UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS

EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN OLIGOPOLIO PARCIALMENTE MIXTO

PRESENTA

GABRIELA RENATA HUARACHI BENAVÍDEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

JULIO, 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS

EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN OLIGOPOLIO PARCIALMENTE MIXTO

PRESENTA

GABRIELA RENATA HUARACHI BENAVÍDEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, JULIO DE 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO – MATEMÁTICAS

Los miembros del comité recomendamos que la tesis: Equilibrios con Variaciones Conjeturadas en un Oligopolio Parcialmente Mixto, presentada por la Lic. Gabriela Renata Huarachi Benavídez, sea aceptada como requisito para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

Dra. Nataliya Kalashnykova ______________________________

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco ______________________________

Dra. María Aracelia Alcorta ______________________________

Índice

Introducción	5
Capítulo 1. Equilibrio conjeturado en un modelo de oligopolio parcialmente mixto.	11
1.1 Especificación del Modelo	11
1.2 Equilibrio Exterior	21
1.3 Equilibrio Interior	27
Capítulo 2. Caso Particular: Duopolio.	34
2.1 Especificación del problema	34
2.2 Competencia Perfecta	43
2.3 Equilibrio de Cournot	49
Capítulo 3. Resultados Numéricos.	56
Capítulo 4. Conclusión y Trabajo a Futuro.	69
Referencias.	71

Introducción.

En la economía actual se caracterizan las empresas en privadas o públicas. Las empresas privadas toman el papel de maximizar la función de utilidad neta y las empresas públicas buscan maximizar la función objetivo diferente de utilidad neta, por ejemplo, función de beneficio social [9,15] o función laboral [13,30]. Dentro de esta existen mercados de un solo producto que son dominados por pocas empresas, en tal caso el mercado se llama oligopolio, que se divide en dos tipos: cuando las empresas son privadas toma el nombre de oligopolio clásico [6,10,25] y en el caso cuando entre las empresas privadas existe al menos una empresa pública el mercado se llama oligopolio mixto [9,15,23,24].

Actualmente el mercado de oligopolio mixto ha sido estudiado activamente en los últimos años. Donde se puede mencionar el interés de los oligopolios mixtos en países como Canadá, Japón, Estados Unidos y pertenecientes a Europa como en [3,4,25]. Se observan estudios en empresas del tipo paquetería, seguros de vida, créditos hipotecarios, bienes raíces, aerolíneas, electricidad, etc. [22,28]

Los trabajos mencionados estudian el oligopolio mixto utilizando los modelos que toman un enfoque como Cournot o Stackelberg [1,3,9]. Estos enfoques donde las empresas compiten por cantidades, pero se diferencian en el tiempo de sus decisiones. En Cournot [5,6,20] las empresas toman la decisión de su producción simultáneamente, por otro lado, en Stackelberg [6,8,20] se considera un líder, el cual toma la decisión y los seguidores observan el movimiento del líder y de ahí toman su decisión de producción.

En autores como [2] y [11] quienes introdujeron el Equilibrio de Variaciones Conjeturadas (CCVE) como otra posible solución de juegos estáticos. De este concepto, los agentes se comportan de la siguiente manera: cada uno de ellos escoge su acción más favorable tomando en cuenta que la estrategia de cada rival es una función conjeturada de su propia estrategia. Para este concepto existe una dificultad conceptual en el caso de que estén presentes numerosos agentes: cuando el mercado tiene n agentes, existen n funciones de mejor respuesta y $n(n-1)$ conjeturas.

En trabajos como [4, 5] se fueron investigando nuevas formas de definir los equilibrios de variaciones conjeturadas para los modelos de oligopolio clásico, quedando por Cournot el volumen total de producción G como variable observable sobre el mercado y medir la influencia de agente i.

Cuando se estudia el mercado de oligopolios clásicos, las preguntas de la existencia de un equilibrio y su calculación, se pone mucha atención usualmente al compararlo con el equilibrio de Cournot y de competencia perfecta. En las obras de Bulavsky y Kalashnikov [4,5,14], ambos modelos fueron incluidos en una clase de oligopolios en los cuales el grado de influencia de cada agente se modela por un parámetro especial (coeficiente de influencia). En lugar de la hipótesis clásica de Cournot, se asumió que cada productor usó las variaciones conjeturales del volumen total de mercado en función de variación de su propia producción como abajo:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i) w_i(G, q_i) \tag{1}$$

donde:

- G es el volumen total de producción del mercado;

- q_i es la cantidad producida actualmente por el productor i;

- η es la cantidad esperada para producir por el productor i;

- $G_i(\eta)$ es el volumen total conjeturado por el agente i por el cambio de su volumen de producción q_i a η.

La función de la conjetura $w_i(G, q_i)$ en la formula (1) representa *el coeficiente de influencia* del productor i. En el modelo clásico de Cournot este coeficiente es igual a 1 y en el modelo de competencia perfecta es igual a cero. Bajo las suposiciones generales ha sido demostrado la existencia y unicidad de dichos equilibrios.

Un enfoque completamente nuevo para el mercado de oligopolio clásico fue propuesto por Bulavsky [3]. Supone, que cada jugador en lugar de hacer las conjeturas acerca de variación de volumen total en función de variaciones de su propio volumen de producción hace conjeturas acerca de las variaciones del precio de mercado en función de sus variaciones infinitesimales de la producción. Así, la conjetura fue notada por v_i y tiene una relación simple con la notación anterior w_i

$$w_i = -\frac{v_i}{p'(G)}, .$$

Una vez conocidas las conjeturas de todas las firmas (a las cuales también se les llaman coeficientes de influencia), cada firma realiza un procedimiento de verificación y comprueba si su coeficiente de influencia es coherente con los demás o no. La situación cuando los coeficientes de influencia de todas firmas son coherentes entre si es natural considerar como equilibrio, estos coeficientes de influencia se llaman *consistentes* y equilibrio con conjeturas consistentes se llama *equilibrio consistente con variaciones conjeturadas* (CCVE por sus siglas en inglés).

Las mismas formulas obtenidas en [3] para el equilibrio consistente con variaciones conjeturadas fueron obtenidas en [22]. Pero para obtención de estas fórmulas aplicaron una técnica de control óptimo que es mucho más complicada que la técnica de Bulavsky, además en [22] se usa la función de la demanda lineal y las funciones de costo cuadráticas, mientras que en [3] permitía funciones de demanda no lineales e incluso no diferenciales y funciones de costo no necesariamente cuadráticas, pero sí convexas.

Los resultados de Bulavsky [3] fueron extendidos por V. Kalashnikov, N. Kalashnykova, etc. en el trabajo [15], en donde consideran un oligopolio mixto con no menos que tres productores que fabrican un producto homogéneo con funciones de costo cuadráticas

$$f_i\left(q_i\right)=\frac{1}{2}a_i q_i^2+b_i q_i$$

donde

$a_i>0,\ b_i>0$, $i=0,1,\ldots,n$ y q_i es el volumen de producción de la firma i. La firma $i=0$ es considerada como firma pública y las otras firmas $i=1,\ldots,n$ como privadas. La firma pública maximiza el excedente social (Domestic Social Surplus):

$$S\left(p,q_0,q_1,\ldots,q_n\right)=\int_0^{\sum_{i=0}^{n}q_i} p\left(x\right)dx-p\left(\sum_{i=0}^{n}q_i\right)-b_0q_0-\frac{1}{2}a_0q_0^2$$

y las firmas privadas buscan maximizar sus ganancias netas:

$$\pi_i\left(p,q_i\right)=p\cdot q_i-f_i\left(q_i\right).$$

Bajo las suposiciones generales se demuestra la existencia y unicidad del equilibrio exterior para cualquier coeficiente de influencia $v_i \geq 0$, $i = 0,1,\ldots,n$ y la existencia del equilibrio interior o consistente.

En [21] se extienden los resultados obtenidos en [15] para el caso de oligopolio con una compañía de administración laboral compitiendo con agentes que buscan maximizar la ganancia neta.

En [16] y [17] los resultados de [15] están extendidos para el caso de oligopolio mixto, en donde la firma pública maximiza una combinación. convexa de sus intereses propios, es decir, su utilidad neta con los intereses de su población, es decir, el excedente social, más exacto:

$$S\left(p, q_0, q_1, \ldots, q_n\right) = \beta\left(\int_0^{\sum_{i=0}^{n} q_i} p\left(x\right)dx - p\left(\sum_{i=0}^{n} q_i\right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2}a_0 q_0^2\right)$$
$$+\left(1-\beta\right)\left(pq_0 - b_0 q_0 - \frac{1}{2}a_0 q_0^2\right)$$

Donde $0 < \beta \leq 1$, es decir, podemos considerar β como "grado de la socialización".

En [18] para el modelo de oligopolio parcialmente mixto descrito en [16] está formulado y demostrado el criterio para elección de "grado óptimo de la socialización", es decir, la elección de valor óptimo para el parámetro β.

En este trabajo extendemos los resultados de [16] y [17] para el modelo de oligopolio parcialmente mixto, en cual la firma publica $(i = 0)$ se selecciona su volumen de producción $q_0 \geq 0$ para maximizar la combinación convexa de la función de utilidad por trabajador y la utilidad neta

$$S=\beta\left(\frac{p\cdot q_0-f_0\left(q_0\right)}{\bar{a}q_0+\bar{b}}\right)+\left(1-\beta\right)\left(p\cdot q_0-f_0\left(q_0\right)\right).$$

donde el parámetro β satisface la condición $0<\beta\leq 1$ y las firmas privadas $(i=1,...,n)$ escogen su producción $q_i\geq 0$ maximizando su utilidad neta

$$\pi_i\left(p,q_i\right)=p\cdot q_i-f_i\left(q_i\right).$$

En el Capítulo 1 se describe el modelo de oligopolio parcialmente mixto, se definen y se demuestran bajo las suposiciones comunes la existencia y unicidad del equilibrio exterior y la existencia del equilibrio interior.

En el Capítulo 2 especificamos en detalle el modelo descrito en Capítulo 1 para el caso de duopolio con la función de la demanda lineal. Además, investigamos en detalle los comportamientos del precio, volúmenes de producción de los agentes, del volumen total de producción para los equilibrios de Cournot y Competencia Perfecta. Los resultados obtenidos nos van a servir para investigación futura para hacer la comparación entre si los tres equilibrios (Cournot, Competencia Perfecta y Equilibrio Conjeturado Consistente propuesto en el Capítulo1) para finalmente tratar de formular el criterio de optimalidad para elección del parámetro β .

En el Capítulo 3 se explican algunos resultados numéricos.

Finalmente, en el Capitulo 4 encontraremos las conclusiones, trabajo a futuro y por ultimo las referencias.

Capítulo 1. Equilibrio conjeturado en un modelo de oligopolio parcialmente mixto.

1.1 Especificación del Modelo

En este modelo consideramos no menos de 2 productores de un bien homogéneo con funciones de costos $f_i(q_i),\ \ i=0,\dots,n;\ \ n\geq 1$ donde q_i es la producción del agente i. La demanda vamos a considerar de dos tipos: pasiva y activa. La demanda pasiva depende del precio y está dada por $G(p)$, donde p es el precio de mercado propuesto por los agentes productores. La demanda activa D es no-negativa y no depende del precio. El equilibrio entre la oferta y la demanda a un precio determinado p está dado por la siguiente igualdad de balance

$$\sum_{i=0}^{n} q_i = G(p) + D. \tag{1.1.1}$$

Introducimos los siguientes supuestos del modelo.

A1. *La función de demanda* $G(p)$ *está definida para precios* $p\in(0,+\infty)$ *y es continuamente diferenciable, no creciente, con la derivada* $G'(p)\leq 0.$

A2. *Para cada agente privado* $i=1,\dots,n,$ *la función de costos* $f_i(q_i)$ *es dos veces continuamente diferenciable, además,* $f_i'(0)>0,\ \ f_i''(q_i)>0.$

Para la compañía pública $i=0,$ *la función de costos está dada por*

$$f_0\left(q_0\right)=\overline{f_0}\left(q_0\right)\cdot l\left(q_0\right), \tag{1.1.2}$$

donde $\bar{f}_0\left(q_0\right)$ *es dos veces continuamente diferenciable y* $\overline{f_0}'\left(0\right)>0,\ \overline{f_0}''\left(q_0\right)>0$ *.* *La función*

$$l\left(q_0\right)=\bar{a}q_0+\bar{b},\ \ \bar{a}>0,\ \ \bar{b}>0, \tag{1.1.3}$$

es una función de insumos laborales (labor input function, Ohnishi 2012).

