

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS



TESIS

MODELACIÓN ESPACIO TEMPORAL DEL CRECIMIENTO
URBANO Y CAMBIO DE USO DE SUELO A TRAVÉS DE
AUTÓMATAS CELULARES

POR
RUBÍ ISELA GUTIÉRREZ LÓPEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN
MATEMÁTICAS

MARZO 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS



TESIS

MODELACIÓN ESPACIO TEMPORAL DEL CRECIMIENTO
URBANO Y CAMBIO DE USO DE SUELO A TRAVÉS DE
AUTÓMATAS CELULARES

POR
RUBÍ ISELA GUTIÉRREZ LÓPEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN
MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Los miembros del comité de tesis de la subdirección de posgrado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, recomendamos que la tesis “**Modelación espacio temporal del crecimiento urbano y cambio de uso de suelo a través de autómatas celulares**” realizada por la Lic. Rubí Isela Gutiérrez López, con número de matrícula 1482508, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Asesor

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña
Co-asesor

Dr. Alfredo Alanís Durán
Revisor

Vo. Bo.

Dr. José Fernando Camacho Vallejo
Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación
en Matemáticas

*Crear, significa liberar en sí mismo lo indestructible,
o mejor: liberarse,
o mejor aún: ser indestructible,
o mejor aún: ser.*

Franz Kafka

Resumen

Modelación espacio temporal del crecimiento urbano y cambio de uso de suelo a través de autómatas celulares

El proceso de urbanización como un sistema dinámico complejo se explica a través de dos conceptos primordiales: el desarrollo y el crecimiento. En conjunto, estos conceptos representan la expansión física y demográfica de la ciudad mediante el cambio en los *usos de suelo* que se desempeñan de acuerdo a las condiciones del territorio y al surgimiento de ciertas necesidades según su población. Usualmente para la representación de ésta dinámica se recurre a métodos y/o modelos que sólo llegan a representar la parte temporal del sistema urbano. Sin embargo, el análisis cualitativo de la complejidad de éstos sistemas también radica en “observar” cómo emergen las estructuras urbanas principalmente en la periferia de las ciudades.

Este trabajo consiste de dos partes: Como primera parte, se muestra un análisis del proceso de urbanización utilizando como punto de partida un modelo de epidemias para la representación temporal de dicha dinámica. Luego, se generaliza esta dinámica considerando una discretización espacial y temporal del sistema. La segunda parte consiste en mostrar una alternativa para el análisis de la dinámica espacio temporal del proceso utilizando cadenas de Markov y autómatas celulares.

Como resultados, se construyen algoritmos en lenguaje de programación **R Versión 3.2.5** para la interpretación de imágenes y para la generación de mapas de la mancha urbana de Monterrey con archivos en formato .shp de la fuente INEGI, y se diseña un autómata que genera la simulación del crecimiento urbano en la frontera urbana utilizando la interpretación de las imágenes y la clasificación de algunos usos de suelo.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Javier Almaguer por la gran paciencia, confianza y motivación que me otorgó en el transcurso de la maestría. Por convertirse en mi guía y en un gran apoyo para mi carrera profesional.

En gran manera estoy agradecida con el Doctor Edgardo Ugalde por el gran interés que tuvo hacia este trabajo y por la hospitalidad que me brindó durante mi estancia. Sus valiosos consejos y su amplia experiencia siempre fueron de gran ayuda.

Mi aprendizaje y mi esfuerzo también se lo agradezco al Doctor Alfredo Alanís por su constante colaboración en este trabajo. Gracias por su confianza y su apoyo en todo momento y por no solo compartir de su conocimiento en el aula, sino sobre la perseverancia en una meta.

Gracias al Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y al Instituto de Física de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, por el conocimiento otorgado y las distintas maneras en las que fui beneficiada.

También le agradezco a mis amigos, compañeros del posgrado y compañeros de la Universidad de San Luis Potosí por sus ánimos, risas y las horas de compañía que hicieron más fácil el trabajo.

En particular, un gran agradecimiento por todos los beneficios y apoyos recibidos por parte de CONACyT, los cuales fueron útiles tanto para la estancia como para la maestría en general durante el transcurso de mi carrera.

Y con todo mi cariño quiero agradecer a los míos por el gran apoyo y su incondicional compañía a lo largo de mi vida. Gracias mamá, papá, Norma, Jesús, Francisco, Gabriel y Mago por la comprensión y la confianza que han depositado en mi en todo tiempo. Y a Jonathan, gracias por ser mi fuerte apoyo durante momentos difíciles y por convertirte en alguien muy especial en esta etapa. Gracias por confiar en mi y por brindarme tus consejos y palabras de ánimo que me han motivado a seguir adelante. Gracias por todo. Los quiero en gran manera.

Rubí Isela Gutiérrez López

Lista de Figuras

1.1	Evolución de la ciudad considerando los conductores del crecimiento urbano. Imágen modificada. Fuente: http://www.aulati.net/wp-content/uploads/2009/04/capas-raster-vectorial.jpg	3
2.1	Transformación de suelo con la dirección de las fases en un tiempo t a $t + 1$	6
2.2	Trayectorias del cambio de suelo. Conforme el suelo disponible disminuye, el suelo establecido aumenta y cuando llega a los límites del sistema el suelo en nuevo desarrollo también decae.	8
2.3	Trayectorias que muestran un crecimiento logístico. Imágen elaborada en R.	10
3.1	Probabilidades para que la partícula se desplace en cada una de las ocho posibles direcciones. Imágen elaborada en Rhinoceros.	12
3.2	Simulación de caminatas aleatorias de treinta partículas en dos dimensiones con ocho direcciones posibles de desplazamiento. Imágen elaborada en RStudio.	12
3.3	DLA con distinto coeficiente de adhesión. Entre menor sea el coeficiente, mayor es su densidad de partículas. Fuente: http://paulbourke.net/fractals/dla/	13
3.4	Región que representa al suelo establecido $E(t)$, el suelo en nuevo desarrollo $N(t)$ y el suelo disponible $D(t)$ de manera local. Imágen elaborada en Ipe.	14
3.5	Se muestra el crecimiento simulado con dos semillas de suelo en nuevo desarrollo $N(0)$, de acuerdo a la transición $D \rightarrow N$	15
3.6	Cambios en la cantidad de suelo transformado a través del tiempo. Imágen elaborada en RStudio.	16
3.7	Descomposición de cada uso de suelo en factores mediante una representación binaria. Imágen elaborada en Photoshop.	18
4.1	Configuración particular de la celda de acuerdo a sus factores. Imágen modificada en Ipe.	21
4.2	Estructura de la modelación para la dinámica del proceso de urbanización.	22
4.3	Proceso de Markov a nivel local del sistema	23
4.4	Cambio de uso de suelo debido a sus factores particulares. Imágen elaborada en Ipe.	27
4.5	Matriz generada en la celda por los posibles cambios de usos de suelo. Imágen elaborada en Ipe.	29
4.6	Vecindad de Moore. Imágen elaborada en Ipe.	29
4.7	Asignación de la vecindad a su celda central. Imágen modificada en Ipe.	30
5.1	Tendencia de crecimiento poblacional en Nuevo León. Fuente INEGI	31
5.2	Mediante el archivo .shp se muestra la zona urbana de Monterrey referenciada a su longitud y latitud en color gris. Elaborada en R. Fuente: INEGI	32
5.3	Elevación en escala de grises. Elaborada en R. Fuente: INEGI	32
5.4	Mapas elaborados en R con archivos .shp. En color azul se muestra la densidad de las unidades industriales, en color amarillo es la densidad de los servicios y en color rojo la densidad de las unidades comerciales. Fuente: INEGI	33
5.5	Crecimiento de viviendas en el estado de Nuevo León y clasificación de ellas por cantidad de habitantes. Fuente: INEGI	34

5.6	Mapa formato .shp elaborado en R para la clasificación de usos de suelos. En color gris oscuro se encuentra la concentración de vivienda, en color rojo la industria, en color rosa los servicios y en color beige el comercio. Fuente: INEGI	35
5.7	Predicción de las zonas de crecimiento y usos de suelo. Simulaciones realizadas en RStudio para tiempos $t = 5, 10, 15, 20, 30, 50, 75, 100$	38
5.8	Probabilidad marginal del uso de suelo Disponible D y la distribución de celdas en cada tiempo t	39
5.9	Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Servicios, S en cada tiempo t	39
5.10	Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Comercial, C en cada tiempo t	40
5.11	Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Vivienda, V en cada tiempo t	40
5.12	Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Industrial, I en cada tiempo t	41
A.1	Malla para 2 dimensiones y 1 dimensión respectivamente. Imagen elaborada en Ipe.	46
A.2	Vecindad 1 dimensión, vecindad de Neumann y vecindad de Moore. Imágenes elaboradas en Ipe	46
A.3	Cambio del estado de la celda central dependiendo de los estados vecinos. Imágen elaborada en Ipe	47
A.4	Autómata con frontera abierta y frontera periódica. Imágenes elaboradas en Ipe	48
A.5	Autómata con frontera espejo y sin frontera. Imágenes elaboradas en Ipe	48
A.6	Generación de un autómata celular en una dimensión. Imágenes elaboradas en Ipe.	49
A.7	Simulación del triángulo de Sierpinski. Imágen elaborada en RStudio	50
A.8	Simulación de un autómata en 124 pasos con la configuración inicial la vecindad de Neumann. Imágenes elaboradas en RStudio.	50
A.9	Simulación de las clases I, II, III y IV respectivamente. Imágenes elaboradas en RStudio.	51
B.1	Simulaciones de densidad de potenciales promedio. Imágenes elaboradas en RStudio.	54
B.2	Simulaciones de potenciales promedio. Imágenes elaboradas en RStudio.	55
B.3	Simulaciones de crecimiento para tiempo $t = 100, 300, 700$ respectivamente. Imágenes elaboradas en RStudio	56
B.4	Simulaciones para conjuntos de segregación para tiempos $t = 20, 50, 100$ respectivamente. Imágenes elaboradas en RStudio.	57
C.1	Probabilidades en cada dirección	58

Contenido

Resumen	iv
Agradecimientos	v
Lista de Figuras	vi
Contenido	viii
1 Introducción. La urbanización y los conductores del cambio urbano	1
2 La urbanización y los modelos de epidemias	5
2.1 Dinámica temporal del crecimiento urbano	5
3 El crecimiento urbano como un proceso de difusión	11
3.1 Discretización del sistema de epidemias	13
3.2 Descomposición del sistema para el análisis del cambio de uso de suelo	16
4 Modelación de los cambios de uso de suelo con autómatas celulares	20
4.1 Descripción general del sistema	21
4.2 Análisis a nivel celular: el método de los pesos de evidencia	22
4.3 Acoplamiento del sistema espacio temporal con autómatas celulares	29
5 Simulación. Mancha urbana de la ciudad de Monterrey	31
6 Conclusiones y trabajo a futuro	42
A Autómatas celulares	43
B Algunos modelos de crecimiento con el uso de autómatas celulares	52
C Ecuación de difusión	58
D Algoritmos	61
Bibliografía	68

Capítulo 1

Introducción. La urbanización y los conductores del cambio urbano

La ciudad como un sistema complejo muestra su naturaleza cambiante de manera física, social y estructural. La población crece en intervalos de tiempo pequeños exigiendo cada vez mayor cantidad de suelo a cubrir y desfigurando el espacio de manera irregular. Gran parte de los estímulos que incentivan su evolución consisten en el intercambio de bienes entre sus habitantes, la interacción entre ellos, y la disponibilidad de recursos, por mencionar algunos, los cuales crean una competencia de manera natural entre distintas zonas de la mancha urbana que generan jerarquías principalmente en el nivel socioeconómico.

Sin embargo, en respuesta a la interdependencia de las distintas regiones que conforman la ciudad, se forman similitudes en su organización funcional y espacial que perduran por mucho tiempo [15]; ocasionando que su comportamiento global se pueda observar a través de considerar algunas características similares en su territorio a escalas más pequeñas.

La complejidad de las ciudades es debida a la interacción y retroalimentación de los sistemas individuales que la conforman, dando origen a cambios físicos profundos y dirigiéndola al caos en su dinámica espacial. Algunos cambios principalmente demográficos consisten en el exceso de construcciones, fundaciones de ciudades, la organización y distribución de la población y la explotación de los recursos existentes, los cuales propician ciclos de evolución y transformación de los espacios de asentamientos humanos.

Hay autores que sostienen que *la urbanización no es una condición espacial ni una delimitación demográfica, sino una conducta, una forma de vida* determinada por las particularidades físicas de la ciudad, como su densidad, tamaño territorial y heterogeneidad. Sumado a esto, la ciudad también se define como una aglomeración de individuos que organizados de manera colectiva sostienen actividades principales tales como la industria, la vivienda, el comercio, etc. Éstas a su vez, se convierten en singularidades de la ciudad con respecto a su situación actual y fomentan la transformación del territorio a largos periodos de tiempo.

El proceso de urbanización como un sistema dinámico complejo se explica a través de dos conceptos primordiales: el desarrollo y el crecimiento. En conjunto, estos conceptos representan la expansión física y demográfica de la ciudad mediante cambios de *usos de suelo* que se desempeñan de acuerdo a las condiciones del territorio y al surgimiento de las necesidades de la población.

Esto implica que se genere una especie de *potencial* que conduce y transmite el desarrollo, construyendo la historia de la ciudad en el transcurso de los años.

Además, la obliga a expandirse en el espacio por la gran concentración de dicho potencial en la periferia. A este proceso se le conoce como *suburbanización*, y provoca un efecto en el carácter social de la vida individual y colectiva [34]. Al ahondar en el tema, ciertos investigadores consideran importante la asunción de algunos conductores del cambio urbano que contribuyen a la decisión de ubicar un uso de suelo en un lugar y tiempo determinado [1]. Éstos son: la aleatoriedad, los accidentes históricos, el determinismo físico, las ventajas naturales y las ventajas comparativas.

La aleatoriedad

La diversificación y heterogeneidad en la sociedad surge como consecuencia de la interacción entre los individuos que construyen relaciones sociales y más aún, definen el espacio propio de las ciudades en base a aspectos físicos, sociales y económicos [37].

Debido a la dinámica implícita en el desarrollo urbano se genera una exigencia basada en las expectativas y necesidades del individuo que requieren ser satisfechas, buscando sobrepasar umbrales de desarrollo construídos por la sociedad misma. La *aleatoriedad* en este sentido se refiere a la condición de tomar una decisión como una selección individual entre múltiples opciones, donde a pesar de que las características del territorio o los factores del entorno sean propicios para el individuo, no resultan ser suficientes para predecir una decisión.

Los accidentes históricos de las ciudades

La vértebra estructural de las ciudades se compone en gran parte de la cultura formada por el desarrollo de las actividades económicas y sus relaciones sociales, que transforman sus funciones y estructuras internas, marcando puntos de inflexión en su historia. Los *accidentes históricos* (económicos, industriales o sociales) pueden ser vistos como puntos de inflexión, y tienen un impacto en los aspectos de la vida cotidiana. Por esta razón, la complejidad del sistema urbano también se debe en gran manera a la sensibilidad de las condiciones generales de la ciudad en un determinado periodo, ya que generan *bifurcaciones* en las trayectorias del sistema debido a la fuerte dependencia que tienen a tales condiciones.

El determinismo físico

El determinismo físico como otro conductor del cambio urbano conforma aquellas zonas donde las características físicas impiden la construcción de ciertos atractivos y necesidades, tales como los edificios y las carreteras. Una manera de conectarlo a la dinámica de éstos sistemas urbanos consiste en identificar aquellas áreas que facilitan la formación geométrica y geográfica de las estructuras urbanas considerando la elevación que cualifica el relieve, y la existencia de ríos y las montañas, etc.

Las ventajas naturales

Este conductor relaciona la existencia de los recursos propios disponibles que benefician de manera económica a la ciudad. Los ejemplos clásicos giran alrededor de analizar la intersección

de rutas de comunicación considerándolos como nodos que incentivan el desarrollo. Un ejemplo consiste en contar con un recurso indispensable como el agua para el surgimiento de la manufactura. Otro ejemplo radica en construir zonas de agricultura cercanas a centros comerciales con objetivo de disminuir costos y maximizar la accesibilidad.

Algunas ventajas comparativas

Usualmente para analizar el desarrollo entre distintas ciudades se observan las diferentes ventajas que cada una mantiene, y que pueden ser medidas en términos del nivel de facilidades y acceso a los servicios que ofrece la ciudad. El *potencial* entonces puede ser medido también en relación a la distancia o el costo implicado para obtener un beneficio.

En conjunto, los conductores del cambio urbano definen la dirección del crecimiento urbano y la transformación de los asentamientos humanos, construyendo la historia de la ciudad plasmada en su territorio.

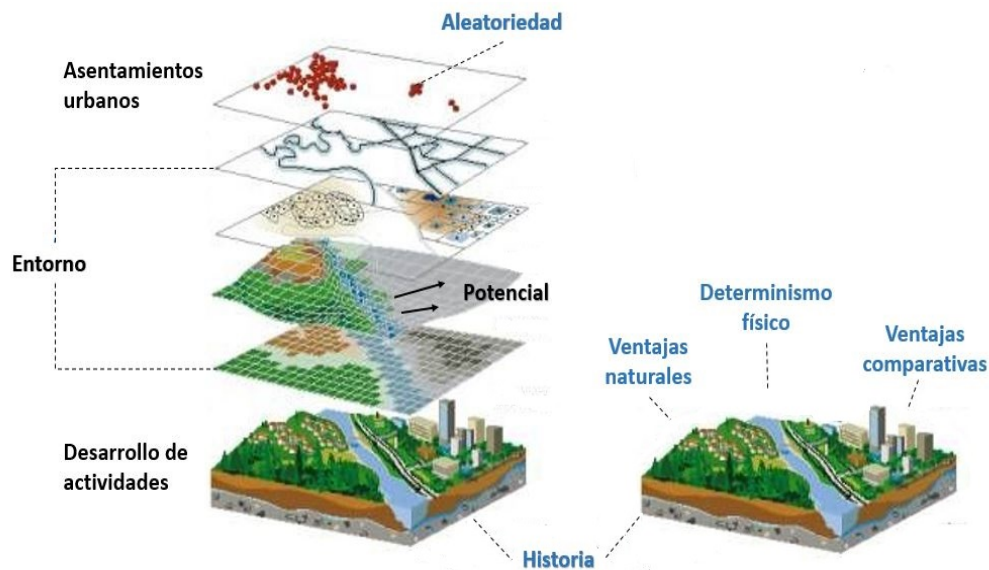


FIGURA 1.1: Evolución de la ciudad considerando los conductores del crecimiento urbano. Imágen modificada. Fuente: <http://www.aulati.net/wp-content/uploads/2009/04/capas-raster-vectorial.jpg>

Usualmente para la representación de la dinámica de estos sistemas se recurre a métodos y/o modelos que sólo llegan a representar la parte temporal. Algunos fenómenos físicos como la difusión de partículas han sido de gran utilidad en la representación del crecimiento urbano.

La difusión es un proceso irreversible que aumenta el desorden molecular de un sistema cuando las partículas se desplazan en él; en las ciudades el crecimiento de la mancha urbana refleja un símil con esta difusión observando a pequeñas regiones como una representación de tales partículas que crecen o se mueven con respecto al gradiente de concentración del suelo ocupado. Esto quiere decir que en situaciones reales de las ciudades, la población busca zonas disponibles para establecerse en función de la necesidad de espacio requerido para algún uso de suelo particular.

Sin embargo, con frecuencia los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden volverse complicados al momento de obtener una solución (si la hay) y no dan pie a una interpretación visual del proceso, ya que por lo regular son sistemas impredecibles y no lineales como es el caso de los sistemas urbanos. Por esta razón, se muestra la relación de tales sistemas con los autómatas celulares y los procesos de Markov como una buena alternativa para visualizar e interpretar la *emergencia* de las estructuras urbanas en la periferia.

El enfoque de algunos autores [1, 2] está en el problema de la calibración de los modelos para aplicaciones muy concretas. Este trabajo tiene como objetivo mostrar un panorama de la asociación de modelos clásicos a la dinámica de la urbanización y su representación visual a través de la simulación. Por lo cual, está dividido en las secciones siguientes:

El capítulo 1 trata de introducir el concepto del proceso de urbanización y cuáles son algunos de los conductores principales en el cambio y la transformación del suelo. El capítulo 2 muestra algunos modelos que se han utilizado en la expansión de epidemias como forma introductoria y como asociación de la dinámica con el proceso de urbanización. El capítulo 3 presenta la relación de tales modelos con los procesos difusivos, que, mediante la consideración de *factores* se asocia la descomposición de éstos para una generalización del sistema a través de los usos de suelo. El capítulo 4 describe a detalle la modelación del cambio de uso de suelo desde un enfoque bayesiano utilizando el método de los pesos de evidencia y cadenas de Markov. Finalmente, el capítulo 5 muestra el procedimiento de la simulación y el desarrollo de un autómata celular en lenguaje R mediante mapas e imágenes de una mancha urbana.

Capítulo 2

La urbanización y los modelos de epidemias

Como se mencionó anteriormente, el proceso de urbanización de una ciudad se define por los cambios que ocurren en consecuencia de su desarrollo y crecimiento a través del tiempo. La urbanización es resultado del crecimiento económico y social que conlleva una demanda de suelo, principalmente en la periferia de los asentamientos humanos.

Como los individuos que residen en los bordes requieren trasladarse a la ciudad para satisfacer sus necesidades primordiales, la periferia se ve favorecida por las mejoras de la accesibilidad y el transporte. Debido a esta *retroalimentación* se incorporan tierras alejadas del núcleo de la ciudad y se constituyen nuevas actividades socioeconómicas.

De esta manera, el suelo sufre transformaciones cada vez que las zonas rurales se van convirtiendo en zonas urbanas. Como una comparación simple de este proceso de urbanización, en este capítulo introduciremos el análisis de la dinámica del crecimiento urbano de manera temporal basándonos en un modelo clásico de epidemias conocido como modelo SIR.

