

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS  
EN UN OLIGOPOLIO MIXTO CON LA FUNCIÓN DE  
LA DEMANDA DISCONTINUA**

**PRESENTA**

**EDITH SALINAS DE LEÓN**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN  
CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**JULIO, 2016**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS  
EN UN OLIGOPOLIO MIXTO CON LA FUNCIÓN DE  
LA DEMANDA DISCONTINUA**

**PRESENTA**

**EDITH SALINAS DE LEÓN**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN  
CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**JULIO, 2016**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**  
**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS  
EN UN OLIGOPOLIO MIXTO CON LA FUNCIÓN DE  
LA DEMANDA DISCONTINUA**

**PRESENTA**

**EDITH SALINAS DE LEÓN**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN  
CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO**

**JULIO 2016**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**  
**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

Los miembros de este comité recomendamos que la tesis: Equilibrios con variaciones conjeturadas en un oligopolio mixto con la función de la demanda discontinua, presentada por la Lic. Edith Salinas de León, sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El comité de Tesis

---

Dra. Nataliya Kalashnykova  
Asesor

---

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco

Co-asesor

---

Dr. José Fernando Camacho Vallejo

Revisor

---

Dr. José Fernando Camacho Vallejo

Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Revisión de literatura . . . . .	4
1.2. Motivación . . . . .	10
1.3. Objetivo . . . . .	12
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	12
<b>2. Especificación del modelo</b>	<b>14</b>
<b>3. Equilibrio Exterior</b>	<b>19</b>
<b>4. Equilibrio Interior</b>	<b>53</b>
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>60</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	60
5.2. Trabajo futuro . . . . .	61
<b>6. Anexo</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Actualmente, en México, como en todo el mundo, la mayoría de los mercados existentes son oligopolios. Se han hecho numerosos modelos para estudiar tales mercados. En los últimos años se ha vuelto más y más popular la investigación de patrones de comportamiento de los agentes en los mercados mixtos, los cuales cuentan con una compañía o firma (agente) pública, la cual, en contraste con los agentes privados, no maximiza la función de su ganancia neta sino una función de beneficio de otra naturaleza.

Los ejemplos de oligopolios mixtos son muy comunes en los Estados Unidos, tanto en las industrias de paquetería como en las de entrega nocturna. Los oligopolios mixtos son también comunes en el este de Europa y la antigua Unión Soviética, donde la competencia entre las empresas públicas y privadas ha existido o aún existe en muchas industrias como la banca, préstamos hipotecarios, seguros de vida, líneas aéreas, telecomunicaciones, gas natural, energía eléctrica, ferrocarril, automóviles, siderurgia, educación, hospitales, atención sanitaria, radiodifusión, y servicios de entrega.

## 1.1. Revisión de literatura

En los trabajos [1], [2] y [3] se considera la firma que maximiza la función llamada beneficio social. En los trabajos [4], [5], [6] y [7] se maximiza la función de ingresos por trabajador llamada la función laboral. En los trabajos [8] y [9] examinan el tercer tipo de oligopolio mixto donde uno de los agentes busca maximizar la combinación convexa de las funciones de beneficio social y utilidad neta. En el trabajo [10] se analiza un oligopolio mixto, y supone que la empresa pública maximiza una función de demanda creciente, sujeta a una restricción de equilibrio y concluye que cuando un oligopolio mixto es viable, la producción, los costos y el bienestar social son lo mismo con y sin la firma pública. En el trabajo [11] se examina el conjunto de fusiones en un modelo de oligopolio mixto. La presencia de una empresa pública reduce el conjunto de las fusiones en las que dos empresas privadas pueden beneficiarse hábilmente si se fusionan. El trabajo muestra que siempre existe margen para que las fusiones aumenten sus ganancias y también el aumento del bienestar. Curiosamente, estas fusiones a menudo incluyen la privatización.

Los primeros ejemplos de los modelos de oligopolio mixto se pueden encontrar en [12], [13] y [14]. En [12] y [13] los autores analizan industrias con productos homogéneos y estructuras de costos idénticas para cada compañía en las que la capacidad productiva está concentrada en pocas firmas privadas. Suponen que las compañías privadas establecen su producción actuando como un monopolio conjunto y comparan el equilibrio obtenido con el resultado de suponer que una de las compañías privadas es comprada por el gobierno. Concluyen que el equilibrio en esta última situación sería más benéfico para los consumidores, con un menor precio y una mayor cantidad de producción. En [14] los autores analizan la existencia de una firma pública que maximiza el bienestar público y que compite con firmas privadas en un mercado de un bien homogéneo. La firma pública es dominante en el mercado y el gobierno la utiliza como herramienta de regulación del mercado. Sugieren que

el equilibrio alcanzado con la participación de una compañía pública en esas circunstancias sería similar al que existiría si se regularan los precios en esa industria. Con esto se aseguran mayores beneficios para los consumidores que si sólo existieran firmas privadas en el mercado.

En los trabajos previamente citados los autores investigan el equilibrio en sentido de Cournot o Stackelberg. En el equilibrio de Cournot, su nombre dado por los trabajos de Antoine Augustin Cournot, en [15] y [16], las firmas buscan maximizar sus propios beneficios y en base a ello toman su decisión, sin saber la decisión que tomaron las otras firmas. Entre las características más comunes del equilibrio de Cournot son:

1. Existen más de una firma de un bien homogéneo.
2. El número de firmas es fijo.
3. Ninguna firma está aliada con otra, es decir cada firma supone que sólo los cambios de su volumen de producción afectarán el volumen total del mercado.
4. Las firmas son racionales, es decir, buscarán maximizar sus beneficios individualmente y no tomarán decisiones que podrían llevarlos a la bancarrota.

El equilibrio de Stackelberg, obtiene su nombre por los trabajos de Heinrich Freiherr von Stackelberg, en [15] y [16] se menciona que no necesariamente las firmas eligen al mismo tiempo los volúmenes de producción, sino que la firma que más impacto tiene en el mercado elige su volumen de producción. A ésta firma que tiene mayor impacto en el mercado se le llama firma “líder”. Luego de que el líder escoge su volumen, las demás firmas que tienen un peso menor en el mercado escogen su volumen de producción tomando como base la decisión de la firma “líder”, a éstas firmas se les llama firmas “seguidoras”. El primer modelo de Stackelberg fue visto



en un duopolio. El líder siempre juega primero; por lo tanto, los seguidores siempre saben cuál es la primera jugada. El líder sabe que los seguidores observan su acción para determinar la suya y también sabe que los seguidores no tienen la opción de cambiar las reglas del juego (es decir, no pueden transformar el equilibrio de Stackelberg en otro tipo).

Los equilibrios de variación conjeturada (CVE por sus siglas en inglés) fueron definidos en [17] y [18] en donde definen otro concepto para entender y dar una solución posible a los juegos estáticos. En este concepto los jugadores eligen su estrategia óptima tomando en cuenta que la estrategia de cada rival es una función conjeturada de su propia estrategia.

En los trabajos [19], [20] y [21] se investigaron nuevas formas de definir los equilibrios de variaciones conjeturadas para los modelos de oligopolio clásico. Cuando se estudia el mercado de oligopolios en el enfoque de los modelos clásicos, en adición a las preguntas de la existencia de un equilibrio y su búsqueda, se pone mucha atención usualmente al compararlo con el equilibrio de Cournot y de competencia perfecta. En los trabajos [19], [20] y [21] ambos modelos fueron incluidos en una clase uniforme de modelos de oligopolios en los cuales el grado de influencia de cada agente se modela por un parámetro especial (coeficiente de influencia). En lugar de la hipótesis clásica de Cournot, se asumió que cada productor usó las variaciones conjeturales del volumen total de mercado en función de variación de su propia producción como se muestra abajo:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i)\omega_i(G, q_i)$$

en donde

- $G$  es el volumen total de producción del mercado;
- $q_i$  es la cantidad producida actualmente por el productor  $i$ ;
- $\eta$  es la cantidad esperada para producir por el productor  $i$ ;
- $G_i(\eta)$  es el volumen total conjeturado por el productor  $i$  por el cambio de su volumen de producción  $q_i$  a  $\eta$ .

La función de la conjetura  $\omega_i(G, q_i)$  en la fórmula anterior representa el coeficiente de influencia del productor  $i$ . En el modelo clásico de Cournot este coeficiente es igual a 1 y en el modelo de competencia perfecta es igual a cero. Bajo las suposiciones generales en [19], [20] y [21] han sido demostrados la existencia y unicidad de dichos equilibrios.

Un enfoque completamente nuevo fue propuesto en [22]. Se supone que cada firma no hace conjeturas acerca de la variación del volumen total en función de variaciones de su propio volumen de producción, pero hace conjeturas acerca de las variaciones del precio de mercado en función de sus variaciones infinitesimales de la producción. Con este cambio la conjetura fue denotada por  $\nu_i$  y una relación simple con la notación anterior  $\omega_i$ :

$$\omega_i = \frac{-\nu_i}{p'(G)}, i = 1, 2, \dots, n$$

Una vez que ya se conocen las conjeturas de todas las firmas (las cuales se les llaman coeficientes de influencia), cada firma realiza un procedimiento de verificación y comprueba si su coeficiente de influencia es coherente con los demás. La situación cuando los coeficientes de influencia de todas las firmas son coherentes entre si se considera naturalmente como un equilibrio, estos coeficientes de influencia se llaman

consistentes y el equilibrio con conjeturas consistentes se llama equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE por sus siglas en inglés).

Cuando cada agente supone que sólo él puede cambiar su volumen de producción  $q_i$  y los demás no, es decir, su conjetura es  $\omega_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1$  se habla de un modelo clásico de Cournot. En contraste con el modelo de Cournot, en el caso de CCVE, los coeficientes de influencia  $\nu_i$  se encuentran como una solución de un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, en el caso cuando la función de la demanda  $G(p)$  es continuamente diferenciable con la derivada negativa  $G'(p) < 0$  y las funciones de costos son cuadráticas de la forma:

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2}a_iq_i^2 + b_iq_i$$

donde

$$a_i > 0, b_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$$

se genera el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\nu_i = \frac{1}{\sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{1}{\nu_j + a_j} - G'(p)}, i = 1, \dots, n$$

Los resultados en [22] fueron extendidos en los trabajos [1], [23], [24], [25], [26], [27] y [28], en donde consideran un oligopolio o duopolio mixto que fabrican un producto homogéneo con funciones de costo cuadráticas

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2}a_iq_i^2 + b_iq_i$$

donde  $a_i > 0, b_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$  y  $q_i$  es el volumen de producción de la firma  $i$ . La firma  $i = 0$  es considerada como la firma pública y las otras firmas  $i = 1, \dots, n$  como privadas. La firma pública maximiza el excedente social doméstico:

$$S(p, q_0, q_1, \dots, q_n) = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2$$

o la función que es la combinación convexa del excedente social doméstico y la utilidad neta

$$S(p, q_0, q_1, \dots, q_n) = \beta \left( \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2 \right) + (1 - \beta) [p \cdot q_0 - f_0(q_0)]$$

en donde  $0 < \beta \leq 1$  y las firmas privadas buscan maximizar sus ganancias netas  $\pi_i$ :

$$\pi_i(p, q_i) = p q_i - f_i(q_i)$$

En [1], [23]-[28] bajo las suposiciones generales se demuestra la existencia y unicidad del equilibrio exterior para cualquier coeficiente de influencia  $\nu_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$  y la existencia del equilibrio interior o consistente.