Así, la función de costo para el agente público $f_0\left(q_0\right)$ *es dos veces continuamente diferenciable y* $f_0'\left(0\right)>0,\ f_0''\left(q_0\right)>0.$

El agente privado $i,\ \ i=1,\dots,n,$ escoge su producción $q_i\geq 0$ para maximizar su utilidad neta

$$\pi_i\left(p,q_i\right)=p\cdot q_i-f_i\left(q_i\right). \tag{1.1.4}$$

Por otro lado, la compañía pública con $i=0$, selecciona su volumen de producción $q_0\geq 0$ para maximizar la combinación convexa de la función de utilidad por trabajador (*income per worker function*, Ohnishi 2012) y la utilidad neta dada por

$$S\left(\beta,p,q_0\right)=\beta\left(\frac{p\cdot q_0-f_0\left(q_0\right)}{\bar{a}q_0+\bar{b}}\right)+\left(1-\beta\right)\left(p\cdot q_0-f_0\left(q_0\right)\right). \tag{1.1.5}$$

con el parámetro de $\beta,\ \ 0<\beta\leq 1.$

Postulamos que los siguientes agentes (tanto públicos como privados) suponen que su elección de volumen de producción podría afectar el valor del precio del mercado p. Este supuesto puede ser definido por una dependencia conjeturada de la variación del precio p en función de su volumen de producción q_i. Así, las condiciones de optimalidad de primer orden tienen la siguiente forma:

En las firmas privadas $(i=1,2,\ldots,n)$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f_i'(q_i) \begin{cases} =0 & si \quad q_0 > 0, \\ \leq 0 & si \quad q_0 = 0. \end{cases} \text{ para } i=1,2,\ldots,n, \tag{1.1.6}$$

Y en la compañía pública (con $i=0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_0} = \beta & \left[p \frac{\bar{b}}{\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2} + \frac{q_0}{\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)} \frac{\partial p}{\partial q_0} - \bar{f}_0{}'(q_0) \right] \\ & + (1-\beta)\left[p + q_0 \frac{\partial p}{\partial q_0} - f_0'(q_0) \right] \begin{cases} =0, & q_0 > 0; \\ \leq 0, & q_0 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Para describir el comportamiento del agente i, es necesario evaluar el comportamiento de la derivada

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} = -v_i \tag{1.1.8}$$

antes de la dependencia de p respecto a q_i.

Introducimos el signo negativo en (1.1.8) con el objetivo de utilizar valores no negativos de v_i. La dependencia de p respecto a q_i debe garantizar la concavidad

del beneficio (al menos localmente) del agente i en función de su producción. De otra manera, no se pueden utilizar las condiciones
necesarias (1.1.6) y (1.1.7) como suficientes.

Para los agentes privados, como suponemos que las funciones de costo $f_i(q_i)$ son estrictamente convexas y para que las condiciones (1.1.6) sean suficientes debemos garantizar la concavidad de la función $\pi_i(q_i)$ es obtener la concavidad del producto $p \cdot q_i$. Para esto es suficiente suponer que el coeficiente v_i, $i=1,\dots,n$ (***coeficiente de influencia*** del agente i) es no negativo y constante. Entonces, la dependencia local conjeturada de la utilidad respecto a la variación de su volumen de producción η_i tiene la forma

$$\left[p - v_i(\eta_i - q_i)\right]\eta_i - f_i(\eta_i) \tag{1.1.9}$$

y las condiciones de primer orden en $\eta_i = q_i$ están dadas por las relaciones

$$\begin{cases} p = v_i q_i + f_i'(q_i), & si \quad q_i > 0; \\ p \le f_i'(0), & si \quad q_i = 0. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Para el agente público, la condición (1.1.7) sea suficiente, se debe garantizar la concavidad de la función S, es fácil determinar la concavidad de $\frac{p \cdot q_0}{\bar{a}q_0 + \bar{b}}$.

Finalmente, para el agente público, la conjetura de la dependencia local de la función de beneficio respecto a su volumen de producción η_0 está dada de la siguiente manera

$$S=\beta\left(\frac{\left[p-v_0\left(\eta_0-q_0\right)\right]\eta_0-f_0\left(\eta_0\right)}{\bar{a}\eta_0+\bar{b}}\right)+\left(1-\beta\right)\left(\left[p-v_0\left(\eta_0-q_0\right)\right]\eta_0-f_0\left(\eta_0\right)\right), \tag{1.1.11}$$

con el parámetro $\beta,\ 0<\beta\leq 1,$ lo cual permite escribir las condiciones de primer orden en $\eta_0=q_0$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} p=v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\dfrac{\beta+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)}{\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}\right]+\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\dfrac{\beta\bar{f}_0'\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0'\left(q_0\right)}{\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}\right], & q_0>0; \\ p\leq\left[\dfrac{\beta\bar{f}_0'\left(0\right)+\left(1-\beta\right)f_0'\left(0\right)}{\beta+\left(1-\beta\right)\bar{b}}\right]\bar{b}, & q_0=0 \end{cases} \tag{1.1.12}$$

suponiendo que v_0 es constante no negativa la dependencia local de la compañía pública respecto a la producción.

Notamos por

$$F\left(q_0\right)=\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\frac{\beta\bar{f}_0'\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0'\left(q_0\right)}{\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}\right] \tag{1.1.13}$$

y demostramos que la derivada de función $F\left(q_0\right)$ respecto a q_0 es positiva

$$\frac{dF}{dq_0} = \frac{1}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]^2} \times$$

$$\left\{\left[\beta \bar{f}_0''(q_0) + (1-\beta) f_0''(q_0)\right]\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2 \left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]\right.$$

$$+2\bar{a}\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left[\beta\bar{f}'_0(q_0) + (1-\beta) f'_0(q_0)\right]\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]$$

$$\left.-2\bar{a}(1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^3\left[\beta\bar{f}'_0(q_0) + (1-\beta) f'_0(q_0)\right]\right\}$$

$$\frac{dF}{dq_0} == \frac{1}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]^2} \times$$

$$\left\{\left[\beta \bar{f}_0''(q_0) + (1-\beta) f_0''(q_0)\right]\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2 \left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right] + \right. \tag{1.1.14}$$

$$\left. +2\beta\bar{a}\bar{b}\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left[\beta\bar{f}'_0(q_0) + (1-\beta) f'_0(q_0)\right]\right\} > 0$$

Las igualdades (1.1.10) y (1.1.12) permiten definir q_i como funciones de p y v_i continuamente diferenciables. Para mostrarlo introducimos las siguientes funciones a partir de las condiciones de optimalidad (1.1.10) para $i = 1, \ldots, n$,

$$\gamma_i(p, q_i, v_i) = p - v_i q_i - f_i'(q_i). \tag{1.1.15}$$

Por (1.1.10), podemos escribir

$$\gamma_i(p, q_i, v_i) = 0. \tag{1.1.16}$$

Como,

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_i} = -v_i - f_i''(q_i) < 0, \tag{1.1.17}$$

por el teorema de la función implícita es posible expresar el volumen de producción

$$q_i = q_i\left(\beta, p, v_i\right), \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.18}$$

del agente i como una función continuamente diferenciable respecto a sus variables.

Al sustituir esta función en (1.1.16) y derivar respecto a p, obtenemos

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial p} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p} = 1 - \left[v_i + f_i''\left(q_i\right)\right]\frac{\partial q_i}{\partial p} = 0. \tag{1.1.19}$$

De (1.1.19),

$$\frac{\partial q_i}{\partial p} = \frac{1}{v_i + f_i''\left(q_i\right)} > 0, \; i = 1, \ldots, n. \tag{1.1.20}$$

De la misma manera, para el agente $i = 0$,

$$\gamma_0\left(\beta, p, q_0, v_0\right) = p - v_0 q_0\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left[\frac{\beta + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}\right] - \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\left[\frac{\beta\,\overline{f}_0'\left(q_0\right) + (1-\beta)\,f_0'\left(q_0\right)}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}\right]$$

$$\begin{aligned}\gamma_0\left(\beta, p, q_0, v_0\right) = p - \frac{1}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}\Big(& v_0 q_0\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left[\beta + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\right] \\ & + \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\left[\beta\,\overline{f}_0'\left(q_0\right) + (1-\beta)\,f_0'\left(q_0\right)\right]\Big)\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Por (1.1.12), podemos escribir

$$\gamma_0\left(\beta, p, q_0, v_0\right) = 0. \tag{1.1.22}$$

Calculando la derivada de γ_0 con respecto a q_0

$$\frac{\partial\gamma_0}{\partial q_0} = -\left\{ \frac{-2\bar{a}(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)}{\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]^2} \cdot \left\langle v_0 q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right] \right.\right.$$

$$\left. +\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\overline{f}_0{}'(q_0)+(1-\beta)f_0'(q_0)\right]\right\rangle$$

$$+\left(\frac{1}{\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}\right)\left\langle\left(v_0\left(2\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right)\left[\beta+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right]\right.$$

$$+(1-\beta)\bar{a}v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)+2\bar{a}\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta\overline{f}_0{}'(q_0)+(1-\beta)f_0'(q_0)\right]$$

$$\left.\left. +\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\overline{f}_0{}''(q_0)+(1-\beta)f_0''(q_0)\right]\right\rangle\right\}$$

$$\frac{\partial\gamma_0}{\partial q_0} = -\frac{1}{\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]^2} \times \left\{\left(-2\bar{a}(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right)\cdot\right.$$

$$\left\langle v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right]+\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\overline{f}_0{}'(q_0)+(1-\beta)f_0'(q_0)\right]\right\rangle$$

$$+\left(\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right)\left\langle\left(v_0\left(2\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right)\left[\beta+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right]\right.$$

$$+(1-\beta)\bar{a}v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)+2\bar{a}\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta\overline{f}_0{}'(q_0)+(1-\beta)f_0'(q_0)\right]$$

$$\left.\left. +\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\overline{f}_0{}''(q_0)+(1-\beta)f_0''(q_0)\right]\right\rangle\right\}$$

Introduciendo la notación siguiente

$$\Theta=\left(-2\bar{a}\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right)\Big\langle v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right]$$
$$+\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{f}_0'\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0'\left(q_0\right)\right]\Big\rangle$$
$$+\left(\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right)\Big\langle\left(v_0\left(2\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right)\left[\beta+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right]$$
$$+\left(1-\beta\right)\bar{a}v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)+2\bar{a}\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta\bar{f}_0'\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0'\left(q_0\right)\right]$$
$$+\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{f}_0''\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0''\left(q_0\right)\right]\Big\rangle$$

y con las simplificaciones correspondiente

$$\Theta=v_0\left[\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]^2+2\bar{a}\bar{b}\beta q_0v_0\left[\beta+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\right]$$
$$+\left[\beta\bar{f}_0''\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0''\left(q_0\right)\right]\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]$$
$$+2\bar{a}\bar{b}\beta\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\beta\bar{f}_0'\left(q_0\right)+\left(1-\beta\right)f_0'\left(q_0\right)\right]>0,$$

observamos que $\Theta>0$ dado que las variables son no negativas.

Así, reescribimos la derivada de γ_0 con respecto a q_0 de siguiente manera

$$\frac{\partial\gamma_0}{\partial q_0}=-\frac{1}{\left[\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]^2}\cdot\left\{\Theta\right\}<0. \tag{1.1.23}$$

Tomando en cuenta (1.1.23) por el teorema de la función implícita de (1.1.22) es posible expresar el volumen de producción de la compañía pública

$$q_0=q_0\left(\beta,p,v_0\right), \tag{1.1.24}$$

como una función continuamente diferenciable respecto a sus variables. Al sustituir esta función en (1.1.22) y derivar respecto a p, obtenemos

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial p} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial p} = 1 - \left[\frac{1}{\left[\beta \bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a} q_0 + \bar{b}\right)^2\right]^2} \cdot \{\Theta\} \right] \frac{\partial q_0}{\partial p} = 0. \tag{1.1.25}$$

Como $\Theta > 0$ de (1.1.25) despejando $\frac{\partial q_0}{\partial p}$ obtenemos que

$$\frac{\partial q_0}{\partial p} = \frac{\left[\beta \bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a} q_0 + \bar{b}\right)^2\right]^2}{\Theta} > 0. \tag{1.1.26}$$

Supongamos que las conjeturas de los agentes están dadas exteriormente como lo suponen Bulavsky y Kalashnikov [4, 5], los valores de v_i serían funciones de q_i, p y puede ser de volumen total del mercado G. Sin embargo, en este trabajo utilizamos el enfoque de Bulavsky [3], en donde los parámetros de conjeturas de equilibrio, los coeficientes de influencia se determinan simultáneamente con el precio p y los valores de producción q_i a través de un procedimiento de verificación. Para este caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados sólo para el equilibrio. A partir de aquí nos referiremos a un equilibrio tal como un equilibrio ***interior*** descrito por el conjunto de variables y parámetros

$$(p, q_0, q_1, \ldots, q_n, v_0, v_1, \ldots, v_n). \tag{1.1.27}$$

1.2 Equilibrio Exterior

Para presentar el procedimiento de verificación, es necesaria otra noción de equilibrio llamada ***exterior*** con los parámetros ν_i determinados exógenamente.

Definición 1. *El vector*

$$\left(p, q_0, q_1, \ldots, q_n\right) \tag{1.2.1}$$

*se denomina **equilibrio exterior** para determinados coeficientes de influencia*

$$\left(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n\right), \quad \nu_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.2.2}$$

si se cumple la condición de balance (1.1.1) *y para todos los agentes se cumplen las condiciones de optimalidad* (1.1.10) *y* (1.1.12).