Las transformaciones del suelo son consideradas como transiciones de fase definidas de la siguiente manera: $E(t)$ es el suelo establecido comúnmente encontrado en el núcleo de la ciudad, $N(t)$ es el suelo en nuevo desarrollo que suele hallarse en la periferia, y $D(t)$ es el suelo disponible para ser ocupado. Al asociarlo con lo que muestra el modelo SIR, el suelo en nuevo desarrollo $N(t)$ hace alusión a una población infectada, mientras que el suelo establecido $E(t)$ es una especie de población removible y el suelo $D(t)$ representa la población susceptible.

2.1 Dinámica temporal del crecimiento urbano

Asumimos que la transformación del suelo en el tiempo ocurre de la siguiente manera

$$D(t) \longrightarrow N(t) \longrightarrow E(t), \quad (2.1)$$

lo cual muestra que el crecimiento será un proceso que ocurre en una dirección, es decir, es un proceso irreversible. Consideramos también que el sistema tiene una capacidad máxima C , por lo cual, al considerar las tres fases anteriores en un sistema cerrado se cumple que

$$D(t) + N(t) + E(t) = C, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2)$$

Esto es, la población total del sistema siempre se conserva. Entonces, la condición inicial se reduce a $D(0) + N(0) + E(0) = C$, y debido a que la ecuación anterior se cumple para todo tiempo, tenemos que

$$\frac{dD(t)}{dt} + \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dE(t)}{dt} = 0. \quad (2.3)$$

Por la dirección en que ocurre el proceso, observamos que la cantidad del suelo disponible va disminuyendo en el tiempo. Por esta razón hacemos énfasis en el análisis de los incrementos del suelo que nuevamente es desarrollado añadido al suelo en nuevo desarrollo, es decir, una especie de nuevos infectados $\frac{dn(t)}{dt}$, y cómo ocurre la transferencia de éstos al suelo establecido $\frac{dE(t)}{dt}$. Entonces, podemos definir a los decrementos en el suelo disponible de la forma que sigue

$$\frac{dD(t)}{dt} = -\frac{dn(t)}{dt}, \quad (2.4)$$

Por lo cual, el cambio del suelo en nuevo desarrollo puede representarse como

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dn(t)}{dt} - \frac{dE(t)}{dt}, \quad (2.5)$$

que representa los incrementos totales en el nuevo desarrollo, determinado por las entradas que se obtengan del suelo disponible y las salidas del suelo establecido. Suponemos que el suelo en nuevo desarrollo $N(t)$ se convierte en suelo establecido $E(t)$ con una proporción $\gamma > 0$. Entonces los cambios en el suelo establecido se definen como

$$\frac{dE(t)}{dt} = \gamma N(t). \quad (2.6)$$

De manera similar, consideramos que el suelo disponible $D(t)$ se convierte en nuevo desarrollo $N(t)$ con una proporción $\alpha > 0$, la cual depende de las interacciones entre ambos tipos de suelo, es decir, $\alpha D(t)N(t)$. Esto representa una especie de onda de propagación en el suelo nuevamente desarrollado que determinamos anteriormente por $\frac{dn(t)}{dt}$. Entonces podemos escribir la ecuación (2.5) en función de éstos términos

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha D(t)N(t) - \gamma N(t), \quad (2.7)$$

y con respecto a la ecuación (2.4) también se tiene que

$$\frac{dD(t)}{dt} = -\frac{dn(t)}{dt} = -\alpha D(t)N(t). \quad (2.8)$$

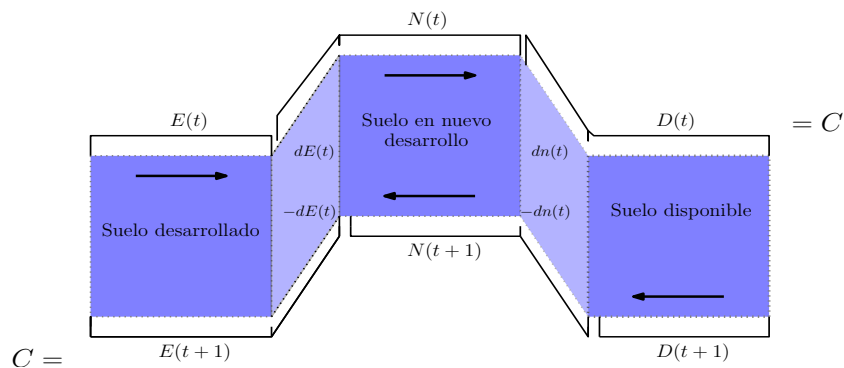


FIGURA 2.1: Transformación de suelo con la dirección de las fases en un tiempo t a $t + 1$.

Según las ecuaciones (2.7)–(2.8) se observa que, debido a que el suelo disponible $D(t)$ se reduce en el tiempo, la cantidad de nuevos infectados $n(t)$ también se reduce. Esto ocurre hasta que ya no haya suelo disponible $D(t)$ para ser transformado.

Estabilidad del sistema

A pesar de que las formas cerradas de las ecuaciones no están definidas, se puede realizar un análisis simple de las cualidades del sistema. En particular, se hace notar que la cantidad inicial de suelo disponible $D(0)$ necesita ser mayor que un cierto umbral para empezar el proceso. Esto surge de la ecuación (2.7) tomando a $\alpha N(t)$ de factor común

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left[D(t) - \frac{\gamma}{\alpha} \right]. \quad (2.9)$$

Debido a los incrementos iniciales en el nuevo desarrollo la ecuación anterior debe ser positiva para $t = 0$, lo cual implica que $D(0) > \frac{\gamma}{\alpha}$. Este valor es la razón (ratio) de la tasa de transición de suelo en nuevo desarrollo a suelo establecido, también conocido como tasa removible relativa en sistemas epidemiológicos.

Esta observación puede ser analizada también al considerar la razón entre las ecuaciones (2.6) y (2.8) utilizando la regla de la cadena. Como la derivada de $E(t)$ existe y siempre es positiva, entonces, $E(t)$ es estrictamente creciente y por tanto la inversa existe.

Entonces podemos pensar en la relación $t(E)$, donde su derivada es $\frac{dt(E)}{dE} = \frac{1}{\frac{dE(t)}{dt}}$. Por lo cual

$$\frac{dD(t(E))}{dE} = \frac{dD(t)}{dt} \frac{dt(E)}{dE} = \frac{dD(t)}{dt} \left(\frac{1}{\frac{dE(t)}{dt}} \right),$$

y así,

$$\frac{dD(t(E))}{dE} = \frac{\frac{dD(t)}{dt}}{\frac{dE(t)}{dt}} = -\frac{\alpha}{\gamma} D(t) = -\frac{D(t)}{\rho}, \quad (2.10)$$

donde $\rho = \frac{\gamma}{\alpha}$. La solución a esta ecuación está dada como $D(t) = k_0 e^{-\frac{\alpha}{\gamma} E(t)}$ y dado que $E(0) = 0$, entonces, $k_0 = D(0)$. Por lo tanto, decimos que cuando $t \rightarrow \infty$ el suelo disponible $D(t)$ presenta estabilidad ¹. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = D(0) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\rho} E(t)}, \quad (2.11)$$

que por continuidad de la función exponencial

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) &= D(0) e^{-\frac{1}{\rho} \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)}, \\ &= D(0) e^{-\frac{1}{\rho} E(\lim_{t \rightarrow \infty} t)}, \end{aligned}$$

¹Estabilidad en el sentido de sistema dinámico se refiere a que a pesar de tener perturbaciones en alguna variable o en las condiciones iniciales del sistema, se logre producir un comportamiento muy similar al comportamiento que se tendría sin tales perturbaciones.

y como $E(t) = C - D(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos que:

$$D(t) = D(0)e^{-\frac{E(t)}{\rho}} = D(0)e^{-\frac{C-D(t)}{\rho}}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

Esta ecuación permite calcular los valores del estado estable de las tres fases $D(t), N(t), E(t)$ para distintos parámetros [39], y que al igual que los parámetros también son capaces de mostrar un estado estacionario a partir de ciertas condiciones iniciales dadas.

Sin embargo, al resolver la ecuación (2.12) de manera iterativa el valor del estado estable de $D(t)$ no es cero, indicando que no todo el suelo disponible es transformado. Esto depende de los valores que se tengan de α y γ .

Al ajustar dichos parámetros también se pueden generar “epidemias” agudas que son interpretadas como discontinuidades. Sin embargo, en otros casos es posible que no sea fácil distinguir alguna tendencia de crecimiento.

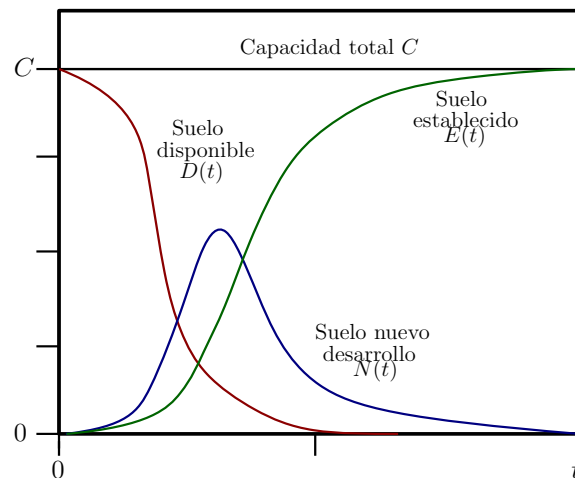


FIGURA 2.2: Trayectorias del cambio de suelo. Conforme el suelo disponible disminuye, el suelo establecido aumenta y cuando llega a los límites del sistema el suelo en nuevo desarrollo también decae.

Simplificaciones del sistema agregado

Sin embargo, el interés radica en que en algunas ciudades la demanda de suelo ocurre en la periferia, esto es, transforma el suelo disponible en los bordes de la ciudad. Reduciendo el análisis al crecimiento particular de esta zona, se considera una simplificación al sistema anterior que nos conduce a un crecimiento exponencial y logístico.

Para ello, asumiremos que el proceso de transformación del suelo se limita a la siguiente transición,

$$D(t) \longrightarrow N(t), \quad (2.13)$$

y ya que la transición $N(t) \rightarrow E(t)$ no existe, entonces $\gamma = 0$, lo que significa que el suelo en nuevo desarrollo se vuelve establecido de manera inmediata. Esto reduce el proceso a una transformación binaria, en la cual solo radica la posibilidad de que el suelo se convierta de disponible a establecido, ahora representado por $N(t)$.

Dejando a un lado el filtro ocasionado por las transiciones definidas en la ecuación (2.1) y conservando la capacidad máxima C , tenemos que $D(t) + N(t) = C$, por lo cual el sistema de

ecuaciones (2.7)–(2.8) se simplifica de modo siguiente

$$\frac{dD(t)}{dt} = -\alpha N(t)D(t), \quad (2.14)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)D(t). \quad (2.15)$$

Es suficiente con obtener solo uno de los términos $D(t)$ y $N(t)$ debido a que son simétricos.

Ahora el suelo disponible se puede obtener como $D(t) = C - N(t)$, que al sustituirlo en la ecuación (2.7) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \alpha N(t) \left[C - N(t) \right] = \alpha C N(t) - \alpha N(t)^2, \\ &= \alpha C N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{C} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

que es la ecuación logística. Entonces, por el método de separación de variables,

$$\alpha C dt = \frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C} \right)} dN(t) = \left(\frac{1}{N(t)} + \frac{\frac{1}{C}}{1 - \frac{N(t)}{C}} \right) dN(t), \quad (2.17)$$

y al integrar ambos lados obtenemos

$$\int \frac{1}{N(t)} dN(t) - \int -\frac{\frac{1}{C}}{1 - \frac{N(t)}{C}} dN(t) = \int \alpha C dt, \quad (2.18)$$

luego, al resolver se tiene que

$$\log N(t) - \log \left(1 - \frac{N(t)}{C} \right) + c_1 = \alpha C t + c_2, \quad \text{con } 0 < N(t) < C, \quad (2.19)$$

y por propiedades de los logaritmos,

$$\log \left(\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{C}} \right) = \alpha C t + c_3, \quad (2.20)$$

donde aplicando la función exponencial en ambos lados obtenemos

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{C}} = c_4 e^{\alpha C t}, \quad (2.21)$$

y donde además el recíproco es

$$\frac{1 - \frac{N(t)}{C}}{N(t)} = c_4 e^{-\alpha C t}. \quad (2.22)$$

Se observa que cuando $t \rightarrow \infty$, el valor de $N(t) \rightarrow C$ y de forma equivalente para el suelo establecido $E(t)$, por lo que cuando $t \gg 1$ entonces la tasa de crecimiento disminuye.

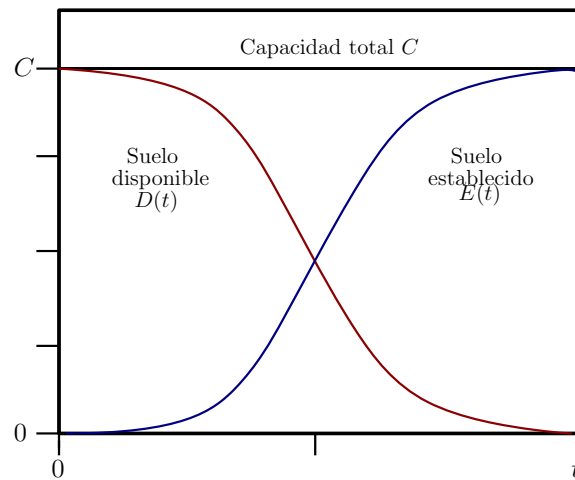


FIGURA 2.3: Trayectorias que muestran un crecimiento logístico. Imágen elaborada en R.

Al comienzo, $E(t)$ crece de manera rápida, y por lo tanto, pierde su capacidad de crecer cuando el número de esta variable es muy grande, dando como resultado un estado de equilibrio del sistema, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = C. \quad (2.23)$$

En los siguientes capítulos, se mostrará la dinámica de este modelo simplificado para describir las características del sistema global.

Capítulo 3

El crecimiento urbano como un proceso de difusión

En el capítulo anterior se mostró un sistema temporal del crecimiento de epidemias como analogía con el crecimiento de las ciudades. Sin embargo, por la interacción que ocurre entre los individuos, se genera una organización de actividades *económicas y sociales* y una distribución de éstas en el territorio, provocando la *emergencia* de estructuras complejas en los bordes.

Es así como asociamos el concepto de ciudad “emergente” a aquella que tenga un crecimiento poblacional y económico positivo. Como una buena alternativa para la representación espacial de la urbanización, se han considerado procesos relacionados con la difusión [1], [2], [40]. Por ello, este capítulo tiene como propósito mostrar la asociación del fenómeno de la difusión con el proceso de urbanización partiendo de un concepto simple, una caminata aleatoria.

La caminata aleatoria y su relación con la ecuación de difusión

Considere una partícula que se mueve en un espacio de una dimensión. Se le asigna una probabilidad p a la partícula de que se mueva hacia la derecha y con probabilidad $1 - p$ de que se mueva a la izquierda. Como para cada paso puede elegir una sola dirección, al final de n pasos obtendremos un conjunto de posibles trayectorias generado por los movimientos efectuados por la partícula. Consideremos que en cada incremento constante de tiempo $\Delta t = 1$ la partícula se desplaza también en una cantidad constante con $|\Delta x| = 1$. Entonces, la probabilidad de que la partícula en el paso $n + 1$ se encuentre en una posición i se define como

$$P_{n+1}(i) = \begin{cases} pP_n(i-1) + (1-p)P_n(i+1), \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, para que los desplazamientos puedan tomar cualquier valor real, se requiere considerar las relaciones de escala $t = n\Delta t$ y $x = j\Delta x$. Entonces, en el límite cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ y para $n \rightarrow \infty$, la ecuación (3.1) toma la forma siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t, x) = -\nu \frac{\partial}{\partial x}P(t, x) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(t, x), \quad (3.2)$$

que es llamada ecuación de difusión. Si consideramos un conjunto de partículas con las mismas propiedades físicas y relaciones de escala, lo que observaríamos es que entre ellas no alcanzan

a interactuar ya que sus desplazamientos tienden a ser cero. Por tal consideración, decimos que los desplazamientos de una partícula son *independientes* de los desplazamientos de otra, de tal forma que la ecuación (3.2) permite describir los desplazamientos de un ensamble de partículas.

Ahora, si los desplazamientos de las partículas ocurren en dos dimensiones, las posiciones se definen como $(i, j), i, j \in \mathbb{Z}$. Suponemos que cada una puede moverse en ocho direcciones posibles con cierta probabilidad como se muestra en la imagen de la derecha.

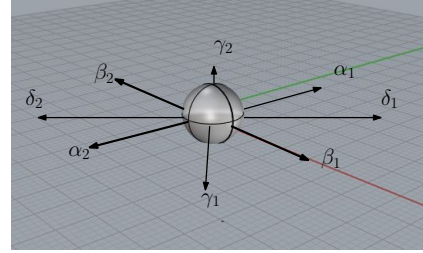


FIGURA 3.1: Probabilidades para que la partícula se desplace en cada una de las ocho posibles direcciones. Imágen elaborada en Rhinoceros.

De manera similar a la ecuación (3.1), se define la probabilidad de encontrar a una partícula en la posición (i, j) después de n pasos como sigue

$$P_{n+1}(i, j) = \alpha_1 P_n(i - 1, j) + \alpha_2 P_n(i + 1, j) + \beta_1 P_n(i, j - 1) + \beta_2 P_n(i, j + 1) + \gamma_1 P_n(i - 1, j - 1) + \gamma_2 P_n(i + 1, j + 1) + \delta_1 P_n(i + 1, j - 1) + \delta_2 P_n(i - 1, j + 1), \quad (3.3)$$

que, utilizando las relaciones de escala anteriores, la ecuación (3.3) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{x}) = \vec{v} \bullet \nabla P(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbb{D} \mathbb{H}, \quad (3.4)$$

donde \vec{v} es el tensor de la difusión, \mathbb{D} es la matriz de los coeficientes de difusión y \mathbb{H} es la matriz hessiana. La demostración de este resultado se encuentra en el apéndice 2.

Usualmente para la representación de la dinámica del crecimiento urbano se recurre a métodos y/o modelos que sólo llegan a representar la parte temporal.

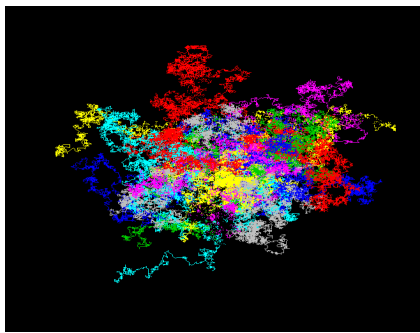


FIGURA 3.2: Simulación de caminatas aleatorias de treinta partículas en dos dimensiones con ocho direcciones posibles de desplazamiento. Imágen elaborada en RStudio.

Algunos fenómenos físicos como la difusión de partículas han sido de mayor utilidad en la representación el crecimiento urbano.

La difusión como un proceso irreversible muestra cómo un conjunto de partículas se desplazan de una región con alta concentración a las regiones menos concentradas de manera aleatoria, y tiende a devolver al sistema a su estado de equilibrio donde su concentración es constante.

Hablamos entonces de un *gradiente de concentración* que nos indica hacia qué dirección ocurre dicho *flujo* de partículas.

Cuando la distribución de éstas partículas no es uniforme, se dice que el flujo neto existe a pesar del movimiento aleatorio de cada una de ellas, y además, es proporcional al gradiente de concentración. En las ciudades el crecimiento de la mancha urbana refleja un símil con esta difusión observando a pequeñas regiones como

una representación de estas partículas que crecen o se mueven respecto al gradiente de concentración del suelo ocupado. Esto quiere decir que en situaciones reales del crecimiento de las ciudades, debido a la gran cantidad de suelo ocupado la población busca zonas disponibles para establecerse en función de la necesidad de espacio requerido para algún uso de suelo particular.

Difusión por agregación limitada

Sin embargo, en las ciudades el suelo es físicamente inamovible, es decir, tiene una localización fija y no puede transportarse en el espacio. Para ello, se han desarrollado distintos sistemas que consideran esta cualidad. Uno de los más importantes en la literatura es la *agregación limitada por difusión* (DLA, por sus siglas en inglés) [38] que consiste en la formación de estructuras debido a la unión de partículas en forma aleatoria.

El proceso comienza considerando una semilla en una malla. Se inicia con una distribución uniforme, donde algunas partículas pueden juntarse de la siguiente manera: cada vez que una partícula es introducida al sistema, ésta se transporta en el espacio hasta llegar a la semilla y cuando lo ha logrado, deja de moverse y se ensambla en ella. Luego, una siguiente partícula repite lo anterior, y así sucesivamente ocurre para cada partícula hasta formar una estructura irregular. Debido a la ocurrencia del proceso, las partículas tienen dificultad para que se acumulen en el centro del agregado, lo que quiere decir que con mayor probabilidad se adhieren a las regiones externas o bordes.

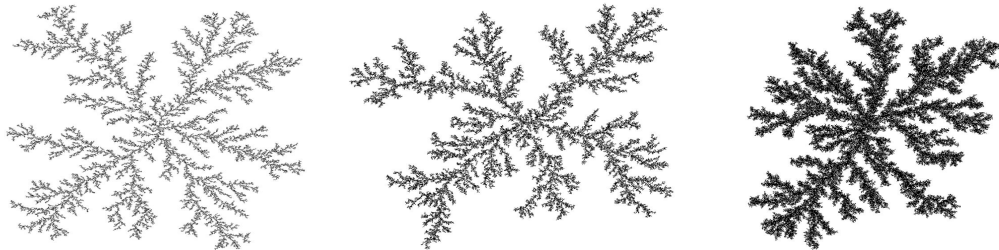


FIGURA 3.3: DLA con distinto coeficiente de adhesión. Entre menor sea el coeficiente, mayor es su densidad de partículas. Fuente: <http://paulbourke.net/fractals/dla/>.

A este proceso se le llama difusión limitada debido a que las partículas se mantienen en bajas concentraciones y los agregados son formados por una partícula a la vez. Se debe considerar también el coeficiente de adherencia, ya que si cada partícula se ensambla al momento de tocar una región del agregado, su coeficiente de adherencia es uno, y en otro caso el valor del coeficiente es menor que uno [41].

3.1 Discretización del sistema de epidemias

La importancia de estos modelos es la similitud que muestran con la urbanización de una ciudad. Esto permite asociar el crecimiento urbano en la frontera con una especie de agregación limitada por difusión.

