

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**PASIVIDAD DE SISTEMAS LINEALES MODELADOS POR  
GRÁFICAS DE LIGADURA**

**POR**

**ING. RICARDO JAVIER PUENTE ARANDA**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**SEPTIEMBRE, 2018**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**PASIVIDAD DE SISTEMAS LINEALES MODELADOS POR**  
**GRÁFICAS DE LIGADURA**

**POR**

**ING. RICARDO JAVIER PUENTE ARANDA**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE**  
**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**SEPTIEMBRE, 2018**

# Universidad Autónoma de Nuevo León

## Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

### Subdirección de Estudios de Posgrado

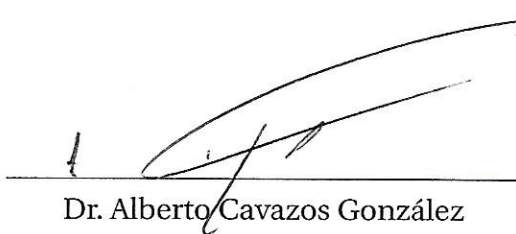
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Pasividad de Sistemas Lineales modelados por Gráficas de Ligadura.», realizada por el alumno Ing. Ricardo Javier Puente Aranda, con número de matrícula 1420489, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis



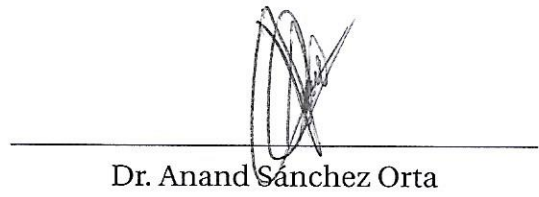
Dr. René Galindo Orozco

Asesor



Dr. Alberto Cavazos González

Revisor



Dr. Anand Sánchez Orta

Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Junio, 2018

*Dedicado a todas aquellas personas que me han ayudado a ser mejor...*

# Agradecimientos

A mi madre, padre y hermanos por apoyarme incondicionalmente en todo momento y ser mi motivación.

A mi novia Flor Morales. Sin su apoyo todo esto no hubiera sido posible.

A mi asesor el Dr. René Galindo Orozco, por su asesoría y paciencia durante el desarrollo de este trabajo, por sus consejos y su buena disposición.

A mis revisores el Dr. Alberto Cavazos González y el Dr. Anand Sánchez Orta, por su colaboración, por las ideas sugeridas para el beneficio de esta tesis, y por sus oportunas correcciones.

A mis profesores del DIE por haberme compartido sus conocimientos.

A mis compañeros, con los que forjé una gran amistad.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, por permitirme formar parte de su programa de estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para mis estudios durante estos años de investigación.

# RESUMEN

## **Pasividad de Sistemas Lineales modelados por Gráficas de Ligadura.**

Publicación No. \_\_\_\_\_

Ricardo Javier Puente Aranda

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. René Galindo Orozco

Septiembre del 2018

La pasividad de sistemas de control en lazo cerrado es una propiedad útil relacionada con la estabilidad y la seguridad del sistema, en el sentido de que la cantidad máxima neta de energía que se puede extraer del sistema está limitada por la condición inicial del estado. En esta tesis se propone determinar las condiciones sobre los parámetros de control que aseguren la pasividad de los sistemas planteados. Se consideran sistemas lineales modelados por gráficas de ligadura (Bond Graph) y controladores dentro de la familia de todos los controladores estabilizantes. Además, se propone un diseño de control mediante la técnica de asignación de polos para una estructura de dos grados de libertad. Se muestra que el modelado mediante gráficas de ligadura provee un enfoque en el dominio físico de los controladores que facilita su diseño e interpretación.

# Índice General

<b>Resumen</b> . . . . .	VI
<b>Índice de Figuras</b> . . . . .	IX
<b>Índice de Tablas</b> . . . . .	X
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
1.2. Organización de la tesis . . . . .	2
<b>2. Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1. Pasividad y gráficas de ligadura . . . . .	3
2.2. Estructura de unión derivada de una gráfica de ligadura . . . . .	4
2.3. Pseudoestructura de unión . . . . .	8
2.4. Parametrización de todos los controladores estabilizantes . . . . .	12
<b>3. Pasividad de un sistema de control de dos grados de libertad</b>	<b>16</b>
3.1. Pseudoestructuras de unión de los controladores estabilizantes . . . . .	17
3.2. Condiciones de pasividad del lazo retroalimentado . . . . .	21
3.3. Conclusiones . . . . .	28
<b>4. Diseño de un sistema de control de dos grados de libertad</b>	<b>30</b>
4.1. Análisis de pasividad de la configuración en dos grados de libertad . . . . .	33
4.2. Diseño de los controladores por asignación de polos . . . . .	34
4.3. Pasividad del sistema diseñado . . . . .	38
4.4. Conclusiones . . . . .	43

<b>5. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>44</b>
5.1. Conclusiones generales . . . . .	44
5.2. Trabajos futuros . . . . .	45
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>



# Índice de figuras

2.1. Estructura de unión asociada a una gráfica de ligadura en causalidad integral . . . .	5
2.2. Interconexión en casacada de dos sistemas R-C . . . . .	6
2.3. Elementos parasitos. . . . .	8
2.4. Modelo en gráficas de ligadura de un sistema interconectado en cascada . . . . .	10
2.5. Configuración de dos grados de libertad. . . . .	12
3.1. Sistema mecánico de dos carros . . . . .	24
3.2. Gráfica de ligadura de la planta . . . . .	25
3.3. Gráfica de ligadura del controlador $K(s)$ . . . . .	26
3.4. Gráfica de ligadura del controlador $K_r(s)$ . . . . .	26
3.5. Estados del sistema . . . . .	27
3.6. Estados del sistema con referencia al origen . . . . .	27
3.7. Energías del sistema sin referencias . . . . .	28
4.1. Sistema de control de dos grados de libertad . . . . .	31
4.2. Sistema mecánico de dos carros . . . . .	39
4.3. Representación de la planta en Bond Graph . . . . .	40
4.4. Salidas del sistema caso pasivo . . . . .	41
4.5. Análisis de energías caso pasivo . . . . .	42
4.6. Análisis de energías caso no pasivo . . . . .	42
4.7. Salidas del sistema con el controlador $\Sigma_c$ . . . . .	43

# Índice de tablas

3.1. Parámetros del sistema . . . . .	24
4.1. Parámetros del sistema y condiciones iniciales . . . . .	39

# Capítulo 1

## Introducción

El interés en pasividad es que asegura estabilidad robusta [1] y seguridad para sistemas que interactúan con operadores humanos, dado que la cantidad de energía con que puede interactuar con el ambiente está limitada comparada con sistemas no pasivos [2]. En el trabajo de [3] se desarrolló un sistema de control para un robot manipulador por comparación de enfoques clásicos y control basado en modelos físicos. Ellos mostraron que el modelo físico provee guía para la selección y localización de actuadores conduciendo a sistemas completos estables. [4] usó bond graphs para proponer un marco genérico para el control en el dominio físico. Este *control basado en modelos físicos* ha tenido recientemente aplicaciones como las de [5], [6], [7] y [8]. Hay pocos trabajos de control basado en pasividad en bond graphs o bien control basado en pasividad y en modelos físicos, uno de esos trabajos es el de [9] en el cual amortiguamiento es agregado a un convertidor de potencia de DC/DC tal que el sistema en lazo cerrado es pasivo. En el trabajo de [10] se analizó la pasividad por medio de una pseudoestructura de unión, para sistemas modelados en bond graph. Estos resultados fueron aplicados al control basado en pasividad en el trabajo de [8] utilizando controladores estabilizantes (ver [11]) sintetizados para una planta ideal y una pseudoinversa de la matriz de entrada. En el trabajo de [12] se obtuvieron formulas analíticas de los controladores de la parametrización de todos los controladores estabilizantes. En esta tesis se aplica el resultado de la pseudoestructura de unión a los controladores estabilizantes en un sistema de control en configuración de dos grados de libertad. Así, los objetivos generales de este trabajo se muestran a continuación.

## 1.1. Objetivos

Los objetivos generales de este trabajo son:

- Considerando sistemas lineales modelados por gráficas de ligadura y controladores dentro de la familia de todos los controladores estabilizantes dados en [12], obtener una realización en espacio de estados y posteriormente una pseudoestructura de unión para cada controlador, con el fin de poder analizar las condiciones de pasividad del sistema.
- Diseñar los controladores para un sistema retroalimentado en una configuración de dos grados de libertad por medio de la técnica de asignación de polos y guiado por el enfoque físico que provee el modelo en gráficas de ligadura. Así como, encontrar las condiciones de pasividad para este sistema.

## 1.2. Organización de la tesis

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 se describen los antecedentes requeridos para la obtención de los resultados propuestos. Se explica la pseudoestructura de unión y se muestra su uso mediante un ejemplo ilustrativo. Posteriormente, se muestran las expresiones analíticas de la parametrización de todos los controladores estabilizantes.

En el Capítulo 3 se presenta el primer resultado de esta tesis. Se describe una realización en espacio de estados para cada uno de los controladores de la parametrización, así como una pseudoestructura de unión de los mismos. Además se analiza la pasividad del lazo retroalimentado.

En el Capítulo 4 se muestra el diseño de un sistema de control en un esquema de dos grados de libertad por medio de asignación de polos. Mediante la pseudoestructura de unión es analizada la pasividad del sistema.

Por último, se muestran conclusiones y trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Pasividad y gráficas de ligadura

La pasividad es una propiedad importante en el diseño de sistemas integrados, tales como sistemas de control o sistemas mecatrónicos. Se dice que un sistema es pasivo si únicamente puede almacenar, liberar o disipar energía sin posibilidad de generarla. Un claro ejemplo de un sistema pasivo es en el que en ausencia de una fuente externa de energía, la máxima cantidad de energía que puede ser extraída del sistema pasivo está limitada por la energía inicial almacenada, mientras que un sistema no pasivo puede generar más energía que pudiera ser insegura para el sistema y la interacción con éste. Para sistemas físicos, la pasividad aparece como una reinterpretación del principio de conservación de energía [13]. Estando el concepto de pasividad relacionado con energía, no es de sorprender que las técnicas de gráficas de ligadura han sido utilizadas para el diseño de control basado en pasividad (ver [2], [14], [15]).

Existen muchas definiciones de pasividad en la literatura. Para sistemas de puerto- $n$ , que son los sistemas más relevantes para este enfoque, las siguientes definiciones serán utilizadas.

DEFINICIÓN 2.1. (ver [16]) Un puerto- $n$  se dice que es pasivo si la energía disponible  $E_A(x_o)$ , que es la máxima energía que puede ser extraída del sistema para cada estado inicial  $x_o$ , es finita.

DEFINICIÓN 2.2. (ver [2]) Un puerto- $n$  es pasivo si para todo par conjugado admisible  $(e_i, f_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  en las ligaduras de entrada, y para cada estado inicial  $x_o$ , existe una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que

para todo tiempo  $T \geq 0$ ,

$$-\int_0^T (e_1 f_1 + \cdots + e_m f_m) dt \leq c^2 \quad (2.1)$$

La Ec.(2.1) expresa el hecho que, sin importar el intercambio de energía en los puertos ni el tiempo  $T$  que tome, la máxima cantidad de energía que puede ser extraída del sistema es limitada por una constante positiva  $c^2$  que se puede considerar como la energía inicial almacenada en el sistema, que depende únicamente del estado inicial. De la definición anterior, es claro que un modelo en gráficas de ligadura que consiste solamente de elementos pasivos  $R$ ,  $I$  y  $C$  sin fuentes internas es pasivo. Cuando el modelo incluye fuentes internas que son moduladas por otras variables (señales) del sistema, no es posible tratar estas fuentes como entradas externas, sin embargo, el hecho de que un sistema contenga elementos activos no significa necesariamente que el modelo no pueda ser pasivo. Más adelante en este capítulo se da un método que consiste en un modelo equivalente donde las entradas externas y los elementos  $I$  y  $C$  son idénticos al modelo original, pero las ganancias de las fuentes internas son acopladas al campo disipativo original, resultando en un nuevo campo disipativo el cual puede ser o no pasivo.

## 2.2. Estructura de unión derivada de una gráfica de ligadura

Un modelo en gráficas de ligadura de un sistema o subsistema puede ser representado por una estructura de unión  $S$ , la cual es un multipuerto que ordena las uniones 1 y 0, transformadores  $TF$  y giradores  $GY$  [17]. Las estructuras de unión establecen el intercambio de energía que aseguran las restricciones entre las partes dinámicas del sistema. La figura 2.1 muestra una estructura de unión asociada a una gráfica de ligadura en causalidad integral. Los elementos conectados al multipuerto  $S$  por medio de ligaduras son: los elementos almacenadores  $I$  y  $C$  (campo de almacenamiento), conectados en causalidad integral, los elementos disipativos  $R$  (campo disipativo), las fuentes de esfuerzo  $S_e$  y flujo  $S_f$ , y los elementos detectores de esfuerzo  $D_e$  y flujo  $D_f$ .

De acuerdo con la figura,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector de estado asociado con los elementos  $I$  y  $C$  en causalidad integral, compuesto de variables de energía, momento generalizado  $p(t)$  en los elementos  $I$  y carga generalizada  $q(t)$  en los elementos  $C$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector de coenergía compuesto de variables de esfuerzo  $e(t)$  y de flujo  $f(t)$ ,  $D_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  y  $D_o(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  son vectores

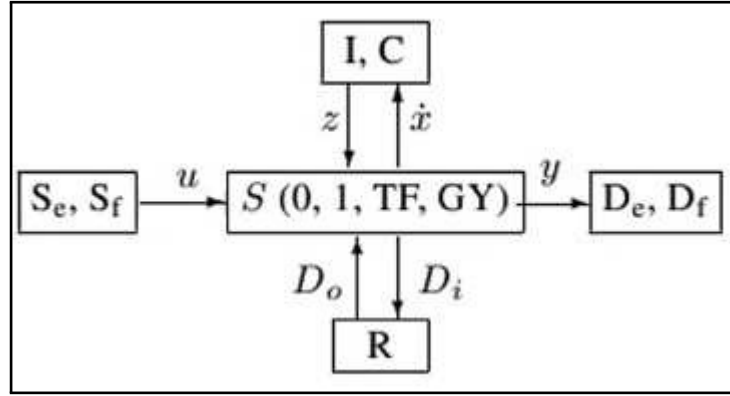


Figura 2.1: Estructura de unión asociada a una gráfica de ligadura en causalidad integral

que asocian esfuerzos y flujos entre el campo disipativo y la estructura de unión, por último, la entrada y salida de la planta se denotan por  $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ , respectivamente, siendo  $n$  el número de estados,  $m$  el número de entradas y  $p$  el número de salidas. La entrada  $u(t)$  contiene los esfuerzos y los flujos impuestos por las fuentes externas. Las relaciones constitutivas son  $z(t) = \varphi_1(x(t))$  y  $D_o(t) = \varphi_2(D_i(t))$ . Para el caso lineal se simplifica a  $z(t) = Fx(t)$  y  $D_o(t) = LD_i(t)$ , donde  $F$  es una matriz diagonal compuesta de elementos  $1/I$  y  $1/C$ , y  $L$  es una matriz diagonal compuesta por elementos  $1/R$  y/o  $R$ . Las relaciones entre la estructura de unión y los campos multipuerto están dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_o(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{donde } S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}.$$

Regularmente se consideran las fuentes como entradas externas, para este caso, la estructura de unión cumple con el principio de conservación de energía, es decir, en ausencia de entradas externas, la energía total que puede disipar el sistema debe ser igual a la energía almacenada, por lo tanto se cumple  $\dot{x}^T(t)z(t) + D_i^T(t)D_o(t) = 0$ . Teniendo en cuenta las siguientes propiedades de

la estructura de unión  $S$  :

**P1**  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son antisimétricas,

**P2**  $S_{12} = -S_{21}^T$

se asegura que se cumpla la propiedad de conservación de energía, y por ende, la propiedad de pasividad, ya que la energía que puede ser sustraída del sistema no excede en ningún momento la energía inicial. Sin embargo, existen muchos casos, tales como algunos sistemas mecatrónicos o sistemas de control retroalimentados o interconectados en cascada, que contienen ligaduras activas que no cumplen con el principio de conservación de energía. En estos casos se representan dichas ligaduras activas con fuentes moduladas,  $MS_e$  y  $MS_f$ , las cuales quedan dentro de la estructura de unión  $S$ . Debido a esto, las propiedades P1 y P2 no se cumplen para todos los casos, por lo tanto, la propiedad de conservación de energía no se satisface. Esto se puede apreciar en el siguiente ejemplo (ver [10]).

**EJEMPLO 2.1.** Sea el sistema de control dado por la interconexión en cascada de dos sistemas R-C como el de la figura 2.2.

La relación constitutiva del campo disipativo  $D_o(t) = LD_i(t)$  es,

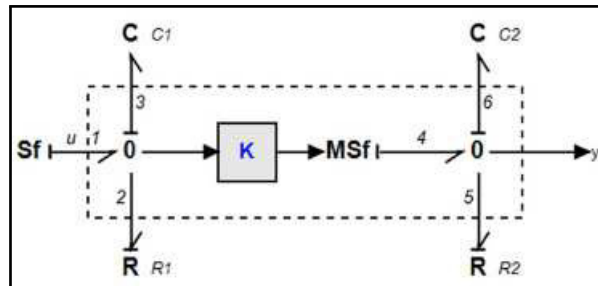


Figura 2.2: Interconexión en casacada de dos sistemas R-C

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$



la relación constitutiva del campo de almacenamiento  $z(t) = Fx(t)$  es,

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_5 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

y la fuente modulada tal que  $f_4 = Ke_3$ , donde  $K$  es la ganancia de la fuente modulada. El modelo puede ser representado por la siguiente estructura de unión,

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ K & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ f_2 \\ f_5 \\ f_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Se puede observar que la submatriz  $S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}$  no es antisimétrica, por lo que no cumple con la propiedad de conservación de energía.

