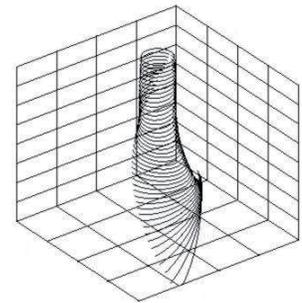


Reducción del error fasorial con estimados de fasoretas en voltajes y corrientes de falla

José Antonio de la O Serna
FIME-UANL
jdelao@mail.uanl.mx

RESUMEN

Se propone la reducción y evaluación del error infiltrado en estimaciones fasoriales con fasoretas, mediante la formulación generalizada del problema usando mínimos cuadrados. Se introduce un estimador rápido y computacionalmente simple que aprovecha la estructura de la señal senoidal, y ofrece los estimados fasoriales más finos y estables, tan necesarios para señales con fallas en el voltaje. También se propone un modelo de señal extendido que incluye la componente de directa, con el propósito de reservar espacio para el error fasorial, cuando una componente aperiódica está presente en la señal. Las simulaciones numéricas ilustran tanto la mejora en velocidad y exactitud de las estimaciones, obtenidas en deciciclos, como su naturaleza titubeante, considerada como una limitación persistente de esta nueva técnica de estimación fasorial.



PALABRAS CLAVE

Estimación fasorial, fasoreta, mínimos cuadrados, filtro digital, base no ortogonal, estimación multitasa, protecciones.

ABSTRACT

An assessment and reduction of the phasor error infiltration in estimates from phasorlets is proposed in this paper through a generalized least-squares formulation of the problem. It introduces a computationally simple and quick estimator that exploits the structure of the sinusoidal model, and provides the finest stable phasor estimates, very useful for fault voltage signals. It also proposes an extended signal model, by including a dc component into the signal model, in order to allocate the phasor error, very useful when an aperiodic component is present in the input signal. The numerical simulations illustrate the improvement in speed and accuracy of the estimates, obtained in decicycles, as well as its still wavering nature, considered as the persisting limitation of this technique.

KEYWORDS

Phasor estimation, phasorlet, least-squares, digital filter, non-orthogonal basis, multirate estimation, protection.

INTRODUCCIÓN

La estimación fasorial a partir de fasoretas ha sido probada como la mejor técnica cuando el segmento de señal analizado coincide con el de una senoidal

pura.¹ Este método también es excelente para detectar transitorios rápidos entre diferentes estados senoidales consecutivos. Sin embargo, sus estimados fasoriales son muy vulnerables a transitorios o ruido en la señal de entrada. La primera publicación de esta técnica apareció en², pero sin abordar su gran sensibilidad al ruido. En¹ la atención se enfocó en la respuesta frecuencial de los filtros generadores de fasoretas, llamadas *phaselets* en², y solamente se advirtió acerca de la alta infiltración de señales no senoidales en sus estimados.

En este trabajo se evalúa el error fasorial en estimaciones obtenidas a partir de fasoretas y se proponen varias estrategias para su abatimiento, especialmente para señales de falla en señales de voltaje y corriente. Este método se presenta como la solución al ajuste de una senoidal a N muestras de señal mediante mínimos cuadrados. Bajo esta formulación general, el fasor resulta ser la transformada inversa de la N ésima fasoreta. Desde el punto de vista geométrico del Álgebra Lineal, el análisis del error fasorial es directo y se entienden mejor las infiltraciones en el filtro de Fourier.³

En intervalos donde la componente no senoidal es nula, la técnica de estimación por fasoretas, ofrece las mediciones más rápidas. Las fasoretas son también muy buenas para detectar transiciones rápidas entre estados senoidales diferentes, donde la componente no senoidal está presente en un muy corto período de tiempo, tales como las encontradas en señales de falla en voltajes. Esas interrupciones son percibidas como una rápida transición entre dos estados senoidales adyacentes. Una técnica muy eficiente y rápida es propuesta. Esta técnica ofrece las estimaciones fasoriales más rápidas y simples computacionalmente. Sin embargo, los transitorios en señales de corriente generalmente contienen una componente aperiódica. Para hacer frente a este tipo de señal, un modelo extendido de señal es propuesto, el cual incluye una componente constante (término de orden cero en la serie de Taylor). De esta manera, el modelo reserva espacio para manejar el error provocado por la exponencial, con la ventaja de que entre más cortos sean los segmentos, mejor es el ajuste de la exponencial a la componente constante. Note que no es necesario conocer a priori la constante de tiempo ni la magnitud de la exponencial como se sugiere en.³

Estas nuevas estrategias de estimación son probadas e ilustradas en señales reales de voltaje y corriente. Los resultados obtenidos muestran una reducción importante del error fasorial, en estimados obtenidos de fasoretas en intervalos de un deciciclo.

La mayoría de los trabajos sobre algoritmos de estimación fasorial ponen poca atención al error generado cuando la señal de entrada no cumple con el modelo subyacente supuesto. En algunas de ellas, las suposiciones no están ni siquiera declaradas explícitamente. Por ejemplo, después de una discusión cualitativa acerca del error fasorial en,³ el autor descarta los filtros que trabajan en fracciones de ciclo y recomienda el filtro de Fourier de un ciclo como la mejor solución debido al rechazo de todas las armónicas, presuponiendo una señal periódica en la entrada. Sin embargo, ante entradas aperiódicas, tal como en una oscilación del sistema de potencia, esta solución tiene serias deficiencias. En,⁴ no se dice nada acerca de los errores fasoriales incurridos cuando las señales difieren de los modelos supuestos, el rendimiento de los algoritmos se ilustra simplemente usando señales que replican los modelos de señal subyacentes. Los artículos subsecuentes tratan con la mitigación de las fuentes de error, tales como la infiltración exponencial,⁵ o los errores debidos a las desviaciones de la frecuencia fundamental,^{6,7} o el error incurrido cuando la señal de entrada corresponde a una oscilación de potencia.⁸ Después de los apagones en cascada, ante serias dudas respecto a la exactitud de los estimados fasoriales bajo esas circunstancias, el énfasis está en la medición del error fasorial.⁹ Aun cuando en este artículo a la *medición del error fasorial se le llamó eufemísticamente medición de calidad*, y cuando el algoritmo propuesto para tales mediciones esté midiendo en realidad la *distorsión armónica* de la señal, este artículo enfatiza con claridad la importancia actual de abordar directamente el problema de la medición del error fasorial.

