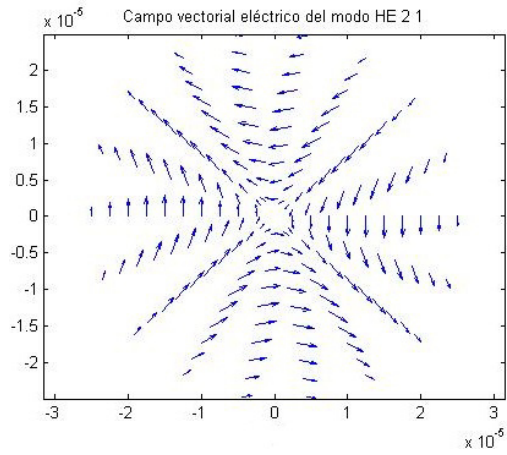


(b)

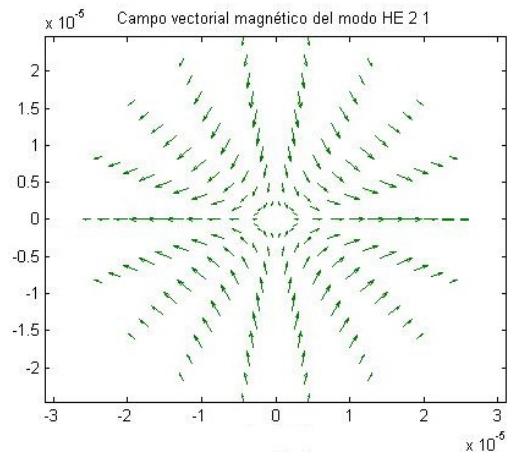


(c)

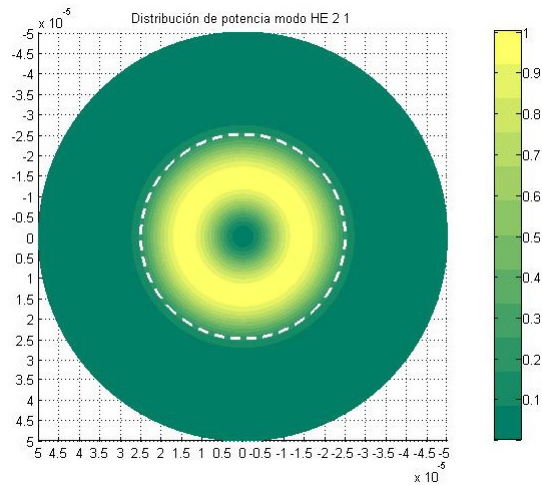
Figura 5.7: Modo $TM_{0,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.8: Modo $HE_{2,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.

5.3.3 Modo $LP_{0,2}$

El modo $LP_{0,2}$ corresponde al modo $HE_{1,2}$.

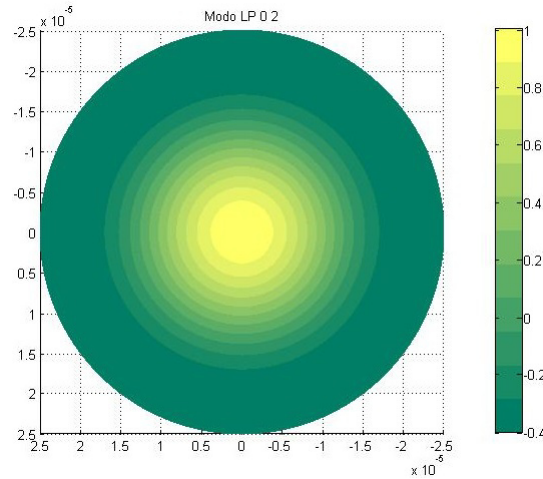
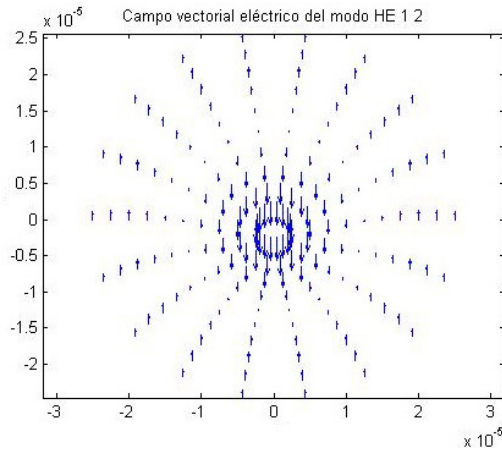