En lo siguiente, sólo consideraremos el caso en el que el conjunto de los agentes participantes en el mercado está fijo (independientemente de los coeficientes de influencia ν_i). Para asegurar lo anterior establecemos el siguiente supuesto.

A3. *Para el precio*

$$p_0 = \max\left\{ \max_{1\leq i\leq n}\left\{f_i'(0)\right\}, \left[\frac{\beta \overline{f}_0{}'(0) + (1-\beta) f_0'(0)}{\beta + (1-\beta)\overline{b}}\right]\overline{b} \right\} \tag{1.2.3}$$

*existe un único volumen de producción q_i^0 (por **A2**), $i = 1, \ldots, n$ para las firmas privadas tal que*

$$p_0 = f_i'\left(q_i^0\right), \tag{1.2.4}$$

para la firma $i=0$ *(por el comportamiento monótonamente creciente) (1.1.14) de la función* (1.1.13) *existe un único volumen de producción* q_0^0 *tal que*

$$p_0 = \left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2 \left[\frac{\beta \bar{f}_0{}' \left(q_0^0\right) + (1-\beta) f_0' \left(q_0^0\right)}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2} \right], \tag{1.2.5}$$

Además, se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=0}^{n} q_i^0 < G\left(p_0\right). \tag{1.2.6}$$

Vamos a justificar que las ecuaciones (1.2.4) y (1.2.5) tienen solución única y para esto reescribimos de la siguiente manera:

Para la firma privada es fácil ver que de la siguiente función y su derivada

$$\psi_i\left(p_0, q_i^0\right) = p_0 - f_i'\left(q_i^0\right) \text{ y } \frac{\partial \psi\left(p_0, q_i^0\right)}{\partial q_i^0} = -f_i''\left(q_i^0\right) < 0 \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n,$$

tenemos la función expresada como $q_i^0 = q_i^0\left(p_0\right)$ con $i = 1, 2, \ldots, n,$

Firma pública:

$$\psi_0\left(\beta, p_0, q_0^0\right) = p_0 - \left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2 \left[\frac{\beta \bar{f}_0{}' \left(q_0^0\right) + (1-\beta) f_0' \left(q_0^0\right)}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2} \right]$$

Donde se observa que de la ecuación (1.1.14) obtenemos

$$\frac{\partial\psi\left(\beta,p_0,q_0^0\right)}{\partial q_0^0}=\frac{1}{\left[\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)^2\right]^2}\times$$

$$\left\{\left[\beta\bar{f}_0''\left(q_0^0\right)+\left(1-\beta\right)f_0''\left(q_0^0\right)\right]\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{b}+\left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+2\beta\bar{a}\bar{b}\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)\left[\beta\bar{f}'_0\left(q_0^0\right)+\left(1-\beta\right)f'_0\left(q_0^0\right)\right]\right\}>0$$

Por el teorema de función implícita podemos expresar $q_0^0=q_0^0\left(\beta,p_0\right)$.

El motivo para introducir el **A3** es el siguiente**:** supuesto **A3** junto con los supuestos **A1** y **A2**, garantiza que las condiciones (1.1.1), (1.1.10) y (1.1.12) se cumplan simultáneamente si y sólo si $p>p_0$, es decir, si y sólo si los volúmenes de producción q_i, $i=0,1,\ldots,n$ son estrictamente positivos. La demostración de este hecho esta dentro de la demostración del **Teorema 1.**

Teorema 1. *Con los supuestos* **A1**, **A2** y **A3**, *para cuales quiera* $D\geq 0$ *y* $v_i\geq 0,\ i=0,1,\ldots,n,$ *existe un único equilibrio exterior* $\left(p,q_0,q_1,\ldots,q_n\right)$*, que depende continuamente de los parámetros* $(D,v_0,v_1,...,v_n)$. *El precio de equilibrio*

$$p=p\left(D,v_0,v_1,\ldots,v_n\right) \tag{1.2.7}$$

es diferenciable respecto a D *y a* $v_i,\ i=0,1,\ldots,n$. *Además,*

$$p\left(D,v_0,v_1,\ldots,v_n\right)>p_0 \tag{1.2.8}$$

y

$$\frac{\partial p\left(D,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n\right)}{\partial D}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i+f_i''\left(q_i\right)}+\frac{\partial q_0\left(\beta,p,v_0\right)}{\partial p}-G'\left(p\right)}. \tag{1.2.9}$$

Donde $\frac{\partial q_0\left(\beta,p,v_0\right)}{\partial p}$ *es la derivada parcial de la función de solución de las condiciones de optimalidad* (1.1.12) *para el agente* $i=0$*, la cual está bien definida en el octante no negativo* $\left(\beta,p,v_0\right)\in R_+^3$.

Demostración.

Junto con p_0 introducido en **A3**, consideramos

$$\begin{aligned} p_1=\min\Bigg\{&\lim_{q_0\to+\infty}\Bigg[v_0q_0\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)\left[\frac{\beta+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)}{\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}\right] \\ &+\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\left[\frac{\beta\bar{f}_0{}'\left(q_0\right)+(1-\beta)f_0'\left(q_0\right)}{\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2}\right]\Bigg],\min_{1\le i\le n}\left\{\lim_{q_i\to+\infty}\left[f_i'\left(q_i\right)+v_iq_i\right]\right\}\Bigg\} \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Los límites entre los cuales se busca el mínimo pueden ser iguales a $+\infty$. En este caso, $p_1=+\infty$, por ejemplo, cuando todos los coeficientes de influencia v_i, $i=0,1,\ldots,n,$ son mayores a cero. Sin embargo, p_1 puede ser finito en el caso en que $v_i=0$ para algún $i=0,1,\ldots,n.$

De (1.1.20) y (1.1.26) se sabe que q_i, $i=0,1,\ldots,n,$ son continuamente diferenciables respecto a p y que $\frac{\partial q_i}{\partial p}$, $i=0,1,\ldots,n,$ son positivas. Así,

$$Q(p) = q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i \qquad (1.2.11)$$

es continua y es estrictamente creciente. De acuerdo con A3, para $p = p_0$ se cumple

$$Q(p_0) = \sum_{i=1}^{n} q_i^0 < G(p_0) \qquad (1.2.12)$$

y cuando $p \to p_1$ por (37) la suma $Q(p)$ tiende a $+\infty$. Además, como $G(p)$ es no creciente, es decir $G'(p) \leq 0$, existe un único $p = p^* > p_0$ con el que se cumple (Vea **Figura 1**)

$$Q(p^*) = G(p^*) + D. \qquad (1.2.13)$$

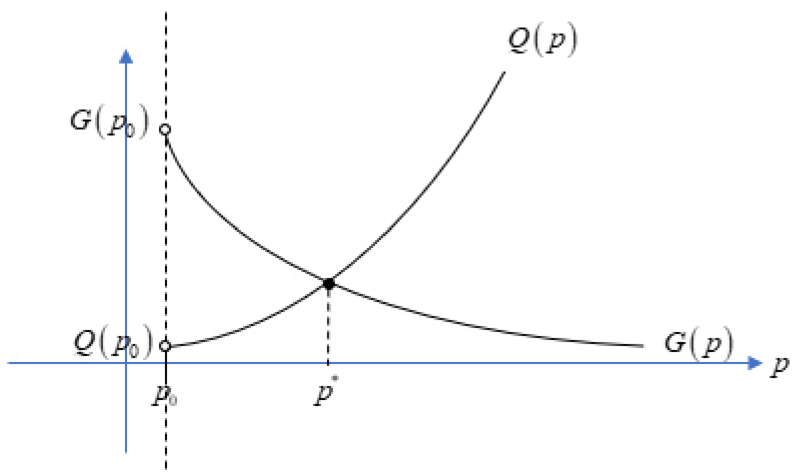

Figura 1

De tal manera está demostrada la unicidad del equilibrio exterior.

Vamos a demostrar que el equilibrio exterior depende continuamente de los parámetros $(D, v_0, v_1, \ldots, v_n)$. Sabemos que es posible expresar el volumen de producción del agente i como función continuamente diferenciable respecto del precio p y del coeficiente de influencia v_i , $i = 0,1,\dots,n.$, $q_0 = q_0(\beta, p, v_i)$, $q_i = q_i(p, v_i)$, $i = 1,\dots,n.$ De esta manera, podemos expresar la ecuación de balance como la siguiente relación:

$$q_0(\beta, p, v_0) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p, v_i) - G(p) - D = 0. \tag{1.2.14}$$

Introducimos la siguiente función

$$\Gamma(p, v_0, v_1, \dots, v_n, D) = q_0(\beta, p, v_0) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p, v_i) - G(p) - D \tag{1.2.15}$$

y reescribimos (1.2.14)

$$\Gamma(p, v_0, v_1, \dots, v_n, D) = 0. \tag{1.2.16}$$

Como

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i + f_i''(q_i)} + \frac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p} - G'(p) > 0, \tag{1.2.17}$$

por el teorema de la función implícita es posible expresar el precio de equilibrio como una función

$$p = p(v_0, v_1, \dots, v_n, D) \tag{1.2.18}$$

que es diferenciable con respecto a todos sus parámetros. La derivada parcial del precio de equilibrio p con respecto a D se puede encontrar con la igualdad

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \Gamma}{\partial D} = 0 \tag{1.2.19}$$

de la cual obtenemos (1.2.9). Así la demostración del teorema 1 está terminada.

1.3 Equilibrio Interior

Una vez demostrada la fórmula (1.2.9), es posible describir el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia $_i$ siguiendo a Bulavsky. Suponemos que está dado un equilibrio exterior para algunos $v_0, v_1, \ldots, v_n$ y D. Y suponemos que uno de los productores, el agente k, cambia temporalmente su comportamiento: deja de maximizar su utilidad conjeturada (o la función de ingreso por trabajador y utilidad neta para $k=0$) y hace pequeñas variaciones en su volumen de producción q_k. Esto es equivalente a dejar dentro del modelo solo los productores con índice $i \neq k$ y restar el volumen de producción q_k de la demanda activa D. La variación del agente k en su producción q_k es equivalente a la variación en la demanda activa D_k (solo en la dirección contraria) dada en la forma

$$D_k = D - q_k. \qquad (1.3.1)$$

Si consideramos variaciones de q_k infinitesimales, el agente k puede obtener sus coeficientes de influencia a través de la observación de los cambios correspondientes del precio de equilibrio p respecto a demanda activa D_k. Utilizando (1.2.9) y excluyendo de las sumas el término correspondiente a $i=k$, obtenemos el criterio de consistencia.

Criterio de consistencia. *Los coeficientes de influencia* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *son consistentes para un equilibrio exterior* $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ *si se cumplen las siguientes igualdades*:

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i + f_i''(q_i)} - G'(p)}, \tag{1.3.2}$$

y

$$v_i = \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{v_j + f_j''(q_j)} + \frac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p} - G'(p)} \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.3.3}$$

Ahora definimos el concepto de equilibrio interior.

Definición 2. *La colección* $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ *donde* $v_k \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots, n,$ *se denomina* ***equilibrio interior*** *si, para los coeficientes de influencia considerados, el conjunto* $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ *es un equilibrio exterior y se cumple el criterio de consistencia para todo* k.

Teorema 2. Para el caso $n > 2$ *bajo los supuestos* **A1***,* **A2** *y* **A3***, existe un equilibrio interior. Para los casos* $n = 1$ *y* $n = 2$*, existe un equilibrio interior si además de los supuestos* **A1***,* **A2** *y* **A3** *se cumple que* $|G'(p)| \geq \varepsilon > 0.$

Demostración

En lo siguiente demostraremos que existen $v_i \geq 0,\; i = 0,1,\ldots,n;\; q_i \geq 0,\; i = 0,1,\ldots,n;$ y $p > p_0$ tales que el vector $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ constituye un equilibrio exterior y se cumplen las igualdades (1.3.2) y (1.3.3).