## 1.2. Motivación

En los artículos [1], [23]-[28] la función de la demanda se supone continuamente diferenciable. Seguramente, esta suposición reduce las áreas de aplicación de los modelos propuestos en [1], [23]-[28]. Por ejemplo, en ocasiones en el mercado pasan situaciones en las cuales el volumen del mercado crece pero el precio del mercado se mantiene igual. (Fig. 1)

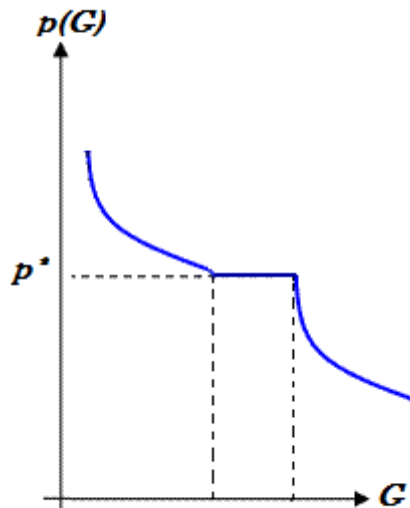


Fig. 1

En esta situación la función de la demanda  $G(p)$  es discontinua y tiene un salto en el punto  $p^*$ . ( Fig. 2)

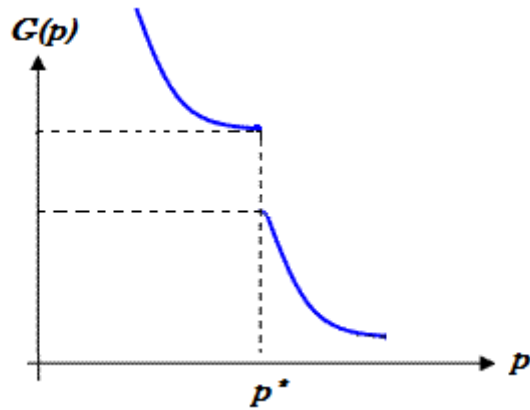


Fig. 2

A causa de ésto, en esta tesis, relajamos la suposición anterior y permitimos que la función de la demanda tenga un número finito de puntos, en los cuales la derivada y la función misma pueden sufrir una ruptura.

Vale la pena comentar que la mayoría de las publicaciones proponen modelos en los cuales suponen que la función de la demanda es continuamente diferenciable y que no hay muchas publicaciones con la función de la demanda discontinua, ya que la discontinuidad siempre implicará un aumento significativo de la complejidad de los pasos de la demostración de la existencia del equilibrio. Por ejemplo, en [29] se estudia un modelo de oligopolio mixto con la demanda discontinua y cuenta con una firma pública, la cual maximiza la función de ingresos por trabajador, llamada la función laboral. Para la demostración de la existencia de equilibrio en la tesis [29] se construye una función convexa y cóncava, de tal manera que las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del punto silla coinciden con las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del equilibrio en el modelo propuesto en [29].

En esta tesis la firma pública maximiza la función de beneficio social y para la demostración de la existencia del equilibrio se usa una herramienta matemática

diferente de la que se hace usó en [29] : la función de la demanda discontinua se aproxima de un modo especial por funciones continuamente diferenciables y utilizando los resultados demostrados en la publicación [1] se construye la sucesión de los equilibrios que convergen y se demuestra que el límite coincide con el equilibrio para el modelo propuesto en esta tesis.

### 1.3. Objetivo

Bajo las condiciones generales en esta tesis se busca:

1. Formalmente demostrar la existencia y unicidad del equilibrio con variaciones conjeturadas, para cualquier conjunto dado de conjeturas factibles, el cual llamamos un equilibrio exterior;
2. Basándonos sobre la demostración de la existencia y unicidad del equilibrio exterior y la aplicación del procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia propuesto en [22], justificar el criterio de consistencia formulado en [30];
3. Formalmente demostrar la existencia del equilibrio interior, el cual es un equilibrio exterior con coeficientes de influencia, los cuales satisfacen al criterio de consistencia.

### 1.4. Estructura de la tesis

En esta sección se describe en forma detallada la estructura de la tesis.

En el capítulo 1 se hace una breve introducción de los oligopolios mixtos, además de realizar la revisión de literatura sobre este tema. Se explica la motivación y objetivo de este trabajo de tesis. En el capítulo 2 de forma más detallada se habla

sobre la especificación de nuestro modelo. En el capítulo 3 se define el equilibrio exterior y se demuestra su existencia y unicidad. En el capítulo 4 de igual manera se define y demuestra la existencia del equilibrio interior. En el capítulo 5 se muestran las conclusiones sobre la tesis y se describe el trabajo futuro.

Por último se agregó un anexo en donde se consideran algunos resultados teóricos que son necesarios para la demostración del equilibrio interior.



# Capítulo 2

## Especificación del modelo

Consideraremos al menos tres productores en un mercado de oligopolio mixto de un producto homogéneo con funciones de costo  $f_i(q_i)$ , donde  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \leq 2$  y  $q_i$  es la producción del productor  $i$ .

Consideramos la demanda de dos tipos: pasiva y activa. La demanda pasiva es esta descrita por la función  $G(p)$ , donde el argumento  $p$  es el precio propuesto por los productores. La demanda activa  $D$  es no negativa y no depende del precio. La función de demanda se asume no negativa y no creciente, y también continuamente diferenciable excepto por un número finito de puntos en los que la función  $G(p)$  y su derivada  $G'(p)$  pueden ser discontinuas. Por ello, denotamos como  $G(p)$  la parte izquierda del límite de la función en el punto  $p$ , mientras el lado derecho se denota como  $g(p)$ .

Es lógico que  $G(p) = g(p)$  en los puntos de continuidad mientras  $G(p) > g(p)$  en los puntos de discontinuidad. En el último caso,  $G(p)$  puede considerarse como la cantidad potencial de mercado, y  $g(p)$  como el límite inferior de la fuente de la prevención de la subida de precios.

En este caso la condición del balance del mercado es:

$$g(p) + D \leq \sum_{i=0}^n q_i \leq G(p) + D \quad (2.1)$$

Para este modelo asumiremos los siguientes supuestos.

**A1** La función de demanda  $G(p)$  está definida para los precios  $p \in (0, +\infty)$ , es no creciente y continuamente diferenciable por partes. En cada número finito de los puntos de discontinuidad existen límites por la derecha y por la izquierda tanto para la función como para su derivada.

**A2** Para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  la función de costos  $f_i(q_i)$  es cuadrática, es decir,

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2}a_i q_i^2 + b_i q_i \quad (2.2)$$

donde

$$b_0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} b_i \quad (2.3)$$

Los productores  $i, i = 0, 1, \dots, n$  son privados y eligen su volumen de producción  $q_i$  maximizando su función de utilidad neta

$$\pi_i(p, q_i) = p q_i - f_i(q_i) \quad (2.4)$$

El productor  $i = 0$ , llamado público, selecciona su volumen de producción  $q_0$  maximizando la función que es la combinación convexa de la función de beneficio social y utilidad neta

$$S(p, q_0, q_1, \dots, q_n) = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p\left(\sum_{i=1}^n q_i\right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2 \quad (2.5)$$

Ahora diremos que cada agente (público y privado) asume que la decisión de sus volúmenes de producción afectará el precio  $p$ . En este caso la condición necesaria de optimalidad de primer orden para el agente público ( $i = 0$ ) toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial S}{\partial q_0} = p - \left[ \sum_{i=1}^n q_i \right] \frac{\partial p}{\partial q_0} - b_0 - a_0 q_0 \quad (2.6)$$

y para los agentes privados ( $i = 1, \dots, n$ )

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f'(q_i) \quad (2.7)$$

Para describir el comportamiento de los agentes necesitamos evaluar el comportamiento de la derivada  $\frac{\partial p}{\partial q_i} = -\nu_i$  antes de la dependencia de  $p$  sobre  $q_i$ . Introduciremos el signo negativo con el objetivo de poder trabajar con los valores no negativos de  $\nu_i$ . La dependencia  $p$  respecto a  $q_i$  debe probar (al menos localmente) concavidad del beneficio del  $i$  –ésimo agente en función de su propia producción  $q_i$ . De otra

manera no podemos garantizar que el beneficio se maximice (pero no minimice). Como hemos supuesto que las funciones de costo  $f_i(q_i)$  son cuadráticas y estrictamente convexas, entonces, para la concavidad de la función  $\pi_i(q_i), i = 1, \dots, n$  es suficiente obtener la concavidad del producto  $p \cdot q_i$ . Si asumimos que el coeficiente  $\nu_i$  (al que llamamos coeficiente de influencia del agente  $i$  –ésimo) es no negativo y constante, entonces, la dependencia local de la utilidad neta  $\pi_i(q_i)$  respecto al volumen de producción  $\eta_i$  tiene la forma siguiente  $[p - \nu_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - f_i(\eta_i)$  y la condición (2.7) para  $\eta_i = q_i$  se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{cases} p = \nu_i q_i + b_i + a_i q_i, & \text{si } q_i > 0 \\ p \leq b_i, & \text{si } q_i = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

y se usa como la condición suficiente.

Similarmente, las conjeturas de la dependencia local de la función de beneficio de la compañía pública ( $i = 0$ ) respecto a su volumen de producción  $\theta_0$  están dadas de la forma siguiente:

$$\int_0^{\eta_0 + \sum_{i=1}^n q_i} p(x) dx - [p - \nu_0(\eta_0 - q_0)] \left( \sum_{i=0}^n q_i \right) - f'(\eta_0) \quad (2.9)$$

Lo que permite escribir la condición de optimalidad de primer orden cuando  $\theta_0 = q_0$  en la forma como sigue:

$$\begin{cases} p = -\nu_0 \sum_{i=0}^n q_i + b_0 + a_0 q_0, & \text{si } q_0 > 0 \\ p \leq -\nu_0 \sum_{i=0}^n q_i + b_0, & \text{si } q_0 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

y usar (2.10) como la condición suficiente. Si las conjeturas de los agentes son dadas exógenamente tal como se encuentra en los trabajos [20] y [21], los valores, en general, dependen del volumen de producción del agente  $i$  y del precio del mercado, es decir, son funciones de  $q_i$  y  $p$ , pero, puede ser, que  $\nu_i$  depende también del volumen total del mercado. Sin embargo, en este trabajo usaremos el enfoque propuesto en [22], donde las conjeturas  $\nu_i$  están incluidas en el equilibrio y son determinadas simultáneamente con el precio  $p$  y los volúmenes de producción  $q_i$ . En el último caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados sólo por el equilibrio. Más adelante tal equilibrio es descrito por el vector  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  y se llama equilibrio *interior*.

# Capítulo 3

## Equilibrio Exterior

Es necesario definir el siguiente concepto: equilibrio *exterior* con coeficientes de influencia  $\nu_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$  dados de forma exógena.