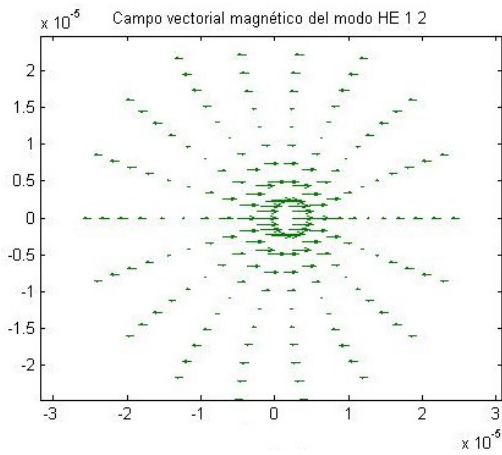
Figura 5.9: Distribución de amplitud del modo $LP_{0,2}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$.

La Fig. 5.9 representa la amplitud de la componente E_x del modo $HE_{1,2}$.

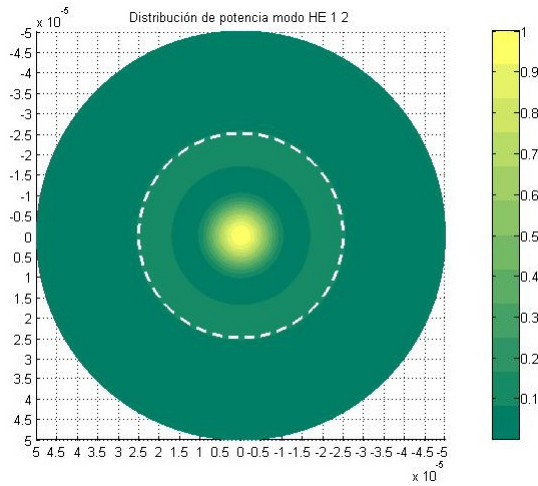
En la siguiente página se aprecian las gráficas de los campos electromagnéticos vectoriales y la distribución de potencia para el modo $HE_{1,2}$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.10: Modo $HE_{1,2}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.

5.3.4 Modo $LP_{2,1}$

El modo $LP_{2,1}$ se compone de los modos $HE_{3,1}$ y $EH_{1,1}$.

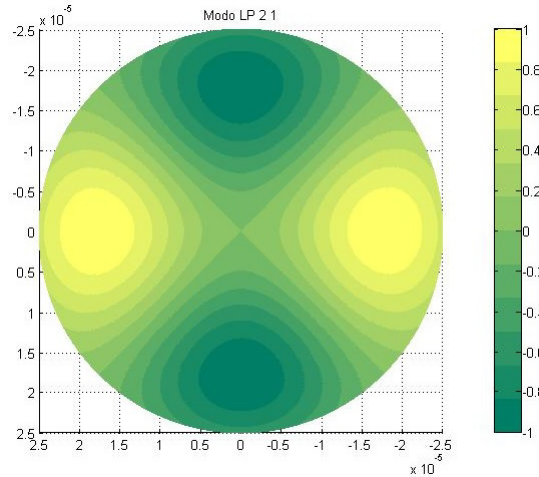
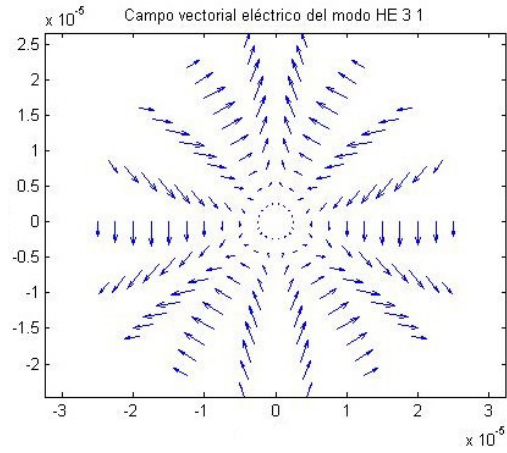