Introducimos el parámetro α tal que

$$G'(p) = \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ para } \alpha \in [-1,0] \tag{1.3.4}$$

y reemplazamos en (1.3.2) y (1.3.3) de la siguiente forma:

$$F_0(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i + f_i''(q_i)} - \alpha}, \tag{1.3.5}$$

y

$$F_i(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{v_j + f_j''(q_j)} + \frac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p}\right] - \alpha}, \; i = 1, \ldots, n. \tag{1.3.6}$$

Como $v_i \geq 0,\; f_i''(q_i) > 0,\; i = 0,1,\ldots,n$ y $\alpha \in [-1,0]$, las funciones F_i, $i = 0,1,\ldots,n,$ están bien definidas y son continuas con respecto a sus argumentos en los dominios correspondientes. Ahora introducimos una función auxiliar

$$\Phi : [-1,0] \times R^{n+1} \to [-1,0] \tag{1.3.7}$$

de la siguiente manera. Para $\alpha \in [-1,0]$ arbitraria y $(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in R^{n+1}$, encontramos el vector de equilibrio exterior $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ (único por el **Teorema**

1) y calculamos la derivada $G'(p)$ en el punto p. Definimos el valor de la función Φ como sigue:

$$\Phi(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \hat{\alpha} = \frac{G'(p)}{1 - G'(p)} \in [-1, 0]. \quad . \tag{1.3.8}$$

Como la derivada $G'(p)$ es continua en p (por el supuesto **A1**) y el precio de equilibrio $p = p(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ es una función continua (por el **Teorema 1**), es continua dado que es una superposición de funciones continuas. Para terminar la demostración construimos un mapeo

$$H = (\Phi, F_0, F_1, \ldots, F_n) : [-1, 0] \times R^{n+1} \to [-1, 0] \times R^{n+1} \tag{1.3.9}$$

y seleccionamos un conjunto compacto convexo que es mapeado a sí mismo por H. Definimos

$$s = \max\left\{ f_i''(q_i) \mid q_i \in [0, G(p_0)],\ i = 0, 1, \ldots, n \right\}. \quad . \tag{1.3.10}$$

Las fórmulas (1.3.5) y (1.3.6) tienen entonces las siguientes relaciones: si $\alpha = -1$, entonces

$$F_0(-1, v_0, v_1, \ldots, v_n) = 0, \tag{1.3.11}$$

$$F_i(-1, v_0, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.3.12}$$

mientras que para $\alpha \in (-1,0]$ y $n>2$ se tiene

$$0 \le F_0(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i + f_i''(q_i)} - \alpha} \le \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i + f_i''(q_i)}}$$
$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i + f_i''(q_i)}} \le \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i + s}} \le \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{v_i + s}} \tag{1.3.13}$$

y

$$0 \le F_i(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{v_j + f_j''(q_j)} + \frac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p}\right] - \alpha}$$
$$\le \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{v_j + f_j''(q_j)} + \frac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p}\right]}$$
$$\le \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{v_j + f_j''(q_j)} + \frac{\partial q_0(\beta, p, v_0)'}{\partial p}} \le \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{v_j + f_j''(q_j)}} \tag{1.3.14}$$
$$\le \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{v_j + s}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Las relaciones (1.3.11) – (1.3.14) implican que para cualquier $\alpha \in [-1,0]$ si

$$0 \le v_j \le \frac{s}{n-2}, \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{1.3.15}$$

los valores de $F_j(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n)$, $j = 0,1,\ldots,n$ caen en el mismo intervalo $\left[0, \frac{s}{n-2}\right]$.

Por lo tanto, establecimos que $H = (\Phi, F_0, F_1, \ldots, F_n)$ mapea el subconjunto compacto $[-1,0] \times \left[0, \frac{s}{n-2}\right]^{n+1}$ a sí mismo. Por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, H tiene un punto fijo, es decir,

$$\begin{cases} \Phi(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \alpha, \\ F_0(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = v_0, \\ F_1(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = v_1, \\ \qquad \vdots \\ F_n(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = v_n. \end{cases} \tag{1.3.16}$$

Para los casos $n = 1$ y $n = 2$, se tiene que

$$0 \le F_0(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i + f_i''(q_i)} - \alpha} \le \frac{1}{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \frac{1}{\varepsilon} \tag{1.3.17}$$

y

$$0 \le F_i(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \frac{1}{v_j + f_j''(q_j)} + \frac{\partial \overline{q}_0(\beta, p, v_0)}{\partial p}\right] - \frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \frac{1}{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \le \frac{1}{\varepsilon} \tag{1.3.18}$$

Si $0 \le v_j \le \frac{1}{\varepsilon}$, $j = 0,1,\ldots,n$, entonces los valores de $F_j(\alpha, v_0, v_1, \ldots, v_n)$, $j = 0,1,\ldots,n$, caen en el mismo intervalo cerrado $\left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. Con esto, establecemos que el mapeo continuo $H=\left(\Phi,F_0,F_1,\ldots,F_n\right)$ mapea el subconjunto continuo $\left[-1,0\right]\times\left[0,\frac{1}{\varepsilon}\right]^{n+1}$ a sí mismo. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, H tiene un punto fijo $\left(\alpha,v_0,v_1,\ldots,v_n\right)$.

Habiendo determinado el equilibrio exterior único por el **Teorema 1** para los coeficientes de influencia $\left(v_0,v_1,\ldots,v_n\right)$, podemos concluir de (1.3.16) y de la definición de la función Φ que $G'\left(p\right)=\frac{\alpha}{1+\alpha}$ y los coeficientes de influencia satisfacen las condiciones (1.3.2) y (1.3.3). Por lo tanto, de acuerdo con la **Definición 2**, el vector $\left(p,q_0,q_1,\ldots,q_n,v_0,v_1,\ldots,v_n\right)$ conforma el equilibrio interior y la demostración está completa.

Capítulo 2. Caso particular: Duopolio.

2.1 Especificación del problema

Especificamos en detalle el modelo de oligopolio propuesto en Capítulo 1 para un mercado de duopolio mixto, es decir, un agente público y el otro privado, de un bien homogéneo con funciones de costos $f_i(q_i),\ i=0,1;$ donde q_i es la producción del agente i. También consideremos la demanda $G(p)$ como la siguiente función, es decir

$$G(p)=\begin{cases} -Kp+T,\ K>0,\ T>0\ si\ p\le\dfrac{T}{K} \\ 0\ si\ p>\dfrac{T}{K} \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

y la demanda activa D es no-negativa y no depende del precio. Es evidente que la función $G(p)$ no es diferenciable, es decir, no satisface a supuesto **A1**. Pero como vamos a ver adelante este detalle no afecta los resultados formulados en **Teorema 1** del Capítulo 1.

El equilibrio entre la oferta y demanda para el precio determinado está dado por la siguiente ecuación de balance

$$q_0+q_1=G(p)+D. \qquad (2.1.2)$$

Respecto a las funciones de los costos hacemos el siguiente supuesto:

A4. *Para el agente* $i=1,$ *la función de costos* $f_1(q_1)$ *es cuadrática*

$$f_1(q_1)=\frac{1}{2}a_1q_1^{\ 2}+b_1q_1,\ \ a_1>0,\ b_1>0. \tag{2.1.3}$$

Para el agente público $i=0,$ *la función costo está dada por*

$$f_0(q_0)=l(q_0)\,\overline{f}_0(q_0)\,, \tag{2.1.4}$$

donde $\overline{f}_0(q_0)=\frac{1}{2}a_0q_0^{\ 2}+b_0q_0,\ \ a_0>0,\ b_0>0$ y

$$l(q_0)=\overline{a}q_0+\overline{b},\ \ \overline{a}>0,\ \ \overline{b}>0, \tag{2.1.5}$$

es la función de insumos laborales.

Vamos a necesitar adelante las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} f_0'(q_0)&=\left(\overline{a}q_0+\overline{b}\right)\left(a_0q_0+b_0\right)+\overline{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0\right)^2+b_0q_0\right)>0,\\ f_0''(q_0)&=2\overline{a}\left(a_0q_0+b_0\right)+a_0\left(\overline{a}q_0+\overline{b}\right)>0, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\overline{f}_0'(q_0)=a_0q_0+b_0>0\,;\ \overline{f}_0''(q_0)=a_0>0. \tag{2.1.7}$$

El agente privado $i=1,$ escoge su producción para maximizar

$$\pi_1(p,q_1)=p\cdot q_1-\left(\frac{1}{2}a_1q_1^{\ 2}+b_1q_1\right). \tag{2.1.8}$$

Y el agente público $i=0$ selecciona su volumen de producción $q_0\geq 0$ para maximizar

$$S(\beta, p, q_0) = \beta\left(\frac{p\cdot q_0 - \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0\right)^2 + b_0 q_0\right)}{\bar{a}q_0 + \bar{b}}\right) \tag{2.1.9}$$

$$+\left(1-\beta\right)\left(p\cdot q_0 - \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0\right)^2 + b_0 q_0\right)\right).$$

con $\beta \in \left(0,1\right]$.

Tomando en cuenta (1.1.8) las condiciones de optimalidad (1.1.10) y (1.1.12) se reescriben para duopolio de la siguiente manera:

Para la firma privada

$$\begin{cases} p = v_1 q_1 - \left(a_1 q_1 + b_1\right) & si \quad q_1 > 0, \\ p \le -b_1 & si \quad q_1 = 0. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

y para la firma pública

$$\begin{cases} p = v_0 q_0\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left[\frac{\beta + \left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)}{\beta\bar{b} + \left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}\right] + \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2 \times & \\ \left[\frac{\beta\left(a_0 q_0 + b_0\right) + \left(1-\beta\right)\left(\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left(a_0 q_0 + b_0\right) + \bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0\right)^2 + b_0 q_0\right)\right)}{\beta\bar{b} + \left(1-\beta\right)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2}\right], & q_0 > 0; \\ p \le b_0\bar{b}, & q_0 = 0 \end{cases} \tag{2.1.11}$$

De (2.1.11) podemos expresar la siguiente

$$\gamma_0\left(\beta, p, q_0, v_0\right) = p - \frac{1}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2} \times$$

$$\begin{aligned} \Big(& v_0 q_0 \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left[\beta + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\right] + \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2 \left[\beta\left(a_0 q_0 + b_0\right)\right. \\ & \left. + (1-\beta)\left(\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left(a_0 q_0 + b_0\right) + \bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0\right)^2 + b_0 q_0\right)\right)\right]\Big) = 0, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

de donde se obtuvo

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial q_0} = -\frac{1}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]^2} \cdot \left[\widehat{\Theta}\left(\beta, q_0, v_0\right)\right] < 0, \tag{2.1.13}$$

con

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}\left(\beta, q_0, v_0\right) = {} & v_0\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]^2 \\ & + 2\bar{a}\bar{b}\beta\left[\beta + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\right]\left[q_0 v_0 + \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left(a_0 q_0 + b_0\right)\right] \\ & + \left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)^2\right]\left[\beta a_0 + (1-\beta)\left(a_0\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right) + 2\bar{a}\left(a_0 q_0 + b_0\right)\right)\right] \\ & + 2\beta\bar{a}^2\bar{b}q_0(1-\beta)\left(\bar{a}q_0 + \bar{b}\right)\left(\frac{1}{2}a_0 q_0 + b_0\right) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Tomando en cuenta (2.1.13) y el teorema de función implícita de la ecuación (2.1.11) se puede despejar

$$q_0 = q_0\left(\beta, p, v_0\right) \tag{2.1.15}$$

como la función continuamente diferenciable. Para encontrar las derivadas parciales de la función $q_0 = q_0\left(\beta, p, v_0\right)$ sustituimos (2.1.15) en (2.1.12)

$$\gamma_0\left(\beta, p, q_0\left(\beta, p, v_0\right), v_0\right) \equiv 0 \tag{2.1.16}$$

Derivando (2.1.16) respecto a p tenemos

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial p}+\frac{\partial \gamma_0}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial p}=1-\left[\frac{1}{\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]^2}\cdot\left\{\widehat{\Theta}\right\}\right]\frac{\partial q_0}{\partial p}=0.$$

Nos queda

$$\frac{\partial q_0}{\partial p}=\frac{\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0+\bar{b}\right)^2\right]^2}{\widehat{\Theta}}>0. \tag{2.1.17}$$

2.1.1 Equilibrio Exterior

Reformulamos **A3.** para el mercado de duopolio, tenemos lo siguiente

A5. *Para el precio*

$$p_0=\max\left\{b_1,b_0\bar{b}\right\} \tag{2.1.18}$$

para la firma privada (por **A4.**) *existe un único* q_1^0 *tal que*

$$p_0=a_1q_1^0+b_1 \Rightarrow q_1^0=\frac{p_0-b_1}{a_1}, \tag{2.1.19}$$

para la firma $i=0$ *existe un único* q_0^0 *tal que por (2.1.8) y (2.1.9)*

$$p_0=\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)^2\times$$
$$\left[\frac{\beta\left(a_0q_0^0+b_0\right)+(1-\beta)\left(\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)\left(a_0q_0^0+b_0\right)+\bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0^0\right)^2+b_0q_0^0\right)\right)}{\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0^0+\bar{b}\right)^2}\right] \tag{2.1.20}$$

y se cumple la siguiente desigualdad

$$q_0^0 + q_1^0 < G\left(p_0\right). \qquad (2.1.21)$$

Podemos expresar (2.1.19) como

$$\psi\left(\beta, p_0, q_0^0\right) = p_0 - \left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2 \left[\frac{\beta\left(a_0 q_0^0 + b_0\right) + (1-\beta)\left(\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)\left(a_0 q_0^0 + b_0\right) + \bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0^0\right)^2 + b_0 q_0^0\right)\right)}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2} \right]$$

y

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_0^0} = \frac{1}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2\right]^2} \times$$

$$\left\{ \left[\beta a_0 + (1-\beta)\left(2\bar{a}\left(a_0 q_0^0 + b_0\right) + a_0\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)\right)\right]\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2 \left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. +2\beta\bar{a}\bar{b}\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)\left[\beta\left(a_0 q_0^0 + b_0\right) + (1-\beta)\left(\left(\bar{a}q_0^0 + \bar{b}\right)\left(a_0 q_0^0 + b_0\right) + \bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0^0\right)^2 + b_0 q_0^0\right)\right)\right]\right\} > 0$$

Por el teorema de función implícita tenemos que $q_0^0 = q_0^0\left(\beta, p_0\right)$.