**Definición 3.1.** *El conjunto  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  es llamado equilibrio *exterior* para los coeficientes de influencia  $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  dados si el mercado es balanceado, es decir, la condición (2.1) se satisface, y para cada agente las condiciones (2.8) y (2.10) son válidas.*

A continuación vamos a considerar sólo el caso en el que el conjunto de productores está fijo, es decir, no depende de los valores de los coeficientes de influencia  $\nu_i$ . Para eso suponemos lo siguiente:

**A3** Para el precio  $p_0 = \max_{(1 \leq j \leq n)} b_j$ , la siguiente desigualdad se cumple:

$$\sum_{i=0}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} < g(p_0) \quad (3.1)$$

La suposición anterior junto con las suposiciones **A1** y **A2** garantiza que para todos los valores no negativos de  $\nu_i, i = 1, \dots, n$  y para cualquier valor de  $\nu_0 \in [0, \bar{\nu}_0)$

donde se cumple

$$0 < \bar{\nu}_0 = \begin{cases} a_0 \left[ \frac{g(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i}} \right] & \text{si } \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} > 0 \\ +\infty & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (3.2)$$

Existe una solución óptima para las condiciones (2.8) y (2.10) que satisfacen la ecuación de balance (2.1), es decir, un equilibrio exterior. Además, las condiciones (2.1), (2.8) y (2.10) se cumplen simultáneamente si y sólo si  $p > p_0$ , esto es, si y sólo si todos los volúmenes de producción  $q_i$  son estrictamente positivos para  $i = 1, \dots, n$ . En efecto, si  $p > p_0$ , entonces las desigualdades  $p \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  dadas por (2.8) y  $p \leq -\nu_0 \sum_{i=1}^n q_i + b_0$  dadas por (2.10) no son posibles, lo que significa que todos los  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  son positivos. Si todos volúmenes de producción  $q_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces para las condiciones dadas por (2.8) tenemos que

$$p = \nu_i q_i + b_i + a_i q_i > b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

entonces

$$p > \max_{1 \leq j \leq n} b_j = p_0$$

**Teorema 3.2.** (Formulación del Teorema sin demostración esta en [30] ) Bajo las suposiciones anteriores **A1**, **A2** y **A3**, para  $D \geq 0$ ,  $\nu_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $\nu_0 \in [0, \bar{\nu}_0)$  existe un único equilibrio **exterior**  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ , el cual depende continuamente

de los parámetros  $(D, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$ . El precio del equilibrio  $p(D, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  es la función continua respecto a los parámetros y tiene las derivadas por la derecha y por la izquierda respecto a  $D$ , además se cumple  $p(D, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) > p_0$ , y

$$p'(D + 0) = \frac{1}{\frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} - G'(p + 0)}, \quad \text{si } \sum_{i=0}^n q_i = g(p) + D \quad (3.3)$$

$$p'(D - 0) = \frac{1}{\frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} - G'(p - 0)}, \quad \text{si } \sum_{i=0}^n q_i = G(p) + D \quad (3.4)$$

$$p'(D + 0) = 0, \quad \text{si } \sum_{i=0}^n q_i > g(p) + D \quad (3.5)$$

$$p'(D - 0) = 0, \quad \text{si } \sum_{i=0}^n q_i < G(p) + D \quad (3.6)$$

**Comentario:** conectamos los puntos de discontinuidad  $(p, G(p))$  y  $(p, g(p))$  con un pedazo de recta vertical y sobre el plano  $(p, G)$  obtenemos la curva  $L$  llamada la curva de demanda que contiene a los puntos  $(p, G)$  que satisfacen a las desigualdades  $g(p) \leq G \leq G(p)$ . Suponemos que en el pedazo de recta vertical de la curva  $L$ ,  $G'(p + 0) = -\infty$ , si  $G > g(p)$ , y  $G'(p - 0) = -\infty$ , si  $G < G(p)$ . Equilibrio exterior  $(p, q_1, \dots, q_n)$  define el punto  $(p, G) \in L$ , donde  $G = \sum_{i=0}^n q_i - D$ . Basándonos en las suposiciones mencionadas arriba, las fórmulas (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) del **Teorema 3.2** pueden ser reescritas de modo uniforme:

$$p'(D \pm 0) = \frac{1}{\frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} - G'(p \pm 0)} \quad (3.7)$$



Entonces,  $p'(D+0) \neq p'(D-0)$  sólo para los puntos de equilibrio que coinciden con los puntos de inflexión del gráfico de la curva  $L$ . Además si  $p'(D+0) < p'(D-0)$ , el punto de inflexión es cóncavo pero si  $p'(D+0) > p'(D-0)$  entonces el punto es convexo.

### **Demostración:**

Dadas las suposiciones **A1**, **A2** y **A3**, y para cada vector  $\nu$  de la forma siguiente;  $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)^T \geq 0$ , las condiciones de optimalidad (2.8) y (2.10) definen las respuestas óptimas de los productores, así como funciones  $q_i = q_i(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  continuamente diferenciables (con respecto a  $p$ ) definidas sobre el intervalo  $[p, +\infty)$  por las siguientes fórmulas explícitas:

$$q_0 = \frac{p - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{\nu_i + a_i} \quad (3.8)$$

y

$$q_i = \frac{p - b_i}{\nu_i + a_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

Las derivadas parciales de la función de respuesta óptima son positivas:

$$\frac{\partial q_0}{\partial p} = \frac{1}{a_0} + \frac{\nu_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \geq \frac{1}{a_0} \geq 0 \quad (3.10)$$

y

$$\frac{\partial q_i}{\partial p} = \frac{1}{\nu_i + a_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

La función de volumen de producción total  $Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \sum_{j=0}^n q_j(p; \nu_1, \dots, \nu_n)$  es continua y estrictamente creciente respecto a  $p$ . Acorde con la suposición **A3**,

$$Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) < g(p_0) \quad (3.12)$$

De hecho, de (3.8) y (3.9) tenemos que:

Si  $\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) &= \sum_{i=0}^n q_i(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \\ &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{\nu_i + a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{\nu_i + a_i} \\ &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{\nu_i + a_i} \\ &< \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{\bar{\nu}_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} \\ &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \left[ \frac{g(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i}} \right] \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} \\ &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + g(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0} \\ &= g(p_0) < G(p_0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si  $\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) &= \sum_{i=0}^n q_i(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \\ &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{\nu_i + a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{\nu_i + a_i} \\ &= \frac{p_0 - b_0}{a_0} < g(p_0) < G(p_0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Además la función de volumen de producción total  $Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  tiende a  $+\infty$  cuando  $p \rightarrow +\infty$ . Definimos

$$p_* = \sup\{p/Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \leq G(p) + D\} \quad (3.15)$$

Ya que las funciones  $q_i(p)$  son continuas y  $G(p)$  es continua de lado izquierdo entonces,  $Q(p_*) \neq G(p_*) + D$ . Como la función  $g(p)$ , la cual es el límite derecho de la función de la demanda, es la función continua de lado derecho. Entonces, se tiene que cumplir la desigualdad  $Q(p_*) \leq g(p_*) + D$  para algunos  $p > p_*$  entonces, tenía que ser cumplida la desigualdad siguiente  $Q(p_*) \leq g(p_*) + D \leq G(p_*) + D$ , lo que contradice la definición (3.15) para la magnitud  $p_*$ . Por eso,  $p_*$  y  $q_i^* = q_i(p_*)$  forman el equilibrio exterior. Para demostrar unicidad del equilibrio exterior, debemos mencionar, que los puntos de discontinuidad son aislados y su número es finito, entonces existe una vecindad del punto  $p_*$  tal que dentro de esta vecindad se cumple la igualdad  $G(p) = g(p)$  para  $p \neq p_*$ . Ya que  $Q(p)$  es monótona creciente y  $G(p)$  es la función no creciente, entonces dentro de esta vecindad  $Q(p) < g(p) + D$ , si  $p < p_*$ , y  $Q(p) > G(p) + D$ , si  $p > p_*$ . Es evidente, que estas desigualdades se cumplen y para los valores de  $p$  más lejanos del punto  $p_*$ . De tal modo el precio del equilibrio exterior es único y junto con el precio son únicos y los volúmenes de producción  $q_i^*$  para cada agente calculados por las fórmulas (3.8) y (3.9).

Para demostrar que el precio  $p$  del equilibrio exterior es continuamente diferenciable respecto a los parámetros  $(D, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  dividimos en dos partes la demostración, la primera es cuando el punto  $p_*$  es un punto donde la función es continua; la segunda es cuando el punto  $p_*$  es un punto en donde la función es dis-

continua.

La primera parte está demostrado en [1]. En el caso de tener la discontinuidad de la función  $G(p)$  en el punto  $p_*$  aproximamos  $G(p)$  por la función  $G_\varepsilon(p)$  no creciente continuamente diferenciable del modo siguiente:

$$G_\varepsilon(p) = \begin{cases} G(p) & \text{si } p \leq p_* - \varepsilon \\ G(p) & \text{si } p \geq p_* + \varepsilon \\ \frac{1}{2}d_1p^2 + \beta_1p + C_1 & \text{si } p_* - \varepsilon \leq p \leq p_* \\ \frac{1}{2}d_2p^2 + \beta_2p + C_2 & \text{si } p_* \leq p \leq p_* + \varepsilon \end{cases} \quad (3.16)$$

y además  $G_\varepsilon(p_* \pm \varepsilon) = G(p_* \pm \varepsilon)$ ,  $G'_\varepsilon(p_* \pm \varepsilon) = G'(p_* \pm \varepsilon)$ . Los coeficientes  $d_1, \beta_1, C_1, d_2, \beta_2, C_2$  los encontramos del sistema siguiente:

$$\frac{1}{2}d_1(p_* - \varepsilon)^2 + \beta_1(p_* - \varepsilon) + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{2}d_2(p_* + \varepsilon)^2 + \beta_2(p_* + \varepsilon) + C_2 = G(p_* + \varepsilon) \quad (3.18)$$

$$d_1(p_* - \varepsilon) + \beta_1 = G'(p_* - \varepsilon) \quad (3.19)$$

$$d_2(p_* + \varepsilon) + \beta_2 = G'(p_* + \varepsilon) \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{2}d_1p_*^2 + \beta_1p_* + C_1 = \frac{1}{2}d_2p_*^2 + \beta_2p_* + C_2 \quad (3.21)$$

$$d_1 p_* + \beta_1 = d_2 p_* + \beta_2 \quad (3.22)$$

De (3.19) despejamos  $\beta_1$

$$\beta_1 = G'(p_* - \varepsilon) - d_1(p_* - \varepsilon) \quad (3.23)$$

De (3.20) despejamos  $\beta_2$

$$\beta_2 = G'(p_* + \varepsilon) - d_2(p_* + \varepsilon) \quad (3.24)$$

Sustituimos (3.23) y (3.24) en (3.22) y despejamos  $d_1$

$$d_1 p_* + \beta_1 = d_2 p_* + \beta_2$$

$$d_1 p_* + G'(p_* - \varepsilon) - d_1(p_* - \varepsilon) = d_2 p_* + G'(p_* + \varepsilon) - d_2(p_* + \varepsilon)$$

$$\varepsilon d_1 + G'(p_* - \varepsilon) = -\varepsilon d_2 + G'(p_* + \varepsilon)$$

$$\varepsilon d_1 = -G'(p_* - \varepsilon) - \varepsilon d_2 + G'(p_* + \varepsilon)$$

$$d_1 = \frac{-G'(p_* - \varepsilon) - \varepsilon d_2 + G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= -d_2 + \frac{-G'(p_* - \varepsilon) + G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \\
d_1 &= -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.25) en (3.23) para despejar  $\beta_1$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= G'(p_* - \varepsilon) - \left( -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon) \\
\beta_1 &= G'(p_* - \varepsilon) + d_2(p_* - \varepsilon) - \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} (p_* - \varepsilon) \\
\beta_1 &= d_2(p_* - \varepsilon) + \frac{p_*}{\varepsilon} G'(p_* - \varepsilon) - \frac{G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} (p_* - \varepsilon) \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Sumamos y restamos el término  $\frac{G'(p_* - \varepsilon)\varepsilon}{\varepsilon}$  en ambos lados de (3.26) respectivamente