Considerando que las áreas urbanas crecen en la periferia de la ciudad debido a la demanda de suelo disponible y recordando el sistema de ecuaciones (2.7)–(2.8) del capítulo anterior, podemos modelar la dinámica espacial de la urbanización de una manera simple y más precisa mediante una combinación del modelo SIR con la difusión.

Como consecuencia, implica discretizar las dimensiones espaciales del sistema para considerar el modelo SIR de manera local en cada uno de los elementos de una malla, la cual permitirá representar el territorio de una ciudad y en donde se observen las interacciones entre los elementos mediante la difusión. Esto quiere decir que aquellas zonas disponibles para comenzar a desarrollarse generarán más suelo para desarrollar alrededor de cada una de las celdas, lo cual según la ecuación (2.14), el suelo disponible $D(t)$ y el suelo en nuevo desarrollo $N(t)$ son generados de forma local en las zonas vecinas.

Entonces, cada elemento de la malla con ubicación (x, y) tiene su propio sistema temporal descrito de la siguiente manera [1]:

$$\frac{\partial E_{x,y}(t)}{\partial t} = \gamma N_{x,y}(t), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial N_{x,y}(t)}{\partial t} = \alpha N_{x,y}(t) D_{x,y}(t) - \gamma N_{x,y}(t), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial D_{x,y}(t)}{\partial t} = -\alpha N_{x,y}(t) D_{x,y}(t) + \mathfrak{D} \nabla^2 N_{x,y}(t), \quad (3.7)$$

donde \mathfrak{D} es el coeficiente de difusión correspondiente al suelo disponible $D(t)$. Entonces el término $\mathfrak{D} \nabla^2 N_{x,y}(t)$ representa el flujo entre la región correspondiente a la posición (x, y) y las regiones vecinas. Vemos que el coeficiente de difusión asociado al suelo disponible y el nuevo desarrollo no depende de la posición (x, y) de las celdas, ya que las propiedades del sistema son las mismas en toda la región.

Entonces, las tres ecuaciones en conjunto determinan un flujo local para cada posición (x, y) . Sumando las tres ecuaciones obtenemos

$$\frac{\partial \Psi_{x,y}(t)}{\partial t} = \mathfrak{D} \nabla^2 N_{x,y}(t), \quad (3.8)$$

donde $\Psi_{x,y}(t) = N_{x,y}(t) + D_{x,y}(t) + E_{x,y}(t)$. Además, si consideramos las posiciones (x, y) como parte de un sistema cerrado, el flujo total entre todas las regiones de la malla debe ser cero (ya que el flujo no entra ni sale del sistema global), es decir,

$$\sum_x \sum_y \frac{\partial \Psi_{x,y}(t)}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

También tenemos que,

$$\nabla^2 \Psi_{x,y}(t) = \nabla^2 (N_{x,y}(t) + D_{x,y}(t) + E_{x,y}(t)) = \nabla^2 N_{x,y}(t) + \nabla^2 D_{x,y}(t) + \nabla^2 E_{x,y}(t), \quad (3.10)$$

y dado que la difusión en la frontera depende únicamente de la cantidad de suelo en nuevo desarrollo (ya que el suelo en nuevo desarrollo es el único que genera más suelo disponible), se tiene que $\nabla^2 D_{x,y}(t) = \nabla^2 E_{x,y}(t) = 0$. De manera que

$$\nabla^2 \Psi_{x,y}(t) = \nabla^2 N_{x,y}(t), \quad (3.11)$$

y entonces,

$$\frac{\partial \Psi_{x,y}(t)}{\partial t} = \mathfrak{D} \nabla^2 \Psi_{x,y}(t). \quad (3.12)$$

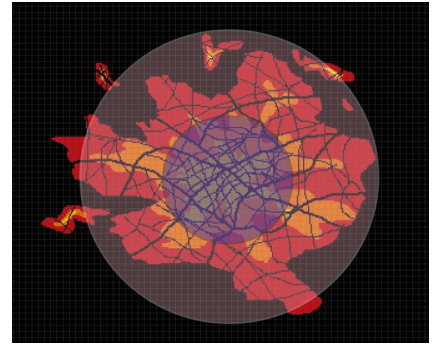


FIGURA 3.4: Región que representa al suelo establecido $E(t)$, el suelo en nuevo desarrollo $N(t)$ y el suelo disponible $D(t)$ de manera local. Imágen elaborada en Ipe.

Observemos que la expresión (3.12) es la ecuación de difusión del campo escalar $\Psi_{x,y}(t)$ y muestra la relación entre la transferencia del suelo disponible en una celda específica con sus celdas vecinas. Dadas las ecuaciones (3.9) y (3.12) tenemos también

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \mathfrak{D} \nabla^2 \Psi(t) = 0. \quad (3.13)$$

y como Ψ es dependiente del tiempo, permite alcanzar la solución del estado estacionario, es decir, el fenómeno es estacionario ya que la variación total del flujo en el sistema global es igual a cero. Al considerar la simplificación del sistema SIR en el capítulo anterior, esto es, la transición $D \rightarrow N$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial N_{x,y}(t)}{\partial t} = \alpha N_{x,y}(t) D_{x,y}(t), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial D_{x,y}(t)}{\partial t} = -\alpha N_{x,y}(t) D_{x,y}(t) + \mathfrak{D} \nabla^2 N_{x,y}(t). \quad (3.15)$$

que al despejar se muestra

$$\frac{\partial D_{x,y}(t)}{\partial t} + \mathfrak{D} \nabla^2 N_{x,y}(t) = -\alpha N_{x,y}(t) D_{x,y}(t), \quad (3.16)$$

la cual es la ecuación de difusión del campo escalar $N_{x,y}(t)$ con un término fuente. Al sumar ambas ecuaciones tenemos que el cambio en el campo escalar $\Psi_{x,y}(t)$ solo depende de cuánta cantidad de suelo en nuevo desarrollo se tenga en esa misma posición, es decir,

$$\frac{\partial \Psi_{x,y}(t)}{\partial t} = \mathfrak{D} \nabla^2 N_{x,y}(t), \quad (3.17)$$

donde $\Psi_{x,y}(t) = N_{x,y}(t) + D_{x,y}(t)$, lo cual $N_{x,y}(t) = \Psi_{x,y}(t) - D_{x,y}(t)$. Esta es la misma ecuación (3.8), lo cual significa que el flujo local está determinado de la misma manera a pesar de que no existe la transición hacia el suelo establecido.

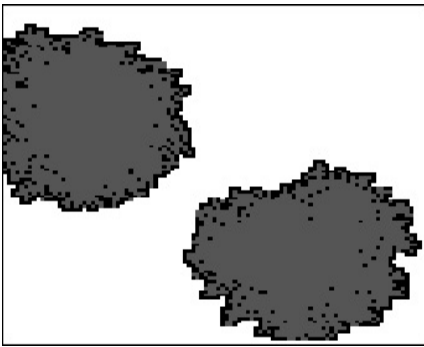


FIGURA 3.5: Se muestra el crecimiento simulado con dos semillas de suelo en nuevo desarrollo $N(0)$, de acuerdo a la transición $D \rightarrow N$.

Sin embargo, como el proceso sólo depende del suelo en nuevo desarrollo (ahora establecido por su transformación inmediata), la transición del suelo en nuevo desarrollo a establecido sólo retrasa el crecimiento del suelo establecido.

Entonces, considerando sólo la transición $D \rightarrow N$ tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{x,y}(t)}{\partial t} &= \mathfrak{D} \nabla^2 (\Psi_{x,y}(t) - D_{x,y}(t)), \\ &= \mathfrak{D} \nabla^2 \Psi_{x,y}(t) - \mathfrak{D} \nabla^2 D_{x,y}(t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $\nabla^2 D_{x,y}(t) = 0$. Por tanto

$$\frac{\partial \Psi_{x,y}(t)}{\partial t} = \mathfrak{D} \nabla^2 \Psi_{x,y}(t). \quad (3.19)$$

La figura 3.6 muestra la gráfica correspondiente a las densidades del crecimiento en figura 3.5.

Se observa que las distribuciones asociadas al suelo ocupado del sistema $N(t) + E(t)$ y el suelo disponible $D(t)$ se comportan de una manera logística al igual que el sistema SIR simplificado. Esto es debido a que considerar el crecimiento total $N(t) + E(t)$ es análogo a considerar la transición inmediata $N \rightarrow E$.

A pesar de que lo anterior representa el comportamiento de la urbanización de una manera simple, resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones diferenciales locales y el sistema global podría no ser tan sencillo.

Si se modela el comportamiento de cada tipo de suelo con el modelo SIR simplificado, se tendrían que resolver dos ecuaciones diferenciales no lineales para cada una de las $N \times N$ celdas de la malla espacial, es decir, un total de $2 \times N \times N$ ecuaciones diferenciales.

Una herramienta que facilita la simulación de procesos a distintas escalas son los autómatas celulares, ya que los elementos que los componen, (las celdas y vecindades) están interactuando en el espacio y en el tiempo mediante reglas sencillas. Como sistemas dinámicos discretos que son, el tiempo se convierte en una variable discreta, comúnmente a incrementos unitarios (para una breve explicación de los autómatas, ver apéndice 1).

Entonces, para dar una interpretación de la dinámica del proceso con autómatas celulares, podemos hacer una simplificación aún mayor del sistema de ecuaciones SIR espacio temporal mediante la transformación de factores en cada celda.

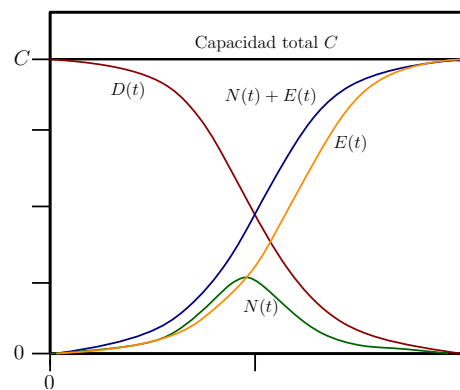


FIGURA 3.6: Cambios en la cantidad de suelo transformado a través del tiempo. Imágen elaborada en RStudio.

3.2 Descomposición del sistema para el análisis del cambio de uso de suelo

Las actividades principales que generan una organización y un surgimiento de estructuras en el territorio, son consecuencia de las relaciones y necesidades de los individuos. A estas actividades se les conoce como *usos de suelo*, las cuales determinan la evolución de la ciudad ocasionando cambios o transformaciones del suelo, y generando más suelo ocupado en la periferia. Esto abastece la definición del proceso de urbanización como un proceso territorial y socioeconómico de las ciudades.

El sistema de ecuaciones (3.10) – (3.11) permite representar tal dinámica espacial de la urbanización mediante *características* que definan a cada uso de suelo de modo particular, determinando la expansión de los asentamientos a través de los cambios de uso de suelo. A las características que definen los usos de suelo posibles, les llamamos *factores* que dependen de la posición de la celda y del tiempo, actuando de manera positiva o negativa en ella y por consiguiente, volviéndola atractiva para ser desarrollada.

Si tenemos una región que representa la mancha urbana de una ciudad, podemos seccionarla en elementos más pequeños (celdas) con un uso de suelo predominante, donde los cambios en cada celda dependan de cierta manera de las celdas vecinas.

La asociación de la dinámica temporal del sistema de ecuaciones diferenciales simplificado a cada elemento de la malla, es considerando que esta malla es lo suficientemente fina, de tal modo que solo pueda ocupar un uso de suelo en cada posición (x, y) .

Además, si los factores son independientes, el uso de suelo que se concentra en una celda puede ser representado a través de una descomposición de éstos. En general, el comportamiento del sistema puede ser descrito por los comportamientos individuales de cada uno de sus factores.

Como la transformación del suelo es de disponible a ocupado, según las ecuaciones anteriores (3.10)–(3.11), decimos que el comportamiento de cada factor será representado de modo binario, lo que quiere decir que los dos estados que las celdas pueden tomar D, N (disponible 0 y ocupada 1) dependerán de la presencia o ausencia de factores.

Por la influencia de cada uno de los factores en (x, y) se determina una especie de *potencial* que provoca interacciones entre los posibles usos de suelo de dicha celda con su entorno. En particular, este potencial se concentra en las zonas de la periferia de la ciudad debido a que a través del tiempo el núcleo de la ciudad ha evolucionado tanto que mantiene en gran parte una unión espacial de las estructuras emergentes.

Se le llamará *subsistema* a un agregado de celdas que almacenan un mismo uso de suelo. El comportamiento de cada subsistema estará determinado por la ecuación (3.12). Por lo que decimos que el comportamiento del sistema global, mostrado en la ecuación (3.9), queda determinado por el conjunto de tales subsistemas.

Dicho lo anterior, comenzaremos definiendo lo siguiente: Consideremos los usos de suelo C_i con $i = \{0, \dots, M\}$ y los factores f^j con $j = \{1, \dots, s\}$. Entonces cada uso de suelo se puede representar como una sucesión $\{\xi_j^{(i)}\} \subset \{0, 1\}$ donde $\xi_j^{(i)} = 0$ si f^j no está presente para el uso de suelo C_i y $\xi_j^{(i)} = 1$ en otro caso. Como cada uso de suelo C_i está determinado por el vector

	C_i
f^1	$\xi_1^{(i)}$
\vdots	\vdots
f^{s-1}	$\xi_{s-1}^{(i)}$
f^s	$\xi_s^{(i)}$

TABLA 3.1: Generalización de la descomposición de factores para un uso de suelo.

Se muestra como ejemplo la siguiente tabla que describe la relación general entre cada uno de los factores y los usos de suelo

	C_0	C_1	\dots	C_{M-1}	C_M
f^1	0	0	\dots	1	1
f^2	0	0	\dots	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
f^{s-1}	0	0	\dots	1	1
f^s	0	1	\dots	0	1

TABLA 3.2: Relación entre los factores y los usos de suelo.

El propósito es descomponer la matriz de tipos de suelo en matrices de factores independientes. En este caso, si en la matriz que almacena los usos de suelo de las celdas (esto es, el mapa de usos de suelo de la región), la posición (x, y) tiene el uso de suelo C_i , entonces, la matriz correspondiente al factor f^j tendría en la celda (x, y) el valor de $\xi_j^{(i)}$. Esta matriz de ceros y unos es la que se modela después con el sistema de ecuaciones SIR simplificado. Tal planteamiento se muestra de manera gráfica en la siguiente imagen.

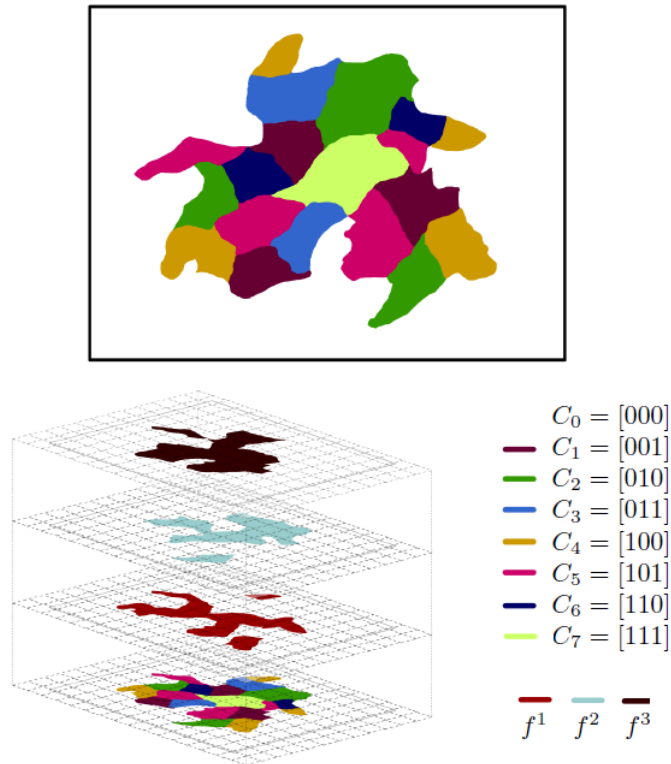


FIGURA 3.7: Descomposición de cada uso de suelo en factores mediante una representación binaria. Imagen elaborada en Photoshop.

Dada la dependencia del sistema global respecto a los factores, se tiene que la estabilidad del sistema global depende directamente de la estabilidad de cada uno de los factores, es decir, si todos los factores son estables, el sistema global será estable.

Como cada factor es modelado utilizando la simplificación del modelo SIR mostrado en las ecuaciones (3.14) y (3.15), se sigue que cada factor es estable (como se menciona al final del capítulo 2), garantizando de esta manera la estabilidad del sistema global.

Los autómatas celulares

El uso de los autómatas celulares ha servido para modelar el crecimiento en sí, generando extenso trabajo en la literatura, por ejemplo: el análisis del crecimiento de la bacteria *E. Coli* debido a la reproducción y esporulación, para la formación de aglomeraciones con características similares debido a ciertos nutrientes [16]; el análisis sobre la interacción de células que generan el crecimiento de tumores por la difusión de químicos y la tasa de proliferación individual del tumor [17]; la configuración de cromosomas y su posible mutación [18].

En otros trabajos del área social y económica se ha analizado la densidad de la población y la medida de la dimensión de un sistema mediante técnicas estadísticas como box counting para el crecimiento de redes complejas en el transporte [19]; la formación de nichos respecto a los niveles de tecnología usando componentes logísticas [20], etc.

Otro trabajo en el área geofísica es respecto a las causas y cambios en la cobertura del suelo [23], donde son examinadas a través de clases de suelo como son la deforestación tropical, modificaciones en los pastizales, la intensificación de la agricultura y la urbanización; se encuentra también el estudio de la pérdida de suelos productivos en Buenos Aires, Argentina que muestra claramente la metodología de los autómatas celulares junto con otras herramientas como SIG (Sistemas de Información Geográfica) que ayudan a modelar la dinámica del crecimiento urbano en relación a las coordenadas espaciales para mostrar que algunos suelos son útiles para la siembra de cereales, lo cual ayuda a incentivar la toma de decisiones espaciales para la planificación urbana [24].

A pesar de la complejidad que se encuentra en el análisis del crecimiento de una ciudad, estos trabajos han mostrado que la similaridad observada en las estructuras urbanas y su complejidad puede ser explicada a través de comparaciones similares a la difusión.

En el siguiente capítulo se mostrará una forma de abordar la dinámica descrita en los dos capítulos anteriores utilizando autómatas celulares, como una alternativa que facilita el análisis de la urbanización tanto de forma computacional como de modelación para el cambio de uso de suelo.

Permite además, la visualización de las estructuras *emergentes* mediante procesos de Markov. Las transiciones posibles de los usos de suelo son llevadas a cabo considerando un potencial generado por los factores que definen cada uso de suelo, y que al ser normalizado permite representar una probabilidad de transición para cada celda.

Capítulo 4

Modelación de los cambios de uso de suelo con autómatas celulares

Dado que el proceso de urbanización depende de qué tanto se ha desarrollado de forma local y global una porción del territorio y cuánto ha generado a su alrededor, lo convierte en un proceso dinámico que refleja un conjunto de decisiones tomadas por los individuos que construyen asentamientos con tales actividades de acuerdo a las necesidades y la influencia del entorno.

La analogía que se muestra en este capítulo con el sistema de ecuaciones diferenciales parciales anterior, consiste en representar la difusión debida a la interacción entre el suelo disponible $D_{x,y}(t)$ y el suelo en nuevo desarrollo $N_{x,y}(t)$ mediante la interacción que ocurre en una *vecindad* compuesta por cierta cantidad de celdas en una malla. Cada una de las posiciones que podemos representar en la malla se distingue por sus características del espacio y del tiempo, y mientras más pequeña sea el área de la región ocupada por la celda podemos asociarle un uso de suelo que la represente de manera única.

Entonces el suelo disponible apto para ser desarrollado será ocupado con un uso de suelo asociado a la aptitud de la región cercana, es decir, para cada uso de suelo existe la transformación de suelo disponible a suelo en nuevo desarrollo. De modo que, cuando toda la malla es transformada en usos de suelo y la interacción entre las celdas cercanas a cada posición (x, y) ocurre, se genera una especie de potencial que produce cambios en el uso de suelo para tal posición que está en función de los factores particulares de la región y de su entorno, manifestando el crecimiento espacial como una difusión de los asentamientos urbanos.

Mostramos el análisis del cambio de uso de suelo utilizando cadenas de Markov, que son procesos estocásticos de primer orden, es decir, la probabilidad de presentar un uso de suelo ahora solo depende de qué estado tenía la celda en el tiempo anterior. Aunado a esto, la probabilidad queda definida para una celda, por lo que considerar una malla implica que este proceso esté definido para cada elemento de ella; la asociación de la dinámica temporal y espacial es llevada a cabo con autómatas celulares.

Para mostrar el cambio de uso de suelo, los sistemas locales y el sistema global serán descritos a través de una malla bidimensional y regular. Partimos de definir una probabilidad a priori en cada celda de la malla en base a los factores existentes. Ésta a su vez es ajustada al considerar la influencia de las celdas vecinas que afectan a cada celda central utilizando la vecindad de Moore. Finalmente, se determinan ciertas reglas para que el autómata conduzca el crecimiento en la periferia eligiendo el uso de suelo mediante el método Montecarlo.

4.1 Descripción general del sistema

Definiremos los elementos que componen al autómata y las configuraciones del sistema global y local como sigue: Sea Γ un espacio *bi*-dimensional compuesto por N^2 elementos o celdas que mantienen una posición espacial (i, j) en cada tiempo, donde $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Este espacio representa el territorio de la ciudad dividido en celdas que hacen alusión a regiones con un uso de suelo particular.

Existe además, el espacio $\Sigma = \{0, 1, \dots, M\}$ de posibles estados o usos de suelo que cada celda puede tomar. Se dice que una configuración $S_t = \{C_{i,j}(t)\}$ es la asignación de estados para cada $C_{i,j}$ en cada periodo $t = 1, 2, \dots, T$, esto es, el mapeo $S_t : t \rightarrow \{C_{i,j}(t)\}$ genera una configuración particular en el tiempo. En particular, la configuración inicial del autómata es $S_0 = \{C_{i,j}(0)\}$, donde $C_{i,j}(0)$ es el estado inicial de la celda $C_{i,j}$ en $t = 0$. Definimos como una trayectoria o realización del proceso a una secuencia de configuraciones S_0, S_1, \dots, S_t que representa la evolución en el tiempo de la distribución de los usos de suelo en el espacio geográfico Γ .