La función de demanda $G(p)$ definida por (2.1.1) en el punto $p = \frac{T}{K}$ no es diferenciable pero dentro del intervalo $\left(0, \frac{T}{K}\right)$ satisface las condiciones del supuesto **A1.** Es fácil ver que los pasos de la demostración del **Teorema 1** nos garantizan que el precio p^* del equilibrio exterior en este caso particular está dentro del intervalo $\left(p_0, \frac{T}{K}\right)$ y por esto el **Teorema 1** se cumple para nuestro caso particular (Ver **Figura 2**).

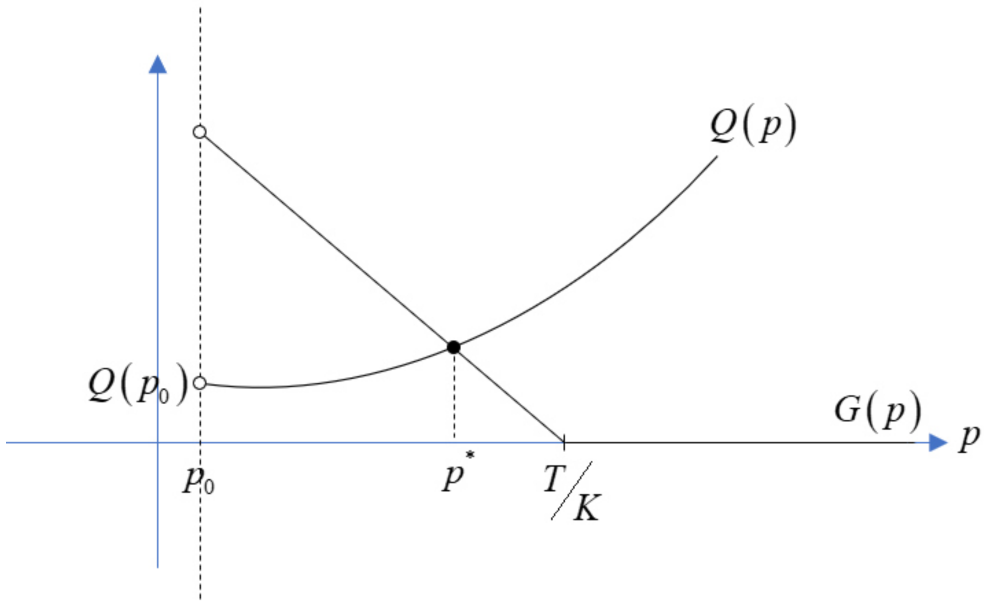

Figura 2

Reformulamos Teorema 1 para Duopolio:

Teorema 3. *Bajo los supuestos* **A4** y **A5**, *para cualesquiera* $D \geq 0$ *y* $v_i \geq 0,\ i = 0,1,$ *existe un único equilibrio exterior* (p, q_0, q_1) *, que depende de los parámetros* (D, v_0, v_1) *. El precio de equilibrio*

$$p = p(D, v_0, v_1) > p_0 \tag{2.1.22}$$

es continuamente diferenciable respecto a D *y a* $v_i,\ i = 0,1,$

$$\frac{\partial p(D, v_0, v_1)}{\partial D} = \frac{1}{\dfrac{1}{v_1 + a_1} + \dfrac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p} + K}, \tag{2.1.23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_0} = -\frac{\dfrac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial v_0}}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{v_i + f_i''(q_i)} + \dfrac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p} - G'(p)} \tag{2.1.24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_1} = -\frac{\dfrac{\partial q_1(p, v_1)}{\partial v_1}}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{v_i + f_i''(q_i)} + \dfrac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p} - G'(p)} \tag{2.1.25}$$

La demostración del **Teorema 3** esta basada en la demostración del **Teorema 1**.

2.1.2 Equilibrio Interior

Reformulamos el Criterio de Consistencia (1.3.2) y (1.3.3):

Criterio de consistencia. *Los coeficientes de influencia* v_0 y v_1 *son consistentes para un equilibrio exterior* (p, q_0, q_1) *si se cumplen*:

$$v_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{v_1 + a_1} + K}, \tag{2.1.26}$$

y

$$v_1 = \frac{1}{\dfrac{\partial q_0(\beta, p, v_0)}{\partial p} + K}, \tag{2.1.25}$$

Por el Teorema 2 del Capítulo 1 para cada $0<\beta\leq 1$ existe el equilibrio consistente $\left(p(\beta),q_0(\beta),q_1(\beta),v_0(\beta),v_1(\beta)\right)$, es decir, $\left(p(\beta),q_0(\beta),q_1(\beta)\right)$ es equilibrio exterior para $v_0(\beta)$ y $v_1(\beta)$, los cuales satisfacen (2.1.26) y (2.1.27).

Cuando se estudia el mercado de duopolio mixto en el enfoque propuesto en este trabajo, es interesante para comparar el equilibrio conjeturado consistente con el equilibrio de Cournot y de Competencia Perfecta. Por esa razón vamos a investigar en detalle cado equilibrio separado. En trabajo presentado alcanzamos a investigar el comportamiento respecto al parámetro β para equilibrio de Cournot y Competencia Perfecta.

2.2 Competencia Perfecta

Para la conjetura de Competencia Perfecta se cumple que $w_i = \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = 0,$ para $i = 0,1$ que para nuestro modelo de duopolio corresponde el siguiente coeficiente de influencia

$$v_i^P = \frac{\partial p}{\partial q_i} = \frac{\partial p}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{-1}{G'(p)} w_i = 0, \ i = 0,1.$$

Para cada $\beta,\ 0 < \beta \leq 1,$ por el Teorema 3, existe un único equilibrio exterior correspondiente a la conjetura de la competencia perfecta denotado por $\left(p^P, q_0^P, q_1^P\right)$

.

Es fácil observar que el equilibrio de Competencia Perfecta no coincide con el equilibrio consistente para nuestro modelo ya que no satisface el criterio de consistencia de (2.1.26) y (2.1.27).

Teorema 5. *En el equilibrio de Competencia Perfecta el precio* $p^P(\beta)$ *y los volúmenes de producción* $q_0^P(\beta),\ q_1^P(\beta)$ *son continuamente diferenciable respecto a* $\beta \in (0,1]$. *Donde los signos de las derivadas parciales son*

$$\frac{dp^P(\beta)}{d\beta} = \frac{\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2 \left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2 \left\{\bar{a}\left(a_0 q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2} a_0 \bar{b}\right\}\right]}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \dfrac{\Theta^P}{a_1} + K\Theta^P} > 0$$

$$\frac{dq_0^P}{d\beta} = -\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2 \left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2 \left\{ \bar{a}\left(a_0 q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b} \right\} \right] \times$$

$$\left\langle \frac{1 + Ka_1}{a_1\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \Theta^P + a_1 K\Theta^P} \right\rangle < 0$$

$$\frac{dq_1^P(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{a_1}\,\frac{\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2 \left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2 \left\{ \bar{a}\left(a_0 q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b} \right\} \right]}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \frac{\Theta^P}{a_1} + K\Theta^P} > 0$$

Demostración.

El equilibrio de Competencia Perfecta $\left(p^P, q_0^P, q_1^P\right)$ se encuentra como la solución del siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$p^P = a_1 q_1^P + b_1 \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned} p^P = {} & \frac{\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2} \times \Big\{ \beta\left(a_0 q_0^P + b_0\right) \\ & + (1-\beta)\left[\bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0^P\right)^2 + b_0 q_0^P \right) + \left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)\left(a_0 q_0^P + b_0\right) \right] \Big\} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$q_0^P + q_1^P = -Kp^P + T + D \tag{2.2.3}$$

De (2.2.1) tenemos que $\widehat{q}_1^P\left(p^P\right) = \dfrac{p^P - b_1}{a_1}$ donde

$$\frac{d\widehat{q}_1^P\left(p^P\right)}{dp^P} = \frac{1}{a_1} \text{ continua.} \tag{2.2.4}$$

Por el Teorema de función implícita de (2.2.2) obtenemos $\widehat{q}_0^P = \widehat{q}_0^P\left(\beta, p^P\right)$

$$\frac{\partial \widehat{q}_0^P\left(\beta, p^P\right)}{\partial p^P} = \frac{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2}{\Theta^P} > 0 \text{ continua} \tag{2.2.5}$$

con

$$\Theta^P = \left[\beta a_0 + (1-\beta)\left\{2\bar{a}\left(a_0\widehat{q}_0^P + b_0\right) + a_0\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)\right\}\right]\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0 + \bar{b}\right)^2\right]$$
$$+2\bar{a}\bar{b}\beta\left(\bar{a}\widehat{q}_0 + \bar{b}\right)\left[\beta\left(a_0\widehat{q}_0 + b_0\right) + (1-\beta)\left\{\bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(\widehat{q}_0^P\right)^2 + b_0\widehat{q}_0^P\right) + \left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)\left(a_0\widehat{q}_0^P + b_0\right)\right\}\right] > 0,$$

Para calcular la derivada $\frac{\partial \widehat{q}_0^P}{\partial \beta}$ tomando en cuenta que $\widehat{q}_0^P = \widehat{q}_0^P\left(\beta, p^P\right)$

continuamente diferenciable respecto a β y p^P

$$\gamma_0^P\left(\beta, p^P, \widehat{q}_0^P\right) = p^P - \frac{1}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)^2}\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)^2 \times$$
$$\left[\beta\left(a_0\widehat{q}_0^P + b_0\right) + (1-\beta)\left(\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)\left(a_0\widehat{q}_0^P + b_0\right) + \bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(\widehat{q}_0^P\right)^2 + b_0\widehat{q}_0^P\right)\right)\right] = 0,$$

de donde

$$\frac{\partial \gamma_0^P}{\partial q_0^P} = -\frac{1}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2} \cdot \left[\Theta^P\left(\beta, q_0^P\right)\right] < 0, \tag{2.2.6}$$

Derivando (15) respecto a β tenemos

$$\frac{\partial \gamma_0^P}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_0^P}{\partial \widehat{q}_0}\frac{\partial \widehat{q}_0^P}{\partial \beta} = 0 \tag{2.2.7}$$

Tenemos

$$\frac{\partial \gamma_0^P}{\partial \beta} = -\frac{\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)^2}{\left(\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^P + \bar{b}\right)^2\right)^2}\left[\bar{a}\left(\widehat{q}_0^P\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0\widehat{q}_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right] < 0 \tag{2.2.8}$$

Sustituyendo (2.2.6) y (2.2.8) en (2.2.7) para despejar $\frac{\partial \widehat{q}_0}{\partial \beta}$

$$\frac{\partial \widehat{q}_0^P}{\partial \beta} = -\frac{\left(\overline{a}\widehat{q}_0^P + \overline{b}\right)^2}{\Theta^P}\left[\overline{a}\left(\widehat{q}_0^P\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0\widehat{q}_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right] < 0. \tag{2.2.9}$$

De (2.2.3)

$$\widehat{q}_0^P\left(\beta, p^P\right) + \widehat{q}_1^P\left(p^P\right) = -Kp^P + T \Rightarrow p^P = p^P\left(\beta\right) \tag{2.2.10}$$

Reescribimos (2.2.10)

$$\varphi\left(\beta, p^P\right) = \widehat{q}_0^P\left(\beta, p^P\right) + \widehat{q}_1^P\left(p^P\right) + Kp^P - T \equiv 0. \tag{2.2.11}$$

Luego,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p^P} = \frac{\partial \widehat{q}_0^P}{\partial p^P} + \frac{d\widehat{q}_0^P}{dp^P} + K.$$

Por (2.2.4) y (2.2.9) queda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p^P} = \frac{\left[\beta\overline{b} + (1-\beta)\left(\overline{a}q_0^P + \overline{b}\right)^2\right]^2}{\Theta^P} + \frac{1}{a_1} + K > 0 \tag{2.2.12}$$

Entonces, por el teorema de función implícita podemos expresar el precio

$$p^P = p^P\left(\beta\right) \tag{2.2.13}$$

como una función continuamente diferenciable respecto a sus variables.

Al derivar (2.2.11) con respecto a β.