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= d_2(p_* - \varepsilon) + \frac{p_*}{\varepsilon} G'(p_* - \varepsilon) - \frac{G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} (p_* - \varepsilon) + \frac{G'(p_* - \varepsilon)\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{G'(p_* - \varepsilon)\varepsilon}{\varepsilon} \\
\beta_1 &= d_2(p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.25) y (3.27) en (3.17) para despejar  $C_1$

$$\frac{1}{2}d_1(p_* - \varepsilon)^2 + \beta_1(p_* - \varepsilon) + C_1 = G(p_* - \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + \\ & \left( d_2(p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \right) (p_* - \varepsilon) \\ & + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \end{aligned}$$

despejamos  $C_1$

$$\begin{aligned} & \left( d_2(p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \right) (p_* - \varepsilon) \\ & + \frac{1}{2} \left( -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_2(p_* - \varepsilon)^2 + G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + \frac{(p_* - \varepsilon)^2}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \\ & + \frac{1}{2} \left( -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_2(p_* - \varepsilon)^2 + G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + \frac{(p_* - \varepsilon)^2}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \\ & - \frac{1}{2} \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) \\ & - \frac{1}{2} \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& \quad + G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + C_1 = G(p_* - \varepsilon) \\
C_1 = & -\frac{1}{2} \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& \quad - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ahora, sustituyendo (3.24) en (3.18) para despejar  $C_2$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} d_2 (p_* + \varepsilon)^2 + \beta_2 (p_* + \varepsilon) + C_2 = G(p_* + \varepsilon) \\
& \frac{1}{2} d_2 (p_* + \varepsilon)^2 + [G'(p_* + \varepsilon) - d_2 (p_* + \varepsilon)] (p_* + \varepsilon) + C_2 = G(p_* + \varepsilon) \\
& \frac{1}{2} d_2 (p_* + \varepsilon)^2 + G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) - d_2 (p_* + \varepsilon)^2 + C_2 = G(p_* + \varepsilon) \\
& -\frac{1}{2} d_2 (p_* + \varepsilon)^2 + G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) + C_2 = G(p_* + \varepsilon) \\
C_2 = & G(p_* + \varepsilon) + \frac{1}{2} d_2 (p_* + \varepsilon)^2 - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Luego, sustituyendo (3.24), (3.25), (3.27), (3.28) y (3.29) en (3.21) para obtener el valor de  $d_2$



$$\frac{1}{2}d_1p_*^2 + \beta_1p_* + C_1 = \frac{1}{2}d_2p_*^2 + \beta_2p_* + C_2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right] p_*^2 \\ & + \left[ d_2(p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \right] p_* \\ & - \frac{1}{2} \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\ & - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon) = \frac{1}{2}d_2p_*^2 + [G'(p_* + \varepsilon) - d_2(p_* + \varepsilon)] p_* \\ & + G(p_* + \varepsilon) + \frac{1}{2}d_2(p_* + \varepsilon)^2 - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) \end{aligned}$$

Hacemos las operaciones correspondientes

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2}d_2p_*^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right] p_*^2 \\ & + d_2(p_* - \varepsilon)p_* + \left[ G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \right] p_* \\ & - \frac{1}{2}d_2(p_* - \varepsilon)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\ & - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon) = \frac{1}{2}d_2p_*^2 + G'(p_* + \varepsilon)p_* - d_2(p_* + \varepsilon)p_* \\ & + G(p_* + \varepsilon) + \frac{1}{2}d_2(p_* + \varepsilon)^2 - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) \end{aligned}$$

Ahora agrupamos terminos semejantes,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}d_2p_*^2 + d_2(p_* - \varepsilon)p_* - \frac{1}{2}d_2(p_* - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}d_2p_*^2 + d_2(p_* + \varepsilon)p_* \\
& - \frac{1}{2}d_2(p_* + \varepsilon)^2 = G'(p_* + \varepsilon)p_* + G(p_* + \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right] p_*^2 \\
& - \left[ G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \right] p_* \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& + G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)
\end{aligned}$$

Luego, simplificamos

$$\begin{aligned}
-\varepsilon^2 d_2 &= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right] \left[ -\frac{p_*^2}{2} + (p_* - \varepsilon)p_* - \frac{(p_* - \varepsilon)^2}{2} \right] \\
&+ G'(p_* + \varepsilon)p_* + G(p_* + \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) \\
&- G'(p_* - \varepsilon)p_* + G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon) \\
-\varepsilon^2 d_2 &= -\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] \\
&+ [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)] \\
d_2 &= \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ya que todos los coeficientes  $d_1$ ,  $\beta_1$ ,  $C_1$ ,  $\beta_2$ ,  $C_2$  están en términos del coeficiente  $d_2$  y (3.30) nos da el valor de  $d_2$ , a continuación hacemos las sustituciones necesarias

para encontrar el valor de los coeficientes  $d_1, \beta_1, C_1, \beta_2, C_2$ .

Ahora, sustituyendo (3.30) en (3.25) calculamos el valor de  $d_1$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -d_2 + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon^2} \\
 d_1 &= - \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \\
 d_1 &= \frac{-\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \\
 &\quad + \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} + \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \\
 d_1 &= \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \\
 &\quad + \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Después, sustituyendo (3.30) en (3.27) encontramos el valor de  $\beta_1$

$$\beta_1 = d_2(p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)]$$

$$\beta_1 = \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) + \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)]$$

$$\beta_1 = \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) - \frac{p_* - \varepsilon}{\varepsilon^2} [G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)] \varepsilon$$

$$\beta_1 = \left( -\frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)$$

$$\beta_1 = \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - 3G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon) \quad (3.32)$$

Luego, sustituimos (3.30) en (3.28) para calcular el valor de  $C_1$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \left( d_2 + \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)$$

Hacemos las sustituciones necesarias

$$C_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{G'(p_* - \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) (p_* - \varepsilon)^2 - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)$$

Multiplicamos y dividimos por  $\varepsilon$  el termino  $\left( \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon} \right)$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{1}{2} \left( \frac{-\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right. \\
& + \left. \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)
\end{aligned}$$

Realizamos las operaciones necesarias

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right. \\
& + \left. \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{1}{2} \left( \frac{-\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) + 3G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* - \varepsilon)^2 \\
& - G'(p_* - \varepsilon)(p_* - \varepsilon) + G(p_* - \varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Sustituyendo (3.30) en (3.29) para calcular el valor de  $C_2$

$$C_2 = G(p_* + \varepsilon) + \frac{1}{2}d_2(p_* + \varepsilon)^2 - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & G(p_* + \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right. \\ & \left. - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* + \varepsilon)^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sustituyendo(3.30) en (3.24) para calcular el valor de  $\beta_2$

$$\beta_2 = G'(p_* + \varepsilon) - d_2(p_* + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & G'(p_* + \varepsilon) \\ & - \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right. \\ & \left. - \frac{[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right) (p_* + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para continuar con la demostración del Teorema, sustituimos (3.8) y (3.9) en la función de volumen total de producción  $Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \sum_{i=0}^n q_i(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$

$$\begin{aligned}
Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) &= \sum_{i=0}^n q_i(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \\
&= \frac{p - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{\nu_i + a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{\nu_i + a_i} \\
&= \frac{p - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{\nu_i + a_i} \\
&= \frac{p - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{p}{\nu_i + a_i} - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \right] \\
&= \frac{p - b_0}{a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{p}{\nu_i + a_i} - \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \\
&= \frac{p}{a_0} - \frac{b_0}{a_0} + p \left[ \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \right] - \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \\
&= \frac{p}{a_0} + p \left[ \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \right] - \frac{b_0}{a_0} - \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \\
&= p \left[ \frac{1}{a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \right] - \left[ \frac{b_0}{a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \right] \\
&= p \left[ \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \right] - \left[ \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \right]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Sean

$$M = \left[ \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \right] \quad \text{y} \quad N = \left[ \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\nu_i + a_i} \right] \tag{3.37}$$

Entonces

$$Q(p; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = Mp - N \tag{3.38}$$



Supongamos que  $Q$  interseca a la parábola  $\frac{1}{2}d_2p^2 + \beta_2p + C_2 + D$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 Mp - N &= \frac{1}{2}d_2p^2 + \beta_2p + C_2 + D \\
 \frac{1}{2}d_2p^2 + \beta_2p + C_2 + D - Mp + N &= 0 \\
 \frac{1}{2}d_2p^2 + p(\beta_2 - M) + (C_2 + D + N) &= 0 \\
 p_*^\varepsilon &= \frac{-(\beta_2 - M) \pm \sqrt{(\beta_2 - M)^2 - 4\left(\frac{1}{2}d_2\right)(C_2 + D + N)}}{2\left(\frac{1}{2}d_2\right)} \\
 p_*^\varepsilon &= \frac{M - \beta_2 \pm \sqrt{(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)}}{d_2} \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Primero, vamos a considerar el caso cuando

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon) = g(p_*) - G(p_*) < 0 \tag{3.40}$$

Analizaremos el término  $\frac{M - \beta_2}{d_2}$  en (3.39) sustituyendo (3.24) en el nos queda

$$\begin{aligned}
 \frac{M - \beta_2}{d_2} &= \frac{M - G'(p_* + \varepsilon) + d_2(p_* + \varepsilon)}{d_2} \\
 &= \frac{M - G'(p_* + \varepsilon)}{d_2} + (p_* + \varepsilon) \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Al sustituir (3.24) en el primer miembro en (3.41) vemos que para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  el primer miembro de la suma en (3.41) es positivo y tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{M - G'(p_* + \varepsilon)}{d_2} \\ &= \frac{M - G'(p_* + \varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} \end{aligned}$$

Pero el segundo miembro de la suma (3.41) para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  es positivo y tiende a  $p_* > 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  tenemos

$$0 < \frac{M - G'(p_* + \varepsilon) + d_2(p_* + \varepsilon)}{d_2} \quad (3.42)$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M - \beta_2}{d_2} = p_* \quad (3.43)$$

Tomemos de (3.39) el término siguiente

$$\frac{\sqrt{(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)}}{d_2}$$

para su análisis, tomando su forma equivalente:

$$\sqrt{\left[ \frac{\beta_2 - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2(C_2 + D + N)}{d_2}} \quad (3.44)$$

mostraremos que la expresión que está bajo de la raíz cuadrada en (3.44) toma valores positivos para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ . Tomemos el término:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\beta_2 - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2(C_2 + D + N)}{d_2} \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - d_2(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2(C_2 + D + N)}{d_2} \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} - (p_* + \varepsilon) \right]^2 \\
&\quad - \frac{2 \left( G(p_* + \varepsilon) + \frac{1}{2}d_2(p_* + \varepsilon)^2 - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) + D + N \right)}{d_2} \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} - (p_* + \varepsilon) \right]^2 \\
&\quad - \frac{2 \left( G(p_* + \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) + D + N \right)}{d_2} - (p_* + \varepsilon)^2 \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 - 2 \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right] (p_* + \varepsilon) + (p_* + \varepsilon)^2 \\
&\quad - \frac{2 \left( G(p_* + \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) + D + N \right)}{d_2} - (p_* + \varepsilon)^2 \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 - 2 \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right] (p_* + \varepsilon) \\
&\quad - \frac{2 \left( G(p_* + \varepsilon) - G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon) + D + N \right)}{d_2} \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon)}{d_2} + \frac{2M(p_* + \varepsilon)}{d_2} \\
&\quad - \frac{2G(p_* + \varepsilon)}{d_2} + \frac{2G'(p_* + \varepsilon)(p_* + \varepsilon)}{d_2} - \frac{2D}{d_2} - \frac{2N}{d_2} \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 + \frac{2M(p_* + \varepsilon)}{d_2} - \frac{2G(p_* + \varepsilon)}{d_2} - \frac{2D}{d_2} - \frac{2N}{d_2} \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 + 2 \left[ \left( \frac{M(p_* + \varepsilon)}{d_2} - \frac{N}{d_2} \right) - \left( \frac{G(p_* + \varepsilon)}{d_2} + \frac{D}{d_2} \right) \right] \\
&= \left[ \frac{G'(p_* + \varepsilon) - M}{d_2} \right]^2 + 2 \left[ \left( \frac{M(p_* + \varepsilon) - N}{d_2} \right) - \left( \frac{G(p_* + \varepsilon) + D}{d_2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ya que  $Q(p) = Mp - N$  intersecta a la parábola  $\frac{1}{2}d_2p^2 + \beta_2p + C_2$  en el punto