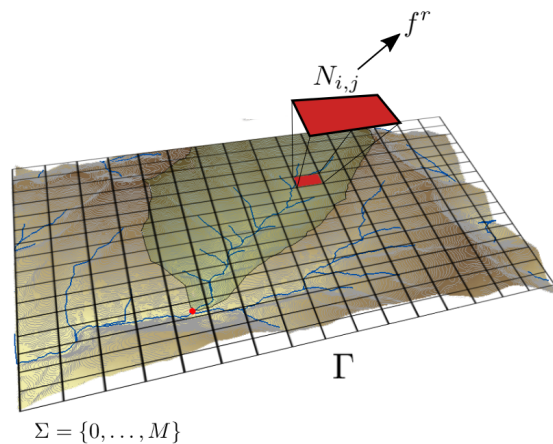


FIGURA 4.1: Configuración particular de la celda de acuerdo a sus factores. Imagen modificada en Ipe.

Particularmente, el cambio de uso de suelo dadas las configuraciones $C_{i,j}(t+1)$ y $C_{i,j}(t)$ en una región y su transformación en el territorio es un proceso dinámico que puede ser representado a través de un proceso de Markov $\{C(t)\}_{t=1}^T$, para el cual se define la matriz de probabilidades de transición de usos de suelo $\mathbb{P}^{(t)}$ con dimensión $(M+1) \times (M+1)$ en cada celda del autómata.

Considerando $C_{i,j}(t) = k$ y $C_{i,j}(t+1) = l$ por simplificación de notación, definimos la probabilidad de que la celda que está en el estado o uso de suelo k en el tiempo t cambie al estado l en el tiempo $t+1$ como funciones que dependen de distintos *factores* en una celda con posición (i, j) y su vecindad de Moore, de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}_{i,j}^{(t)}(l|k) = \Theta(h(\bullet), g(\bullet)), \quad (4.1)$$

La función $h(\bullet)$ representa el valor local determinado por la influencia de los factores en cada celda definiendo una probabilidad mediante el teorema de Bayes. La función $g(\bullet)$ relaciona el uso de suelo actual de la celda central con posición (i, j) con los usos de suelo de su vecindad de Moore $\kappa_{i,j}$.

Como la decisión con respecto a qué uso de suelo tomará la celda dependerá de su entorno global (mediante los cambios en las distribuciones del sistema global), y del sistema local considerando

la *mayoría* de celdas distintas a ella en su vecindad de Moore, se generan números aleatorios hasta que el total de celdas necesarias para cada transición de uso de suelo se cumpla en todo el sistema mediante el método Montecarlo.

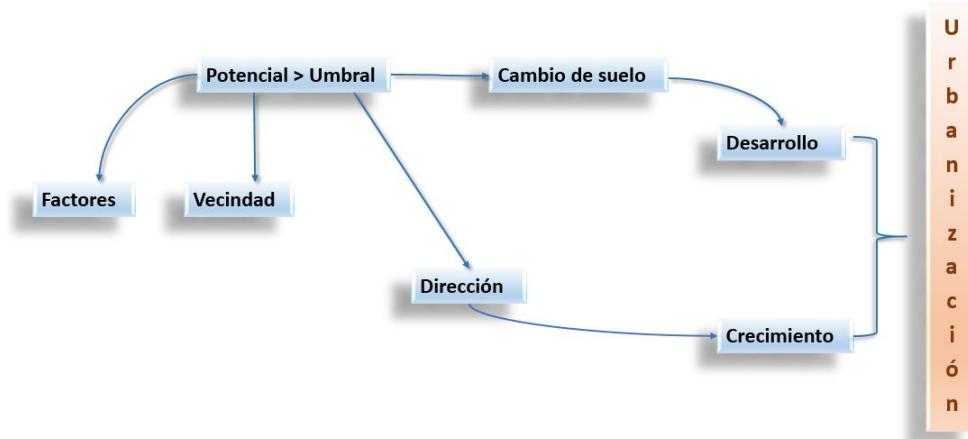


FIGURA 4.2: Estructura de la modelación para la dinámica del proceso de urbanización.

Si consideramos las cualidades del sistema del capítulo anterior, la dinámica del proceso se llevará a cabo utilizando una malla regular ya que es un sistema cerrado. Esta formulación significa que la densidad en cada celda es la misma, por lo que todas las celdas se consideran del mismo tamaño. Esto es coherente si la malla es dividida en secciones suficientemente pequeñas para permitir que cada celda se asocie con uno y un solo uso de suelo en cualquier momento. Debido a que la dinámica del proceso consiste en observar el cambio de k a l podemos estimar una probabilidad respecto a dichos cambios a nivel global como sigue

$$P^{(t)}(l|k) = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j n_{i,j}^{kl}(t), \quad (4.2)$$

donde

$$n_{i,j}^{kl}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{i,j}(t-1) = k \text{ y } C_{i,j}(t) = l, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Cada celda de la malla, como elemento básico del autómata, representa una porción del territorio en la cual se lleva a cabo la transformación del suelo que se representan de una manera directa como las transiciones de un uso de suelo k a l . Es por ello que se describe un análisis local mediante el método de los *pesos de evidencia*, que permite definir a la probabilidad de que ocurra un cambio en la celda en función de sus factores.

4.2 Análisis a nivel celular: el método de los pesos de evidencia

Los pesos de evidencia son un método cuantitativo basado en el enfoque Bayesiano de la probabilidad condicional utilizado por ejemplo, en la toma de decisiones, ya que combina variables (*evidencias*), continuas o discretas en base a una hipótesis [25].

Una de las aplicaciones principales e importantes del método fue hecha en la medicina para determinar si un paciente tendrá una cierta enfermedad al mostrar algunos síntomas previos que permitían determinar una probabilidad en función de las características del paciente y la *interacción* de las bacterias con él.

Otras aplicaciones realizadas en los años 1980's tienen una implicación espacial para modelar mapas de las áreas favorables en la mineralización de oro según los potenciales de acuerdo a la distribución de algunas variables conocidas en una zona dada [26].

Para introducir el análisis a nivel local, consideraremos una probabilidad genérica de cambio τ de uso de suelo influenciada por un factor, independientemente del uso de suelo, la posición espacial y el tiempo. La variable $\tau = \tau_{i,j}(t)$ se interpreta como una transición definida como

$$\tau_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{i,j}(t) \neq C_{i,j}(t+1), \\ 0 & \text{si } C_{i,j}(t) = C_{i,j}(t+1). \end{cases} \quad (4.4)$$

Además, debido a que el uso de suelo está determinado por las características particulares de la celda (*factores*), un uso de suelo queda definido a través de la existencia o ausencia de un factor mediante la variable ξ .

$$\xi_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el factor existe,} \\ 0 & \text{si el factor no existe.} \end{cases} \quad (4.5)$$

El propósito de describir a las variables τ y ξ de esta manera es para simplificar el estudio local, ya que se considera el mismo análisis independientemente del cambio particular en la celda. El introducir el análisis asumiendo la presencia o ausencia de un factor en una celda en lugar de algún valor continuo para el factor que varía en todas las celdas, nos permite considerar a factores que estén en forma binaria (presencia o ausencia), como la presencia o ausencia de rutas de transporte o algún servicio público, etc.

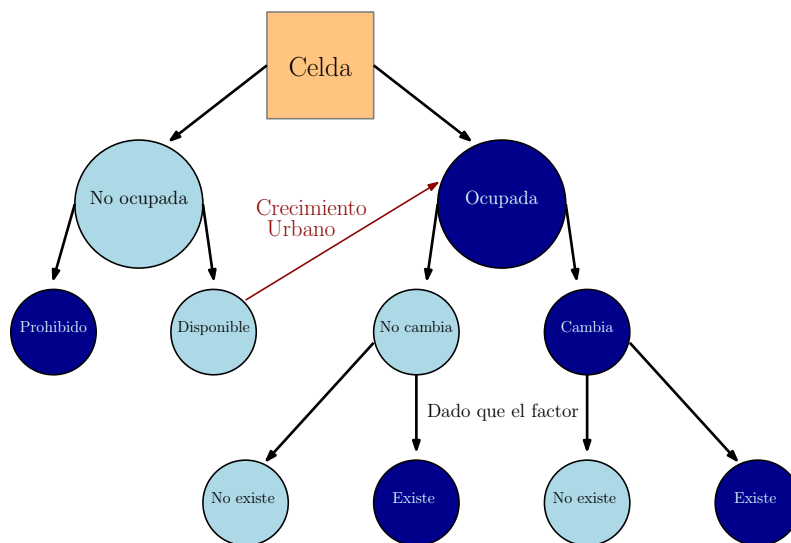


FIGURA 4.3: Proceso de Markov a nivel local del sistema

Asumimos que tenemos una probabilidad a priori $p(\tau = 1)$ para un cambio de uso de suelo k a un uso de suelo l en una celda, y por la cual se puede estimar una probabilidad a posteriori $p(\tau = 1|\xi = 1)$ influenciada por un factor f . Entonces, podemos obtener la probabilidad p de

que ocurra o no la transición en la celda, en función de que exista o no (representado por la variable ξ) un *factor*, mostrando los escenarios posibles para cada celda a través de la siguiente tabla

	$\tau = 0$	$\tau = 1$
$\xi = 0$	$p(\tau = 0, \xi = 0)$	$p(\tau = 1, \xi = 0)$
$\xi = 1$	$p(\tau = 0, \xi = 1)$	$p(\tau = 1, \xi = 1)$

TABLA 4.1: Posibles escenarios para la celda con respecto a un factor.

Partiendo de esta idea, definimos los siguientes dos casos que reflejan evidentemente la importancia del factor en el desarrollo de la celda.

- **Caso 1:** $\tau = 1$ dado que $\xi = 1$ y $\tau = 0$ dado que $\xi = 1$,
- **Caso 2:** $\tau = 1$ dado que $\xi = 0$ y $\tau = 0$ dado que $\xi = 0$.

A lo cual recurrimos al concepto de probabilidad condicional para cada caso. Según el Teorema de Bayes, la probabilidad condicional de que ocurra un cambio dada la existencia del factor se define de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 p(\tau = 1|\xi = 1) &= \frac{p(\tau = 1, \xi = 1)}{p(\xi = 1)}, \\
 &= p(\tau = 1) \frac{p(\xi = 1|\tau = 1)}{p(\xi = 1)},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

que al definir la probabilidad a priori en relación a la existencia o ausencia del factor, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 p(\tau = 1) &= p(\tau = 1 \cap (\xi = 0 \cup \xi = 1)), \\
 &= p(\tau = 1, \xi = 0) + p(\tau = 1, \xi = 1),
 \end{aligned}$$

lo cual es lo mismo que

$$\begin{aligned}
 p(\tau = 1|\xi = 0) + p(\tau = 1|\xi = 1) &= \frac{p(\xi = 1|\tau = 0)}{p(\xi = 0)} p(\tau = 0) + \frac{p(\xi = 1|\tau = 1)}{p(\xi = 1)} p(\tau = 1), \\
 &= \frac{p(\xi = 1|\tau = 0)p(\xi = 0) + p(\xi = 1|\tau = 1)p(\xi = 1)}{p(\xi = 1)}, \\
 &= \frac{p(\xi = 1, \tau = 0) + p(\xi = 1, \tau = 1)}{p(\xi = 1)} = 1.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad condicional de que no suceda un cambio puede ser definida como el complemento de la probabilidad anterior, es decir,

$$\begin{aligned}
 p(\tau = 0|\xi = 1) &= p(\tau = 0) \frac{p(\xi = 1|\tau = 0)}{p(\xi = 1)} \\
 &= \frac{p(\tau = 0, \xi = 1)}{p(\xi = 1)} \\
 &= 1 - p(\tau = 1|\xi = 1)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Es importante mencionar que la probabilidad de cambio está basada en la variable discreta τ , es decir, para decidir si ocurrirá el cambio o no en la celda el valor de la probabilidad depende de que sea superior a un valor crítico I desconocido, convirtiendo a I en una variable aleatoria, razón por la que se recurre al método Montecarlo para tomar dicha decisión.

El método de Montecarlo es un método numérico que depende de variables aleatorias y que consiste en simular valores que tomarán las variables de un proceso, útiles para calcular probabilidades. Su importancia es debida a la existencia de problemas que no pueden ser resueltos exclusivamente de manera analítica o numérica. La diferencia que muestra en relación a otros métodos numéricos que pueden producir una solución aproximada basados en considerar N puntos en un espacio M -dimensional, consiste en que el método de Montecarlo muestra un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{N}}$ donde N es el número de pruebas.

Continuando con el análisis de la probabilidad de cambio en la celda, decimos que la probabilidad condicional representa las proporciones de área como estimaciones de probabilidades. Sin embargo, la no linealidad sigue presente para los valores de f^1 y β_1 . Es por esto que se hace uso del método de pesos de evidencia considerando las ecuaciones (4.6) y (4.7) de la siguiente manera

$$\frac{p(\tau = 1|\xi = 1)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 1)}, \quad (4.8)$$

que es la razón de probabilidades o momios $O(\tau|\xi = 1)$ conocida también como “Odds ratio”. Entonces, para el **caso 1** mencionado anteriormente, la razón de probabilidades se define como sigue

$$O(\tau|\xi = 1) = \frac{p(\tau = 1|\xi = 1)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 1)} = \frac{p(\tau = 1|\xi = 1)}{p(\tau = 0|\xi = 1)}, \quad (4.9)$$

que muestra a la probabilidad de que el cambio ocurrirá o no como una tasa de las proporciones de áreas. Y para el **caso 2** tenemos

$$O(\tau|\xi = 0) = \frac{p(\tau = 1|\xi = 0)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 0)} = \frac{p(\tau = 1|\xi = 0)}{p(\tau = 0|\xi = 0)}. \quad (4.10)$$

Luego, recordando las ecuaciones (4.6) y (4.7) las razones de probabilidades se definen como sigue según el Teorema de Bayes

$$O(\tau|\xi = 1) = \frac{p(\tau = 1) \frac{p(\xi = 1|\tau = 1)}{p(\xi = 1)}}{p(\tau = 0) \frac{p(\xi = 1|\tau = 0)}{p(\xi = 1)}}, \quad (4.11)$$

$$O(\tau|\xi = 1) = \frac{p(\tau = 1|\xi = 1)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 1)} = \frac{p(\tau = 1) p(\xi = 1|\tau = 1)}{p(\tau = 0) p(\xi = 1|\tau = 0)}, \quad (4.12)$$

$$O(\tau|\xi = 0) = \frac{p(\tau = 1) \frac{p(\xi = 0|\tau = 1)}{p(\xi = 0)}}{p(\tau = 0) \frac{p(\xi = 0|\tau = 0)}{p(\xi = 0)}}, \quad (4.13)$$

$$O(\tau|\xi = 0) = \frac{p(\tau = 1|\xi = 0)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 0)} = \frac{p(\tau = 1) p(\xi = 0|\tau = 1)}{p(\tau = 0) p(\xi = 0|\tau = 0)}. \quad (4.14)$$

Las ecuaciones anteriores (4.11) y (4.13) representadas en su forma logarítmica muestran la linealidad de las razones de probabilidad $O(\tau|\xi = 1)$ y $O(\tau|\xi = 0)$, de modo que partiendo de la ecuación (4.11) se aplica el logaritmo natural para obtener a lo que se conoce como *pesos de evidencia* asociado a la existencia o ausencia del factor en la celda, esto es, la variable Y .

$$\log \left(\frac{p(\tau = 1|\xi = 1)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 1)} \right) = \log \left(\frac{p(\tau = 1)}{p(\tau = 0)} \right) + \underbrace{\log \left(\frac{p(\xi = 1|\tau = 1)}{p(\xi = 1|\tau = 0)} \right)}_{\text{peso de evidencia positivo}}, \quad (4.15)$$

$$\log \left(\frac{p(\tau = 1|\xi = 0)}{1 - p(\tau = 1|\xi = 0)} \right) = \log \left(\frac{p(\tau = 1)}{p(\tau = 0)} \right) + \underbrace{\log \left(\frac{p(\xi = 0|\tau = 1)}{p(\xi = 0|\tau = 0)} \right)}_{\text{peso de evidencia negativo}}. \quad (4.16)$$

Éstos se renombran como ω_1^+ y ω_1^- , simplificando las ecuaciones anteriores como sigue

$$\omega_1^+ = \log (O(\tau|\xi = 1)) - \log (O(\tau)) = \log \left(\frac{O(\tau|\xi = 1)}{O(\tau)} \right), \quad (4.17)$$

$$\omega_1^- = \log (O(\tau|\xi = 0)) - \log (O(\tau)) = \log \left(\frac{O(\tau|\xi = 0)}{O(\tau)} \right). \quad (4.18)$$

Las ventajas del método de pesos de evidencia radican en que permiten definir a la probabilidad mediante una regresión logística y la *aleatoriedad* o ruido del sistema queda fuera, por tanto, se obtienen buenos estimadores para los factores. Mediante la escala logarítmica la probabilidad es centrada en 0, es decir, corresponde una probabilidad de 1/2 con valores negativos para las razones de probabilidad menores que 1 y una probabilidad de 1/2 con valores positivos para las razones de probabilidad mayores que 1.

La interpretación de los parámetros es un efecto aditivo en el logaritmo de la razón de los momios para una unidad de cambio en el factor. Considerar el cambio mediante casos a favor en proporción a casos en contra significa que para que ocurra un cambio depende del grado de influencia de algún factor, el cual genera una cierta atracción para que los individuos asienten o eviten asentar en dicha zona.

Varios factores para la transición τ de cambio de uso de suelo

Para generar la diversidad de los usos de suelo como el comercio, la industria, etc., se pueden considerar más factores que influyan a que ocurra el cambio de suelo en la celda utilizando las expresiones (4.17) y (4.18).

Estas ecuaciones dependen fuertemente de considerar a los factores como condicionalmente independientes con respecto al cambio de uso de suelo. En otro caso, si existe fuerte dependencia espacial entre los factores y/o correlaciones entre ellos, este análisis ya no puede ser utilizado. Por lo que asumiendo independencia, podemos escribir la probabilidad condicional como $p(\tau|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_V)$.

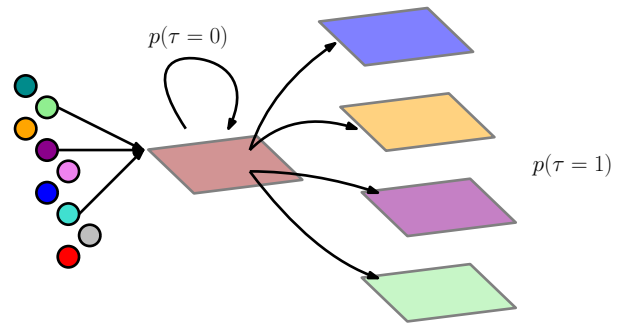
Definimos a $\langle f^v \rangle$, $v = 1, \dots, V$ como el vector de *factores* y $\langle \beta_v \rangle$ al vector de los *coeficientes* de cada factor f^v . Entonces, generalizando las ecuaciones (4.17) y (4.18), los pesos de evidencia positivos y negativos son:

$$\log(O(\tau|\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \dots, \xi_V = 1)) = \log(O(\tau)) + \sum_{v=1}^V \omega_v^+, \quad (4.19)$$

$$\log(O(\tau|\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \dots, \xi_V = 0)) = \log(O(\tau)) + \sum_{v=1}^V \omega_v^-. \quad (4.20)$$

Debido a la independencia de los factores f^v el logaritmo natural de las razones probabilísticas se reduce a la multiplicación de las funciones de distribución de cada uno de ellos.

Nótese que el conjunto Σ conformado por los usos de suelo como los estados posibles de la celda, está asociado a los factores particulares de cada celda, por lo cual, se puede definir una transición particular en la celda de un uso de suelo $C_{i,j}(t) = k$ a un uso de suelo $C_{i,j}(t+1) = l$, ya que cada una de ellas contiene un subconjunto de tales factores que definen su uso de suelo mediante la variable $Y = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_V \rangle$, $Y_v \in \{0, 1\}$.



Entonces, podemos obtener una predicción de cambio con la probabilidad a priori utilizando la ecuación anterior de la siguiente manera:

FIGURA 4.4: Cambio de uso de suelo debido a sus factores particulares. Imagen elaborada en Ipe.

$$\log\left(O(\tau^{kl}|\xi_1 = Y_1, \xi_2 = Y_2, \dots, \xi_V = Y_V)\right) = \log(O(\tau)) + \sum_{v=1}^V \omega_v, \quad (4.21)$$

donde

$$\begin{cases} w_v = w_v^+ & \text{si } Y_v = 1, \\ w_v = w_v^- & \text{si } Y_v = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Así, aplicando la función exponencial en ambos lados de la igualdad en la ecuación (4.21) obtenemos:

$$\frac{p(\tau_{i,j}^{kl}|Y_1, Y_2, \dots, Y_V)}{1 - p(\tau_{i,j}^{kl}|Y_1, Y_2, \dots, Y_V)} = \frac{p(\tau_{i,j}^{kl})}{1 - p(\tau_{i,j}^{kl})} e^{\sum_{v=1}^V \omega_v}. \quad (4.23)$$

Definiendo la razón de la probabilidad condicional

Para justificar la motivación de utilizar el método de los pesos de evidencia como un proceso de Markov, mostraremos a la probabilidad de la variable τ dada la existencia del factor f^1 basándonos en una regresión lineal simple.

Es importante obtener la estimación de β_1 para el factor f^1 . Utilizando la regresión lineal como $\tau = \beta_0 + \beta_1 f^1 + \varepsilon$ se define el valor esperado como

$$E(\tau|\xi = 1) = 0 * p(\tau = 0|\xi = 1) + 1 * p(\tau = 1|\xi = 1) = F(f^1, \beta_1).$$

Luego, podemos expresar que $\tau = E(\tau|\xi = 1) + [\tau - E(\tau|\xi = 1)] = F(f^1, \beta_1) + \varepsilon$. Sin embargo, como la regresión lineal es una función que no está acotada en $[0, 1]$ no puede representar una probabilidad para el proceso; además de que los residuos ε no presentan homocedasticidad, es decir, la varianza de errores no es constante ya que si $\tau = 0$, entonces $\beta_0 + \beta_1 f^1 + \varepsilon = 0$ y la varianza queda determinada como $\varepsilon = -\beta_0 - \beta_1 f^1$, donde $p(\tau = 0|\xi = 1) = 1 - F(f^1, \beta_1)$.