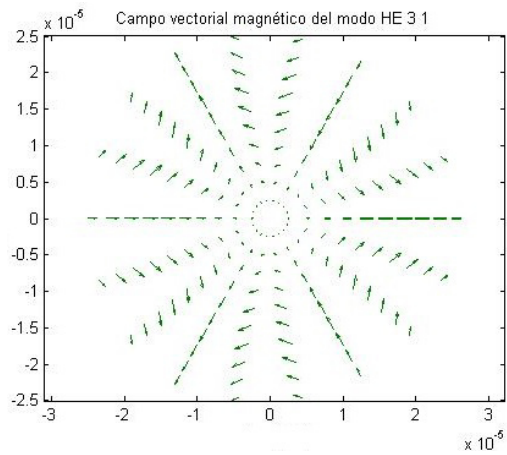
Figura 5.11: Distribución de amplitud del modo $LP_{2,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$.

La Fig. 5.11 representa la amplitud de la suma de las componentes $E_x^{HE_{3,1}} + E_x^{EH_{1,1}}$.

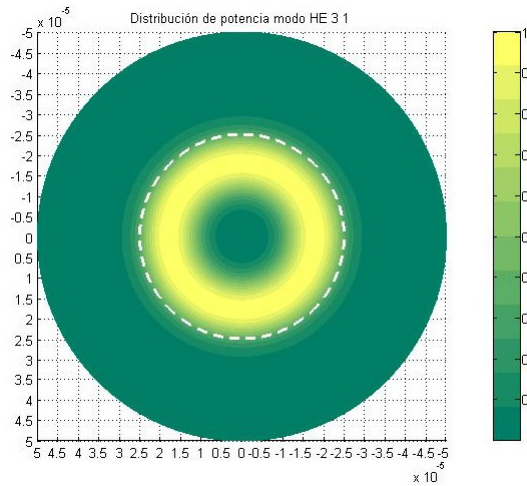
A continuación, se presentan las gráficas de los campos vectoriales electromagnéticos y de las distribuciones de potencia para ambos modos.



(a)

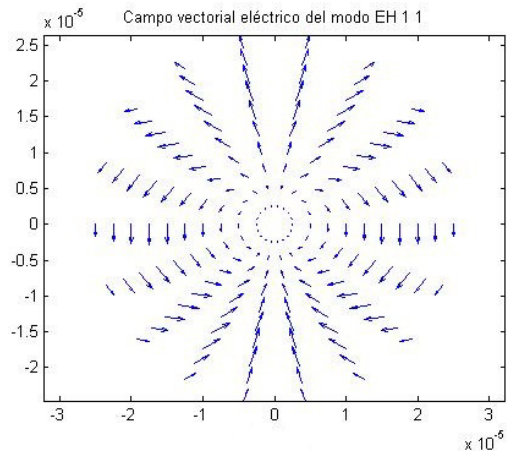


(b)

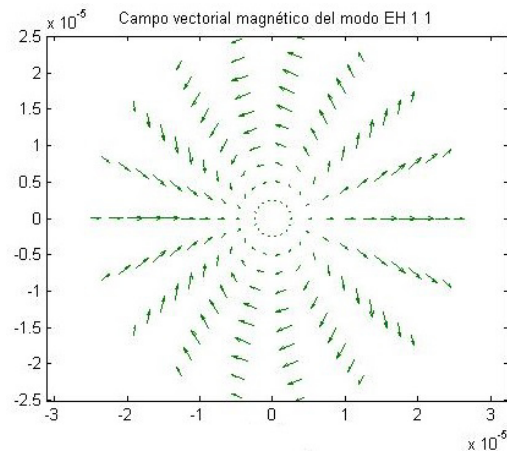


(c)

