

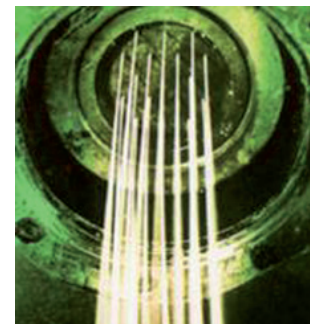
# Técnica numérica para estimar parámetros de un modelo normal utilizado en hilados texturizados

**Gabriel Guillén Buendía**

ESIME-Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional  
gguillen@ipn.mx

**Ana María Islas Cortés**

ESIT, Instituto Politécnico Nacional  
amislas@ipn.mx



## **RESUMEN**

*En este trabajo se presenta el ajuste del modelo normal en cuatro histogramas de frecuencias usando la técnica del punto conocido. Se utilizan como ejemplo el estudio, la influencia de las condiciones de torsión y fijación en las propiedades mecánicas de hilados de poliéster texturizados. Este ajuste permite obtener los parámetros del modelo normal a través de su transformación lineal a partir de un punto leído a voluntad sobre la curva no lineal. El grado de ajuste alcanzado depende de dicho punto. También se usa el algoritmo de Guggenheim y el método Marquardt para verificar los resultados obtenidos mediante la técnica descrita. Los datos corresponden a 250 valores de propiedades mecánicas de los hilados de poliéster de uso común en la industria textil.*

## **PALABRAS CLAVE**

Modelo normal, transformación lineal, técnica del punto conocido, hilados texturizados.

## **ABSTRACT**

*The study of influence of torsion and setting conditions on the mechanical properties of textured polyester yarn is presented as an example. The adjustment of the normal model is presented in four histograms of frequencies using the technique of the known point. This adjustment allows obtaining the parameters of the normal model through its linear transformation obtained from a point read at will on the not linear curve. The degree of reached adjustment depends on this point. The algorithm of Guggenheim and method Marquardt were also used to verify the results achieved by the described technique. The data correspond to 250 values of mechanicals properties of polyester yarns of common use in the textile industry researched.*

## **KEYWORDS**

Normal model, linear transformation, techniques of the known point, textured yarns.

**INTRODUCCIÓN**

En ingeniería y ciencias se abordan frecuentemente los problemas usando modelos de regresión no lineal. Cuando se utiliza el método de mínimos cuadrados en esos modelos, la solución de las ecuaciones normales tiene cierta dificultad por ser no lineales. El método usado consiste en minimizar en forma directa la suma de cuadrados de residuales mediante un procedimiento iterativo.<sup>1</sup> En determinadas circunstancias es útil considerar una transformación de linealidad de la función no lineal para calcular sus constantes. En otros casos, la exploración visual de distintos datos asociados a fenómenos naturales y/o procesos industriales puede sugerir una distribución unimodal de moda centrada, como la que aparece en la figura 1.

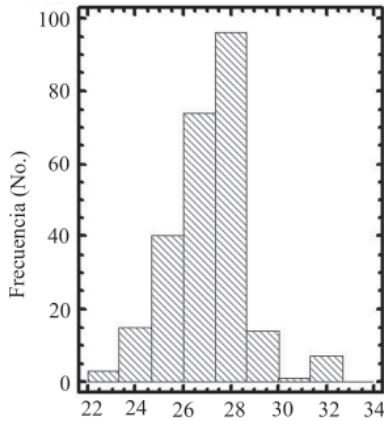


Fig. 1. Distribución unimodal de moda centrada.

La curva envolvente sobre la distribución anterior, puede obedecer a diversas ecuaciones matemáticas, una de ellas, por ejemplo, es la expresión del cuadrado de secante hiperbólica<sup>2</sup>

$$f = f_m \operatorname{sech}^2 k(x - x_m) \tag{1}$$

Donde:

$f$ .- es la frecuencia dimensional correspondiente a la observación del tamaño.

$f_m$ .- es la frecuencia en el máximo de la distribución de peso estadístico de muestra, que se manifiesta para una observación de tamaño " $x_m$ " (moda estadística).

$k$ .- es la constante de esbeltez de la distribución de peso estadístico de muestra.

Su modelo de frecuencias acumulativas es determinable por integración, conduciendo al modelo matemático siguiente:

$$f_c = \frac{f_{c\infty}}{2} \left[ 1 + \operatorname{tgh} h k (x - x_m) \right] \tag{2}$$

De dicho modelo es calculable el tamaño de un individuo " $x$ " como se señala en seguida:

$$x = x_m + \frac{1}{k} \operatorname{arctgh} \left[ \frac{2f_c}{f_{c\infty}} - 1 \right] \tag{3}$$

Otra opción, y la más generalizada, es suponer la normalidad de los datos observados, aunque es recomendable contrastar esa hipótesis. La expresión matemática del modelo normal es:

$$f = A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \tag{4}$$

Los parámetros del modelo (4) son determinables utilizando la técnica de mínimos cuadrados, entonces:

$$S = \sum \left[ A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] - f \right]^2 \tag{5}$$

Resolviendo las ecuaciones normales  $\partial S / \partial A = \partial S / \partial \mu = \partial S / \partial \sigma = 0$ , se obtiene un sistema de tres ecuaciones no lineales con tres incógnitas, señaladas en la ecuación (6).