De manera similar ocurre cuando $\tau = 1$, ya que expresado a través de una regresión lineal $\beta_0 + \beta_1 f^1 + \varepsilon = 1$, la variación del error es $1 - \varepsilon = -\beta_0 - \beta_1 f^1$, donde $p(\tau = 1|\xi = 1) = F(f^1, \beta_1)$. Por lo que se requiere una función de distribución que presente a la variación del error constante sea cual fuere el valor que toma f^1 y que además cumpla que

$$\lim_{\beta_1 f^1 \rightarrow \infty} p(\tau = 1|\xi = 1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\beta_1 f^1 \rightarrow -\infty} p(\tau = 1|\xi = 1) = 0.$$

Se realiza entonces la transformación $F(f^1 \beta_1)$ para garantizar que el valor permanezca dentro del intervalo anterior, donde F represente a una función monótona creciente definida en \mathbb{R} y acotada en $[0, 1]$. Entonces, la probabilidad condicional se expresa mediante una transformación $p(\tau = 1|\xi = 1) = p(I \leq f^1) = F(f^1, \beta_1)$ donde F es la función de distribución de la variable aleatoria $I_{i,j}$, y que por la simetría se tiene para el complemento que $p(\tau = 0|\xi = 1) = 1 - F(f^1, \beta_1)$.

Suponemos que la probabilidad de que ocurra el cambio en la celda dados sus factores es

$$p(\tau = 1|\xi_v) = \frac{1}{1 + e^{-z}}, \quad (4.24)$$

que al sustituir en la ecuación (4.15) observamos que

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{p(\tau = 1|\xi_v)}{1 - p(\tau = 1|\xi_v)} \right) &= \log(O(\tau|\xi_v)) = \log \left(\frac{\frac{1}{1 + e^{-z}}}{1 - \frac{1}{1 + e^{-z}}} \right), \\ &= \log \left(\frac{\frac{1}{1 + e^{-z}}}{\frac{1 + e^{-z} - 1}{1 + e^{-z}}} \right), \\ &= \log \left(\frac{1 + e^{-z}}{(1 + e^{-z})(e^{-z})} \right), \\ &= \log \frac{1}{e^{-z}}, \\ &= \log(O(\tau|\xi_v)) = z, \end{aligned}$$

donde $z = \beta_1 f^1 + \dots + \beta_r f^r$. Esto muestra que mediante la transformación de la distribución se obtiene una regresión logística que mantiene la linealidad del sistema a distinta escala.

Después de haber definido las razones de probabilidad condicional de manera lineal en escala logarítmica, utilizamos la ecuación (4.23) para simplificar la expresión como:

$$p(\tau_{i,j}^{kl} | Y_1, Y_2, \dots, Y_V) = \frac{\frac{p(\tau_{i,j}^{kl})}{1 - p(\tau_{i,j}^{kl})} e^{\sum_{v=1}^V \omega_v}}{1 + \frac{p(\tau_{i,j}^{kl})}{1 - p(\tau_{i,j}^{kl})} e^{\sum_{v=1}^V \omega_v}}, \quad (4.25)$$

debido a la simetría de la distribución. Finalmente, al obtener la recursión del cálculo de las probabilidades de acuerdo a la combinación lineal de sus factores, generalizamos la probabilidad de transición específica de cada celda renombrada como $\mathbf{p}_{i,j}^{(t)}(l|k)$ que se define de la siguiente manera

$$\mathbf{p}_{i,j}^{(t)}(l|k) = \Psi \left(\frac{P^{(t)}(l|k)}{1 - P^{(t)}(l|k)} \right) e^{\sum_{v=1}^V \omega_v}, \quad (4.26)$$

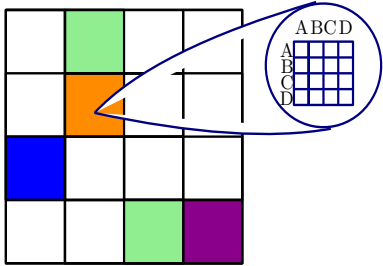


FIGURA 4.5: Matriz generada en la celda por los posibles cambios de usos de suelo. Imágen elaborada en Ipe.

donde Ψ es una constante de normalización y $P^{(t)}(l|k)$ es la probabilidad a priori de la transición del uso de suelo k a l en el tiempo t a $t + 1$ para el sistema global definida en la ecuación (4.2).

4.3 Acoplamiento del sistema espacio temporal con autómatas celulares

La *interacción* entre los suelos vecinos es un aspecto importante en la dinámica. Esto está basado en modelos de poblaciones interactuantes, donde la desición de cambio depende de cuán fuerte se asocian las características de los individuos con la mayoría predominante, lo cual después de un periodo de tiempo, la proporción de que ocurran los cambios por los individuos puede mostrar una distribución bimodal [27] permitiendo observar ciertos fenómenos de forma global.

En la teoría de la complejidad se muestra que a pesar de que se comprendieran muy bien los factores que inciden de forma individual, no es suficiente para predecir un comportamiento global [27]. Basándonos en esta cuestión, analizamos a los usos de suelo como poblaciones distintas, donde cada celda decidirá si cambiar o no dependiendo de cómo se asocia su susceptibilidad con respecto a la mayoría predominante de celdas distintas en su entorno local.

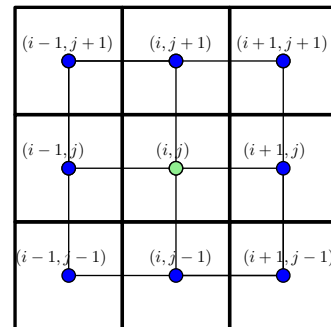


FIGURA 4.6: Vecindad de Moore. Imágen elaborada en Ipe.

Por esta razón, la probabilidad expuesta anteriormente en la ecuación (4.27) requiere modificarse de modo que la estructura y la dinámica global

del sistema esté determinada por el acoplamiento de las dos dinámicas elementales: la local según los factores predominantes de cada celda central, y la dinámica global basada en la asociación de la vecindad de Moore $\kappa_{i,j}$ a la celda. Esto significa que mientras mayor sea la cantidad de celdas vecinas distintas a ella más influencia tendrá la celda para cambiar al uso de suelo predominante en su vecindad.

Es importante mencionar que según la dinámica del proceso de urbanización, las transiciones en el uso de suelo ocurren principalmente en la periferia y los pequeños asentamientos urbanos actúan como “semillas de crecimiento” [2]. Por ello, la dirección espacial del crecimiento urbano se desempeña a través de una condición que recibe el autómata. Ésta condición consiste en reconocer aquellas celdas que pertenezcan a la frontera, donde por frontera se entiende al conjunto de todas las celdas con distinto uso de suelo a cada celda central asociada. Quiere decir que cada celda con uso de suelo l tiene asociado un conjunto de celdas fronterizas que no contienen ese uso de suelo, es decir, aquellas que tienen un uso del suelo $k \neq l$.

En consecuencia, se calculan las probabilidades a posteriori y se eligen transiciones apropiadas del conjunto reducido de celdas que son potencialmente sujetas a conversión al uso de suelo l . Luego, después de identificar el conjunto frontera de celdas, la probabilidad de transición del uso de suelo k a l se pondera de acuerdo a la cantidad de celdas en la vecindad de Moore correspondiente.

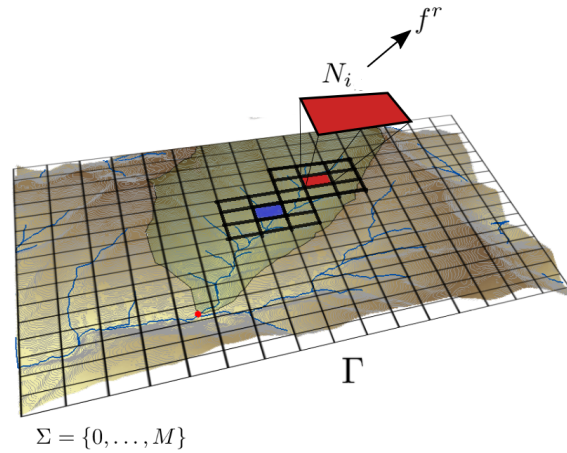


FIGURA 4.7: Asignación de la vecindad a su celda central. Imágen modificada en Ipe.

Entonces, la probabilidad de transición en la celda se define finalmente como:

$$\mathbf{p}_{i,j}^{(t)}(l|k) = \frac{1}{8} \left(\sum_{\substack{(x,y) \in \kappa, \\ (x,y) \neq (i,j)}} n_{x,y}^l(t) \right) \Psi \left(\frac{P^{(t)}(l|k)}{1 - P^{(t)}(l|k)} \right) e^{\sum_{v=1}^V \omega_v}, \quad (4.27)$$

donde Ψ es una constante de normalización y

$$n_{x,y}^l(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{x,y}(t) = l, \\ 0 & \text{si } C_{x,y}(t) \neq l, \end{cases} \quad (4.28)$$

por lo que $\sum_{\substack{(x,y) \in \kappa, \\ (x,y) \neq (i,j)}} n_{x,y}^l(t)$ es la cantidad de celdas con posición (x,y) que tienen distinto uso de suelo respecto a la celda central con la posición (i,j) en la vecindad de Moore κ .

Capítulo 5

Simulación. Mancha urbana de la ciudad de Monterrey

Mostraremos el tipo de distribuciones que se pueden generar con este tipo de modelos, tomando en cuenta distintas condiciones iniciales y haciendo variar los parámetros de control. Nuestra intención es utilizar estos modelos como herramientas para evaluar la importancia de factores en la conformación espacial de zonas urbanas. Este será obviamente un primer abordaje a este tipo de problemas y un desarrollo de tales herramientas.

Como aplicación para el autómatas, se utiliza la mancha urbana en el estado de Nuevo León. El estado de Nuevo León tiene las coordenadas extremas, al norte 27.49° , al sur 23.11° de latitud norte; al este 98.26° , al oeste 101.14° de longitud este. Monterrey fue una de las ciudades con mayor industrialización en México después de la Segunda Guerra Mundial y su industria se consideraba básica por considerarse principalmente exportadora a distinto nivel. Esta expansión económica implica mayor demanda de población y de beneficios en el traslado, generando mayor tasas de migración, y generando mayor demanda de suelo disponible e infraestructura como conexiones hacia el núcleo urbano.

Se considera que gran parte de este proceso comienza en los años cuarenta [42] y que su población pasa de ser un poco más de 200 mil habitantes a 3 millones de habitantes entre los años cuarentas y noventas.

Como consecuencia, para 1940 Monterrey registró un crecimiento poblacional considerable, obligando a acelerar principalmente hacia el norte (Guadalupe y San Nicolás de los Garza) la construcción de casas habitación que alcanzó las zonas industriales y diversificó su estructura económica en distintos niveles.

El proceso de expansión poblacional y territorial de la ZMM comenzó en los años cuarenta, es debido principalmente a la fuerte urbanización e industrialización que ocurrió en el país y



FIGURA 5.1: Tendencia de crecimiento poblacional en Nuevo León. Fuente INEGI

en particular, Monterrey se convierte en un lugar de atracción demográfica, incrementando la población hasta 17 veces y extendiendo la zona hasta nueve municipios.

La Zona Metropolitana de Monterrey (ZMM) está compuesta principalmente por Monterrey y once municipios más, que son San Pedro Garza García, San Nicolás de los Garza, Monterrey, Santiago, Guadalupe, Apodaca, Cadereyta Jiménez, Santa Catarina, Ciudad General Escobedo, Garza García, Juárez y Salinas Victoria.

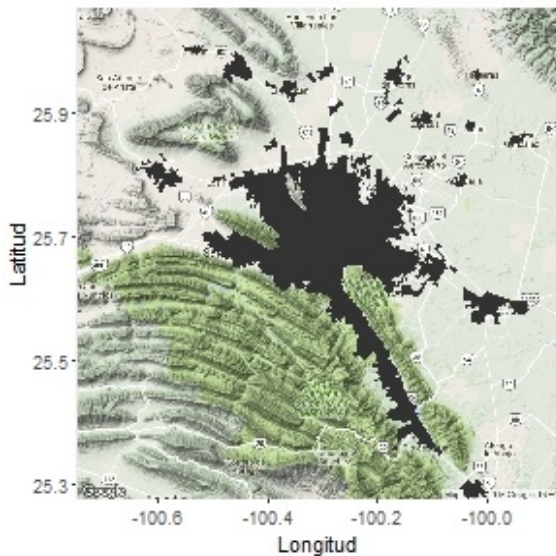


FIGURA 5.2: Mediante el archivo .shp se muestra la zona urbana de Monterrey referenciada a su longitud y latitud en color gris. Elaborada en R. Fuente: INEGI

En particular, el Municipio de Monterrey está rodeado de cerros y sierras muy importantes; Sierra de las Mitras, Cerro del Obispaño, Sierra de La Silla (que en el extremo norte está el Cerro de la Silla), Cerro de El Mirador, Loma Larga y La Campana, Cerro del Topo Chico, Sierra Madre Oriental, Siete Cerritos, principalmente. Además cuenta con ríos como el Río Santa Catarina, que surge en la Sierra Madre Oriental y continúa hasta el Cañón de La Huasteca.

Para mostrar primeramente la mancha urbana de la ZMM se han utilizado los archivos de formato .shp que almacena INEGI, para que a través de librerías como **rgdal**, **raster**, **dplyr** y **ggmap** de lenguaje de programación **RStudio. Versión 1.0.136**, se construya un algoritmo que genera una malla que divide en distintos tamaños (desde zoom nivel 7: 100×100 hasta zoom nivel 1: 4500×4500) la siguiente imagen.

En la siguiente imagen se muestran los niveles de elevación en escala de grises. Ésta es utilizada para la simulación del autómatas donde el proceso se lleva a cabo considerando aquellas celdas que están por debajo de una pendiente de inclinación del 45%. Consideremos el espacio de configuraciones como el conjunto de todos los arreglos en una malla regular de $N \times N = 500 \times 500$, que representan el territorio de la ciudad de Monterrey.

Entonces, dada una cantidad de iteraciones $T = 100$, tenemos que para cada tiempo $t \in \mathbb{N}$ la configuración del territorio es una asignación de uso de suelo, donde como caso particular se tienen los usos de suelo D, S, C, V y I que representan los suelos Disponibles, Servicios, Comerciales, Vivienda e Industria.

Según el Directorio Estadístico Nacional de Unidades Económicas, se obtuvo la referencia geográfica de 1,139 unidades industriales, 137,238 unidades de comercio al por menor y comercio al por mayor y 726 de servicios educativos, servicios de salud y asistencia social y



FIGURA 5.3: Elevación en escala de grises. Elaborada en R. Fuente: INEGI

servicios profesionales, científicos y técnicos. Las densidades de cada uno de ellos se muestran en las siguientes imágenes de formato .shp.

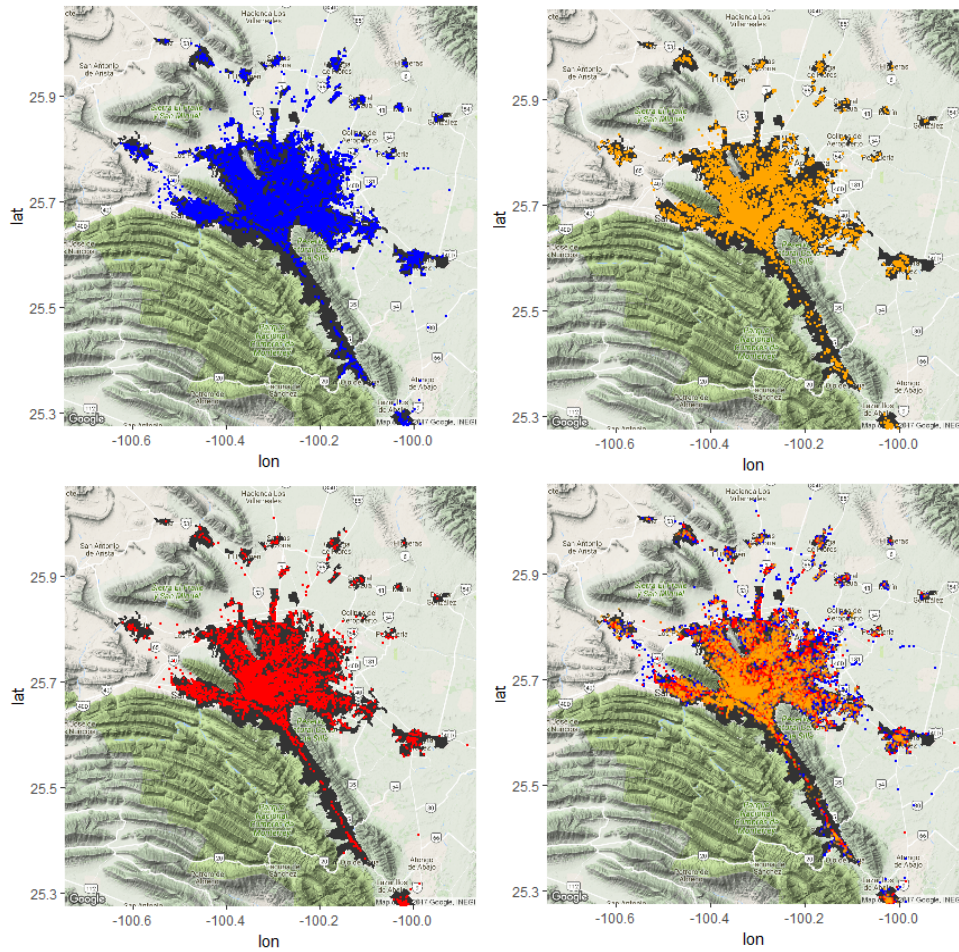


FIGURA 5.4: Mapas elaborados en R con archivos .shp. En color azul se muestra la densidad de las unidades industriales, en color amarillo es la densidad de los servicios y en color rojo la densidad de las unidades comerciales. Fuente: INEGI

La ZMM tiene una gran atracción por la gran concentración de la actividad económica y por la poca disponibilidad de empleo en el resto del Estado. Gran parte de la Población económicamente activa (PEA) se encuentra en el sector terciario y entre ellos destacan las unidades de servicios.

Entidad	PEA	Pob. Ocupada	Tasa Ocupación	Pob. Desocup.	Tasa Desocup.
Nuevo León	1,956,106	1,871,119	95.66	84,987	4.34
AMM	1,681,513	1,606,663	95.55	74,850	4.45
Monterrey	488,181	465,522	95.36	22,659	4.64

TABLA 5.1: Fuente: Secretaria de Desarrollo Urbano y Ecología e Instituto Municipal de Planeación Urbana y Convivencia de Monterrey, basado en el Censo General de Población y Vivienda 2010. INEGI.

Algunos resultados que se obtienen también del INEGI con respecto al crecimiento de la vivienda se muestran en las siguientes gráficas

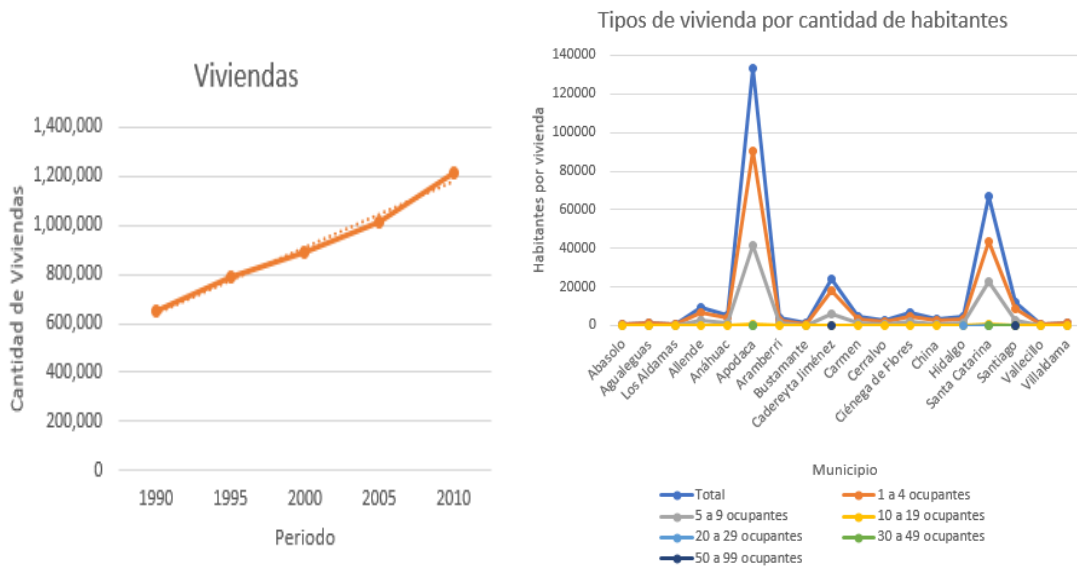


FIGURA 5.5: Crecimiento de viviendas en el estado de Nuevo León y clasificación de ellas por cantidad de habitantes. Fuente: INEGI

Una vez que se elige el sitio (i, j) , la transición de un uso de suelo k al uso de suelo l se realiza con una probabilidad que está sujeta a ciertas restricciones locales (la calidad del terreno y la configuración local de usos de suelo). Entonces, para cada uso de suelo está definido un vector asociado con la presencia o ausencia de los factores f^1 , f^2 y f^3 mostrado en la tabla siguiente

Suelo	P	D	S	C	D	V	I
Etiqueta	0	1	2	3	4	5	6
f^1	0	1	0	1	0	1	0
f^2	0	0	1	1	0	0	1
f^3	0	0	0	0	1	1	1

TABLA 5.2: Determinación del uso de suelo según los factores.