No obstante, que un sistema no cumpla con la propiedad de conservación de energía no implica que éste sea no pasivo. Un sistema con elementos activos será pasivo si para cada instante, la energía disipada es mayor que la energía generada internamente. Esto implica que para el caso donde el sistema cuenta con fuentes moduladas, una condición suficiente para asegurar pasividad es que, para cada instante, la energía disipada por los elementos resistivos sea mayor que la energía generada por las fuentes internas. El problema está en encontrar las condiciones para que esta clase de sistemas cumpla con la propiedad de pasividad. Una solución es un modelo derivado de la estructura de unión que permite separar la parte no conservativa de la parte conservativa, de modo que, las ganancias de las fuentes moduladas quedan acopladas al campo disipativo, cuyas propiedades permiten determinar la pasividad del sistema. Este modelo es llamado pseudoestructura de unión [10], y se presenta con detalle en la siguiente sección.

## 2.3. Pseudoestructura de unión

Por razones de compatibilidad de dimensiones e inversión de matrices, realizar una pseudoestructura de unión propuesta en el siguiente Lema requiere que haya una relación uno a uno entre cada elemento almacenador y cada elemento disipativo en el modelo. Esto tiene una justificación física derivada del hecho que los modelos son siempre aproximaciones de sistemas físicos. La relación uno a uno entre los elementos almacenadores y los elementos disipativos se puede asegurar si:

- Se conectan resistencias de valor alto en paralelo con cada elemento  $C$  o conectando capacitores de valor bajo por cada elemento  $R$ , y
- Conectando resistencias de valor pequeño en serie con cada elemento  $I$  o conectando inductores de valor pequeño por cada elemento  $R$ .

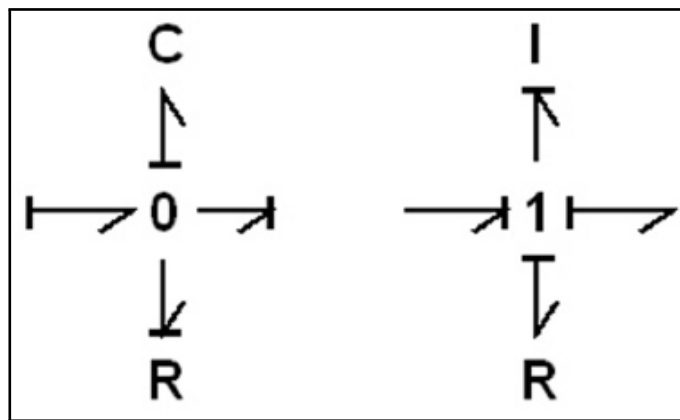


Figura 2.3: Elementos parasitos.

Además se requiere cumplir las siguientes suposiciones:

**Suposición 1.** Después de la interconexión de subsistemas, únicamente se aplican al sistema de puerto- $m$  señales entrada/salida cuyo producto es potencia.

**Suposición 2.** Cuando se agregan elementos  $C$  o  $I$  “pequeñas”, la dinámica rápida del sistema singularmente perturbado resultante debe ser estable [18].

**Suposición 3.** Cada subsistema a ser interconectado satisface  $S_{21} = I_n$ ,  $S_{22} = 0$  y  $S_{23} = 0$ .. Esto se asegura mediante la conexión de los elementos parásitos.

El siguiente Lema [10], describe cómo obtener una pseudoestructura de unión que permite analizar las condiciones de pasividad de un sistema.

LEMA 2.1. *Dada una estructura de unión  $S$  de una gráfica de ligadura modelando a un sistema lineal conservativo o no conservativo,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ I_n & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_o(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

que satisface las suposiciones 1 a 3,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $D_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $D_o(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $z(t) = Fx(t)$  y  $D_o(t) = LD_i(t)$ . Una pseudoestructura de unión interna equivalente  $S^i$  conservativa es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & S_{13} \\ I_n & 0 & 0 \\ S_{31} + S_{32}L & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{D}_o(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

la relación constitutiva del campo disipativo multipuerto es,  $\hat{D}_o(t) = \hat{L}D_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\hat{L} := -(S_{11} + S_{12}L)$ . Más aún, el sistema es pasivo si la matriz  $\hat{L}$  es semidefinida positiva.

La prueba puede ser vista en [10]. El Lema anterior puede ser aplicado al ejemplo (R-C) a fin de encontrar las condiciones que aseguren la pasividad del sistema. Esto se muestra a continuación.

EJEMPLO 2.2. *Partiendo de la estructura de unión del ejemplo anterior dada por la Ec. (2.5), se aplica el Lema 2.1 y se obtiene la siguiente pseudoestructura de unión equivalente,*

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ \overline{f_6} \\ e_2 \\ \overline{e_5} \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ f_2 \\ f_5 \\ f_1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

La nueva relación constitutiva del campo disipativo  $\hat{D}_o(t) = \hat{L}D_i(t)$ ,

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{f}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ -K & 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

nos permite determinar bajo qué condiciones el sistema es pasivo. Para este caso, verificando la parte simétrica de la matriz  $\hat{L}$  se concluye que el sistema es pasivo si  $K \leq 2/\sqrt{R_1 R_2}$  y activo para el caso contrario.

La pseudoestructura de unión puede ser aplicada a algunas configuraciones comunes en sistemas de control, tales como las interconexiones en cascada y en retroalimentación, para analizar su pasividad. El siguiente Teorema dado en [10] muestra cómo obtener una pseudoestructura de unión equivalente para sistemas de control representados en gráficas de ligadura que consisten en estructuras de unión  $S_a$  y  $S_b$  interconectados en cascada como se muestra en la Fig. 2.4 . Se asume que  $S_b$  no presenta efecto de carga sobre  $S_a$ . Ambos subsistemas están conectados por señales que modulan las fuentes de esfuerzo  $MS_e^b$  o flujo  $MS_f^b$ . Debido a esto, la estructura de unión del sistema completo es no conservativa.

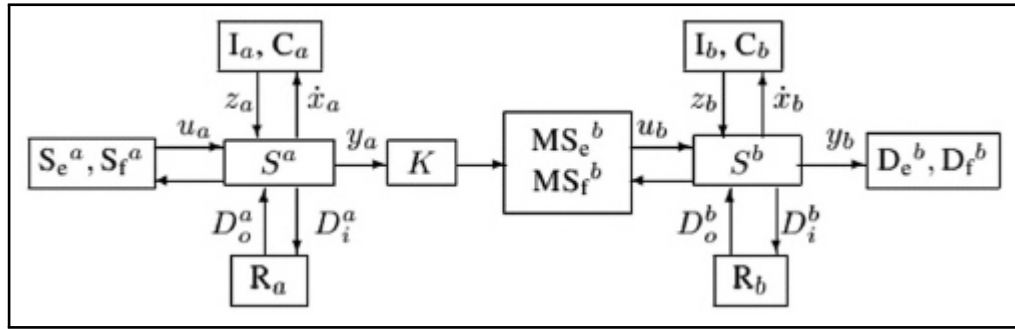


Figura 2.4: Modelo en gráficas de ligadura de un sistema interconectado en cascada

TEOREMA 2.3. Sean  $S_a$  y  $S_b$  dos estructuras de unión de sistemas lineales modelados en gráficas de ligadura, dados por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ D_i^a(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^a & S_{12}^a & S_{13}^a \\ I_{n_a} & 0 & 0 \\ S_{31}^a & S_{32}^a & S_{33}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a(t) \\ D_o^a(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

y

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b(t) \\ D_i^b(t) \\ y_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^b & S_{12}^b & S_{13}^b \\ I_{n_b} & 0 & 0 \\ S_{31}^b & S_{32}^b & S_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_b(t) \\ D_o^b(t) \\ u_b(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

que satisfacen las suposiciones 1 a 3, donde  $x_a(t) \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$ ,  $z_a(t) = F_a x_a(t) \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$ ,  $D_i^a(t) \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$ ,  $D_o^a(t) = L_a D_i^a(t) \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$ ,  $x_b(t) \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ ,  $z_b(t) = F_b x_b(t) \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ ,  $D_i^b(t) \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ ,  $D_o^b(t) = L_b D_i^b(t) \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ . Suponiendo que  $S_a$  y  $S_b$  están interconectados sin efecto de carga tal que  $u_b(t) = K y_a(t)$ , donde  $K$  es una matriz no singular compuesta de las ganancias de  $MS_e^b$  y  $MS_f^b$ . Entonces, una pseudoestructura de unión  $S_{ab}^i$  para la interconexión en cascada, que satisface las propiedades de conservación de energía es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_a+n_b} & S_{13} \\ I_{n_a+n_b} & 0 & 0 \\ S_{31} + S_{32}L & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{D}_o(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde  $\dot{x}(t) := \begin{bmatrix} \dot{x}_a^T(t) & \dot{x}_b^T(t) \end{bmatrix}^T$ ,  
 $D_i(t) := \begin{bmatrix} (D_i^a(t))^T & (D_i^b(t))^T \end{bmatrix}^T$ ,  
 $z(t) := \begin{bmatrix} z_a^T(t) & z_b^T(t) \end{bmatrix}^T$ ,  
 $\hat{D}_o(t) := \begin{bmatrix} (\hat{D}_o^a(t))^T & (\hat{D}_o^b(t))^T \end{bmatrix}^T$ ,  
 $S_{13} := \begin{bmatrix} S_{13}^a \\ S_{13}^b K S_{33}^a \end{bmatrix}$ ,  $S_{31} := \begin{bmatrix} S_{33}^b K S_{31}^a & S_{31}^b \end{bmatrix}$   
 $S_{32} := \begin{bmatrix} S_{33}^b K S_{32}^a & S_{32}^b \end{bmatrix}$ ,  $S_{33} := S_{33}^b K S_{33}^a$

La relación constitutiva del campo disipativo es

$$\hat{D}_o(t) = L_{ab} D_i(t) \quad (2.13)$$

$$L_{ab} := - \begin{bmatrix} S_{11}^a + S_{12}^a L_a & 0 \\ S_{13}^b K (S_{31}^a + S_{32}^a L_a) & S_{11}^b + S_{12}^b L_b \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

El sistema es pasivo si  $L_{ab}$  es una matriz semidefinida positiva.

La prueba puede ser vista en [10].

Además, un pseudoestructura de unión puede ser obtenida a partir de un modelo en espacio de estados  $(A, B, C, D)$  [8], como se muestra a continuación,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & B \\ I_n & 0 & 0 \\ CF^{-1} & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{D}_o(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde,  $z(t) = Fx(t)$ ,  $\hat{D}_o(t) = \hat{L}D_i(t)$  y  $\hat{L} := -AF^{-1}$  con  $F = \text{diag}\{\frac{1}{I_1}, \dots, \frac{1}{I_v}, \frac{1}{C_{v+1}}, \dots, \frac{1}{C_n}\}$  y  $v$  un número arbitrario de elementos  $L$ . Además, el sistema es pasivo si  $\hat{L}$  semidefinida positiva.

En la siguiente sección se muestran las soluciones analíticas de los controladores estabilizantes y posteriormente se obtienen pseudoestructuras de los controladores y del sistema en lazo cerrado.

## 2.4. Parametrización de todos los controladores estabilizantes

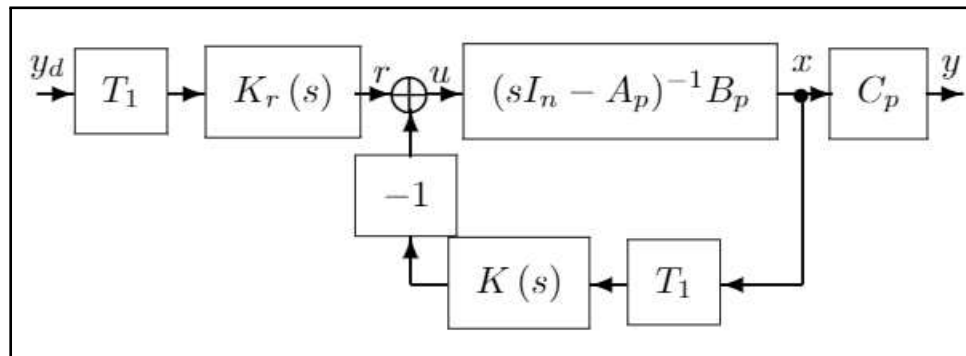


Figura 2.5: Configuración de dos grados de libertad.

Una versión de configuración de control de dos parámetros se muestra en la Fig. 2.5 donde  $u(s)$  es generada por dos señales independientes diferentes, esto es,  $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$  donde  $y_d(s)$  es la entrada de referencia y  $\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix}$  es el controlador de dos parámetros. La parametrización de todos los controladores estabilizantes para esta configuración (ver [11]) se muestra a continuación,

TEOREMA 2.4. *Suponga que  $P(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ ,  $K_r(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$  y  $K(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$  están en la configuración retroalimentada de la Fig. 2.5. Sean*

$$P(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (2.16)$$

y

$$P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.17)$$

*cualquier factorización copríma derecha e izquierda de  $P(s)$  con  $N(s)$ ,  $D(s)$ ,  $\tilde{N}(s)$  y  $\tilde{D}(s)$  pertenecientes al conjunto de funciones racionales propias y estables  $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ . Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan  $P(s)$  está dado por,*

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

*donde  $\tilde{D}_k(s) := Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)$ ,  $\tilde{N}_k(s) := X(s) + R(s)\tilde{D}(s)$ ,  $R(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  y  $Q(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  son parámetros libres satisfaciendo  $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ , además,  $X(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  y  $Y(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  son la solución de la ecuación Diofantina derecha.*

El controlador  $K_r(s)$  es usado para mejorar el seguimiento o regulación de la señal de salida  $y(s)$  a la referencia  $y_d(s)$ , y el controlador  $K(s)$  garantiza estabilidad interna [11]. En esta sección se muestran soluciones analíticas de la parametrización de todos los controladores estabilizantes para un caso particular de sistemas descrito a continuación. Se considera una realización mínima de una planta linealmente invariante en el tiempo, estabilizable y detectable  $(A_p, B_p, C_p)$ . Se asume que el estado es medible o se puede estimar, que la dimensión del estado  $n$  es par, la dimensión de la entrada es  $m = n/2$ , la dimensión de salida es  $p = m$ , y que  $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se particiona de acuerdo a la partición a bloques de  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que,

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p \\ A_{21}^p & A_{22}^p \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} B_1^p \\ B_2^p \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} C_1^p & C_2^p \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dado que en general todas las entradas de  $u(t)$  y salidas  $y(t)$  son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad, se asegura que  $B_2^p$  y  $C_2^p$  son matrices no singulares, además se supone

que  $A_{12}^p$  y  $A_{21}^p$  son matrices no singulares. Un cambio de coordenadas definido por  $\bar{x}(t) := T_1 x(t)$ , donde,

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} I_m & -B_1^p(B_2^p)^{-1} \\ V_1\Theta_1 & I_m \end{bmatrix} \\ T_1^{-1} &= \begin{bmatrix} \Delta_1^{-1} & \Delta_1^{-1}B_1^p(B_2^p)^{-1} \\ -V_1\Theta_1\Delta_1^{-1} & I_m - V_1\Theta_1\Delta_1^{-1}B_1^p(B_2^p)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$\begin{aligned} V_1 &:= (A_{12}^p - B_1^p(B_2^p)^{-1}A_{22}^p)^{-1} \\ \Theta_1 &:= A_{11}^p - B_1^p(B_2^p)^{-1}A_{21}^p \\ \Delta_1 &:= I_m + B_1^p(B_2^p)^{-1}V_1\Theta_1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

mostrado en [12] lleva a una realización de la planta en nuevas coordenadas dada por,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, C = C_p T^{-1} \quad (2.22)$$

Las soluciones analíticas de las factorizaciones coprimas derecha e izquierda para la planta descrita por la Ec.(2.19), así como soluciones para la ecuación Diofantina derecha

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2.23)$$

se muestran a continuación en el siguiente Lema [12],

LEMA 2.2. *Considere la realización en espacio de estados dada por la Ec.(2.19) bajo el cambio de base  $T_1$  de la Ec.(2.20). Entonces factorizaciones coprimas derecha e izquierda de la planta  $(sI_n - A)^{-1}B$  sobre  $\mathcal{RH}_\infty$ , donde  $A$  y  $B$  estan dados por la Ec.(2.22) son,*

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ B_ms \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \\ I_ms \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (2.25)$$



donde  $0 < a \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $A_{12}$  son matrices no singulares y,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - A_{22}s - A_{21}A_{12}) \quad (2.26)$$

Además, una solución analítica para la ecuación Diofantina derecha descrita en la Ec.(2.23) para la factorización coprima derecha de la Ec.(2.25) sobre  $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  es,

$$X(s) = \begin{bmatrix} a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} & M \end{bmatrix}, \quad Y(s) = B_m \quad (2.27)$$

donde  $M := 2aI_m + A_{22}$ .

En el siguiente capítulo se presentan los primeros resultados de esta tesis que consisten en realizaciones en espacio de estados de los controladores estabilizantes, las pseudoestructuras de estos controladores y el análisis de pasividad del sistema en lazo cerrado basado en pseudoestructuras propuestas.

## Capítulo 3

# Pasividad de un sistema de control de dos grados de libertad

Como se mencionó anteriormente, en un sistema que contiene fuentes internas moduladas por ligaduras activas (señales), las propiedades de conservación de energía se pueden perder. Un método para el análisis de pasividad de dichos sistemas es modelar el sistema mediante una pseudoestructura de unión (ver el capítulo anterior de antecedentes), lo cual permite obtener un modelo equivalente del sistema en el cual las ganancias de las fuentes internas moduladas quedan alojadas en el campo disipativo. Un caso particular es el de obtener una pseudoestructura de unión a partir de una realización en espacio de estados, como se muestra en la Ec. (2.15), esto nos permite obtener un enfoque en el dominio físico de un sistema, así como el análisis de pasividad.