Este sistema de ecuaciones se resuelve por un método iterativo ya que no es posible simplificarlo más.

El objetivo de este trabajo es utilizar la transformación lineal del modelo normal demostrando que es una posibilidad que conduce a resultados satisfactorios.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= \sum_{i=1}^n \left[ A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] - f \right] \left[ \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right] \right] = f_1 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n \left[ A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] - f \right] \left[ \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right] \left( \frac{Ax}{\sigma^2} - \frac{A\mu}{\sigma^2} \right) \right] = f_2 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \left[ A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] - f \right] \left[ \frac{A \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right] (x^2 - 2\mu x + \mu^2)}{\sigma^3} \right] = f_3 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

### La transformación lineal del modelo normal

El ajuste de modelos no lineales a través de su transformación lineal es un asunto constantemente abordado, que, para fines didácticos resulta atractivo, porque el estudiante dedica mayor tiempo a la comprensión del fenómeno en estudio, lo que no sucede en el método numérico. Aún está vigente el algoritmo de Guggenheim,<sup>3</sup> publicado originalmente en 1926, y por esa razón se utiliza en este trabajo.

A continuación se expone brevemente una aplicación del comportamiento viscoelástico de fibras textiles sujetas a tensión como una prueba más de su vigencia en la ingeniería. James C. Maxwell estableció los fundamentos matemáticos de la viscoelasticidad proponiendo el modelo que lleva su nombre, donde consideró dos elementos ideales; el primero explica la recuperación elástica de los cuerpos sometidos a tracción representado por un muelle; el segundo, la variación de las dimensiones que se producen en el material a lo largo del tiempo, durante la aplicación del esfuerzo o bien después de cesar el mismo, el cual está relacionado con las tensiones internas acumuladas en el material que se liberan gradualmente y se representa por un émbolo.

Uno de los modelos más recientes es el modelo de Vangheluwe<sup>4</sup> que está construido por un elemento de Maxwell colocado en paralelo con un muelle no lineal de módulo “C”. Su expresión matemática que relaciona la carga “σ” y el alargamiento “ε” es:

$$\sigma = A(1 - e^{-B\epsilon}) + C\epsilon^2 \quad (7)$$

Donde:

A, B y C, son parámetros que tienen relación con las propiedades mecánicas y tintóreas de los materiales.

Los métodos usados para determinar estas constantes son el método gráfico,<sup>4</sup> los mínimos cuadrados<sup>5</sup> y el método del hiperplano.<sup>5</sup> El primero de ellos fue propuesto en la década de los 90 por Vangheluwe, y los parámetros obtenidos son optimizados por el método iterativo Marquardt.<sup>6</sup>

Cuando no se dispone de un software estadístico para realizar la optimización, suelen usarse las hojas de cálculo para aplicar los mínimos cuadrados, que en este caso se escriben:

$$S = \sum_{i=1}^n [(A(1 - e^{-B\epsilon_i}) + C\epsilon_i^2 - \sigma_i)^2] \quad (8)$$

Cuando se ajusta el modelo de Vangheluwe a las curvas carga-deformación de materiales que contienen materiales elásticos, la fluencia en dichas curvas no permite determinar correctamente las constantes numéricas del modelo, y al optimizarlas por el método Marquardt conducen a resultados poco consistentes. Por ello también fue probado el método del hiperplano que es una modificación del algoritmo de Guggenheim, y al aplicarlo al modelo de Vangheluwe condujo a la expresión:

$$\sigma' = \sigma e^{-B\tau} + \epsilon^2 C(1 - e^{-B\tau}) + \epsilon 2C\tau + [A(1 - e^{-B\tau}) + C\tau^2] \quad (9)$$

Es posible tratar a la ecuación (9) como una función lineal en tres dimensiones, pero resulta cómodo hacerlo con un hiperplano de cuatro dimensiones, considerando a “ε<sup>2</sup>” como una variable independiente, donde aplicando métodos de regresión lineal múltiple se obtienen los valores numéricos para:

$$|\beta_1| = e^{-B\tau}, |\beta_2| = C(1 - e^{-B\tau}), |\beta_3| = 2C\tau, |\beta_0| = A(1 - e^{-B\tau}) + C\tau^2 \quad (10)$$

El algoritmo de Guggenheim se aplica en otros casos, por ejemplo, en determinar las constantes de evolución en la cinética del ensayo de sorción de iodo en fibras de poliéster.