En este caso, consideramos que sólo las siguientes transiciones son posibles:

$$\begin{aligned}
 D &\mapsto D, S, C, V, I \\
 S &\mapsto S, C, V, I \\
 C &\mapsto C, V, I \\
 V &\mapsto V, I \\
 I &\mapsto I
 \end{aligned}$$

Considerando lo anterior, la descomposición de los factores genera la siguiente imagen

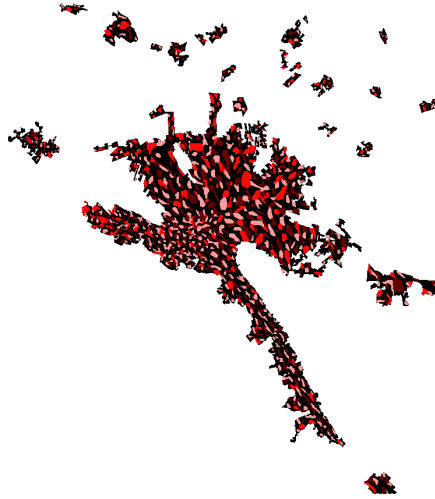


FIGURA 5.6: Mapa formato .shp elaborado en R para la clasificación de usos de suelos. En color gris oscuro se encuentra la concentración de vivienda, en color rojo la industria, en color rosa los servicios y en color beige el comercio. Fuente: INEGI

Como el proceso es una cadena de Markov, el sitio elegido y el cambio de uso de suelo efectuado para dicho sitio se escogen de forma aleatoria, de acuerdo a una distribución que depende de la configuración $S_t = \{C_{i,j}(t)\}$. La configuración al tiempo $t+1$, S_{t+1} , depende de la configuración a tiempo t , S_t , para el cálculo de la probabilidad a posteriori, ya que en cada paso de tiempo, la celda con posición (i, j) modifica el uso de suelo que se le ha asignado.

Se define la matriz $P^{(t=0)}$ de probabilidades iniciales para el proceso como sigue:

$$P^{(t=0)} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.2 & 0.15 & 0.15 \\ 0 & 0.3 & 0.25 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.35 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.46 & 0.54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Entonces, la dinámica del sistema queda determinada por las probabilidades iniciales de esas transiciones para cada sitio (i, j) en la cuadrícula. La probabilidad de transición de acuerdo a la ecuación (4.26) se calcula analizando principalmente el vector de factores en la posición (i, j) y a sus celdas vecinas distintas en el tiempo actual, considerando también la proporción de celdas que cambiaron en el tiempo t a $t + 1$ de manera global.

Como datos iniciales se requiere la matriz de pesos de evidencia $\omega_{i,j}^{(t=0)}$ y la matriz $\{A_{k,l}\}^{(t=0)}$ que representa la cantidad de celdas que cambió de tipo de suelo k al tipo de suelo l .

Nota: Los pesos de evidencia iniciales $\omega_{i,j}^{(t=0)}$ se calculan con la misma ecuación (5.3) mostrada en el paso 6 del algoritmo comúnmente utilizando dos mapas históricos de una mancha urbana en modo raster para obtener las proporciones iniciales de cambio de uso de suelo $P^{t=0}(l|k)$.

La configuración de la vecindad del sitio (i, j) afecta la probabilidad a través de $Q_{i,j}^l(t)$, que no es mas que la proporción de primeros vecinos de ese sitio en los que el uso de suelo es de tipo l . Con esto se da mayor probabilidad a cambios de uso de suelo que tienden a homogeneizar localmente la configuración de usos de suelo. Los parámetros $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_3 \geq 0$ sirven para modificar la importancia relativa de cada factor.

Con esto podemos determinar la probabilidad de transición

$$\mathbf{p}_{i,j}^t(l|k) = \left[\frac{Q_{i,j}^l(t)}{8} \right] \Psi \left[\frac{P^t(l|k)}{1 - P^t(l|k)} \right] e^{\omega_{i,j}^t}, \quad (5.1)$$

para pasar de una configuración k en el tiempo t a una configuración l en $t + 1$.

La vecindad que tomamos es la vecindad de Moore, que considera a los ocho vecinos en la cuadrícula de un sitio dado, y al sitio mismo. La presencia o ausencia de factores para cada uso de suelo se fija desde un principio y no cambia en el tiempo. Las condiciones en la frontera son tales que el suelo en el perímetro de la cuadrícula es de tipo P en todo tiempo. Este suelo también se ubica en todas aquellas celdas donde el desarrollo no puede ocurrir, según la imagen en escala de grises para las distintas elevaciones.

A continuación se muestran los pasos de la simulación:

1. Se inicializa el tiempo en $t = 0$.
2. Dada la matriz de pesos $\omega_{i,j}^t$ y la matriz $P^t(l|k)$ que representa las proporciones de cambio de uso de suelo del tipo k al tipo l se calcula la probabilidad para $t + 1$ como:

$$\mathbf{p}_{i,j}^t(l|k) = \left[\frac{Q_{i,j}^l(t)}{8} \right] \Psi \left[\frac{P^t(l|k)}{1 - P^t(l|k)} \right] e^{\omega_{i,j}^t}, \quad (5.2)$$

donde:

- k es el uso de suelo en la célula (i, j) al tiempo t .
 - l es el uso de suelo posible para la célula (i, j) al tiempo $t + 1$.
 - $Q_{i,j}^l(t)$ es la cantidad de vecinos de tipo l en la vecindad de la célula (i, j) sin contar la célula central al tiempo t .
 - Ψ es parámetro de normalización.
3. Después el estado al que se cambiará la célula se determina de manera aleatoria por el método Montecarlo.
 - Se inicializa la matriz $\{A_{k,l}\}^{(t+1)} = \mathcal{O}$ que se encarga de almacenar la cantidad de celdas de cada tipo k que cambian a tipo l .
 - Se genera una matriz $X_{i,j}$ de valores aleatorios uniformes continuos.
 - Para cada célula con posición (i, j) se consideran los intervalos $I_{i,j}^l = \left[\frac{\sum_{m=0}^l \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}(l|k)}{\sum_{m=0}^M \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}(l|k)} \right]$
 - Entonces, el tipo k en la posición (i, j) pasa a ser de tipo l , es decir, $C_{i,j}(t + 1) = l$ (que es la representación del uso de suelo l con la combinación binaria de los factores), si $I_{i,j}^{l-1} < X_{i,j} < I_{i,j}^l$, donde $I_{i,j}^{-1} = 0$.
 - Finalmente se registra este resultado en la matriz $\{A_{k,l}\}^{(t+1)}$, es decir, $A_{k,l}^{(t+1)} = A_{k,l}^{(t)} + 1$

4. Luego para generar la matriz $P^{t+1}(l|k)$ se normaliza por filas a la matriz $A_{k,l}^{(t+1)}$, es decir,

$$P^{t+1}(l|k) = \frac{A_{k,l}^{(t+1)}}{\sum_{k=0}^M A_{k,l}^{(t+1)}}, \text{ donde } M + 1 \text{ es la cantidad de usos de suelo.}$$

5. Ahora para actualizar la matriz de los factores $f_{i,j}^s(t + 1)$ se representa el uso de suelo $C_{i,j}(t + 1)$ en su notación binaria, es decir, $C_{i,j}(t + 1) = 4 * r_{i,j}^1 + 2 * r_{i,j}^2 + r_{i,j}^3$ y entonces $f_{i,j}^s(t + 1) = r_{i,j}^s$ donde $s \in \{1, 2, 3\}$.

6. Luego se calcula el peso de evidencia $\omega_{i,j}^{t+1}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{t+1} &= z_{i,j} - \log \left(\frac{P^{t+1}(l|k)}{1 - P^{t+1}(l|k)} \right) \\ &= \sum_{s=1}^3 \beta_s f_{i,j}^s(t + 1) - \log \left(\frac{P^{t+1}(l|k)}{1 - P^{t+1}(l|k)} \right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde:

- k es el uso de suelo en la célula con posición (i, j) al tiempo t .
- l es el uso de suelo posible para la célula con posición (i, j) al tiempo $t + 1$.

7. Para el siguiente paso $t = t + 1$, si $t \leq T$, se termina entonces el proceso, en caso contrario, volver al paso 2.

Resultados de la simulación

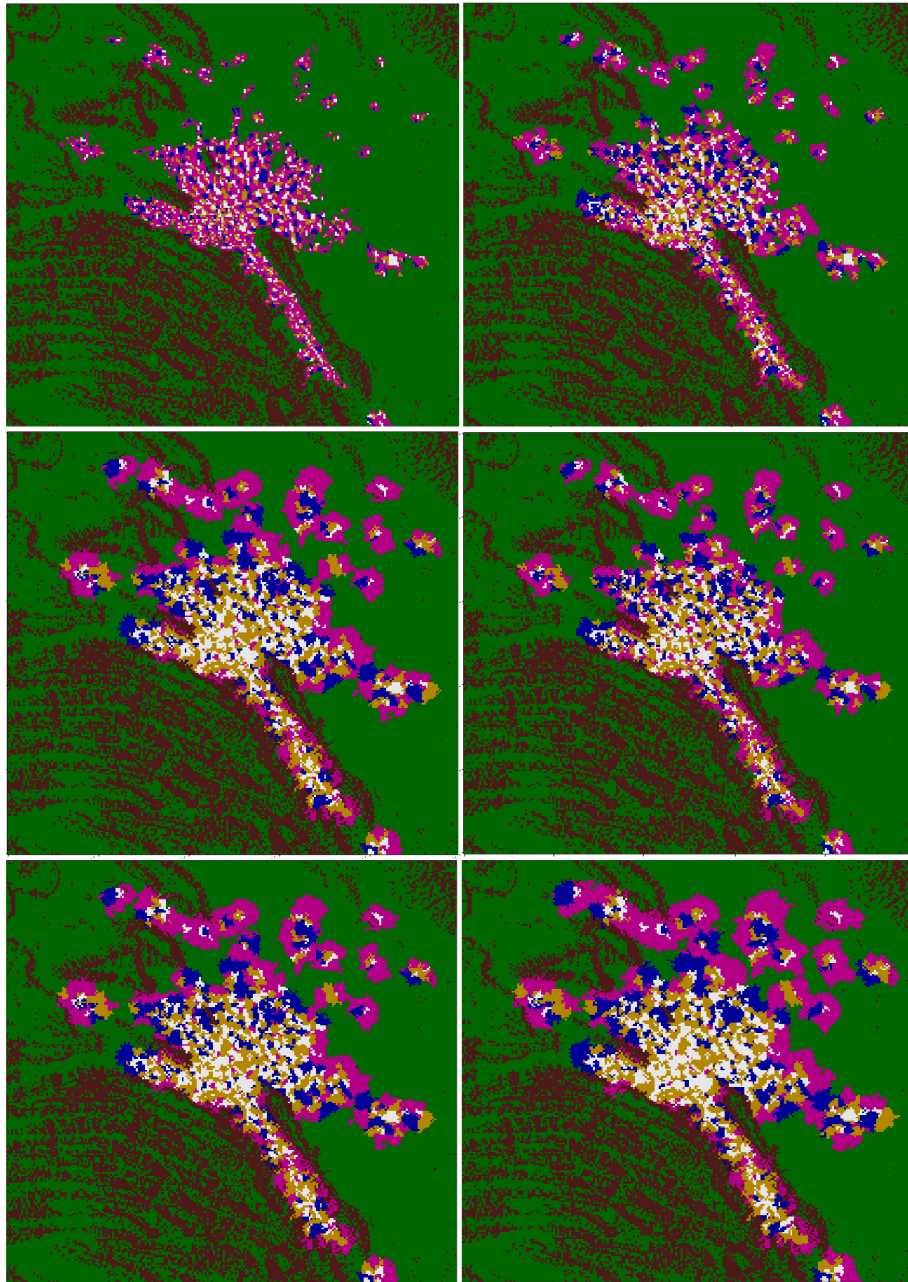


FIGURA 5.7: Predicción de las zonas de crecimiento y usos de suelo. Simulaciones realizadas en RStudio para tiempos $t = 5, 10, 15, 20, 30, 50, 75, 100$.

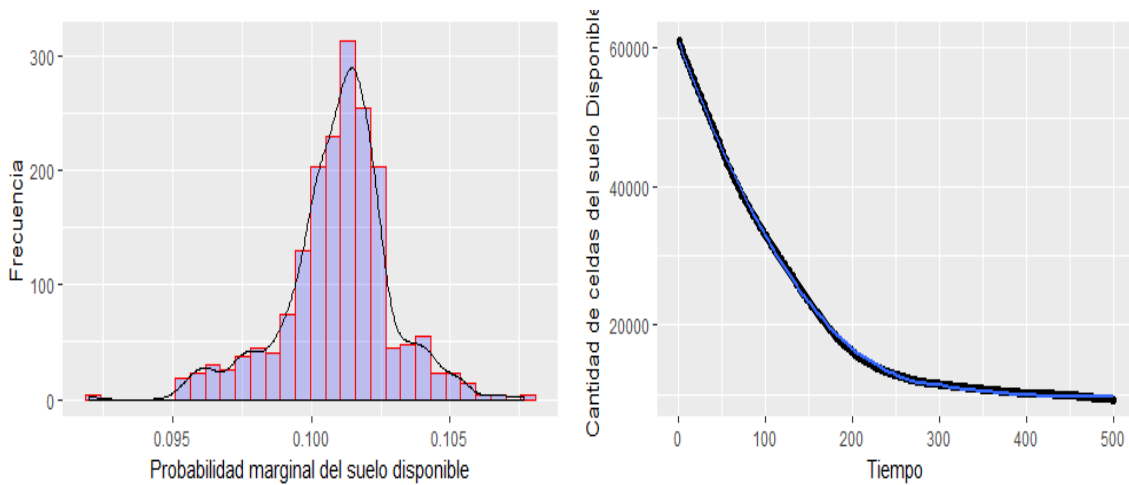


FIGURA 5.8: Probabilidad marginal del uso de suelo Disponible D y la distribución de celdas en cada tiempo t .

En la primera gráfica se muestra la probabilidad conjunta del uso de suelo **Disponible, D**. Se observa que la probabilidad conjunta oscila entre cierto valor, pero además, las oscilaciones bajan en promedio y en variación. Debido también a que es un sistema cerrado, la cantidad de celdas con ese uso de suelo va disminuyendo, según muestra la segunda gráfica.

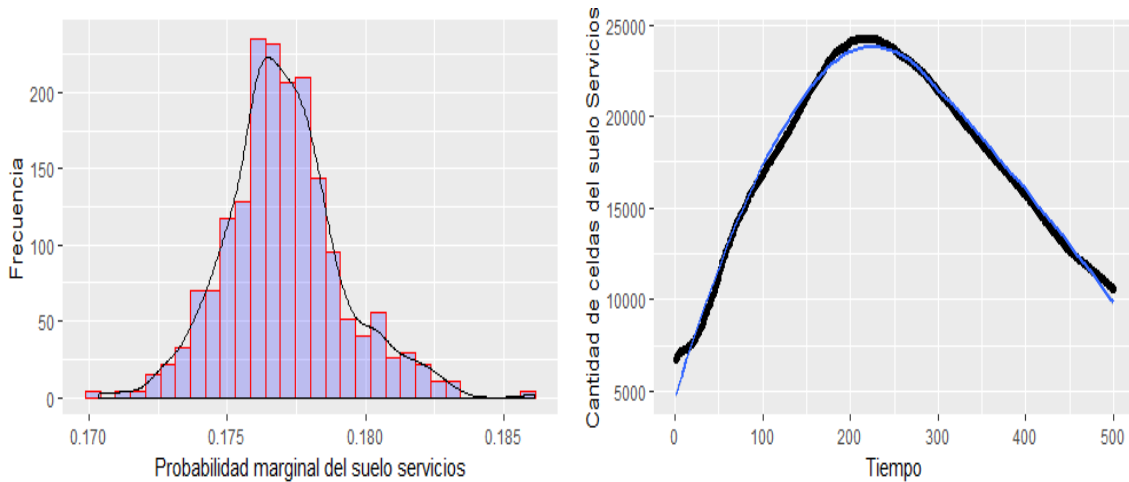


FIGURA 5.9: Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Servicios, S en cada tiempo t .

En la primera gráfica se muestra la probabilidad conjunta del uso de suelo **Servicios, S** donde se observa que hay una tendencia creciente de la probabilidad conjunta. Sin embargo, en la gráfica cantidad de celdas se muestra una cierta tendencia alrededor del valor 500, debido a que a partir de cierto tiempo las celdas con uso de suelo de Servicios ya no cambian.

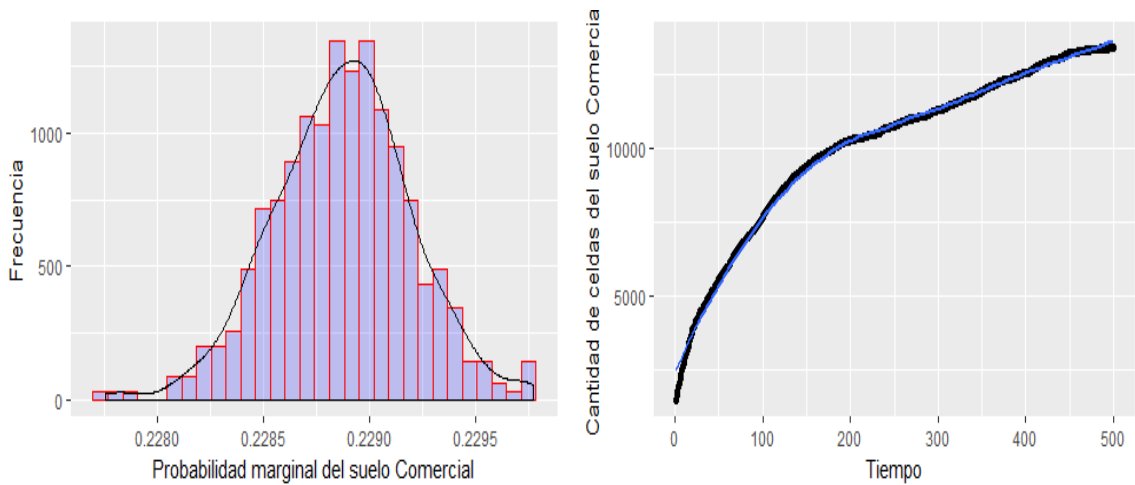


FIGURA 5.10: Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Comercial, C en cada tiempo t .

En la primera gráfica se muestra la probabilidad conjunta del uso de suelo **Comercial** que representa a partir del tiempo $t = 28$ un panorama de estacionalidad, que en conjunto con la gráfica de cantidad de celdas significa que la conversión del suelo disponible a comercial deja de suceder debido a la dirección del proceso.

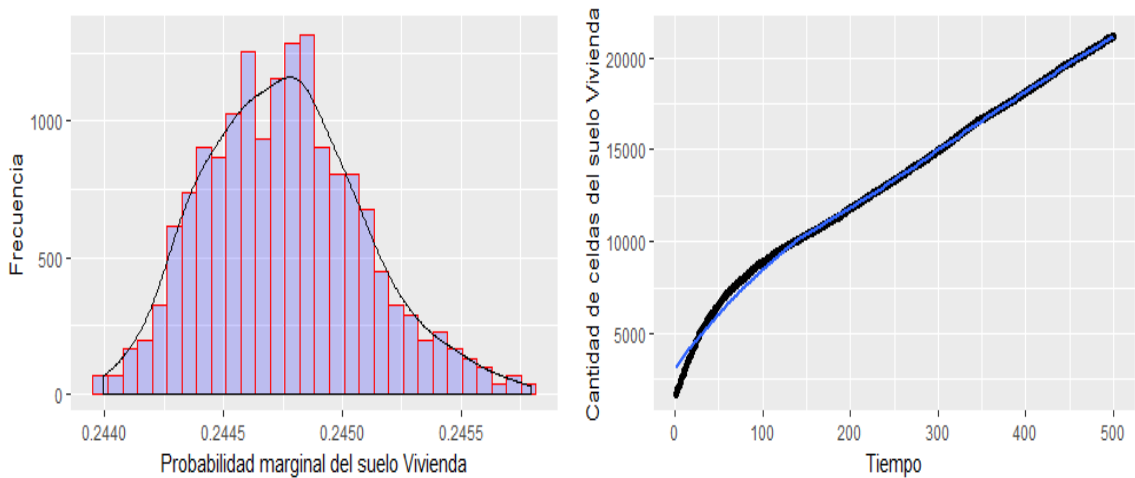


FIGURA 5.11: Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Vivienda, V en cada tiempo t .

De manera similar que las dos gráficas anteriores, en la primera gráfica se muestra la probabilidad conjunta del uso de suelo **Vivienda** que representa a partir del tiempo $t = 37$ un panorama de estacionalidad, que en conjunto con la gráfica de cantidad de celdas significa que la conversión del suelo disponible a vivienda deja de suceder debido a la dirección del proceso.

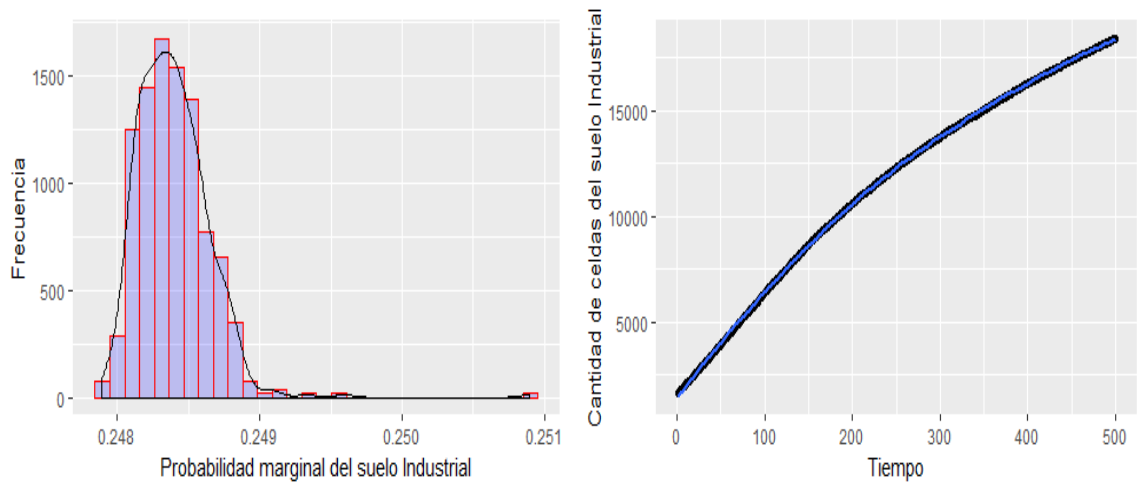


FIGURA 5.12: Probabilidad conjunta del uso de suelo y distribución de celdas Industrial, I en cada tiempo t .