El propósito es aplicar estos resultados en los controladores estabilizantes  $K(s)$  y  $K_r(s)$  de la configuración retroalimentada de dos grados de libertad mostrada en la Fig. 2.5, con el fin de tener un enfoque en el dominio físico mediante la pseudoestructura de unión, para ello es necesario primero encontrar una realización en espacio de estados de cada uno de los controladores. Cabe señalar que el sistema de control se diseña para seguir una referencia de posición por medio de la elección del parámetro libre  $Q(s)$ . Por otra parte, se analiza la pasividad del lazo retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ , para ello se obtendrá una pseudoestructura de unión de la función de

transferencia de  $r(s)$  a  $y(s)$  (ver [11]),

$$T_k(s) = CN(s)D_k(s) \quad (3.1)$$

En el sistema mostrado en la Fig. 2.5  $y_d(s)$  tiene el mismo significado físico que  $x(s)$ , por lo que su producto no es potencia y no se puede analizar la pasividad del sistema completo utilizando el resultado propuesto por [19], sin embargo,  $r(s)$  y  $u(s)$  tienen el mismo significado físico y la salida  $y(s)$  se puede seleccionar para que el producto de  $r(s)$  y  $y(s)$  sea potencia, y de esta forma se pueda analizar la pasividad del lazo formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ . Así, los problemas abordados son,

**Problema 1.** Para la realización en espacio de estados  $(A, B, I_n)$  de la planta, determinar pseudoestructuras de unión para cada uno de los controladores estabilizantes  $K(s)$  y  $K_r(s)$  en la configuración de dos grados de libertad de la Fig. 2.5 asegurando el seguimiento del estado por medio de la elección del parámetro libre  $Q(s)$ . Estas pseudoestructuras se utilizan para el análisis de energía por medio de simulación computacional y se emplea el campo disipativo de  $K(s)$  para el análisis de pasividad.

**Problema 2.** Encontrar las condiciones de pasividad obtenidas a partir del campo disipativo de una pseudoestructura de unión que represente a la función de transferencia de  $r$  a  $y$ ,  $T_k(s)$ .

En la siguiente sección se proponen realizaciones en espacio de estados de cada uno de los controladores estabilizantes, posteriormente se obtienen sus respectivas pseudoestructuras de unión.

### 3.1. Pseudoestructuras de unión de los controladores estabilizantes

Para la implementación en simulación y análisis de pasividad, se proponen pseudoestructuras de unión para cada uno de los controladores estabilizantes  $K(s)$  y  $K_r(s)$ . Una solución al Problema 1 y al problema de seguimiento a la referencia se presenta en el siguiente lema:

LEMA 3.1. *Considere un sistema de control en la configuración de dos grados de libertad de la Fig. 2.5, donde la realización en espacio de estados de la planta  $P(s)$  está dada por la Ec. (2.22), y  $K(s)$  y  $K_r(s)$  son los controladores estabilizantes del lazo de retroalimentación y de la referencia, respectivamente, dados por la Ec. (2.18). Suponga que la referencia de posición es constante, esto es,  $y_r = \begin{bmatrix} q_d \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ 0 \end{bmatrix}$ , donde  $q_d = \text{cte}$ . Entonces, una realización en espacio de estados,  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$ , de  $K(s)$  es,*

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (r - a^2)I_n & -2aI_n \end{bmatrix}; B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}; \\ C_k &= \begin{bmatrix} N_3^k - (a^2 - r)N_1^k & N_2^k - 2aN_1^k \end{bmatrix}; D_k = N_1^k \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1^k &:= B_m^{-1} \begin{bmatrix} (a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} & M \end{bmatrix}; \\ N_2^k &:= B_m^{-1} \begin{bmatrix} (2a^3 - r)A_{12}^{-1} + 2aI_m & 2aM \end{bmatrix} \\ N_3^k &:= B_m^{-1} \begin{bmatrix} a^4 A_{12}^{-1} + (a^2 - r)A_{21} & a^2 M \end{bmatrix} \\ M &:= 2aI_m + A_{22}. \end{aligned}$$

con sus dimensiones de entrada, estado y salida  $m_k$ ,  $n_k$  y  $p_k$ , respectivamente. Y una realización en espacio de estados,  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$ , de  $K_r(s)$ , asegurando que la salida siga a la referencia es,

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (r - a^2)I_n & -2aI_n \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}; \\ C_r &= \begin{bmatrix} N_3^r - (a^2 - r)N_1^r & N_2^r - 2aN_1^r \end{bmatrix}; D_r = N_1^r \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1^r &:= \begin{bmatrix} a^2 B_m^{-1} A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix}; N_2^r := \begin{bmatrix} 2a^3 B_m^{-1} A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\ N_3^r &:= \begin{bmatrix} a^4 B_m^{-1} A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con  $m_r$ ,  $n_r$ ,  $p_k$  las dimensiones de entrada, estado y salida.

Más aún, una pseudoestructura de unión interna

$S^k(0, 1, TF, GY)$  para  $K(s)$  descrito por  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$  es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k(t) \\ D_i^k(t) \\ y_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_k} & B_k \\ I_{n_k} & 0 & 0 \\ C_k F_k^{-1} & 0 & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k(t) \\ \hat{D}_o^k(t) \\ u_k(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $\dot{x}_k(s) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $z_k(t) = F_k x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $D_i^k(t) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $\hat{D}_o^k(t) = \hat{L}_k D_i^k(t) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $y_k(t) \in \mathbb{R}^{p_k \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L}_k = -A_k F_k^{-1}$ .

Además, una pseudo-estructura de unión interna

$S^r(0, 1, TF, GY)$  para  $K_r(s)$  descrito por  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ D_i^r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_r} & B_r \\ I_{n_r} & 0 & 0 \\ C_r F_r^{-1} & 0 & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r(t) \\ \hat{D}_o^r(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde  $\dot{x}_r(s) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $z_r(t) = F_r x_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $D_i^r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $\hat{D}_o^r(t) = \hat{L}_r D_i^r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $y_r(t) \in \mathbb{R}^{p_r \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L}_r = -A_r F_r^{-1}$ .

*Demostración.* Haciendo uso de las soluciones de la Ecuación Diofantina derecha, descritas en la Ec.(2.27), así como de las factorizaciones coprimas descritas en las ecuaciones (2.24) y (2.25), y seleccionando el parámetro libre  $R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) & R_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty^{m \times n}$  como:  $R_1(s) = r I_m$  y  $R_2(s) = 0$ , se obtienen:

$$\tilde{D}_k(s) = \frac{d_k(s)}{(s+a)^2} B_m \quad (3.6)$$

$$\tilde{N}_k(s) = \left[ Y(s) A_{12}^{-1} + \frac{d_k(s)}{(s+a)^2} A_{21} \quad M \right] \quad (3.7)$$

donde:  $Y(s) := \left[ a^2 + \frac{rs^2}{(s+a)^2} \right] I_m - \frac{rs}{(s+a)^2} A_{22}$  y  $d_k(s) := (s+a)^2 - r$ . Sustituyendo lo anterior en la Ec. (2.18) se llega a la función de transferencia del controlador:

$$K(s) = (N_1^k s^2 + N_2^k s + N_3^k) / d_k(s) \quad (3.8)$$

Se obtiene la realización en espacio de estados dado por la Ec. (3.2) empleando una forma directa mostrada en [20], pp. 347-348, donde la variable de estado es  $x$ . Se realizó el cambio de coordenadas,

$$z = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} x \quad (3.9)$$

a fin de simplificar los menores principales de la parte simétrica de la matriz  $\hat{L}_k$  y darle una estructura semejante a la de la planta.

Para  $K_r(s)$ , se selecciona  $Q(s)$  partiendo de la función de transferencia de  $y_d$  a  $y$ ,  $T_o(s) = N(s)Q(s)$  (ver [11]), donde:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Sustituyendo  $N(s)$ , la función queda como sigue:

$$T_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12}Q_1 & A_{12}Q_2 \\ sQ_1 & sQ_2 \end{bmatrix}. \text{ Haciendo una aproximación para bajas frecuencias tenemos:}$$

$$T_o(0) = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} A_{12}Q_1 & A_{12}Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y asumiendo que } y_r = \begin{bmatrix} q_d \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ seleccionamos } Q(s) \text{ que garantice que la salida del sistema siga al valor de referencia deseado:}$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} a^2 A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}\mathcal{H}_{\infty}^{m \times n} \quad (3.11)$$

Sustituyendo  $Q(s)$  y  $\tilde{D}_k^{-1}(s)$  dado en la Ec. (3.6), la función de transferencia para  $K_r(s)$  queda:

$$K_r(s) = \begin{bmatrix} a^2(s+a)^2 B_m^{-1} A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} / d_k(s) \quad (3.12)$$

De igual manera que con  $K(s)$ , se obtiene una representación en espacio de estados para  $K_r(s)$ .

Utilizando la Ec. (2.15) se obtienen directamente los resultados de las pseudo estructuras de unión internas dadas por las ecuaciones (3.4) y (3.5), para las realizaciones en espacio de estados de ambos controladores.  $\square$

En la siguiente sección se analiza la pasividad del lazo retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ .

### 3.2. Condiciones de pasividad del lazo retroalimentado

Analizando el lazo cerrado formado por la planta  $P(s)$  y el controlador  $K(s)$  observamos que representa una interconexión en retroalimentación, la cual sabemos que es pasiva si ambos subsistemas son pasivos (ver [1]). Como la planta representa un sistema físico con elementos pasivos, basta con encontrar las condiciones para las cuales, el controlador  $K(s)$  es pasivo. Para ello se analiza el multipuerto disipativo  $\hat{L}_k$ , el cual debe ser una matriz semidefinida positiva. Utilizado el criterio de Sylvester se comprueba lo anterior revisando si los menores principales de la parte simétrica dada por  $\frac{1}{2}(\hat{L}_k + \hat{L}_k^T)$  son mayor o igual que cero. Sea  $F_k := \text{diag}\{F_1^k, F_2^k\}$  y utilizando  $A_k$  dada por la Ec. (3.2) del Lema 1, la parte simétrica de  $\hat{L}_k$  es,

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 - r}{2}(F_1^k)^{-1} - \frac{1}{2}(F_2^k)^{-1} \\ \frac{a^2 - r}{2}(F_1^k)^{-1} - \frac{1}{2}(F_2^k)^{-1} & 2a(F_2^k)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Usando  $\det A = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$  (ver [21], p. 23), y simplificando, se obtiene el determinante de la parte simétrica de  $\hat{L}_k$ :

$$\det(\hat{L}_k + \hat{L}_k^T)/2 = \left[ \frac{-1}{2} f^{-1}(a^2 - r - 1) \right]^{n_k} \quad (3.14)$$

donde se seleccionan  $F_1^k = F_2^k = fI_n$ , siendo  $f \in \mathfrak{R}$ .

Ya que la planta tiene dimensiones  $n$  par y  $m = n/2$ , y debido a la realización obtenida,  $n_k = 2n$  y  $m_k = 2m$ , el determinante de la parte simétrica de  $\hat{L}_k$  es mayor o igual que cero para toda  $a$  y  $r$ , sin embargo, si los controladores son inestables su salida crecería sin límite, por lo que se requiere que  $a > \sqrt{r}$ . El lazo retroalimentado es pasivo cumpliendo estas condiciones en el controlador  $K(s)$ . Por otro lado, se analiza la pasividad del mismo lazo empleando una pseudo estructura de unión aplicada a su función de transferencia  $T_k(s)$  mostrada en la Ec.(3.1), para ello es necesario encontrar una realización en espacio de estados. Esto se muestra en el siguiente Lema,

**LEMA 3.2.** *Suponga un sistema de control en la configuración retroalimentada de la Fig. 2.5, donde la planta  $P(s)$  está dada por la Ec. (2.22). Entonces una realización en espacio de estados  $(A_o, B_o, C_o, 0)$*

de la función de transferencia del lazo retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ ,  $T_k(s)$  es:

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ -a^4 I_n & -4a^3 I_n & -6a^2 I_n & -4a I_n \end{bmatrix}; B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ C_o &= \begin{bmatrix} N_4^o & N_3^o & N_2^o & N_1^o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde:  $N_1^o := \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}$ ;  $N_2^o := \begin{bmatrix} A_{12}B_m \\ 2aB_m \end{bmatrix}$   
 $N_3^o := \begin{bmatrix} 2aA_{12}B_m \\ (a^2 - r)B_m \end{bmatrix}$ ;  $N_4^o := \begin{bmatrix} (a^2 - r)A_{12}B_m \\ 0 \end{bmatrix}$ , con dimensiones de entrada, estado y salida  $m_o$ ,  $n_o$  y  $p_o$ , respectivamente.

Una pseudo-estructura de unión interna  $S^o(0, 1, TF, GY)$  para  $T_k(s)$  descrita por  $(A_o, B_o, C_o, 0)$  es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o(t) \\ D_i^o(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_o} & B_o \\ I_{n_o} & 0 & 0 \\ C_o F_o^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(t) \\ \hat{D}_o^o(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde  $\dot{x}_o(s) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $z_o(t) = F_o x_o(t) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $D_i^o(t) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $\hat{D}_o^o(t) = \hat{L}_o D_i^o(t) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $y_o(t) \in \mathbb{R}^{p_o \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L}_o = -A_o F_o^{-1}$ . El sistema retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$  es pasivo si  $\hat{L}_o \geq 0$ , que se satisface  $\forall a > 0$ .

*Demostración.* Utilizando  $N(s)$  dada en la Ec. (2.25) y  $\tilde{D}_k(s)$  propuesta en la Ec. (3.6), la función de transferencia del lazo cerrado de  $r$  a  $y$  dada por la Ec. (3.1) resulta:

$$T_k(s) = \frac{1}{(s+a)^4} \begin{bmatrix} d_k(s) A_{12} B_m \\ s d_k(s) B_m \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Mediante una forma directa mostrada en [20], p.347-348 y el cambio de coordenadas dado por la Ec. (3.9), se obtiene la realización en espacio de estados de la Ec. (3.15). Utilizando la Ec. (2.15) se obtiene directamente la pseudo-estructura de unión interna dada por la Ec. (3.16).



Para el sistema en lazo retroalimentado sea pasivo, se requiere que el campo disipativo  $\hat{L}_o \geq 0$ . Para ello se seleccionan  $F_o := \text{diag}\{F_1^o, F_2^o, F_3^o, F_4^o\}$ ,  $F_1^o = f_1 I_n$ ,  $F_2^o = f_2 I_n$ ,  $F_3^o = f_3 I_n$ ,  $F_4^o = f_4 I_n$ , siendo  $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}$ , y se emplea el criterio de Sylvester sobre  $\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T)$ , dada por:

$$\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde,  $L_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2f_2} I_n \\ -\frac{1}{2f_2} I_n & 0 \end{bmatrix}$ ;  $L_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^4}{2f_1} I_n \\ -\frac{1}{2f_3} I_n & \frac{4a^3}{2f_2} I_n \end{bmatrix}$ ;  $L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2f_3} I_n \\ \frac{a^4}{2f_1} I_n & \frac{4a^3}{2f_2} I_n \end{bmatrix}$   
 $L_{22} = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{6a^2}{2f_3} - \frac{1}{2f_4}) I_n \\ (\frac{6a^2}{2f_3} - \frac{1}{2f_4}) I_n & \frac{4a}{f_4} I_n \end{bmatrix}$ , El determinante del bloque  $L_{11}$  es:  $\left[\frac{-1}{2f_2}\right]^n$  y debido a que la planta tiene dimensión  $n$  par,  $L_{11} \geq 0$ . Usando  $\det A = \det A_{22} \det(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})$ , se obtiene el determinante del bloque  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2f_2} I_n & 0 \\ -\frac{1}{2f_2} I_n & 0 & -\frac{1}{2f_3} I_n \\ 0 & -\frac{1}{2f_3} I_n & 0 \end{bmatrix}$ , el cual es 0. Finalmente, encontramos el  $\det(\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T))$ , dado por:

$$\left( - \left[ - \left( \frac{1}{2f_2} \right)^2 \det(L_{22}^c) + \left( \frac{a^4}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2 \det(L_{22}^c)} \right) \mathbb{M} \right] \right)^n \quad (3.19)$$

Donde  $\mathbb{M} := \frac{a^4}{16f_1f_3} \left( \frac{6a^2}{f_3} - \frac{1}{f_4} \right)$ . Dado que la dimensión  $n$  del estado de la planta es par,  $\det(\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T)) \geq 0 \forall a$ , por lo tanto  $\hat{L}_o \geq 0$ , sin embargo, para la estabilidad de los controladores se requiere que  $a > 0$ .  $\square$

A continuación se ilustran los resultados en un ejemplo, se elige un sistema mecánico de dos carros, el cual cumple con las condiciones que la dimensión del estado  $n$  es par, la dimensión de la entrada es  $m = n/2$ , la dimensión de salida es  $p = m$ , y que  $A_{12}^p$ ,  $A_{21}^p$ ,  $B_2^p$  y  $C_2^p$  son matrices no singulares.

