

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



**CONTROL POR MEDIO DE MODOS DESLIZANTES PARA EL
CONTROL DE ALTITUD DE UN DRON EN PRESENCIA DE
PERTURBACIONES**

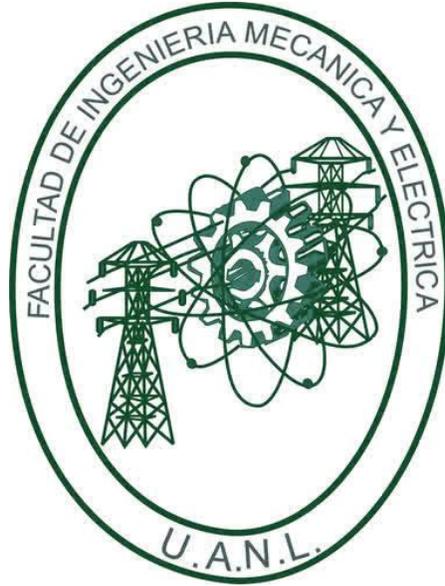
POR

ING. JOSÉ ANGEL CANO GONZÁLEZ

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

JUNIO, 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**CONTROL POR MEDIO DE MODOS DESLIZANTES PARA EL
CONTROL DE ALTITUD DE UN DRON EN PRESENCIA DE
PERTURBACIONES**

POR

ING. JOSÉ ANGEL CANO GONZÁLEZ

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

JUNIO, 2018

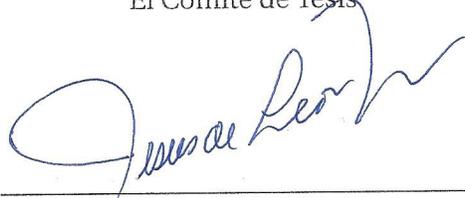
Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Control por medio de modos deslizantes para el control de altitud de un dron en presencia de perturbaciones.», realizada por el alumno Ing. José Angel Cano González, con número de matrícula 1836855, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis



Dr. Jesús De León Morales

Asesor



Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

Revisor



Dr. Oscar Salvador Salas Peña

Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Junio, 2018

Esta tesis esta dedicada a mi madre, padre y hermano.

Por su confianza y apoyo incondicional.

Agradecimientos

A mi madre, padre y hermano por apoyarme incondicionalmente en todo momento y ser mi motivación.

A mi amigo Luis Fernando, que siempre me dio ánimos y me incentivo a estudiar más.

A mi asesor el Dr. Jesús de León Morales, por su asesoría y paciencia durante el desarrollo de este trabajo, por sus consejos y su buena disposición.

A mis revisores el Dr. Marco Tulio Mata Jiménez y el Dr. Oscar Salvador Salas Peña, por su colaboración, por las ideas sugeridas para el beneficio de esta tesis, y por sus oportunas correcciones.

A mis profesores del DIE por haberme compartido sus conocimientos y a mis compañeros por compartir tiempo y esfuerzo.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, por permitirme formar parte de su programa de estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para mis estudios durante estos años de investigación.

RESUMEN

Control por medio de modos deslizantes para el control de altitud de un dron en presencia de perturbaciones.

Publicación No. _____

José Angel Cano González

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. Jesús De León Morales

Junio del 2018

La importancia del control de altitud del cuadricóptero se debe a que la aeronave debe mantenerse en un vuelo estable mientras efectúa alguna tarea específica; tales como la toma de fotografías y vídeos, reconocimiento e inspección de áreas de riesgo, etc. Sin embargo, por sus pequeñas dimensiones, están expuestos a perturbaciones, causadas por ráfagas de viento.

Para tratar este problema, en la literatura se han propuesto diversas técnicas de control. Sin embargo, en general estas técnicas presentan inconvenientes como el uso de modelos simplificados, la presencia de parámetros inciertos y la dificultad para sintonizar los controles.

En este trabajo se propone el uso de la teoría de control por modos deslizantes, ya que presenta ventajas como: robustez ante perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas. Algunas ventajas de la estrategia de control propuesta es la reducción del número de ganancias a sintonizar, la reducción del efecto *chattering* y la convergencia de trayectoria en tiempo finito.

Además, se implementa un observador de estados para estimar las variables no medibles del sistema. Este observador presenta las ventajas anteriormente mencionadas.

Finalmente, se presenta un estudio comparativo con otras técnicas de modos deslizantes, realizando simulaciones e implementando los algoritmos en una plataforma experimental.

Índice General

Resumen	VI
Índice de Figuras	X
Índice de Tablas	XII
Lista de Símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	1
1.2. Justificación	2
1.3. Estado del Arte	3
1.4. Hipótesis	5
1.5. Objetivos	6
1.5.1. Objetivo General	6
1.5.2. Objetivos Particulares	6
1.6. Contribución	6
1.7. Organización de la Tesis	7
2. UAV-Cuadrirrotor	8
2.1. Vehículos Aéreos no Tripulados	8
2.1.1. Historia	8
2.1.2. Clasificación	9
2.2. Modelo Matemático	11
2.2.1. Cinemática	13
2.2.2. Dinámica	18

2.2.3. Motor DC	26
2.3. Modelo en Espacio de Estados	33
2.4. Conclusiones	35
3. Esquema de Control por Modos Deslizantes Super-Twisting	36
3.1. Control por Modos Deslizantes Super Twisting	36
3.2. Diseño del Control	38
3.2.1. Aplicación del Control por Modos Deslizantes Super Twisting	43
3.2.2. Simulación	44
3.3. Conclusiones	46
4. Esquema de Observador por Modos Deslizantes Super Twisting	47
4.1. Observadores de Sistemas no Lineales	47
4.2. Diseño del Observador de Estados	48
4.2.1. Aplicación del Observador por Modos Deslizantes Super Twisting	52
4.2.2. Simulación	53
4.3. Conclusiones	55
5. Resultados	56
5.1. Resultados de Simulación	56
5.2. Pruebas Experimentales	62
5.2.1. Plataforma AR.Drone 1.0	62
5.3. Resultados Experimentales	64
5.4. Conclusiones	68
6. Conclusiones y Trabajos Futuros	69
6.1. Conclusiones	69
6.2. Trabajos Futuros	70
Conclusiones	70

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
A. Cálculos Aerodinámicos	71
A.1. Teoría de Momentos	71
A.2. Teoría del Elemento de Pala	74
B. Cálculo de Momentos de Inercia	77
Bibliografía	84

Índice de figuras

2.1. Clasificación de los UAV.	10
2.2. Movimiento de cabeceo.	11
2.3. Movimiento de alabeo.	12
2.4. Movimiento de guiñada.	13
2.5. Sistemas de referencia del cuadrirrotor.	15
2.6. Matriz de rotación $R(\psi, z)$	15
2.7. Matriz de rotación $R(\theta, y)$	16
2.8. Matriz de rotación $R(\phi, x)$	16
2.9. Esquemas de motor DC.	27
2.10. Diagrama básico del motor DC.	28
2.11. Circuito eléctrico básico del motor DC.	28
2.12. Sistema del motor simplificado.	30
2.13. Sistema del motor.	30
3.1. Seguimiento de trayectoria.	44
3.2. Error de seguimiento.	45
3.3. Señal de control U_j	45
4.1. Estimación de estados.	54
4.2. Error de estimación.	55
5.1. Seguimiento de trayectoria.	59
5.2. Error de seguimiento.	59

5.3. Señales de control U	60
5.4. Comunicación via red Wi-Fi.	64
5.5. Seguimiento de trayectoria del AR.Drone.	66
5.6. Error de seguimiento.	67
5.7. Señal de control U	67
A.1. Teoría de momento.	72
A.2. Teoría del elemento de pala.	74
B.1. Prisma rectangular sólido.	78
B.2. Cilindro sólido.	79
B.3. Prisma rectangular sólido desplazado.	81

Índice de tablas

- 3.1. Parámetros de simulación para el control. 44
- 4.1. Parámetros de simulación para el observador. 54
- 5.1. Parámetros de simulación. 58
- 5.2. Mediciones de desempeño en simulación. 62
- 5.3. Parámetros del experimento. 66
- 5.4. Mediciones de desempeño en experimento. 68

Lista de Símbolos

Simbolo	Unidades	Descripcion
A_P	$\frac{rad}{s}$	Coefficiente de velocidad de helice linealizado
B_P	$\frac{rad^2 V}{s^2}$	Coefficiente de voltaje de entrada linealizado
C_P	$\frac{rad^2}{s^2}$	Coefficiente constante linealizado
b	$N s^2$	Coefficiente de empuje
d	$N m s^2$	Coefficiente de arrastra
e	V	Generador de voltaje
F^B	N	Vector de fuerza, respecto a B
F^E	N	Vector de fuerza, respecto a E
F_G^B	N	Vector de fuerza gravitatoria, respecto a B
F_G^E	N	Vector de fuerza gravitatoria, respecto a E
G	$\frac{m}{s^2}$	Aceleracion gravitatoria
Γ^E	m	Vector de posicion lineal, respecto a E
$\dot{\Gamma}^E$	$\frac{m}{s}$	Vector de velocidad lineal, respecto a E
$\ddot{\Gamma}^E$	$\frac{m}{s^2}$	Vector de aceleracion lineal, respecto a E
I	$N m s^2$	Matriz de inercia del cuerpo
i	A	Corriente
J_M	$N m s^2$	Momento de inercia del motor, alrededor del eje del motor
J_P	$N m s^2$	Momento de inercia del motor, alrededor del eje de la helice

Simbolo	Unidades	Descripcion
J_{TM}	$N m s^2$	Momento de inercia rotacional total del motor, alrededor del eje del motor
J_{TP}	$N m s^2$	Momento de inercia rotacional total del motor, alrededor del eje de la helice
K_E	$\frac{V s}{rad}$	Constante electrica
K_M	$\frac{N m}{A}$	Constante mecanica
l	m	Distancia entre el centro del cuadrirrotor y el centro de la helice
L	H	Inductancia
Λ	-	Vector de fuerza generalizado, respecto a B
m	kg	Masa
Ω	$\frac{rad}{s}$	Vector de velocidad angular de las helices
$\dot{\Omega}$	$\frac{rad}{s^2}$	Vector de aceleracion de las helices
Ω^B	$\frac{rad}{s}$	Vector de velocidad angular, respecto a B
$\dot{\Omega}^B$	$\frac{rad}{s^2}$	Vector de aceleracion angular, respecto a B
Ω_M	$\frac{rad}{s}$	Velocidad angular del motor
$\dot{\Omega}_M$	$\frac{rad}{s^2}$	Aceleracion angular del motor
Ω_P	$\frac{rad}{s}$	Velocidad angular de la helice
$\dot{\Omega}_P$	$\frac{rad}{s^2}$	Aceleracion angular de la helice
P_M	$\frac{N m}{s}$	Potencia mecanica del eje del motor
P_P	$\frac{N m}{s}$	Potencia mecanica del eje de la helice
ϕ	rad	Angulo de alabeo (roll)
θ	rad	Angulo de cabeceo (pitch)
ψ	rad	Angulo de guiñada (yaw)
R	Ω	Resistencia
T_L	$N m$	Par de carga
T_M	$N m$	Par de torsion del motor
T_{MP}	$N m$	Par del motor, en el eje de la helice

Simbolo	Unidades	Descripcion
T_P	$N\ m$	Par de la helice
T_{P_M}	$N\ m$	Par de la heclide, en el eje del motor
τ^B	$N\ m$	Vector de par tursor, respecto a B
τ^E	$N\ m$	Vector de par tursor, respecto a E
Θ^E	rad	Vector de posicion angular, respecto a E
$\dot{\Theta}^E$	$\frac{rad}{s}$	Vector de velocidad angular, respecto a E
$\ddot{\Theta}^E$	$\frac{rad}{s^2}$	Vector de aceleracion angular, respecto a E
V	V	Voltaje de alimentacion
v	-	Vector de voltajes de entrada
V_B	$\frac{m}{s}$	Vector de velocidad lineal, respecto a B
\dot{V}^B	$\frac{m}{s^2}$	Vector de aceleracion lineal, respecto a B
V^E	$\frac{m}{s}$	Vector de velocidad lineal, respecto a E
v_L	V	Voltaje a traves de la inductancia
\dot{v}	-	Vector de aceleracion generalizado, respecto a B
v_R	V	Voltaje a traves de la resistencia
ζ	-	Vector de velocidad generalizado, respecto a EB
$\dot{\zeta}$	-	Vector de aceleracion generalizado, respecto a EB
ξ	-	Vector de posicion generalizado, respecto a E

Capítulo 1

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados (en inglés Unmanned Aerial Vehicle, y con siglas UAV) son utilizados en diversas aplicaciones, tales como: vigilancia, reconocimiento e inspección de áreas estratégicas poco accesibles para las aeronaves tripuladas convencionales. Entre los diferentes tipos de UAV, los cuadricopteros han extendido su uso en los ámbitos militar y civil debido a características importantes tales como: capacidad de miniaturización, gran maniobrabilidad, ser relativamente económicos y de fácil mantenimiento [1].

Entre las principales aplicaciones de los cuadricopteros se encuentran la toma de fotografías o radiografías industriales de estructuras elevadas, edificios, columnas de puentes, cables de alta tensión, etc. Para dichas aplicaciones es necesario mantener la aeronave en vuelo estacionario estable, de tal manera que se le permita recolectar información necesaria, por lo cual es necesario contar con controladores que mantengan la estabilidad de la aeronave y así mejore su desempeño. Por este motivo, en esta tesis se propone el diseño de estrategias de control robusto para regular la altitud de un cuadricoptero, en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

1.1. Planteamiento del Problema

El cuadricoptero debe mantener una altura deseada para efectuar una tarea específica. Sin embargo, dadas sus pequeñas dimensiones están expuestos a perturbaciones importantes tales como ráfagas de viento, las cuales dificultan mantener la posición deseada. Además, el comportamiento

dinámico de estos vehículos es no lineal y está fuertemente acoplado, por lo que se requiere de controladores que sean lo suficientemente robustos para mantener la estabilidad bajo diferentes condiciones de operación.

Para el diseño de estrategias de control se han considerado modelos simplificados de la dinámica del cuádrirrotor. Sin embargo, existen dinámicas no modeladas e incertidumbres paramétricas, por lo que es necesario diseñar estrategias de control robustos que permitan superar estas dificultades.

Debido a que poseen características como robustez ante perturbaciones e incertidumbres en el modelado, además de convergencia en tiempo finito y con la finalidad de reducir el chattering, en este trabajo se propone el diseño de un control robusto basado en técnicas de modos deslizantes de orden superior.

Por otro lado, variables como las velocidades lineales y angulares podrían no estar disponibles para ser utilizadas en el control, dificultando su correcta implementación. Una solución a este problema es el uso de un observador de estado que estime las variables no medibles. Al combinar el observador de estados con los algoritmos de control robustos se consigue diseñar esquemas de control de alto desempeño.

1.2. Justificación

Debido a la necesidad de controlar la altitud del cuádrirrotor de forma eficiente, se requiere implementar un control robusto de rápida respuesta para estabilizar el vehículo a una altura deseada durante el vuelo. Los esquemas que han sido propuestos no han sido lo suficientemente eficientes, y es por tal motivo que las estrategias basadas en modos deslizantes resultan ser más apropiadas para el diseño de estrategias de control basadas en observadores. Otra de las ventajas del uso de las técnicas de modos deslizantes es que el análisis de estabilidad de lazo cerrado cumple con el principio de separación, ya que el observador converge en tiempo finito, y esto permite que el control actúe como si las variables estimadas fuesen las variables medibles, logrando que el análisis de estabilidad se simplifique. Además, como se verá en este trabajo, la sintonización del observador y el controlador resulta ser más simple, debido a que se requieren sintonizar menos

ganancias que en los métodos convencionales.

1.3. Estado del Arte

En estos últimos años se han utilizado diversas técnicas para controlar la altitud de los cuadrirrotores, los cuales pueden ser clasificados en las siguientes categorías:

- Control Lineal Robusto: PID, LQR, H-infinito.
- Control Inteligente: Lógica Difusa, Control Predictivo.
- Control No Lineal: Feedback Linealizable, Backstepping, Modos Deslizantes.

Control Lineal Robusto

En los primeros intentos por controlar a los cuadrirrotores, se encontró que utilizando controles lineales es suficiente para obtener un vuelo estable. En [2] se diseña un Regulador Lineal Cuadrático (LQR) para controlar la orientación y posición del cuadrirrotor, pero al comparar su desempeño contra un Control Proporcional Integral Derivativo (PID), presentado en [3], se obtuvo que el controlador PID logra mejores resultados. Sin embargo, ambos esquemas de control utilizan un modelo simplificado del cuadrirrotor y no son lo suficientemente robustos ante perturbaciones externas.

Por otro lado, el diseño de un control basado en la técnica H-infinito ha sido propuesto por [4], mostrando buenos resultados. Sin embargo, requiere de la linealización del modelo matemático, lo cual limita su rango de operación.

Control Inteligente

Esta clase de controles cuenta con la característica de ser capaces de cubrir un rango amplio de incertidumbres, en comparación con los controles lineales. Algunos de estos son controladores por lógica difusa, combinado con un control PD en [5], pero esta metodología no es lo suficientemente robusta debido a que se deben conocer todos los parámetros aerodinámicos, lo cual no es

posible en la practica.

En [6] se propone un control robusto predictivo, para el seguimiento de trayectoria, el cual utiliza un control basado en la técnica H-infinito para estabilizar los movimientos rotativos. Sin embargo, este tipo de control utiliza una gran carga computacional, debido a que debe analizar una basta cantidad de información para generar la entrada de control mas optima.

Control No Lineal

Debido a que el sistema dinámico del cuadrirrotor cuenta con 4 entradas de control, y 6 grados de libertad, se le considera como un sistema no lineal sub-actuado. Entonces, para obtener un mejor desempeño se han utilizado estrategias de control como aquellos basados en la técnica de backstepping integral, la cual es propuesta en [7] y logrará mejorar la velocidad de seguimiento. El trabajo en [8] presenta una técnica de control que combina el algoritmo backstepping integral con la técnica de feedback linealizable, logrando robustez ante perturbaciones externas. El inconveniente con esta clase de controles es que, como ya se menciona con los controles lineales, se requiere tener conocimiento de todos los parámetros del modelo y los parámetros aerodinámicos para garantizar la robustez, lo cual no es posible en la practica.

Un modelo matemático basado en cuaterniones en [9] es utilizado para el diseño de un control con retroalimentación de estado, presentando un buen desempeño. Sin embargo, el tiempo de respuesta es mayor en comparación con las técnicas anteriormente mencionadas.

Recientemente, se han propuesto estrategias de control basadas en la técnica de modos deslizantes [10]. Este algoritmo permite diseño de controles robustos para sistemas dinámicos con incertidumbres y expuestos a perturbaciones externas. Además, estas estrategias de control cuentan con la ventaja de poseer baja sensibilidad a las incertidumbres en los parámetros del modelo y a las perturbaciones externas, lo cual elimina la necesidad de un modelado exacto del sistema. Debido a esto, este tipo de controles ha sido aplicado en un amplio rango de campos como: la robótica, en control de motores y generadores, control de vehículos y control de movimiento, por mencionar algunos.

Debido a la naturaleza discontinua de los controles basados en las técnicas de modos deslizantes,

uno de los principales inconvenientes es la presencia de oscilaciones indeseables de alta frecuencia de las respuestas del sistema. Este fenómeno es llamado 'chattering' y puede llegar a ocasionar daño a los actuadores. Algunos esfuerzos han sido llevados a cabo para reducir este fenómeno. Por ejemplo una técnica conocida como Control por Modos Deslizantes de Alto Orden (en inglés High Order Sliding Mode Control, y sus siglas HOSMC) se presenta en [11], el cual mantiene las ventajas de los modos deslizantes y a su vez mejora el desempeño con respecto a los efectos del chattering. Se han obtenido buenos resultados al aplicar este algoritmo de control [12–14].

Una de las técnicas más populares de modos deslizantes, es la que se conoce como Super Twisting [15]. Para demostrar su convergencia en tiempo finito, se utiliza la técnica basada en funciones fuertes de Lyapunov [16].

En este trabajo se presentará una mejora para este algoritmo, al reducir el número de ganancias a sintonizar, y al mismo tiempo reducir el efecto chattering.

1.4. Hipótesis

Para diseñar una estrategia de control basado en un observador utilizando algoritmos Super Twisting, que permita la estabilización del UAV en presencia de perturbaciones externas, dinámicas no modeladas e incertidumbres paramétricas, se consideran las siguientes hipótesis:

HIPÓTESIS 1.1. *Se utiliza un modelo matemático reducido, que describe la dinámica de la altitud del cuadricóptero, donde los ángulos de orientación son constantes.*

HIPÓTESIS 1.2. *Las perturbaciones son acotadas y desconocidas.*

HIPÓTESIS 1.3. *Las posiciones lineales y angulares son medibles y están referidas al marco fijo de la Tierra, mientras que las velocidades (lineales y angulares) no son medibles.*

HIPÓTESIS 1.4. *No se consideran las ecuaciones que describen las dinámicas de desplazamiento y posición de los ejes X , Y .*

HIPÓTESIS 1.5. *Se conocen los valores nominales de los parámetros.*

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Diseñar un esquema de control-observador, para el control de altitud de un cuadrirrotor en presencia de perturbaciones externas, dinámicas no modeladas e incertidumbre paramétricas.

1.5.2. Objetivos Particulares

OBJETIVO 1.1. *Obtener un modelo matemático reducido del cuadrirrotor.*

OBJETIVO 1.2. *Diseñar una estrategia de observador de estados, que permita estimar las velocidades lineales y angulares del cuadrirrotor.*

OBJETIVO 1.3. *Diseñar una estrategia de control no lineal, basada en el algoritmo Super Twisting, que permita el control de altitud del cuadrirrotor.*

OBJETIVO 1.4. *Realizar un estudio comparativo contra otros algoritmos de control basados en modos deslizantes.*

OBJETIVO 1.5. *Validar experimentalmente el esquema propuesto.*

1.6. Contribución

En este trabajo se propone el uso de la teoría del control por modos deslizantes super twisting, ya que presenta ventajas como: robustez ante perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas, permitiendo la convergencia de la trayectoria en tiempo finito. Cabe mencionar también que en la practica, las ganancias del controlador no son sencillas de ajustar, debido a las perturbaciones, las dinámicas no modeladas y la necesidad de tener que conocer sus derivadas con respecto al tiempo. Para solucionar esta dificultad, el estimador de estados y el control propuesto en este trabajo se pueden sintonizar solamente utilizando una ganancia cada uno.