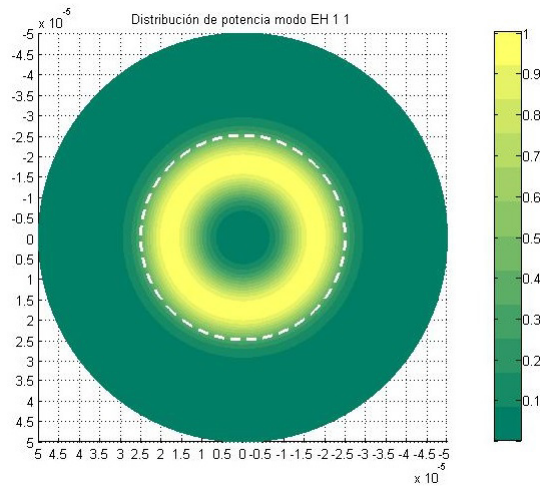
Figura 5.12: Modo $HE_{3,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu\text{m}$ a $\lambda = 1550 \text{ nm}$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.13: Modo $EH_{1,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.

5.3.5 Modo $LP_{3,1}$

El modo $LP_{3,1}$ se compone de los modos $HE_{4,1}$ y $EH_{2,1}$.

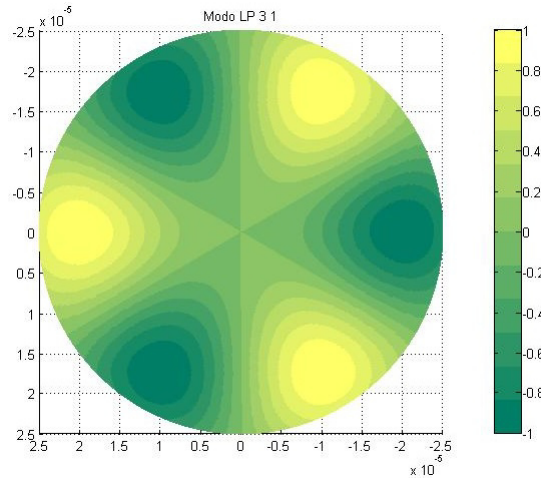
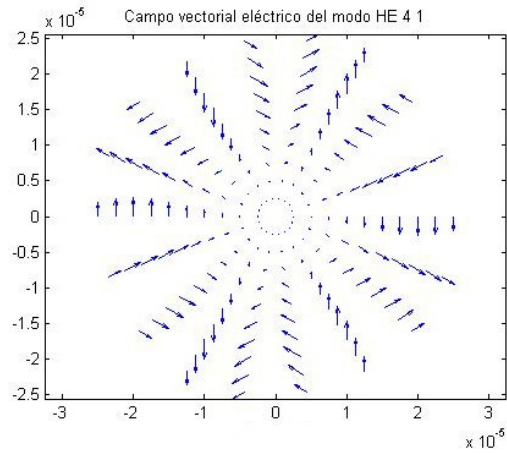


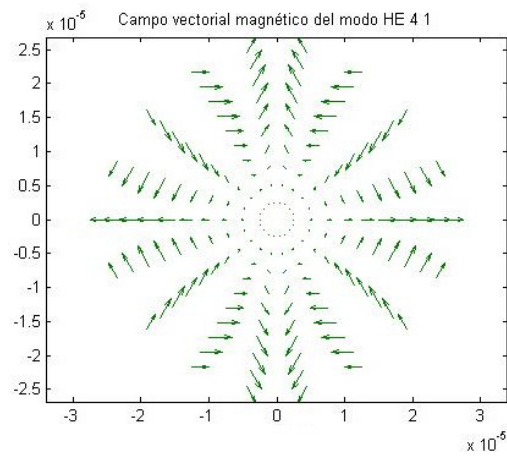
Figura 5.14: Distribución de amplitud del modo $LP_{3,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$.

La Fig. 5.14 representa la amplitud de la suma de las componentes $E_x^{HE_{4,1}} + E_x^{EH_{2,1}}$.