Este artículo, presentado primeramente en¹⁰, y publicado en¹¹, describe cuantitativamente el error fasorial incurrido en estimados fasoriales parciales; y discute acerca de cómo construir mejores (más rápidos y exactos) estimados fasoriales. Se escribe bajo el escenario de aplicaciones de protecciones, de manera que se asume una señal de entrada periódica

(la exponencial se considera una componente de directa (constante) bajo intervalos cortos de tiempo), con un período fundamental constante. También supone que las señales digitales son cuantizadas con suficientes bits, al menos doce, con una tasa de señal a ruido superior a 73.76 dB, de manera que el ruido de cuantización no es relevante. Cuando ruido descorrelacionado aditivo de covarianza constante está presente en la señal de entrada nuestros estimados de Fourier coinciden con los obtenidos con el filtro de Kalman en intervalos múltiplos de medio ciclo [3, p. 101-105]. Pero nuestro escenario excluye ruido con matriz de covarianza variante en el tiempo, bajo el cual el filtro de Kalman ofrece las mejores soluciones [3, p. 105]. Finalmente, para aquellos interesados en el límite Cramér-Rao de los parámetros estimados en este artículo se recomienda ampliamente.¹²

En las siguientes secciones se presenta la formulación del problema. Se muestran en forma cerrada las matrices de Gram de los modelos bidimensional y tridimensional. Se ilustran los ejes mayor y menor de las cotas elípticas para el error fasorial, así como las proyecciones elíptica de los vectores de las bases estándar de \mathbb{R}^N para tener una percepción del error fasorial cuando N aumenta. Posteriormente se presentan algoritmos de estimación fasorial múltiple y multitasa. Finalmente, se obtienen los resultados numéricos en señales de voltaje y corriente y se presentan como evidencia de las principales conclusiones.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las señales digitales de corriente y de voltaje de sistemas de potencia pueden modelarse por la siguiente secuencia lineal:

$$s(n) = \tilde{s}(n) + e(n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1)$$

en la cual $\tilde{s}(n)$ representa una secuencia senoidal de la forma $\tilde{s}(n) = A \cos(\omega_0 n + \theta)$, con frecuencia angular fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ y período N_0 , y $e(n)$ una señal residual. En nuestro escenario de señales periódicas para $s(n)$, la señal residual puede ser cualquier armónica no fundamental, o combinación lineal de ellas. Note que nos interesan secuencias de longitud $N \leq N_0$, las cuales corresponden a fracciones de un ciclo. Esta secuencia senoidal puede expresarse como una combinación lineal de

los siguientes vectores N -dimensionales:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \cos \omega_0 \\ \vdots \\ \cos \omega_0(N-1) \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \text{sen} 0 \\ \text{sen} \omega_0 \\ \vdots \\ \text{sen} \omega_0(N-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

como puede ser visto en la forma vectorial

$$s = B\tilde{\rho} + e \quad (3)$$

en la cual b_1 y b_2 son la primera y segunda columna de la matriz B , $N \times 2$. Los coeficientes de la combinación lineal en $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho}_1 = A \cos \theta$ y $\tilde{\rho}_2 = A \sin \theta$, son constantes para toda N , y corresponden a las componentes fasoriales de la señal senoidal $\tilde{s}(n)$. De esa manera, generan el espacio columna de B , $Col(B)$, el cual es un plano en \mathbb{R}^N , referido como N -ésimo plano.

Estimación por Mínimos Cuadrados

Los estimados fasoriales por mínimos cuadrados se obtienen proyectando las señales en (3) sobre el subespacio del modelo $Col(B)$. Esto se hace simplemente premultiplicando por B^T los vectores en (3). Tenemos para cada valor de N .

$$B^T s = B^T B\tilde{\rho} + B^T e \quad (4)$$

Esta operación iguala las proyecciones de los vectores originales en (3) sobre las del N -ésimo plano. Y parte \mathbb{R}^N en dos subespacios ortogonales: $Col(B)$, y el espacio nulo de B^T , el cual contiene los complementos ortogonales de las proyecciones. De esta manera, las proyecciones pueden expresarse como combinaciones lineales de los vectores en B .

En el caso del vector e , tenemos

$$e = e_{\parallel} + e_{\perp} = B \overset{=(N)}{\rho} + e_{\perp} \quad (5)$$

en el cual, e_{\parallel} es la proyección de e , y e_{\perp} es su complemento ortogonal. $\overset{=(N)}{\rho}$ contiene las coordenadas de la proyección. El superíndice (N) indica que las coordenadas de la proyección dependen de N , ya que los planos están cambiando con N .