1.7. Organización de la Tesis

El presente trabajo esta organizado de la siguiente manera:

Los antecedentes, la importancia de los UAV y del cuadrirrotor, así como la explicación de su estructura y sus principios de movilidad se detallan en el Capítulo 2. Además, se presenta el modelo matemático en espacio de estados, el cual se utilizará para diseñar el esquema de control.

En el Capítulo 3, se introduce la metodología de diseño de un Observador Super Twisting, con el fin de estimar las variables no medibles del sistema, las cuales con las velocidades lineales y angulares del cuadrirrotor.

El diseño del esquema de control de altitud para el cuadrirrotor se presenta en el Capítulo 4, el cual esta basado en el algoritmo Super Twisting y es robusto ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

En el Capítulo 5, se realiza un estudio comparativo en simulación de diferentes versiones del algoritmo Super Twisting publicadas en la literatura. Posteriormente, las estrategias que presentan el mejor desempeño son implementadas en la plataforma experimental.

Las conclusiones y perspectivas acerca de la presente tesis se presentan en el Capítulo 6, así como los trabajos futuros a realizar.

Finalmente, el material e información adicional se añade en la sección de Apéndices.

Capítulo 2

UAV-Cuadrirrotor

Introducción

En este capítulo se presentará la historia de las primeras aplicaciones de los vehículos aéreos no tripulados, así como su clasificación en base al tipo de despegue, el tipo de alas y su sustentación. También se presentará el desarrollo del modelo matemático del cuadrirrotor. Además, se presentará la representación en espacio de estados de dicho modelo matemático.

2.1. Vehículos Aéreos no Tripulados

2.1.1. Historia

El término vehículo aéreo no tripulado (UAV) se utiliza para definir a las aeronaves sin tripulación humana a bordo. Los UAV han atraído gran interés en el área de la investigación y desarrollo, ya que pueden ser utilizados como plataformas de prueba y desarrollo para implementar algoritmos avanzados de control, son relativamente económicos, no ponen en riesgo a los tripulantes, son de fácil mantenimiento, entre otras.

Las áreas de aplicación de estas aeronaves van en aumento, debido a que son capaces de realizar múltiples tareas y por las habilidades que poseen, dependiendo del tipo de UAV. Una de las principales ventajas al usar este tipo de aeronaves, es que las tareas se efectúan sin la interacción directa

de humanos, ya que son operados de manera remota, y esto es un factor de suma importancia para tareas de alto riesgo.

La aviación de los vehículos no tripulados tuvo sus comienzos en los modelos construidos y volados por inventores como Cayley, Stringfellow, Du Temple y otros pioneros de la aviación [17], que fueron previos a sus propios intentos de desarrollar aeronaves tripuladas a lo largo de la primera mitad del siglo XIX. Estos modelos sirvieron como bancos de pruebas tecnológicos para el posterior desarrollo de modelos de mayor tamaño con piloto a bordo y, en este sentido, fueron los precursores de la aviación de vehículos tripulados.

La aviación no tripulada abarca un amplio espectro de aeronaves. La genealogía de las aeronaves no tripuladas esconde sus raíces en el desarrollo de los llamados 'torpedos aéreos', que posteriormente se desarrollaron a través de las ramas de las bombas guiadas, los blancos aéreos (llamados 'drones'), los señuelos, los modelos recreacionales o deportivos de radio-control, las aeronaves de investigación, las aeronaves de reconocimiento y las de combate.

El término vehículo aéreo no tripulado se hizo común en los años 90 para describir a las aeronaves robóticas y reemplazó el término vehículo aéreo pilotado remotamente (en inglés Remotely Piloted Vehicle, y sus siglas RPV), el cual fue utilizado durante la guerra de Vietnam.

Por otro lado, se define al UAV formalmente como: vehículo aéreo motorizado que no lleva a bordo a un operador humano, utiliza las fuerzas aerodinámicas para generar su sustentación y puede volar de manera autónoma o ser tripulado de forma remota. Además, estos vehículos pueden ser utilizados una o varias veces en diferentes misiones. Las siglas UAV y RPV son algunos de los nombres que se han dado para definir a las aeronaves robóticas no tripuladas a lo largo de su existencia.

2.1.2. Clasificación

Los UAV se pueden clasificar según diferentes criterios, entre los cuales se tienen los siguientes: el tipo de despegue, el tipo de alas y de la manera en que estos se sustentan. Con respecto al tipo de despegue se tienen: las aeronaves de despegue vertical y las de despegue no vertical. Dentro de la categoría de despegue vertical se encuentran los UAV de ala rotativa o hélice (helicópteros y cuadrirotos) y los auto-sustentados (dirigibles y globos). Con respecto a la categoría de despe-

que no vertical se encuentran: las aeronaves de ala flexible (parapentes o ala delta) y las de ala fija (aeroplanos). En la Figura 2.1 se muestran algunos de los diferentes tipos de aeronaves en los que se clasifican los UAV.

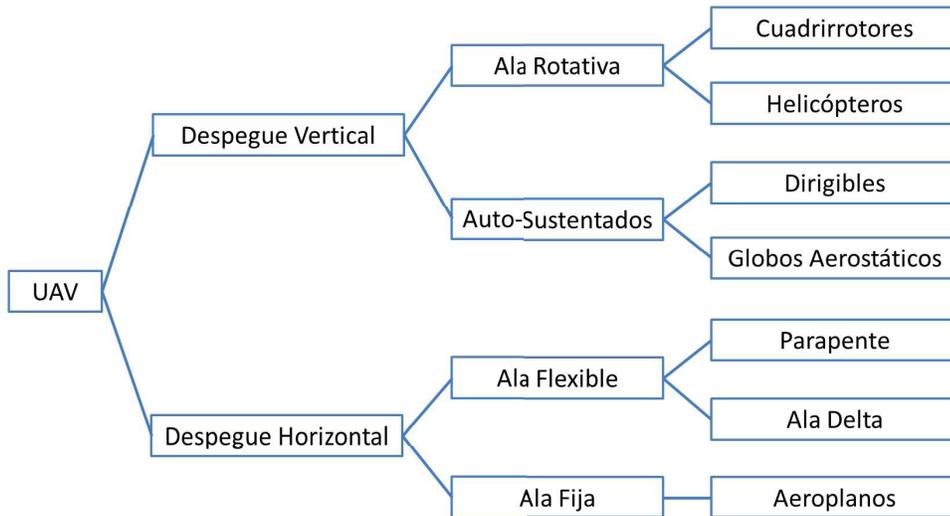


Figura 2.1: Clasificación de los UAV.

Este trabajo se propondrá una estrategia de control, basada en la técnica de modos deslizantes, para el control de altitud de un UAV del tipo cuadrrorotor.

Un cuadrrorotor es un Vehículo Aéreo no Tripulado de despegue vertical y ala rotativa, que consiste en una estructura mecánica en forma de cruz con cuatro rotores unidos a los extremos. En el centro de la estructura se encuentran localizados diferentes elementos, tales como la batería que proporciona la energía al equipo, los sensores de posición, velocidad, de presión; el procesador, la estación de comunicación y equipos para transmisión de datos de video e imagen.

Esta clase de UAV realiza vuelo estacionario estable y efectúa maniobras precisas al equilibrar las fuerzas de empuje producidas por cada uno de los 4 rotores. Al cambiar la velocidad de al menos un rotor, se logra el desplazamiento del cuadrrorotor.

2.2. Modelo Matemático

En esta sección se introduce el modelo matemático que describe la dinámica del cuadricóptero, el cual es no lineal, fuertemente acoplado y consta de 6 grados de libertad, pero sólo 4 de ellos pueden ser controlados directamente. Esto es debido a que se cuenta con una señal de control por cada uno de los 4 rotores de la aeronave, regulando con ellas la velocidad de cada uno de estos. Además, este modelo será utilizado para el diseño de la estrategia de control y del observador de estados. Los grados de libertad del cuadricóptero son los ejes cartesianos (x, y, z) , y los ángulos de Euler $(\phi, \theta$ y $\psi)$, que representan los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada (en inglés *roll*, *pitch* y *yaw*), respectivamente. Los 4 grados de libertad que se pretenden controlar son:

- Altura z : Es el desplazamiento vertical en el eje Z para alcanzar una altura deseada. Para esto se debe generar una fuerza de empuje igual en cada uno de los 4 rotores, y dependiendo de esta fuerza de empuje, el cuadricóptero puede despegar, ascender, descender o aterrizar.
- Cabeceo ϕ : El cabeceo (pitch) es el ángulo de giro en torno al eje Y y se logra manteniendo la misma velocidad en los rotores 2 y 4, y una variación de empujes entre los rotores 1 y 3, dependiendo si se desea desplazar el cuadricóptero hacia adelante o hacia atrás.

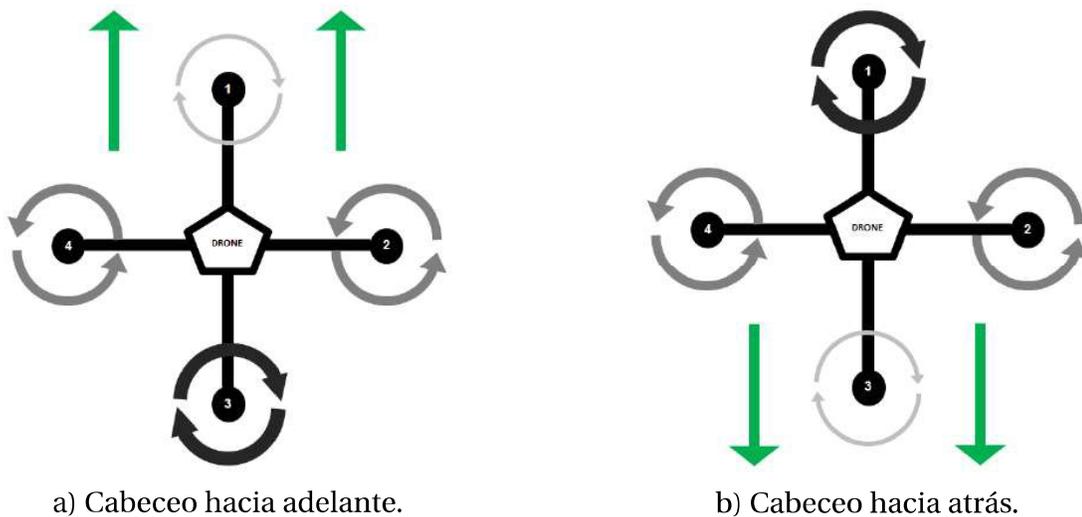


Figura 2.2: Movimiento de cabeceo.

- Alabeo θ : El alabeo (roll) es el ángulo de giro en torno al eje X y se logra manteniendo la misma velocidad en los rotores 1 y 3, y una variación de empujes entre los rotores 2 y 4, dependiendo si se desea desplazar el cuadrirrotor hacia la izquierda o derecha.

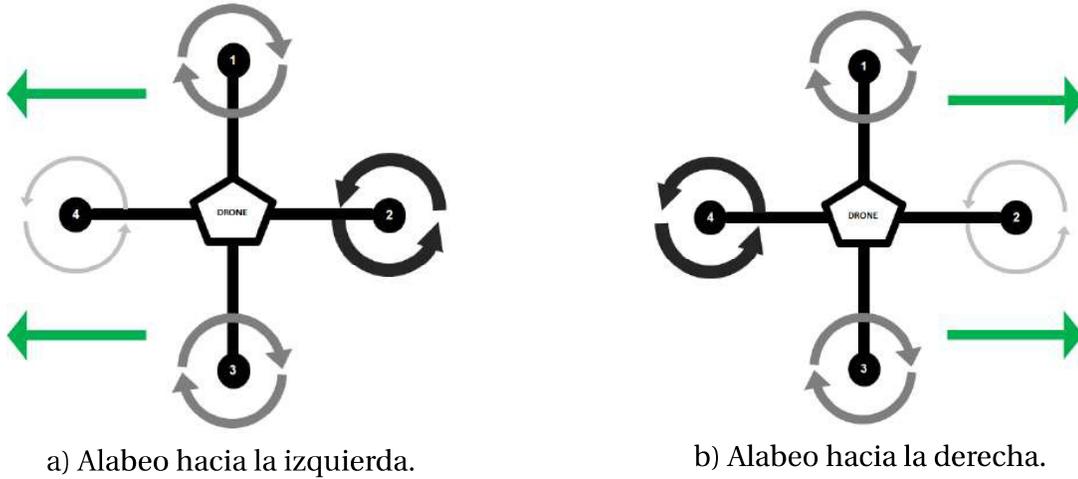


Figura 2.3: Movimiento de alabeo.

- Guiñada ψ :

La guiñada (yaw) es el ángulo de giro en torno al eje Z , ya sea para girar en sentido horario o anti-horario. Para girar en sentido horario se necesita mantener el mismo empuje en los rotores 2 y 4, y el mismo empuje en el par de rotores 1 y 3, pero en mayor proporción a los del primer par. Para girar en sentido anti-horario se debe mantener el mismo empuje en el par de rotores 1 y 3, y el mismo en los rotores 2 y 4, pero en mayor proporción al primer par.

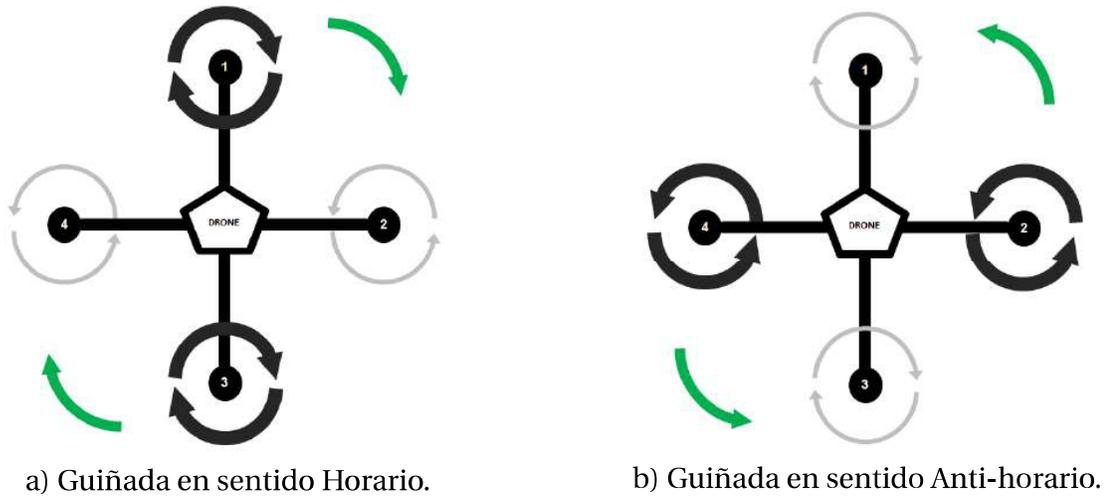


Figura 2.4: Movimiento de guiñada.

A continuación se presentan las hipótesis a considerar para el desarrollo del modelo dinámico del cuadrirrotor:

HIPÓTESIS 2.1. *Las hélices del cuadricoptero se consideran rígidas.*

HIPÓTESIS 2.2. *La estructura del cuadrirrotor se supone rígida y simétrica.*

HIPÓTESIS 2.3. *El origen del centro de referencia de la aeronave coincide con el centro de gravedad.*

HIPÓTESIS 2.4. *Las fuerzas de empuje producidas por los rotores, son proporcionales a la velocidad de giro de la hélice.*

2.2.1. Cinemática

En esta sección se estudiará la cinemática de los cuerpos rígidos. La cinemática se encarga del estudio del movimiento de un cuerpo o sistema de cuerpos, sin considerar las fuerzas y pares que actúan sobre él. Para describir el movimiento de un cuerpo rígido de 6 grados de libertad, es necesario definir dos marcos de referencia:

- Marco de referencia fijo a la Tierra E (marco-E).

- Marco de referencia fijo al cuerpo del Cuadrirrotor B (marco-B).

El marco-E (O_E, X_E, Y_E, Z_E) es seleccionado como sistema de referencia inercial, donde X_E apunta al Norte, Y_E apunta al Este, Z_E apunta hacia arriba respecto a la Tierra; y O_E es el origen de los ejes cartesianos. Este marco de referencia es utilizado para definir la posición lineal ($\Gamma^E[m]$) y la posición angular ($\Theta^E[rad]$) del cuadrirrotor.

El marco-B (O_B, X_B, Y_B, Z_B) está acoplado al cuerpo. X_B apunta el frente del cuadrirrotor, Y_B apunta hacia la izquierda del cuadrirrotor, Z_B apunta hacia arriba y O_B es el origen de los ejes coordenados. El punto de origen O_B se selecciona de tal forma que coincida con el centro de la estructura de cruz del cuadrirrotor y con el centro de gravedad de la aeronave. Este marco de referencia es utilizado para definir la velocidad lineal ($V^B [\frac{m}{s}]$), la velocidad angular ($\omega^B [\frac{rad}{s}]$), las fuerzas de empuje ($F^B [N]$) y los pares ($\tau^B [Nm]$) del cuadrirrotor.

El vector de posición lineal Γ^E del helicóptero está definido como el vector de coordenadas entre el origen del marco-B y el origen del marco-E. Este vector indica la posición real del cuadrirrotor en el espacio y los grados de libertad x, y, z , y se representa con la ecuación:

$$\Gamma^E = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T \quad (2.1)$$

En la Figura 2.5 se muestran los sistemas de referencia del cuadrirrotor, situados en el vehículo y en el espacio.

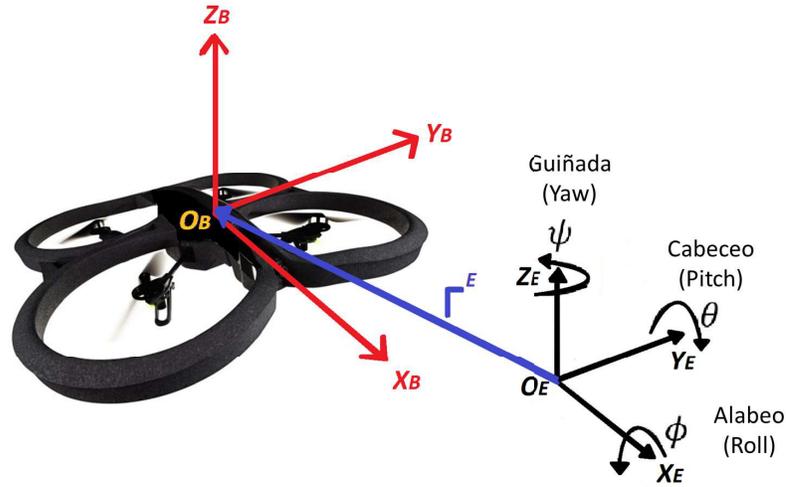


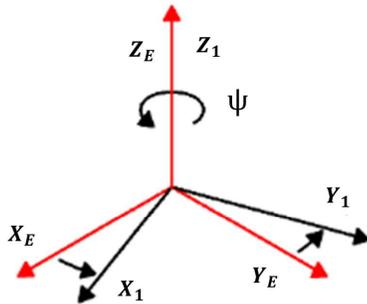
Figura 2.5: Sistemas de referencia del cuadricóptero.

La posición angular Θ^E del cuadricóptero está definida por un vector, cuyas componentes son los ángulos de rotación medidos a partir del marco-B, con referencia al marco-E. Este vector se compone de tres rotaciones alrededor del eje principal del marco-E, sobre el marco-B, como se define en la siguiente ecuación:

$$\Theta^E = \begin{pmatrix} \phi & \theta & \psi \end{pmatrix}^T \quad (2.2)$$

La matriz de rotación R_Θ se obtiene al multiplicar las siguientes matrices de rotación básicas:

- Rotación sobre el eje Z_E del ángulo de guiñada ψ , a través de $R(\psi, z)$



$$R(\psi, z) = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 2.6: Matriz de rotación $R(\psi, z)$.

- Rotación sobre el eje Y_1 del ángulo de alabeo θ , a través de $R(\theta, y)$

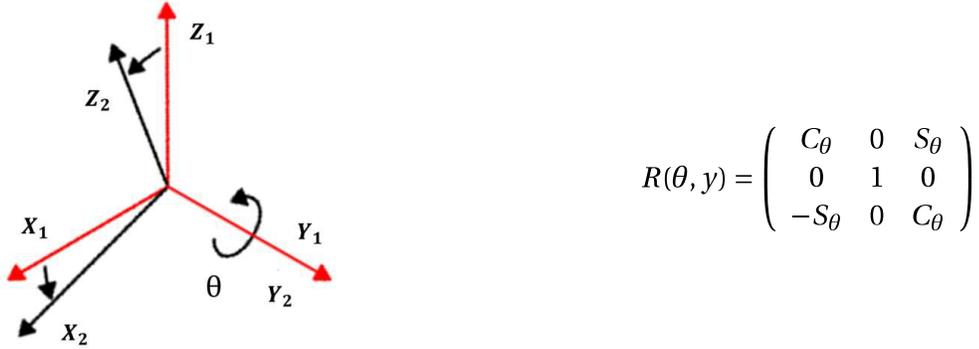


Figura 2.7: Matriz de rotación $R(\theta, y)$.

- Rotación sobre el eje X_2 del ángulo de cabeceo ϕ , a través de $R(\phi, x)$

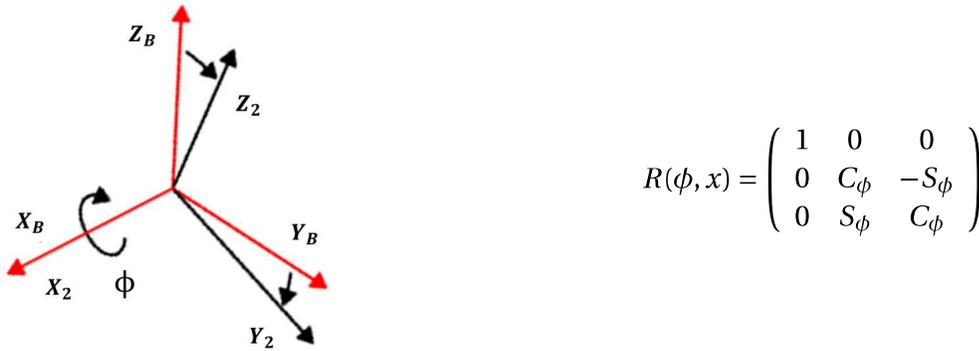


Figura 2.8: Matriz de rotación $R(\phi, x)$.