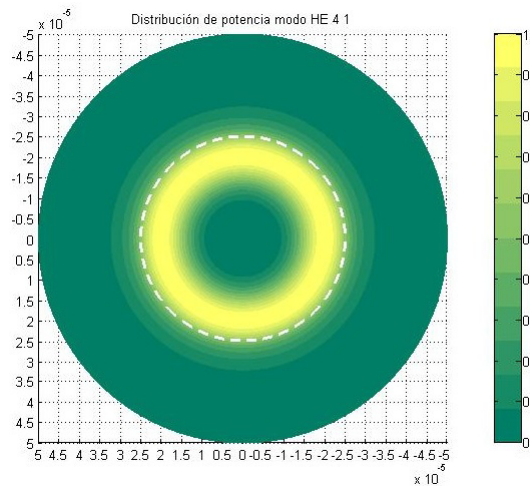
A continuación, se presentan las gráficas de los campos vectoriales electromagnéticos y de las distribuciones de potencia para ambos modos.



(a)

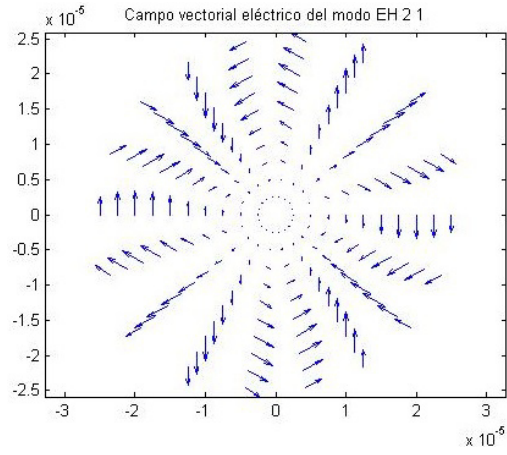


(b)

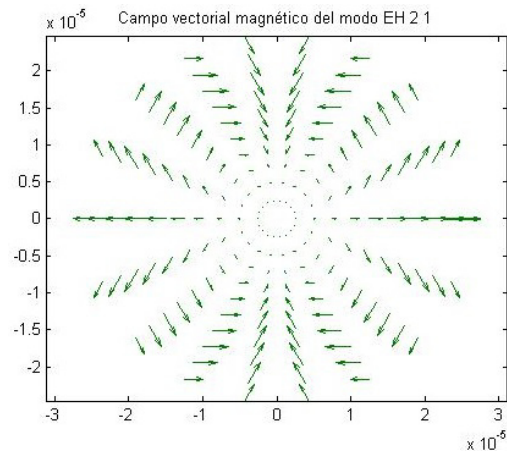


(c)

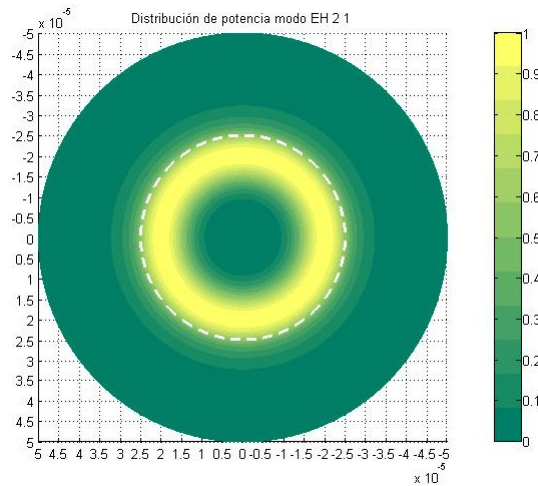
Figura 5.15: Modo $HE_{4,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.16: Modo $EH_{2,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu\text{m}$ a $\lambda = 1550 \text{ nm}$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.

Los resultados expuestos en este capítulo son congruentes con la teoría desarrollada en las publicaciones [32–37].

Los campos vectoriales eléctrico y magnético de cada modo de propagación presentan su ortogonalidad característica [26]. Es decir, estos campos vectoriales son perpendiculares.

En el siguiente capítulo se exponen las conclusiones de esta tesis.

Capítulo 6

Conclusiones

La luz es una onda electromagnética y cuando es propagada dentro de una fibra óptica se divide en distintas ondas electromagnéticas, estas ondas electromagnéticas son conocidas como modos de propagación.

En esta tesis se utilizó la teoría electromagnética para caracterizar los modos de propagación que se presentan al incidir una fuente de luz en una fibra óptica de índice escalonado.