Para la señal de entrada, se tiene una composición similar

$$s = s_{\parallel} + s_{\perp} = B\hat{\rho}^{(N)} + s_{\perp} \quad (6)$$

y dado que el modelo de señal no tiene complemento ortogonal (define el N -ésimo plano), (3) deviene:

$$s_{\parallel} = \tilde{s} + e_{\parallel} \quad (7)$$

y

$$s_{\perp} = e_{\perp} \tag{8}$$

En términos de fasores, tenemos de (7):

$$\tilde{\rho}^{(N)} = \tilde{\rho} + \rho^{(N)} \tag{9}$$

Así, cada estimado fasorial contiene el fasor constante de la señal senoidal $\tilde{\rho}$, más las coordenadas de la proyección de la señal exógena sobre el N ésimo plano. Por tanto, el estimado de mínimos cuadrados $\hat{\rho}$ vive en el N ésimo plano y contiene inevitablemente las coordenadas de la proyección de e como un error “mínimo”. Claro que, si $e=0$, entonces, para todo valor de N , el estimador obtenido por mínimos cuadrados es exactamente igual al fasor de la señal $\tilde{\rho}$. Esto significa que, para una senoidal pura, su fasor exacto $\tilde{\rho}$ puede obtenerse rápidamente desde cualesquiera de las soluciones mínimas cuadráticas, a condición de que existan, siendo ineficiente esperar hasta que una base ortogonal sea alcanzada.

El estimado fasorial mínimos cuadrados $\hat{\rho}$ se obtiene de las ecuaciones normales sustituyendo (9) en (4). Se tiene

$$B^T B \hat{\rho}^{(N)} = B^T s \tag{10}$$

Esta solución ofrece el mejor ajuste lineal, en el sentido de menor error cuadrático, al conjunto N de datos. El vector del lado derecho de la ecuación, $\sigma^{(N)} = B^T s$ ha sido llamado fasoreta en un trabajo previo,¹ debido a que corresponde a una suma parcial del estimado fasorial obtenido con el filtro de Fourier de un ciclo. Las ecuaciones normales, llevan a interpretar a la fasoreta como una transformación lineal del estimado fasorial. Esta transformación es dada por la matriz de $G = B^T B$ la cual depende únicamente de la estructura geométrica del modelo senoidal. Así que el estimado fasorial puede ser obtenido como una transformación inversa de la fasoreta.

$$\hat{\rho}^{(N)} = G^{-1} \sigma^{(N)} \tag{11}$$

la única condición para la unicidad de la solución en (11) es que b_1 y b_2 sean linealmente independientes, para asegurar la inversión de la matriz G . También existe una solución recursiva¹³ para (11).

Las ecuaciones (3), (4) y (11) son muy importantes en estimación fasorial. Ellas definen una familia de estimadores basadas en datos sucesivamente disponibles contenidos en vectores con más y más

componentes, cuando el tiempo de adquisición avanza. Estos estimados rápidos (obtenidos en fracciones de ciclo) son muy atractivos para aplicaciones en las cuales la velocidad es la principal preocupación. Aplicaciones que no pueden permitirse esperar hasta que la ortogonalidad de la base sea alcanzada, así empiezan a generar estimados tan pronto como N muestras de la señal estén disponibles. En este caso, los vectores b_i , $i=1,2$ con más y más componentes, forman bases no ortogonales en planos oblicuos, pero de cualesquiera de ellos, estimados fasoriales pueden ser obtenidas, usando la transformación inversa en (11).

Las matrices de Gram del modelo senoidal son dadas por

$$G = \sum_{n=1}^{N-1} \begin{pmatrix} \cos^2(n\omega_0) & -\cos(n\omega_0)\text{sen}(n\omega_0) \\ -\cos(n\omega_0)\text{sen}(n\omega_0) & \text{sen}^2(n\omega_0) \end{pmatrix} \tag{12}$$

y en forma cerrada por las siguientes series geométricas:

$$G^{(N)} = \begin{pmatrix} \frac{N}{2} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\text{sen}\omega_0(2N-1)}{\text{sen}\omega_0}\right) & -\frac{1}{2} \frac{\text{sen}\omega_0(N-1)\text{sen}\omega_0 N}{\text{sen}\omega_0} \\ -\frac{1}{2} \frac{\text{sen}\omega_0(N-1)\text{sen}\omega_0 N}{\text{sen}\omega_0} & \frac{N}{2} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\text{sen}\omega_0(2N-1)}{\text{sen}\omega_0}\right) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Cotas de Error Fasorial

Es posible acotar el “mínimo error” de los estimados en término de la energía de la señal exógena. Para cualquier valor de N , se tiene

$$\bar{\rho} = G^{-1} B^T e \tag{14}$$

y por tanto,

$$\|\bar{\rho}\|^2 = e^T B G^{-2} B^T e \tag{15}$$

la cual es la forma cuadrática de e . En esa expresión G^{-2} es el cuadrado de G^{-1} . Restringiendo e tal que $\|e\|=1$ con respecto al producto interno Euclidiano en \mathbb{R}^N , la forma cuadrática en (15) es acotada¹⁴ por los eigenvalores máximo y mínimo de la matriz definida positiva $BG^{-2}B^T$, $N \times N$. Las matrices definidas positivas tienen un conjunto ortogonal de eigenvectores y eigenvalores reales positivos. En nuestra forma cuadrática, dado que el error $\bar{\rho}$ reside en un plano, el rango de $BG^{-2}B^T$ es dos, y entonces tiene sólo dos eigenvalores no nulos. La figura 1 muestra los eigenvalores principales de $BG^{-2}B^T$. Ellos acotan el error fasorial de la señal exógena de norma euclidiana unitaria. Para $N < \frac{N_0}{2}$ uno de los