A partir de ahora, se adopta la siguiente notación: $C_x = \cos(x)$, $S_x = \sin(x)$, $T_x = \tan(x)$. La matriz de rotación R_Θ que toma en cuenta los movimientos en cada uno de los ejes se define entonces como:

$$R_\Theta = R(\psi, z)R(\theta, y)R(\phi, x) = \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\phi + C_\psi S_\theta S_\phi & S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi hi \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi & -C_\psi S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi hi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Como se mencionó anteriormente, los vectores de velocidad lineal (V^B) y angular (ω^B) están expresados en base al marco-B, y se representan de la siguiente manera:

$$V^B = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}^T \quad (2.4)$$

$$\omega^B = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \quad (2.5)$$

A continuación, se define el vector de posición generalizada (ξ) y el vector de velocidad generalizada (v). En ellos se combinan las componentes de posición y velocidad (lineales y angulares), con el fin de obtener una representación completa del cuerpo en el espacio.

$$\xi = \begin{pmatrix} \Gamma^E & \Theta^E \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} X & Y & Z & \phi & \theta & \psi \end{pmatrix}^T \quad (2.6)$$

$$v = \begin{pmatrix} V^B & \omega^B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u & v & w & p & q & r \end{pmatrix}^T \quad (2.7)$$

La relación entre la velocidad lineal V^B del marco-B y la velocidad lineal V^E [$\frac{m}{s}$] (o también conocido como $\dot{\Gamma}^E$ [$\frac{m}{s}$]) del marco-E, involucra a la matriz de rotación R_Θ , de acuerdo a la ecuación:

$$V^E = \dot{\Gamma}^E = R_\Theta V^B \quad (2.8)$$

Además, con la matriz de transformación T_Θ es posible relacionar la velocidad lineal $\dot{\Gamma}^E$ [$\frac{rad}{s}$] del marco-E y la velocidad angular ω^B del marco-B, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\omega^B = T_\Theta^{-1} \dot{\Gamma}^E \quad (2.9)$$

$$\dot{\Theta}^E = T_\Theta \omega^B \quad (2.10)$$

La matriz de transformación T_Θ se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(\phi, x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R(\phi, x)^{-1} R(\theta, y)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = T_\Theta^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Donde la matriz de transformación y su inversa son:

$$T_{\Theta} = \begin{pmatrix} 1 & S_{\phi} T_{\theta} & C_{\phi} T_{\theta} \\ 0 & C_{\phi} & S_{\phi} \\ 0 & \frac{S_{\phi}}{C_{\theta}} & \frac{C_{\phi}}{C_{\theta}} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$T_{\Theta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_{\theta} \\ 0 & C_{\phi} & C_{\theta} S_{\phi} \\ 0 & -S_{\phi} & C_{\theta} C_{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

A partir de (2.11) y (2.13) se define (2.14), la cual relaciona la derivada de la posición generalizada del marco-E ($\dot{\xi}$) con la velocidad generalizada del marco-B (v). La transformación es posible gracias a la matriz generalizada (J_{Θ}), la cual se define en (2.15)

$$\dot{\xi} = J_{\Theta} v \quad (2.14)$$

$$J_{\Theta} = \begin{pmatrix} R_{\Theta} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Donde $0_{n \times m}$ representa una matriz cero de dimensión $n \times m$.

2.2.2. Dinámica

En esta sección se estudiarán los efectos de las fuerzas y pares aplicados a un cuerpo rígido en movimiento. Se realizó un análisis basado en técnicas de Newton-Euler para desarrollar las ecuaciones de un cuerpo rígido con 6 grados de libertad.

Las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico del cuadricóptero, en el marco de referencia fijo al cuerpo (marco-B), presentan las siguientes ventajas:

- La matriz de inercia es invariante en el tiempo.
- La simetría del cuerpo simplifica las ecuaciones.
- Las mediciones se obtienen directamente en el marco-B, que está fijo al cuerpo.

- El diseño de control se lleva a cabo en el marco-B.

Además, se toman en cuenta las siguientes hipótesis:

HIPÓTESIS 2.5. *El origen O_B del marco-B coincide con el centro de masa del cuerpo.*

HIPÓTESIS 2.6. *Los ejes del marco-B coinciden con los ejes de inercia del cuerpo principal. En este caso, la matriz de inercia I es diagonal.*

Las componentes lineales del cuerpo en movimiento se describen en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 F^E &= m\ddot{\Gamma}^E \\
 R_\Theta F^B &= m \widehat{(R_\Theta \dot{V}^B)} \\
 R_\Theta F^B &= m(R_\Theta \dot{V}^B + \dot{R}_\Theta V^B) \\
 R_\Theta F^B &= mR_\Theta(\dot{V}^B + \omega^B \times V^B) \\
 F^B &= m\dot{V}^B + \omega^B \times (mV^B)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde: $m[kg]$ es la masa del cuadricóptero, $\ddot{\Gamma}^E [\frac{m}{s^2}]$ es el vector de aceleración lineal, con referencia al marco-E, $F^E [N]$ es el vector de fuerzas, con referencia al marco-E, $\dot{V}^B [\frac{m}{s^2}]$ es el vector de aceleración lineal, con respecto al marco-B, y \dot{R}_Θ es la derivada de la matriz de rotación. Las componentes angulares del cuerpo en movimiento se describen en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \tau^E &= I\ddot{\Theta}^E \\
 T_\Theta \tau^B &= I \widehat{(T_\Theta \dot{\omega}^B)} \\
 T_\Theta \tau^B &= I(T_\Theta \dot{\omega}^B + \dot{T}_\Theta \omega^B) \\
 T_\Theta \tau^B &= IT_\Theta(\dot{\omega}^B + \omega^B \times V^B) \\
 \tau^B &= I\dot{\omega}^B + \omega^B \times (IV^B)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde: $I [Nms^2]$ es la matriz de inercia del cuerpo, $\ddot{\Theta}^E [\frac{rad}{s^2}]$ es el vector de aceleración angular, con respecto al marco-E, $\dot{\omega}^B [\frac{rad}{s^2}]$ es el vector de aceleración angular, con respecto al marco-B y $\tau^E [Nm]$ es el vector de par, con respecto al marco-E. El cálculo de la matriz de inercia I se detalla en el Apéndice B.

Ahora, utilizando (2.16) y (2.17), es posible describir el movimiento de un cuerpo rígido de 6 grados de libertad, en el siguiente arreglo:

$$\begin{pmatrix} mI_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}^B \\ \dot{\omega}^B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^B \times (mV^B) \\ \omega^B \times (I\omega^B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^B \\ \tau^B \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

O de manera compacta:

$$M_B \dot{v} + C_B(v)v = \Lambda \quad (2.19)$$

donde: \dot{v} es el vector de aceleración generalizado, con respecto al marco-B, M_B es la matriz de inercia del sistema y $C_B(v)$ es la matriz Coriolis-Centripeta, ambas con respecto al marco-B; y Λ se define el vector de fuerza generalizado, y está dado por la siguiente ecuación:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} F^B & \tau^B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{pmatrix}^T \quad (2.20)$$

La matriz de inercia está dada por:

$$M_B = \begin{pmatrix} mI_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Donde $I_{n \times n}$ representa la matriz identidad de dimensión $n \times n$. La matriz Coriolis-Centripeta está dada por:

$$C_B(v) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -m S(V^B) \\ 0_{3 \times 3} & -S(I\omega^B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz}r & -I_{yy}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zz}r & 0 & I_{xx}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy}q & -I_{xx}p & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

donde, $S(k)$ es el operador anti-simétrico (del inglés Skew-symmetric), con k siendo un vector columna de 3 elementos $k = (k_1 \ k_2 \ k_3)^T$. La matriz anti-simétrica de dimensión 3×3 generada por este operador en el vector k es la siguiente:

$$S(k) = -S^T(k) = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

La ecuación anterior es válida para todo cuerpo rígido satisfaciendo las hipótesis (2.5) y (2.6).

El vector Λ puede ser representado por la suma de los efectos combinados de 3 elementos. El primer elemento a considerar es el vector gravitacional $G_B(\xi)$, que está expresado en términos de la aceleración gravitatoria g [$\frac{m}{s^2}$], y está dado por la siguiente ecuación

$$G_B(\xi) = \begin{pmatrix} F_G^B \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\Theta^{-1} F_G^E \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\Theta^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgS_\theta \\ -mgC_\theta S_\phi \\ -mgC_\theta C_\phi \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

donde F_G^B [N] es el vector de fuerza gravitacional con respecto al marco-B; F_G^E es el vector de fuerza gravitacional con respecto al marco-E. Además, puesto que la matriz R_Θ en (2.3) es ortogonal, su inversa está dada por su matriz transpuesta, i.e. ($R_\Theta^{-1} = R_\Theta^T$).

El segundo término del vector Λ , describe el efecto giroscópico provocado por la rotación de las

hélices. Puesto que dos hélices giran en sentido horario y las otras dos en sentido anti-horario, entonces existe un desequilibrio de las fuerzas de empuje que es generado cuando la suma algebraica de sus velocidades no es igual a cero. Además, si el valor de los ángulos de cabeceo y alabeo es diferente de cero, entonces el cuadrirrotor experimenta un par giroscópico, que se describe con la siguiente ecuación:

$$O_B(v)\Omega = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 4} \\ -\sum_{k=1}^4 J_{TP} \left(\omega^B \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) (-1)^k \Omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 4} \\ J_{TP} \begin{pmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \Omega_p \end{pmatrix}$$

$$O_B(v)\Omega = J_{TP} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & -q & q & -q \\ -p & p & -p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega \quad (2.25)$$

donde $O_B(v)$ es la matriz giroscópica de las hélices y J_{TP} [Nms^2] es el momento de inercia rotacional total alrededor del eje de las hélices, el cual se calculará más adelante. Los efectos giroscópicos aparecen sólo en las ecuaciones de movimientos angulares, y no en las ecuaciones de movimientos lineales. La velocidad angular de las hélices Ω_p [$\frac{rad}{s}$], se define como

$$\Omega_p = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$$

donde Ω_1 es la velocidad angular de la hélice frontal, Ω_2 la de la hélice derecha, Ω_3 la de la hélice izquierda y Ω_4 la de la hélice trasera. Además, el vector de velocidad angular de las hélices Ω [$\frac{rad}{s}$], está dado por

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \end{pmatrix}^T$$

El tercer elemento del vector Λ toma en cuenta las fuerzas y pares producidos directamente por las entradas de movimiento principal, que representan las señales de control para el cuadrirrotor. Las fuerzas y pares son proporcionales a la velocidad angular de la hélice, elevada al cuadrado (ver Apéndice A). Por este motivo, la matriz de movimiento E_B se multiplica por Ω^2 para obtener el vector de entradas $U_B(\Omega)$. Tomando en cuenta los efectos aerodinámicos producidos por el cuadrirrotor, se agrega el factor de empuje b [Ns^2] y el factor arrastre d [Nms^2]), los cuales se describen en el Apéndice A. El vector de entradas $U_B(\Omega)$ se define con la siguiente ecuación

$$U_B(\Omega) = E_B \Omega^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_3 \\ U_5 \\ U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ bl(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ bl(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

donde l [m] es la distancia entre el centro del cuadrirrotor y el centro de la hélice; U_1 , U_3 , U_5 y U_7 son las componentes del vector de entrada $U_B(\Omega)$; y la matriz E_B está dada por

$$E_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Sustituyendo (2.24), (2.25) y (2.26) en el vector Λ de (2.19), se obtiene la siguiente expresión

$$M_B \dot{v} + C_B(v)v = G_B(\xi) + O_B(v)\Omega + E_B \Omega^2 \quad (2.28)$$

Entonces, despejando el vector de velocidad generalizado \dot{v} de la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{v} = M_B^{-1}(-C_B(v)v + G_B(\xi) + O_B(v)\Omega + E_B\Omega^2) \quad (2.29)$$

el cual se representa con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{u} = (vr - wq) + gS_\theta \\ \dot{v} = (wp - ur) - gC_\theta S_\phi \\ \dot{w} = (uq - vp) - gC_\theta C_\phi + \frac{U_1}{m} \\ \dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr - \frac{J_{TP}}{I_{xx}} q\Omega_p + \frac{U_3}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr + \frac{J_{TP}}{I_{yy}} p\Omega_p + \frac{U_5}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq + \frac{U_7}{I_{zz}} \end{cases} \quad (2.30)$$

donde las entradas de control se definen como:

$$U : \begin{cases} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_3 = bl(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ U_5 = bl(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ U_7 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{cases} \quad (2.31)$$

El modelo dinámico del cuadrirrotor de (2.30) está escrito en función al marco-B. Sin embargo, el modelo dinámico puede ser representado con ecuaciones de movimiento lineal en el marco-E, mientras que las ecuaciones de movimiento angular están descritas en referencia al marco-B.

El modelo dinámico del cuadrirrotor en (2.30) se expresará en el nuevo marco de referencia 'marco-EB', con los siguientes cambios en sus componentes. Primero, el vector de velocidad generalizado ζ , con referencia al marco-EB, está definido por

$$\zeta = \left(\dot{\Gamma}^E \quad \omega^B \right)^T = \left(\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad p \quad q \quad r \right)^T \quad (2.32)$$

Entonces, (2.28) en términos del vector ζ , está dada por

$$M_{EB}\dot{\zeta} + C_{EB}(\zeta)\zeta = G_{EB} + O_{EB}(\zeta)\Omega + E_{EB}(\xi)\Omega^2 \quad (2.33)$$

donde $\dot{\zeta}$ es el vector de aceleración generalizado, con referencia al marco-EB.

La matriz de inercia (M_{EB}) del sistema, en el marco-EB, es igual a la matriz de inercia (M_B) en (2.21), definida con respecto al marco-B.

$$M_{EB} = M_B \quad (2.34)$$

Por el contrario, la matriz Coriolis-Centripeta (C_{EB}) en el marco-EB, no es igual a la establecida en el marco-B (C_B), y se define con la siguiente ecuación

$$C_{EB}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -S(I\omega^B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz}r & -I_{yy}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zz}r & 0 & I_{xx}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy}q & -I_{xx}p & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

El vector gravitatorio en el marco-EB (G_{EB}) está definido en la siguiente ecuación

$$G_{EB} = \begin{pmatrix} F_G^E & 0_{1 \times 3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -mg & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (2.36)$$

El efecto giroscópico producido por la rotación de las hélices permanece invariante con respecto a (2.25), debido a que afecta sólo a las ecuaciones angulares del marco-B.

$$O_{EB}(\zeta)\Omega = O_B(\nu)\Omega \quad (2.37)$$

La matriz de movimiento ($E_{EB}(\xi)$) en el marco-EB, es diferente a la matriz ($E_B(\xi)$) en el marco-B, debido a que la entrada U_1 afecta a las tres ecuaciones de movimiento lineal, a través de la matriz

de rotación R_Θ . El producto de la matriz de movimiento $E_{EB}(\xi)$ y el vector de velocidad angular de hélices al cuadrado Ω^2 , está dado por

$$E_{EB}(\xi)\Omega^2 = \begin{pmatrix} R_\Theta & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} E_B \Omega^2 = \begin{pmatrix} (S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi) U_1 \\ (-C_\psi S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi) U_1 \\ (C_\theta C_\phi) U_1 \\ U_3 \\ U_5 \\ U_7 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Despejando el vector de aceleración angular generalizado $\dot{\zeta}$ en el marco-BE, de (2.33), se obtiene

$$\dot{\zeta} = M_{EB}^{-1}(-C_{EB}(\zeta)\zeta + G_{EB} + O_{EB}(\zeta)\Omega + E_H(\xi)\Omega^2) \quad (2.39)$$

El cual se expresa con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Sigma: \begin{cases} \ddot{X} = (S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{Y} = (-C_\psi S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{Z} = (C_\theta C_\phi) \frac{U_1}{m} \\ \dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr - \frac{J_{TP}}{I_{xx}} q\Omega_p + \frac{U_3}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr + \frac{J_{TP}}{I_{yy}} p\Omega_p + \frac{U_5}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq + \frac{U_7}{I_{zz}} \end{cases} \quad (2.40)$$

donde el vector de entradas de control U es el mismo de (2.31).

2.2.3. Motor DC

El motor de corriente directa (DC) es un actuador que convierte energía eléctrica en mecánica. Existen dos tipos básicos de arquitecturas de motores DC: motor con escobillas y motor sin escobillas. En la Figura 2.9 se observan dos esquemas de motores DC.

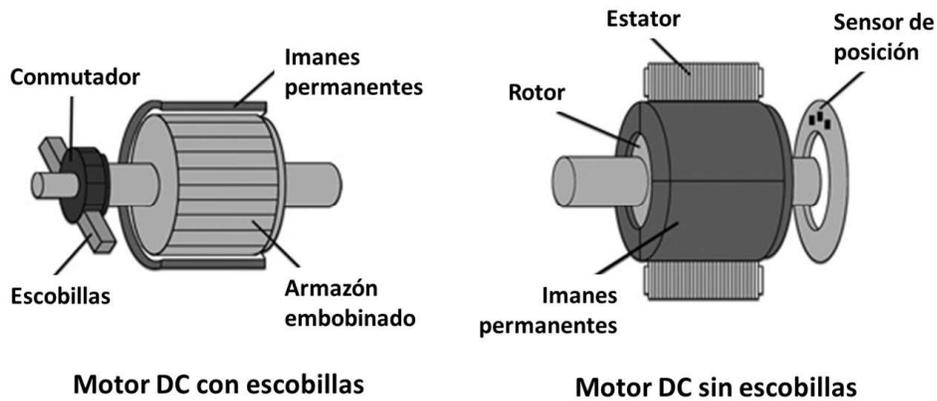


Figura 2.9: Esquemas de motor DC.

El esquema de la izquierda es el de un motor DC con escobillas. A este motor lo compone de un armazón giratorio y un estator fijo. El armazón (también llamado rotor) contiene bobinas de alambre aislado, envueltas alrededor de un núcleo de hierro; estas bobinas están conectadas eléctricamente al conmutador. El conmutador es un cilindro compuesto de varios segmentos de contacto de metal, alrededor del eje del armazón. El estator encierra el rotor y contiene imanes permanentes, para generar un campo magnético. Las escobillas son contactos eléctricos, hechos de un material blando, las cuales tienen resortes que les permiten hacer contacto con los segmentos del conmutador a medida que el eje gira. Al conectar una fuente de alimentación DC a las escobillas, las bobinas del armazón se energizan y se convierten en un electroimán, causando que giren de forma que sus polos norte y sur se alineen con los polos norte y sur del estator. A medida que el conmutador gira, el movimiento provoca que la polaridad de la corriente de la bobina del armazón y la dirección de su campo magnético se inviertan. El armazón gira hacia su nueva alineación, la corriente se invierte de nuevo y el armazón continúa girando. A este proceso se le denomina conmutación mecánica.

El esquema de la derecha es el de un motor DC sin escobillas, el cual posee un principio de operación igual al del motor con escobillas, pero su construcción es diferente. El imán permanente está montado sobre el rotor, el estator contiene los bobinados, no utilizan escobillas ni conmutador mecánico. Para hacer girar al rotor, se energizan las bobinas alrededor del estator y la conmutación se logra mediante un controlador electrónico, en conjunto con un sensor de posición del

rotor.

El diagrama eléctrico del motor DC relaciona cantidades eléctricas con mecánicas. Está compuesto por un resistor R [Ω], un inductor L [H] y un generador de voltaje e [V], conectados en serie. El resistor representa las pérdidas producidas por el efecto Joule, que es provocado por el flujo de corriente a través de la resistencia y el cableado del circuito. El comportamiento del inductor está relacionado con la forma de los devanados del motor, los cuales están enrollados en el centro del rotor. El generador suministra un voltaje proporcional a la velocidad del motor. En la Figura 2.10 se representa el diagrama eléctrico básico del motor

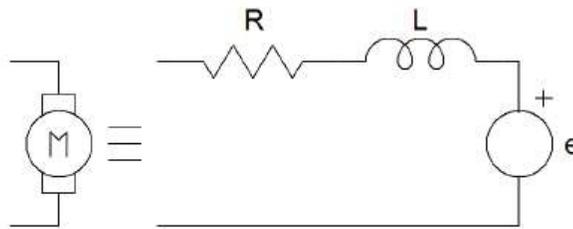


Figura 2.10: Diagrama básico del motor DC.

El circuito del motor DC es alimentado por un generador de voltaje real V [V], el cual es la entrada de control. Las pérdidas del generador se mantienen bajas y son despreciables, por lo que no se consideran para el modelo matemático. En la Figura 2.11 se detalla el circuito eléctrico básico del motor DC.

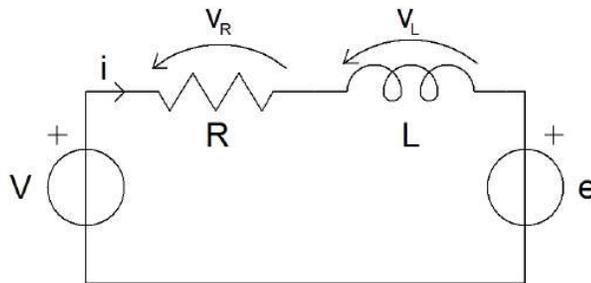


Figura 2.11: Circuito eléctrico básico del motor DC.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff, se obtiene la siguiente ecuación

$$v = v_R + v_L + e \quad (2.41)$$

donde v_R y v_L [V] son los voltajes a través del resistor R y del inductor L , respectivamente. La ecuación anterior se escribe también de la siguiente manera

$$v = R_i + L \frac{di}{dt} + K_E \omega_M \quad (2.42)$$

donde i [A] es la corriente del motor, K_E [$\frac{Vs}{rad}$] es la constante de par del motor y ω_M [$\frac{rad}{s}$] es la velocidad angular del motor. El primer término a la derecha de (2.42) se sustituye con la ley de Ohm ($v_R = Ri$); el segundo término se reemplaza con la ecuación diferencial del inductor ($v_L = L \frac{di}{dt}$); y el último término representa la relación que existe entre las cantidades mecánicas y eléctricas.

La contribución de la parte inductiva del motor no se considera, debido a los siguientes aspectos:

- La mayoría de los motores en robótica tienen inductancias pequeñas.
- El tiempo de respuesta del circuito eléctrico es mucho más rápido que el del mecánico, por lo que la velocidad del sistema real se considera en relación al tiempo de respuesta de los componentes mecánicos.
- Es más sencillo resolver una ecuación diferencial de primer orden, que una de segundo orden.