### El algoritmo de Guggenheim

Éste indica que tomando valores sobre la curva igualmente espaciados en las abscisas, se pueden establecer dos subconjuntos de  $n/2$  puntos cada uno  $(x, f)$  y  $(x', f')$ . Donde los  $(x, f)$  son los primeros  $n/2$  puntos de la curva y  $(x', f')$  son los siguientes  $n/2$  puntos de la misma. Evidentemente, la diferencia es constante “τ” y se denomina constante de desplazamiento de Guggenheim, cuyas expresiones esenciales pueden verse a continuación:

$$x \rightarrow f \quad (11)$$

$$x + \tau \rightarrow f' \quad (12)$$

Aplicando las expresiones (11) y (12) al modelo normal (4), se tiene:

$$f = A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (13)$$

$$f' = A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x + \tau - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (14)$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (14) entre la ecuación (13), y simplificando, se llega a la transformación lineal del modelo normal, que se expresa:

$$\ln(f'/f) = -\frac{\tau}{\sigma^2}x + \frac{\tau}{2\sigma^2}(2\mu - \tau) \quad (15)$$

De esta ecuación resulta que graficando los datos de la columna “x” contra la columna de transformación  $\ln(f'/f)$  resulta una recta, de la cual se pueden calcular la “media aritmética” ( $\mu$ ) y la “varianza” ( $\sigma^2$ ), como se señala a continuación:

$$m = -\tau/\sigma^2; \quad b = \tau(2\mu - \tau)/(2\sigma^2) \quad (16)$$

En tanto que el parámetro “A” se despeja de la ecuación (4) y se calcula la media de dicho parámetro usando las coordenadas de todos los puntos experimentales.

### La técnica del punto conocido

Esta técnica, que no aparece en textos de estadística aplicada, y su aplicación al modelo normal permite determinar sus constantes a través de la transformación lineal, usando un punto leído a voluntad sobre la curva envolvente a ajustar. Cabe señalar que la bondad de ajuste depende de éste, sin embargo en todos ellos se obtienen estimadores parecidos a los obtenidos con el algoritmo precedente.

La técnica del punto conocido señala que se aproxima por inspección una campana al histograma unimodal de moda centrada y sobre ella se “lee a voluntad” un punto al que se denomina “punto conocido”  $P_k(x_k, y_k)$ , que cumple la expresión siguiente por situarse en algún punto del modelo normal:

$$f_k = A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_k - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (17)$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (2) entre la ecuación (11), y aplicando logaritmos neperianos resulta:

$$\ln \left( \frac{f}{f_k} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_k - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad (18)$$

Desarrollando algebraicamente la expresión anterior, se llega a la ecuación (19) que es la forma lineal del modelo normal usando la técnica del punto conocido:

$$\ln(f/f_k)/(x - x_k) = -\frac{1}{2\sigma^2}x + \frac{1}{2\sigma^2}(2\mu - x_k) \quad (19)$$

De esta ecuación resulta que graficando los datos de la columna “x” contra los datos de la columna de transformación “ $\ln(f/f_k)/(x - x_k)$ ” se tiene una recta, que es más acentuada mientras más se ajusta el histograma unimodal al modelo normal. Calculando los parámetros de la recta es también posible estimar la “varianza” ( $\sigma^2$ ) y la “media aritmética” ( $\mu$ ), como:

$$m = -1/(2\sigma^2); \quad b = (2\mu - x_k)/(2\sigma^2) \quad (20)$$

El parámetro “A” del modelo normal se despeja de (4) y se calcula la media del parámetro usando las coordenadas de todos los datos experimentales.

En este trabajo se usaron datos experimentales correspondientes a las propiedades mecánicas de hilados texturizados de poliéster, que serán definidos a continuación. Los cuales fueron ajustados al modelo normal usando los métodos arriba señalados.

### La normalidad de las propiedades mecánicas de los hilados texturizados

La vestimenta del hombre ha sufrido numerosas transformaciones debidas al descubrimiento de nuevos materiales, o nuevas técnicas de fabricación, e indudablemente, a las tendencias de la moda en general. Poseer el máximo de información sobre los materiales que usamos es importante para conocer la respuesta que estos tendrán ante determinadas condiciones, por ello resulta necesario evaluar la estructura y sus parámetros a través de una serie de métodos de ensayo, que sean totalmente objetivos y reproducibles.

Las fibras de origen natural siempre han estado al alcance del hombre, aunque recientemente su consumo se ha reducido, incrementando por otra parte, el consumo de fibras sintéticas. Los hilados texturizados<sup>7</sup> aparecieron en los años 50, y se entiende que son aquéllos multifilamentos sintéticos cuyo aspecto liso y uniforme se modifica geoméricamente para cambiar sus características básicas, mediante la aplicación de torsión y calor para fijar el rizo, y conferirles carácter, volumen, extensión y tacto más agradable, que los haga parecidos a los hilados elaborados con fibras naturales, pero aportando las ventajas propias de las fibras sintéticas (figura 2). Las fibras de poliéster ocupan más del 30% del consumo de la producción de textiles en el mundo, sólo debajo del algodón.