Para $\frac{\partial p}{\partial \beta}$ de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}+\frac{\partial \varphi}{\partial p^P}\frac{dp^P}{d\beta}=0 \tag{2.2.14}$$

Por (19)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}=\frac{\partial \widehat{q}_0^P}{\partial \beta}=-\frac{\left(\overline{a}\widehat{q}_0^P+\overline{b}\right)^2}{\Theta^P}\left[\overline{a}\left(\widehat{q}_0^P\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0\widehat{q}_0^P+b_0\right)+\frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right]<0.$$

Y así despejando

$$\frac{dp^P}{d\beta}=-\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^{-1}.$$

$$\Rightarrow \frac{dp^P(\beta)}{d\beta}=\frac{\frac{\left(\overline{a}\widehat{q}_0^P+\overline{b}\right)^2}{\Theta^P}\left[\overline{a}\left(\widehat{q}_0^P\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0\widehat{q}_0^P+b_0\right)+\frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right]}{\frac{\left[\beta\overline{b}+(1-\beta)\left(\overline{a}\widehat{q}_0^P+\overline{b}\right)^2\right]^2}{\Theta^P}+\frac{1}{a_1}+K}>0 \tag{2.2.15}$$

Por (2.2.15) tenemos

$$\frac{dp^P(\beta)}{d\beta}=\frac{\left(\overline{a}q_0^P+\overline{b}\right)^2\left[\overline{a}\left(q_0^P\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0q_0^P+b_0\right)+\frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right]}{\left[\beta\overline{b}+(1-\beta)\left(\overline{a}q_0^P+\overline{b}\right)^2\right]^2+\frac{\Theta^P}{a_1}+K\Theta^P}>0 \text{ es continua} \tag{2.2.16}$$

Como obtuvimos que la función del precio $p=p(\beta)$, tenemos que las funciones

q_1^P y q_0^P

$$
\begin{aligned}
q_1^P &= q_1^P(\beta) = \widehat{q}_1^P\left(p(\beta)\right) \\
q_0^P &= q_0^P(\beta) = \widehat{q}_0^P\left(\beta, p(\beta)\right)
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

Continuamente diferenciables respecto a sus variables. Vamos a encontrar sus derivadas parciales.

$$
\frac{dq_1^P}{d\beta} = \frac{d\widehat{q}_1^P}{dp^P}\frac{dp^P}{d\beta} > 0,
$$

$$
\frac{dq_1^P(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{a_1}\frac{\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right]}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \frac{\Theta^P}{a_1} + K\Theta^P} > 0 \tag{2.2.18}
$$

$$
\frac{dq_0^P}{d\beta} = \frac{\partial\widehat{q}_0^P}{\partial\beta} + \frac{\partial\widehat{q}_0^P}{\partial p^P}\frac{dp^P}{d\beta}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dq_0^P}{d\beta} = &-\frac{\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2}{\Theta^P}\left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right] \\
&+ \frac{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2}{\Theta^P}\frac{\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right]}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \frac{\Theta^P}{a_1} + K\Theta^P}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dq_0^P}{d\beta} = &-\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\left[\bar{a}\left(q_0^P\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0q_0^P + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right] \times \\
&\left\langle \frac{1 + Ka_1}{a_1\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}q_0^P + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \Theta^P + a_1K\Theta^P} \right\rangle < 0
\end{aligned}
\tag{2.2.19}
$$

2.3 Equilibrio de Cournot

La conjetura de Cournot donde $w_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1, \; i = 0,1$ en nuestro modelo corresponde a siguiente coeficiente de influencia

$$v_i^C = \frac{\partial p}{\partial q_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial p}{\partial G} = \frac{-1}{G'(p)}, \; i = 0,1,$$

donde $G'(p) = -K$ al final tenemos $v_i^C = \frac{1}{K}, \; i = 0,1.$

Para cada $\beta, \; 0 < \beta \leq 1,$ por el Teorema 3, existe un único equilibrio exterior correspondiente a la conjetura de Cournot $v_i^C, \; i = 0,1$ el cual notamos por $\left(p^C, q_0^C, q_1^C\right)$.

Al igual que en el equilibrio de Competencia Perfecta, Cournot no satisface el criterio de consistencia de (2.1.26) y (2.1.27) para $i = 0,1$, para nuestro modelo los cuales no se considerarían para el equilibrio interior.

Teorema 6. *En el equilibrio de Cournot el precio* $p^C(\beta)$ *y los volúmenes de producción* $q_0^C(\beta), \; q_1^C(\beta)$ *son continuamente diferenciable respecto a* $\beta \in (0,1]$. *Donde los signos de las derivadas parciales son*

$$\frac{dp^C}{d\beta} = \frac{\left(\frac{1}{K} + a_1\right)\left(\bar{a}\hat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2 \left[\bar{a}\,\frac{1}{K}\left(\hat{q}_0^C\right)^2 + \bar{a}\left(\hat{q}_0^C\right)^2 \left\{\bar{a}\left(a_0\hat{q}_0^C + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right]}{\left(\frac{1}{K} + a_1\right)\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\hat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]^2 + \Theta^C + K\Theta^C\left(\frac{1}{K} + a_1\right)} > 0$$

$$\frac{dq_0^C}{d\beta}=-\frac{\left(\bar{a}\hat{q}_0^C+\bar{b}\right)^2\left[\bar{a}\frac{1}{K}\left(\hat{q}_0^C\right)^2+\bar{a}\left(\hat{q}_0^C\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0\hat{q}_0^C+b_0\right)+\frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right]\left[1+K\left(\frac{1}{K}+a_1\right)\right]}{\left(\frac{1}{K}+a_1\right)\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}\hat{q}_0^C+\bar{b}\right)^2\right]^2+\Theta^C+K\Theta^C\left(\frac{1}{K}+a_1\right)}<0$$

$$\frac{dq_1^C}{d\beta}=\frac{\left(\bar{a}\hat{q}_0^C+\bar{b}\right)^2\left[\bar{a}\frac{1}{K}\left(\hat{q}_0^C\right)^2+\bar{a}\left(\hat{q}_0^C\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0\hat{q}_0^C+b_0\right)+\frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right]}{\left(\frac{1}{K}+a_1\right)\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}\hat{q}_0^C+\bar{b}\right)^2\right]^2+\Theta^C+K\Theta^C\left(\frac{1}{K}+a_1\right)}>0$$

Demostración.

El equilibrio de Cournot $\left(p^C,q_0^C,q_1^C\right)$ se encuentra como la solución del siguiente sistema de tres ecuaciones

$$p^C=\frac{1}{K}q_1^C+a_1q_1^C+b_1 \tag{2.3.1}$$

$$\begin{aligned}p^C=&\frac{\left(\bar{a}q_0^C+\bar{b}\right)}{\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0^C+\bar{b}\right)^2}\left[\frac{1}{K}q_0^C\left\{\beta+(1-\beta)\left(\bar{a}q_0^C+\bar{b}\right)\right\}\right.\\&\left.+\left(\bar{a}q_0^C+\bar{b}\right)\left\{\beta\left(a_0q_0^C+b_0\right)+(1-\beta)\left[\bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(q_0^C\right)^2+b_0q_0^C\right)+\left(\bar{a}q_0^C+\bar{b}\right)\left(a_0q_0^C+b_0\right)\right]\right\}\right]\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$q_0^C+q_1^C=-Kp^C+T+D \tag{2.3.3}$$

Encontramos de (2.3.1) la función de volumen para $i=1$

$$\hat{q}_1^C\left(p^C\right)=\frac{p^C-b_1}{\frac{1}{K}+a_1} \tag{2.3.4}$$

continuamente diferenciable, con derivada

$$\frac{d\widehat{q}_1^C}{dp^C} = \frac{1}{\frac{1}{K} + a_1} > 0, \tag{2.3.5}$$

reescribir (2.3.2), como

$$\begin{aligned} \gamma_0^C\left(\beta, p^C, \widehat{q}_0^C\right) = p^C - \frac{1}{\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2}\Bigg(\frac{1}{K}\widehat{q}_0\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)\left[\beta + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)\right] \\ +\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\left[\beta\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) + (1-\beta)\left(\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) + \bar{a}\left(\frac{1}{2}a_0\left(\widehat{q}_0^C\right)^2 + b_0\widehat{q}_0^C\right)\right)\right]\Bigg) = 0, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

de donde se obtuvo

$$\frac{\partial\gamma_0^C}{\partial\widehat{q}_0^C} = -\frac{1}{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]^2}\cdot\left[\Theta\left(\beta, \widehat{q}_0^C\right)\right] < 0, \tag{2.3.7}$$

con

$$\begin{aligned} \Theta\left(\beta, \widehat{q}_0^C\right) = \frac{1}{K}\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]^2 \\ +2\bar{a}\bar{b}\beta\left[\beta + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)\right]\left[\widehat{q}_0^C\frac{1}{K} + \left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right)\right] \\ +\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]\left[\beta a_0 + (1-\beta)\left(a_0\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right) + 2\bar{a}\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right)\right)\right] \\ +2(1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)\bar{a}^2\widehat{q}_0^C\beta\bar{b}\left(\frac{1}{2}a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Tomando en cuenta (2.3.7) y el teorema de función implícita de la ecuación (2.3.6) se puede despejar

$$\widehat{q}_0^C = \widehat{q}_0^C\left(\beta, p^C\right) \tag{2.3.9}$$

como la función continuamente diferenciable. Para encontrar las derivadas parciales de la función $\widehat{q}_0^C = \widehat{q}_0^C\left(\beta, p^C\right)$ sustituimos (2.3.9) en (2.3.6)

$$\gamma_0^C\left(\beta, p^C, \widehat{q}_0^C\left(\beta, p^C\right)\right) \equiv 0 \qquad (2.3.10)$$

Derivando (2.3.10) respecto a p tenemos

$$\frac{\partial \gamma_0^C}{\partial p^C} + \frac{\partial \gamma_0^C}{\partial \widehat{q}_0^C}\frac{\partial \widehat{q}_0^C}{\partial p^C} = 1 - \left[\frac{1}{\left[\beta \bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]^2} \cdot \left\{\Theta^C\right\}\right]\frac{\partial \widehat{q}_0^C}{\partial p^C} = 0.$$

Nos queda

$$\frac{\partial \widehat{q}_0^C}{\partial p^C} = \frac{\left[\beta \bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]^2}{\Theta^C} > 0. \qquad (2.3.11)$$

Derivando (2.3.10) respecto a β tenemos

$$\frac{\partial \gamma_0^C}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_0^C}{\partial \widehat{q}_0^C}\frac{\partial \widehat{q}_0^C}{\partial \beta} = 0 \qquad (2.3.12)$$

tenemos

$$\frac{\partial \gamma_0^C}{\partial \beta} = -\frac{\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2}{\left(\beta \bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\widehat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right)^2}\left[\frac{1}{K}\bar{a}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2 + \bar{a}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right] < 0 \qquad (2.3.13)$$

Simplificando y reemplazando las derivadas de costo correspondientes, nos queda,

Sustituyendo (2.3.13) en (2.3.12) para despejar $\frac{\partial \widehat{q}_0^C}{\partial \beta}$

$$\frac{\partial \hat{q}_0^C}{\partial \beta} = -\frac{\left(\bar{a}\hat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2}{\Theta^C}\left[\bar{a}\frac{1}{K}\left(\hat{q}_0^C\right)^2 + \bar{a}\left(\hat{q}_0^C\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0\hat{q}_0^C + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right] < 0 \qquad (2.3.14)$$

sustituimos (2.3.6) y (2.3.8) en (2.3.3)

$$\hat{q}_0^C\left(\beta, p^C\right) + \hat{q}_1^C\left(p^C\right) = -Kp^C + T \qquad (2.3.15)$$

Reescribimos (2.3.15) de manera siguiente

$$\varphi\left(\beta, p^C\right) = \hat{q}_0^C\left(\beta, p^C\right) + \hat{q}_1^C\left(p^C\right) + Kp^C - T \equiv 0\,. \qquad (2.3.16)$$

Luego,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p^C} = \frac{\partial \hat{q}_0^C}{\partial p^C} + \frac{\partial \hat{q}_1^C}{\partial p^C} + K > 0\,.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p^C} = \frac{\left[\beta\bar{b} + (1-\beta)\left(\bar{a}\hat{q}_0^C + \bar{b}\right)^2\right]^2}{\Theta^C} + \frac{1}{\frac{1}{K} + a_1} + K > 0 \qquad (2.3.17)$$

Por el teorema de función implícita podemos expresar el precio

$$p^C = p^C\left(\beta\right) \qquad (2.3.18)$$

como una función continuamente diferenciable respecto a su variable.

Al derivar (2.3.18) con respecto a β respectivamente.