Por medio de la ecuación de Helmholtz se obtuvieron expresiones para las componentes de los campos vectoriales electromagnéticos que se propagan en una fibra óptica.

Posteriormente, se aplicaron las condiciones de frontera en estas componentes vectoriales, esto dio lugar a la ecuación característica.

Se explicó que el número de soluciones a la ecuación característica es directamente proporcional al parámetro V de la fibra óptica.

Se expuso que cada solución a la ecuación característica es una constante de propagación y que a su vez, cada constante de propagación representa un modo de propagación.

Se observó que en el caso particular de una fibra óptica de índice escalonado, existen grupos de modos de propagación que comparten la misma constante de propagación.

Al sustituir las constantes de propagación en las expresiones para las componentes de los campos vectoriales electromagnéticos se conocen los campos electromagnéticos de cada modo de propagación. Utilizando el vector Poynting se conocen las potencias y distribuciones de potencia de los modos de propagación.

Este trabajo es una aportación a la comprensión de los modos de propagación en una fibra óptica de índice escalonado. El concepto de modo de propagación es relevante por que ayuda a entender el funcionamiento de una fibra óptica.

6.1 Trabajo a futuro

En esta tesis se estudiaron los modos de propagación en fibras ópticas de índice escalonado. En otros trabajos se podrían estudiar otros tipos de fibra óptica, por ejemplo la fibra óptica de índice gradual o la fibra óptica de cristal fotónico.

En este trabajo se considero que la potencia de la fuente de luz se distribuye de forma uniforme entre los modos de propagación. Los alcances del estudio pueden ampliarse si se realiza una implementación física que permita observar de que manera se distribuye la potencia entre los distintos modos de propagación.

Bibliografía

- [1] G. P. Agrawal. *Fiber-Optic Communication Systems*. A John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [2] B. E. A. Saleh y M. C. Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley, 2007.
- [3] J. M. Senior y M. Y. Jamro. *Optical Fiber Communications*. Prentice Hall, 2009.
- [4] R. Neri Vela. *Líneas de transmisión*. McGraw-Hill, 1999.
- [5] A. R. Chraplyvy. The coming capacity crunch. In *ECOC '09*, 2009.
- [6] R. Ensiambre, G. Kramer, P. Winzer, G. Foschini, y B. Goebel. Capacity limits of optical fiber networks. *Journal of Lightwave Technology*, 2010.
- [7] P. J. Winzer. Making spatial multiplexing a reality. *Nature Photonics*, 2014.
- [8] B. J. Puttnam, R. S. Luís, W. Klaus, J. Sakaguchi, J. M. Delgado Mendinueta, Y. Awaji, N. Wada, Y. Tamura, T. Hayashi, M. Hirano, y J. Marciante. 2.15 pb/s transmission using a 22 core homogeneous single-mode multi-core fiber and wideband optical comb. In *ECOC*, 2015.
- [9] S. Chandrasekhar, A. H. Gnauck, X. Liu, P. J. Winzer, Y. Pan, E. C. Burrows, T. F. Taunay, B. Zhu, M. Fishteyn, M. F. Yan, J. M. Fini, E. M. Monberg, y F. V. Dimarcello. Wdm/sdm transmission of 10 x 128-gb/s pdm-qpsk over 2688-km 7-core fiber with a per-fiber net aggregate spectral-efficiency distance product of 40,320 km x b/s/hz. In *ECOC*, 2011.