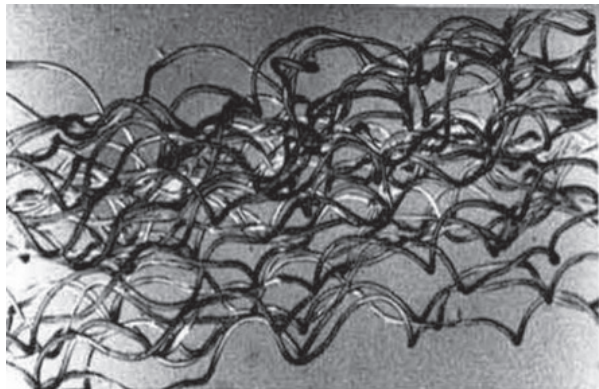


Fig. 2. Aspecto general de un hilado texturizado.

En la figura 3 se muestra el principio del proceso de texturizado; en la parte superior el hilado se tuerce en el falso torcedor, después un termofijado y relajado mientras se encuentra en la condición de torcido y finalmente se destuerce completamente en la parte inferior al ir dejando el falso torcedor.

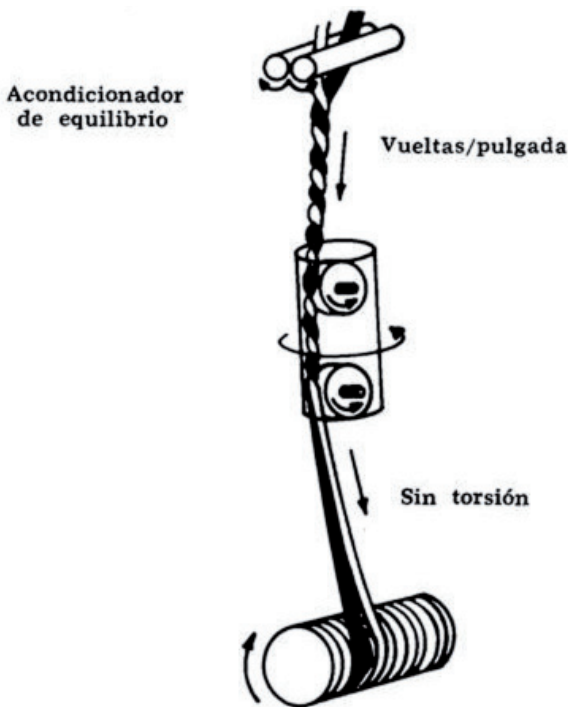


Fig. 3. El principio del proceso de texturizado (torcer, fijar torsión y destorcer).

Los multifilamentos sintéticos que se alimentan en el proceso de texturizado están parcialmente orientados, poseen una fase cristalina y otra amorfa, y su procesamiento inicia cuando el material fundido es extruido a través de las toberas (figura 4a) y es arrollado en pares de cilindros con diferencia de velocidades periféricas (figura 4b) y calentados a

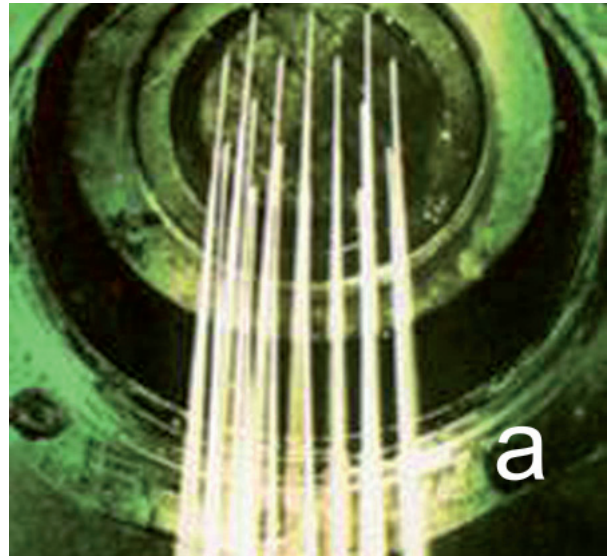


Fig. 4. a) Fotografía de la tobera de hilar, b) Fotografía de los cilindros estirados para filamentos sintéticos.

una temperatura superior a la de transición vítrea, la orientación del hilado está en función del número de éstos últimos pares presentes en el proceso.

En este estudio los multifilamentos son de poliéster. El poliéster se define como un compuesto de macromoléculas lineales cuya cadena contiene al menos un 85% en peso de un éster de diol y de ácido tereftálico, y está formado por una unidad repetida de aproximadamente 10.75-10.90 Å, tiene una masa molar de 15-20 kg/mol y un grado de polimerización 85-130. El poliéster cristaliza en un sistema triclinico. La densidad de las regiones amorfas en el poliéster parcialmente cristalino es de 1.335 g/cm<sup>3</sup>, mientras que la densidad usual de los hilados de este material es de 1.39-1.4 g/cm<sup>3</sup>, entonces la proporción en peso de las regiones cristalinas en el hilado ordinario es de 48-50%.