Para $\frac{\partial p^C}{\partial \beta}$ de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial p^C}\frac{dp^C}{d\beta} = 0 \qquad (2.3.19)$$

Por (2.3.19)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial \widehat{q}_0^C}{\partial \beta} = -\frac{\left(\overline{a}\widehat{q}_0^C + \overline{b}\right)^2}{\Theta^C}\left[\overline{a}\,\frac{1}{K}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2 + \overline{a}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right] < 0$$

Y así despejando (2.3.19)

$$\frac{dp^C}{d\beta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^{-1}.$$

Reemplazando lo obtenido

$$\frac{dp^C}{d\beta} = \frac{\left(\frac{1}{K} + a_1\right)\left(\overline{a}\widehat{q}_0^C + \overline{b}\right)^2\left[\overline{a}\,\frac{1}{K}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2 + \overline{a}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right]}{\left(\frac{1}{K} + a_1\right)\left[\beta\overline{b} + (1-\beta)\left(\overline{a}\widehat{q}_0^C + \overline{b}\right)^2\right]^2 + \Theta^C + K\Theta^C\left(\frac{1}{K} + a_1\right)} > 0 \qquad (2.3.20)$$

Como la función del precio $p^C = p^C(\beta)$, sustituimos (2.3.18) en (2.3.4) y (2.3.5) y de este modo obtuvimos las funciones q_1^C y q_0^C

$$\begin{aligned} q_1^C &= q_1^C(\beta) = \widehat{q}_1^C\left(p^C(\beta)\right) \\ q_0^C &= q_0^C(\beta) = \widehat{q}_0^C\left(\beta, p^C(\beta)\right) \end{aligned} \qquad (2.3.21)$$

Continuamente diferenciables respecto a su variable.

$$\frac{dq_1^C}{d\beta} = \frac{d\widehat{q}_1^C}{dp}\frac{dp}{d\beta},$$

Reemplazando (2.3.5) y (2.3.20)

$$\frac{dq_1^C}{d\beta} = \frac{\left(\overline{a}\widehat{q}_0^C + \overline{b}\right)^2\left[\overline{a}\,\frac{1}{K}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2 + \overline{a}\left(\widehat{q}_0^C\right)^2\left\{\overline{a}\left(a_0\widehat{q}_0^C + b_0\right) + \frac{1}{2}a_0\overline{b}\right\}\right]}{\left(\frac{1}{K} + a_1\right)\left[\beta\overline{b} + (1-\beta)\left(\overline{a}\widehat{q}_0^C + \overline{b}\right)^2\right]^2 + \Theta^C + K\Theta^C\left(\frac{1}{K} + a_1\right)} > 0 \qquad (2.3.22)$$

Reemplazando (2.3.11), (2.3.14) y (2.3.20) en

$$\frac{dq_0^C}{d\beta}=\frac{\partial\hat{q}_0^C}{\partial\beta}+\frac{\partial\hat{q}_0^C}{\partial p^C}\frac{dp^C}{d\beta}$$

Tenemos

$$\frac{dq_0^C}{d\beta}=-\frac{\left(\bar{a}\hat{q}_0^C+\bar{b}\right)^2\left[\bar{a}\frac{1}{K}\left(\hat{q}_0^C\right)^2+\bar{a}\left(\hat{q}_0^C\right)^2\left\{\bar{a}\left(a_0\hat{q}_0^C+b_0\right)+\frac{1}{2}a_0\bar{b}\right\}\right]\left[1+K\left(\frac{1}{K}+a_1\right)\right]}{\left(\frac{1}{K}+a_1\right)\left[\beta\bar{b}+(1-\beta)\left(\bar{a}\hat{q}_0^C+\bar{b}\right)^2\right]^2+\Theta^C+K\Theta^C\left(\frac{1}{K}+a_1\right)}<0 \quad (2.3.23)$$

Capítulo 3. Resultados Numéricos.

En esta sección nos basamos en los resultados de los experimentos numéricos basado en el trabajo de [21]. A continuación, describimos los detalles de los experimentos:

Para función de demanda pasiva consideramos

$$G(p) = 2500 - 50p$$

Los parámetros de la fórmula (2.1.5) pueden variarse, en este caso nosotros consideramos estos como fijos $\overline{a} = 1$, $\overline{b} = 1$.

Los siguientes parámetros que aparecen en las fórmulas de los gastos (2.1.3) y (2.1.4) serán considerados de la **Tabla 1.**

Experimento	Agente i	a_i	b_i
1	0	0,02	2
	1	0,0175	1,75
2	0	0,00834	3,25
	1	0,0625	1
3	0	0,025	3
	1	0,025	3

Tabla 1. Valores del Experimento

Dentro de cada experimento vamos a calcular tres equilibrios: Cournot, CCVE y Competencia Perfecta.

Para los experimentos consideraremos la firma $i=0$ es pública y la firma $i=1$ es privada.

Vamos a usar las siguientes notaciones: p, q_0, q_1, v_0 y v_1 corresponden a **CCVE,** p^C, q_0^C, q_1^C a **Cournot** y p^P, q_0^P, q_1^P a **Competencia Perfecta.**

Experimento 1

Los resultados numéricos de este experimento se muestran en las **Tabla 2.1, 2.2, 2.3**.

β	p	q_0	q_1	v_0	v_1
0,05	33,0705892	7,28716881	839,183371	0,01302196	0,0198227
0,1	33,0708821	7,26538453	839,190509	0,01302197	0,01982273
0,15	33,0712088	7,24112268	839,198435	0,01302197	0,01982277
0,2	33,0715756	7,21393649	839,207284	0,01302198	0,01982281
0,25	33,0719901	7,18326534	839,217227	0,01302198	0,01982286
0,3	33,0724625	7,14839618	839,228477	0,01302199	0,01982293
0,35	33,0730057	7,1084083	839,241306	0,013022	0,019823
0,4	33,0736368	7,06209237	839,256066	0,01302201	0,0198231
0,45	33,0743791	7,00782873	839,273217	0,01302202	0,01982322
0,5	33,0752645	6,94339924	839,293377	0,01302204	0,01982338
0,55	33,0763386	6,86568695	839,317381	0,01302207	0,01982359
0,6	33,0776686	6,77017875	839,346389	0,01302211	0,01982389
0,65	33,0793572	6,65010772	839,382032	0,01302216	0,01982431

0,7	33,0815695	6,49490604	839,426619	0,01302224	0,01982497
0,75	33,0845871	6,28728717	839,483358	0,01302237	0,01982604
0,8	33,088925	5,99757483	839,556177	0,0130226	0,01982797
0,85	33,0955949	5,5731905	839,647066	0,01302308	0,01983187
0,9	33,1065953	4,92769277	839,742544	0,01302416	0,01984072
0,95	33,1242395	3,99786646	839,790158	0,01302645	0,01985962
1	33,1437965	3,00162454	839,808552	0,01302918	0,01988209

Tabla 2.1: CCVE

β	p^C	q_0^C	q_1^C
0,05	33,1223395	7,28730636	836,59572
0,1	33,1226241	7,26548395	836,60331
0,15	33,1229411	7,24117957	836,611764
0,2	33,1232964	7,21394565	836,621236
0,25	33,1236971	7,18322055	836,631923
0,3	33,1241527	7,14828993	836,644073
0,35	33,1246752	7,10823143	836,658006
0,4	33,1252804	7,0618335	836,674145
0,45	33,1259895	7,00747351	836,693053
0,5	33,1268314	6,94292928	836,715503
0,55	33,1278468	6,86507812	836,742582
0,6	33,1290948	6,76939865	836,775861
0,65	33,1306638	6,64911151	836,8177

0,7	33,1326918	6,4936297	836,871781
0,75	33,1354047	6,28563614	836,944127
0,8	33,1391904	5,99540624	837,045076
0,85	33,1447353	5,57029743	837,19294
0,9	33,1531666	4,92389417	837,417776
0,95	33,1652995	3,99370124	837,741321
1	33,1782776	2,99871747	838,087403

Tabla 2.2: Cournot

β	p^P	q_0^P	q_1^P
0,05	24,2172219	5,29765322	1283,84125
0,1	24,2174086	5,27764478	1283,85192
0,15	24,2176161	5,25541359	1283,86378
0,2	24,217848	5,23057007	1283,87703
0,25	24,2181088	5,20262873	1283,89193
0,3	24,2184042	5,17097706	1283,90881
0,35	24,2187416	5,13483173	1283,92809
0,4	24,2191304	5,09317548	1283,95031
0,45	24,2195831	5,04466461	1283,97618
0,5	24,2201168	4,98749017	1284,00667
0,55	24,2207545	4,91916448	1284,04311
0,6	24,2215289	4,83618511	1284,08737
0,65	24,2224874	4,73349399	1284,14214

0,7	24,2236998	4,60359518	1284,21142
0,75	24,2252721	4,43513538	1284,30126
0,8	24,2273655	4,21084357	1284,42088
0,85	24,230212	3,90585567	1284,58354
0,9	24,2340636	3,49318595	1284,80363
0,95	24,2388853	2,97657215	12: 85,07916
1	24,2438938	2,43994517	1285,36536

Tabla 2.3: Competencia Perfecta

Para todos los valores de β:

Observamos que el precio **CCVE** tiene un valor entre los otros precios, , $p^P(\beta) < p(\beta) < p^C(\beta)$ y que estos precios $p^P(\beta), p(\beta), p^C(\beta)$ como funciones de β son monótonamente crecientes. Para la firma privada $i=1$: su volumen de producción q_1, su beneficio y su coeficiente de influencia como funciones de β son monótonamente crecientes para los tres equilibrios considerados. Y, para la firma publica $i=0$: su volumen de producción y beneficio como funciones de β son monótonamente decrecientes para los tres tipos de equilibrios. Pero su coeficiente de influencia en **CCVE** es una función monótonamente creciente respecto a β.

Vemos que estos resultados coinciden con lo demostrado en el **Capítulo 2**.

Como vamos a ver adelante, el mismo comportamiento que fue descrito anteriormente como funciones de β se observara en los **Experimentos 2** y **3.**

Los resultados de las tablas anteriores podemos observar que para los valores de $\beta \in (0;0,25]$: q_0 es levemente menor a q_0^C en $\approx 0,001\%$ y mayor a q_0^P en $\approx 37\%$. Para $\beta \in (0,25;1]$ vemos que hay un cambio en el orden de las variables q_0 y q_0^C $\left(q_0^C(\beta) < q_0(\beta)\right)$ con q_0^C levemente menor en $\approx 0,002\%$, conservando p y q_1, es ligeramente menor a p^C en $\approx 0,15\%$ y mayor a p^P en $\approx 36\%$ y q_1 es mayor a q_1^C en $\approx 0,3\%$ y menor a q_1^P en $\approx 34\%$. Por último, para los agentes $i = 0,1$: los coeficientes de influencia se encuentra $0 < v_i < 1$.

Experimento 2

En este caso, los resultados numéricos de este experimento se muestran en las **Tabla 3.1, 3.2 y 3.3**.

β	p	q_0	q_1	v_0	v_1
0,05	40,3376869	5,60494883	477,510704	0,01609302	0,01988074
0,1	40,3380272	5,58416567	477,514472	0,01609302	0,01988081
0,15	40,3384058	5,5610614	477,518651	0,01609302	0,01988088
0,2	40,3388293	5,53522659	477,52331	0,01609302	0,01988096
0,25	40,3393062	5,50615033	477,528538	0,01609303	0,01988106
0,3	40,3398474	5,47318693	477,534444	0,01609303	0,01988117
0,35	40,3404665	5,43550894	477,541165	0,01609304	0,01988131

0,4	40,3411816	5,3920393	477,54888	0,01609304	0,01988148
0,45	40,3420166	5,34135131	477,557821	0,01609305	0,01988168
0,5	40,3430038	5,28151765	477,568295	0,01609306	0,01988194
0,55	40,3441882	5,20987661	477,580715	0,01609307	0,01988228
0,6	40,3456338	5,12266048	477,595649	0,01609309	0,01988273
0,65	40,3474346	5,01438985	477,613881	0,01609311	0,01988336
0,7	40,3497325	4,87686765	477,636508	0,01609315	0,01988426
0,75	40,352749	4,69751517	477,665034	0,0160932	0,01988566
0,8	40,3568361	4,45683114	477,701365	0,01609329	0,01988795
0,85	40,3625364	4,12592957	477,747253	0,01609344	0,01989197
0,9	40,370515	3,67202298	477,802226	0,01609372	0,01989919
0,95	40,3808013	3,09841676	477,86152	0,01609415	0,01991049
1	40,3914074	2,50790045	477,921729	0,0160946	0,0199223

Tabla 3.1 CCVE

β	p^C	q_0^C	q_1^C
0,05	40,3488247	5,60331475	476,955451
0,1	40,3491594	5,58252031	476,959508
0,15	40,3495316	5,55940353	476,964019
0,2	40,3499477	5,53355484	476,969062
0,25	40,350416	5,50446305	476,974739
0,3	40,3509469	5,47148221	476,981174

0,35	40,3515537	5,43378447	476,98853
0,4	40,3522538	5,39029233	476,997016
0,45	40,3530702	5,33957851	477,006912
0,5	40,3540339	5,27971497	477,018592
0,55	40,3551877	5,20803909	477,032578
0,6	40,3565923	5,12078206	477,049604
0,65	40,358336	5,01246328	477,070739
0,7	40,3605506	4,87488477	477,097583
0,75	40,3634388	4,69546855	477,132592
0,8	40,3673143	4,45472034	477,179567
0,85	40,3726416	4,12378208	477,24414
0,9	40,3799471	3,6699519	477,332692
0,95	40,3891753	3,09668594	477,444549
1	40,3986721	2,50673099	477,559662

Tabla 3.2 Cournot

β	p^P	q_0^P	q_1^P
0,05	38,0413125	5,27337769	592,660999
0,1	38,0416207	5,25303508	592,665931
0,15	38,0419631	5,2304329	592,67141
0,2	38,0423458	5,20517525	592,677533
0,25	38,0427762	5,17676884	592,68442

0,3	38,0432638	5,14459149	592,69222
0,35	38,0438205	5,10784762	592,701128
0,4	38,0444621	5,06550442	592,711393
0,45	38,0452091	5,01619826	592,723346
0,5	38,0460895	4,95809435	592,737432
0,55	38,0471413	4,88867153	592,754261
0,6	38,0484184	4,80438433	592,774695
0,65	38,0499982	4,70012135	592,799971
0,7	38,051995	4,56832801	592,83192
0,75	38,0545816	4,39761371	592,873306
0,8	38,0580183	4,17079166	592,928293
0,85	38,0626738	3,86353214	593,00278
0,9	38,0689298	3,45063513	593,102876
0,95	38,0766807	2,93907386	593,226891
1	38,0846567	2,41266039	593,354507

Tabla 3.3 Competencia Perfecta

En este experimento observamos que las variables en función de β tienen el mismo comportamiento descrito anteriormente para los tres equilibrios.