Entonces, al omitir la parte inductiva del circuito, (2.42) se simplifica de la siguiente manera

$$v = R_i + K_E \omega_M \quad (2.43)$$

La dinámica del motor está definida por la siguiente ecuación

$$J_{TM} \dot{\omega}_M = T_M - T_L \quad (2.44)$$

donde J_{TM} [Nms^2] es el momento de inercia total del motor, $\dot{\omega}_M$ [$\frac{rad}{s^2}$] es la aceleración angu-

lar del motor, T_M [Nm] es el par del motor y T_L [Nm] es el par de carga. La ecuación anterior establece que, cuando el par del motor y el par de carga no son iguales, existe una aceleración o desaceleración de la velocidad angular del motor ω_M ; esta variación depende además del momento total de inercia del motor J_{TM} . Entre más pequeño sea el valor de J_{TM} , mayor es la aceleración. La Figura 2.12 es un bosquejo de la estructura mecánica simplificada

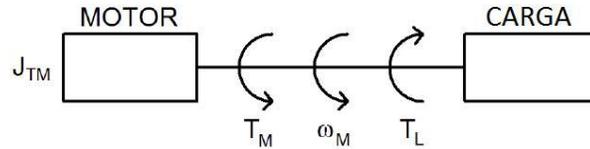


Figura 2.12: Sistema del motor simplificado.

El par del motor T_M es proporcional a la corriente eléctrica i , es decir, existe una constante K_M [$\frac{Nm}{A}$] tal que, $T_M = K_M i$. Entonces, (2.44) se escribe como

$$J_{TM}\dot{\omega}_M = K_M i - T_L \tag{2.45}$$

A partir de (2.43) y (2.45), se obtiene una ecuación diferencial en términos de la velocidad angular ω_M

$$J_{TM}\dot{\omega}_M = \frac{K_E K_M}{R} \omega_M - T_L + \frac{K_M}{R} v \tag{2.46}$$

El sistema de propulsión utilizado en el cuadrirrotor está constituido por un motor DC, una caja de engranes y una hélice. La estructura de este sistema se muestra en la siguiente figura

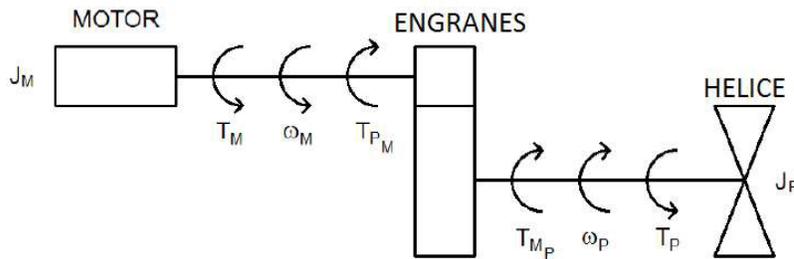


Figura 2.13: Sistema del motor.

donde J_M [Nms^2] es el momento de inercia del motor, alrededor del eje del motor; J_P [Nms^2] es el momento de inercia del rotor, alrededor del eje de la hélice; ω_P [$\frac{rad}{s}$] es la velocidad angular de la hélice; T_{P_M} [Nm] es el par de la hélice en el eje del motor; T_P [Nm] es el par de la hélice y T_{M_P} [Nm] es el par del motor en el eje de la hélice.

La caja de engranes tiene una razón de reducción N , que es igual a la velocidad del motor ω_M , dividida entre la velocidad de la hélice ω_P : $N = \frac{\omega_M}{\omega_P}$. N se calcula como el número de dientes del engrane de la hélice, entre el número de dientes del engrane del motor. El coeficiente de conversión η relaciona la potencia mecánica del eje del motor P_M , con la del eje de la hélice P_P [$\frac{Nm}{s}$].

$$J_M \eta = P_P$$

Esto es

$$\omega_M T_{P_M} \eta = \omega_P T_{M_P} \quad (2.47)$$

Por lo tanto, es posible calcular la dinámica del sistema de la caja de engranes, de acuerdo a las siguientes ecuaciones

$$J_M \dot{\omega}_M = T_M - T_{P_M} \quad (2.48)$$

$$J_P \dot{\omega}_P = T_{M_P} - T_P \quad (2.49)$$

donde $\dot{\omega}_P$ [$\frac{rad}{s^2}$] es la aceleración angular de la hélice. Sustituyendo (2.48) y (2.49) en (2.47), se obtiene

$$\omega_M (T_M - J_M \dot{\omega}_M) \eta = \omega_P (T_P + J_P \dot{\omega}_P) \quad (2.50)$$

además, tomando en cuenta las siguientes igualdades

$$\dot{\omega}_M = \frac{\omega_P}{\omega_M} \dot{\omega}_P \quad y \quad \frac{\omega_M}{\omega_P} = N$$

(2.50) se expresa como

$$\left(J_M + \frac{J_P}{\eta N^2} \right) \dot{\omega}_M = T_M - \frac{T_P}{\eta N} \quad (2.51)$$

A partir de (2.44) y (2.51) se obtienen las expresiones para el par de carga T_L y el momento total de

inercia del motor J_{TM} .

$$T_L = \frac{T_P}{\eta N} \quad (2.52)$$

$$J_{TM} = J_M + \frac{J_P}{\eta N^2} \quad (2.53)$$

El par de la hélice T_P está definido en (2.54) (ver Apéndice A).

$$T_P = d\omega_P^2 = \frac{d\omega_M^2}{N^2} \quad (2.54)$$

donde d [Nms^2] es el factor de arrastre aerodinámico. A partir de (2.52) y (2.54), la expresión para el par de carga es

$$T_L = \frac{d\omega_M^2}{\eta N^3} \quad (2.55)$$

A partir de (2.53) y (2.55), (2.46) queda expresada de la siguiente forma

$$\left(J_M + \frac{J_P}{\eta N^2} \right) \dot{\omega}_M = -\frac{K_E K_M}{R} \omega_M - \frac{d}{\eta N^3} \omega_M^2 + \frac{K_M}{R} v \quad (2.56)$$

Ahora, las ecuaciones anteriores se escriben tomando como referencia el eje de las hélices. La dinámica del motor DC está dada por

$$(J_P + \eta N^2 J_M) \dot{\omega}_P = -\frac{K_E K_M}{R} \eta N^2 \omega_P - d\omega_P^2 + \frac{K_M}{R} \eta N v \quad (2.57)$$

Por otro lado, el momento de inercia rotacional total alrededor del eje de la hélice (J_{TP} [Nms^2]) se define como

$$J_{TP} = J_P + \eta N^2 J_M \quad (2.58)$$

Al linealizar (2.57) alrededor de un punto de operación, se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{\omega}_P = A_P \omega_P + B_P v + C_P \quad (2.59)$$

donde A_P [$\frac{rad}{s}$] es el coeficiente de velocidad de la hélice linealizado, B_P [$\frac{rad^2}{s^2V}$] es el coeficiente del voltaje de entrada linealizado y C_P [$\frac{rad^2}{s^2}$] es un coeficiente constante linealizado. Los valores

de estos coeficientes están definidos por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 A_P &= \left. \frac{\partial \dot{\omega}_P}{\partial \omega_P} \right|_{\omega_P=\omega_H} = -\frac{K_E K_M \eta N^2}{J_{TP} R} - \frac{2d}{J_{TP}} \omega_H \\
 B_P &= \left. \frac{\partial \dot{\omega}_P}{\partial v} \right|_{\omega_P=\omega_H} = \frac{K_M \eta N}{J_{TP} R} \\
 C_P &= (\dot{\omega}_P - (A_P \omega_P + B_P v))|_{\omega_P=\omega_H} = \frac{d}{J_{TP}} \omega_H^2
 \end{aligned}$$

Estos parámetros describe la dinámica de los 4 motores del sistema. (2.59) se expresa como

$$\dot{\Omega} = A_P \Omega + B_P v + C_P \quad (2.60)$$

donde Ω [$\frac{rad}{s}$] es el vector de velocidad de las hélices, $\dot{\Omega}$ [$\frac{rad}{s^2}$] es el vector de aceleración de las hélices, y v [V] es el vector de voltajes de entrada.

2.3. Modelo en Espacio de Estados

El modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del cuadricóptero consiste en 6 ecuaciones diferenciales de segundo orden. Cada una de estas ecuaciones representa un grado de libertad del UAV, y se definen en (2.40). Además, se consideran las siguientes hipótesis:

HIPÓTESIS 2.7. Se estabiliza la altitud del cuadricóptero y los tres ángulos de Euler, omitiendo las ecuaciones que describen la posición y desplazamiento en los ejes X y Y.

HIPÓTESIS 2.8. Las fuerzas centrales y momentos de alabeo son despreciables.

HIPÓTESIS 2.9. Los coeficientes de arrastre y empuje son constantes.

Con esto, las ecuaciones que se utilizan para el diseño del esquema de control son

$$\Sigma: \begin{cases} m\ddot{z} = (C_\phi C_\theta)U_1 - mG \\ I_{xx}\ddot{\phi} = U_3 - (I_{zz} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\psi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} = U_5 - (I_{xx} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi} \\ I_{zz}\ddot{\psi} = U_7 - (I_{yy} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\theta} \end{cases} \quad (2.61)$$

donde m es la masa del vehículo, G la aceleración gravitatoria; I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} son los momentos de inercia del vehículo; ϕ , θ y ψ representan los ángulos de orientación del cuadricóptero; y z representa la altitud del UAV.

Para el diseño del esquema de control, se utiliza el modelo en espacio de estados del cuadricóptero. Los vectores de estado y entrada se definen como

$$\begin{aligned} X &= (z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi})^T \in R^8 \\ U &= (U_1 \ U_3 \ U_5 \ U_7)^T \in R^4 \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde U_1 representa un comando de velocidad lineal, el cual causa el desplazamiento sobre el eje vertical Z ; U_3 , U_5 y U_7 representan comandos de velocidad angular, que causan rotación alrededor de los ejes cartesianos X , Y y Z , respectivamente. Ahora, se definen las variables para el vector X

$$\begin{array}{cccc} x_1 = z & x_3 = \phi & x_5 = \theta & x_7 = \psi \\ x_2 = \dot{z} & x_4 = \dot{\phi} & x_6 = \dot{\theta} & x_8 = \dot{\psi} \end{array}$$

Entonces, el sistema (2.61) representado en variables de estado, se expresa como

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = f_i(x) + g_i(x)U_i \end{cases} ; \quad i \in (1, 3, 5, 7) \quad (2.63)$$

donde

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= -G & g_1(x) &= m^{-1}(C_{x_3} C_{x_5}) \\
 f_3(x) &= -I_{xx}^{-1}((I_{zz} - I_{yy})x_6 x_8) & g_3(x) &= I_{xx}^{-1} \\
 f_5(x) &= -I_{yy}^{-1}((I_{xx} - I_{zz})x_4 x_8) & g_5(x) &= I_{yy}^{-1} \\
 f_7(x) &= -I_{zz}^{-1}(I_{yy} - I_{xx})x_4 x_6) & g_7(x) &= I_{zz}^{-1}
 \end{aligned}$$

El objetivo de control es diseñar un esquema de control robusto, tal que, las salidas del sistema (x_i) sigan las trayectorias dadas ($x_{i_{ref}}$), para $i \in (1, 3, 5, 7)$; en presencia de perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas del sistema.

2.4. Conclusiones

En este capítulo se introdujo el concepto de UAV, una breve historia y clasificación de estas aeronaves, así como algunas aplicaciones. Además, se describió el funcionamiento de los principales movimientos del cuadrirrotor al cambiar la velocidad de los rotores. Por otro lado, se obtuvo el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del cuadrirrotor, a partir de un análisis cinemático y dinámico de cuerpo rígido. Además, bajo las hipótesis de que las fuerzas centrales y momentos de alabeo son despreciables, y que los coeficientes de empuje y arrastre se suponen constantes, se obtuvo el modelo simplificado del cuadrirrotor.

Capítulo 3

Esquema de Control por Modos Deslizantes Super-Twisting

Introducción

En este capítulo, se presentará la estructura básica del algoritmo de control por modos deslizantes. También se presentará la metodología para el diseño de un control robusto, basado en la técnica de modos deslizantes super twisting, con el fin de controlar la altitud de un cuadrirrotor. Además, se mostrarán los resultados obtenidos de las simulaciones de este control para validar su funcionamiento.

3.1. Control por Modos Deslizantes Super Twisting

El control por modos deslizantes es un esquema de control robusto, basado en el concepto de una estructura variable de control en respuesta a los cambios de estado del sistema. Además, el control por modos deslizantes permite la separación del movimiento del sistema completo en componentes parciales e independientes de dimensiones inferiores, y reduce la sensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones. Estas propiedades convierten a los modos deslizantes en un algoritmo atractivo para el diseño de controles utilizados en sistemas con dinámicas de alto orden, que operan bajo condiciones inciertas.

Para explicar el algoritmo de modos deslizantes, primero se define una superficie deslizante dada por

$$s = y - h(t) \quad (3.1)$$

donde y es la salida de un sistema dinámico SISO, la cual es una variable física medible; y $h(t)$ es una función continuamente diferenciable a seguir. Entonces, el control por modos deslizantes clásico está dado por la siguiente función

$$u = K * \text{sign}(s) \quad (3.2)$$

donde $K > 0$ es la ganancia del control; y la función $\text{sign}(x)$ está definida como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si, } x > 0 \\ 0 & \text{si, } x = 0 \\ -1 & \text{si, } x < 0 \end{cases}$$

Algunas de las ventajas de utilizar esta técnica son la convergencia en tiempo finito y la robustez ante incertidumbres paramétricas, perturbaciones y dinámicas no modeladas.

Debido a la naturaleza discontinua de los controladores basados en esta técnica, uno de los principales inconvenientes es la presencia de oscilaciones indeseables de alta frecuencia de las respuestas del sistema. Este fenómeno es llamado "chattering" y puede ocasionar daño a los actuadores. Para reducir los efectos del "chattering", se propone utilizar algoritmos de control de modos deslizantes de alto orden.

El principal problema al implementar estos algoritmos, es que se requiere el conocimiento de la superficie deslizante s y sus derivadas de orden superior. Una clase de sistemas de alto orden, es el que se conoce como 'Super Twisting', el cual es un algoritmo para sistemas de segundo orden que solo necesita conocimiento de la superficie deslizante s y su primer derivada \dot{s} . El algoritmo

de control super twisting clásico [18] está definido con las siguientes ecuaciones

$$C: \begin{cases} u = -K_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) + v \\ \dot{v} = -\frac{K_2}{2} \text{sign}(s) \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $K_1 > 0$ y $K_2 > 0$, son las ganancias de control.

3.2. Diseño del Control

Considere un sistema no lineal incierto de la siguiente forma

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u + \rho \\ y = Cx = x_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $x \in X \subset R^n$ es el vector de estado, $u \in R$ es la función de control, $\{f(x), g(x)\} \in R$ son campos vectoriales parcialmente conocidos y diferenciables; ρ representa las incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas del sistema. Para diseñar el control por modos deslizantes super twisting, se propone una superficie deslizante

$$s = \beta e_1 + e_2 \quad (3.5)$$

cuya derivada es

$$\dot{s} = \beta e_2 + \dot{e}_2 \quad (3.6)$$

donde $\beta > 0$ y los errores de seguimiento se definen como

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_{1ref} \\ e_2 &= x_2 - \dot{x}_{1ref} \end{aligned} \quad (3.7)$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1_{ref}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.4) en (3.8), resulta que

$$\dot{e}_2 = f(x) + g(x)u + \rho - \ddot{x}_{1_{ref}} \quad (3.9)$$

Entonces, al sustituir la ecuación anterior en (3.6), la derivada de la superficie deslizante s queda determinada por

$$\dot{s} = \beta e_2 + f(x) + g(x)u + \rho - \ddot{x}_{1_{ref}} \quad (3.10)$$

El objetivo de control es que la trayectoria del sistema alcance la referencia deseada y se logre alcanzar el régimen deslizante $s \equiv \dot{s} \equiv 0$.

Para lograr el objetivo de control, se considera el siguiente control

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-\beta e_2 - f(x) + \ddot{x}_{1_{ref}} - 2L|s|^{1/2} \text{sign}(s) - \frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau \right) \quad (3.11)$$

donde $L > 0$ es la ganancia del control super twisting.

Reemplazando el control anterior en la superficie deslizante de (3.10), resulta

$$\dot{s} = -2L|s|^{1/2} \text{sign}(s) - \frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau + \rho \quad (3.12)$$

Introduciendo el siguiente cambio de variables z_1 y z_2

$$\begin{aligned} z_1 &= s \\ z_2 &= -\frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau + \rho \end{aligned} \quad (3.13)$$

entonces, (3.12) está dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2L|z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{L^2}{2} \text{sign}(z_1) + \dot{\rho} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora se introducen las siguientes hipótesis

HIPÓTESIS 3.1. *Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son Lipschitz continuas con respecto a x , y uniformemente con respecto a u ; esto es, que existen constantes positiva C_1 y C_2 , tal que, $\|f(x)\| \leq C_1\|x\|$ y $\|g(x)\| \leq C_2\|x\|$.*

HIPÓTESIS 3.2. *La perturbación ρ y su primera derivada $\dot{\rho}$ están acotadas; esto es, que existen constantes positivas C_3 y C_4 , tal que, $|\rho| \leq C_3$ y $|\dot{\rho}| \leq C_4$.*

Ahora se establece el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.1. *Considerar el sistema (3.4), y además las hipótesis (3.1) y (3.2) se satisfacen. Entonces, el sistema en lazo cerrado con el control (3.11), es tal que el error de seguimiento tiende a cero en tiempo finito en presencia de perturbaciones.*

Demostración. Primero, se introduce el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\xi_1 &= |z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) \\ \xi_2 &= z_2\end{aligned}\tag{3.15}$$

Entonces, el sistema (3.14) en las nuevas coordenadas esta dado por

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{1}{2|e_1|^{1/2}} \{-2L|z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) + z_2\} \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{L^2}{2} \text{sign}(e_1) + \dot{\rho}\end{aligned}\tag{3.16}$$

o equivalentemente en forma de matriz

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2|z_1|^{1/2}} \{(A - S_L^{-1} C^T C)\xi + \Phi\}\tag{3.17}$$

con $\xi = (\xi_1 \ \xi_2)^T$, y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|z_1|^{1/2} \dot{\rho} \end{pmatrix}, \quad S_L^{-1} C^T C = \begin{pmatrix} 2L & 0 \\ L^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde S_L es una matriz simétrica y definida positiva, solución a la siguiente ecuación algebraica de Lyapunov

$$0 = -LS_L - A^T S_L - S_L A + C^T C \quad (3.18)$$

Por otro lado, para analizar la convergencia de la dinámica de seguimiento de (3.17), se considera la siguiente función de Lyapunov

$$V(\xi) = \xi^T S_L \xi \quad (3.19)$$

la cual es cuadrática en las nuevas coordenadas. La función $V(\xi)$ es continua en todo momento y continuamente diferenciable en todo lugar, excepto en el conjunto $\Gamma = \{\xi_1 = 0\}$. Como las trayectorias del sistema no pueden permanecer en el conjunto Γ antes de alcanzar el origen, la derivada con respecto al tiempo de V puede ser calculada de la forma normal en todo momento, excepto cuando las trayectorias se intersectan con el conjunto Γ ; y, si la trayectoria alcanza el origen después de un tiempo T , entonces permanecerá hay.

Tomando la derivada de $V(\xi)$ a lo largo de las trayectorias de (3.17)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \dot{\xi}^T S_L \xi + \xi^T S_L \dot{\xi} \\ &= \frac{1}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} \{(\xi^T (A - KC)^T + \Phi^T) S_L \xi + \xi^T S_L ((A - KC)\xi + \Phi)\} \\ &= \frac{1}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} \{\xi^T (A^T S_L - C^T K^T S_L + S_L A - S_L KC) \xi + \Phi^T S_L \xi + \xi^T S_L \Phi\} \end{aligned}$$

y puesto que $\Phi^T S_L \xi = \xi^T S_L \Phi$, entonces

$$\dot{V}(\xi) = \frac{1}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} \{\xi^T (-LS_L - C^T C) \xi + 2\xi^T S_L \Phi\}$$

Se tiene $\xi^T C^T C \xi = \xi_1^2 \geq 0$, entonces

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{1}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} \{-LV(\xi) + 2\xi^T S_L \Phi\}$$

Tomando la norma del término no lineal $2\xi^T S_L \Phi$, y a partir de la hipótesis (3.2); $\|\Phi\| \leq \beta \|\xi\|$, para

$\beta > 0$, se tiene

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{L}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} V(\xi) + \frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} \|S_L\| \beta \|\xi\|^2$$

Partiendo del hecho que existen constantes positivas $\lambda_{min}(S_L)$ y $\lambda_{max}(S_L)$, tal que

$$\lambda_{min}(S_L) \|\xi\|^2 \leq V(\xi) \leq \lambda_{max}(S_L) \|\xi\|^2$$

entonces se tiene que

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{(L-\sigma)}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} V(\xi)$$

donde $\sigma = \frac{2\|S_L\|\beta}{\lambda_{max}(S_L)}$. Puesto que la desigualdad $|z_1|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\|$ se satisface, entonces

$$\dot{V}(\xi) \leq -\mu V(\xi)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

donde $\mu = \frac{(L-\sigma)\lambda_{min}(S_L)^{\frac{1}{2}}}{2}$. Se selecciona L lo suficientemente grande para que la desigualdad $L > \sigma$ se cumpla, entonces $\dot{V}(\xi)$ es definida negativa. Esto demuestra que $V(\xi)$ es una función fuerte de Lyapunov. Puesto que la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{v} = \mu v^{\frac{1}{2}}, \quad v(0) = v_0$$

está dada por

$$v(t) = \left\{ v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} t \right\}^2$$

Entonces, por principio de comparación [19] se tiene que $V(\xi) < v(t)$, cuando $V(\xi(0)) < v(0)$.