La modificación de las propiedades del poliéster depende del historial térmico y de las tensiones a que se sometan los hilados. En la práctica, las variaciones en la microestructura y la orientación de los hilados de poliéster se manifiestan en las propiedades mecánicas del mismo, cuando se somete al ensayo de tracción en condiciones técnicas y atmosféricas establecidas en el método de ensayo. El resultado son las curvas tensión-deformación como la ilustrada en la figura 5. En su parte inicial el esfuerzo es proporcional a la deformación (límite elástico). Enseguida la tensión de fluencia, que es donde ocurre el deslizamiento del material debido a la ruptura de una gran cantidad de enlaces secundarios que permite que la red estructural se extienda fácilmente. Cuando la deformación llega al límite, y no se pueden producir más deslizamientos entre cadenas, se alcanza la zona de refuerzo. En esa región el alargamiento del material aumenta continuamente y casi se mantiene hasta el punto de rotura.

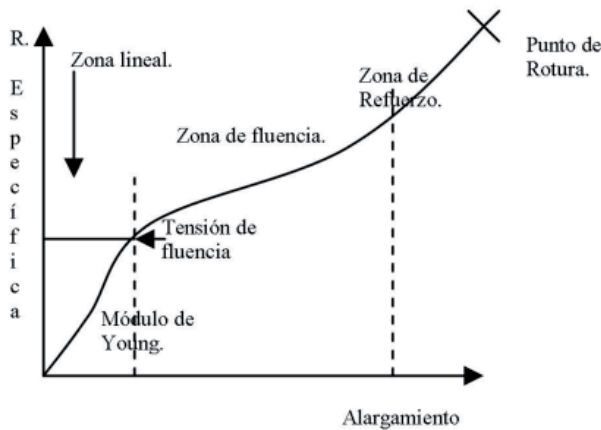


Fig. 5. Diagrama de la esfuerzo-deformación de las fibras sintéticas.

Las propiedades mecánicas en el punto de rotura, como el alargamiento, la resistencia, la resistencia específica y el trabajo, para el caso de materiales sintéticos tienen una regularidad en sus valores. Puede decirse que al graficar un número importante de resultados del ensayo de tracción de estos hilados se obtienen histogramas unimodales de moda centrada.

## EXPERIMENTACIÓN

Se utilizaron multifilamentos texturizados de poliéster de calibre comercial de 16.7 tex (un tex es la masa en gramos de 1000 metros de hilado, se usa esta relación debido a que los hilados son fácilmente deformables en su diámetro). El proceso de texturizado de los hilados de poliéster fue realizado en una máquina de doble torsión de la marca RPR y las condiciones técnicas fueron 600 vueltas/metro (v/m) y una temperatura de fijado de 100°C. Los hilados alimentados en la máquina texturizadora fueron previamente estirados en una máquina Barman a 1.8 de relación de estirado. Los hilados obtenidos fueron ensayados a la tracción usando un dinamómetro universal Statimat M de Textechno, de acuerdo a norma técnica ASTM.<sup>8</sup> Los resultados de las propiedades mecánicas se grafican en la figura 6, donde aparecen los histogramas del alargamiento (%), resistencia (cN), resistencia específica (cN/tex) y trabajo (cN.cm), todos ellos a la rotura de los hilados en estudio.

En la tabla I se indican las marcas de clase y frecuencias de los histogramas señalados, que corresponden a las propiedades mecánicas de los hilados en estudio.

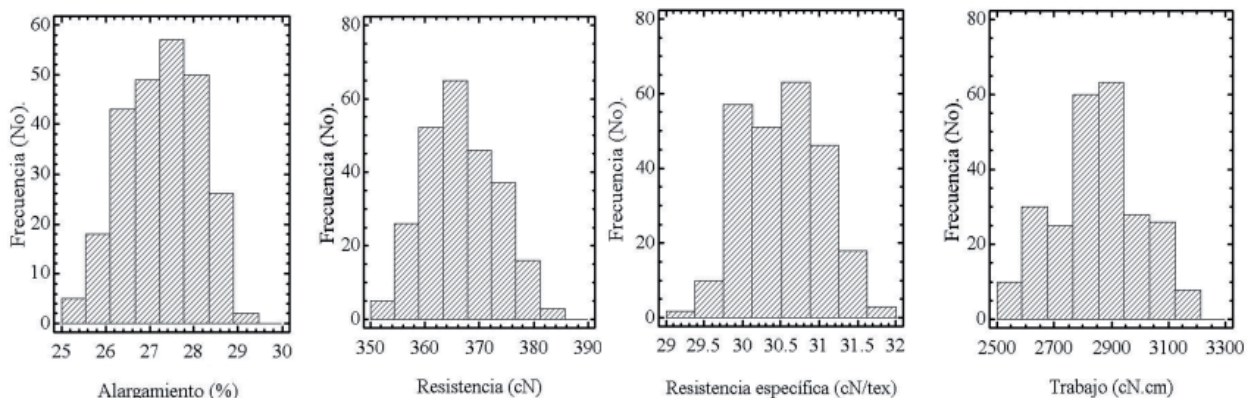


Fig. 6. Histogramas de frecuencia de los datos de alargamiento (%), resistencia (cN), resistencia específica (cN/tex) y trabajo (cN.cm), todos ellos a la rotura de los hilados texturizados de poliéster.