EJEMPLO 3.1. Un sistema mecánico de dos carros como el mostrado en la Fig. 3.1, siendo  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}^T$ ,  $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{bmatrix}^T$ , y  $y(t) = I_n x(t)$ , tiene los siguientes parámetros

Tabla 3.1: Parámetros del sistema

masa $m_1$	masa $m_2$	rigidez $k$	amortiguador. $b$
$m_1 = 2 \text{ kg}$	$m_2 = 3 \text{ kg}$	$k = 10 \text{ N/s}$	$b = 0.7 \text{ Ns/m}$

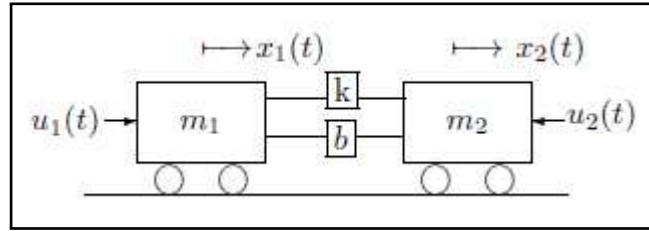


Figura 3.1: Sistema mecánico de dos carros

Una realización en espacio de estados de la planta es la siguiente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & -0.35 & 0.35 \\ 3.3 & -3.3 & 0.23 & -0.23 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$C = I_4$$

Dado que la realización está en la forma de la Ec. (2.22), no es necesario aplicar la transformación  $T_1$ . Se eligen los parámetros libres tal que los controladores sean estables, esto es, que  $a > \sqrt{r}$ . Se escoge  $a = 4$  y para la estabilidad de los controladores se elige  $r = 9$ . Empleando el Lema 3.1 se obtiene una realización en espacio de estados del controlador  $K(s)$ ,

$$A_k = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -7I_n & -8I_n \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} 162 & 0 & 137.7 & 6.3 & -66 & -80 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 6.9 & 233.1 & -88 & -153.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 15.3 & 0.7 \\ 11 & 72.3 & 0.76 & 25.9 \end{bmatrix}$$

y su pseudo estructura de unión dada por la Ec. (3.4), donde  $F_k$  es una matriz diagonal formada por elementos  $L$  o  $C$ , y se eligen de manera arbitraria, en este caso se escogió  $F_k = I_{n_k}$ , por lo tanto la matriz  $\hat{L}_k = -A_k$ . Del mismo modo se obtiene una realización para  $K_r(s)$ ,

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -7I_n & -8I_n \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix}, C_r = \begin{bmatrix} 288 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_r &= \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 53.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

y su pseudo estructura de unión dado por la Ec. (3.5), de igual forma se elige  $F_r = I_{n_r}$ . Para su simulación se obtiene un modelo en gráficas de ligadura de la planta el cual es mostrado en la Fig. 3.2. Las Fig. 3.3 y Fig. 3.4 muestra un modelo en gráficas de ligadura derivado de la pseudo estructura de unión de los controladores.

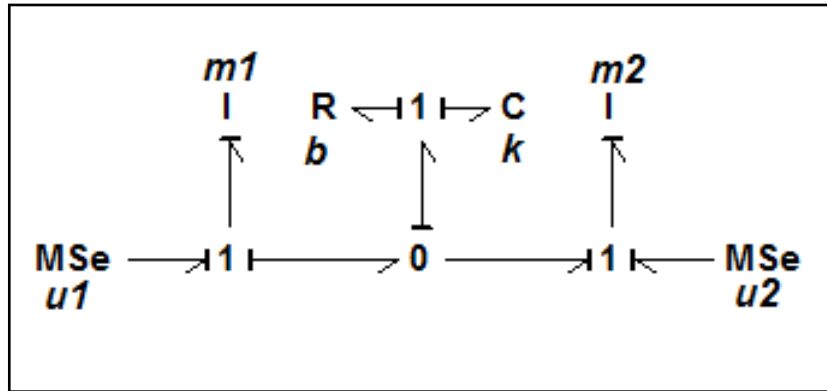
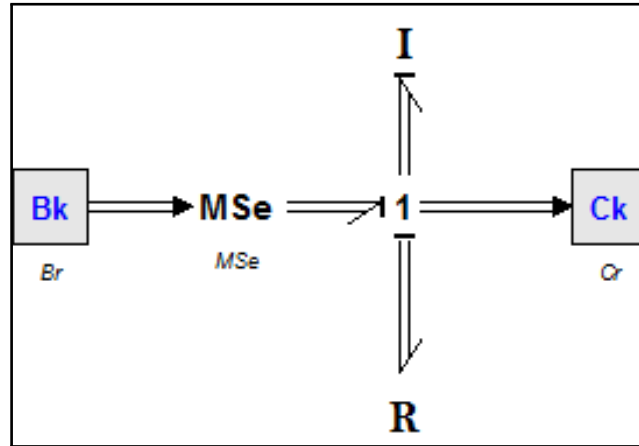
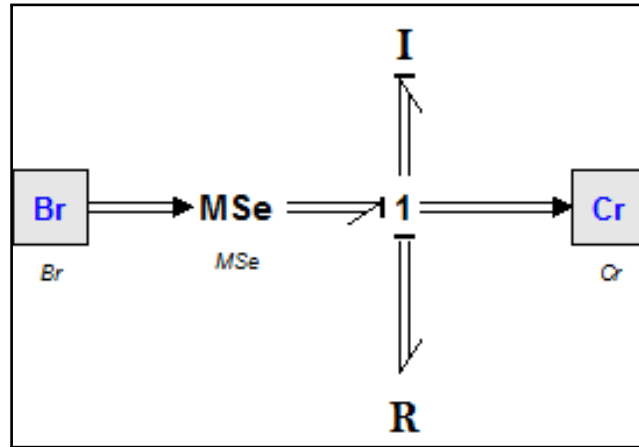


Figura 3.2: Gráfica de ligadura de la planta

Figura 3.3: Gráfica de ligadura del controlador  $K(s)$ Figura 3.4: Gráfica de ligadura del controlador  $K_r(s)$ 

Se comprueban las condiciones de pasividad por medio de la matriz  $\hat{L}_k$  analizando los menores principales de la parte simétrica, la cual es dada por

$$\frac{1}{2}(\hat{L}_k + \hat{L}_k^T) = \begin{bmatrix} 0 & 3I_n \\ 3I_n & 8I_n \end{bmatrix}$$

Se comprueba que todos los menores principales son mayor o igual que cero. Se prueba el sistema con las referencias deseadas  $x_{d1} = 5$ ,  $x_{d2} = 3$ ,  $\dot{x}_{d1} = 0$ ,  $\dot{x}_{d2} = 0$ . En la Fig. 3.5 se muestra que los estados convergen a los valores deseados.

Se comprueba la pasividad del lazo retroalimentado por medio de un análisis de energía. En la Fig. 3.6 se observa que la salida de velocidad converge a cero. En la Fig. 3.7 se puede apreciar que la energía almacenada decrece con el tiempo y no sobrepasa en ningún momento el valor inicial de energía. Además la energía disipada es mayor a la energía generada internamente en todo momento. Las condiciones de pasividad planteadas aseguran que la energía que puede ser suministrada del sistema no es mayor que la energía inicial para todo valor del tiempo.

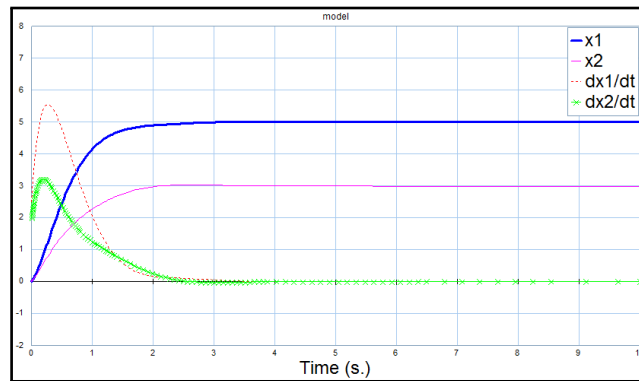


Figura 3.5: Estados del sistema

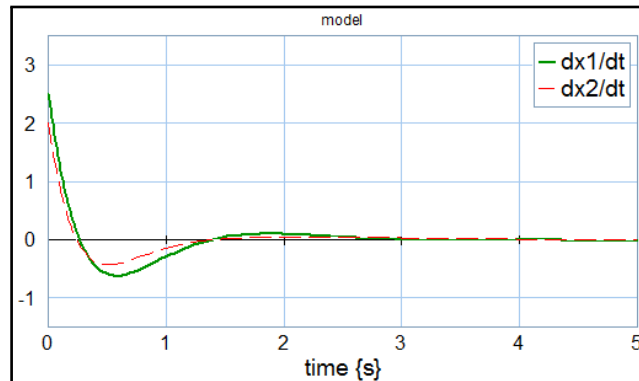


Figura 3.6: Estados del sistema con referencia al origen

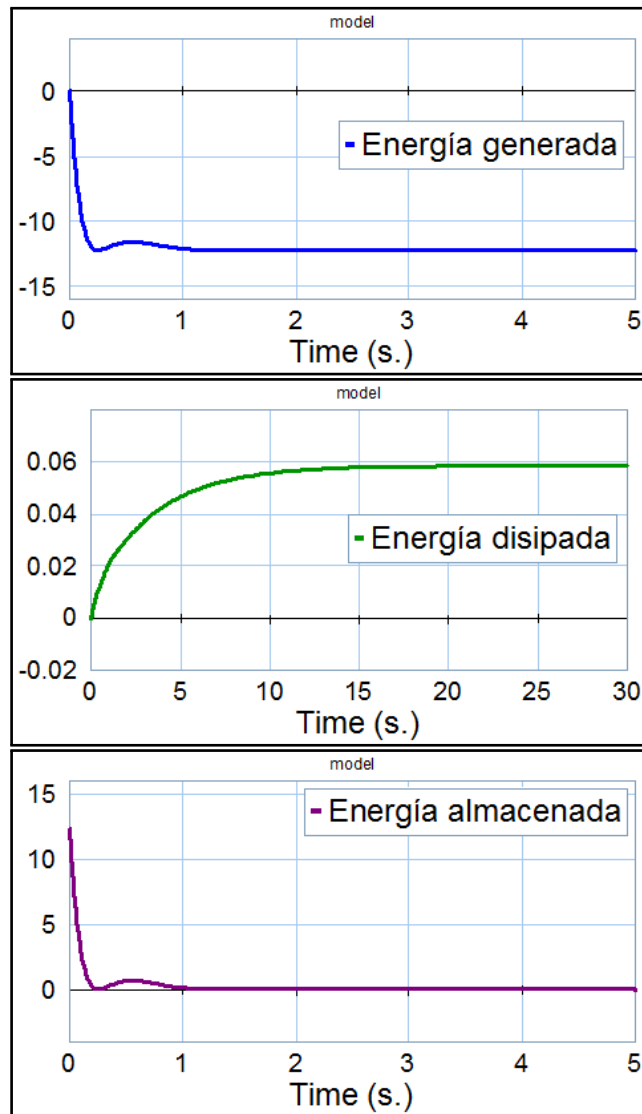


Figura 3.7: Energías del sistema sin referencias

### 3.3. Conclusiones

Se encontraron realizaciones en espacio de estados para las expresiones analíticas de los controladores estabilizantes, lo cual puede ser utilizado para trabajos posteriores. Las pseudo estructuras de unión obtenidas nos permiten tener un enfoque en el dominio físico de los controladores, además permitió su simulación mediante modelado en gráficas de ligadura. Se concluye que el la-

zo cerrado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$  es pasivo, siempre y cuando los controladores sean estables. Sin embargo, no se puede asegurar la pasividad del sistema completo debido a la naturaleza de sus entradas y salidas.

En el siguiente capítulo se presentan los resultados obtenidos para un diseño similar al propuesto en este capítulo, en lugar de estar basado en la parametrización de controladores estabilizantes de [12], se basa en la asignación de polos utilizando controladores diseñados con la guía de pseudo estructuras de unión propuestas.

## Capítulo 4

# Diseño de un sistema de control de dos grados de libertad

La pseudoestructura de unión nos permite obtener un modelo de un sistema basado en el dominio físico, aprovechando esta ventaja se propone un diseño para un sistema de control similar a la configuración de dos grados de libertad de la parametrización de todos los controladores estabilizantes. En este caso los controladores son diseñados por medio de la técnica de asignación de polos, en conjunto con algunas suposiciones derivadas de la guía que provee el modelo en pseudoestructura de unión. La configuración del sistema tratado se observa en la Fig. 4.1, y consiste en tres subsistemas  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_b$  y  $\Sigma_c$  que cumplen con las suposiciones 1, 2 y 3 mostradas en el capítulo de antecedentes, y  $K_a \in \mathbb{R}^{m_a \times p_a}$ ,  $K_b \in \mathbb{R}^{m_b \times p_a}$  son matrices no singulares compuestas por las ganancias de las fuentes moduladas. En el siguiente Lema se muestra una pseudoestructura de unión que modela el sistema propuesto.

LEMA 4.1. Sean  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_b$  y  $\Sigma_c$  subsistemas LTI representados en estructuras de unión dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_j(t) \\ D_i^j(t) \\ y_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^j & S_{12}^j & S_{13}^j \\ I_{n_j} & 0 & 0 \\ S_{31}^j & S_{32}^j & S_{33}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_j(t) \\ D_o^j(t) \\ u_j(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde  $x_j(t) \in \mathbb{R}^{n_j \times 1}$ ,  $z_j(t) = F_j x_j(t) \in \mathbb{R}^{n_j \times 1}$ ,  $D_i^j(t) \in \mathbb{R}^{n_j \times 1}$ ,  $D_o^j(t) = L_j D_i^j(t) \in \mathbb{R}^{n_j \times 1}$ ,  $y_j(t) \in \mathbb{R}^{p_j \times 1}$



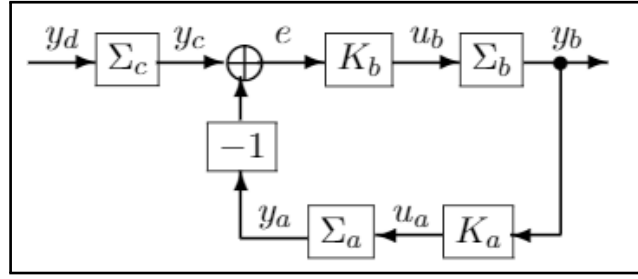


Figura 4.1: Sistema de control de dos grados de libertad

y  $n_j, m_j, p_j$  son las dimensiones de estado, entrada y salida respectivamente, para  $j \in \{a, b, c\}$ . Considere un sistema como el mostrado en la Fig.4.1, donde  $K_b \in \mathbb{R}^{m_b \times p_b}$  y  $K_a \in \mathbb{R}^{m_a \times p_a}$ . Entonces, una pseudoestructura de unión que representa la interconexión entre  $K_b, \Sigma_b, K_a$  y  $\Sigma_a$  es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ab}(t) \\ D_i^{ab}(t) \\ y_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_a+n_b} & S_{13}^{ab} \\ I_{n_a+n_b} & 0 & 0 \\ S_{31}^{ab} & 0 & S_{33}^{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{ab}(t) \\ \hat{D}_o^{ab}(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde,  $\dot{x}_{ab}(t) := [\dot{x}_a(t) \quad \dot{x}_b(t)]^T$ ,  $D_i^{ab}(t) := [D_i^a(t) \quad D_i^b(t)]^T$ ,  $z_{ab}(t) := [z_a(t) \quad z_b(t)]^T$ ,

$$S_{13}^{ab} := \begin{bmatrix} S_{13}^a K_a \Psi S_{33}^b K_b \\ S_{13}^b (K_b^{-1} + S_{33}^a K_a S_{33}^b)^{-1} \end{bmatrix}, S_{31}^{ab} := \Psi \begin{bmatrix} -S_{33}^b K_b S_{31}^a - S_{31}^b K_b S_{32}^a L_a & S_{31}^b + S_{32}^b L_b \end{bmatrix} \text{ y } S_{33}^{ab} := S_{33}^b K_b \text{ y}$$

$\Psi := [I_{n_b} + S_{33}^b K_b S_{33}^a K_a]^{-1}$ . Con el multipuerto disipativo  $\hat{D}_o^{ab}(t) := \hat{L}_{ab} D_i^{ab}(t)$  donde,

$$\hat{L}_{ab} := - \begin{bmatrix} S_{11}^a + S_{12}^a L_a - S_{13}^a K_a \Psi S_{33}^b K_b \Theta_a & S_{13}^a K_a \Psi \Theta_b \\ -S_{13}^b (K_b^{-1} + S_{33}^a K_a S_{33}^b)^{-1} \Theta_a & S_{11}^b + S_{12}^b L_b - S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a \Psi \Theta_b \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

siendo  $\Theta_a := S_{31}^a + S_{32}^a L_a$  y  $\Theta_b := S_{31}^b + S_{32}^b L_b$ . El subsistema formado por la interconexión entre  $K_b, \Sigma_b, K_a$  y  $\Sigma_a$  es pasivo si  $\hat{L}_{ab}$  es una matriz semidefinida positiva.

Además, una pseudoestructura de unión del sistema completo es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_a+n_b+n_c} & \hat{S}_{13} \\ I_{n_a+n_b+n_c} & 0 & 0 \\ \hat{S}_{31} & 0 & \hat{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{D}_o(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde,  $\dot{x}(t) := \begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) & \dot{x}_b(t) & \dot{x}_c(t) \end{bmatrix}^T$ ,  $D_i(t) := \begin{bmatrix} D_i^a(t) & D_i^b(t) & D_i^c(t) \end{bmatrix}^T$ ,  $z(t) := \begin{bmatrix} z_a(t) & z_b(t) & z_c(t) \end{bmatrix}^T$ ,  $\hat{S}_{13} := \begin{bmatrix} S_{13}^c \\ S_{13}^{ab} S_{33}^c \end{bmatrix}$ ,  $\hat{S}_{31} := \begin{bmatrix} S_{33}^{ab} S_{31}^c & S_{31}^{ab} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{S}_{33} := \begin{bmatrix} S_{33}^{ab} S_{33}^c \end{bmatrix}$ . Con el multipuerto disipativo  $\hat{D}_o(t) := \tilde{L} D_i(t)$  donde,

$$\tilde{L} = - \begin{bmatrix} S_{11}^c + S_{12}^c L_c & 0 \\ S_{13}^{ab} (S_{31}^c + S_{32}^c L_c) & S_{11}^{ab} + S_{12}^{ab} \hat{L}_{ab} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

El sistema completo es pasivo si la matriz  $\tilde{L}$  es semidefinida positiva.