$p_*^\varepsilon \leq p_* + \varepsilon$ , entonces,  $Q(p_* + \varepsilon) = M(p_* + \varepsilon) - N \geq G(p_* + \varepsilon) + D$  y de tal modo demostramos que

$$\left[ \frac{\beta_2 - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2(C_2 + D + N)}{d_2} > 0 \quad (3.46)$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  observamos que  $\frac{1}{d_2} \rightarrow 0$ , por lo que cada uno de los términos de (3.46) tienden a cero y además se cumple (3.40), entonces podemos asegurar que:

$$\left[ \frac{\beta_2 - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2(C_2 + D + N)}{d_2} \rightarrow 0 \quad (3.47)$$

Por lo anterior

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\left[ \frac{\beta_2 - M}{d_2} \right]^2 - \frac{2(C_2 + D + N)}{d_2}} = 0 \quad (3.48)$$

De (3.39) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)) = p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D) \quad (3.49)$$

Como  $(p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D))$  continuamente depende de los parámetros  $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$ , entonces el límite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D))$  en (3.49) también depende de los parámetros continuamente (ya que la convergencia en (3.49) puede ser considerada sobre

algún compacto y entonces es uniforme).

Supongamos que  $Q$  interseca a  $\frac{1}{2}d_1p^2 + \beta_1p + C_1 + D$ , entonces, utilizando las notaciones (3.37) y que se cumpla (3.40) tenemos

$$\begin{aligned}
Mp - N &= \frac{1}{2}d_1p^2 + \beta_1p + C_1 + D \\
\frac{1}{2}d_1p^2 + \beta_1p + C_1 + D - Mp + N &= 0 \\
\frac{1}{2}d_1p^2 + p(\beta_1 - M) + (C_1 + D + N) &= 0 \\
p_*^\varepsilon &= \frac{-(\beta_1 - M) \pm \sqrt{(\beta_1 - M)^2 - 4\left(\frac{1}{2}d_1\right)(C_1 + D + N)}}{2\left(\frac{1}{2}d_1\right)} \\
p_*^\varepsilon &= \frac{M - \beta_1 \pm \sqrt{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1(C_1 + D + N)}}{d_1} \\
p_*^\varepsilon &= \frac{M - \beta_1}{d_1} \pm \sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1(C_1 + D + N)}{d_1^2}} \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Igual que el caso anterior analizaremos primero el término  $\frac{M-\beta_1}{d_1}$ , sustituyendo (3.23) en él nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{M - \beta_1}{d_1} &= \frac{M - G'(p_* - \varepsilon) + d_1(p_* - \varepsilon)}{d_1} \\
&= \frac{M - G'(p_* - \varepsilon)}{d_1} + (p_* - \varepsilon) \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Después de aplicar la fórmula (3.31) para el primer miembro en (3.51) vemos que para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ , el primer miembro de la suma en (3.51) es negativo y tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \frac{M - G'(p_* - \varepsilon)}{d_1} \\ &= \frac{M - G'(p_* - \varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{2}[G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon[G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Pero el segundo miembro de la suma en (3.51) es positivo y tiende a  $p_* > 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces, para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$

$$0 < \frac{M - G'(p_* - \varepsilon) + d_1(p_* - \varepsilon)}{d_1} \quad (3.53)$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M - \beta_1}{d_1} = p_* \quad (3.54)$$

La magnitud dentro de la raíz en (3.50) es:

$$\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1(C_1 + D + N)}{d_1^2} > 0 \quad (3.55)$$

ya que  $d_1 \leq 0, C_1 \geq 0, D > 0$  y  $N > 0$ . Entonces, la fórmula (3.50) se tiene de tal forma como sigue:

$$p_*^\varepsilon = \frac{M - \beta_1}{d_1} + \sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1(C_1 + D + N)}{d_1^2}} \quad (3.56)$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  notamos que  $\frac{1}{d_1} \rightarrow 0$ , por lo que (3.55) tienden a cero y además se cumple (3.40).

Por lo tanto

$$0 < \sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1(C_1 + D + N)}{d_1^2}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.57)$$

Por lo anterior

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)) = p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D) \quad (3.58)$$

y además sabemos que  $p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$  depende continuamente de los parámetros  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D$ , entonces el límite  $p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$  también depende de los parámetros continuamente por convergencia uniforme.

Por lo tanto  $p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$  es un equilibrio exterior, es único y depende continuamente de los parámetros.

Ahora consideremos el caso cuando

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon) = g(p_*) - G(p_*) = 0 \quad (3.59)$$

Supongamos que  $Q$  interseca a la parábola  $\frac{1}{2}d_2p^2 + \beta_2p + C_2 + D$ , tomando el termino  $\frac{M-\beta_2}{d_2}$  de (3.39) para su análisis, sustituyendo (3.24) en él, nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{M - \beta_2}{d_2} &= \frac{M - G'(p_* + \varepsilon) + d_2(p_* + \varepsilon)}{d_2} \\ &= \frac{M - G'(p_* + \varepsilon)}{d_2} + (p_* + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Al sustituir (3.30) en el primer miembro en (3.60) vemos que para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  el primer miembro de la suma en (3.60) es positivo y tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &\frac{M - G'(p_* + \varepsilon)}{d_2} \\ &= \frac{M - G'(p_* + \varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} + (p_* + \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon^2 [M - G'(p_* + \varepsilon)]}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} + (p_* + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Cuando  $\varepsilon$  tiende a cero más rápido que  $[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]$  nos queda que

$$\frac{\varepsilon^2 [M - G'(p_* + \varepsilon)]}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} \rightarrow 0 \quad (3.62)$$



Pero el segundo miembro de la suma (3.61) es positivo para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  y tiende a  $p_* > 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  (3.60) queda de la siguiente forma:

$$0 < \frac{M - G'(p_* + \varepsilon) + d_2(p_* + \varepsilon)}{d_2}$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M - \beta_2}{d_2} = p_* \quad (3.63)$$

Tomemos el término siguiente de (3.39):

$$\frac{\sqrt{(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)}}{d_2}$$

tomando su forma equivalente:

$$\sqrt{\frac{(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)}{d_2^2}} \quad (3.64)$$

Tomando en cuenta el resultado de los pasos anteriores, sabemos que (3.64) toma valores positivos cuando  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño.

Sustituyendo el valor de  $d_2$ , que está dado por (3.30) en (3.64) tenemos

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)}{\left[\frac{\varepsilon}{2}[G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon[G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]\right]^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon^4 [(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)]}{\left[\frac{\varepsilon}{2}[G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon[G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]\right]^2}} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Cuando  $\varepsilon$  tiende a cero más rápido que  $[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]$ , entonces

$$\frac{\varepsilon^4 [(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)]}{\left[\frac{\varepsilon}{2}[G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] + \varepsilon[G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] - [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]\right]^2} \rightarrow 0$$

Quedando (3.64) de la siguiente forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(\beta_2 - M)^2 - 2d_2(C_2 + D + N)}{d_2^2}} = 0 \quad (3.66)$$

Entonces de (3.39) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)) = p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D) \quad (3.67)$$

De la misma forma, como  $(p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D))$  depende continuamente de los parámetros  $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$ , entonces el límite siguiente:  $(p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D))$  en

(3.67) también depende de los parámetros continuamente (ya que la convergencia en (3.67) puede ser considerada sobre algún compacto y entonces es uniforme).

Supongamos que  $Q$  interseca a la parábola  $\frac{1}{2}d_1p^2 + \beta_1p + C_1 + D$ , tomando el término  $\frac{M-\beta_1}{d_1}$  de (3.50) para su análisis, sustituyendo (3.23) en él, nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{M - \beta_1}{d_1} &= \frac{M - G'(p_* - \varepsilon) + d_1(p_* - \varepsilon)}{d_1} \\ &= \frac{M - G'(p_* - \varepsilon)}{d_1} + (p_* - \varepsilon)\end{aligned}\tag{3.68}$$

Después sustituyendo (3.31) que corresponde al valor de  $d_1$  en (3.68)

$$\begin{aligned}&\frac{M - G'(p_* - \varepsilon)}{d_1} + (p_* - \varepsilon) \\ &= \frac{M - G'(p_* - \varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} + (p_* - \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon^2 [M - G'(p_* - \varepsilon)]}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} + (p_* - \varepsilon)\end{aligned}\tag{3.69}$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  más rápido que  $[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]$ ; tenemos que

$$\frac{\varepsilon^2 [M - G'(p_* - \varepsilon)]}{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]} \rightarrow 0$$

Y  $p_* - \varepsilon \rightarrow p_*$  y se cumple (3.59). Quedando (3.69) de la siguiente forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M - \beta_1}{d_1} = p_*\tag{3.70}$$

Tomemos el término

$$\frac{\sqrt{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1 (C_1 + D + N)}}{d_1}$$

para su análisis, tomando su forma equivalente:

$$\sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1 (C_1 + D + N)}{d_1^2}} \quad (3.71)$$

La magnitud dentro de la raíz toma valores positivos cuando se toman valores muy pequeños de  $\varepsilon$ , ya que  $d_1 \leq 0, C_1 \geq 0, D > 0$  y  $N > 0$  resultando que

$$-2d_1 (C_1 + D + N) \geq 0$$

Sustituyendo el valor de  $d_1$ , que está dado por (3.31) en (3.71)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1 (C_1 + D + N)}{d_1^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1 (C_1 + D + N)}{\left[ \frac{\frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]}{\varepsilon^2} \right]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon^4 [(\beta_1 - M)^2 - 2d_1 (C_1 + D + N)]}{\left[ \frac{\varepsilon}{2} [G'(p_* + \varepsilon) - G'(p_* - \varepsilon)] - \varepsilon [G'(p_* + \varepsilon) + G'(p_* - \varepsilon)] + [G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)] \right]^2}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  más rápido que  $[G(p_* + \varepsilon) - G(p_* - \varepsilon)]$  y se cumple (3.59) queda (3.71) de la siguiente forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(\beta_1 - M)^2 - 2d_1(C_1 + D + N)}{d_1^2}} \rightarrow 0 \quad (3.73)$$

De manera similar concluimos que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)) = p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$$

y además sabemos que  $(p_*^\varepsilon(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D))$  depende continuamente de los parámetros  $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$ , entonces el límite  $(p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D))$  también depende de los parámetros continuamente por convergencia uniforme.