Tabla I. Datos experimentales del ensayo de tracción de los hilados texturizados de poliéster.

Resultados del ensayo de tracción de hilados texturizados de poliéster (16.7 tex)							
Alargamiento		Resistencia		Resistencia específica		Trabajo	
A (%)	Frecuencia (No.)	R (cN)	Frecuencia (No.)	$\sigma$ (cN/tex)	Frecuencia (No.)	W (cN.cm)	Frecuencia (No.)
25.281	5	352.188	5	29.2	2	2546.875	10
25.844	18	356.563	26	29.6	10	2640.625	30
26.406	43	360.938	52	30.0	57	2734.375	25
26.969	49	365.313	65	30.4	51	2828.125	60
27.531	57	369.688	46	30.8	63	2921.875	63
28.094	50	374.063	37	31.2	46	3015.625	28
28.656	26	378.438	16	31.6	18	3109.375	26
29.219	2	382.813	3	32.0	3	3203.125	8

**RESULTADOS**

Para determinar si los datos experimentales descritos anteriormente siguen una distribución normal, se construyó la gráfica probabilística para cada una de las propiedades mecánicas. Los gráficos de la figura 7 señalan tendencia lineal en todos los casos, con ello se confirma la normalidad de las propiedades mecánicas de los hilados texturizados en estudio.

**Ajuste del modelo normal usando el algoritmo de Guggenheim**

Usando ahora el histograma de alargamiento del hilado texturizado (figura 6), se procede a ajustar el modelo normal a través del algoritmo de Guggenheim, para ello se construye el arreglo rectangular del mismo nombre (tabla II), en donde “ $\tau$ ” de 2.25 es la constante de desplazamiento.

Tabla II. Arreglo rectangular de Guggenheim.

Alargamiento (%) $x$	Alargamiento (%) $x'$	Frec. $f$	Frec. $f'$	$\tau$
25.281	27.531	5	57	2.25
25.844	28.094	18	50	2.25
26.406	28.656	43	26	2.25
26.969	29.219	49	2	2.25

Según indica la expresión (15) obtenida del algoritmo de Guggenheim, relacionando los datos experimentales de las columnas “ $x$ ” contra los datos de la columna transformación  $Ln(f'/f)$  contenidos en la tabla II, se llega a la forma lineal del modelo normal, donde los parámetros de la recta son:

$$m=-3.27443797, b=85.483064, r=-0.98651145 \quad (21)$$

En la figura 8 se ilustra la forma lineal del modelo normal obtenido a través del algoritmo de Guggenheim.

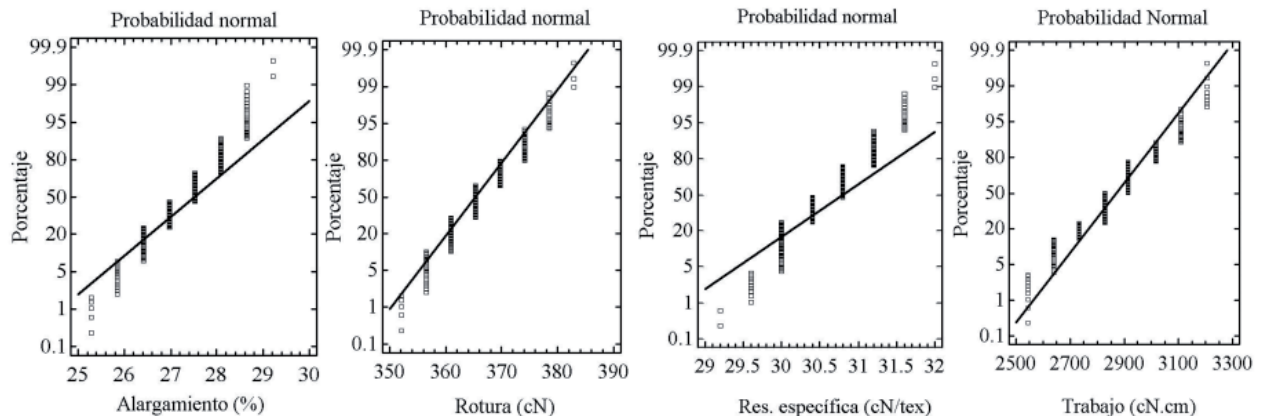


Fig. 7. Gráficos probabilísticos realizados sobre los datos de las propiedades mecánicas de los hilados texturizados en estudio.



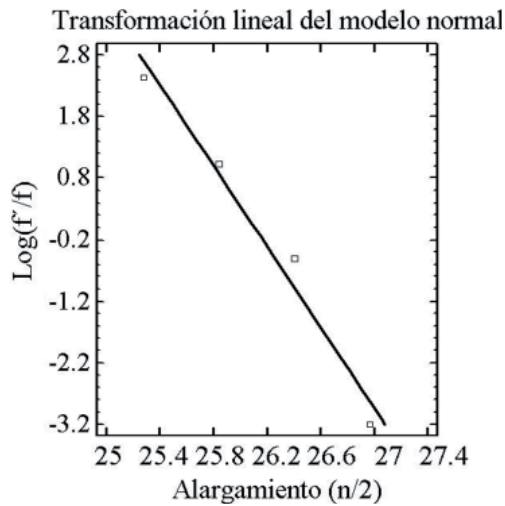


Fig. 8. Transformación lineal del modelo normal usando el algoritmo de Guggenheim.