*Demostración.* De la Fig. 4.1 tenemos  $u_a(t) = K_a y_b(t)$  y  $u_b(t) = K_b [y_c(t) - y_a(t)]$ , substituyendo  $u_a(t)$  en la salida del subsistema  $\Sigma_a$  y  $u_b(t)$  en la salida del subsistema  $\Sigma_b$  dados en la Ec.(4.1) obtenemos,

$$\begin{aligned} y_a(t) &= S_{31}^a z_a(t) + S_{32}^a D_o^a(t) + S_{33}^a K_a y_b(t) \\ y_b(t) &= S_{31}^b z_b(t) + S_{32}^b D_o^b(t) + S_{33}^b K_b [y_c(t) - y_a(t)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

De la Ec.(4.1)  $D_o^a(t) = L_a z_a(t)$  y  $D_o^b(t) = L_b z_b(t)$  por lo tanto:

$$\begin{aligned} y_a(t) &= (S_{31}^a + S_{32}^a L_a) z_a(t) + S_{33}^a K_a y_b(t) \\ y_b(t) &= (S_{31}^b + S_{32}^b L_b) z_b(t) + S_{33}^b K_b [y_c(t) - y_a(t)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sustituyendo  $y_a(t)$  en  $y_b(t)$  de la expresión anterior obtenemos,

$$y_b(t) = \Psi \left[ -S_{33}^b K_b (S_{31}^a + S_{32}^a L_a) z_a(t) + (S_{31}^b + S_{32}^b L_b) z_b(t) + S_{33}^b K_b y_c(t) \right] \quad (4.8)$$

Usando  $u_a(t) = K_a y_b(t)$  y  $D_o^a(t) = L_a z_a(t)$  en  $\dot{x}_a(t)$  de la Ec. (4.1) y substituyendo la Ec. (4.8) obtenemos,

$$\dot{x}_a(t) = (S_{11}^a + S_{12}^a L_a - S_{13}^a K_a \Psi S_{33}^b K_b \Theta_a) z_a(t) + S_{13}^a K_a \Psi \Theta_b z_b(t) + S_{13}^a K_a \Psi S_{33}^b K_b y_c(t) \quad (4.9)$$

De manera similar, usando  $u_b(t) = K_b [y_c(t) - y_a(t)]$  en  $\dot{x}_b(t)$  de la Ec. (4.1), substituyendo  $y_a(t)$

de la Ec. (4.7) y empleando la Ec. (4.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_b(t) = & -S_{13}^b K_b (I_{n_b} + S_{33}^a K_a S_{33}^b K_b)^{-1} \Theta_a z_a(t) + (S_{11}^b + S_{12}^b L_b - S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a \Psi \Theta_b) z_b(t) \\ & + S_{13}^b K_b (I_{n_b} + S_{33}^a K_a S_{33}^b K_b)^{-1} y_c(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Usando el Lema 2.1 se obtiene la pseudoestructura de unión de la Ec. (4.2). Por último para la interconexión en cascada entre  $\Sigma_b$  y el subsistema obtenido de la unión en retroalimentación se aplica el Teorema 2.3 y se obtiene la pseudoestructura de unión de la Ec. (4.4)  $\square$

## 4.1. Análisis de pasividad de la configuración en dos grados de libertad

La configuración planteada puede emplearse en el diseño de sistemas de control, de forma que, los subsistemas sean la planta a controlar y los controladores. A continuación se muestra una simplificación que facilita el análisis de la pasividad de un sistema como el descrito. Suponiendo el subsistema  $\Sigma_b$  como la planta a controlar y los subsistemas  $\Sigma_a$  y  $\Sigma_c$  los controladores a diseñar, además, suponiendo que la planta cumple con las propiedades de conservación de energía y es estrictamente propia:

$$S_{12}^b = -I_{n_b}, S_{32}^b = 0, S_{33}^b = 0 \quad (4.11)$$

y eligiendo:

$$S_{11}^a = 0, S_{12}^a = -I_{n_a}, S_{32}^a = 0 \quad (4.12)$$

entonces la Ec.(4.3) se reduce a:

$$\hat{L}_{ab} = \begin{bmatrix} L_a & -S_{13}^a K_a S_{31}^b \\ S_{13}^b K_b S_{31}^a & L_b + S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a S_{31}^b - S_{11}^b \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Si tenemos una planta que cumpla con  $S_{13}^b = (S_{31}^b)^T$ , además se eligen  $S_{13}^a = (S_{31}^a)^T$  y  $K_a = K_b^T$ , y para sistemas conservativos el bloque  $S_{11}$  es una matriz antisimétrica, entonces podemos separar

la matriz de la Ec.(4.13) en:

$$\hat{L}_{ab} = \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & L_b + S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a S_{31}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -S_{13}^a K_a S_{31}^b \\ S_{13}^b K_b S_{31}^a & -S_{11}^b \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Siendo el segundo término de la suma una matriz antisimétrica y  $L_a$  y  $L_b$  matrices diagonales positivas, entonces el subsistema formado por la interconexión entre  $K_a$ ,  $\Sigma_b$ ,  $K_a$  y  $\Sigma_a$  es pasivo si el término  $S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a S_{31}^b$  es una matriz semidefinida positiva.

Además, considerando  $S_{12}^c = -I_{n_c}$  y  $S_{32}^c = 0$ , la Ec. (4.5) se reduce a:

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L_c - S_{11}^c & 0 \\ -S_{13}^{ab} S_{31}^c & \hat{L}_{ab} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

donde  $S_{13}^{ab}$  se redujo a  $\begin{bmatrix} 0 \\ S_{13}^b K_b \end{bmatrix}$  y  $\hat{L}_{ab}$  está dado por la Ec. (4.13). El sistema completo es pasivo si la matriz de la Ec. (4.15) es semidefinida positiva.

En la siguiente sección se presenta un caso particular de diseño de los controladores, los cuales se diseñan por medio de la técnica de asignación de polos y la guía proporcionada por la estructura y la pseudoestructura de unión.

## 4.2. Diseño de los controladores por asignación de polos

El primer paso es diseñar el controlador  $\Sigma_a$ , para ello se tendrá que obtener la función de transferencia de lazo cerrado de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$ .

**TEOREMA 4.1.** *Considerando el lazo cerrado de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$  en la Fig. 4.1 formado por  $K_b \in \mathbb{R}^{m_b \times p_b}$ ,  $K_a \in \mathbb{R}^{m_a \times p_a}$  y la planta  $\Sigma_b$  y el controlador  $\Sigma_a$  representados por estructuras de unión como la Ec. (4.1). Tomando en cuenta las suposiciones de las Ec. (4.11) y Ec. (4.12) y sean  $L_a := \text{diag}\{L_1^a, L_2^a\}$ ,  $F_a := \text{diag}\{F_1^a, F_2^a\}$ ,  $L_b := \text{diag}\{L_1^b, L_2^b\}$  y  $F_b := \text{diag}\{F_1^b, F_2^b\}$ , donde  $L_1^a \in \mathbb{R}^{m_a \times m_a}$ ,  $L_2^a \in \mathbb{R}^{(n_a - m_a) \times (n_a - m_a)}$ ,  $F_1^a \in \mathbb{R}^{m_a \times m_a}$ ,  $F_2^a \in \mathbb{R}^{(n_a - m_a) \times (n_a - m_a)}$ ,  $L_1^b \in \mathbb{R}^{m_b \times m_b}$ ,  $L_2^b \in \mathbb{R}^{(n_b - m_b) \times (n_b - m_b)}$ ,  $F_1^b \in \mathbb{R}^{m_b \times m_b}$  y  $F_2^b \in$*

$\Re^{(n_b-m_b) \times (n_b-m_b)}$ . Además, eligiendo,

$$S_{13}^a = \begin{bmatrix} I_{m_a} \\ 0 \end{bmatrix}, S_{31}^a = \begin{bmatrix} I_{p_a} & 0 \end{bmatrix}, L_1^a = 0 \quad (4.16)$$

, entonces, la función de transferencia de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$  está dada por,

$$T_{ab}(s) = S_{31}^b \Delta^{-1} S_{13}^b K_b \quad (4.17)$$

donde  $\Delta = sF_b^{-1} + L_b - S_{11}^b + S_{13}^b K_b (S_{33}^a + sI_{n_a} + \frac{1}{s}F_1^a) S_{13}^a K_a S_{31}^b$ . Aún más, suponiendo que,

$$\text{rank}(S_{13}^b) = m_b, \text{rank}(S_{31}^b) = p_b \quad (4.18)$$

y sean  $U \in \Re^{n_b \times n_b}$  y  $V \in \Re^{n_b \times n_b}$  matrices no singulares tales que,

$$US_{13}^b = \begin{bmatrix} I_{m_b} \\ 0 \end{bmatrix}, S_{31}^b V = \begin{bmatrix} I_{p_b} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

entonces, la Ec.(4.17) queda como sigue,

$$T_{ab}(s) = \left[ \Omega_{11} + K_b (S_{33}^b + \frac{1}{s}F_1^a) K_a - \Omega_{12} \Omega_{22}^{-1} \Omega_{21} \right]^{-1} K_b \quad (4.20)$$

donde  $\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} := U(sF_b^{-1} + L_b - S_{11}^b)V$ .

*Demostración.* Del Lema 4.1 , una pseudoestructura de unión que representa la interconexión el lazo cerrado de  $y_c$  a  $y_b$  está dada por la Ec. (4.2) y bajo las suposiciones de las Ec. (4.11) y Ec. (4.12) tenemos el multipuerto disipativo dado por la Ec. (4.15). De [17], una representación en espacio de estados está dada por:

$$\begin{aligned} A_{ab} &= (S_{11}^{ab} + S_{12}^{ab} M S_{21}^{ab}) F_{ab} & B_{ab} &= S_{13}^{ab} + S_{12}^{ab} M S_{23}^{ab} \\ C_{ab} &= (S_{31}^{ab} + S_{32}^{ab} M S_{21}^{ab}) F_{ab} & D_{ab} &= S_{33}^{ab} + S_{32}^{ab} M S_{23}^{ab} \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $M := (I_{n_{ab}} - L_{ab}S_{22}^{ab})^{-1}L_{ab}$ , entonces la función de transferencia de lazo cerrado de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$  es:

$$T_{ab}(s) = \begin{bmatrix} 0 & S_{31}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{na} + L_a F_a & -S_{13}^a K_a S_{31}^b F_b \\ S_{13}^b K_b S_{31}^a F_a & sI_{nb} + (L_b + S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a S_{31}^b - S_{11}^b) F_b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{13}^b K_b \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Usando  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$ , (ver [21]), donde  $\Delta := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  y  $*$  son valores finitos que no importan en este contexto, entonces, obtenemos la Ec. (4.17).

Dado que  $\text{rank}(S_{13}^b) = m_b$  y  $\text{rank}(S_{31}^b) = p_b$ , entonces, se cumple la Ec.(4.19) para las matrices no singulares  $U \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ , por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} I_{p_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(sF_b^{-1} + L_b - S_{11}^b)V + US_{13}^b K_b (S_{33}^a + \frac{1}{s}F_1^a)K_a S_{13}^b V \\ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

y sustituyendo  $U(sF_b^{-1} + L_b - S_{11}^b)V$  obtenemos,

$$\begin{bmatrix} I_{p_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11} + K_b(S_{33}^a + \frac{1}{s}F_1^a)K_a & \Omega_{12}^{-1} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

por último, usando  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^{-1} & * \\ * & * \end{bmatrix}$ , (ver [21]), donde  $\bar{\Delta} := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  y  $*$  son valores finitos que no importan en este contexto, obtenemos el resultado de la Ec. (4.20).  $\square$

Para la asignación de polos, se simplifica la función de transferencia de la Ec.(4.20), el siguiente corolario muestra una simplificación que permite asignar un polinomio característico deseado a la función de transferencia de lazo cerrado de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$ .

**COROLARIO 4.1.** *Sea la función de transferencia dada por la Ec. (4.17) la función de transferencia de lazo cerrado de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$  para el sistema de la Fig. 4.1, donde  $K_b \in \mathbb{R}^{m_b \times p_b}$ ,  $K_a \in \mathbb{R}^{m_a \times p_a}$  y la planta  $\Sigma_b$  y el controlador  $\Sigma_a$  representados por estructuras de unión como la Ec. (4.1). Suponiendo que la planta es tal que,*

$$S_{13}^b = \begin{bmatrix} I_{m_b} \\ 0 \end{bmatrix}, S_{31}^b = \begin{bmatrix} I_{p_b} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

además, dado que la planta cumple con las propiedades de conservación de energía, entonces  $S_{11}^b$  es una matriz antisimétrica, la cual, se puede definir como:

$$S_{11}^b := \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ -\Theta_{12}^T & \Theta_{22} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

donde  $\Theta_{11}$  y  $\Theta_{22}$  son antisimétricas, de esta forma la Ec. (4.17) se simplifica a

$$T_{ab}(s) = \left[ s(F_1^b)^{-1} + L_1^b - \Theta_{11} + K_b(S_{33}^a + \frac{1}{s}F_1^a)K_a + \Theta_{12} \left( s(F_2^b)^{-1} + L_2^b + \Theta_{22} \right)^{-1} \Theta_{12}^T \right]^{-1} K_b \quad (4.27)$$

aún más, suponiendo que  $\Theta_{22} = 0$  y  $L_2^b = 0$ , entonces la función de transferencia de lazo cerrado de  $y_c(t)$  a  $y_b(t)$  queda como,

$$T_{ab}(s) = sF_1^b (s^2 I_{m_b} + \Lambda_1 s + \Lambda_2)^{-1} K_b \quad (4.28)$$

donde  $\Lambda_1 := (L_1^b - \Theta_{11} + K_b S_{33}^a K_a) F_1^b$  y  $\Lambda_2 := (K_b F_1^a K_a + \Theta_{12} F_2^b \Theta_{12}^T) F_1^b$ . Suponiendo que la planta tiene el mismo número de salidas que de entradas, es decir, que  $m_b = p_b$ , y eligiendo el controlador tal que  $m_a = p_a$ , suponiendo también que las matrices  $K_a$  y  $K_b$  son invertibles y sea  $\det(s^2 I_{m_b} + \tilde{\Lambda}_1 s + \tilde{\Lambda}_2)$  el polinomio característico de lazo cerrado deseado, donde  $\tilde{\Lambda}_1 \in \mathbb{R}^{m_b \times m_b}$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 \in \mathbb{R}^{m_b \times m_b}$ , entonces,

$$\begin{aligned} S_{33}^a &= K_b^{-1} [\tilde{\Lambda}_1 (F_1^b)^{-1} + \Theta_{11} - L_1^b] K_a^{-1} \\ F_1^a &= K_b^{-1} [\tilde{\Lambda}_2 (F_1^b)^{-1} - \Theta_{12} F_2^b \Theta_{12}^T] K_a^{-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Se puede apreciar que la función de transferencia de la Ec.(4.28) tiende a cero en estado estacionario, esto es,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( sF_1^b (s^2 I_{m_b} + \Lambda_1 s + \Lambda_2)^{-1} K_b \right) = 0 \quad (4.30)$$

esto permite regular el estado al origen. Para el problema del seguimiento a una referencia se hace uso del controlador  $\Sigma_c$ , que es diseñado como sigue.

Multiplicando la Ec. (4.28) por una aproximación de un integrador,  $\frac{1}{s+\epsilon}$ , donde  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$  es un parámetro suficientemente pequeño, y en estado estacionario tendríamos,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s+\epsilon} s F_1^b (s^2 I_{m_b} + \Lambda_1 s + \Lambda_2)^{-1} K_b \right) \right] = F_1^b \Lambda_2^{-1} K_b \quad (4.31)$$

Dado que la función de transferencia de  $y_d(t)$  a  $y_b(t)$  está dada por:

$$T_{abc}(s) = T_{ab}(s) T_c(s) \quad (4.32)$$

donde  $T_c(s)$  es la función de transferencia del controlador de la referencia representado por  $\Sigma_c$ , entonces se elige  $T_c(s)$  tal que la salida  $y_b(t)$  tienda a la referencia  $y_d(t)$  como sigue,

$$T_c(s) = \frac{1}{s+\epsilon} K_b^{-1} \Lambda_2 (F_1^b)^{-1} \quad (4.33)$$

Una representación en espacio de estados  $(A_c, B_c, C_c)$  de la ecuación anterior es,

$$A_c = \epsilon I_{n_c}; B_c = K_b^{-1} \Lambda_2 (F_1^b)^{-1}; C_c = I_{n_c} \quad (4.34)$$

Y una representación en pseudoestructura de unión es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_i^c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_c} & B_c \\ I_{n_c} & 0 & 0 \\ C_c F_c^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ \hat{D}_o^c(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

donde  $z_c = F_c x(t)$ ,  $\hat{D}_o^c = -A_c F_c^{-1} D_i^c(t)$ .

### 4.3. Pasividad del sistema diseñado

Debido a que el controlador  $\Sigma_c$  es una aproximación de un integrador, la energía generada por este controlador tiende a crecer con el tiempo, por lo tanto el sistema diseñado completo no es pasivo, sin embargo, se puede asegurar la pasividad para el lazo de retroalimentación dado por la



función de transferencia  $T_{ab}(s)$  si se cumple la condición de pasividad de la Ec. (4.14). A continuación se muestra un ejemplo empleando el sistema de control diseñado. Se muestra el caso en que se utiliza el controlador de la referencia  $\Sigma_c$  para el seguimiento del estado. Posteriormente, para el lazo cerrado que asegura regulación del estado, se muestra el caso en que las condiciones de pasividad se cumplen y se compara con el caso en que no.

EJEMPLO 4.2. Considerando el sistema mecánico como el mostrado en la Fig. 4.2, donde  $m_1$  y  $m_2$  son masas,  $b_1$  y  $b_2$  son coeficientes de fricción,  $k$  es un coeficiente de elasticidad,  $e_1(t)$  y  $e_9(t)$  son fuerzas aplicadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, y  $f_2(t)$  y  $f_7(t)$  son las velocidades de las masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente.