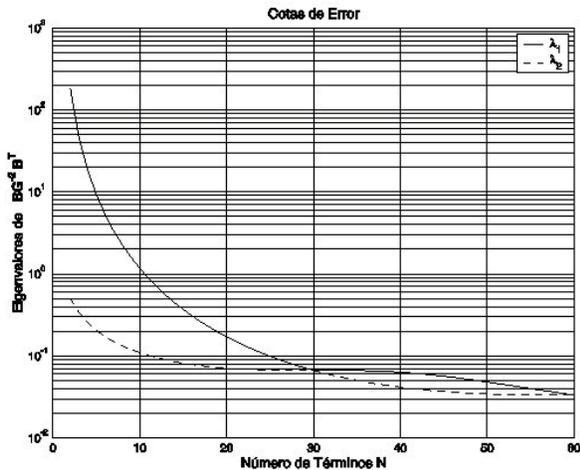


Fig. 1. Eigenvalores máximo y mínimo de la matriz $BG^{-2}B^T$. Ellos acotan el error de la solución de mínimos cuadrados en el correspondiente plano de proyección.

eigenvalores es mucho más grande que el otro, lo que significa que la hipersfera de norma unitaria es proyectada en elipses alargadas (errores grandes). Para $N \geq \frac{N_0}{2}$, las elipses son casi circulares. La figura 2 muestra los ejes mayor y menor de las elipses. Fueron dibujados proyectando los eigenvectores principales de la matriz $BG^{-2}B^T$ en el plano fasorial. Sus longitudes corresponden a la de los eigenvalores de las matrices correspondientes. Como puede verse, el error muestra una especial orientación espacial cuando N va de 15 a 60.

La figura 3 muestra las trayectorias trazadas por las estimaciones fasoriales cuando se proyectan

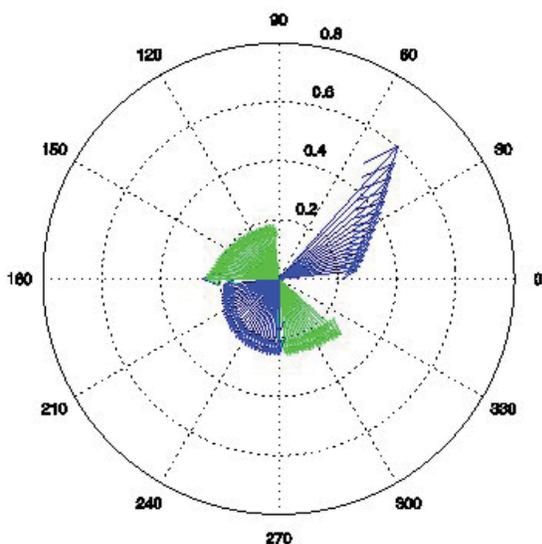


Fig. 2. Ejes mayor (azules) y menor (verdes) correspondientes a las proyecciones de los eigenvectores principales en el plano fasorial, para $N = 15$ a 60 .

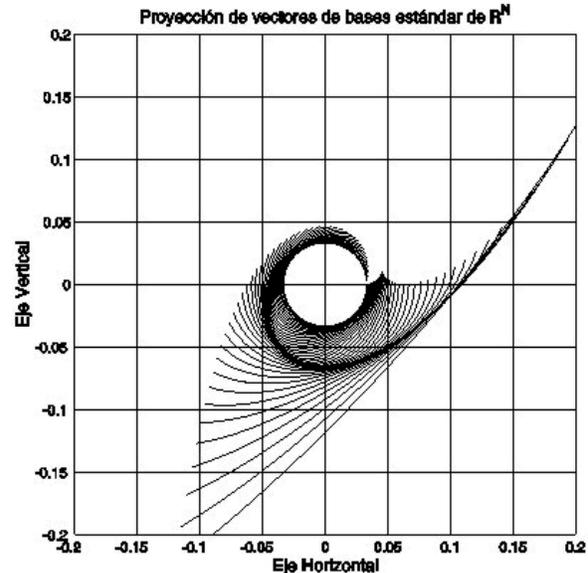


Fig. 3. Proyecciones de los vectores de la base estándar de R^N , para valores de $N=15$ a 60 .

los vectores de cada base estándar de R^N , de $N=15$ a $N_0=60$. Recuerde que las bases estándares están compuestas de vectores de norma unitaria. Cada línea conecta los puntos correspondientes a los vectores de una base, y por tanto representa la respuesta impulsional compleja del N -ésimo filtro. Se puede percibir la asimetría de esos fasores. Mientras que los vectores de cada bases cubren la hipersfera en (R^N) , sus fasores no son omnidireccionales, excepto para N_0 . Ya que cualquier secuencia de error será una combinación lineal de una de esas bases, el error fasorial total será también una combinación lineal de esos fasores. Para tener una mejor idea de lo que sucede a los fasores estándares cuando N aumenta, la figura 4 muestra las trayectorias de cada valor de N en niveles ascendentes. Esas curvas conforman un embudo que coincide con las cotas dadas por los eigenvalores en la figura 1. Estas figuras ilustran que la familia de estimados de Fourier son siempre susceptibles de errores cuando la señal no corresponde a una perfecta senoidal.

Compensación de fase por avance de señal

Ahora interesa generar estimados mientras la señal avanza sobre el intervalo de ajuste fijo. En este caso la secuencia senoidal cambia a $\tilde{s}_k(n) = \cos(\omega_0(n+k) + \theta)$ y depende del avance k .