Por lo tanto, ξ converge a cero en tiempo finito, a mas tardar en el tiempo dado por

$$T = \frac{2V(\xi(0))^{\frac{1}{2}}}{\mu}$$

Así, el estado $\xi = (\xi_1 \ \xi_2)^T$ converge a cero en tiempo finito. Esto implica que los estados z_1 y z_2 convergen a cero en tiempo finito. \square

3.2.1. Aplicación del Control por Modos Deslizantes Super Twisting

En esta sección, el control super twisting en (3.11) es aplicado al cuadrirrotor, representado por el siguiente sistema

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = f_i(x) + g_i(x)U_i + \rho \end{cases} ; \quad i \in (1, 3, 5, 7)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -g & g_1(x) &= m^{-1}(C_{x_3}C_{x_5}) \\ f_3(x) &= -I_{xx}^{-1}((I_{zz} - I_{yy})x_6x_8) & g_3(x) &= I_{xx}^{-1} \\ f_5(x) &= -I_{yy}^{-1}((I_{xx} - I_{zz})x_4x_8) & g_5(x) &= I_{yy}^{-1} \\ f_7(x) &= -I_{zz}^{-1}((I_{yy} - I_{xx})x_4x_6) & g_7(x) &= I_{zz}^{-1} \end{aligned}$$

Por otro lado, la superficie deslizante está dada por

$$s_i = \beta_i e_i + e_{i+1}; \quad i \in (1, 3, 5, 7)$$

donde el error de seguimiento y su derivada están definidos como

$$\begin{aligned} e_i &= x_i - x_{i_{ref}} ; \quad i \in (1, 3, 5, 7) \\ e_{i+1} &= \dot{x}_i - \dot{x}_{i_{ref}} \end{aligned}$$

De modo que, el control super twisting está dado por

$$U_i = \frac{1}{g_i(x)} \left(-f_i(x) + \ddot{x}_{i_{ref}} - \beta_{1i} e_{i+1} - 2L_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i) - \frac{L_i^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s_i) d\tau \right); \quad i = (1, 3, 5, 7) \quad (3.21)$$

3.2.2. Simulación

Para ilustrar la efectividad del control super twisting propuesto, se realizaron simulaciones utilizando diferentes trayectorias de referencia, y en presencia de perturbaciones. En la Tabla 3.1 se establecen los parámetros utilizados para la simulación. Además, el vector de condiciones iniciales del sistema $X(0)$ es el siguiente

$$X(0) = (-1, -0.5, -1, 0.2, -0.3, 0.8, 0.2, 0, 1)^T$$

Parámetros del modelo		Control ST				
		i=	1	3	5	7
$m = 0.42 [Kg]$	$I_{XX} = 0.0027 [Kg m^2]$	β_i	1	1	1	1
$G = 9.81 [\frac{m}{s^2}]$	$I_{YY} = 0.0029 [Kg m^2]$	L_i	3	3	3	3
$\rho = \frac{1}{2} \sin(t)$	$I_{ZZ} = 0.0053 [Kg m^2]$					

Tabla 3.1: Parámetros de simulación para el control.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la simulación

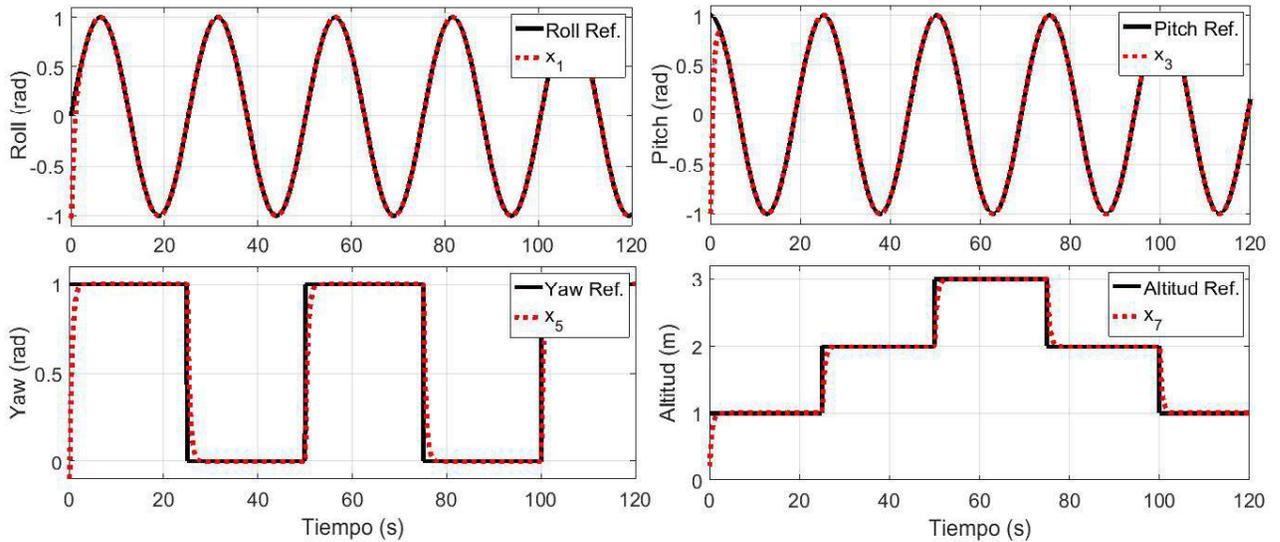


Figura 3.1: Seguimiento de trayectoria.

En la Figura 3.1 se observa que con el control super twisting se logra el seguimiento de las diferentes trayectorias, a pesar de la presencia de la perturbaciones.

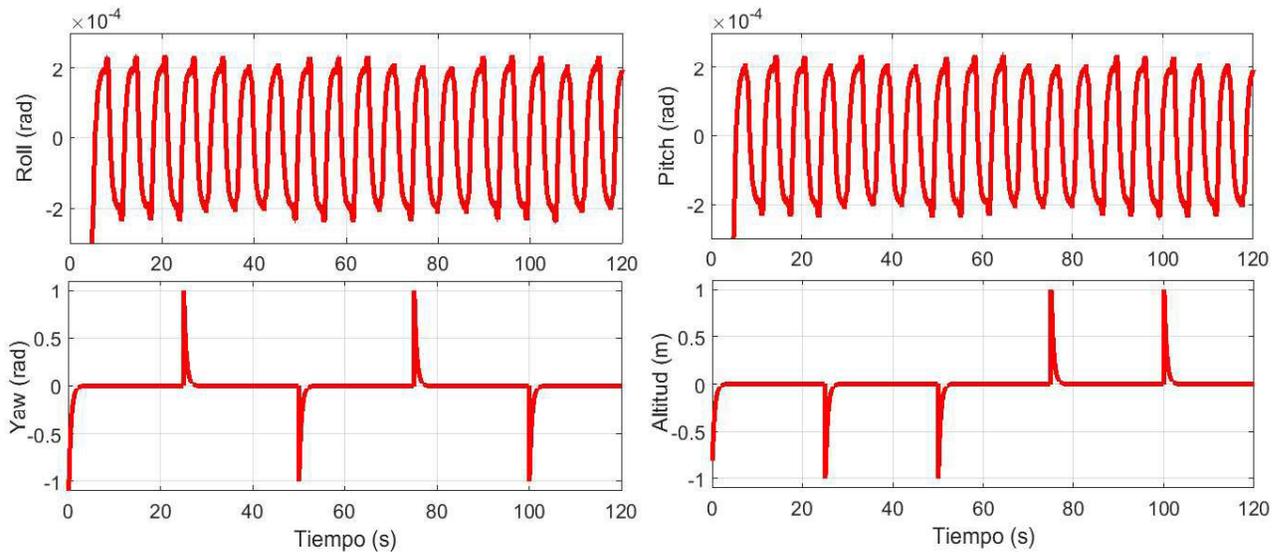


Figura 3.2: Error de seguimiento.

En la Figura 3.2 se muestran los errores de seguimiento, los cuales son pequeños y sólo se presentan picos cuando hay cambios grandes en la referencia; pero inmediatamente después de esos cambios, tienden a cero de nuevo.

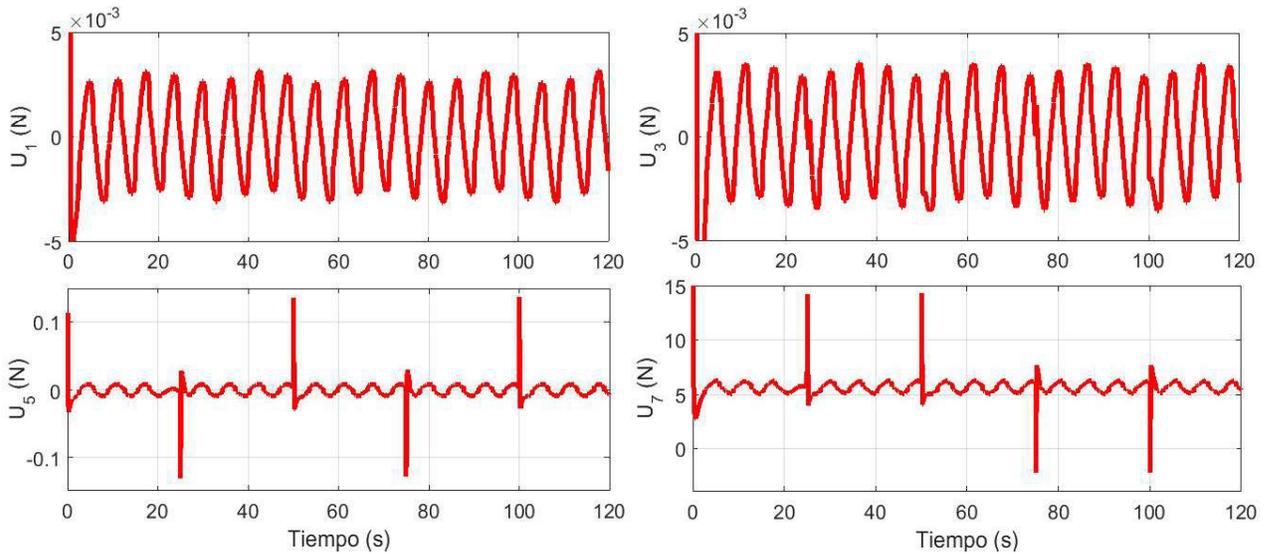


Figura 3.3: Señal de control U_i .

En la Figura 3.3 se observa la señal de control U_i ($i = (1, 3, 5, 7,)$), de las diferentes trayectorias.

El efecto chattering en las figuras es casi nulo, y solamente se distinguen oscilaciones provocadas por la perturbación.

3.3. Conclusiones

En este capítulo se presentó el diseño de un control no lineal robusto, basado en el enfoque de la técnica de modos deslizantes super twisting. Esta técnica de control es robusta con respecto a perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas en el sistema del cuádrirrotor. Además, se presentó una simulación de la implementación de este control, en el modelo matemático simplificado del cuádrirrotor; con la cual se obtuvieron los siguientes resultados

- El número de parámetros a sintonizar en el control propuesto se reducen a sólo uno, la ganancia L ; mientras que el control super twisting clásico en (3.3) utiliza dos ganancias, K_1 y K_2 .
- Con el control propuesto se logra un seguimiento de trayectoria en tiempo finito, aún en presencia de perturbaciones externas.
- Las oscilaciones del efecto chattering están atenuadas.

Por otro lado, algunas variables como las velocidades lineales y angulares podrían no estar disponibles para ser utilizadas en el control, dificultando su correcta implementación en la plataforma experimental. Para solucionar esto, se plantea el diseño de un observador de estado que estime las variables no medibles y conseguir diseñar un esquema de control de alto desempeño.

Capítulo 4

Esquema de Observador por Modos Deslizantes Super Twisting

Introducción

En este capítulo, se presentará el diseño para observadores de sistemas no lineales con incertidumbres. Además, se presentará una metodología para el diseño de un observador basado en la técnica de modos deslizantes super twisting, con el objetivo de estimar las variables no medibles del cuadricóptero, como lo son las velocidades lineales y angulares. Por otro lado, se presentarán los resultados obtenidos de las simulaciones de este observador para validar su funcionamiento.

4.1. Observadores de Sistemas no Lineales

Cuando se implementa una ley de control, se supone que se tiene conocimiento de todo el vector de estado. Sin embargo, esto no siempre es posible ya que los sensores pueden llegar a ser costosos o no existen para la aplicación deseada. Entonces, una posible solución a este problema es la implementación de un observador para estimar las variables no medibles.

Para realizar la estimación de estados, es necesario asegurarse que el sistema sea observable. Esto quiere decir que es posible determinar el estado inicial del sistema, a partir del conocimiento de sus entradas y salidas medibles. A diferencia de los sistemas lineales, la observabilidad de un sis-

tema no lineal depende de las entradas aplicadas, ya que habrá ciertas entradas que conviertan al sistema en no observable. Entonces, la dificultad al diseñar un observador para sistemas no lineales radica en identificar las entradas para las cuales el observador converge.

No existe una metodología sistemática para el diseño de observadores de sistemas no lineales, por lo que se han propuesto varios métodos. Estas metodologías se pueden clasificar en términos de convergencia, por un lado para aquellos observadores cuya convergencia es de forma asintótica o exponencial se tienen los observadores de tipo Kalman [20] y tipo Luenberger [21]. Por otro lado, se tienen los observadores cuya convergencia es en tiempo finito, como lo son observadores diseñados por modos deslizantes o por modos deslizantes de alto orden [14].

Respecto a los observadores diseñados mediante el enfoque de modos deslizantes, estos son ampliamente utilizados ya que presentan la ventaja de ser robustos ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Además, el diseño de observadores super twisting es de los más populares, debido a sus aplicaciones prácticas para compensar una amplia variedad de perturbaciones y asegurar la convergencia en tiempo finito.

4.2. Diseño del Observador de Estados

Considere el sistema no lineal incierto de la forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, u) + \rho \\ y = Cx = x_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $C = [1 \ 0]$; $x \in X \subset R^2$ es el vector de estado; $u \in R$ es la entrada del sistema; $y \in R$ es la salida del sistema; $f(x_1, x_2, u) \in R$ es el término no lineal nominal; ρ representa las incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas del sistema. El sistema (4.1) pertenece a la clase de sistemas

no lineales en la forma triangular [22] con

$$\Phi(u, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1, x_2, u) \end{pmatrix}$$

Ahora se introducen las siguientes hipótesis

HIPÓTESIS 4.1. *El vector $\Phi(u, x)$ es continuamente Lipschitz con respecto a x , y uniformemente con respecto a u ; esto es, que existe una constante positiva C_0 , tal que, $\|\Phi(u, x)\| \leq C_0\|x\|$.*

HIPÓTESIS 4.2. *La perturbación ρ y su primera derivada $\dot{\rho}$ están acotadas; esto es, que existen constantes positivas C_1 y C_2 , tal que, $|\rho| \leq C_1$ y $|\dot{\rho}| \leq C_2$.*

HIPÓTESIS 4.3. *La función $f(x_1, x_2, u)$ es Lipschitz con respecto a x y uniformemente con respecto a u ; esto es, que existe una constante positiva C_3 , tal que, $\|f(x_1, x_2, u)\| \leq C_3\|x\|$.*

Entonces, el siguiente sistema

$$O: \begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + 2\Theta|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = f(\hat{z}_1, \hat{z}_2, u) + \frac{\Theta^2}{2} \text{sign}(\hat{e}_1) \end{cases} \quad (4.2)$$

es un Observador Super Twisting (STO) para el sistema (4.1), donde $\Theta > 0$ es la ganancia del observador. Ahora, para analizar la convergencia en tiempo finito del observador, se define el error de estimación como

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= x_1 - \hat{z}_1 \\ \hat{e}_2 &= x_2 - \hat{z}_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 - 2\Theta|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \hat{f}(x, \hat{z}, u) + \rho - \frac{\Theta^2}{2} \text{sign}(\hat{e}_1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $\hat{f}(x, \hat{z}, u) = f(x_1, x_2, u) - f(\hat{z}_1, \hat{z}_2, u)$.

Ahora se establece el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 4.1. *Considere el sistema (4.1), y además las hipótesis (4.1), (4.2) y (4.3) se satisfacen. Entonces, el sistema (5.8) es un observador para el sistema (4.1), donde el error de estimación tiende a cero en tiempo finito, en presencia de perturbaciones.*

Demostración. Primero, se introduce el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_1 &= |\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \hat{\xi}_2 &= \hat{e}_2\end{aligned}\quad (4.5)$$

Entonces, la dinámica del error de estimación en las nuevas coordenadas, está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}}_1 &= \frac{1}{2|e_1|^{\frac{1}{2}}} \{-2L|e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) + e_2\} \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{f}(x, z, u) + \rho - \frac{L^2}{2} \text{sign}(e_1)\end{aligned}\quad (4.6)$$

o equivalentemente en la forma de matriz

$$\dot{\hat{\xi}} = \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \{(A - S_\Theta^{-1} C^T C) \hat{\xi} + \Phi\} \quad (4.7)$$

con $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1 \ \hat{\xi}_2)^T$, y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}(\hat{f}(x, \hat{z}, u) + \rho) \end{pmatrix}, \quad S_\Theta^{-1} C^T C = \begin{pmatrix} 2\Theta & 0 \\ \Theta^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde S_Θ es una matriz simétrica y definida positiva, solución de la siguiente ecuación algebraica de Lyapunov

$$0 = -\Theta S_\Theta - A^T S_\Theta - S_\Theta A + C^T C \quad (4.8)$$

Por otro lado, para analizar la convergencia a cero del error de estimación, se considera la siguiente función de Lyapunov

$$V(\hat{\xi}) = \hat{\xi}^T S_\Theta \hat{\xi} \quad (4.9)$$

la cual es cuadrática en las nuevas coordenadas. La función $V(\hat{\xi})$ es continua en todo momento y continuamente diferenciable en todo momento, excepto en el conjunto $\Omega = \{\hat{\xi}_1 = 0\}$. Como las

trayectorias del sistema no pueden permanecer en el conjunto Ω antes de alcanzar el origen, la derivada con respecto al tiempo de V puede ser calculada en todo momento, excepto cuando las trayectorias se intersectan con el conjunto Ω ; y si la trayectoria alcanza el origen después de un tiempo T , entonces permanecerá hay.

Tomando la derivada de $V(\hat{\xi})$ a lo largo de las trayectorias de (4.7)

$$\begin{aligned}\dot{V}(\hat{\xi}) &= \dot{\hat{\xi}}^T S_{\Theta} \hat{\xi} + \hat{\xi}^T S_{\Theta} \dot{\hat{\xi}} \\ &= \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \{(\hat{\xi}^T (A - KC)^T + \Phi^T) S_{\Theta} \hat{\xi} + \hat{\xi}^T S_{\Theta} ((A - KC)\hat{\xi} + \Phi)\} \\ &= \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \{\hat{\xi}^T (A^T S_{\Theta} - C^T K^T S_{\Theta} + S_{\Theta} A - S_{\Theta} KC) \hat{\xi} + \Phi^T S_{\Theta} \hat{\xi} + \hat{\xi}^T S_{\Theta} \Phi\}\end{aligned}$$

y puesto que $\Phi^T S_{\Theta} \hat{\xi} = \hat{\xi}^T S_{\Theta} \Phi$, entonces

$$\dot{V}(\hat{\xi}) = \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \{\hat{\xi}^T (-\Theta S_{\Theta} - C^T C) \hat{\xi} + 2\hat{\xi}^T S_{\Theta} \Phi\}$$

Se tiene que $\hat{\xi}^T C^T C \hat{\xi} = \hat{\xi}_1^2 \geq 0$, entonces

$$\dot{V}(\hat{\xi}) \leq \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} (-\Theta V(\hat{\xi}) + 2\hat{\xi}^T S_{\Theta} \Phi)$$

Tomando la norma del término no lineal $2\hat{\xi}^T S_{\Theta} \Phi$, y a partir de la hipótesis (4.1); resulta que $\|\Phi\| \leq \beta \|\hat{\xi}\|$, para $\beta > 0$, se tiene que

$$\dot{V}(\hat{\xi}) \leq -\frac{\Theta}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} V(\hat{\xi}) + \frac{1}{|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \|S_{\Theta}\| \beta \|\hat{\xi}\|^2$$

Partiendo del hecho de que existen constantes positivas $\lambda_{min}(S_{\Theta})$ y $\lambda_{max}(S_{\Theta})$, tal que

$$\lambda_{min}(S_{\Theta}) \|\hat{\xi}\|^2 \leq V(\hat{\xi}) \leq \lambda_{max}(S_{\Theta}) \|\hat{\xi}\|^2$$

entonces se tiene que

$$\dot{V}(\hat{\xi}) \leq -\frac{(\Theta - \sigma)}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} V(\hat{\xi})$$

donde $\sigma = \frac{2\|S_\Theta\|\beta}{\lambda_{\max}(S_\Theta)}$. Puesto que la desigualdad $|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \leq \|\hat{\xi}\|$ se satisface, entonces

$$\dot{V}(\hat{\xi}) \leq -\mu V(\hat{\xi})^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

donde $\mu = \frac{(\Theta - \sigma)\lambda_{\min}(S_\Theta)^{\frac{1}{2}}}{2}$. Se selecciona Θ lo suficientemente grande para que la desigualdad $\Theta > \sigma$ se cumpla, entonces $\dot{V}(\hat{\xi})$ es definida negativa. Esto demuestra que $V(\hat{\xi})$ es una función fuerte de Lyapunov [16].

Puesto que la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{v} = \mu v^{\frac{1}{2}}, \quad v(0) = v_0$$

está dada por

$$v(t) = \left\{ v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} t \right\}^2$$

Entonces, por el principio de comparación [19] se tiene que $V(\hat{\xi}) < v(t)$, cuando $V(\hat{\xi}(0)) < v_0$. Por lo tanto, $\hat{\xi}$ converge a cero en tiempo finito a más tardar en el tiempo dado por

$$T = \frac{2V(\hat{\xi}(0))^{\frac{1}{2}}}{\mu}$$

Así, el estado $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1 \ \hat{\xi}_2)^T$ converge a cero en tiempo finito. Esto implica que los estados \hat{e}_1 y \hat{e}_2 convergen a cero en tiempo finito. \square

4.2.1. Aplicación del Observador por Modos Deslizantes Super Twisting

En esta sección, el observador super twisting en (5.8) es aplicado al cuadirrotor, representado por el siguiente sistema

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = f_i(x) + g_i(x)U_i + \rho \end{cases} ; \quad i \in (1, 3, 5, 7)$$

donde

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= -G & g_1(x) &= m^{-1}(C_{x_3} C_{x_5}) \\
 f_3(x) &= -I_{xx}^{-1}((I_{zz} - I_{yy})x_6 x_8) & g_3(x) &= I_{xx}^{-1} \\
 f_5(x) &= -I_{yy}^{-1}((I_{xx} - I_{zz})x_4 x_8) & g_5(x) &= I_{yy}^{-1} \\
 f_7(x) &= -I_{zz}^{-1}(I_{yy} - I_{xx})x_4 x_6) & g_7(x) &= I_{zz}^{-1}
 \end{aligned}$$

Este observador se utilizará para estimar la velocidad vertical V_z y las velocidades angulares ω_{roll} , ω_{pitch} y ω_{yaw} .