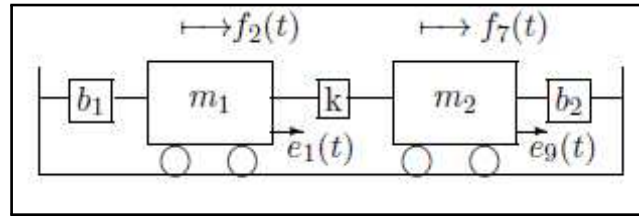


Figura 4.2: Sistema mecánico de dos carros

Los datos de los parámetros de la planta están ilustrados en la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Parámetros del sistema y condiciones iniciales

masa $m_1$	masa $m_1$	rigidez $k$	amortiguamiento $b$
$m_1 = 2 \text{ kg}$	$m_2 = 3 \text{ kg}$	$k = 10 \text{ N/s}$	$b = 0.7 \text{ Ns/m}$
$p_{01} = 5 \text{ kgm/s}$	$p_{02} = 4 \text{ kgm/s}$	$x_0 = 6 \text{ m}$	-

El Bond Graph de la planta está dado en la Fig. 4.3, para aplicar el Lema 4.1 se requiere colocar una resistencia parásita “alta” en la unión paralelo con el elemento C

Así, la estructura de unión de la planta aumentada es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b(t) \\ D_i^b(t) \\ y_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^b & -I_{n_b} & S_{13}^b \\ I_{n_b} & 0 & 0 \\ S_{31}^b & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_b(t) \\ D_o^b(t) \\ u_b(t) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

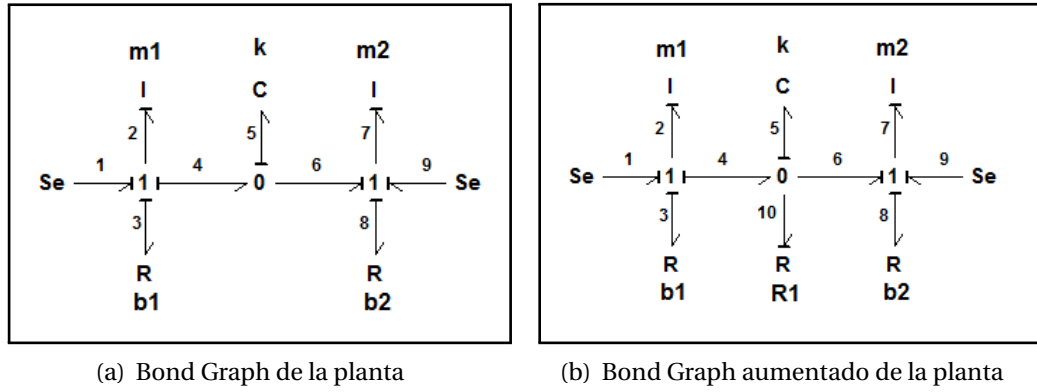


Figura 4.3: Representación de la planta en Bond Graph

donde  $S_{11}^b = \begin{bmatrix} 0_2 & \Theta_{12} \\ -\Theta_{12}^T & 0 \end{bmatrix}$  con  $\Theta_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $S_{13}^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $S_{31}^b = (S_{13}^b)^T$ ,  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2 & e_8 & f_5 \end{bmatrix}^T$ ,  $z(t) = \begin{bmatrix} f_2 & f_8 & e_5 \end{bmatrix}^T$ ,  $D_i^b(t) = \begin{bmatrix} f_3 & f_8 & e_{10} \end{bmatrix}^T$ ,  $D_o^b(t) = \begin{bmatrix} e_3 & e_8 & f_{10} \end{bmatrix}^T$ ,  $u_b(t) = \begin{bmatrix} e_1 & e_9 \end{bmatrix}^T$ ,  $y_b(t) = \begin{bmatrix} f_2 & f_7 \end{bmatrix}^T$ .

Y las relaciones constitutivas  $z_b(t) = F_b x_b(t)$  y  $D_o^b(t) = L_b D_i^b(t)$ ,  $L_b := \text{diag}\{L_1^b, L_2^b\}$  y  $F_b := \text{diag}\{F_1^b, F_2^b\}$ , donde  $F_1^b = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix}$ ,  $F_2^b = k$ ,  $L_1^b = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ ,  $L_2^b = 1/R_1$ . Dado que  $R_1$  es un valor muy grande,  $L_2^b$  tiende a cero.

Se eligen los parámetros del controlador  $\Sigma_a$ ,  $F_2^a = 0.7$ ,  $L_2^a = 10$ ,  $L_1^a = 0$ . Se escoge el polinomio característico deseado,  $\det(s^2 I_{m_b} + \tilde{\Lambda}_1 s + \tilde{\Lambda}_2)$ , tal que  $\tilde{\Lambda}_1 = 2I_2$  y  $\tilde{\Lambda}_2 = I_2$

Una condición suficiente para asegurar la pasividad es que  $K_b = K_a^T$ , se elige  $K_b = K_a = I_2$  y se comprueba que  $S_{13}^b K_b S_{33}^a K_a S_{31}^b \geq 0$ . De la Ec.(4.29) del Corolario 4.1 obtenemos los parámetros del

controlador,

$$\begin{aligned} S_{33}^a &= \begin{bmatrix} 2m_1 - b_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 - b_2 \end{bmatrix} \\ F_1^a &= \begin{bmatrix} m_1 - k & k \\ k & m_2 - k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

El controlador de la referencia  $\Sigma_c$  se obtiene sustituyendo lo anterior en la Ec.(4.35). Debido a que el controlador es un aproximación de integrador, no es posible asegurar la pasividad para el sistema completo, por lo que se simula el sistema para el lazo de retroalimentación. En la Fig. 4.4 se muestra que las salidas tienden a cero debido a la acción del controlador del lazo retroalimentado. En la Fig. 4.5 observamos la energías que interactúan en el sistema, dado que el sistema es pasivo, la energía disipada es mayor que la energía generada internamente, además cabe mencionar que las energías tienden a un valor estacionario.

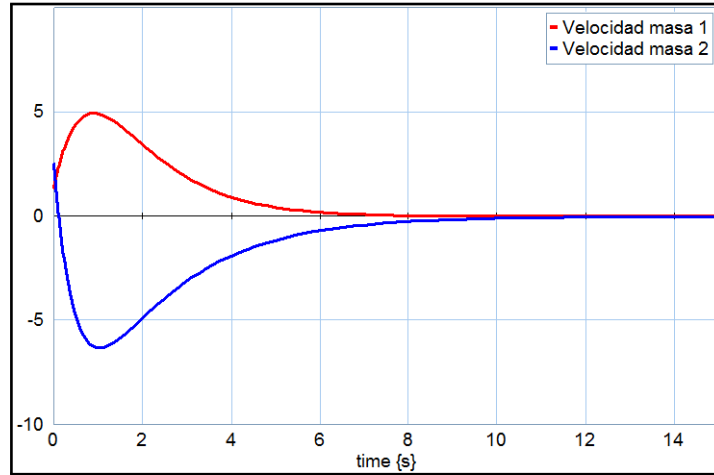


Figura 4.4: Salidas del sistema caso pasivo

Por otro lado, eligiendo  $K_b \neq K_a$  se pierde la propiedad de pasividad, en este caso las salidas permanecen igual que para el caso no pasivo, pero las energías que interactúan en el sistema presentan el comportamiento mostrado en la Fig. 4.6. Se puede observar que el sistema genera más energía internamente que la que puede disipar. Utilizando el controlador de la referencia  $\Sigma_c$  se simula el sistema obteniendo la salidas mostradas en la Fig. 4.7.

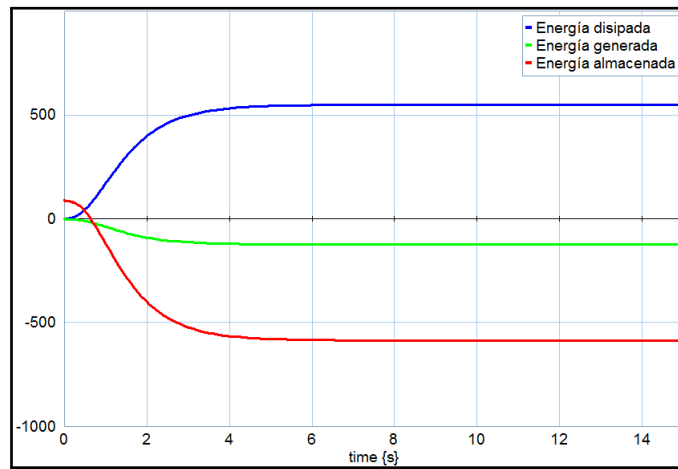


Figura 4.5: Análisis de energías caso pasivo

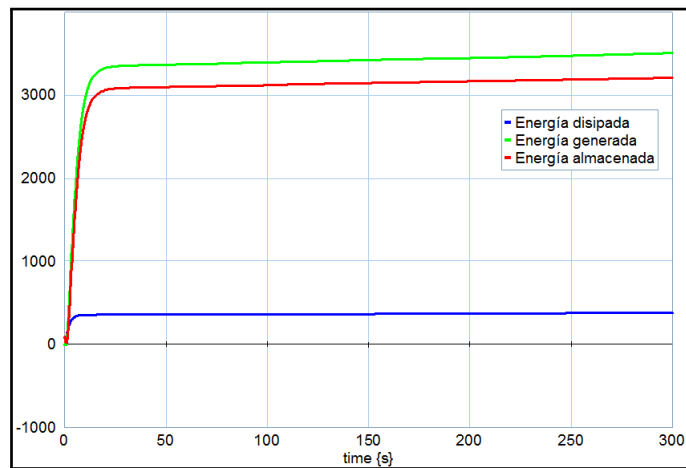
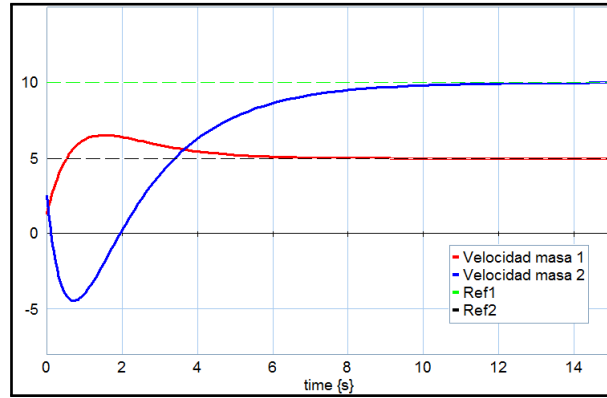


Figura 4.6: Análisis de energías caso no pasivo

Figura 4.7: Salidas del sistema con el controlador  $\Sigma_c$ 

#### 4.4. Conclusiones

Para la configuración planteada se obtuvo una pseudoestructura de unión para el análisis de pasividad y puede ser utilizado para el diseño de un sistema de control. Además se simplificó el análisis de las condiciones de pasividad. Las estructuras y pseudoestructuras de unión de los subsistemas sirvieron de guía para el diseño de los controladores por medio de la asignación de polos. Se obtuvo la función de transferencia del lazo de retroalimentación y se logró expresar de forma analítica los parámetros del controlador  $\Sigma_a$ ,  $S_{33}^a$  y  $F_1^a$  que logran asignar los polos deseados al polinomio característico. Para lograr el seguimiento de la salida deseada, el controlador de la referencia es diseñado a partir de una aproximación de un polo en el origen, aunque esto impide que el sistema completo sea pasivo, el lazo de retroalimentación, que permite regulación del estado, puede ser pasivo si se cumplen las condiciones de pasividad descritas.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajos Futuros

### 5.1. Conclusiones generales

Para cada uno de los controladores estabilizantes obtenidos de la parametrización se obtuvo una representación en espacio de estados, las cuales pueden ser empleadas en trabajos futuros. A partir de las representaciones en espacio de estados de los controladores se obtuvieron las pseudoestructuras de unión que permiten analizar la pasividad, ya sea de cada subsistema, así como del sistema completo. Se analizó la pasividad del lazo conformado por la planta  $P(s)$  y el controlador de la retroalimentación  $K(s)$  de dos maneras: comprobando la pasividad del controlador visto como un subsistema interconectado con el subsistema que representa a la planta, cuya interconexión es pasiva si ambos subsistemas lo son. La otra forma fue obteniendo una pseudoestructura de unión de la función de transferencia de esta interconexión.

Para un sistema lineal conformado por tres subsistemas interconectados en una configuración de dos grados de libertad se obtuvo una pseudoestructura de unión del sistema completo que permite analizar su pasividad. Además se diseñó un algoritmo de control por medio de asignación de polos, utilizando las propiedades de las estructuras de unión de los subsistemas.

## 5.2. Trabajos futuros

A continuación se presentan algunos trabajos futuros que pueden desarrollarse como resultado directo de esta investigación o que, por exceder el alcance de esta tesis, no han podido ser tratados con la suficiente profundidad. Entre los posibles trabajos futuros se destacan:

Analizar los efectos de la pasividad en el lazo de retroalimentación dentro de las configuraciones de control descritas. Esto conlleva realizar un análisis de la robustez de los algoritmos de control antes perturbaciones e incertidumbres, así como, la relación de la pasividad con otros problemas de control, como, la sensibilidad mezclada.

Realizar una implementación de los algoritmos de control y observar las implicaciones de la pasividad mediante mediciones reales del sistema físico, las cuales pueden ser, mediciones de las energías que interactúan en el sistema.

Desarrollar la teoría de análisis por medio de la pseudoestructura de unión para sistemas no lineales.

Para el análisis de las energías, se simuló la pseudoestructura de unión en forma de Bond Graph, la cual constaba de elementos R, I y C multipuertos. La pseudoestructura de unión podría transformarse a una estructura de unión, la cual contendría elementos de un solo puerto, o bien desacoplar los elementos multipuertos de la pseudoestructura de unión. Esto tendría como resultado una forma de visualizar los modelos de los controladores, o del sistema de control completo, de una forma más apegada al dominio físico, y podría emplearse este modelo en análisis de controlabilidad u observabilidad mediante las técnicas de Bond Graph.

Por último, la estructura de unión y la pseudoestructura de unión, pueden ser aplicadas e otros algoritmos o configuraciones de control, ya que, se pueden obtener a partir de espacio de estados o de un model en Bond Graph.

# Bibliografía

- [1] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland, *Dissipative Systems Analysis and Control, Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2007.
- [2] P. Y. Li and R. F. Ngwompo, “Power scaling bond graph approach to the passification of mechatronic systems-with application to electrohydraulic valves,” *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 127, no. 4, pp. 633–641, 2005.
- [3] A. Sharon, N. Hogan, and D. E. Hardt, “Controller design in the physical domain,” *Journal of the Franklin Institute - Engineering and Applied Mathematics*, vol. 328(5-6), pp. 697–721, 1991.
- [4] P. J. Gawthrop, “Physical model-based control: A bond graph approach,” *Journal of the Franklin Institute - Engineering and Applied Mathematics*, vol. 332(3), pp. 285–305, 1995.
- [5] P. J. Gawthrop, D. Wagg, and S. Nield, “Bond graph based control and substructuring,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 17(1), pp. 211–227, 2007.
- [6] P. J. Gawthrop, B. Bhikkaji, and S. O. R. Moheimani, “Physical-model-based control of a piezoelectric tube for nano-scale positioning applications,” *Mechatronics*, vol. 20(1), pp. 74–84, 2010.
- [7] R. Galindo and R. F. Ngwompo, “A bond graph pseudo-junction structure for non-linear non-conservative systems,” in *IEEE 11th UKACC International Conference on Control*, 2016.
- [8] R. Galindo and R. F. Ngwompo, “Passivity-based control of linear time-invariant systems modelled by bond graph,” *Int. J. of Control*, 2017.



- [9] J. Garcia, S. Rimaux, and M. Delgado, "Bond graphs in the design of adaptive passivity-based controllers for dc/dc power converters," (Mumbai), pp. 132–137, IEEE, IEEE International Conference on Industrial Technology, December 2006.
- [10] R. F. Ngwompo and R. Galindo, "Passivity analysis of linear physical systems with internal energy sources modelled by bond graphs," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, vol. 231 (1), pp. 14–28, 2017.
- [11] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. The MIT Press Cambridge, 1985.
- [12] R. Galindo and C. Conejo, "A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems," in *Int. Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control*, pp. 171-176, 2012.
- [13] Z. L. R. Ortega and H. Su, "Control via interconnection and damping assignment of linear time-invariant systems: a tutorial," *International Journal of Control*, vol. 85, no. 5, pp. 603 – 611, 2012.
- [14] A. Achir and C. Sueur, "A bond graph procedure for direct passivation of nonlinear systems," in *Proceedings of the European Control Conference*, pp. 5729 – 5733, July 2 -55 2007.
- [15] P. R. H. Cormerais, J. Buisson and C. Morvan, "Modelling and passivity based control of switched systems from bond graph formalism: Application to multicellular converters," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 345, pp. 468 – 488, 2008.
- [16] J. W. G. I. C. G. J. L. Wyatt, L. O. Chua and D. N. Green, "Energy concepts in the state-space theory of nonlinear n-ports: Part i-passivity," *IEEE Trans. Circ. and Sys*, vol. CAS-28, no. 1, pp. 48–61, 1981.
- [17] D. Karnopp and R. Rosenberg, *System Dynamics: A Unified Approach*. John Wiley and Sons, 1975.

- [18] P. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [19] J. J. Beaman and R. C. Rosenberg, "Constitutive and modulation structure in bond graph modeling," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 110, pp. 395–402, December 1988.
- [20] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [21] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.

# Pasividad de sistemas lineales modelados en Bond Graph en una configuración retroalimentada de dos grados de libertad

R. Puente\*, \*\* R. Galindo\*, \*\*\*

\* Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, Av. Universidad s/n, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.

\*\* e-mail: ric\_jav@hotmail.com

\*\*\* e-mail: rgalindo@gama.fime.uanl.mx

**Abstract:** Se diseña un control basado en pasividad para sistemas lineales, cuadrados, controlables y observables, modelados en gráficas de ligadura (bond graph, por su término en inglés). Pseudo-estructuras de unión propuestas para el sistema en lazo cerrado permiten obtener las condiciones de pasividad, mediante las propiedades de su multipuerto-disipativo. Además, se resuelve el problema de seguimiento a la referencia y se dan pseudo-estructuras de unión para una realización del controlador. Las expresiones analíticas del controlador están descritas en términos de la realización en espacio de estados de la planta, y el controlador pertenece a la parametrización de todos los controladores estabilizantes.