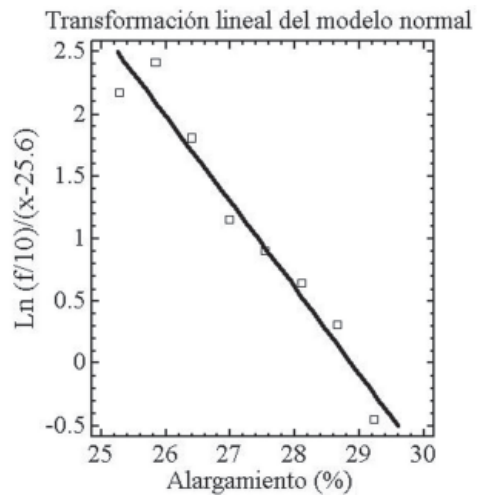


Fig. 9. Transformación lineal del modelo normal usando la técnica del punto conocido.

Sustituyendo los valores (21) en las expresiones (16) y calculando el promedio del parámetro “A” se llega al modelo numérico-funcional siguiente:

$$f=71.3553251*exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-27.2311791}{0.82893958}\right)^2\right) \quad (22)$$

### Ajuste del modelo normal usando la técnica del punto conocido

Usando el histograma de frecuencias anterior, se escoge un punto a voluntad, éste es llamado punto conocido:

$$P_k(25.6, 10)$$

De acuerdo a la expresión (19) al relacionar los datos de la columna “x” contra la columna de transformación “ $Ln(f/f_k)/(x-x_k)$ ” de la tabla I, se obtiene la forma lineal del modelo normal; aplicando regresión simple a ambas columnas, conduce a la pendiente de la recta, la intersección al origen y al coeficiente de correlación siguientes:

$$m=-0.68901168, b=19.8964441, r=-0.9762120 \quad (23)$$

En la figura 9 se grafica la forma lineal del modelo normal a través de la técnica del punto conocido.

Sustituyendo los valores (23) en las expresiones (20), y calculando la media del parámetro “A” para todos los puntos experimentales, se llega a la expresión numérico-funcional siguiente:

$$f=67.0670861*exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-27.238394}{0.85186684}\right)^2\right) \quad (24)$$

En la tabla III aparece la transformación lineal del modelo normal usando diversos puntos escogidos a voluntad, sobre el histograma de alargamiento a la rotura de la figura 6.

Tabla. III. Parámetros de la transformación lineal en relación al punto conocido.

Parámetros de la transformación lineal			
Punto conocido	<i>m</i>	<i>b</i>	<i>r</i>
P <sub>1</sub> (25.6, 10)	-0.68901168	19.8964441	-0.97621200
P <sub>2</sub> (26.1, 28)	-0.69633293	19.6985405	-0.98481027
P <sub>3</sub> (26.5, 44)	-0.61268253	17.0169817	-0.93171892
P <sub>4</sub> (27.1, 52)	-0.57999802	15.9362485	-0.93415762
P <sub>5</sub> (27.8, 54)	-0.66753517	17.9587553	-0.91640908
P <sub>6</sub> (28.3, 40)	-0.82028736	21.7040347	-0.91363279

Los parámetros de la recta, es decir la pendiente y la intersección al eje contenidos en la tabla anterior, permiten calcular estimadores para los parámetros del modelo normal y su correspondiente coeficiente de determinación del modelo no lineal, como se señala en la tabla IV:



Tabla. IV. Parámetros del modelo normal en relación al punto conocido.

Parámetros del normal				
Punto	A	$\mu$	$\sigma$	$R^2(\%)$
P <sub>1</sub> (25.6, 10)	67.0670861	27.2383940	0.85186684	89.2077639
P <sub>2</sub> (26.1, 28)	68.0564887	27.1944844	0.84737673	86.7756114
P <sub>3</sub> (26.5, 44)	60.8176157	27.1372752	0.90337331	84.3432466
P <sub>4</sub> (27.1, 52)	57.2222048	27.2881500	0.92847685	90.9818799
P <sub>5</sub> (27.8, 54)	66.7016193	27.2881500	0.86546184	92.2871596
P <sub>6</sub> (28.3, 40)	90.5950377	27.3795313	0.78073202	75.4719482

La mayor bondad de ajuste del modelo normal se alcanza con el punto P<sub>5</sub> con un coeficiente de determinación del modelo normal del 92.620597%.

### Ajuste del modelo normal usando el método Marquardt

Los estimadores del modelo normal contenidos en la tabla IV se obtuvieron por la técnica del punto conocido, éstos fueron optimizados por el método Marquardt llegando a los valores de la tabla V.