Por lo tanto  $p_*(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, D)$  es un equilibrio exterior, es único y continuamente depende de los parámetros.

Ahora, investigamos la dependencia del precio del equilibrio exterior respecto a la demanda activa  $D$ . Fijamos algún valor  $D = \bar{D}$  y consideramos primero  $D > \bar{D}$ . Ya que  $p_*(D) \geq p_*(\bar{D})$ , consideramos dos casos:  $p_*(D) = p_*(\bar{D})$  en alguna vecindad a lado derecho de  $\bar{D}$ , o  $p_*(D) > p_*(\bar{D})$  cuando  $D > \bar{D}$ . En el primer caso  $Q(p_*(\bar{D})) \geq g(p_*(\bar{D})) + D$  cuando  $D > \bar{D}$ , y entonces,

$$Q(p_*(\bar{D})) > g(p_*(\bar{D})) + D \quad (3.74)$$

De lo contrario, si se cumple (3.74), entonces para  $0 \leq D - \bar{D} \leq Q(p_*(\bar{D})) - g(p_*(\bar{D}))$ , se cumple,  $p_*(D) = p_*(\bar{D})$ . De tal manera,  $p_*(D)$  es constante dentro del intervalo  $[\bar{D}, D_+)$  donde  $D_+ > \bar{D}$  si y sólo si se cumple la desigualdad estricta (3.74).

Si en lugar de (3.74), se cumple la igualdad  $Q(p_*(\bar{D})) = g(p_*(\bar{D})) + D$ . Entonces, esta igualdad se guarda en alguna vecindad en el lado derecho de  $\bar{D}$ . Es correcto ya que en caso contrario es posible encontrar la sucesión monótonamente decreciente de los puntos  $D_k > \bar{D}$  convergente a  $\bar{D}$  para la cual se cumplen las desigualdades:

$$g(p_*(\bar{D})) + D_k < Q(p_*(\bar{D})) \leq G(p_*(\bar{D})) + D_k \quad (3.75)$$

Por continuidad,  $p_*(D)$  respecto a  $D$ , obtenemos que  $p_*(D_k)$  converge a  $p_*(\bar{D})$ . En el otro lado, en el caso considerado  $p_*(\bar{D}) \neq p_*(D_k)$  para  $D_k > \bar{D}$ . De este modo, la desigualdad (3.75) muestra que  $p_*(\bar{D})$  es el punto límite de los puntos de discontinuidad de la demanda, lo que contradice la suposición **A1**, entonces,

$$Q(p_*(D)) = g(p_*(D)) + D \quad (3.76)$$

Para  $D \geq \bar{D}$  dentro alguna vecindad del punto  $\bar{D}$ . Por diferenciabilidad continua y monotonía de las funciones  $Q(p)$  y  $g(p) = G(p)$  en el lado derecho del punto  $p_*(\bar{D})$  obtenemos que la función  $p_*(D)$  es continua y diferenciable derecho del punto  $\bar{D}$ , además

$$p'(\bar{D} + 0) = \frac{1}{Q'(p_*(\bar{D})) - G'(p_*(\bar{D}) + 0)} \quad (3.77)$$

El caso cuando  $D < \bar{D}$ , es simétrico. De la misma manera se establece que  $p_*(D)$  es diferenciable izquierda del punto  $\bar{D}$ . Además,  $p'_*(\bar{D} - 0) = 0$ , si  $Q(p_*(\bar{D})) < G(p_*(\bar{D})) + \bar{D}$ , y  $p'(\bar{D} - 0) = \frac{1}{Q'(p_*(\bar{D})) - G'(p_*(\bar{D}) - 0)}$ , si  $Q(p_*(\bar{D})) = G(p_*(\bar{D})) + \bar{D}$ . Para terminar la demostración se quedo escribir  $Q'(p_*(\bar{D}))$  utilizando las formulas siguientes

$$\frac{\partial q_0}{\partial p} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{\nu_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} \geq \frac{1}{a_0} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \blacksquare \quad (3.78)$$

# Capítulo 4

## Equilibrio Interior

Para definir equilibrio interior, primero vamos a realizar un procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia  $\nu_i$  como ya fue propuesto en el trabajo [22]. Asumimos que tenemos un equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  y esto ocurre para algún  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$  y  $D$ . Uno de los productores, digamos  $k$ , temporalmente cambia su comportamiento por la abstención de maximizar su utilidad conjeturada (o beneficio social, como en el caso  $k = 0$ ) y haciendo pequeñas variaciones alrededor de su volumen de producción de equilibrio  $q_k$ . En términos matemáticos, esto es equivalente a la restricción de los agentes del modelo al subconjunto  $i \neq k$  con la producción  $q_k$  sustraída de la demanda activa.

Las variaciones del volumen de producción por el agente  $k$  son entonces equivalentes a las variaciones de la demanda activa en la forma  $D_k = D - q_k$ . Si consideramos estas variaciones que sean infinitesimales, asumimos que mediante la observación del correspondiente cambio del precio de equilibrio, el agente  $k$  obtiene la derivada del precio de equilibrio con respecto a la demanda activa, esto es, sus coeficientes de influencia. Para calcular éstas derivadas aplicamos las fórmulas del **Teorema 3.2**, recordando que el agente  $k$  esta temporalmente ausente del modelo de equilibrio, de modo que en la suma debe ser excluido el término  $i = k$ . Teniendo esto en cuenta



se obtiene el siguiente criterio.

**Criterio de consistencia 4.1.** *En un equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  para los coeficientes de influencia  $\nu_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  serán consistentes si existen  $r_k \in [G'(p-0), G'(p+0)]$  cuando  $G'(p-0) \leq G'(p+0)$  ó  $r_k \in [G'(p+0), G'(p-0)]$  cuando  $G'(p+0) \leq G'(p-0)$  tales que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\nu_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} - r_0} \quad (4.1)$$

$$\nu_i = \frac{1}{\frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + a_j} - r_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{si } n \leq 2 \quad (4.2)$$

en donde  $G'(p-0)$  y  $G'(p+0)$  se calculan en el punto  $(p, G = \sum_{i=0}^n q_i - D)$  de la gráfica  $L$  de la función de la demanda. Si  $r_k = -\infty$ , entonces los  $\nu_k$  son iguales a cero.

**Comentario:** Sí, todos los agentes son empresas privadas que buscan maximizar su utilidad, entonces las formulas en el caso de  $n \geq 2$  (4.1)- (4.2) se reducen a la forma obtenida en [22]:

$$\nu_i = \frac{1}{\sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + a_j} - r_j} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

Ahora estamos en condiciones de definir el equilibrio interior.

**Definición 4.2.** El vector  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$ ,  $\nu_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  se llama equilibrio **interior** si, para los coeficientes de influencia considerados el vector  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  es un equilibrio exterior, y el criterio de consistencia se satisface para todo  $k$ . Si todos  $r_k$  en (4.1)- (4.2) respectivamente son iguales entre sí, el equilibrio interior se llama **fuerte**.

**Teorema 4.3.** (Formulación del Teorema sin demostración esta en [30] )

Bajo las suposiciones **A1**, **A2** y **A3**, existe un equilibrio **interior fuerte**.

### Demostración

Vamos a demostrar que existen  $r \in [-\infty, 0]$ ,  $\nu_i \in [0, +\infty)$ ,  $p \in [p_0, +\infty)$  y  $q_i \geq 0$ , tales que el vector  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  es el equilibrio exterior y para todos los  $k$  se cumple el criterio de consistencia (4.1)- (4.2). Para no tener valores infinitos definimos  $r = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ ,  $\alpha \in [-1, 0]$  y reescribimos la parte derecha del criterio de consistencia (4.1)- (4.2) del modo siguiente:

$$F_0(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} - \alpha} \quad (4.4)$$

$$F_i(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha)^{\frac{\nu_0 + a_0}{a_0}} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + a_j} - \alpha} \quad (4.5)$$

Como  $\nu_i \geq 0$ ,  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $\alpha \in [-1, 0]$  las funciones  $F_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  estan bien definidas y además son funciones continuas con respecto a sus argumentos  $\nu_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  sobre los dominios correspondientes. La dependencia del parámetro  $D$  no la consideramos ya que dentro de la demostración este parámetro no cambia su valor.

Introducimos un mapeo auxiliar  $\phi : [-1, 0] \times R_+^{n+1} \rightarrow 2^{[-1, 0]}$  de la siguiente manera. Para  $\alpha \in [-1, 0]$  y  $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \in R_+^{n+1}$  encontramos el equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  correspondiente a  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ , y en el punto  $(p, G = \sum q_i)$  de la curva  $L$  de la demanda obtenemos  $G'(p+0)$  y  $G'(p-0)$ . Utilizando estos valores calculamos  $\alpha^+ = \frac{G'(p+0)}{1-G'(p+0)}$  y  $\alpha^- = \frac{G'(p-0)}{1-G'(p-0)}$ . Ya que  $G'(p+0)$  y  $G'(p-0)$  pertenecen al intervalo  $[-\infty, 0]$ , entonces,  $\alpha^+$  y  $\alpha^-$  pertenecen al intervalo  $[-1, 0]$ .

Definimos el valor del mapeo  $\phi(\alpha; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  en el punto  $(\alpha; \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  como el intervalo cerrado  $[\alpha^+, \alpha^-]$ , si  $\alpha^+ \leq \alpha^-$ , o el intervalo  $[\alpha^-, \alpha^+]$ , si  $\alpha^+ > \alpha^-$ .

Vamos a mostrar que el mapeo  $\phi$  es cerrado. Si el punto  $p$  es el punto de continuidad de la curva de la demanda, entonces, en una vecindad de este punto  $p$  se cumple  $G'(p+0) = G'(p-0) = G'(p)$  y la función  $G'(p)$  es continua respecto a  $p$  y como  $p$  continuamente depende de  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ , entonces  $\alpha^+ = \alpha^-$  y continuamente dependen de  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$  (como una función compuesta de las funciones continuas). La dependencia  $\phi$  del primer argumento  $\alpha$  es ficticia. Suponemos ahora que el equilibrio ocurrió en el punto de discontinuidad de la curva  $L$  de la demanda, en este caso pueden pasar los cuatro casos siguientes:

- 1)  $G(p) = \sum q_i > g(p)$ , es decir, es el punto de discontinuidad de la función de la demanda  $L$  y el punto  $(p, G)$  está en el punto superior del segmento vertical de la gráfica de la curva  $L$ ;
- 2)  $G(p) > \sum q_i = g(p)$ , en este caso el punto  $(p, G)$  de discontinuidad está en el punto inferior del segmento vertical de la gráfica de la curva  $L$ ;
- 3)  $G(p) > \sum q_i > g(p)$ , en este caso el punto  $(p, G)$  de discontinuidad está en el punto intermedio del segmento vertical de la gráfica de la curva  $L$ ;
- 4)  $G(p) = \sum q_i = g(p)$ , pero  $G'(p+0) \neq G'(p-0)$ ; en este caso  $p$  es el punto de continuidad de la función de la demanda pero su derivada no es continua.

Consideramos detalladamente el primer caso. En este caso  $G'(p+0) = -\infty$  y, entonces  $\alpha^+ = -1$ , pero  $G'(p-0)$  tiene valor finito, que significa que  $\alpha^- \in (-1, 0]$ . Además, existe una vecindad al lado izquierdo del punto  $p$  (incluyendo el punto  $p$ ) tal que la función  $G'(p)$  es continua dentro de esta vecindad.