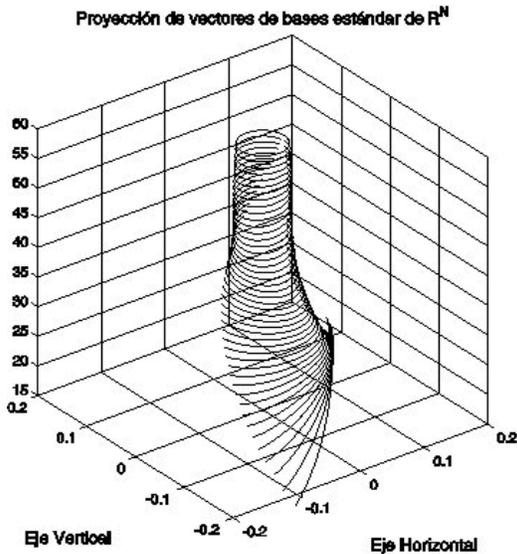


Fig. 4. Proyección de los vectores de la base estándar de R^N , para valores de $N=15$ a 60 . Los valores de N se muestran en el nivel vertical.

En términos vectoriales tenemos,

$$s_k = BR_{\omega_0}^k \tilde{\rho} + e_k \quad (16)$$

donde R_{ω_0} es la matriz de rotación:

$$R_{\omega_0} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 & -\text{sen} \omega_0 \\ \text{sen} \omega_0 & \cos \omega_0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

a ω_0 radianes, o $\frac{1}{N_0}$ de ciclo, que corresponde al retraso del período de muestreo. En ciclos, puede también denotarse como $R_{\frac{1}{N_0}}$ de manera que su N -ésima potencia será simplemente $R_{\frac{N}{N_0}}$, la cual corresponde a una fracción de ciclo.

Aplicando (10) a (16), la secuencia de estimados será ahora dada por

$$\hat{\rho}_k = R_{\omega_0}^{-k} G^{-1} B^T s_k \quad (k = 0, 1, \dots, K) \quad (18)$$

Esta es la ecuación usada para generar los estimados de los resultados numéricos mostradas en la próxima sección.

La matriz de rotación tiene dos importantes propiedades, simetría:

$$R_{\frac{1}{N_0}}^{k+\frac{N_0}{2}} = -R_{\frac{1}{N_0}}^k \quad (19)$$

y periodicidad:

$$R_{\frac{1}{N_0}}^{k+\ell N_0} = R_{\frac{1}{N_0}}^k \quad (20)$$

Finalmente, note que una rotación fraccionaria positiva tiene una equivalente negativa:

$$R_{\frac{1}{N_0}}^N = R_{\frac{1}{N_0}}^{N-N_0} \quad (21)$$

Estas propiedades son muy útiles para interpretar las relaciones entre las fasoretas en las siguientes secciones.

Extensión del Modelo

Las señales de corriente de falla generalmente contienen una componente aperiódica conocida en Inglés como *dc offset*. Para lidiar con esa componente un tercer vector b_0 con unos es necesario en la matriz B . En este caso, la matriz de Gram $G_3^{(N)}$, es 3×3 , y dada por la siguientes series:

$$\begin{pmatrix} N & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\text{sen} \omega_0 (2N-1)/2}{\text{sen}(\omega_0/2)} \right) & - \left(\frac{\text{sen} \omega_0}{4\text{sen}^2(\omega_0/2)} + \frac{\cos \omega_0 (2N-1)/2}{2\text{sen}(\omega_0/2)} \right) \\ g_{12} & G_2^{(N)} & \\ g_{13} & & \end{pmatrix} \quad (22)$$

en la cual $G_2^{(N)}$ es la matriz 2×2 de Gram anterior.

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS ESTIMADORES FASORIALES

Otra manera de evaluar el rendimiento de los estimadores es considerando el proceso de estimación fasorial como la salida de un banco de filtros. La respuesta en frecuencia de los filtros es dada por sus respuestas a exponenciales complejas de la forma $e^{j\frac{\omega}{\theta_0} n}$, $n=0, \dots, N-1$. Las figuras 5 y 6 muestran la respuesta en magnitud de los filtros correspondientes al estimador de los modelos 2×2 y 3×3 . Es evidente que las respuestas en magnitud no son simétricas con respecto a cero. Note que todos los filtros tienen ganancia unitaria en la frecuencia fundamental ($u=1$) y cero en su valor negativo ($u=-1$). El filtro de Fourier de un ciclo tiene además ganancias nulas en cada armónica, mientras que el de medio ciclo sólo en las armónicas impares. La inclusión de la componente de directa (*dc*) en el modelo 3×3 fuerza a cero la ganancia en $u=0$ en todas las respuestas en magnitud e incrementa la sensibilidad a las componentes no fundamentales, especialmente para los intervalos más cortos. El filtro de Fourier de un ciclo permanece igual pues ya tenía un cero.

Como se puede ver en las respuestas en frecuencia, todos los estimados son muy sensibles a las

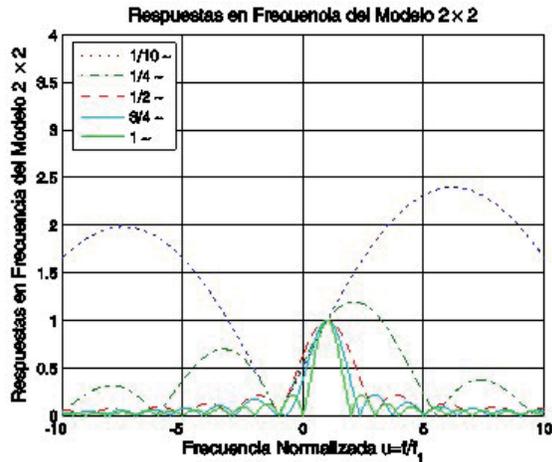


Fig. 5. Respuesta en magnitud de los estimadores fasoriales con el modelo 2 x 2.