Los errores de estimación se definen como

$$\hat{e}_i = x_i - \hat{z}_i; \quad i \in (1, 3, 5, 7)$$

De modo que, el observador super twisting esta dado por

$$O: \begin{cases} \dot{\hat{z}}_i = \hat{z}_{i+1} + 2\Theta_i |\hat{e}_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_i) \\ \dot{\hat{z}}_{i+1} = f_i(z) + g_i(z)U_i + \frac{\Theta_i^2}{2} \text{sign}(\hat{e}_i) \end{cases}; \quad i \in (1, 3, 5, 7) \quad (4.11)$$

4.2.2. Simulación

Para ilustrar la efectividad del observador super twisting propuesto, se realizaron simulaciones utilizando diferentes trayectorias de referencia, y en presencia de perturbaciones. En la Tabla 4.1 se establecen los parámetros utilizados para la simulación. Además, los vectores de condiciones iniciales del sistema $X(0)$ y del observador $Z(0)$, son los siguientes

$$X(0) = (-1, -0.5, -1, 0.2, -0.3, 0.8, 0.2, 0.1)^T$$

$$Z(0) = (1, -1, -1, 1, 2, -2, -3, -1)^T$$

Parametros del modelo		Observador ST				
		i=	1	3	5	7
$m = 0.42 \text{ [Kg]}$	$I_{XX} = 0.0027 \text{ [Kg m}^2\text{]}$	Θ_i	1.5	1.5	1.5	2.5
$G = 9.81 \text{ [}\frac{m}{s^2}\text{]}$	$I_{YY} = 0.0029 \text{ [Kg m}^2\text{]}$					
$\rho = \frac{1}{2} \sin(t)$	$I_{ZZ} = 0.0053 \text{ [Kg m}^2\text{]}$					

Tabla 4.1: Parámetros de simulación para el observador.

A continuación, se presentan los resultados de la simulación

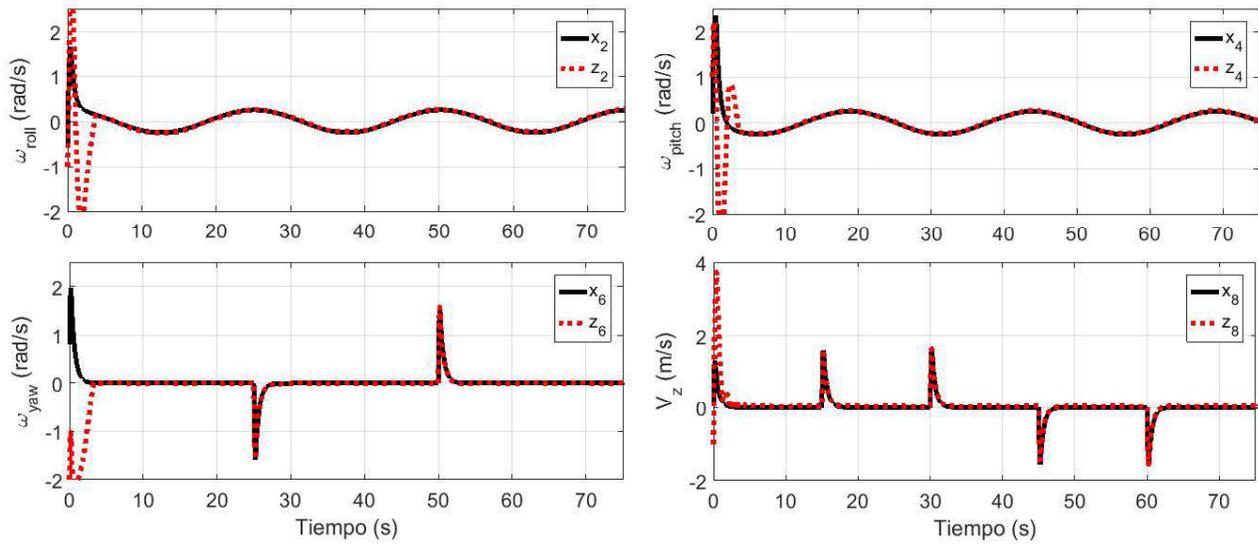


Figura 4.1: Estimación de estados.

En la Figura 4.1 se muestran las respuestas de la estimación y del estado. Se muestra que el observador super twisting logra estimar los estados x_i ($i = (2, 4, 6, 8)$) en tiempo finito, aún en presencia de perturbaciones.

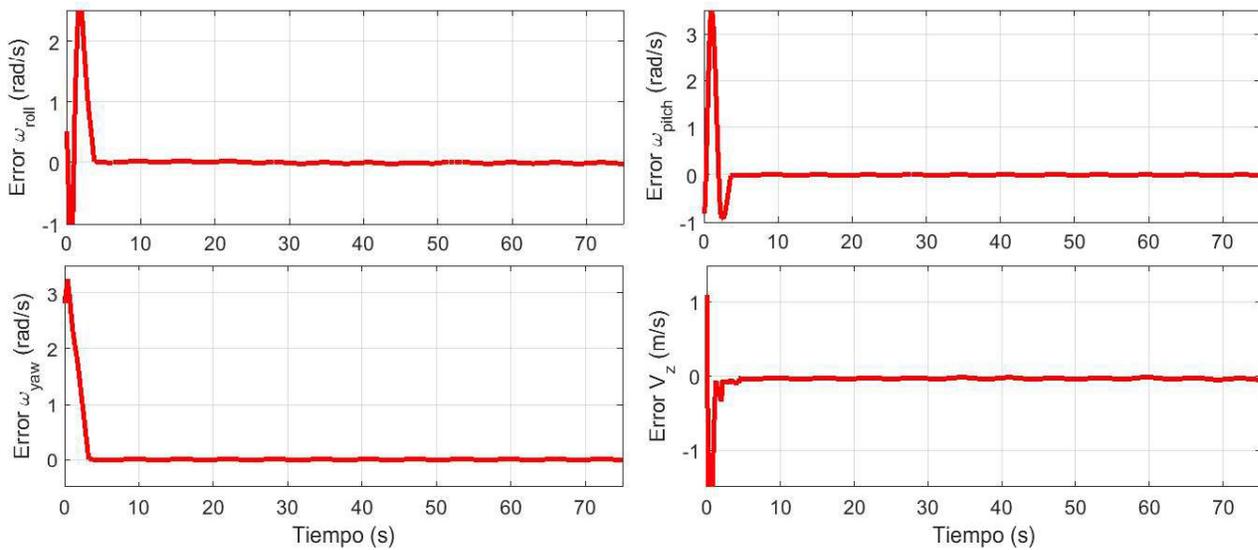


Figura 4.2: Error de estimación.

En la Figura 4.2 se muestran los errores de estimación de estado, los cuales tienden a cero en tiempo finito.

4.3. Conclusiones

En este capítulo se presentó el diseño de un observador no lineal robusto, basado en el enfoque de la técnica de modos deslizantes super twisting. Además, se presentaron resultados en simulación de la implementación de este observador, aplicado al modelo matemático simplificado del cuadricóptero. Las ventajas de este observador super twisting son las siguientes

- Se requiere solamente de un parámetro Θ para sintonizar el algoritmo del observador.
- Se logra la estimación de los estados del sistema en tiempo finito, aún en presencia de perturbaciones externas, dinámicas no modeladas e incertidumbres paramétricas.
- No se aprecia el efecto chattering en la trayectoria de estimación.

Un estudio comparativo de algunas técnicas de control, basadas en modos deslizantes encontradas en [23], contra la técnica de control presentada en el Capítulo 3, será presentado en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Resultados

Introducción

En este capítulo, se presentará primero un estudio comparativo en simulación de varias técnicas de control basadas en el algoritmo super twisting. Posteriormente, se llevará a cabo un estudio experimental, en el cual se implementará el observador de estados propuesto, junto con el control super twisting simplificado propuesto y el control super twisting modificado presentado en [23], a una plataforma experimental en tiempo real.

5.1. Resultados de Simulación

En esta sección se realiza un estudio comparativo en simulación, de diversas técnicas de control basadas en el algoritmo de modos deslizantes. Las estrategias de control por modos deslizantes, del tipo

- Super twisting simplificado propuesto (SST-SMC).
- Super twisting clásico (CST-SMC).
- Super twisting modificado (MST-SMC).
- Super twisting con terminal no singular (NST-ST-SMC).

Los tres últimos controles son presentados en [23].

Considere el sistema de la siguiente ecuación, el cual representa el modelo matemático que describe la dinámica de la altitud del cuadrirrotor

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)U \end{cases} \quad (5.1)$$

donde

$$f(x) = -G \quad g(x) = \frac{C_\phi C_\theta}{m}$$

Los controles aplicados al sistema (5.1) son los siguientes

- Super Twisting Simplificado propuesto (SST-SMC)

$$U_{SST} = \frac{1}{g(x)} \left(-f(x) + \ddot{x}_{ref} - \beta_1 e_2 - 2L|s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau \right) \quad (5.2)$$

- Super Twisting Clásico (CST-SMC):

$$U_{GST} = \frac{1}{g(x)} \left(-f(x) + \ddot{x}_{ref} - \beta_1 e_2 - C_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - C_2 \int_0^t \text{sign}(s) d\tau \right) \quad (5.3)$$

- Super Twisting Modificado (MST-SMC):

$$U_{MST} = \frac{1}{g(x)} \left(-f(x) + \ddot{x}_{ref} - \beta_1 e_2 - C_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - C_2 s - C_3 \int_0^t \text{sign}(s) d\tau - C_4 \int_0^t s d\tau \right) \quad (5.4)$$

- Super Twisting con Terminal No Singular (NST-ST-SMC)

$$U_{NST-ST} = \frac{1}{g(x)} \left(-f(x) + \ddot{x}_{ref} - \beta_1 e_2 - C_1 |s_{ns}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_{ns}) - C_2 \int_0^t \text{sign}(s_{ns}) d\tau - \beta_2 \left[\exp(-\lambda t) e_1^{-2\alpha} (\lambda + 2\alpha e_2) \right] \right) \quad (5.5)$$

Para este control, se define una nueva superficie deslizante s_{ns} como

$$s_{ns} = e_2 + \beta_1 e_1 + \beta_2 \exp(-\lambda t) e_1^{-2\alpha} \quad (5.6)$$

Para todos los controladores presentados anteriormente, las constantes $C > 0$, $\beta > 0$ y $L > 0$. Además, se define la superficie deslizante s y los errores de seguimiento e_1 y e_2 como

$$s = \beta_0 e_1 + e_2$$

$$e_1 = x_1 - x_{ref}$$

$$e_2 = x_2 - \dot{x}_{ref}$$

Se considera la siguiente lista de parámetros empleados para la simulación

Parámetros del Cuadrirrotor	SST-SMC	GST-SMC	MST-SMC	NST-ST-SMC
$m = 0.42 [Kg]$	β_1 0.25	β_1 0.25	β_1 0.25	β_1 0.25
$g = 9.81 [\frac{m}{s^2}]$	L 0.25	C_1 3.5	C_1 3	β_2 0.5
$I_{XX} = 0.0027 [Kg m^2]$		C_2 6	C_2 4.5	C_1 3
$I_{YY} = 0.0029 [Kg m^2]$			C_3 0.18	C_2 4.5
$I_{ZZ} = 0.0053 [Kg m^2]$			C_4 0.18	λ 0.35
				α 0.5

Tabla 5.1: Parámetros de simulación.

Los resultados obtenidos de la simulación de los controles por modos deslizantes de segundo orden (SST, GST, MST, NST-ST) para controlar la altitud de un cuadrirrotor son presentadas en la Figura 5.1. Se utiliza un función en escalones como señal de referencia, con cambios en la altura de 1 metro cada 25 segundos, mostrando una vista a detalle de una sección en el rectángulo.

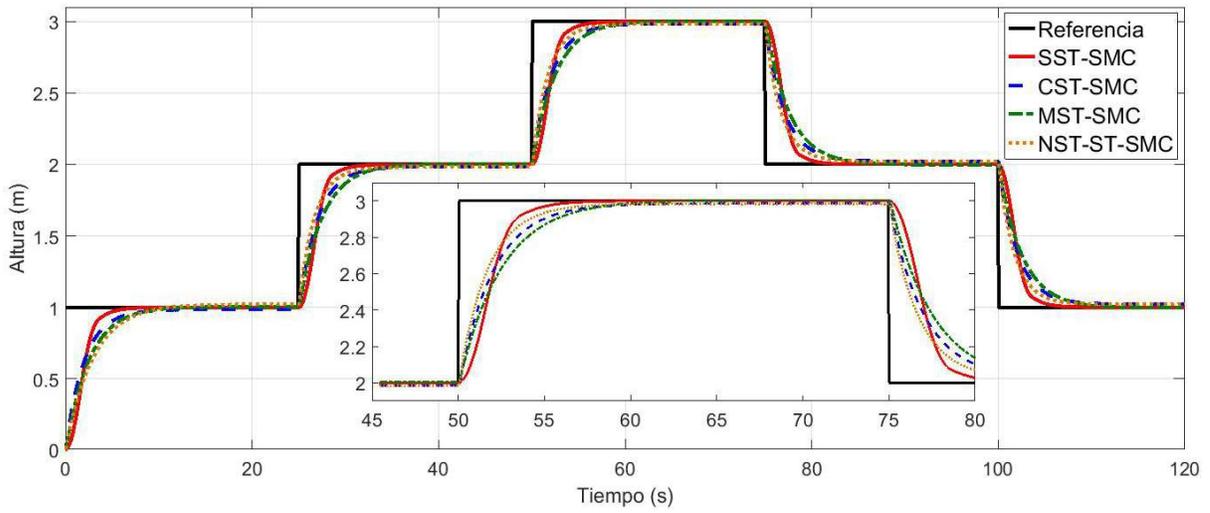


Figura 5.1: Seguimiento de trayectoria.

En la Figura 5.2 se muestran los errores de seguimiento de cada uno de los controles. Además, se muestra a detalle una sección de la gráfica.

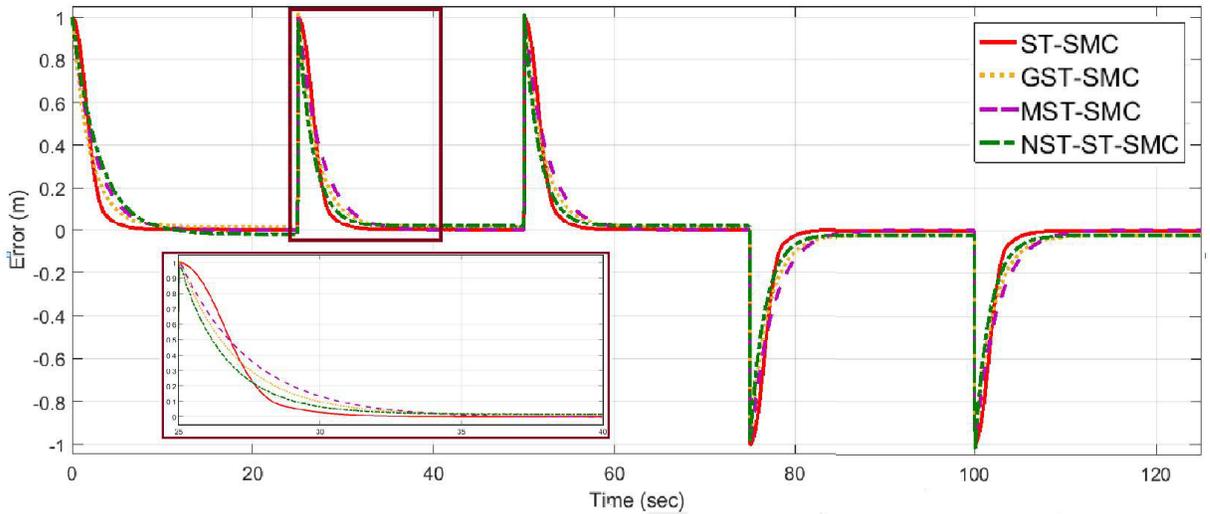


Figura 5.2: Error de seguimiento.

La Figura 5.3 muestra las señales de control de los diferentes algoritmos presentados. El efecto chattering se aprecia a simple vista en las señales de control de los algoritmos super twisting clásico (CST) y el super twisting con terminal no singular (NST-ST), lo cual afecta directamente

a los actuadores del sistema. En el control super twisting modificado (MST), el efecto chattering es reducido, pero presenta picos bastante notorios. Por otro lado, el control super twisting simplificado (SST) presenta una señal de control suave, donde el chattering es reducido y no aparecen picos muy grandes en los cambios de referencia.

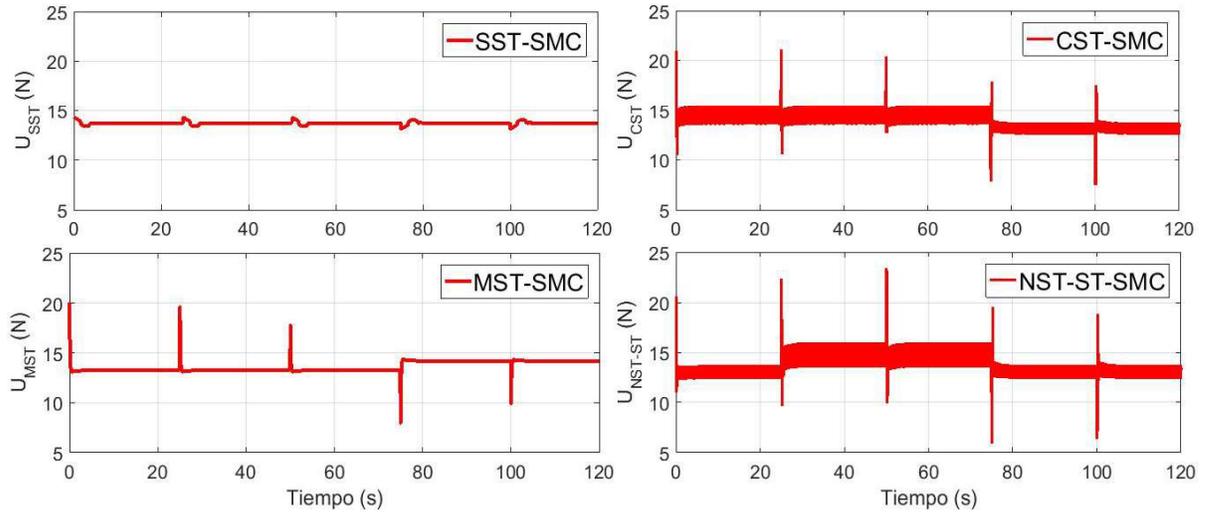


Figura 5.3: Señales de control U .

A continuación, se presenta un estudio comparativo de los distintos esquemas de control presentados anteriormente. Con el fin de validar la eficiencia de cada control, se calcularon los siguientes índices de desempeño, en base al error de seguimiento

- El Error Cuadrático Integral (ISE) está dado por

$$ISE = \int_{t_0}^{t_f} e(\tau)^2 d\tau$$

donde $e(t) = x_{ref}(t) - x(t)$ es el error de seguimiento, y está definido por la diferencia entre la señal de referencia x_{ref} , y la señal de salida x , en un intervalo de tiempo $T = (t_0 : t_f)$. El ISE penaliza a los errores grandes, más que a los pequeños. Si el ISE tiene un valor mínimo, indica que el control logra eliminar los errores grandes, pero tolera a los más pequeños [24]. Un control con valor de ISE mínimo requiere de menor tiempo para alcanzar la señal de referencia, ya que reduce las oscilaciones de los errores con más amplitud. Sin embargo, las

oscilaciones de baja amplitud persisten, debido a la presencia de los errores pequeños que no brindan peso al criterio ISE.

- El Error Absoluto Integral (IAE) está definido por

$$IAE = \int_{t_0}^{t_f} |e(\tau)| d\tau$$

Debido a que el criterio IAE toma en cuenta todas las amplitudes del error, los controles que intentan minimizar este criterio requieren de más tiempo para alcanzar la referencia, ya que intentan minimizar todas las oscilaciones [24].

- El Error Absoluto Integral ponderado en el Tiempo (ITAE) está dado por

$$ITAE = \int_{t_0}^{t_f} \tau |e(\tau)| d\tau$$

Si el ITAE tiene un valor mínimo, indica que el control requiere menos tiempo para alcanzar la referencia, sin la presencia de las oscilaciones de baja amplitud [24]. Sin embargo, estos controles suelen requerir más tiempo durante el inicio, debido a que los errores con más amplitud que aparecen al inicio del sobreimpulso se multiplican por un tiempo pequeño y brindan poco peso a este criterio, por lo que no son considerados [24].

Además, se calcula el siguiente índice de desempeño en base al control

- La integral del control cuadrático (ISC), está definida por

$$ISC = \int_{t_0}^{t_f} u(\tau)^2 d\tau$$

donde $u(t)$ es el control del sistema. Este criterio brinda una idea de la cantidad de energía requerida por el control, para alcanzar la señal de referencia y mantener el seguimiento de la trayectoria.

Para el cálculo de estos criterios se considera un intervalo de tiempo $T = (0 : 125 \text{ s})$.

Control	ISE	IAE	ITAE	ISC
SST-SMC	6.8820	10.0107	511.9699	23579
CST-SMC	5.4312	12.2068	669.9127	24437
MST-SMC	6.4862	12.5983	660.8323	23327
NST-ST-SMC	5.0297	11.5092	587.6744	23636

Tabla 5.2: Mediciones de desempeño en simulación.

En base a los resultados de la Tabla 5.2, puede observarse que el control super twisting simplificado (SST) de (5.2) presenta un tiempo de respuesta menor, basándose en el criterio ITAE. Además, la energía requerida para llevar a cabo el seguimiento de trayectoria es muy similar a la del control super twisting modificado (MST), que es el que requiere menos energía. Por otro lado, el control SST presenta menos picos y chattering, como se ve en la Figura 5.3, comparado con los otros tres controles presentados en [23]. El control super twisting modificado (MST-SMC) tiene un desempeño similar al control super twisting simplificado (SST). Por esta razón, los controles SST y MST se implementarán en la plataforma experimental, con el fin de comparar su desempeño en una aplicación en tiempo real.

5.2. Pruebas Experimentales

5.2.1. Plataforma AR.Drone 1.0

La plataforma experimental que se utilizará en este trabajo es el cuadricóptero AR.Drone 1.0, diseñado por la compañía francesa Parrot Inc. Está diseñado originalmente para ser controlado a través de smartphones o tablets, vía Wi-Fi, con protocolos de comunicación específicos.