Por eso, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para los precios  $\mu \in (p - \delta, p]$  se cumple  $|\frac{\alpha^- - G'(\pi-0)}{1 - G'(\pi-0)}| < \varepsilon$ . Además, podemos suponer que dentro del intervalo  $(p - \delta, p)$  no hay puntos de discontinuidad ni de la función  $G(p)$  ni de sus derivadas.

Consideramos el vector  $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  y una vecindad  $V \subset R_+^{n+1}$  del punto  $\nu$ . Para  $w \in V$  notamos por  $\mu(w)$  y  $q_i(w)$  el precio y los volúmenes de producción correspondientes al equilibrio exterior encontrado para  $w$  (que existe y es único). De tal modo,  $\mu(\nu) = p$  y  $q_i(\nu) = q_i$  y son funciones continuas, entonces, podemos elegir la vecindad  $V$  suficientemente pequeña, que si  $w \in V$  se cumplen las desigualdades siguientes  $|\mu(w) - p| < \delta$  y  $\sum q_i(w) > g(p)$ .

Por  $\alpha^+(w)$  y  $\alpha^-(w)$  notamos los extremos del intervalo  $\phi(\alpha, w)$  tal como fue definido arriba. Si ocurre  $\mu(w) > p$  para algún  $w \in V$ , entonces, ya que los puntos de discontinuidad son aislados y la función de la demanda es no creciente, nosotros obtenemos que  $G(\mu(w)) \leq g(p) < \sum q_i(w) \geq G(\mu(w))$ .

La contradicción obtenida demuestra que  $\mu(w) \leq p$  para cualquier  $w \in V$ . Si  $\mu(w) = p$  y  $\sum q_i(w) < G(\mu(w)) = G(p)$ , entonces  $\alpha^-(w) = \alpha^+(w) = -1$ , es decir,  $\phi(\alpha, w)$  consiste de sólo un único punto, el cual pertenece a  $\phi(\alpha, \nu)$ . Si para  $\mu(w) = p$  se cumple  $\sum q_i(w) = G(\mu(w)) = G(p)$ , entonces  $\alpha^-(w) = \alpha^-$  y  $\alpha^+(w) = \alpha^+ = -1$ , es decir,  $\phi(\alpha, w)$  coincide con  $\phi(\alpha, \nu)$ .

Sea ahora  $\mu = \mu(w) \in (p - \delta, p)$ . En este caso  $\alpha^-(w) = \alpha^+(w) = \frac{G'(\mu)}{1 - G'(\mu)}$ , y por

elección de  $\delta$  el punto  $\phi(\alpha, w)$  está en la distancia del  $\alpha^-$  menos que  $\varepsilon$ , es decir,  $|\phi(\alpha, w) - \alpha^-| < \varepsilon$ . De tal modo (ya que  $\varepsilon > 0$  es cualquier) demostramos que  $\phi$  es mapeo semicontinuo superiormente en el punto  $(\alpha, v)$ .

Los demás casos se consideran de la misma manera como consideramos el primer caso, utilizando las modificaciones evidentes de los pasos anteriores.

Para finalizar la demostración del **Teorema 4.3**, consideramos el mapeo

$$H = (\phi, F_0, F_1, \dots, F_n) : [-1, 0] \times R_+^{n+1} \rightarrow [-1, 0] \times R_+^{n+1} \quad (4.6)$$

y elegimos un compacto tal que el mapeo  $H$  mapea este compacto en sí mismo. Definimos  $s = \max\{\bar{\nu}_0, a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . Si  $\alpha = -1$ , entonces

$$F_0(-1, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = 0 \quad (4.7)$$

$$F_i(-1, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

si  $\alpha \in (-1, 0]$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq F_0(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) &= \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i} - \alpha} \leq \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + a_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + s}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 \leq F_1(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) &= \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + a_j} - \alpha} \\ &\leq \frac{1}{\frac{\nu_0 + a_0}{a_0} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + a_j}} \\ &\leq \frac{1}{\sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + a_j}} \leq \frac{1}{\sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + s}} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

y de las desigualdades obtenidas arriba sigue que si  $\alpha \in [-1, 0]$  y  $0 \leq \nu_j \leq \frac{s}{n-1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , entonces  $F_j(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \in [0, \frac{s}{n-1}]$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Entonces, el mapeo semicontinuo superiormente  $H = (\phi, F_0, F_1, \dots, F_n)$  mapea el compacto  $[-1, 0] \times [0, \frac{s}{n-1}]^{n+1}$  en sí mismo y, por el teorema de Kakutani, el mapeo  $H$  tiene el punto fijo  $(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$ , es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \alpha \\ F_0(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \nu_0 \\ F_1(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \nu_1 \\ \vdots \\ F_n(\alpha, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \nu_n \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Utilizando los valores encontrados de los coeficientes de influencia de los productores  $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \in [0, \nu_0] \times R_+^n$  calculamos el equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ , el cual existe y es único (por el **Teorema 4.2**). Las condiciones de consistencia son cumplidas para los coeficientes de influencia, lo cual se ve inmediatamente del sistema anterior. Entonces, el vector  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$  es un equilibrio interior fuerte. ■

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones

En el trabajo presentado se consideró un oligopolio mixto con equilibrio de variaciones conjeturadas (CVE) con más de 2 productores en un mercado de un producto homogéneo, con la función de la demanda  $G(p)$  discontinua. Las conjeturas de los agentes se refieren a la variación de los precios en función de incrementar o disminuir su producción. El oligopolio mixto con el que trabajamos cuenta con un productor público, el cual, en contraste a los agentes privados, no maximiza la función de su ganancia neta sino la función de beneficio doméstico social.

Bajo suposiciones generales, demostramos la existencia y la unicidad del equilibrio **exterior**, definido por las conjeturas fijas de los agentes dadas en forma exógena, así como la existencia del equilibrio **interior** o equilibrio **interior fuerte**, en los cuales las conjeturas (coeficientes de influencia) de los agentes se encuentran en el proceso de la búsqueda del equilibrio mismo.

## 5.2. Trabajo futuro

Para nuestro trabajo futuro tenemos contemplado extender los resultados teóricos obtenidos en este trabajo de tesis para el caso de un duopolio mixto, además de realizar los experimentos numéricos para cada uno de los casos (oligopolio mixto y duopolio mixto), usando el modelo propuesto en ésta tesis.



# Capítulo 6

## Anexo

En este Anexo se hace una recopilación de resultados existentes necesarios sobre el Teorema de Kakutani para la demostración del **Teorema 4.3** en el Capítulo 4. Por esta razón a continuación haremos una breve introducción de este teorema, así como un repaso para el Teorema de Brouwer.

El Teorema de Brouwer establece que, para ciertas condiciones sobre el dominio, una función continua de un conjunto en sí mismo tiene al menos un punto fijo, es decir, que la ecuación  $f(x) = x$  tiene al menos una solución. Introducimos unas definiciones.

**Definición 6.1.** *Sea  $f$  un mapeo de un conjunto  $A$  en sí mismo. Decimos que  $x \in A$  es punto fijo de  $f$  si  $f(x) = x$ .*

Tratando de dar una idea más intuitiva de este concepto, al aplicar una función a un conjunto podemos imaginar que la función “mueve” a los puntos del conjunto. Con esta idea de movimiento, un punto fijo es un punto que no se mueve, simplemente se queda fijo donde está. Así, un punto fijo es invariante bajo la función, nunca cambia sin importar cuantas veces se la apliquemos.

**Definición 6.2.** Un espacio métrico es una pareja  $(M, d)$ , donde  $M$  es un conjunto,  $M \neq \emptyset$  y  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de la distancia con las siguientes propiedades:

1)  $d(b, a) > 0$

2)  $d(b, a) = 0$  si y solo si  $a = b$

3)  $d(a, b) = d(b, a)$

4)  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$  (Desigualdad del triángulo)

Además si  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $M$ , entonces existe un punto  $x$  en  $M$  tal que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  (completitud de  $M$ ). Si se cumple lo anterior se dice que  $(M, d)$  un espacio métrico completo.

Es bien sabido que  $\mathbb{R}^n$  con la distancia usual euclidiana es un espacio métrico completo. Debido a que trabajaremos principalmente en  $\mathbb{R}^n$  o subconjuntos de éste, podremos aplicar los resultados que obtengamos para espacios métricos completos.

En un espacio métrico completo, una clase importante de funciones es la clase de funciones que encogen o contraen el espacio. Bajo la idea de movimiento explicada anteriormente, una función de contracción es aquella que acerca los puntos del conjunto. La definición formal es la siguiente.

**Definición 6.3.** Un mapeo  $f : M \rightarrow M$ , donde  $M$  es un espacio métrico, se dice que es mapeo de contracción si existe un número real  $0 \leq \theta < 1$  tal que para toda  $x, y$  en  $M$  se cumple:

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y)$$

Los teoremas de punto fijo pueden clasificarse en dos grandes grupos: teoremas de existencia o teoremas de construcción. Un teorema de existencia únicamente nos asegura que, bajo ciertas condiciones, la función tiene un punto fijo, mientras que uno de construcción nos presenta un proceso o algoritmo para encontrar el punto fijo.

El Teorema de Punto Fijo de Banach nos asegura que con suficientes iteraciones, podemos conseguir o aproximarnos a un punto fijo de la función. Éste es un claro ejemplo de un teorema de construcción, donde el proceso para conseguir el punto fijo es iterar la función. Por esta razón presentamos el Teorema de Punto Fijo de Banach, como fue enunciado en [31].

**Teorema 6.4** (Teorema de Punto Fijo de Banach). *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  un mapeo de contracción, entonces  $f$  tiene un único punto fijo en  $M$ .*

El Teorema de Brouwer es un teorema de existencia, no nos proporciona la solución explícita a  $f(x) = x$ , sólo nos asegura la existencia de una solución. En seguida se cita este teorema como en el trabajo [31].

**Teorema 6.5** (Teorema de Brouwer). *Sea  $f$  un mapeo continuo de la bola unitaria  $B^n$  en sí misma, entonces existe un punto  $c$  en  $B^n$  tal que  $f(c) = c$ .*

Es importante notar que las hipótesis del Teorema de Brouwer son imprescindibles, si el mapeo no es continuo o si no está definido en la bola unitaria, la función podría no tener un punto fijo. Consideramos dos ejemplos:

1. Considere la función  $f$  definida en la bola unitaria  $B^1$  de la siguiente forma;  $f(x) = 0$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$ . Esta función es discontinua sólo en el cero pero eso es suficiente para que no tenga puntos fijos;

2. Considere la función  $f(x) = -x$  definida en  $B^1 - \{0\}$ . La función es continua en todo el dominio, el cual es la bola unitaria sin un punto, pero no tiene puntos fijos.

El Teorema de Brouwer es muy limitado debido a la restricción sobre el dominio del mapeo, pero se puede extender el resultado a conjuntos más generales. Es decir, aplicar el Teorema de Brouwer para conjuntos compactos y convexos. Estos conjuntos son topológicamente equivalentes a la bola unitaria.

**Definición 6.6.** Sean  $A, D$  subconjuntos de  $R^n$ . Decimos que  $A$  y  $D$  son topológicamente equivalentes, si existe un homeomorfismo  $h$  entre ellos, es decir, si existe una biyección continua de  $A$  sobre  $D$  con inversa continua.