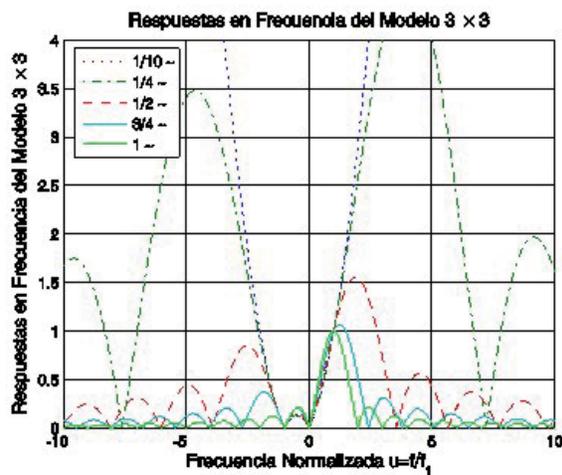


Fig. 6. Respuesta en magnitud de los estimadores fasoriales con el modelo 3 x 3.

componentes no fundamentales, pero a pesar de esta gran sensibilidad, todas ellas ofrecen una solución *exacta* (medición) cuando la señal de entrada coincide con el modelo de señal, el cual tiene líneas espectrales en $u=\{-1,1\}$ o $u=-1,0,1$. Es por eso que si se conoce con antelación la señal exógena de la aplicación, su modelo puede incluirse junto con el modelo senoidal. De esta manera la señal exógena será manejada por un nuevo coeficiente.

ESTIMACIÓN FASORIAL MÚLTIPLE Y MULTITASA

Es interesante relacionar la fasoreta de ciclo completo $\sigma^{(N_0)}$ con las más cortas $\sigma^{(N)}$. Consideremos particiones con intervalos diádicos dentro de un ciclo $p = 0, 1, \dots, \log_2 N_0$. Para cada partición p ,

la longitud de los intervalos es de $N_p = N_0 / 2^p$ muestras. Cada partición ofrece un diferente nivel de resolución temporal. Por simplicidad, denotamos la secuencia de fasoretas de la partición p dentro del ciclo, como $\sigma_\ell^{2^{-p}}$, $\ell = 0, 1, \dots, 2^p - 1$. Entonces la fasoreta de ciclo completo es dada por:

$$\sigma_0^1 = \begin{bmatrix} B_0^T & | & B_1^T & | & \dots & | & B_{2^p-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \dots \\ s_{2^p-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

con

$$B_\ell^T = R_{2^{-p}}^{-\ell} B_0^T, \quad \ell = 0, 1, \dots, 2^p - 1 \quad (24)$$

y

$$s_\ell = B_0 R_{2^{-p}}^\ell \hat{\rho}, \quad \ell = 0, 1, \dots, 2^p - 1, \quad (25)$$

así tenemos

$$\sigma_0^1 = \sum_{\ell=0}^{2^p-1} R_{2^{-p}}^{-\ell} \sigma_\ell^{2^{-p}} \quad (26)$$

ya que las fasoretas parciales en cada intervalo diádico son dadas por

$$\sigma_\ell^{2^{-p}} = B_0^T B_0 R_{2^{-p}}^\ell \hat{\rho}, \quad \ell = 0, 1, \dots, 2^p - 1. \quad (27)$$

La ecuación (26) explica la naturaleza de filtrado del estimado de ciclo completo. La fasoreta de ciclo completo σ_0^1 se forma agregando todas las fasoretas de un ciclo, pero cada una de ellas rotada inversamente a ángulos correspondientes a las fases de los instantes iniciales de cada intervalo diádico. Esa naturaleza rotatoria de la transformada de Fourier garantiza la supresión del error de armónicas presente en las fasoretas dentro de ese ciclo.

Es posible obtener la fasoreta de ciclo completo (correspondiente al último ciclo de señal) cada vez que avanzamos al próximo intervalo diádico, mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_k^1 = R_{2^{-p}} (\sigma_{k-1}^1 + \sigma_k^{2^{-p}} - \sigma_{k-2^p}^{2^{-p}}) \quad (28)$$

En la cual la fasoreta anterior de un ciclo es renovada agregando la diferencia entre las fasoretas parciales del nuevo y viejo intervalo, y luego rotándola. Por lo que junto con cada nueva fasoreta, $\sigma_k^{2^{-p}}$, es fácil generar la fasoreta del último ciclo σ_k^1 . De hecho es posible generar todas las fasoretas intermedias de cada intervalo, mediante ecuaciones recursivas similares a (28).

Las fasoretas de resolución inferior pueden obtenerse a partir de las de resolución inmediatamente superior mediante las siguientes relaciones descendentes. En esas ecuaciones k es el índice de las de más alta resolución.

$$\begin{aligned} \sigma_k^{1/4} &= \sigma_{k-1}^{1/8} + R_{\frac{1}{8}}^{-1} \sigma_k^{1/8} & k = 2, 3, \dots \\ \sigma_k^{1/2} &= \sigma_{k-2}^{1/4} + R_{\frac{1}{4}}^{-1} \sigma_k^{1/4}, & k = 4, 5, \dots \\ \sigma_k^1 &= \sigma_{k-4}^{1/2} + R_{\frac{1}{2}}^{-1} \sigma_k^{1/2}, & k = 8, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

cada una de estas fasoretas corresponde al último intervalo diádico (1/4, 1/2 ó 1 ciclo), incluyendo la k ésima de más alta resolución. Las anteriores relaciones inician en el tercer nivel de resolución (octavos), pero pueden generalizarse fácilmente para cualquier otro nivel superior.