Además, podemos observar que para toda $\beta \in (0,1]$: el valor de p vemos que es ligeramente menor a p^C en $\approx 0,02\%$ y mayor a p^P en $\approx 6\%$, q_1 es mayor a q_1^C en $\approx 0,1\%$ y menor a q_1^P en $\approx 19\%$, además los coeficientes de influencia se encuentran $0 < \nu_i < 1$ con $i = 0,1$. En cambio, para q_0 este valor es mayor a q_0^C , en especial a q_0^P en $\approx 0,03\%$ y $\approx 6\%$ respectivamente.

Experimento 3

En este caso, la firma pública es igual que la firma privada en comparación con el experimento anterior y de nuevo vemos que las variables se comportan según nuestro modelo. Los resultados numéricos de este experimento se muestran en las **Tabla 4.1, 4.2, 4.3**.

β	p	q_0	q_1	ν_0	ν_1
0,05	35,4391692	5,18547871	722,856063	0,01383443	0,01987639
0,1	35,4394593	5,1654827	722,861555	0,01383443	0,01987645
0,15	35,4397821	5,1432699	722,867627	0,01383444	0,01987652
0,2	35,4401434	5,11845274	722,874375	0,01383445	0,0198766
0,25	35,4405507	5,09054861	722,881917	0,01383446	0,01987669
0,3	35,4410131	5,05894906	722,890396	0,01383447	0,01987681
0,35	35,4415426	5,02287664	722,899994	0,01383448	0,01987694
0,4	35,4421548	4,98132282	722,910939	0,0138345	0,01987711
0,45	35,4428704	4,93295721	722,923522	0,01383452	0,01987732
0,5	35,4437178	4,87599166	722,938117	0,01383454	0,01987759
0,55	35,4447364	4,80797226	722,95521	0,01383458	0,01987793
0,6	35,4459824	4,72545356	722,975428	0,01383462	0,0198784

0,65	35,447539	4,62347808	722,999573	0,01383468	0,01987906
0,7	35,4495329	4,49473696	723,028619	0,01383477	0,01988001
0,75	35,4521635	4,3282449	723,063582	0,01383491	0,01988148
0,8	35,4557512	4,10749172	723,10495	0,01383514	0,01988387
0,85	35,4607964	3,80920164	723,150981	0,01383553	0,01988799
0,9	35,4679205	3,40924069	723,194735	0,01383621	0,01989513
0,95	35,4771757	2,91340262	723,227811	0,01383723	0,01990587
1	35,4867899	2,40001272	723,260493	0,0138383	0,01991714

Tabla 4.1 CCVE

β	p^C	q_0^C	q_1^C
0,05	35,4666727	5,18474982	721,481615
0,1	35,4669499	5,16473278	721,487775
0,15	35,4672577	5,14249663	721,494616
0,2	35,4676017	5,1176534	721,50226
0,25	35,4679885	5,08971995	721,510855
0,3	35,4684265	5,05808724	721,520589
0,35	35,4689265	5,02197699	721,531699
0,4	35,4695024	4,98037967	721,544499
0,45	35,4701728	4,93196354	721,559396
0,5	35,4709624	4,87493871	721,576942
0,55	35,4719052	4,80684893	721,597893

0,6	35,4730489	4,72424557	721,623309
0,65	35,4744623	4,62216695	721,654718
0,7	35,4762466	4,4932988	721,69437
0,75	35,4785541	4,3266498	721,745646
0,8	35,4816133	4,10570709	721,813629
0,85	35,4857463	3,80721185	721,905473
0,9	35,4912861	3,40711642	722,02858
0,95	35,4981496	2,91141778	722,181102
1	35,5052514	2,39851243	722,338919

Tabla 4.2 Cournot

β	p^P	q_0^P	q_1^P
0,05	29,06446	4,19860302	1042,5784
0,1	29,064666	4,18005657	1042,58664
0,15	29,0648944	4,15950243	1042,59578
0,2	29,0651489	4,13659978	1042,60596
0,25	29,0654341	4,11092718	1042,61737
0,3	29,065756	4,08195777	1042,63024
0,35	29,0661219	4,04902487	1042,64488
0,4	29,0665414	4,01127372	1042,66166
0,45	29,0670267	3,96759265	1042,68107
0,5	29,0675943	3,91651329	1042,70377

0,55	29,068266	3,85606431	1042,73064
0,6	29,0690716	3,78355478	1042,76286
0,65	29,0700527	3,69525472	1042,80211
0,7	29,0712673	3,58593884	1042,85069
0,75	29,0727966	3,44830513	1042,91186
0,8	29,0747498	3,27251628	1042,98999
0,85	29,0772559	3,04696934	1043,09024
0,9	29,0804053	2,76351981	1043,21621
0,95	29,0840988	2,43110726	1043,36395
1	29,0879211	2,08710527	1043,51684

Tabla 4.3 Competencia Perfecta

El comportamiento de las funciones con respecto a β de este experimento es descrito en el **Experimento 1.**

Observamos que para $\beta \in (0,1]$: que los valores de **CCVE** conservan el orden escrito anteriormente $p^P(\beta) < p(\beta) < p^C(\beta)$, $q_0^P(\beta) < q_0^C(\beta) < q_0(\beta)$, $q_1^C(\beta) < q_1(\beta) < q_1^P(\beta)$ y $0 < v_i(\beta) < 1$ con $i = 0,1$. Para p es mayor a p^P en $\approx 22\%$ y menor a p^C en $\approx 0,07\%$, q_0 es mayor a q_0^C en $\approx 0,03\%$ y q_0^P en $\approx 23\%$, por último, q_1 es menor a q_1^P en $\approx 30\%$ y mayor a q_1^C en $\approx 0,2\%$.

Capítulo 4. Conclusiones y Trabajo a Futuro

Este trabajo modela un oligopolio mixto con variaciones conjeturadas en el cual un agente maximiza una combinación convexa de una función de utilidad por trabajador y utilidad neta, mientras que el resto de los agentes maximiza la utilidad neta. Se establece la existencia y unicidad de un equilibrio que llamamos exterior para los coeficientes de influencia. Además, utilizamos el criterio de consistencia desarrollado por Bulavsky [3] para formular y probar la existencia de un equilibrio interior.

Luego este trabajo hace un análisis para el caso particular del modelo de duopolio con funciones de gastos y de demanda para el cual hacer una comparación de nuestro modelo propuesto con los equilibrios de Cournot y Competencia Perfecta.

Utilizamos el experimento numérico en el que comprobamos los resultados de los teoremas y las demostraciones del capítulo 2 para el modelo de duopolio.

Lo interesante de este resultado es la observación de que para nuestro modelo tenemos que los precios de Competencia Perfecta y Cournot como funciones de β y el precio de CCVE se cumple $p^P(\beta) < p < p^C(\beta)$ lo cual es interesante de analizar para un trabajo a futuro, igualmente demostrar matemáticamente que el p^P es menor que p^C para cualquier β. Además, de encontrar un criterio de selección para el grado se socialización óptima β, al igual que en el trabajo de [18] quizás no exista una única manera de escoger este parámetro, que quizás con un criterio diferente podría dar otro un valor óptimo. Este trabajo a futuro es sugestivo para el tema de Economía por sus demostraciones matemáticas.

Igualmente los resultados del modelo son nuevos e interesante para su aplicación en la vida real.

Referencias

[1] Bonin, J., & Putterman, L. G. (1987). *Economics of Cooperation and the Labor-Managed Economy.* Chur, Switzerland,: Harwood Academic Publisher.

[2] Bowley, A. L. (1924). *The Mathematical Groundwork of Economics: An Introductory Treatise.* Oxford: Oxford Clarendon Press.

[3] Bulavsky, V. A. (1997). Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly. *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika I Matematicheskie Metody)*, 112-124 (in Russian).

[4] Bulavsky, V. A., & Kalashnikov, V. V. (1994). One-Parametric Method to Study an Equilibrium. *Economics and Mathematical methods*, (In Russian).

[5] Bulavsky, V. A., & Kalashnikov, V. V. (1995). Equilibrium in Generalized Cournot and Stackelberg Models. *Economics and Marhematical methods*, (In Russian).

[6] Cornes, R. C., & Sepahvand, M. (2003). Cournot vs Stackelberg equilibria with a public enterprise and international competition. *University of Nottingham Economics Discussion Paper No. 03*, 23.

[7] Fernández Ruiz, J. (2002). *Teoría de Juegos: Su Aplicación en Economía.* El Colegio de Mexico.

[8] Fershtman, C. (1989). The interdependence between ownership status and market structure: The case of privatization. *Economica*, 319-328.

[9] Fiell, K., & Heywood, J. (2001). Public Stackelberg leadership in a mixed oligopoly with foreign firms. *Norwegian School of Economics and Business Administration, Working paper.*

[10] Figuières, C., Jean-Marie, A., Quérou, N., & Tidball , M. (2004). *Theory of Conjectural Variations.* New Jersey/London/Singapore/Shanghai/Hong Kong/Taipei/Bangalore: World Scientific:.

[11] Frisch, R. (1951). *Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy, International Economic Papers.* London: Mac Millan.

[12] Harris, R. G., & Wiens, E. G. (1980). Government enterprise: an instrument for the internal regulation of industry, The Canadian Journal of Economics,. *Canadian Journal of Economics*, 125-132.

[13] Ireland , N. J., & Law, P. J. (1982). *The Economics of Labour-Managed Enterprises.* London, United Kingdom: Croom Helm.

[14] Isac, G., Bulavsky, V., & Kalashnikov, V. (2002). *Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics.* Kluwer Academic Pub.

[15] Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., & Castillo Pérez, F. J. (2011). Mixed Oligopoly with Consistent Conjectures. *European Journal of Operational Research, 3*, 729-735.

[16] Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., Watada, J., & Hernandez Rodriguez, D. d. (2014). Analysis of Consistent Equilibria in a Mixed Duopoly. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII), 18*(6), 962-970.

[17] Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., Watada, J., & Hernandez Rodriguez, D. d. (2014). Mixed Oligopoly: Analysis of Consistent Equilibria. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII), 18*(6), 971-984.

[18] Kalashnikov, V. V., Flores-Muñiz, J. G., Kalashnikov, V. V., & Kalashnykova, N. I. (2017). Consistent Conjectural Variations Equilibrium in a Semi-Mixed Duopoly. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics (JACIII), 21*(7), 1125-1134.

[19] Kalashnikov, V., & Kalashnikov, V. (2005). Conjetural variations equilibrium in a duopoly with a competitor maximizin domestic social surplus. *Proceedings of the 2005 Internaconal Applied Business Research Conference (IABR)*, (p. 12p). Puerto Vallarta, México.

[20] Kalashnikov, V., Cordero, A. E., & Kalashnikov, V. (2010). Cournot and Stackelberg equilibrium in mixed duopoly models. *Optimization*, 689-706.

[21] Kalashnykova, N. I., Kalashnikov, V. V., & Ovando Montantes, M. A. (2012). Consistent Conjectures in Mixed Oligopoly With Discontinuous Demand Function. *Intelligent Decision Technologies, 15*, 427-436 .

[22] Liu, Y., Ni, Y., Wu, F. F., & Cai, B. (2007). Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets. *Electrical power & energy systems*, 455-461.

[23] Matsumura, T. (2003). Stackelberg mixed duopoly with a foreign competitor. *Bulletin of Economic Research*, 275-287.

[24] Matsumura, T., & Kanda, O. (2005). Mixed oligopoly at free entry markets. *Journal of Economics*, 27-48.

[25] Matsushima, N., & Matsumura, T. (2003). Mixed oligopoly and spatial agglomeration. *Canadian Journal of Economics*, 62-87.

[26] Méndez Naya, J. (2007). Privatización y fusiones en oligopolio mixtos. *Estudios de Economía*, 37-52.

[27] Merrill, W. C., & Schneider, N. (1966). Government firms in oligopoly industries: a short-run analysis. *Quarterly Journal of Economics*, 400-412.

[28] Mumcu, A., O˘gur, S., & Zenginobuz, U. (2007, 11 07). *Competition between regulated and non-regulated generators on electric power networks*. Retrieved from MPRA Paper No. 376: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/376/1/MPRA_paper_376.pdf

[29] Saha, B., & Sensarma, R. (2009). State Ownership, Credit Risk and Bank Competition: A Mixed Oligopoly Approach. *University of Hertfordshire Business School Working Paper*.

[30] Stephen, F. H. (1982). *The Performance of Labour-Managed Firms.* London: Macmillan Press.