Este cuadricóptero cuenta con diversos sensores de movimiento, localizados debajo del casco central [25]. Entre ellos se encuentra un MEMS (Micro Electromechanical System) de 6 grados de libertad, el cual provee al software de las medidas de los ángulos de Euler; también cuenta con un telémetro de ultrasonido, que proporciona medidas de la altitud del dron, a una frecuencia de 40KHz. El AR.Drone utiliza 4 motores DC sin escobillas (3500 rpm, 15W), una batería Li-Po (3 celdas, 11.1V, 1000mAh) y un sistema computarizado, que consiste en un procesador ARM 9 a 468MHz, con memoria DDR de 128MB a 200MHz, Wi-Fi b/g y Linux como sistema operativo.

Para controlar y configurar al cuadrirrotor se envían comandos AT (Attention Command Set) a un puerto UDP (User Datagram Protocol). Además, la información acerca del dron (estado, posición, velocidad de los motores, etc.) es llamada con el comando "navdata", y es enviada por el dron hacia el cliente por otro puerto UDP.

El AR.Drone es fácil de adquirir en el mercado y es sencillo conseguir piezas de repuesto para mantenerlo operativo, así como para mantenimiento. Además, Parrot proporciona un conjunto de herramientas de software que facilita la comunicación y la implementación de algoritmos de control en la plataforma AR.Drone.

Esta plataforma utiliza un software interno que es capaz de entregar el siguiente conjunto de variables (z, ϕ, θ, ψ) . Las señales para controlar los movimientos del dron están codificadas bajo un protocolo específico, en el cual estas señales son normalizadas y se disponen como elementos en el siguiente vector de entradas

$$U = (U_1 \ U_3 \ U_5 \ U_7)^T \in (-1.0, +1.0) \quad (5.7)$$

donde U_1 representa el control de velocidad lineal vertical, que causa el desplazamiento sobre el eje z ; las señales U_3 , U_5 y U_7 representan el control de velocidades angulares, que causan la rotación alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente.

El Observador Super Twisting diseñado anteriormente se implementará en la programación para reconstruir el vector de estado del cuadrirrotor, ya que al medir sólo información de 4 variables (z, ϕ, θ, ψ) , se requiere estimar las 4 variables de velocidad $(\dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, para poder implementar el algoritmo de control, utilizando el vector de estado reconstruido.

En la Figura 5.4 se muestra la comunicación vía Wi-Fi entre el CPU que contiene los algoritmos del observador y del control, con el cuadrirrotor

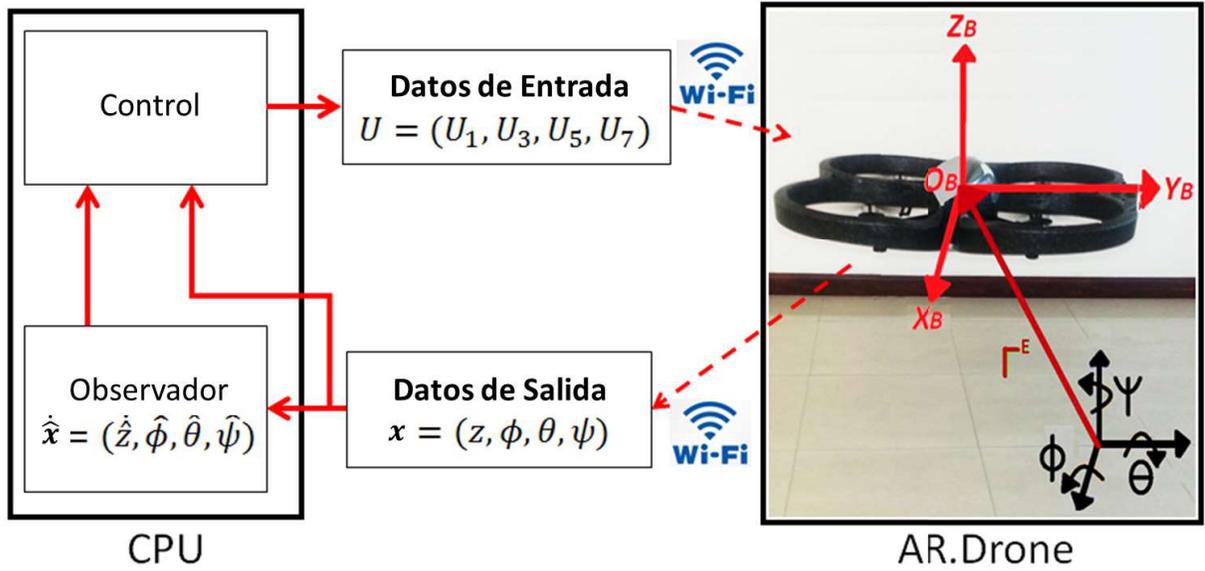


Figura 5.4: Comunicación via red Wi-Fi.

El cuadricóptero envía la información de las variables medibles x al CPU, esta información se utiliza en el observador para realizar la estimación de las variables no medibles \hat{x} . Las variables x y \hat{x} se utilizan en el control para obtener las señales de entrada U , que son enviadas al cuadricóptero. De esta forma se controlan los movimientos del cuadricóptero para que sigan la referencia deseada.

5.3. Resultados Experimentales

En esta sección se presentan los resultados obtenidos cuando se aplican las técnicas de control propuestas para el control de altitud del AR.Drone. Para analizar la efectividad del control super twisting propuesto, se realiza un experimento en el cuadricóptero.

Utilizando el Observador Super Twisting (STO) diseñado en el Capítulo 4

$$O: \begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + 2\Theta|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = f(\hat{z}_1, \hat{z}_2, u) + \frac{\Theta^2}{2} \text{sign}(\hat{e}_1) \end{cases} \quad (5.8)$$

y aplicándolo a cada uno de los 4 sub-sistemas del modelo de espacio de estados obtenido en el Capítulo 3

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = f_i(x) + g_i(x)U_i \end{cases} \quad i = (1, 3, 5, 7) \quad (5.9)$$

se tiene

$$O: \begin{cases} \dot{\hat{z}}_i = \hat{z}_{i+1} + 2\Theta_i |\hat{e}_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_i) \\ \dot{\hat{z}}_{i+1} = f_i(\hat{z}, U_i) + \frac{\Theta_i^2}{2} \text{sign}(\hat{e}_i) \end{cases} \quad i = (1, 3, 5, 7) \quad (5.10)$$

donde, para $i = (1, 3, 5, 7)$, la ganancia $\Theta_i > 0$ y el error de estimación es $\hat{e}_i = (x_i - \hat{z}_i)$, y además

$$\begin{aligned} f_1(\hat{z}, U_1) &= -G + \frac{1}{m}(C_{\hat{z}_3} C_{\hat{z}_5})U_1 \\ f_3(\hat{z}, U_3) &= -\frac{1}{I_{xx}}((I_{zz} - I_{yy})\hat{z}_6 \hat{z}_8) + \frac{1}{I_{xx}}U_3 \\ f_5(\hat{z}, U_5) &= -\frac{1}{I_{yy}}((I_{xx} - I_{zz})\hat{z}_4 \hat{z}_8) + \frac{1}{I_{yy}}U_5 \\ f_7(\hat{z}, U_7) &= -\frac{1}{I_{zz}}((I_{yy} - I_{xx})\hat{z}_4 \hat{z}_6) + \frac{1}{I_{zz}}U_7 \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, el software del cuadricóptero sólo entrega información de las variables medibles $(z \ \phi \ \theta \ \psi) = (x_1 \ x_3 \ x_5 \ x_7)$, y el propósito del observador es estimar las variables no medibles $(\dot{z} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}) = (z_2 \ z_4 \ z_6 \ z_8)$. Con esto el vector de estado está completo y las funciones de control en (5.2) y (5.4) son implementados en los sub-sistemas de (5.9)

$$C_{SST}: \left\{ U_i = \frac{1}{g_i(x)} \left(-f_i(x) + \ddot{x}_{i_{ref}} - \beta_{1i} e_{i+1} - 2L_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i) - \frac{L_i^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s_i) d\tau \right) \right. \quad (5.11)$$

$$C_{MST}: \left\{ \begin{aligned} U_i &= \frac{1}{g_i(x)} \left(-f_i(x) + \ddot{x}_{i_{ref}} - \beta_{1i} e_{i+1} - C_{1i} |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i) \right. \\ &\quad \left. - C_{2i} s_i - C_{3i} \int_0^t \text{sign}(s_i) d\tau - C_{4i} \int_0^t s_i d\tau \right) \end{aligned} \right. \quad (5.12)$$

donde, para $i = (1, 3, 5, 7)$, la constante $\beta_i > 0$, la ganancias $L_i > 0$ y $C > 0$, la superficie s y los errores de seguimiento están dados por

$$s_i = \beta_{1i} e_i + e_{i+1}, \quad e_i = x_i - x_{i_{ref}}, \quad e_{i+1} = x_{i+1} - \dot{x}_{i_{ref}}$$

Se consideraron las siguientes condiciones iniciales para el observador $Z_j(0) = 0$ ($j = 1, \dots, 8$). Además, se utilizaron los siguientes parámetros del cuadricóptero; así como las ganancias para el observador y cada uno de los controles.

Parámetros del AR.Drone	SST-SMC					MST-SMC				
	i=	1	3	5	7	i=	1	3	5	7
$m = 0.42[Kg]$	Θ_i	3	3	3	5	Θ_i	3	3	3	5
$g = 9.81[\frac{m}{s^2}]$	L_i	0.5	0.5	0.4	0.2	β_{1i}	0.3	0.3	0.3	0.35
$I_{XX} = 0.0027[Kg\ m^2]$	β_{1i}	0.3	0.3	0.3	0.35	C_{1i}	0.5	0.5	0.5	0.3
$I_{YY} = 0.0029[Kg\ m^2]$						C_{2i}	0.5	0.5	0.5	0.2
$I_{ZZ} = 0.0053[Kg\ m^2]$						C_{3i}	0.1	0.1	0.1	0.01
						C_{4i}	0.1	0.1	0.1	0.01

Tabla 5.3: Parámetros del experimento.

Para el experimento se utilizó una función en escalón como señal de referencia, iniciando a 0.7m, después de 85 seg. sube a 1.1m y después de 80 seg. baja a 0.7m de nuevo. La Figura 5.5 muestra la salida del sistema, en este caso la altura del dron, al aplicar los controles (5.2) y (5.4). En esta figura también se observa que, para ambos controles, el valor de la variable controlada (altura) se aproxima a la referencia deseada.

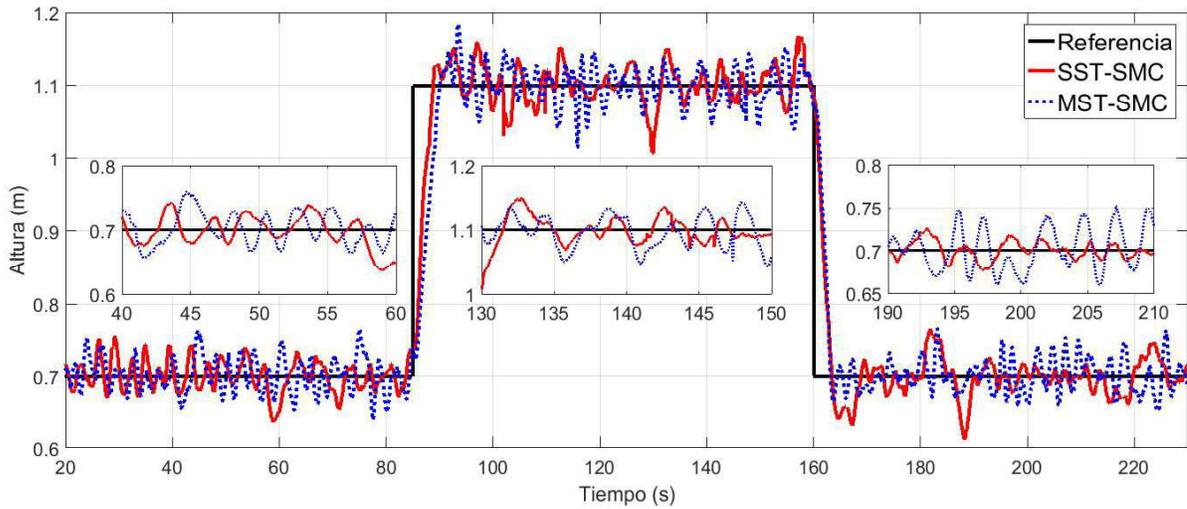


Figura 5.5: Seguimiento de trayectoria del AR.Drone.

En la Figura 5.6 se grafica la magnitud del error de seguimiento de la altura, para ambas acciones de control. En la Tabla 5.4 se observa que en ambos casos el error de seguimiento es similar.

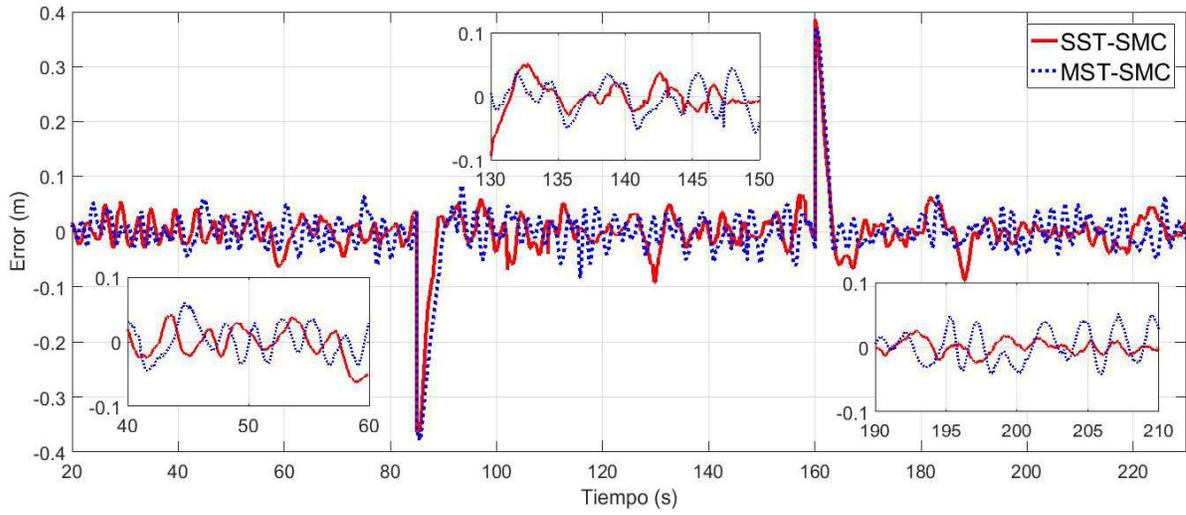


Figura 5.6: Error de seguimiento.

En la Figura 5.7 se muestran el valor de la señal de entrada de ambos controladores. El control SST-SMC presenta una señal mas suave que la del control MST-SMC, en el cual se ve a simple vista la presencia del efecto chattering durante toda la trayectoria de la señal.

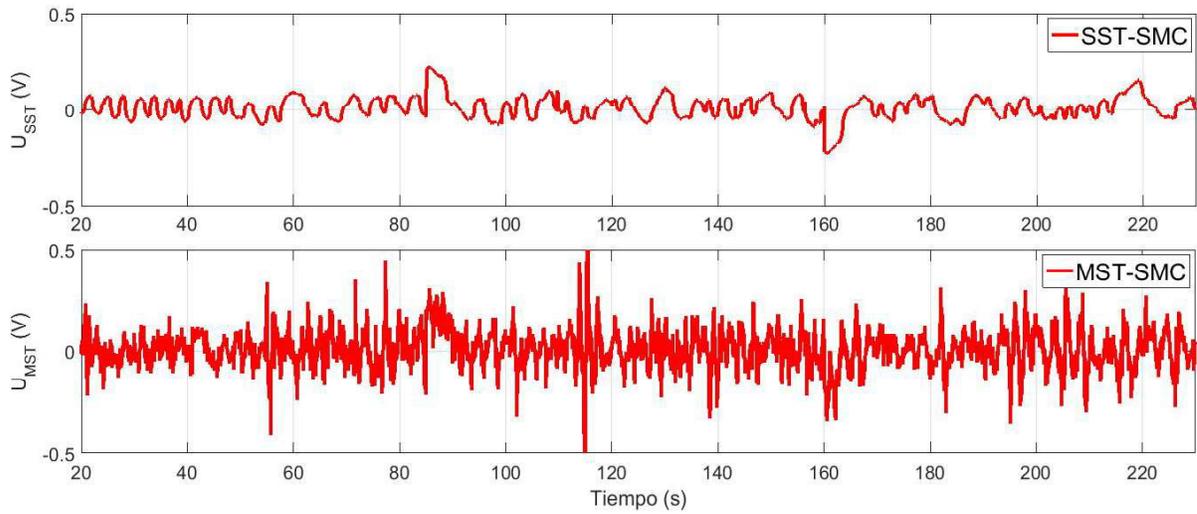


Figura 5.7: Señal de control U .

A continuación, se presentan los criterios de desempeño, en base al error de seguimiento y a la señal de control. Para el cálculo de estos criterios se considera un intervalo de tiempo $T =$

(20 s : 230 s).

Control	ISE	IAE	ITAE	ISC
SST-SMC	3.0621	9.9411	34.998	0.7548
MST-SMC	3.4541	10.8348	39.1566	1.1781

Tabla 5.4: Mediciones de desempeño en experimento.

En la Tabla 5.4 se puede observar que en todas las mediciones de desempeño, el control SST-SMC muestra ser más eficiente que el MST-SMC, especialmente el ITAE y en el ISC, que representan que el tiempo requerido para alcanzar la señal de referencia y la energía utilizada por el control, respectivamente.

5.4. Conclusiones

En este capítulo, se realizó un estudio comparativo en simulación de las respuestas obtenidas de diferentes controladores basados en modos deslizantes super twisting. Con este estudio se seleccionaron los dos controles que mostraron mejor desempeño, y se implementaron en la plataforma experimental. Con la información recabada en los experimentos, se realiza un estudio comparativo de ambos controles y se concluyó que, con el control por modos deslizantes super twisting simplificado propuesto en esta tesis, se obtiene un mejor desempeño, se reduce el efecto chatteringz se facilita la sintonización del control, al reducir el numero de ganancias.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1. Conclusiones

En este trabajo se presentó un esquema de control no lineal para el control de altura de un vehículo aéreo no tripulado del tipo cuadricóptero, en presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Además, se realizó un estudio comparativo en simulación y experimental, con la finalidad de comparar la eficiencia del esquema propuesto contra otras técnicas de control.

Se propuso utilizar una clase de controladores robustos, usando el enfoque por Modos Deslizantes de Alto Orden, en particular el algoritmo Super Twisting.

El algoritmo de control super twisting propuesto presenta algunas ventajas importantes, comparándolo contra otros algoritmos de control super twisting. Las ventajas que presenta el esquema de control super twisting propuesto son

- Se reduce el número de parámetros a sintonizar del controlador.
- La sintonización del control se lleva a cabo mas fácilmente, al solo tener que ajustar una ganancia.
- En la señal de control, el efecto chattering se reduce considerablemente, de modo que se obtiene una señal de control mas suave.

- El seguimiento de trayectoria se alcanza en tiempo finito.

También se diseñó el algoritmo de un estimador de estados, ya que era necesario para implementar el control en la plataforma experimental. Este algoritmo también presenta la ventaja de que sólo requiere una ganancia, en comparación con otros observadores super twisting que requieren al menos dos; por lo que el observador implementado también es más sencillo de sintonizar y a su vez mantiene las ventajas de ser robusto.

Se puede concluir que se obtuvieron los resultados esperados, alcanzando los objetivos de robustez para los algoritmos de control y del observador, por lo que se logra el control robusto de la altitud del cuadrirrotor.

6.2. Trabajos Futuros

Para darle continuidad a este trabajo de tesis, se recomiendan los siguientes trabajos de investigación:

- Diseñar controles para el control de la posición del cuadrirrotor, en el plano horizontal (X y Y).
- Diseñar controles adaptativos para el control de altura del cuadrirrotor.
- Realizar un control para lograr que una formación de cuadrirrotores siga trayectorias deseadas.
- Realizar un simulador de vuelo en 3D, para una mejor visualización de las simulaciones.

Cabe mencionar que los algoritmos de control presentados en esta tesis tienen un amplia área de aplicación, ya que se pueden implementar en diversas plataformas experimentales, como pueden ser: motores eléctricos, robots móviles, etc...

Apéndice A

Cálculos Aerodinámicos

A continuación se determinan los coeficientes aerodinámicos que son necesarios en el modelo matemático del cuadirrotor. Los coeficientes que se calcularán son el coeficiente de arrastre y el coeficiente de empuje.

A.1. Teoría de Momentos

En esta sección se introducen los conceptos de la teoría de momentos, los cuales describen el modelo del rotor. Al aplicar esta teoría se considera al rotor como un disco en rotación que genera un flujo de aire normal a la superficie, generando una diferencia de presiones entre ambas caras del disco. Por lo anterior, y tomando en cuenta las dimensiones del disco, se produce una fuerza de empuje neta como contra reacción, en sentido opuesto al flujo de aire.

Para obtener el modelo, se introducen las siguientes hipótesis

HIPÓTESIS A.1. *Se considera un tubo con un flujo de aire cruzando a través del disco.*

HIPÓTESIS A.2. *La hélice tiene un número infinito de palas.*

HIPÓTESIS A.3. *El espesor del disco se considera infinitesimal.*

HIPÓTESIS A.4. *La velocidad vertical del aire es continua a través del disco.*

HIPÓTESIS A.5. *Se considera al aire como gas perfecto e incompresible.*

La siguiente figura muestra un bosquejo de la teoría de momento para el rotor

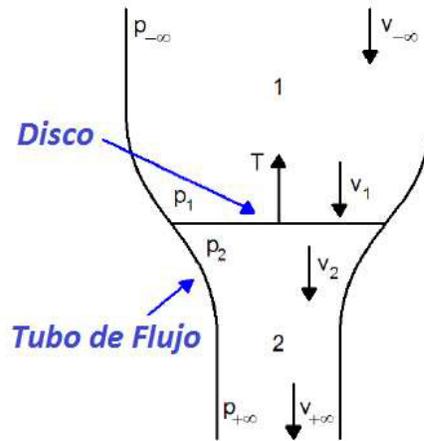


Figura A.1: Teoría de momento.

donde el termino T [N] es la fuerza de empuje de la hélice, con dirección opuesta al flujo del aire. En un punto lejos de la superficie superior del disco se considera una presión de aire $p_{-\infty}$ y una velocidad $v_{-\infty}$; mientras que en un punto lejos de la superficie inferior del disco se tiene una presión $p_{+\infty}$ y una velocidad $v_{+\infty}$. Directamente por encima de la superficie del disco, se tiene una presión p_1 y una velocidad v_1 ; mientras que directamente por debajo de la superficie se considera una presión p_2 y una velocidad v_2 .