Es posible ir más allá y por diezmado calcular únicamente fasoretas de intervalos diádicos disjuntos en cada nivel de resolución:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{1/4} &= \sigma_{2n-1}^{1/8} + R_{\frac{1}{8}}^{-1} \sigma_{2n}^{1/8} \\ \sigma_n^{1/2} &= \sigma_{2n-1}^{1/4} + R_{\frac{1}{4}}^{-1} \sigma_{2n}^{1/4}, & n = 1, 2, 3, \dots \\ \sigma_n^1 &= \sigma_{2n-1}^{1/2} + R_{\frac{1}{2}}^{-1} \sigma_{2n}^{1/2} \end{aligned} \quad (30)$$

Estas fasoretas son calculadas a tasas múltiples, el índice de cada fasoreta corresponde a la secuencia de intervalos diádicos disjuntos en el nivel de resolución correspondiente. Finalmente, estimados fasoriales múltiples o multitasa pueden obtenerse aplicando la ecuación (11) a las fasoretas y aplicando la correspondiente rotación inversa.

En la sección siguiente consideramos los resultados obtenidos con señales de falla reales.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Para probar e ilustrar las soluciones propuestas, se analizan tres señales de fallas reales: dos de corriente y una de voltaje. Iniciamos considerando la magnitud y fase de los estimados fasoriales obtenidos de fasoretas de un deciciclo (6 muestras) tomadas de la misma señal de corriente, los cuales se ilustran en la figura 7. Un error importante en magnitud y fase se produce en el tercer y cuarto ciclo. Y es precisamente ahí donde se requieren los mejores estimados. Este error es debido al filtrado pasa todo realizado por el proceso de ajuste senoidal. En el caso de la componente aperiódica en corrientes de falla, es más

eficiente incluir una señal de corriente directa en el modelo de señal, y manejar la aperiódica con uno de los coeficientes del modelo. En este caso, la primera coordenada manejará el estimado de corriente directa y las otras dos el estimado fasorial. El rendimiento de este modelo extendido será más preciso y rápido para pequeños valores de N .

La figura 8 muestra estimados de la componente de directa, magnitud y fase del fasor de la señal de corriente obtenidos con fasoretas de un deciciclo. Aun teniendo un estimado titubeante, el algoritmo extrae la componente aperiódica y los estimados fasoriales con buena exactitud. El comportamiento titubeante de los estimados se reduce cuando se aumenta el intervalo de estimación.

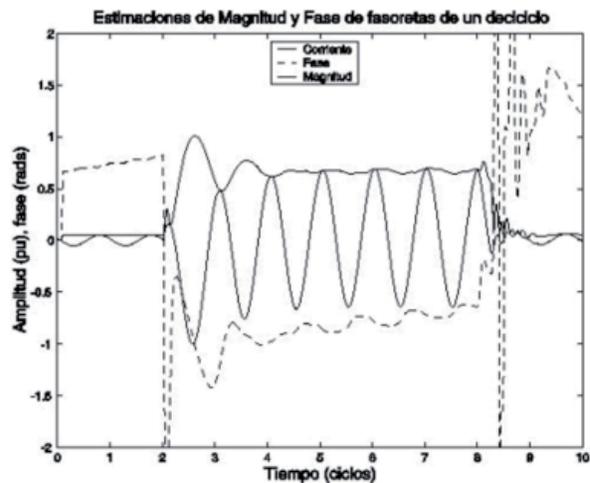


Fig. 7. Estimaciones fasoriales de fasoretas de un deciciclo. Magnitud (línea continua), fase (línea punteada).

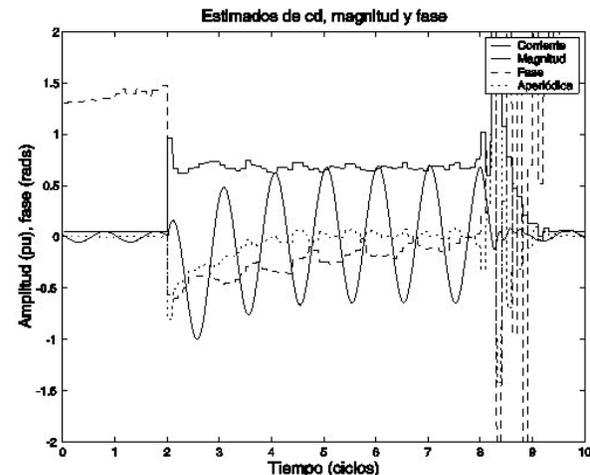


Fig. 8. Estimado de corriente directa y fasorial (magnitud y fase) de una señal de corriente de falla con fasoretas de un deciciclo.

La figura 9 muestra las estimaciones obtenidas de fasoretas de cuarto de ciclo. Se percibe una mejora apreciable en la estabilidad del estimador. Buenos estimados son posibles a partir de fasoretas de un sexto de ciclo.

Finalmente, la figura 10 muestra la magnitud y fase de los estimados fasoriales multitasa $\rho^{1/4}$, $\rho^{1/2}$, ρ^1 correspondientes a la señal de corriente de la figura 9. En estas gráficas, las estimaciones fasoriales se refieren al centro de cada paso, y cubren los intervalos diádicos correspondientes, pero están disponibles hasta el último cuarto de los escalones (esquinas derechas). Podemos ver que el

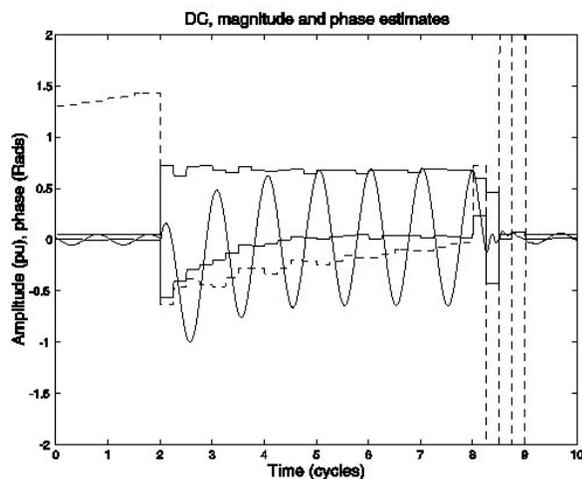


Fig. 9. Estimado de corriente directa y fasorial (magnitud y fase) de una corriente de falla con fasoretas de un cuarto de ciclo.