- [10] S. Randel, M. Magarini, R. Ryf, R. J. Essiambre, A. H. Gnauck, P. J. Winzer, T. Hayashi, T. Taru, y T. Sasaki. Mimo-based signal processing of spatially multiplexed 112-gb/s pdm-qpsk signals using strongly-coupled 3-core fiber. In *ECOC*, 2011.
- [11] R. Ryf, R. J. Essiambre, A. H. Gnauck, S. Randel, M. A. Mestre, C. Schmidt, P. J. Winzer, R. Delbue, P. Pupalakakis, A. Sureka, T. Hayashi, T. Taru, y T. Sasaki. Sdm transmission over 4200-km 3-core microstructured fiber. In *National Fiber Optic Engineers Conference*, 2011.
- [12] R. Ryf, N. K. Fontaine, B. Guan, R. J. Essiambre, S. Randel, A. H. Gnauck, S. Chandrasekhar, A. Adamiecki, G. Raybon, B. Ercan, R. P. Scott, S. J. Ben Yoo, T. Hayashi, T. Nagashima, y T. Sasaki. 1705-km transmission over coupled-core fibre supporting 6 spatial modes. In *ECOC*, 2014.
- [13] S. Randel, R. Ryf, A. Sierra, P. J. Winzer, A. H. Gnauck, C. A. Bolle, R. J. Essiambre, D. W. Peckham, A. McCurdy, y R. Lingle. 6 x 56-gb/s mode-division multiplexed transmission over 33-km few-mode fiber enabled by 6 x 6 mimo equalization. *Opt. Express*, 2011.
- [14] E. Lp, N. Bai, Y. K. Huang, E. Mateo, F. Yaman, S. Bickham, H. Y. Tam, C. Lu, M. J. Li, S. Ten, A. P. T. Lau, V. Tse, G. D. Peng, C. Montero, X. Prieto, y G. Li. 88 x 3 x 112-gb/s wdm transmission over 50 km of three-mode fiber with inline few-mode fiber amplifier. In *ECOC*, 2011.
- [15] C. Koebele, M. Salsi, D. Sperti, P. Tran, P. Brindel, H. Mardoyan, S. Bigo, A. Boutin, F. Verluise, P. Sillard, M. Astruc, L. Provost, F. Cerou, y G. Charlet. Two mode transmission at 2 x100gb/s, over 40km-long prototype few-mode fiber, using lcos-based programmable mode multiplexer and demultiplexer. *Opt. Express*, 2011.
- [16] R. Ryf, S. Randel, A. H. Gnauck, C. Bolle, A. Sierra, S. Mumtaz, M. Esmaeelpour, E. C. Burrows, R. J. Essiambre, P. J. Winzer, D. W.

- Peckham, A. H. McCurdy, y R. Lingle. Mode-division multiplexing over 96 km of few-mode fiber using coherent 6 x 6 mimo processing. *J. Lightwave Technol.*, 2012.
- [17] M. Salsi, C. Koebele, D. Sperti, P. Tran, H. Mardoyan, P. Brindel, S. Bigo, A. Boutin, F. Verluise, P. Sillard, M. Astruc, L. Provost, y G. Charlet. Mode division multiplexing of 2 x 100gb/s channels using an lcos based spatial modulator. *J. Lightwave Technol.*, 2012.
- [18] R. Ryf, H. Chen, N. K. Fontaine, A. M. Velázquez, J. A. López, C. Jin, B. Huang, M. B. Astruc, D. Molin, F. Achten, P. Sillard, y R. A. Correa. 10-mode mode-multiplexed transmission over 125-km single-span multimode fiber. In *ECOC*, 2015.
- [19] C. Antonelli, M. Shtaif, y A. Mecozzi. Modeling of nonlinear propagation in space-division multiplexed fiber-optic transmission. *J. Lightwave Technol.*, 2015.
- [20] C. Yeh y F. I. Shimabukuro. *The Essence of Dielectric Waveguides*. Springer, 2008.
- [21] J. M. Liu. *Photonic Devices*. Cambridge University Press, 2005.
- [22] K. Iizuka. *Elements of Photonics Volume II: For Fiber and Integrated Optics*. John Wiley & Sons, 2002.
- [23] T. Okoshi. *Optical Fibers*. Academic Press, 1982.
- [24] W. H. Hayt Jr y J. A. Buck. *Engineering Electromagnetics*. McGraw-Hill, 2001.
- [25] F. Dios Otín, D. Artigas García, J. Recolons Martos, A. Comerón Tejero, y F. Canal Bienzobal. *Campos electromagnéticos*. Universidad Politécnica de Catalunya, 1998.
- [26] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.