**Keywords:** Control Basado en Pasividad, Controladores Estabilizantes, Pseudo-Estructura de Unión, Bond Graph, Realización

## 1. INTRODUCCIÓN

Un sistema es pasivo si su función de transferencia es real positiva (grado relativo cero o uno), lo cual garantiza márgenes de ganancia y fase adecuados, asegurando estabilidad robusta (ver Brogliato et al. (2007)). Además un sistema pasivo brinda cierta seguridad para sistemas que interactúan con operadores humanos, dado que la cantidad de energía con que puede interactuar con el ambiente está limitada comparada con sistemas no pasivos (ver Li and Ngwompo (2005)).

Cuando el sistema en lazo cerrado tiene entradas y salidas cuyo producto es potencia, y si el sistema contiene solamente componentes pasivos, entonces el sistema completo es pasivo (ver Beaman and Rosenberg (1988) y Li and Ngwompo (2005)). Cuando el sistema contiene fuentes internas moduladas por bonds activos (señales), las propiedades de conservación de energía se pueden perder. Un método para el análisis de pasividad de dichos sistemas es propuesto en el trabajo de Ngwompo and Galindo (2017), el cual consiste en obtener un modelo equivalente donde las ganancias de las fuentes internas moduladas estén acopladas al campo disipativo del sistema. El campo resultante es utilizado para determinar las condiciones en que el sistema es pasivo.

En el trabajo de Galindo and Ngwompo (2017) se emplea la parametrización de todos los controladores estabilizantes, en una configuración retroalimentada de un grado de libertad, para la cual la función de transferencia de lazo cerrado es  $T_o = N(s)\tilde{N}_k(s)$  (ver Vidyasagar (1985)), donde  $N(s)$  y  $\tilde{N}_k(s)$  son los numeradores de

las factorizaciones coprimas de la planta y controlador respectivamente. Aplicando los resultados de Ngwompo and Galindo (2017) se obtiene una pseudo-estructura para la interconexión en cascada de  $N(s)$  y  $\tilde{N}_k(s)$ , y se determinan las condiciones de los parámetros del controlador para que el sistema en lazo cerrado sea pasivo. Además, una extensión preliminar de estos resultados para sistemas no lineales es el de Galindo and Ngwompo (2016).

El presente trabajo se enfoca en sistemas lineales, cuadrados e invariantes en el tiempo retroalimentados en una configuración de dos grados de libertad, y controladores estabilizantes dados en Galindo and Conejo (2012) y Galindo (2016) que no requieren pseudo-inversas de las matrices de entrada o de salida, tal como se requiere en los trabajos de Galindo et al. (2002) y Galindo et al. (2004). Al no utilizar pseudo-inversas se garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En la sección 2 se da el planteamiento del problema, y en la sección 3 se proponen pseudo-estructuras de unión para cada controlador estabilizante, obtenidas a partir de sus realizaciones en espacio de estados (ver Gonzalez and Galindo (2009)). En la sección 4 se obtienen las condiciones de pasividad por medio del multipuerto disipativo de la función de transferencia del lazo retroalimentado. En la sección 5 se aplican los resultados a un ejemplo y se ilustra el análisis de pasividad por medio de gráficas que muestran el comportamiento de la energía.

**Notación.-**  $I_p$  es la matriz identidad de dimensión  $p \times p$ ;  $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es una matriz diagonal de dimensión  $n \times n$  cuyos elementos son  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $\mathcal{RH}_\infty$  es el conjunto de funciones racionales, propias y estables en la variable compleja  $s$ , y una matriz real  $M$  es semi-

\* Beca del CONACyT

definida positiva, denotada por  $M \geq 0$ , si y solo si la parte simétrica  $\frac{1}{2}(M + M^T)$  es semi-definida positiva, donde  $M^T$  es la transpuesta de  $M$ .

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se considera un sistema de control de dos grados de libertad como el mostrado en la Fig. 1, donde  $P(s) = H(sI_n - F)^{-1}G \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  representa la planta;  $K(s)$  el controlador del lazo de retroalimentación y  $K_r(s)$  el controlador de la referencia;  $u(s)$  y  $y(s)$  la entrada y la salida de la planta respectivamente,  $y_d(s)$  la entrada de referencia, y  $T_1$  es una transformación lineal de similaridad. El controlador  $K(s)$  es empleado para garantizar estabilidad interna y mejorar el desempeño; el controlador  $K_r(s)$  es utilizado para resolver el problema de seguimiento, así como mejorar el desempeño.

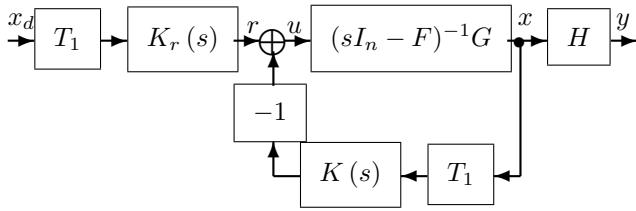


Fig. 1. Configuración de dos grados de libertad.

Sean  $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$  y  $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$  factorizaciones coprimas derecha e izquierda de  $P(s)$ , donde  $N(s)$ ,  $\tilde{N}(s)$ ,  $D(s)$  y  $\tilde{D}(s)$  pertenecen a  $\mathbb{RH}_\infty$ . Entonces el conjunto de todos los controladores estabilizantes para  $P(s)$  está dado por (ver Youla et al. (1976), Kučera (1979) y Vidyasagar (1985)):

$$\begin{aligned} K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) = N_k(s)D_k^{-1}(s) \\ K_r(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)Q(s) \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s), D_k(s) := \tilde{Y}(s) - N(s)\tilde{R}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s), N_k(s) := \tilde{X}(s) + D(s)\tilde{R}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde  $R(s)$ ,  $\tilde{R}(s)$  y  $Q(s)$ , que pertenecen a  $\mathbb{RH}_\infty$ , son los parámetros libres;  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $\tilde{X}(s)$  y  $\tilde{Y}(s)$  pertenecen a  $\mathbb{RH}_\infty$  y son las soluciones de las ecuaciones Diofantinas:

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m, \tilde{N}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I_p \quad (2)$$

Se considera una realización mínima de  $P(s)$ , en la cual la dimensión del estado  $n$  es par, la dimensión de la entrada es  $m = n/2$ , y la dimensión de salida  $p = m$ . Empleando el cambio de base  $\xi(t) = T_1 x(t)$  propuesto por Galindo and Conejo (2012) el cual está dado por:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} I_m & -G_1 G_2^{-1} \\ V_1 \Theta_1 & I_m \end{bmatrix} \\ T_1^{-1} &= \begin{bmatrix} \Delta_1^{-1} & \Delta_1^{-1} G_1 G_2^{-1} \\ -V_1 \Theta_1 \Delta_1^{-1} & I_m - V_1 \Theta_1 \Delta_1^{-1} G_1 G_2^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

donde se asume que  $G_2$  es una matriz no singular, y

$$\begin{aligned} V_1 &:= (F_{12} - G_1 G_2^{-1} F_{22})^{-1} \\ \Theta_1 &:= F_{11} - G_1 G_2^{-1} F_{21} \\ \Delta_1 &:= I_m + G_1 G_2^{-1} V_1 \Theta_1. \end{aligned} \quad (4)$$

siendo  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{22}$ ,  $G_1$  y  $G_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  elementos de las particiones a bloques de  $F$  y  $G$ , respectivamente.

Da como resultado una realización de la planta en nuevas coordenadas dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, C = HT_1^{-1} \quad (5)$$

Se asume que se tiene información completa del estado o que se tiene un observador del estado y se utiliza el principio de separación. Así, este trabajo se enfoca en el diseño del controlador para la planta  $(sI_n - A)^{-1}B$ .

Los controladores estabilizantes se obtienen empleando las factorizaciones coprimas derecha e izquierda para la planta descrita por  $(sI_n - A)^{-1}B$ , propuestas por Galindo and Conejo (2012),

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ B_m s \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \\ I_m s \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s) \quad (7)$$

donde  $0 < a \in \mathbb{R}$ ,  $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $A_{12}$  son matrices no singulares y,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - A_{22}s - A_{21}A_{12}) \quad (8)$$

En el trabajo de Ngwompo and Galindo (2017) se analiza el problema que resulta en sistemas con fuentes moduladas por señales, en los cuales se pierden las propiedades de conservación de la energía y se dice que existe energía generada internamente. Una estructura de unión que representa los Bond Graph asociados a este tipo de sistemas es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S(0, 1, TF, GY, MS_e, MS_f) \begin{bmatrix} z(t) \\ D_o(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde  $S$  es la estructura de unión,  $z(t) = Fx(t)$ ,  $F$  es una matriz formada por los elementos que almacenan energía,  $D_o(t) = LD_i(t)$ ,  $L$  es una matriz formada por elementos disipativos, 0 y 1 representan los tipos de uniones entre elementos,  $TF$  y  $GY$  son los transformadores y giradores respectivamente,  $MS_e$  y  $MS_f$  son fuentes moduladas de esfuerzo y flujo respectivamente. En el mismo trabajo, se propone una pseudo-estructura de unión en la cual las ganancias de las fuentes moduladas quedan dentro del multipuerto disipativo, por lo que, asumiendo que los elementos restantes son pasivos y los productos entrada-salida son de potencia, el sistema completo es pasivo si el campo disipativo lo es (ver Beaman and Rosenberg (1988)). Para sistemas lineales, esto último se comprueba si la matriz asociada al campo disipativo  $\hat{L} \geq 0$ . Además, en el trabajo de Galindo and Ngwompo (2017) se presenta una pseudo-estructura de unión obtenida a partir de una realización en espacio de estados, la cual está expresada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & B \\ I_n & 0 & 0 \\ CF^{-1} & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{D}_o(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $z(t) = Fx(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $D_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\hat{D}_o(t) = \hat{L}D_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L} = -AF^{-1}$ .

Se aplicará este último resultado a las expresiones analíticas de los controladores estabilizantes propuestas por Galindo and Conejo (2012) para la configuración

retroalimentada de dos grados de libertad de la Fig. 1. El sistema se diseña para seguir una referencia de posición por medio de la elección del parametro libre  $Q(s)$ . Por otra parte, se analiza la pasividad del lazo retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ , para ello se obtendrá una pseudo-estructura de unión de la función de transferencia de  $r$  a  $y$  (ver Vidyasagar (1985)),

$$T_k(s) = HN(s)\tilde{D}_k(s) \quad (11)$$

En la Fig. 1,  $x_d$  tiene el mismo significado físico que  $x$ , por lo que su producto no es potencia y no se puede analizar la pasividad del sistema completo utilizando el resultado propuesto por Beaman and Rosenberg (1988), sin embargo,  $r$  y  $u$  tienen el mismo significado físico y la salida  $y$  se puede seleccionar para que el producto de  $r$  y  $y$  sea potencia, y así, se pueda analizar la pasividad del lazo formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ . Así, los problemas abordados son,

**Problema 1.** Para la realización en espacio de estados  $(A, B, I_n)$  de la planta, determinar pseudo-estructuras de unión para cada uno de los controladores estabilizantes  $K(s)$  y  $K_r(s)$  en la configuración de dos grados de libertad de la Fig. 1 asegurando el seguimiento del estado por medio de la elección del parámetro libre  $Q(s)$ . Estas pseudo-estructuras se utilizan para el análisis de energía por medio de simulación computacional y se emplea el campo disipativo de  $K(s)$  para el análisis de pasividad.

**Problema 2.** Encontrar las condiciones de pasividad obtenidas a partir del campo disipativo de una pseudo-estructura de unión que represente a la función de transferencia de  $r$  a  $y$ ,  $T_k(s)$ .

En la siguiente sección se proponen realizaciones en espacio de estados de cada uno los controladores, para posteriormente obtener sus pseudo-estructuras de unión.

### 3. PSEUDO-ESTRUCTURA DE UNIÓN DE LOS CONTROLADORES ESTABILIZANTES

Para la implementación en simulación y análisis de pasividad, se proponen pseudo-estructuras de unión para cada uno de los controladores estabilizantes  $K(s)$  y  $K_r(s)$ . Una solución al Problema 1 y al problema de seguimiento a la referencia se presenta en,

**Lemma 1.** Considere un sistema de control en la configuración de dos grados de libertad de la Fig. 1, donde la realización en espacio de estados de la planta  $P(s)$  está dada por la Ec. (5), y  $K(s)$  y  $K_r(s)$  son los controladores estabilizantes del lazo de retroalimentación y de la referencia, respectivamente, dados por la Ec. (1). Suponga que la referencia de posición es constante, esto es,  $y_r = \begin{bmatrix} q_d \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ 0 \end{bmatrix}$ , donde  $q_d = cte$ . Entonces, una realización en espacio de estados,  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$ , de  $K(s)$  es,

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (r - a^2)I_n & -2aI_n \end{bmatrix}; B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}; \\ C_k &= [N_3^k - (a^2 - r)N_1^k \quad N_2^k - 2aN_1^k]; D_k = N_1^k \end{aligned} \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1^k &:= B_m^{-1} [(a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \ M]; \\ N_2^k &:= B_m^{-1} [(2a^3 - r)A_{12}^{-1} + 2aI_m \ 2aM] \end{aligned}$$

$N_3^k := B_m^{-1} [a^4 A_{12}^{-1} + (a^2 - r)A_{21} \ a^2 M]$  siendo  $M := 2aI_m + A_{22}$ , con sus dimensiones de entrada, estado y salida  $m_k$ ,  $n_k$  y  $p_k$ , respectivamente. Además, una realización en espacio de estados,  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$ , de  $K_r(s)$ , que asegura el seguimiento del estado, es,

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ (r - a^2)I_n & -2aI_n \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}; \\ C_r &= [N_3^r - (a^2 - r)N_1^r \quad N_2^r - 2aN_1^r]; D_r = N_1^r \end{aligned} \quad (13)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1^r &:= [a^2 B_m^{-1} A_{12}^{-1} \ 0]; N_2^r := [2a^3 B_m^{-1} A_{12}^{-1} \ 0] \\ N_3^r &:= [a^4 B_m^{-1} A_{12}^{-1} \ 0] \end{aligned}$$

con  $m_r$ ,  $n_r$ ,  $p_r$  las dimensiones de entrada, estado y salida.

Más aún, una pseudo-estructura de unión interna

$S^k(0, 1, TF, GY)$  para  $K(s)$  descrito por  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$  es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k(t) \\ D_i^k(t) \\ y_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_k} & B_k \\ I_{n_k} & 0 & 0 \\ C_k F_k^{-1} & 0 & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k(t) \\ \hat{D}_o^k(t) \\ u_k(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde  $\dot{x}_k(s) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $z_k(t) = F_k x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $D_i^k(t) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $\hat{D}_o^k(t) = \hat{L}_k D_i^k(t) \in \mathbb{R}^{n_k \times 1}$ ,  $y_k(t) \in \mathbb{R}^{p_k \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L}_k = -A_k F_k^{-1}$ .

Además, una pseudo-estructura de unión interna

$S^r(0, 1, TF, GY)$  para  $K_r(s)$  descrito por  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ D_i^r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_r} & B_r \\ I_{n_r} & 0 & 0 \\ C_r F_r^{-1} & 0 & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r(t) \\ \hat{D}_o^r(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde  $\dot{x}_r(s) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $z_r(t) = F_r x_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $D_i^r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $\hat{D}_o^r(t) = \hat{L}_r D_i^r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ ,  $y_r(t) \in \mathbb{R}^{p_r \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L}_r = -A_r F_r^{-1}$ .

**Prueba.** Haciendo uso de las soluciones de la Ecuación Diofantina derecha propuestas por Galindo and Conejo (2012),

$$X(s) = [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} \ M], \ Y(s) = B_m \quad (16)$$

Así como de las factorizaciones coprimas descritas en las ecuaciones (6) y (7), y seleccionando el parámetro libre  $R(s) = [R_1(s) \ R_2(s)] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$  como:  $R_1(s) = rI_m$  y  $R_2(s) = 0$ , se obtienen:

$$\tilde{D}_k(s) = \frac{d_k(s)}{(s+a)^2} B_m \quad (17)$$

$$\tilde{N}_k(s) = \left[ \Upsilon(s) A_{12}^{-1} + \frac{d_k(s)}{(s+a)^2} A_{21} \ M \right] \quad (18)$$

donde:  $\Upsilon(s) := \left[ a^2 + \frac{rs^2}{(s+a)^2} \right] I_m - \frac{rs}{(s+a)^2} A_{22}$  y  $d_k(s) := (s+a)^2 - r$ . Sustituyendo lo anterior en el primer renglón de la Ec. (1) se llega a la función de transferencia del controlador:

$$K(s) = (N_1^k s^2 + N_2^k s + N_3^k) / d_k(s) \quad (19)$$

Se obtiene la realización en espacio de estados dado por la Ec. (12) empleando una forma directa mostrada en Kailath (1980), pp. 347-348, donde la variable de estado es  $x$ . Se realizó el cambio de coordenadas,

$$z = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} x \quad (20)$$

a fin de simplificar los menores principales de la parte simétrica de la matriz  $\hat{L}_k$  y darle una estructura semejante a la de la planta.