Con la definición anterior el Teorema de Brouwer se extiende a conjuntos topológicamente equivalentes a la bola unitaria  $B^n$ . Se enuncia el siguiente colorario.

**Colorario 6.7.** Sea  $D$  topológicamente equivalente a la bola unitaria  $B^n$  y sea  $f$  un mapeo continuo de  $D$  en sí mismo, entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo.

A continuación observamos algunos de los conjuntos topológicamente equivalentes a la bola unitaria  $B^n$ , para los cuales cualquier función continua definida de ellos en sí mismos tendrá al menos un punto fijo:

1. toda bola  $B_r(c)$  en  $R^n$  es topológicamente equivalente a la bola unitaria  $B^n$ ;
2. todo subconjunto compacto y convexo de  $R^n$  es topológicamente equivalente a la bola unitaria  $B^n$ .

Ahora, citamos el Teorema que es extensión del Teorema de Brouwer.

**Teorema 6.8.** Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo de  $R^n$  y sea  $f$  un mapeo continuo de  $K$  en sí mismo. Entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo en  $K$ .

El Teorema de Kakutani es un teorema de punto fijo para correspondencias por lo cual empezaremos entonces por definir lo que son las correspondencias, también conocidas como multifunciones. Adicionalmente definiremos vecindad de un conjunto, el concepto de semicontinuidad superior de una correspondencia.

Denotamos por  $P(A)$  el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto  $A$ , es decir,  $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$ .

**Definición 6.9.** Sean  $X, Y$  dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia de  $X$  en  $Y$  es un mapeo  $\phi : X \rightarrow P(Y)$ , esto es que a cada punto  $x$  en  $X$  le asigna un subconjunto no vacío  $\phi(x)$  de  $Y$ .

**Definición 6.10.** Una vecindad de un conjunto  $A$  es cualquier conjunto  $V$  tal que existe un abierto  $B$  que satisface  $A \subset B \subset V$ .

**Definición 6.11.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Una correspondencia  $\phi : X \rightarrow P(Y)$  es semicontinua superiormente en  $x \in X$  si para cada vecindad  $U$  de  $\phi(x)$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$  tal que si  $z \in V$  entonces  $\phi(z) \subset U$ .

La correspondencia  $\phi$  se dice ser semicontinua superiormente en  $X$  si es semicontinua superiormente en todo punto  $x \in X$ .

Consideramos dos ejemplos de correspondencias, de los cuales uno es correspondencia semicontinua superiormente y el otro no lo es:

1. Los ejemplos más sencillos de correspondencias semicontinuas superiormente son las correspondencias constantes. Es decir, correspondencias  $\phi : X \rightarrow P(Y)$ , tales que  $\phi(x) = A \forall x \in X$ , donde  $A$  es un subconjunto de  $Y$ . Demostrarlo no es difícil. Sea  $x \in X$  arbitrario, entonces para cualquier vecindad  $U$  de  $A$ , existe la vecindad  $V = X$  de  $x$  tal que si  $z \in X$  entonces  $\phi(z) = A \subset U$ , debido a que  $U$  es vecindad de  $A$ .

2. Considere la correspondencia  $\phi : [0, 2] \rightarrow P([0, 4])$  definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \{2\} & \text{si } x = 1 \\ [0, 4] & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

Esta correspondencia no es semicontinua superiormente en el 1. Para la vecindad  $[1, 3]$  de  $\phi(1) = \{2\}$ , cualquier vecindad del 1 contiene un punto cuya imagen bajo  $\phi$  es el  $[0, 4]$ , el cual no está contenido en  $[1, 3]$ . Aunque es constante en su dominio excepto sólo por el 1, no es semicontinua superiormente.

Por otro lado la correspondencia  $\psi : [0, 2] \rightarrow P([0, 4])$  definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} \{2\} & \text{si } x \neq 1 \\ [0, 4] & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

es continua superiormente, también lo es la correspondencia  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$\phi(x) : [0, x] \quad (6.3)$$

Las anteriores son ejemplos de correspondencias no constantes y semicontinuas superiormente.

Ahora podemos formular el Teorema de Kakutani de tal manera como está formulado en [31].

**Teorema 6.12** (Teorema de Kakutani). *Sea  $C$  un subconjunto no vacío, compacto y convexo de  $R^n$ . Si  $F : C \rightarrow P(C)$  es una correspondencia semicontinua superiormente cuyos valores son cerrados y convexos, entonces  $F$  tiene al menos un punto fijo, es decir, existe un punto  $x^* \in C$  tal que  $x^* \in F(x^*)$ .*

# Bibliografía

- [1] Vyacheslav V. Kalashniko, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, and Felipe de Jesús Castillo Pérez. Mixed oligopoly with consistent conjectures. *European J. Oper. Res.*, 210:729–735, 2011.
- [2] Vyacheslav V. Kalashniko, Eduardo Cordero, and Vyacheslav V. Kalashniko Jr. Cournot and stackelberg equilibrium in mixed duopoly models. *Optimization*, 59:689–706, 2010.
- [3] Vyacheslav V. Kalashniko, Nataliya I. Kalashnykova, Ovando Montantes M.A., and Vitaly Kalashnikov. A mixed oligopoly model with a discontinuous demand function. *Clute, R.C. (ed.) Proceedings of the 2011 Las Vegas International Academic Conference*, page 867–876, 2011.
- [4] F. Delbono and G. Rossini. Competition policy vs horizontal merger with public, entrepreneurial, and labor-managed firms. *J. Comparative Econ.*, 16:226–240, 1992.
- [5] K. Futagami and M. Okamura. Strategic investment: the labor-managed firm and the profit-maximizing firm. *J. Comparative Econ.*, 23:73–91, 1996.
- [6] I. Horowitz. On the effects of cournot rivalry between entrepreneurial and cooperative firms. *J. Comparative Econ.*, 15:115–121, 1991.
- [7] N.J. Ireland. Random pricing by labor-managed firms in markets with imperfect consumer information. *J. Comparative Econ.*, 31:573–583, 2003.

- [8] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, Junzo Watada, and Diego de Jesús Hernández Rodríguez. Analysis of consistent equilibria in a mixed duopoly. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII), Japón*, 18(6):962 – 970, 2014.
- [9] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, Junzo Watada, and Diego de Jesús Hernández Rodríguez. Mixed oligopoly: Analysis of consistent equilibria. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII), Japón*, 18(6):971 – 984, 2014.
- [10] John Bennett and Manfredi La Manna. Mixed oligopoly, public firm behavior, and free private entry. *Economics Letters*, 117(3):767 – 769, 2012.
- [11] Benjamin Artz, John S. Heywood, and Matthew McGinty. The merger paradox in a mixed oligopoly. *Research in Economics*, 63(1):1 – 10, 2009.
- [12] William C. Merrill and Norman Schneider. Government firms in oligopoly industries: A short-run analysis. *The Quarterly Journal of Economics*, 80(3):400–412, 1966.
- [13] R. J. Ruffin. Cournot oligopoly and competitive behaviour. *The Review of Economic Studies*, 38(4):493–502, 1971.
- [14] Richard G. Harris and Elmer G. Wiens. Government enterprise: An instrument for the internal regulation of industry. *The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d'Économique*, 13(1):125–132, 1980.
- [15] Jorge Fernández Ruiz. Teoría de juegos: su aplicación en economía. *El Colegio de Mexico, Centro de Estudios Económicos*, page 182, 2002.
- [16] Robert Gibbons. Game theory for applied economists. *Princeton University Press, Princeton*, page 267, 1992.



- [17] A. L. Bowley. The mathematical groundwork of economics. *Oxford University Press: Oxfordl*, 1924.
- [18] R. Frisch. Monopole, polypole, la notion de force dans l'économie. *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 71(71):241 – 259, 1933.
- [19] Vyacheslav V. Kalashnikov and Vitaly Kalashnikov. Conjectural variations equilibrium in a duopoly with a competitor maximizing domestic social surplus. *Proceedings of the 2005 International Applied Business Research Conference (IABR'2005), Puerto Vallarta, México*, March 14-18 2005.
- [20] Vyacheslav V. Kalashnikov and Vladimir A. Bulavsky. One-parametric method to study an equilibrium. *Economics and Mathematical methods*, 30(4), 1994. (In Russian).
- [21] Vyacheslav V. Kalashnikov and Vladimir A. Bulavsky. Equilibrium in generalized cournot and stackelberg models. *Economics and Mathematical methods*, 31(3), 1995. (In Russian).
- [22] Vladimir A. Bulavsky. Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly, economics and mathematical methods. *Economics and Mathematical methods*, 33:112–124, 1997. (In Russian).
- [23] Nataliya I. Kalashnykova, Vyacheslav V. Kalashnikov, and Felipe de Jesús Castillo Pérez. Consistent conjectural variations equilibrium in a combined mixed duopoly. *ICIC Express Letters, ICIC International*, 7(3(B)):977 – 983, 2013.
- [24] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, Junzo Watada, and Diego de Jesús Hernández Rodríguez. Analysis of consistent equilibria in a mixed duopoly. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII), Japónl*, 18(6):962 – 970, 2014.

- [25] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Vitaliy V. Kalashnikov, and Nataliya I Kalashnykova. Structure of demand and consistent conjectural variations equilibrium (ccve) in a mixed oligopoly model. *Annals of Operations Research*, 217(1):281–297, 2014.
- [26] Nataliya I Kalashnykova, Vyacheslav V. Kalashnikov, and Felipe de Jesús Castillo Pérez. Consistent conjectural variations equilibrium in a combined mixed duopoly. *Proceedings of the International Conference of Innovative Computing, Information and Control (ICICIC'2012), Shanghai, R.P. China*, 217:1–6, noviembre 2012.
- [27] Vyacheslav V. Kalashnikov, Nataliya I Kalashnykova, and J. Fernando Camacho. Partially mixed duopoly and oligopoly: Consistent conjectural variations equilibrium (ccve). part 1. *Juan Carlos Leyva López et al. (eds.), Studies on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision Making, Fourth International Workshop Proceedings EUREKA '2013*, page 198 – 206, Mazatlán, 4 – 8 de noviembre del 2013, Atlantis Press, Amsterdam-París-Beijing, 2013,.
- [28] Vyacheslav V. Kalashnikov, Nataliya I Kalashnykova, and J. Fernando Camacho. Partially mixed duopoly and oligopoly: Consistent conjectural variations equilibrium (ccve). part 2. *Juan Carlos Leyva López et al. (eds.), Studies on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision Making, Fourth International Workshop Proceedings EUREKA '2013*, page 207 – 217, Mazatlán, 4 – 8 de noviembre del 2013, Atlantis Press, Amsterdam-París-Beijing, 2013,.
- [29] Mario A. Ovando Montantes. Conjeturas consistentes en un modelo de oligopolio con función de demanda discontinua. *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey*, 2013.
- [30] Nataliya I Kalashnykova, Vyacheslav V. Kalashnikov, and Mario A. Ovando Montantes. Consistent conjectures in mixed oligopoly with discontinuous de-

mand function. Watada, J., Phillips-Wren, G., Jain, L.C., and Howlett, R.J. (Eds.), “*Advances in Intelligent Decision Technologies*”, Springer-Verlag Series “*Smart Innovation, Systems and Technologies*”, 12:409 – 418, 2012.

- [31] José Miguel Pérez Urquidi. Teoremas de punto fijo y la existencia de equilibrios de nash para juegos no cooperativos. <http://lic.mat.uson.mx/tesis/146TesisUrquidi.pdf>, Febrero 2008.