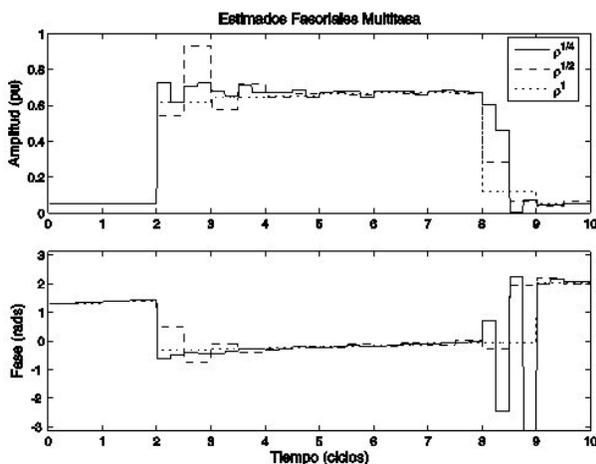


Fig. 10. Estimados fasoriales multitasa de fasoretas $\rho^{1/4}$, $\rho^{1/2}$ y ρ^1 .

estimado fasorial de un ciclo es muy bueno pero llega muy tarde comparado con los estimados de más alta resolución. Note que para cada ciclo, se dispone ahora de siete estimados fasoriales en vez de uno solo.

Los resultados anteriores muestran que es posible diseñar estrategias para controlar la alta sensibilidad de las fasoretas al ruido, especialmente para corrientes y voltajes de falla.

CONCLUSIONES

La principal contribución de este artículo es el haber señalado que es posible obtener estimaciones fasoriales múltiples y más rápidas, obteniéndolas de fasoretas calculadas sobre bases oblicuas, sin esperar a que sean ortogonales.

Los resultados numéricos demuestran que la inclusión de una constante en el modelo de señal reduce el error fasorial y ofrece una técnica para manejar el error exponencial.

La extensión del modelo de señal constituye la clave para reducir el error y aumentar la velocidad de los estimados fasoriales obtenidos con fasoretas. Ofrecer estimaciones más rápidas y precisas es crucial para muchas aplicaciones, en especial para la aplicación de protecciones.

El artículo establece una mejor relación entre el análisis teórico de los estimadores y las cotas de error, y encuentra las relaciones jerárquicas entre fasoretas (y estimados fasoriales) de nivel de resolución descendente, e indica la manera general de usarlas sobre una conocida plataforma (mínimos cuadrados), con el fin de obtener más rápidas mediciones fasoriales, sin esperar a tener bases ortogonales. Ciertamente, esta plataforma constituye un fundamento firme sobre el cual la construcción de nuevo conocimiento es posible en esta área de investigación.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a William Premerlani y Mark Adamiak el haber amablemente aportado las señales digitales analizadas en este artículo.

REFERENCIAS

1. J. de la O. Phasor estimation from phasorlets. IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 54, no. 1, pp. 134–143, Feb. 2005.
2. M. G. Adamiak, G. E. Alexander, and W. Premerlani. Advancements in Adaptive algorithms for secure high speed distant protection. GE Power Management, Malvern, PA.
3. A. G. Phadke and J. Thorp, Computer Relaying for Power Systems. Baldock: Research Studies Press, 1988.
4. M. Sachdev and M. Nagpal. A recursive least error squares algorithm for power system relaying and measurement applications. IEEE Trans. Power Del., vol. 6, no. 3, pp. 1008–1015, Jul. 1991.
5. T. Sidhu, X. Zhang, and V. Balamourougan. A new half-cycle phasor estimation algorithm. IEEE Trans. Power Del., vol. 20, no. 2, pp. 1299–1305, Apr. 2005.
6. M. Wang and Y. Sun. A practical precise method for frequency tracking and phasor estimation. IEEE Trans. Power Del., vol. 19, no. 4, pp. 1547–1552, Oct. 2004.
7. D. Hart, D. Novosel, Y. Hu, B. Smith, and M. Egolf. A new frequency tracking and phasor estimation algorithm for generator protection. IEEE Trans. Power Del., vol. 12, no. 3, pp. 1064–1073, Oct. 1997.
8. J. A. de la O and K. Martin. Improving phasor measurements under power system oscillations. IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 1, pp. 160–166, Feb. 2003.
9. M. Donolo and V. Centeno. A fast quality assessment algorithm for phasor measurements. IEEE Trans. Power Del., vol. 20, no. 4, pp. 2407–2413, Oct. 2005.
10. J. A. de la O. Reducing the error in phasor 9s from phasorlets in fault voltages and current signals. in IEEE Power Engineering Society General Meeting, San Francisco, CA, USA, June 12-16 2005, pp. 843–849.
11. J. A. de la O, Reducing the error en phasor estimets from phasorlets en fault voltage and current signals. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 56, No. 3, June 2007, pp. 856-866.
12. T. Andersson and P. Händel. IEEE standard 1057, Cramér-Rao bound and the parsimony principle. IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 55, no. 1, pp. 44–53, Feb. 2006.
13. L. Scharf 12, Statistical Signal Processing, Detection, Estimation, and Time Series Analysis. Massachusetts: Addison Wesley, 1991, pp. 384-386.
14. H. Anton, Elementary Linear Algebra. New York: John Wiley & Sons, 2003, Chap 9.