Para  $K_r(s)$ , se selecciona  $Q(s)$  partiendo de la función de transferencia de  $y_d$  a  $y$ ,  $T_o(s) = N(s)Q(s)$  (ver Vidyasagar (1985)), donde:

$$Q(s) = [Q_1 \ Q_2] \quad (21)$$

Sustituyendo  $N(s)$ , la función queda como sigue:

$$T_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12}Q_1 & A_{12}Q_2 \\ sQ_1 & sQ_2 \end{bmatrix}. \text{ Haciendo una aproximación para bajas frecuencias tenemos:}$$

$$T_o(0) = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} A_{12}Q_1 & A_{12}Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y asumiendo que } y_r = \begin{bmatrix} q_d \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ seleccionamos } Q(s) \text{ que garantice que la salida del sistema siga al valor deseado de referencia:}$$

$$Q(s) = [a^2 A_{12}^{-1} \ 0] \in \mathbb{RH}_\infty^{m \times n} \quad (22)$$

Sustituyendo  $Q(s)$  y  $\tilde{D}_k^{-1}(s)$  dado en la Ec. (17), la función de transferencia para  $K_r(s)$  queda:

$$K_r(s) = [a^2(s+a)^2 B_m^{-1} A_{12}^{-1} \ 0] / d_k(s) \quad (23)$$

De igual manera que con  $K(s)$ , se obtiene una representación en espacio de estados para  $K_r(s)$ .

Utilizando la Ec. (10) se obtiene directamente los resultados de las pseudo-estructuras de unión internas dadas por las ecuaciones (14) y (15), para las realizaciones en espacio de estados de ambos controladores. ■

En la siguiente sección se analiza la pasividad del lazo retroalimentado.

#### 4. PSEUDO-ESTRUCTURA DE UNIÓN Y CONDICIONES DE PASIVIDAD DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO

Primero se considera el lazo cerrado formado por la planta y el controlador  $K(s)$ , que representa una interconexión en retroalimentación como la mostrada en (Brogliato et al., 2007) pag. 14, la cual es pasiva si sus subsistemas son pasivos. Como la planta representa a un sistema físico con elementos pasivos, basta con probar las condiciones de pasividad dadas por medio del multipuerto disipativo del controlador. Para ello, es necesario demostrar que la matriz  $\hat{L}_k = -A_k F_k^{-1} \geq 0$ . Usando el criterio de Sylvester se comprueba lo anterior si los menores principales de la parte simétrica  $\frac{1}{2}(\hat{L}_k + \hat{L}_k^T)$  son mayor o igual que cero. Sea  $F_k := \text{diag}\{F_1^k, F_2^k\}$  y utilizando  $A_k$  dada por la Ec. (12) del Lema 1, la parte simétrica de  $\hat{L}_k$  es,

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 - r}{2}(F_1^k)^{-1} - \frac{1}{2}(F_2^k)^{-1} \\ \frac{a^2 - r}{2}(F_1^k)^{-1} - \frac{1}{2}(F_2^k)^{-1} & 2a(F_2^k)^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Usando  $\det A = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$  (ver Zhou et al. (1996), p. 23), y simplificando, se obtiene el determinante de la parte simétrica de  $\hat{L}_k$ :

$$\det(\hat{L}_k + \hat{L}_k^T)/2 = \left[ \frac{-1}{2} f^{-1}(a^2 - r - 1) \right]^{n_k} \quad (25)$$

donde se seleccionan  $F_1^k = F_2^k = f I_n$ , siendo  $f \in \mathbb{R}$ .

Ya que la planta tiene dimensiones  $n$  par y  $m = n/2$ , y debido a la realización obtenida,  $n_k = 2n$  y  $m_k = 2m$ , el determinante de la parte simétrica de  $L_k$  es mayor o igual que cero para toda  $a$  y  $r$ . A continuación se analizarán las condiciones de pasividad por medio de su campo disipativo.

**Lemma 2.** *Suponga un sistema de control en la configuración retroalimentada de la Fig.1, donde la planta  $P(s)$  está dada por la Ec. (5). Entonces una realización en espacio de estados  $(A_o, B_o, C_o, 0)$  de la función de transferencia del lazo retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$ ,  $T_k(s)$  es:*

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ -a^4 I_n & -4a^3 I_n & -6a^2 I_n & -4a I_n \end{bmatrix}; B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\ C_o = [N_1^o \ N_3^o \ N_2^o \ N_4^o] \quad (26)$$

$$\text{donde: } N_1^o := \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}; N_2^o := \begin{bmatrix} A_{12} B_m \\ 2a B_m \end{bmatrix}$$

$$N_3^o := \begin{bmatrix} 2a A_{12} B_m \\ (a^2 - r) B_m \end{bmatrix}; N_4^o := \begin{bmatrix} (a^2 - r) A_{12} B_m \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con dimensiones de entrada, estado y salida } m_o, n_o \text{ y } p_o, \text{ respectivamente.}$$

Una pseudo-estructura de unión interna  $S^o(0, 1, TF, GY)$  para  $T_k(s)$  descrita por  $(A_o, B_o, C_o, 0)$  es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o(t) \\ D_i^o(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_o} & B_o \\ I_{n_o} & 0 & 0 \\ C_o F_o^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(t) \\ \dot{D}_o^o(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde  $\dot{x}_o(s) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $z_o(t) = F_o x_o(t) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $D_i^o(t) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $\dot{D}_o^o(t) = \hat{L}_o D_i^o(t) \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ ,  $y_o(t) \in \mathbb{R}^{p_o \times 1}$  y con el multipuerto disipativo dado por  $\hat{L}_o = -A_o F_o^{-1}$ . El sistema retroalimentado formado por  $P(s)$  y  $K(s)$  es pasivo si  $\hat{L}_o \geq 0$ , que se satisface  $\forall a > 0$ .

**Prueba.** Utilizando  $N(s)$  dada en la Ec. (7) y  $\tilde{D}_k(s)$  propuesta en la Ec.(17), la función de transferencia del lazo cerrado de  $r$  a  $y$  dada por la Ec.(11) resulta:

$$T_k(s) = \frac{1}{(s+a)^4} \begin{bmatrix} d_k(s) A_{12} B_m \\ s d_k(s) B_m \end{bmatrix} \quad (28)$$

Mediante una forma directa mostrada en Kailath (1980), p.347-348 y el cambio de coordenadas dado por la Ec. (20), se obtiene la realización en espacio de estados de la Ec. (26). Utilizando la Ec.(10) se obtiene directamente la pseudo-estructura de unión interna dada por la Ec. (27).

Para el sistema en lazo retroalimentado sea pasivo, se requiere que el campo disipativo  $\hat{L}_o \geq 0$ . Para ello se seleccionan  $F_o := \text{diag}\{F_1^o, F_2^o, F_3^o, F_4^o\}$ ,  $F_1^o = f_1 I_n$ ,  $F_2^o = f_2 I_n$ ,  $F_3^o = f_3 I_n$ ,  $F_4^o = f_4 I_n$ , siendo  $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}$ , y se emplea el criterio de Sylvester sobre  $\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T)$ , dada por:

$$\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

donde,  $L_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2f_2}I_n \\ -\frac{1}{2f_2}I_n & 0 \end{bmatrix}$ ;  $L_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^4}{2f_1^3}I_n \\ -\frac{1}{2f_3}I_n & \frac{a^4}{2f_2}I_n \end{bmatrix}$

$L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2f_3}I_n \\ \frac{a^4}{2f_1}I_n & \frac{4a^3}{2f_2}I_n \end{bmatrix}$

$L_{22} = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{6a^2}{2f_3} - \frac{1}{2f_4})I_n \\ (\frac{6a^2}{2f_3} - \frac{1}{2f_4})I_n & \frac{4a}{f_4}I_n \end{bmatrix}$ , El determinante

del bloque  $L_{11}$  es:  $\left[\frac{-1}{2f_2}\right]^n$  y debido a que la planta tiene dimensión  $n$  par,  $L_{11} \geq 0$ . Usando  $\det A = \det A_{22} \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$ , se obtiene el determinante

del bloque  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2f_2}I_n & 0 \\ -\frac{1}{2f_2}I_n & 0 & -\frac{1}{2f_3}I_n \\ 0 & -\frac{1}{2f_3}I_n & 0 \end{bmatrix}$ , el cual es 0. Finalmente, encontramos el  $\det(\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T))$ , dado por:

$$\left( - \left[ - \left( \frac{1}{2f_2} \right)^2 \det(L_{22}^c) + \left( \frac{a^4}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2 \det(L_{22}^c)} \right) \mathbb{M} \right] \right)^n \quad (30)$$

Donde  $\mathbb{M} := \frac{a^4}{16f_1f_3} \left( \frac{6a^2}{f_3} - \frac{1}{f_4} \right)$ . Dado a la dimensión  $n$  par de la planta,  $\det(\frac{1}{2}(\hat{L}_o + \hat{L}_o^T)) \geq 0 \forall a$ , por lo tanto  $\hat{L}_o \geq 0$ , sin embargo, para la estabilidad de los controladores se requiere que  $a > 0$ . ■

## 5. EJEMPLO

**Ejemplo.** Un sistema mecánico de dos carros como el mostrado en la Fig. 2 con  $k = 10N/s$ ,  $b = 0.7Ns/m$ ,  $m_1 = 2kg$  y  $m_2 = 3kg$ , siendo  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$ ,  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$ , y  $y(t) = I_n x(t)$  se puede expresar en la realización en espacio de estados siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & -0.35 & 0.35 \\ 3.3 & -3.3 & 0.23 & -0.23 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$C = I_4$$

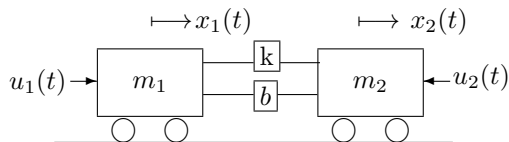


Fig. 2. Sistema mecánico de dos carros

Dado que la realización en espacio de estados está en la forma deseada no se requiere utilizar las transformaciones  $T_1$  y  $T_1^{-1}$ . Se obtiene la pseudo-estructura de unión de la función de transferencia de lazo cerrado utilizando la Ec.(27). Se selecciona  $a = 3$ , y para asegurar estabilidad en los controladores, se elige  $r = 9$ .

Para la implementación en simulación, usando el Lema 1, se obtienen las pseudo-estructuras de unión de los controladores estabilizantes, y utilizando el trabajo propuesto por Gonzalez-A and Galindo (2009) se encuentran los modelos en Bond Graph correspondientes a las pseudo-estructuras de unión, esto permite, además, realizar el análisis de la energía.

Se prueba el sistema con las referencias deseadas  $x_{d1} = 5$ ,  $x_{d2} = 3$ ,  $\dot{x}_{d1} = 0$ ,  $\dot{x}_{d2} = 0$ . En la Fig. 3 se muestra que los estados convergen a los valores deseados.

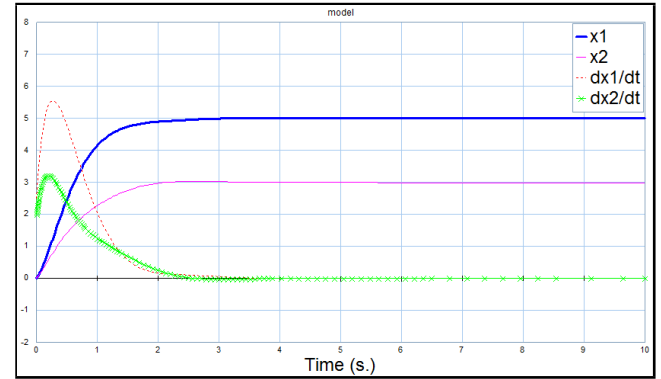


Fig. 3. Estados del sistema

Se comprueba la pasividad del lazo retroalimentado por medio de un análisis de energía. En la Fig.5 se puede apreciar que la energía generada internamente es menor que la energía disipada para toda  $t$  (ver Ngwompo and Galindo (2017)). En la Fig.4 se observa que la salida de velocidad converge a cero.

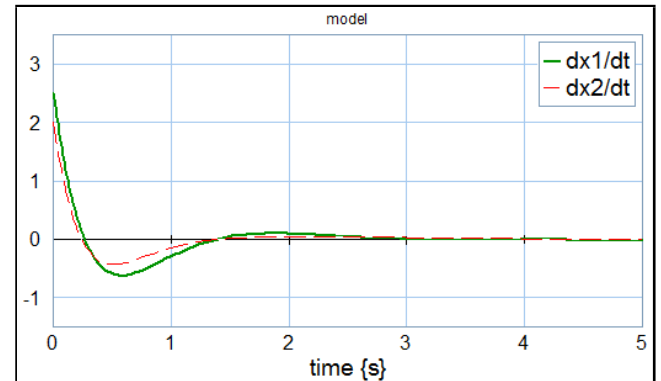


Fig. 4. Estados del sistema con referencia al origen

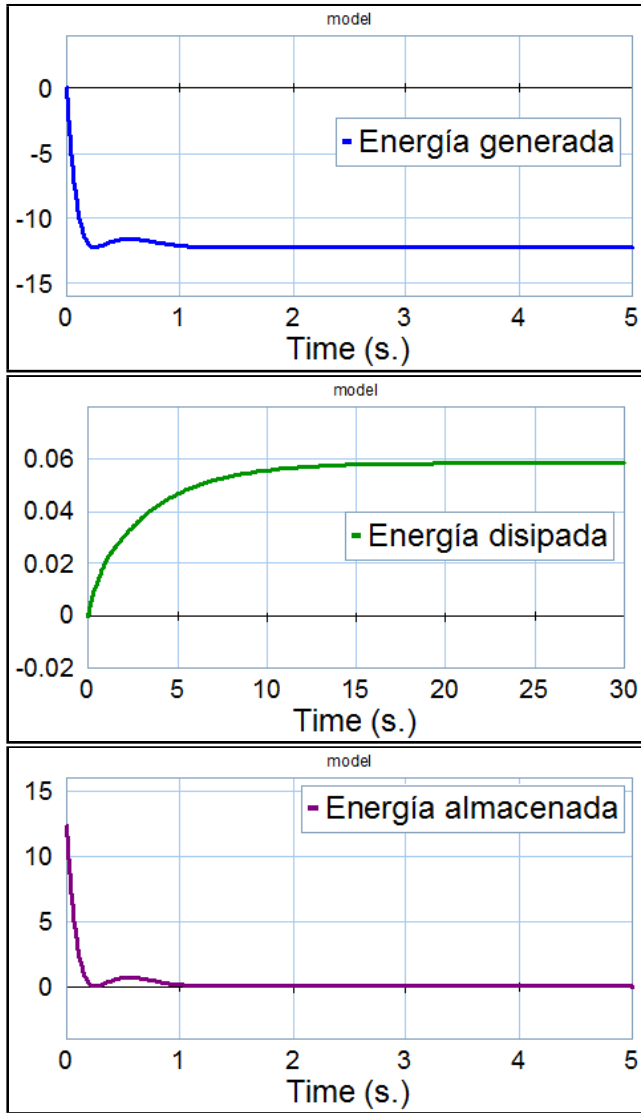


Fig. 5. Energías del sistema sin referencias

## 6. CONCLUSIONES

Se propone el parámetro  $Q(s)$  del controlador de la referencia para que la salida siga a referencias de posición en bajas frecuencias. Se aplican los resultados propuestos por Galindo and Ngwompo (2017) a los controladores derivados de la parametrización de todos los controladores estabilizantes para un sistema en lazo cerrado en la configuración de dos grados de libertad, a fin de obtener una pseudo-estructura de unión de cada controlador, esto permite tener un significado físico de los controladores lo cual ayuda al diseño. Además, se obtuvo la función de transferencia del lazo retroalimentado  $T_k$ , así como, una representación en espacio de estados y una pseudo-estructura de unión de la misma. Utilizando las propiedades del multipuerto disipativo de la pseudo-estructura de unión de la función  $T_k(s)$ , se obtuvieron las condiciones de pasividad para el lazo retroalimentado. El análisis de energía realizado y los resultados comprueban la pasividad acorde a las condiciones obtenidas. Además, se asegura el seguimiento a la referencia, aunque en este caso, el sistema no es pasivo. Sin embargo, el sistema en lazo cerrado es estable y tiene buen desempeño. Es-

tos resultados pueden extenderse a sistemas no lineales de manera similar al trabajo de Galindo and Ngwompo (2016).

## REFERENCES

- Beaman, J.J. and Rosenberg, R.C. (1988). Constitutive and modulation structure in bond graph modeling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110, 395–402.
- Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B., and Egeland, O. (2007). *Dissipative Systems Analysis and Control, Theory and Applications*. Springer-Verlag.
- Galindo, R. (2016). Input/output decoupling of square linear systems by dynamic two-parameters stabilizing control. *Asian J. of Control*.
- Galindo, R. and Conejo, C. (2012). A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems. In *Int. Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control*, pp. 171–176.
- Galindo, R., Malabre, M., and Kučera, V. (2004).  $\mathcal{H}_\infty$  control for lti systems. *Conference on Decision and Control*.
- Galindo, R. and Ngwompo, R.F. (2016). A bond graph pseudo-junction structure for non-linear non-conservative systems. In *IEEE 11th UKACC International Conference on Control*.
- Galindo, R. and Ngwompo, R.F. (2017). Passivity-based control of linear time-invariant systems modelled by bond graph. *Int. J. of Control*.
- Galindo, R., Sanchez-Orta, A.E., and Herrera, A. (2002). Stabilizing controllers for a class of linear MIMO systems. *Instrumentation, Systems and Automation Society*.
- Gonzalez, G. and Galindo, R. (2009). Removing the algebraic loops of a bond graph model. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, 222(I6), 543–556.
- Gonzalez-A, G. and Galindo, R. (2009). A bond graph model from a state space description of a lti mimo system. 19–21. *Methods and Models in Automation and Robotics*.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall.
- Kučera, V. (1979). *Discrete Linear Control, the Polynomial Equation Approach*. Wiley, Chichester.
- Li, P.Y. and Ngwompo, R.F. (2005). Power scaling bond graph approach to the passification of mechatronic systems-with application to electrohydraulic valves. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 127(4), 633–641.
- Ngwompo, R.F. and Galindo, R. (2017). Passivity analysis of linear physical systems with internal energy sources modelled by bond graphs. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, 231 (1), 14–28.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. The MIT Press Cambridge.
- Youla, D.C., Jabr, H.A., and Bongiorno, J.J. (1976). Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part ii: The multivariable case. *IEEE Trans. Autom. Control*, 319–338.
- Zhou, K., Doyle, J.C., and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.