-
- [27] G. Keiser. *Optical Fiber Communication*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering, 1991.
- [28] J. D. Kraus y K. R. Carver. *Electromagnetics*. McGraw-Hill Kogakusha, 1973.
- [29] G. A. Kouzaev. *Applications of Advanced Electromagnetics*. Springer, 2013.
- [30] D. G. Zill. *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson, 2000.
- [31] J. E. Gómez Correa, S. E. Balderas Mata, V. Coello, N. P. Puente, J. Rogel Salazar, y S. Chávez Cerda. On the physics of propagating bessel modes in cylindrical waveguides. *American Journal of Physics*, 2017.
- [32] D. Gloge. Weakly guiding fibers. *Applied Optics*, 1971.
- [33] E. Snitzer. Cylindrical dielectric waveguide modes. *Journal of the Optical Society of America*, 1961.
- [34] A. W. Snyder y W. R. Young. Modes of optical waveguides. *Optical Society of America*, 1978.
- [35] C. R. Doerr y H. Kogelnik. Dielectric waveguide theory. *J. Lightwave Technol.*, 2008.
- [36] L. B. Felsen. Rays, modes and beams in optical fibre waveguides. *Optical and Quantum Electronics*, 1977.
- [37] V. A. Trejo Rocha, M. Moreno Díaz, y N. P. Puente Ramírez. Distribución de modos transversales e híbridos en la dirección de propagación en una fibra óptica. *Ingenierías*, 2015.

Índice de figuras

2.1. Ilustración de una fibra óptica, n_1 y n_2 son los índices de refracción del núcleo y del revestimiento respectivamente [2].	5
2.2. Ilustración del perfil de índice de refracción escalonado [3].	6
2.3. Ilustración del perfil de índice de refracción gradual [2].	7
2.4. Dimensiones radiales de una fibra óptica [2].	7
3.1. Rayo de luz incidiendo entre dos medios: (a) refracción, (b) caso límite de refracción, donde ϕ_c es el ángulo crítico y (c) reflexión total interna, donde $\phi > \phi_c$ [3].	10
3.2. Transmisión de un rayo de luz en fibra óptica.	11
3.3. Ángulo de aceptación θ_a para rayos de luz incidentes [3].	12
3.4. Ilustración de un rayo de luz que entra en el núcleo a un ángulo menor que el ángulo de aceptación ($\theta_1 < \phi_a$).	13
3.5. Componentes del campo \vec{E} en coordenadas cilíndricas [2].	18
4.1. Curvas de las ecuaciones de los modos $TE_{0,m}$ y $TM_{0,m}$ [22].	36
4.2. Número de modos en una fibra óptica de índice escalonado en función del parámetro V [22].	40

5.1. Distribución de amplitud del modo $LP_{0,1}$ en fibra óptica monomodo $9/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$	47
5.2. Modo $HE_{1,1}$ en fibra óptica monomodo $9/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	48
5.3. Distribución de amplitud del modo $LP_{0,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$	50
5.4. Modo $HE_{1,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	51
5.5. Distribución de amplitud del modo $LP_{1,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$	52
5.6. Modo $TE_{0,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	53
5.7. Modo $TM_{0,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	54
5.8. Modo $HE_{2,1}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	55
5.9. Distribución de amplitud del modo $LP_{0,2}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$	56
5.10. Modo $HE_{1,2}$ en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	57

5.11. Distribución de amplitud del modo $LP_{2,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$	58
5.12. Modo $HE_{3,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	59
5.13. Modo $EH_{1,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	60
5.14. Distribución de amplitud del modo $LP_{3,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$	61
5.15. Modo $HE_{4,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	62
5.16. Modo $EH_{2,1}$ en fibra óptica multimodo 50/125 μm a $\lambda = 1550 nm$, (a) Campo vectorial eléctrico, (b) Campo vectorial magnético y (c) Distribución de potencia.	63

Índice de tablas

4.1. Límites $\gamma a \rightarrow 0$ y $\gamma a \rightarrow \infty$ evaluados en las ecuaciones modales. .	40
5.1. Modo de propagación en fibra óptica monomodo $9/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$	46
5.2. Modos de propagación en fibra óptica multimodo $50/125 \mu m$ a $\lambda = 1550 nm$	49