El empuje suministrado por el rotor es proporcional a la diferencia de presiones a través del disco. Las siguientes ecuaciones muestran las equivalencias

$$T_{MT} = A(p_1 - p_2) \tag{A.1}$$

$$T_{MT} = \dot{m}_A(v_{-\infty} - v_{+\infty}) = \rho_A A v_1 (v_{-\infty} - v_{+\infty}) \tag{A.2}$$

donde $A = \pi R_p^2$ [m²] es el área del disco, \dot{m}_A [$\frac{Kg}{s}$] es la variación de la masa de aire a través del disco, y ρ_A [$\frac{Kg}{m^3}$] es la densidad del aire.

De acuerdo con la hipótesis (A.4), la velocidad de aire v_1 es igual a la velocidad v_2 . A continuación, se escribe la ecuación de Bernoulli para la sección entre los puntos $-\infty$ y 1; y para la sección entre

los puntos 2 y $+\infty$

$$p_{-\infty} + \frac{1}{2}\rho_A v_{-\infty}^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_A v_1^2 \quad (\text{A.3})$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho_A v_2^2 = p_{+\infty} + \frac{1}{2}\rho_A v_{+\infty}^2 \quad (\text{A.4})$$

De las ecuaciones anteriores y considerando que $p_{-\infty} = p_{+\infty}$, al despejar la velocidad v_1 se obtiene

$$v_1 = \frac{v_{-\infty} + v_{+\infty}}{2} \quad (\text{A.5})$$

La velocidad de afluencia en el disco $v_I [\frac{m}{s}]$ es

$$v_I = v_1 - v_{-\infty} = \frac{v_{-\infty} + v_{+\infty}}{2} \quad (\text{A.6})$$

Entonces, utilizando las ecuaciones (A.2) y (A.6), la fuerza de empuje T es

$$T = 2\rho_A A v_1 v_I \quad (\text{A.7})$$

Para simplificar los cálculos, se considera la condición de suspensión [26], en la cual $v_{-\infty} = 0$, por lo que $v_1 = v_I$. Además, la fuerza de empuje T es igual al peso cargado por una hélice $W_P = \frac{mg}{4}$ [N].

La ecuación (A.7) puede ser expresada como

$$W_P = 2\rho_A A v_I^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{W_P}{2\rho_A A}} \quad (\text{A.8})$$

La proporción de afluencia λ es un parámetro utilizado para relacionar la velocidad de afluencia v_I y la velocidad en el extremo del rotor, y esta definida como

$$\lambda = \frac{v_1}{\omega_H R_P} \quad (\text{A.9})$$

donde $\omega_H [\frac{rad}{s}]$ es la velocidad angular de la pala cuando el cuadrirrotor se encuentra en suspensión; y $R_P [m]$ es su longitud. La condición de suspensión implica una velocidad horizontal de cero, por lo que la proporción de avance del rotor μ es igual a cero.

A.2. Teoría del Elemento de Pala

En esta sección se estudiará la teoría del elemento pala, con la cual se determina el total de fuerzas aerodinámicas y torques que actúan sobre el rotor. En esta teoría, las fuerzas y torques son calculados al integrar, de manera individual, las fuerzas que actúan sobre pequeños elementos de la pala, a través del rotor completo. En la siguiente figura se muestra el modelo de la sección de la hélice

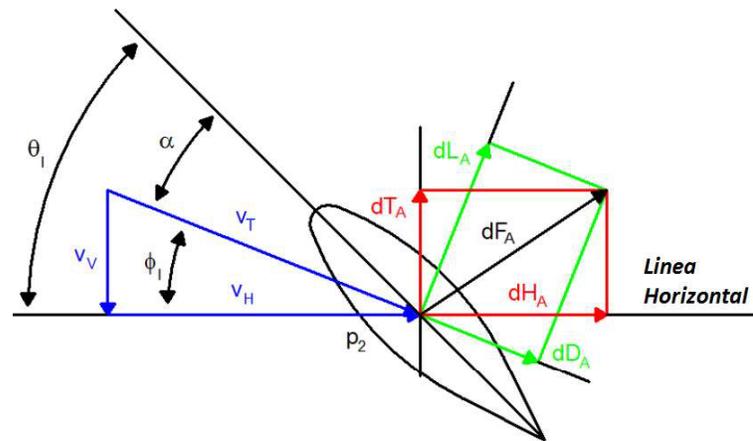


Figura A.2: Teoría del elemento de pala.

La línea horizontal es perpendicular al eje del rotor, $\theta_I [rad]$ es el ángulo de incidencia entre la línea horizontal y la cuerda (línea central) de la pala, $\alpha [rad]$ es el ángulo de entrada entre la cuerda de la pala y el vector de velocidad de flujo de aire local $v_T [\frac{m}{s}]$, el cual se considera la suma de los vectores de velocidad de flujo de aire horizontal $v_H [\frac{m}{s}]$ y vertical $v_V [\frac{m}{s}]$. $\phi_I [rad]$ es el ángulo entre la horizontal y el vector de velocidad v_T . $dD_A [\frac{N}{m}]$ es la fuerza infinitesimal de arrastre, mientras que $dL_A [\frac{N}{m}]$ es la fuerza infinitesimal de levantamiento. La suma de los vectores dD_{BET} y dL_{BET} se conoce como fuerza resultante aerodinámica infinitesimal $dF_A [\frac{N}{m}]$, la cual puede ser dividida en dos componentes aerodinámicas infinitesimales: vertical $dT_A [\frac{N}{m}]$ y horizontal $dH_A [\frac{N}{m}]$.

El vector de velocidad v_V se debe al movimiento en la entrada del rotor y es uniforme en cada sección. El vector de velocidad v_H se debe a la velocidad angular del elemento pala y depende de la posición radial de la sección $r [m]$. Las declaraciones anteriores se simplifican de acuerdo a la

hipótesis de suspensión, y las siguientes ecuaciones muestran las componentes de velocidad

$$v_V = v_1 = \omega_P R_P \lambda \quad (\text{A.10})$$

$$v_H = \omega_P r = \omega_P R_P \left(\frac{r}{R_P} \right) \quad (\text{A.11})$$

donde $\omega_P [\frac{rad}{s}]$ es la velocidad angular de la hélice. Las fuerzas infinitesimales de levantamiento dL_A y arrastre dD_A , de acuerdo a la teoría aerodinámica [27], son determinadas con las siguientes ecuaciones:

$$dL_A = \frac{c}{2} \rho_A v_H^2 C_L dr \quad (\text{A.12})$$

$$dD_A = \frac{c}{2} \rho_A v_H^2 C_D dr \quad (\text{A.13})$$

donde C_L es el coeficiente de levantamiento, C_D el coeficiente de arrastre [28] y $c[m]$ es el promedio de la cuerda de la pala. El coeficiente C_L varia linealmente con el angulo de entrada a través de la pendiente de elevación $a[\frac{1}{rad}]$. Para superficies aerodinámicas delgadas, a un pequeño angulo de entrada, el parámetro $a = 2\pi[\frac{1}{rad}]$.

$$C_L = a\alpha = a(\theta_I - \phi_I) \quad (\text{A.14})$$

Se considera que la torcedura en la pala varia, dependiendo su posición radial, así que el modelo considera dos constantes: angulo de incidencia cero $\theta_{I_0} [rad]$ y angulo de incidencia de torcedura $\theta_{I_{tw}} [rad]$, de acuerdo a la ecuación

$$\theta_I = \theta_{I_0} - \theta_{I_{tw}} \frac{r}{R_P} \quad (\text{A.15})$$

Además, la velocidad angular de la sección de la pala es mucho mas grande que la del flujo de aire a través de ella, por lo que se puede utilizar un angulo pequeño aproximado para definir el angulo de entrada ϕ_I

$$\phi_I = \frac{v_V}{v_H} \quad (\text{A.16})$$

De acuerdo a las ecuaciones (A.12), (A.14-A.16); la fuerza de levantamiento infinitesimal dL_A pue-

de ser expresada como

$$dL_A = \frac{c}{2} \rho_A v_H^2 a \left(\theta_{I_0} - \theta_{I_{tw}} \frac{r}{R_P} - \frac{v_V}{v_H} \right) dr \quad (\text{A.17})$$

La fuerza vertical infinitesimal dT_A puede ser simplificada considerando un ángulo aproximado y que la elevación actúa sobre la pala en mayor magnitud que el arrastre, quedando la siguiente ecuación

$$dT_A = dL_A C_{\phi_I} - dD_A S_{\phi_I} \approx dL_A \quad (\text{A.18})$$

El empuje T_A [N] se obtiene al integrar las fuerzas verticales que actúan sobre cada uno de los elementos de la sección de la pala. La constante N_B identifica el número de palas por hélice ($N_B = 2$).

$$\begin{aligned} T_A &= N_B \int_0^{R_P} \frac{dT_A}{dr} dr = \frac{N_B \rho_A a c}{2} \int_0^{R_P} \left(\theta_{I_0} v_H^2 - \frac{\theta_{I_{tw}} r}{R_P} v_H^2 - v_V v_H \right) dr \\ &= \frac{N_B \rho_A a c \omega_P^2 R_P^2}{2} \int_0^{R_P} \left(\frac{\theta_{I_0}}{R_P^2} r^2 - \frac{\theta_{I_{tw}}}{R_P^3} r^3 - \frac{\lambda}{R_P} r \right) dr \\ &= N_B \rho_A a c \omega_P^2 R_P^3 \left(\frac{\theta_{I_0}}{6} - \frac{\theta_{I_{tw}}}{8} - \frac{\lambda}{4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

La fuerza horizontal infinitesimal dH_A se puede simplificar considerando el ángulo aproximado, pero ahora ambos términos son significativos (magnitud del mismo orden), y se muestra en la siguiente ecuación

$$dH_A = dD_A C_{\phi_I} + dL_A S_{\phi_I} \approx dD_A + dL_A \left(\frac{v_V}{v_H} \right) \quad (\text{A.20})$$

El par de la hélice Q_A [Nm] se obtiene al integrar las fuerzas horizontales multiplicadas por el brazo de momento en cada uno de los elementos de la sección de la pala.

$$\begin{aligned} Q_A &= N_B \int_0^{R_P} \left(\frac{dD_A}{dr} + \frac{dL_A}{dr} \frac{v_V}{v_H} \right) r dr \\ &= \frac{N_B \rho_A c}{2} \int_0^{R_P} \left(v_H^2 C_D r + v_V v_H a \theta_{I_0} r - v_V v_H a \frac{\theta_{I_{tw}}}{R_P} r^2 - v_V^2 a r \right) dr \\ &= \frac{N_B \rho_A c \omega_P^2 R_P^2}{2} \int_0^{R_P} \left(\frac{C_D}{R_P^2} r^3 + a \lambda \left(\frac{\theta_{I_0}}{R_P} r^2 - \frac{\theta_{I_{tw}}}{R_P^2} r^3 - \lambda r \right) \right) dr \\ &= N_B \rho_A c \omega_P^2 R_P^4 \left(\frac{C_D}{8} + a \lambda \left(\frac{\theta_{I_0}}{8} - \frac{\lambda}{4} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Apéndice B

Cálculo de Momentos de Inercia

El momento de inercia describe el comportamiento dinámico de un cuerpo en rotación, alrededor de un eje determinado. Tienen el mismo rol en dinámicas rotacionales, que la masa en las dinámicas básicas. Los momentos de inercia pueden ser divididos en dos cantidades:

- Momento de inercia escalar.
- Tensor de inercia.

El momento de inercia escalar se define como

$$I = \int \int \int_V \rho r^2 dV \quad (\text{B.1})$$

donde $I[\text{Kg}m^2]$ es el momento de inercia, $V[m^3]$ es el volumen ocupado por el objeto, $\rho[\frac{\text{Kg}}{m^3}]$ es la densidad del objeto y $r[m]$ es la distancia (perpendicular) del cuerpo al eje de rotación deseado.

Para el mismo objeto, a diferentes ejes de rotación, se tienen diferentes momentos de inercia. El tensor de inercia es una manera conveniente de agrupar todos los momentos de inercia de un objeto en una sola cantidad. El tensor de inercia esta definido como

$$I = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Aquí, I_{XX} representa el momento de inercia alrededor del eje X cuando el objeto rota alrededor del eje X, I_{XY} denota el momento de inercia alrededor del eje Y cuando el objeto rota alrededor del eje X, y así sucesivamente.

A continuación se presentan los cálculos para determinar los momentos de inercia de algunas geometrías.

- Prisma rectangular solido, de longitud L , ancho W altura H , masa M y densidad constante

$$\rho = \frac{M}{LWH}:$$

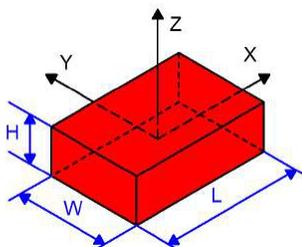


Figura B.1: Prisma rectangular sólido.

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \rho \left(LH \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} y^2 dy + LW \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \frac{M}{LWH} \left(LH \frac{W^3}{12} + LW \frac{H^3}{12} \right) \\
 &= \frac{M}{12} (W^2 + H^2) \\
 I_Y &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 + z^2) dx dy dz \quad (B.3) \\
 &= \dots = \frac{M}{12} (L^2 + H^2) \\
 I_Z &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 &= \dots = \frac{M}{12} (L^2 + W^2)
 \end{aligned}$$

- Cilindro solido de radio R , altura H , masa M y densidad $\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}$:

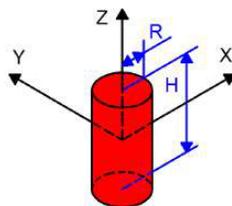


Figura B.2: Cilindro sólido.

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_{-\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}}^{\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}} (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 S_\theta^2 + z^2) r dr d\theta dz \\
 &= \rho \left(H \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} S_\theta^2 d\theta + 2\pi \int_0^R r dr \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) \\
 &= \frac{M}{\pi R^2 H} \left(H \frac{R^4}{4} \pi + 2\pi \frac{R^2 H^3}{24} \right) = \frac{M}{12} (3R^2 + H^2) \tag{B.4} \\
 I_Y &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \dots = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 C_\theta^2 + z^2) r dr d\theta dz \\
 &= \dots = \frac{M}{12} (3R^2 + H^2) \\
 I_Z &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \dots = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 C_\theta^2 + r^2 S_\theta^2) r dr d\theta dz \\
 &= \dots = \frac{M}{2} R^2
 \end{aligned}$$

- Cilindro sólido de radio R , altura H , masa M y densidad variable $\rho = \frac{M}{2\pi RHr}$. La geometría es la misma de la figura B.2

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_{-\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}}^{\sqrt{(\frac{R}{2})^2 - y^2}} (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \frac{M}{2\pi RH} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(y^2 + z^2)}{r} r dr d\theta dz \\
 &= \frac{M}{2\pi RH} \left(H \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} S_\theta^2 d\theta + 2\pi R \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) \\
 &= \frac{M}{2\pi RH} \left(H \frac{R^3}{3} \pi + 2\pi \frac{RH^3}{12} \right) = \frac{M}{12} (2R^2 + H^2) \tag{B.5} \\
 I_Y &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \dots = \frac{M}{2\pi RH} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(x^2 + z^2)}{r} r dr d\theta dz = \dots = \frac{M}{12} (2R^2 + H^2) \\
 I_Z &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 &= \dots = \frac{M}{2\pi RH} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(r^2 C_\theta^2 + r^2 S_\theta^2)}{r} r dr d\theta dz = \dots = \frac{M}{3} R^2
 \end{aligned}$$

Si el centro de masa del objeto (CMO) no corresponde al origen de los ejes, se cuenta con el teorema de ejes paralelos, el cual ayuda a determinar los momentos de inercia sin tener que recalcular las integrales. El teorema establece que, dado un eje que pasa por el centro de masa de un sólido, y dado un segundo eje paralelo al primero separado una distancia D , el momento de inercia de ambos ejes está relacionado mediante la siguiente expresión

$$I_d = I_c + MD^2 \tag{B.6}$$

donde I_d es el momento de inercia del cuerpo según el eje que no pasa a través de su centro de masas; I_c es el momento de inercia del cuerpo según un eje que pasa a través de su centro de masas.

Se toma el ejemplo de un prisma rectangular desplazado de sus ejes de origen, de longitud L , ancho W , altura H , una distancia del CMO alrededor del eje X D_X , una distancia del CMO alre-

dedor del eje Y D_Y , una distancia del CMO alrededor del eje-Z D_Z , masa M y densidad constante

$$\rho = \frac{M}{LWH}.$$

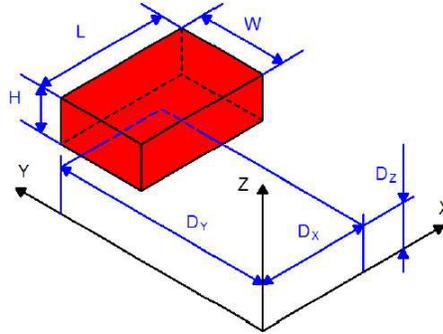


Figura B.3: Prisma rectangular sólido desplazado.

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{D_Z - \frac{H}{2}}^{D_Z + \frac{H}{2}} \int_{D_Y - \frac{W}{2}}^{D_Y + \frac{W}{2}} \int_{D_X - \frac{L}{2}}^{D_X + \frac{L}{2}} (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \rho \left(LH \int_{D_Y - \frac{W}{2}}^{D_Y + \frac{W}{2}} y^2 dy + LW \int_{D_Z - \frac{H}{2}}^{D_Z + \frac{H}{2}} z^2 dz \right) \\
 &= \frac{M}{LWH} \left(LH \left(\frac{W^3}{12} + WD_Y^2 \right) + LW \left(\frac{H^3}{12} + HD_Z^2 \right) \right) \\
 &= \frac{M}{12} (W^2 + H^2) + M(D_Y^2 + D_Z^2) \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Y &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{D_Z - \frac{H}{2}}^{D_Z + \frac{H}{2}} \int_{D_Y - \frac{W}{2}}^{D_Y + \frac{W}{2}} \int_{D_X - \frac{L}{2}}^{D_X + \frac{L}{2}} (x^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \dots = \frac{M}{12} (L^2 + H^2) + M(D_X^2 + D_Z^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_{D_Z - \frac{H}{2}}^{D_Z + \frac{H}{2}} \int_{D_Y - \frac{W}{2}}^{D_Y + \frac{W}{2}} \int_{D_X - \frac{L}{2}}^{D_X + \frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 &= \dots = \frac{M}{12} (L^2 + W^2) + M(D_X^2 + D_Y^2)
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] R. Austin, “Unmanned aircraft systems.,” April 2010.
- [2] S. Bouabdallah and R. Siegwart, “Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor.,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2451–2456, April 2004.
- [3] R. Cavalcante, A. Araújo, A. Varela, and G. Barreto, “Construction and pid control for stability of an unmanned aerial vehicle of the type quadrotor.,” *IEEE Latin American Robotics Symposium*, pp. 1–4, 2013.
- [4] A. Torres and Y. Bolea, “Modeling and robust attitude control of a quadrotor system.,” *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 7–12, September-October 2013.
- [5] I. Petrusovski and A. Rakic, “Simple fuzzy solution for quadrotor attitude control.,” *Symposium on Neural Network Applications in Electrical Engineering (Neurel)*, no. 12th, pp. 93–98, 2014.
- [6] M. Schreier, “Modeling and adaptive control of a quadrotor.,” *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 383–390, 2012.
- [7] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart, “Full control of a quadrotor.,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 153–158, 2007.
- [8] O. Araar and N. Aouf, “Quadrotor control for trajectory tracking in presence of wind disturbances.,” *UKACC International Conference on Control*, pp. 1–6, 2014.

- [9] H. Liu, X. Wang, and Y. Zhong, "Quaternion-based robust attitude control for uncertain robotic quadrotors.," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 11, pp. 406–415, April 2015.
- [10] V. Utkin, "Sliding mode control.," *Control systems robotic and automation*, vol. 13, pp. 130–151, 2009.
- [11] C. Edwards, E. Fossas, and L. Fridman, "Advances in variable structure and sliding mode control.," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 297–314, 2006.
- [12] G. Bartolini, A. Pisano, and E. Usai, "Second-order sliding-mode control for container cranes.," *Automatica*, vol. 38, pp. 1783–1790, 2005.
- [13] S. Mefoued, "A second order sliding mode control and a neural network to drive a knee joint actuated orthosis.," *Neurocomputing*, vol. 155, pp. 71–79, 2015.
- [14] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "Second-order sliding-mode observer for mechanical systems.," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, pp. 1785–1789, 2005.
- [15] J. Moreno and M. Osorio, "A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers.," *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2856–2861, 2008.
- [16] F. Mazane and D. Nesié, "Strong lyapunov functions for systems satisfying the conditions of la salle.," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 6th, pp. 1026–1030, 2004.
- [17] R. Laurence, "Unmanned aviation: A brief history of unmanned aerial vehicles," April 2004.
- [18] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control.," *International Journal of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [19] B. Pachpatte, "Comparison theorems related to a certain inequality used in the theory of differential equations.," *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 22, no. 3rd, pp. 383–394, 1996.
- [20] E. Wan and R. Merwe, "The unscented kalman filter for nonlinear estimation.," *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pp. 153–158, October 2000.

- [21] W. Jun-Wei, L. Ya-Qiang, and S. Chang-Yin, "Luenberger observer design for state estimation of a linear parabolic distributed parameter system with discrete measurement sensors," *World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 1123–1128, June 2016.
- [22] S. Celikovsky and H. Nijmeijer, "Equivalence of nonlinear systems to triangular form: The singular case.," *System & Control Letters*, pp. 135–144, 1995.
- [23] F. Muñoz, I. González, S. Salazar, E. Espinoza, and R. Lozano, "Second order sliding mode controllers for altitude control of a quadrotor uas: Real-time implementation in outdoor environments.," *Neurocomputing*, pp. 1–11, 2016.
- [24] A. Shuaib and M. Ahmed, "Robust pid control system design using itae performace index (dc motor model)," *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, vol. 3, pp. 15060–15067, August 2014.
- [25] S. Piskorski, N. Brulez, P. Eline, and F. DHaeyer, "Ar.drone developer guide.," *Parrot, SDK Version 2.0.*, May 2012.
- [26] G. Fay, "Derivation of the aerodynamic forces for the mesicopter simulation.," 2001.
- [27] M. Arra, "L´elicottero," p. C.2, 2001.
- [28] S. Bouabdallah, "Design and control of quadrotors with applications to autonomus flying.," *PhD Thesis*, pp. 15–27, 2007.