Tabla. V. Optimización del modelo normal a través del método Marquardt.

Parámetros del normal				
Punto conocido	A	$\mu$	$\sigma$	$R^2(\%)$
P <sub>1</sub> (25.6, 10)	59.16320	27.35480	0.985904	94.92840
P <sub>2</sub> (26.1, 28)	59.1790	27.35470	0.985852	94.92830
P <sub>3</sub> (26.5, 44)	59.17040	27.35490	0.983880	92.92840
P <sub>4</sub> (27.1, 52)	59.15860	27.35520	0.986389	94.92840
P <sub>5</sub> (27.8, 54)	59.18850	27.35470	0.985390	94.92830
P <sub>6</sub> (28.3, 40)	59.18390	27.35470	0.985584	94.92830

Los resultados obtenidos al ajustar el modelo normal con las tres técnicas numéricas se resumen en las tablas VI y VII.

Tabla. VI. Valores numéricos del modelo normal usando diversas técnicas de ajuste numérico.

Modelo normal				
Método	A	$\mu$	$\sigma$	$R^2(\%)$
Guggenheim	71.35533	27.23118	0.828939	86.80643
Punto conocido*	66.70162	27.28815	0.865462	92.28716
Marquardt	59.16320	27.35480	0.985904	94.92840

Tabla. VII. Ajuste del modelo normal usando la técnica del punto conocido y método Marquardt.

Modelo normal					
Propiedad	Técnica usada	Valores numéricos de los parámetros			$R^2(\%)$
		A	$\mu$	$\sigma$	
Alargamiento (%) Pk(26.8, 48)	Guggenheim	71.35533	27.23118	0.828939	86.806434
	Punto conocido	66.70162	27.28815	0.8654620	92.287160
	Marquardt	59.17360	27.35450	0.985521	94.928200
Resistencia (cN) Pk (360, 45)	Guggenheim	67.19573	366.4439	6.630232	94.220434
	Punto conocido	73.25519	366.2167	6.426366	92.332733
	Marquardt	62.15830	365.9130	7.185990	96.179900
Resistencia específica (cN/tex) Pk(30.3, 50)	Guggenheim	74.14017	30.64599	0.545236	85.988586
	Punto conocido	59.60628	30.58253	0.603040	80.784811
	Marquardt	64.83650	30.60590	0.638729	89.590500
Trabajo (cN.cm) Pk (2800, 50)	Guggenheim	55.16861	2870.825	175.1637	73.740613
	Punto conocido	65.26364	2901.523	163.5170	74.286635
	Marquardt	57.27250	2874.950	163.9150	80.659100

## CONCLUSIONES

Las técnicas de transformación lineal para resolver modelos no lineales han sido tratadas ampliamente. En este trabajo se probaron el algoritmo de Guggenheim y la técnica del punto conocido, aplicados a un modelo normal.

El algoritmo de Guggenheim es antiguo, pero continúa vigente por su versatilidad en modelos no lineales. En cuanto a la técnica del punto conocido, aparentemente no hay referencia de ella para esta aplicación en los libros de estadística.

En este trabajo se usaron datos experimentales, de hilados texturizados de poliéster, para probar la técnica, los cuales se presentaron como: histogramas del alargamiento (%), resistencia (cN), resistencia específica (cN/tex) y trabajo a la rotura (cN.cm).

Se demostró que la transformación lineal del modelo normal leyendo un punto a voluntad sobre el histograma unimodal de moda centrada en análisis da una bondad de ajuste que depende de la elección de dicho punto. Los resultados de esta técnica, optimizados y ajustados por el método iterativo Marquardt, resultan comparables con el algoritmo de Guggenheim, y satisfactorios.

## REFERENCIAS

1. Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G.; (2002), Introducción al análisis de regresión lineal, Primera edición, Ed. CECSA, México, 373-379.
2. Guillén, G., Islas A. M.; (2005), El modelo de campana de Phillips como función densidad de muestra en ingeniería textil, Revista de la Industria Textil, No. 424, 78-82. España.
3. Guggenheim, E. S., (1926), Phil. Mag., 1, 538.
4. Vangheluwe, L., (1992), Study of the Time Dependent Mechanical Properties of Yarns for Weaving, Doctoral Thesis, University of Ghent, Belgium.
5. 21° IFATCC Congreso Internacional (2008), Aplicación de diversas técnicas de ajuste numérico al estudio de la viscoelasticidad de hilados textiles, AEQCT, Barcelona España.
6. A Manugistics Products; (2000), Statgraphics Plus, Statgraphics Co.
7. Hearle, J.W.S, Hollick, L. & Wilson, D. K.; (2000), Yarn Texturing Technology, The Textile Institute, 1-8. England.
8. ASTM Standard; (1992), D:2256-90, Annual Books of ASTM Standars, Section 7 (textiles), Volumen 07.01,596.

**Ingenierías**  
en línea

A TEXTO COMPLETO  
DESDE EL NÚMERO 1

CONSULTA EN:  
<http://ingenierias.uanl.mx>