En la primera gráfica se muestra la probabilidad conjunta del uso de suelo **Industrial** donde se observa gran cantidad de ruido, pero mostrando una tendencia estacionaria. Sin embargo, debido a que es considerado como un sistema cerrado, la cantidad de celdas va disminuyendo.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

El crecimiento (o disminución) de la población es una característica sociológicamente significativa, ya que condiciona el futuro y la organización funcional y física de la ciudad. Aunado a esto, está el hecho de considerar a las ciudades como consumidoras, declarando usos de suelo y valores de la tierra en relación al funcionamiento y accesibilidad de los servicios básicos. Sin embargo, desde una perspectiva ecológica e inclusive política, el urbanismo incentiva a analizar las ciudades de manera que ayude a tomar mejores decisiones en la planificación urbana.

Debido a que el comportamiento de tales sistemas representa un difícil problema en el análisis, el propósito principal consiste en construir algoritmos y modelar dinámicas del crecimiento de ciudades de manera simple. Utilizar herramientas de sencilla elaboración computacional como los autómatas celulares permiten aportar un análisis no solo temporal, sino espacial de sistemas complejos fortaleciendo el desarrollo de la investigación mediante la simulación.

Como trabajo a futuro, se considera realizar un análisis estadístico para la identificación de las variables espaciales, las cuales pueden ser económicas (como el nivel de ingreso por vivienda), sociales (como la cantidad de población, vivienda, proporción de áreas verdes, etc.) y geográficas (como las curvas de nivel, ríos, montañas, etc). Además, se pueden considerar nuevos supuestos para la modelación de este tipo de sistemas que permitan representar otro tipo de fenómenos vistos en las ciudades, tales como la reconstrucción de los núcleos urbanos o el comportamiento particular de los individuos como la *segregación*.

Apéndice A

Autómatas celulares

Este capítulo tiene como propósito introducir los elementos principales de los autómatas celulares para describir su funcionamiento espacio temporal partiendo de la clasificación de los sistemas dinámicos. Luego, se muestran dos ejemplos que ayuden a comprender la asociación de la dinámica de un proceso espacial para autómatas de una y dos dimensiones. Finalmente, se menciona la clasificación de los autómatas según Wolfram para representar la complejidad de un sistema.

¿Qué son los sistemas dinámicos?

Cuando observamos un fenómeno ya sea físico, químico o social, realmente lo que muchas veces obtenemos es una respuesta o resultado del proceso. Esto involucra un cambio que posiblemente refleje un resultado similar en otro tiempo bajo supuestos que ya establecidos describan la funcionalidad primordial de un sistema.

Definimos a un sistema dinámico como la representación de un proceso donde sus parámetros cambian respecto a variables en el tiempo continuo o discreto, mostrando así, la evolución de su dinámica en relación con ciertas variables ya sean exógenas (donde el sistema no las provoca pero le afectan) o endógenas (que el sistema provoca y además le afectan).

Sistema	Tiempo	Espacio	Variable
Ecuaciones Dif. Parciales	Continuo	Continuo	Continuo
Ecuaciones Dif. Acopladas	Continuo	Discreto	Continuo
Mapas discretos	Discreto	Discreto	Continuo
Autómatas Celulares	Discreto	Discreto	Discreto

TABLA A.1: Descripción de los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos también pueden ser lineales o no lineales. Si a un sistema dinámico continuo lo representamos como $\frac{dx}{dt} = F(x)$, decimos que es lineal si $F(ax+by) = aF(x)+bF(y)$, es decir, es lineal si F cumple con el principio de superposición.

Las técnicas utilizadas comúnmente para resolverlos son la transformada de Laplace, la transformada de Fourier, el principio de superposición, etc. Pero si la ecuación no se cumple decimos que es un sistema no lineal que se comporta de forma complicada e impredecible y por lo

tanto conlleva gran dificultad el obtener su solución de modo que requieren inclusive de técnicas geométricas para su análisis.

También se dividen en autónomos si $x' = F(x)$ o no autónomos si $x' = F(x, t)$ lo que significa que tiene una variable externa que fuerza el comportamiento natural del sistema. Podemos representar el comportamiento de las variables en forma de series de tiempo o en forma de espacio fase que contiene todos los estados posibles del sistema.

El espacio fase el cual es descrito por el campo vectorial F representa el recorrido de las variables en el tiempo; el recorrido es llamado *trayectoria*. Cuando una singularidad del espacio fase ocasiona que una trayectoria se acerque a él conforme avanza el tiempo se dice que es estable, sumidero o atractor. En el caso contrario, cuando la trayectoria que inicia cerca de él se aleja se le llama inestable, repulsor o fuente. Dependiendo si el sistema es lineal las singularidades representan a puntos mientras que para los no lineales pueden ser puntos, ciclos o atractores que ayudan a determinar la estabilidad del sistema.

Por consiguiente, un concepto primordial en los sistemas dinámicos es el de *equilibrio*. Se define al equilibrio como un estado en donde una o más variables no cambian en un periodo de tiempo, y al desequilibrio o fuera del equilibrio cuando las variables están cambiando a distintas tasas y su impacto es en distintas escalas espaciales y temporales. Esto genera discontinuidades que son asociadas directamente a umbrales los cuales definen un cambio de estado. La *transición de fase* es un cambio en el sistema entero que afecta a las cualidades físicas, por ejemplo el efecto de la temperatura en un líquido puede ocasionar que su fase cambie de líquido a gas.

Procesos temporales y espaciales

Cuando observamos cual es la relación causal de las variables que influyen entre sí se puede obtener una sucesión de dichas variables aleatorias que determinan los estados del sistema acorde a cierto parámetro a través del tiempo. A esta sucesión se le llama serie de tiempo.

Si tenemos una posición particular donde se lleva a cabo el proceso, podemos hacer uso de series de tiempo para describir esa posición particular construyendo de esta manera la evolución del sistema a través del efecto de las variables. Esto introduce conceptos clave como la escala que permite observar el fenómeno con cierto nivel de resolución cuando consideramos varias posiciones, ya que no solo se tomaría en cuenta a la serie individual si no cómo se comporta ésta en relación a las demás.

Preliminares

Hemos dicho que los modelos matemáticos ayudan a representar el fenómeno de forma cuantitativa y cualitativa ya sea utilizando series de tiempo o espacios fase y por otro lado, hablado un poco sobre la complejidad que presentan algunos sistemas.

Actualmente se cuenta con el cómputo para procesar grandes cantidades de información inclusive a tiempo real, lo cual, al adjuntarlo con las ideas anteriores, grandes científicos han sido motivados a comprender los mecanismos y cualidades de los procesos complejos de manera simple desarrollando herramientas que puedan actuar de forma autónoma y tengan la capacidad de “aprender” por sí mismas.

Es así como a mediados de los años 50's que John Von Neumann ¹ realiza estudios analíticos sobre la computación para probar que una computadora podía tener una estructura simple y física, y que junto con Howard Aiken y Norbert Wiener comienzan a estudiar las computadoras, el control en el sistema nervioso y la comunicación en él. Después labora con McCulloch y Pitts en el tema de redes neuronales [33].

En principio, Neumann pretende diseñar un autómata basado en ecuaciones diferenciales parciales, pero al encontrar dificultades para establecerle instrucciones simples además del tamaño del sistema, utiliza un arreglo de elementos básicos sugerida posiblemente por Stanislaw Ulam ² quien decía que una de las características importantes en la simulación es que *el orden global se puede construir a partir de una acción local*, lo cual quiere decir que la respuesta del sistema es generada por las instrucciones que siguen los elementos básicos. Así comienza con el estudio de la complejidad generada por esta autoreproducción inspirándose en trabajos de Post y Turing para crear una máquina que pudiera construir otras máquinas.

Es como surge la idea de la construcción de autómatas que requerían una cuadrícula o arreglo donde cada celda tuviera cierta cantidad de celdas vecinas y estados que las representaran de manera simple para analizar la autoreproducción.

En los años 70's John Horton Conway ³ en determinada interpretación de los cambios de estados en los autómatas construye el "Juego de la vida" que permitía simular "la vida" artificial de una celda determinada por la interacción entre sus vecinos; basándose en la idea de que una celda puede sobrevivir si hay dos o tres celdas vivas que pertenezcan a su vecindario. Si tiene muchas celdas vecinas "vivas" muere por sobrepoblación y si tiene pocas muere por aislamiento, reduciendo al caso de renacer cuando tenga exactamente tres celdas vecinas vivas. Esta es una razón por la que se les llamó autómatas celulares.

El juego de la vida de Conway es uno de tantos modelos de autómatas. Sin embargo, todos se basan en elementos primordiales que describiremos en la siguiente sección. Lo que es evidente es que para observar estructuras espaciales o patrones se requiere de la simulación. Actualmente las aplicaciones de estos modelos radican en distintas áreas como el procesamiento de imágenes [34], la modelación de crecimiento por difusión en biología [16], [35], los problemas relacionados con dinámica de fluidos en física [36], la propagación de epidemias en medicina [2], [16], etc.

Características de un autómata celular

Los autómatas son modelos matemáticos que mediante ciertas reglas sencillas cada elemento básico toma un estado que la representa. Para mostrar su dinámica se utiliza normalmente una malla discreta compuesta por celdas donde cada celda representa a una célula (i, j) que cambia en intervalos de tiempo discretos.

Las estructuras que surgen del autómata son complejas y están generadas en el espacio por esta dinámica por lo que no es fácil saber y analizar cuales son las propiedades que tendrá la estructura global del sistema dada la sensibilidad a la condición inicial. De una forma más detallada se presentan las características que conforman un autómata:

¹Científico multidisciplinario húngaro estadounidense que empleó por primera vez un autómata

²Matemático polaco que trabajó en el proyecto Manhattan y diseñó la bomba nuclear Teller Ulam

³Matemático de Reino Unido destacado en teoría de conjuntos, de números, teoría de juegos y códigos.

- Arreglo celular o espacio de evoluciones: Un autómata celular es un sistema dinámico discreto determinado por el espacio de evoluciones n -dimensional compuesto por N^2 elementos o celdas que mantienen una posición espacial (i, j) . Comúnmente la malla n -dimensional tiene división homogénea donde cada división representa a una celda.

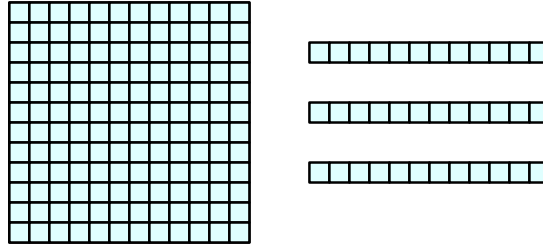


FIGURA A.1: Malla para 2 dimensiones y 1 dimensión respectivamente. Imagen elaborada en Ipe.

- Conjunto de estados Σ : Existe además, el conjunto $\Sigma = \{0, 1, \dots, M\}$ de posibles estados que puede tomar cada elemento de la malla. Este conjunto es finito y cambia discretamente respecto a los valores de las células vecinas que también toman un único elemento del conjunto.
- Vecindad κ : Es un conjunto de celdas adyacentes a la celda central que a su vez cada una de ellas contiene un estado particular y que en conjunto influyen de una manera determinada a su celda central. Las más conocidas y utilizadas son:

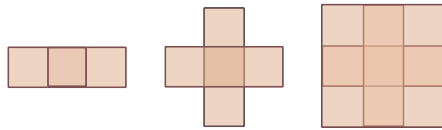


FIGURA A.2: Vecindad 1 dimensión, vecindad de Neumann y vecindad de Moore. Imágenes elaboradas en Ipe

La dimensión del espacio es la que define si la celda $N_{i,j}$ como unidad básica y en consideración de sus vecinos genera el espacio de forma que se obtiene una cadena de celdas en forma de tira para cada tiempo cuando nos referimos a la primera dimensión, una malla en cada tiempo para dos dimensiones e inclusive cubos para la tercera dimensión, etc.

- Función de evolución: La representación de estados en el espacio es mediante una configuración. Se dice que una configuración S_t es la asignación de estados para cada $N_{i,j}$ en cada periodo t , esto es, $S_t \equiv \{S_t(i, j)\}$, por lo que el mapeo existente $S_0 : \{N_{i,j}\} \rightarrow \Sigma$ genera la configuración inicial del sistema. Para expresar la secuencia de las configuraciones globales en el tiempo se recurre a la función Θ como

$$\Theta : S_t \rightarrow S_{t+1},$$

mostrando una recursión en la dinámica espacial. Determinamos también una función g la cual define a una regla de evolución local que asigna un estado a la celda central en relación a sus celdas vecinas $N_{i,j} \in \kappa$ como

$$N_{i,j}^{t+1} = g(N_{i-r,j-r}^t, N_{i,j}^t, \dots, N_{i+r,j+r}^t),$$

donde r es la cantidad de celdas que tiene a la izquierda y a la derecha de la celda central al cual se le conoce como el radio de la vecindad asociada.

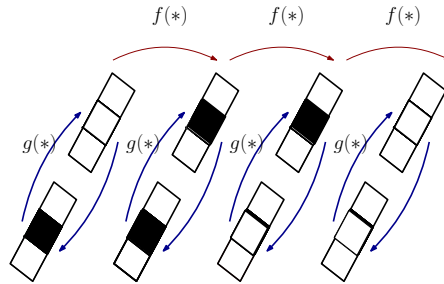


FIGURA A.3: Cambio del estado de la celda central dependiendo de los estados vecinos. Imágen elaborada en Ipe

Condiciones iniciales

Como cualquier sistema dinámico, se sabe que las trayectorias o resultados de un proceso pueden presentar comportamientos complejos en el tiempo debido a la sensibilidad de ciertas condiciones iniciales. La condición inicial es la configuración inicial S_0 del estado único que toma cada celda en el arreglo regular para cada intervalo de tiempo.

La evolución del autómata celular se refleja cambiando los estados del sistema global a través de definir una configuración inicial S_0 , para el cual hemos hecho uso de la función f como sigue

$$f^n(S_0) = f(S_0) \text{ si } n = 1,$$

$$f^n(S_0) = f(\Theta^{n-1}(S_0)) \text{ si } n > 1,$$

esta es la secuencia que se le conoce como la evolución o el espacio fase del autómata celular. Una característica particular en el análisis de la evolución del sistema es el estudio estadístico del espacio fase el cual está determinado por las densidades de las celdas con un estado particular [33]; esto se determina para cada estado global en el autómata como

$$f(S_0), f(\Theta(S_0)), f(\Theta^2(S_0)), f(\Theta^3(S_0)), \dots, f(\Theta^n(S_0)).$$

Condiciones de frontera

Cuando la dinámica del proceso se lleva a cabo y comienzan a emerger estructuras espaciales se pueden ver fenómenos físicos (como la percolación o la segregación) de acuerdo a las reglas que sigue el autómata, pero ¿qué sucede en los bordes?

Se requiere tomar algunas consideraciones específicas al momento de implementar un autómata lo que conlleva determinar que sucederá en los bordes de la malla en función del problema dado. Establecer consideraciones en los bordes se le conoce como condiciones de frontera y son las proyecciones que determinan los límites de tiempo y de espacio para la simulación. Entonces, se pueden clasificar las fronteras dependiendo de los estados que se asignen a las celdas en los bordes de la siguiente manera:

- **Frontera abierta.** Ya que se considera que existen celdas fuera de la malla principal, lo que representa la frontera abierta es que éstas tienen un estado fijo. Son los atractores punto fijo.
- **Frontera periódica.** La interacción de las células es con el otro extremo del autómata, es como si los extremos de la malla se tocaran obteniendo una circunferencia en una dimensión o un toroide en dos dimensiones. Son los atractores periódicos.

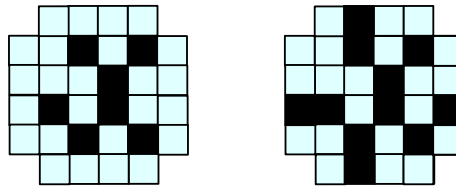


FIGURA A.4: Autómata con frontera abierta y frontera periódica. Imágenes elaboradas en Ipe

- **Frontera espejo o reflectora.** Representa a las células que están dentro del autómata y que tienen el mismo estado que las células de adentro. Son los atractores cuasiperiódicos caóticos.
- **Sin frontera.** Cuando las celdas que están dentro de la malla interactúan con las que se encuentran fuera, se van originando más celdas en los bordes que permitan seguir iterando el proceso hasta un tiempo establecido. Son estructuras cuasiperiódicas.

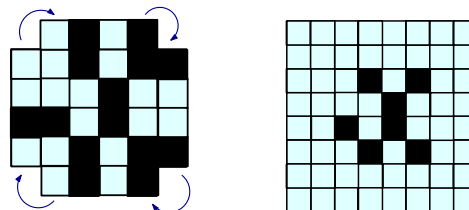


FIGURA A.5: Autómata con frontera espejo y sin frontera. Imágenes elaboradas en Ipe

Autómata Celular en 1 dimensión

Como mencionamos anteriormente, la dinámica en una dimensión genera cadenas de celdas conectadas entre sí de los extremos izquierdo y derecho hasta formar un círculo evitando de esta manera el efecto de los bordes. Los autómatas de 1 dimensión son arreglos finitos de celdas llamados también como autómatas lineales.

El radio r de la vecindad permite mantener una interacción a nivel local entre las celdas vecinas a la celda central; el tamaño total de la vecindad está determinado como $2r + 1$ contenida por el conjunto de las celdas vecinas y la celda central.

La cantidad de vecindades posibles depende de la cantidad de estados como D^{2r+1} , donde D es el número de estados en la configuración de la celda. En la literatura específicamente con enfoque computacional, se representa comúnmente a la función de transición por su notación decimal debido a que en su uso en el cómputo se asocia la realización de una acción en base a

decisiones binarias. Por ejemplo, la regla 90 es la función de transición para el autómata lineal $(2, 1)$ que indica la cantidad de estados (dos estados) y el radio 1.

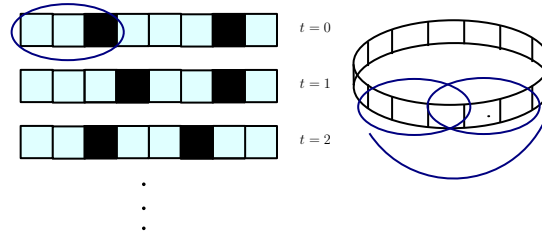


FIGURA A.6: Generación de un autómata celular en una dimensión. Imágenes elaboradas en Ipe.

Ejemplo: Regla 90

Mostraremos un autómata $(2, 1)$ en una dimensión donde el proceso al ir avanzando en el tiempo construye una matriz de i filas. La función local definida como

$$g\left(N_{(i-1,j)}^t, N_{(i,j)}^t, N_{(i+1,j)}^t\right) = N_{(i,j)}^{t+1},$$

genera $D^{2r+1} = 2^3$ vecindades y $D^{D^{2r+1}} = 2^{2^3} = 256$ configuraciones posibles. Una de ellas es la siguiente:

Etiqueta Vecindad	1	2	3	4	5	6	7	8
Configuración en t	111	110	101	100	011	010	001	000
Estado celda central en t+1	0	1	0	1	1	0	1	0

TABLA A.2: Configuración del autómata. La fila de la tabla llamada “Regla” indica el estado de la celda central en el tiempo $t + 1$ dado el estado anterior de su vecindad y el estado de ella misma.

A esta configuración se le llama regla 90 porque el uso de los autómatas en el cómputo se representa su notación en punto flotante que está basada en la notación científica.

En este caso la configuración del estado representaría la mantisa, el número de estados D sería la base y el exponente es el orden de los estados predichos. En la siguiente tabla se muestra la obtención del valor 90 según estas condiciones.

Regla	0	1	0	1	1	0	1	0	Valor
Número	$0 * 2^7$	$1 * 2^6$	$0 * 2^5$	$1 * 2^4$	$1 * 2^3$	$0 * 2^2$	$1 * 2^1$	$0 * 2^0$	$= 90$

TABLA A.3: Valor según la aritmética de punto flotante dada la configuración inicial del autómata.

La figura obtenida es conocida como el *triángulo de Sierpinski* y muestra la estructura final dada la condición inicial según la tabla 2.2. La semilla es asignar el estado como 1 para la celda central que junto con sus vecinos forman la vecindad 010 la cual para el siguiente tiempo asigna el estado 1 para la celda central de las nuevas vecindades haciéndolo de la misma manera para los siguientes periodos de tiempo.

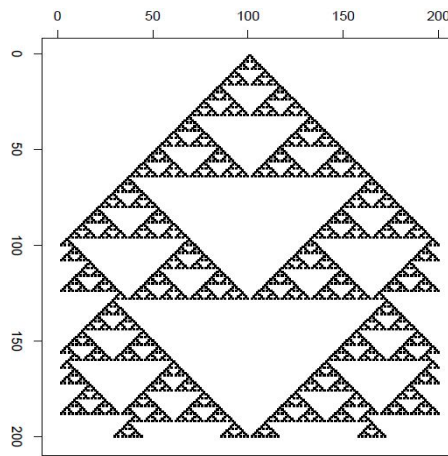


FIGURA A.7: Simulación del triángulo de Sierpinski. Imágen elaborada en RStudio

Autómata celular en 2 dimensiones

Como ahora se consideran dos dimensiones para simular el autómata, las estructuras que se generan están determinadas por la sucesión de matrices que almacenan cada configuración de estados dada la condición inicial matricial. Presentamos un ejemplo sencillo que tiene relevancia en la simulación de algunos sistemas físicos, que es conocido como modelo de paridad. Este modelo utiliza la vecindad de Neumann compuesta por cuatro celdas adyacentes a la celda central en dirección a su derecha e izquierda y hacia arriba y abajo de cada celda.

Tenemos que cada celda puede tomar 2 estados 0, 1 y la función de transición está dada como

$$\text{si } \sum_{(i,j) \in \kappa} S_t(i,j) \text{ es par } \Rightarrow S_{t+1}(i,j) = 0, \text{ en otro caso, } S_{t+1}(i,j) = 1,$$

lo que quiere decir que en cada vecindad asociada a su celda central se cuenta la cantidad de celdas y si esta suma es par el estado que toma la celda en $t + 1$ es cero, por lo que si es impar el estado será uno. Consideramos la vecindad de Neumann, entonces, por la cantidad de celdas en la vecindad también aumenta la cantidad de vecindades posibles ya que ahora serán $2^{2r+1} = 2^5 = 32$ vecindades y $2^{32} = 4,294,967,296$ autómatas posibles. Conforme la simulación avanza, el patrón se expande y su regularidad es debida a la regla de paridad descrita. Esta regla es “lineal” verificando de una manera visual si se utilizan dos patrones iniciales en mallas separadas y después de un cierto tiempo los patrones resultantes y superpuestos muestran un mismo patrón como si fueran ejecutados en la misma malla.

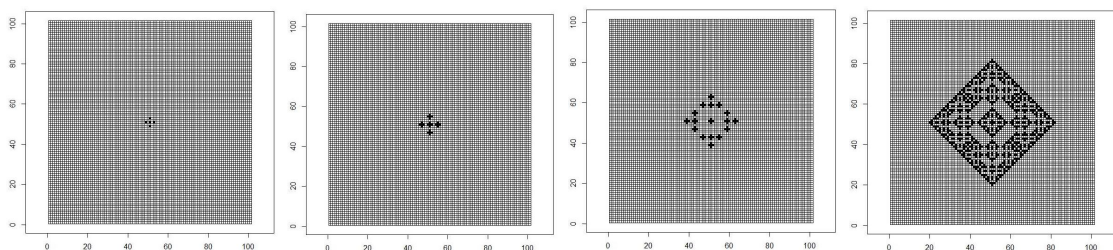


FIGURA A.8: Simulación de un autómata en 124 pasos con la configuración inicial la vecindad de Neumann. Imágenes elaboradas en RStudio.

Wolfram y la clasificación de los autómatas

El propósito principal de clasificar a los autómatas está regido por la caracterización de las densidades. A pesar de las distintas propuestas de clasificación que hay, una de las principales fue la de Wolfram ⁴ quien propuso una clasificación respecto a las cualidades y a la complejidad que mostraban los $2^{2^3} = 256$ autómatas celulares de una dimensión que tienen 3 celdas vecinas y dos estados para formar los siguientes cuatro clases principales según su dinámica:

- I) Estado de equilibrio u homogéneo. Todas las células convergen a un estado estable después de varios periodos de tiempo. Son los atractores puntos fijos.
- II) Estado no homogéneo o periódico. Se observan fragmentos aislados que pueden formar un patrón específico, ya que son periódicos o cíclicos.
- III) Estado complejo. Se construyen estructuras más complejas debido a que los fragmentos son aún más aislados que la clase anterior por lo que se dice que se encuentran en el límite del caos.
- IV) Estado caótico. Las estructuras son comúnmente aisladas y caóticas.

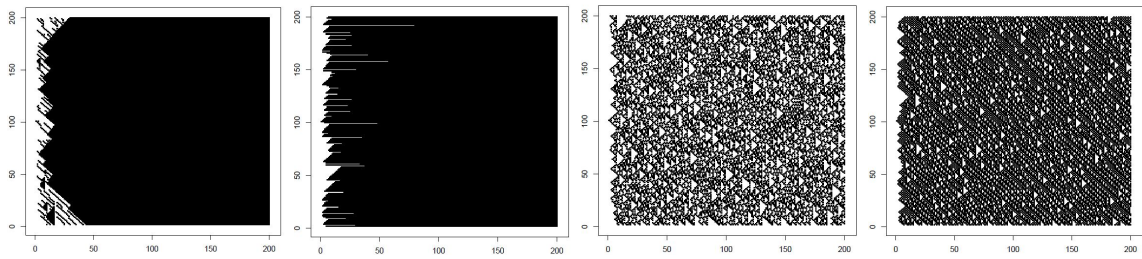


FIGURA A.9: Simulación de las clases I, II, III y IV respectivamente. Imágenes elaboradas en RStudio.

⁴Matemático británico (1959-) que escribió el libro *A New Kind of Science*. Construyó una máquina de Turing de 2 estados y 5 colores basada en un autómata de regla 110.

Apéndice B

Algunos modelos de crecimiento con el uso de autómatas celulares

Modelo de Arthur

La *trayectoria dependiente* es un concepto utilizado en el modelo de W. Brian Arthur [5] que refleja la aceleración del crecimiento y desarrollo de las ciudades debido a ciertas condiciones particulares o características de la ciudad que definen un potencial de manera exponencial.

En este caso, el crecimiento de la población es una manera de medir el potencial en las ciudades; otras formas son asociar el potencial con respecto al desarrollo en términos de variables o el potencial definido por la relación entre la población y el desarrollo. Si asociamos a los autómatas con este potencial, definimos a i celdas que representan i ciudades, donde cada una de ellas cuenta con cierto potencial calculado a través del modelo exponencial. Entonces, para una “ciudad” se tiene que

$$\frac{dP}{dt} = P'(t) = \beta P(t), \quad (\text{B.1})$$

con su solución $P(t) = P(0)e^{\beta t}$. Luego para la discretización del sistema con unidad de tiempo 1 se obtiene

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \beta P(t) \Rightarrow P(t+1) - P(t) = \beta P(t) \Rightarrow P(t+1) = (1 + \beta)P(t), \quad (\text{B.2})$$

Luego, si utilizamos una malla para las N^2 celdas o ciudades y nombrando $1 + \beta = \mu$ podemos generalizar el proceso de la manera siguiente

$$P_{i,j}(t+1) = \mu P_{i,j}(t)^\alpha = \mu P_{i,j}(t)^{\alpha-1} P_{i,j}(t), \quad (\text{B.3})$$

donde $\mu P_{i,j}(t)^{\alpha-1}$ expresa la proporción de la variable que hace referencia a P en el tiempo $t+1$ respecto al tiempo t como

$$\frac{P_{i,j}(t+1)}{P_{i,j}(t)} = \mu P_{i,j}(t)^{\alpha-1}, \quad (\text{B.4})$$

por tanto la forma de representar este potencial determinado en proporciones será

$$1 + \beta = \mu P_{i,j}(t)^{\alpha-1}, \quad (\text{B.5})$$

donde μ es una constante de escalamiento y α una medida de retornos a escala. Definiendo el potencial de esta manera observamos la recursión que depende de la condición inicial comenzando con las condiciones iniciales símil al ruido de los “accidentes históricos”. Se tiene que para cada uno de los conjuntos en el tiempo $t = 0$ hay una distribución aleatoria asociado al potencial $P_{i,j}(0) = \varepsilon_{i,j}$ de cada celda central. Dada las expresiones anteriores y la tasa de crecimiento $1 + \beta$, la recursión obtenida se ve como

$$\begin{aligned} P_{i,j}(1) &= (1 + \beta)P_{i,j}(0) = \mu P_{i,j}(0)^{\alpha-1} P_{i,j}(0) = \mu P_{i,j}(0)^\alpha, \\ P_{i,j}(2) &= (1 + \beta)P_{i,j}(1) = \mu P_{i,j}(1)^{\alpha-1} P_{i,j}(1) = \mu P_{i,j}(1)^\alpha, \\ &\vdots \\ P_{i,j}(t) &= (1 + \beta)P_{i,j}(t-1) = \mu P_{i,j}(t-1)^{\alpha-1} P_{i,j}(t-1) = \mu P_{i,j}(t-1)^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

que expresada en términos de la tasa se observa que está determinada de la condición inicial

$$P_{i,j}(t) = (1 + \beta)P_{i,j}(t-1) = (1 + \beta)(1 + \beta)P_{i,j}(t-2) = (1 + \beta) \dots (1 + \beta)P_{i,j}(0) \quad (\text{B.7})$$

$$= \mu P_{i,j}(t-1)^\alpha \dots \mu P_{i,j}(t-1)^\alpha P_{i,j}(0) = \mu^t P_{i,j}(t-1)^{\alpha t} P_{i,j}(0) \quad (\text{B.8})$$

la cual la proporción se puede expresar como

$$P_{i,j}(t) \propto \mu^t P_{i,j}(0)^{\alpha t}. \quad (\text{B.9})$$

Es importante observar que el análisis de dicho potencial es respecto al parámetro α , concluyendo que:

- Si $\alpha = 1$ la tasa de crecimiento es lineal.
- Cuando $0 < \alpha < 1$ los valores de retorno son de decremento lo que significa que las ciudades más grandes se comienzan a convertir en ciudades pequeñas.
- Si $\alpha > 1$ los retornos son de incremento, lo cual se refiere a que las ciudades grandes se hacen aún más grandes.

Al momento de normalizar tales potenciales como $\mathbf{P}_{i,j}(t) = \frac{P_{i,j}(t)}{\sum_{i,j \in \kappa} P_{i,j}(t)}$ podemos asociarlos a una probabilidad y jerarquizar a las ciudades al almacenar desde el máximo potencial en las celdas al mínimo potencial para cada tiempo t , obteniendo el potencial máximo en t como $\mathbf{P}(t) = \max_{i,j} \{\mathbf{P}_{i,j}(t)\}$. Como se mencionó anteriormente, las estructuras más pequeñas (en este caso la celda) se ven en interacción de forma global en base a su entorno.

Para esto, recurrimos a los elementos del autómata viendo en particular a la tasa de crecimiento de una ciudad como una función del promedio de potencial en una vecindad alrededor de ella. Utilizando la vecindad de Moore, definida por Edward F. Moore¹ compuesta de 9 celdas con radio 1 en el modelo de Arthur observamos que el potencial de la celda central queda determinado por el promedio de potenciales en su vecindad por la tasa de crecimiento de la siguiente manera

$$\mathbf{P}_{i,j}(t+1) = (1 + \beta) \sum_{(i,j) \in \kappa} \frac{\mathbf{P}_{i,j}(t)}{9}. \quad (\text{B.10})$$

¹Matemático estadounidense, inventor de la máquina de estados finitos de Moore, 1925-2003.

Entonces, según la ecuación (B.9) la tasa de crecimiento se reescribe basada en el promedio anterior como

$$1 + \beta = \mu \left\{ \sum_{(i,j) \in \kappa} \frac{\mathbf{P}_{i,j}(t)}{9} \right\}^{\alpha-1},$$

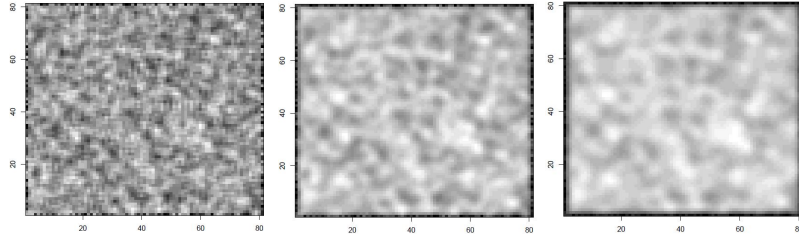
que basado en la ecuación (B.10) se tiene de modo general

$$\mathbf{P}_{i,j}(t+1) = \mu \left\{ \sum_{(i,j) \in \kappa} \frac{\mathbf{P}_{i,j}(t)}{9} \right\}^{\alpha}.$$

Este modelo es la generalización de una distribución conocida como rank-size. Se muestran las simulaciones para las estructuras emergentes respecto al valor de α .

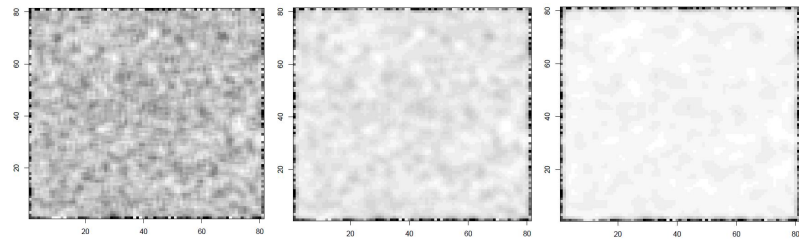
Condiciones iniciales: Parámetros: $\alpha = 1$, $\mu = 1.5$, tiempo: $t = 7$, $\mathbf{P}_{i,j}(0) = \text{runif}(1, 0, 2)$.

Condiciones de frontera: Frontera abierta. Las figuras representan el potencial en el tiempo de las ciudades. Es el modelo exponencial a nivel espacial.



Condiciones iniciales: Parámetros: $\alpha = 0.5$, $\mu = 1.5$, $t = 7$, $\mathbf{P}_{i,j}(0) = \text{runif}(1, 0, 2)$.

Condiciones de frontera: Frontera abierta. Las figuras muestran que cuanto $\alpha < 1$ ocasiona la dispersión de las ciudades haciéndolas más pequeñas aglomeraciones.



Condiciones iniciales: Parámetros: $\alpha = 1.8$, $\mu = 1.5$, $t = 7$, $\mathbf{P}_{i,j}(0) = \text{runif}(1, 0, 2)$.

Condiciones de frontera: Frontera abierta. Se observa que con $\alpha > 1$ se ocasiona la aglomeración de las ciudades haciéndolas más grandes.

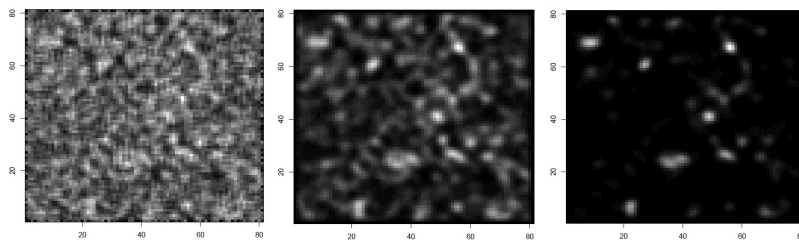


FIGURA B.1: Simulaciones de densidad de potenciales promedio. Imágenes elaboradas en RStudio.

Modelo de Vicsek-Salay

En este modelo, se considera la vecindad de Neumann compuesta por cuatro celdas que rodean ortogonalmente a cada celda central permitiendo calcular el potencial de cada una como un promedio de las celdas k con los potenciales vecinos. Con respecto a lo que sucede en las ciudades, este potencial es dependiente de los aspectos físicos, sociales, económicos, etc., y que debido al principio de equipartición es posible obtener el potencial promedio de cada celda, definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_{i,j}(t+1) = \sum_{(i,j) \in \kappa} \frac{\mathbf{P}_{i,j}(t)}{5}. \quad (\text{B.11})$$

Para mostrar el efecto que se produce, se considera el potencial máximo $\hat{P}_{i,j}(t) = \max_{i,j} \{P_{i,j}(t)\}$ y el potencial promedio $P(t) = \sum_{(i,j) \in \Omega} \frac{P_{i,j}(t)}{N^2}$ donde n es el número de células que se encuentran en el sistema y ω es la vecindad de Neumann.

Condiciones iniciales: Variables: malla = 130×130 , $t = 15$, $\mathbf{P}_{i,j}(0) \in \{-1, 1\}$, $k = 4$.
Condiciones de frontera: Frontera espejo.

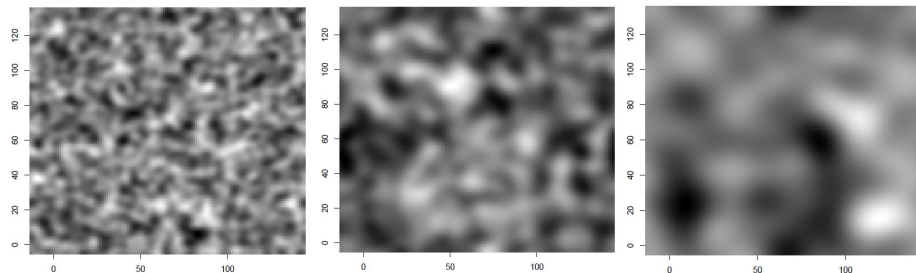


FIGURA B.2: Simulaciones de potenciales promedio. Imágenes elaboradas en RStudio.

Según Vicsek y Szalay [6], a través de este modelo se muestra que grandes estructuras ordenadas emergentes no son diferentes de las distribuciones del desarrollo urbano que se obtienen de un modelo construido con un promedio espacial. Por lo tanto, extienden la ecuación anterior para cada periodo de tiempo t añadiendo un ruido blanco, que puede ser expresado como sigue:

$$\mathbf{P}_{i,j}(t+1) = \sum_{(i,j) \in \kappa} \frac{\mathbf{P}_{i,j}(t)}{5} + \varepsilon_{i,j}(t), \quad (\text{B.12})$$

Decimos que el desarrollo $\tau_{i,j}$ ocurre si el potencial sobrepasa un umbral, esto es:

$$\tau_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{P}_{i,j}(t) > \psi, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se espera que los patrones asociados a las distribuciones espaciales sean fractales [1] y que además las dimensiones fractales varíen con respecto al valor del límite considerado, donde lo que importa es la dimensión que existe entre la relación masa-radio (el número de celdas ocupadas con respecto a la distribución de una celda).

La contribución de los autores es mostrar que las estructuras pueden ser generadas a través de un proceso aleatorio que se forma del promedio sistemático en presencia de ruido.

Condiciones iniciales: Variables: malla = 100×100 , $\mathbf{P}_{i,j}(0) \in \{-1, 1\}, \forall i, \varepsilon_{i,j} \in \{-1, 1\}, k = 4$.

Condiciones de frontera: Frontera espejo.

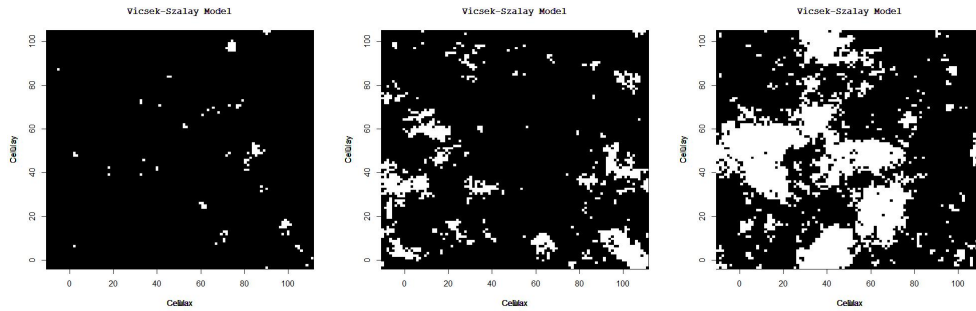


FIGURA B.3: Simulaciones de crecimiento para tiempo $t = 100, 300, 700$ respectivamente. Imágenes elaboradas en RStudio

Modelo de Schelling

En el modelo de Schelling (1971) se habla de dos perspectivas. Una está basado en las decisiones que toman los individuos o características de las actividades que cambian en cuanto las opiniones sean distintas (representados por celdas). El otro modelo es donde los individuos cambian de ubicación con respecto a una característica u opinión que difiera en su vecindad (modelos considerando agentes). En este modelo se considera una distribución $\mathbf{P}_{i,j}(t) = \varepsilon_i$ que representa una decisión en la célula i . Si se tiene un grupo de individuos que tienen que elegir entre "sí" y "no" con $n_i^b(t)$ y $n_i^w(t)$ como

$$n_{i,j}^b(t) = \sum_{k \in \Omega_{i,j}} \mathbf{P}_k(t),$$

$$n_{i,j}^w(t) = \sum_{k \in \Omega_{i,j}} \mathbf{P}_k(t).$$

Las condiciones para el cambio de opinión según el autor pueden representarse a través de variables como sigue

$$\mathbf{P}_{i,j}(t+1) \begin{cases} 1 & \text{si } n_i^b(t) > n_i^w(t), \\ 0 & \text{si } n_i^b(t) < n_i^w(t), \\ \mathbf{P}_{i,j}(t) & \text{si } n_i^b(t) = n_i^w(t). \end{cases}$$

Primero consideramos el caso donde todas las celdas están ocupadas, por lo que la cantidad de individuos para que ocupen las celdas está dada por $n_{i,j}^b(t) + n_{i,j}^w(t) = 8$, considerando la vecindad de Moore. Si asociamos la decisión de estar ocupada a través de una variable binaria con 1 para *si* y 0 para indicar *no*, entonces:

$$\mathbf{P}_{i,j}(t+1) \begin{cases} 1 \text{ o } 0 & \text{si } \sum_{k \in \Omega_i} \mathbf{P}_k(t) > 4, \text{ o } \sum_{k \in \Omega_{i,j}} \mathbf{P}_k(t) < 4 \\ \mathbf{P}_{i,j}(t) & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Si se considera el caso donde no todas las celdas tienen individuos (agentes), con las ubicaciones de cada uno aleatorias, se tiene que la distribución del estado estable esta oscilando lentamente y cambiando de estado indefinidamente. Sin embargo, el grado de segregación medido por la proporción de las células en cada vecindad es similar en los dos casos.

Condiciones iniciales: Variables: malla = 100×100 , $\mathbf{P}_{i,j}(0) \in \{0, 1\}, \forall i, D_i \in \{0, 1\}, k = 4$.
Condiciones de frontera: Frontera fija.

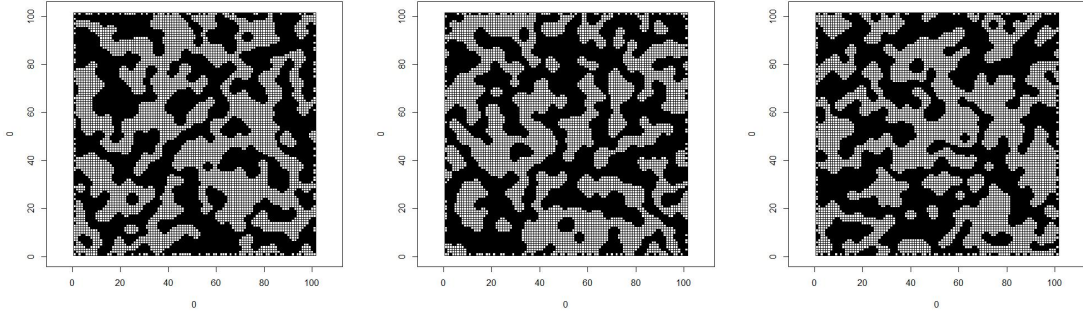


FIGURA B.4: Simulaciones para conjuntos de segregación para tiempos $t = 20, 50, 100$ respectivamente. Imágenes elaboradas en RStudio.

El segundo modelo no consiste en el cambio de opinión de los individuos, si no en el movimiento que se requiere para evitar vecindades donde serían minoría, lo cual requiere condiciones para las distancias trazadas por los agentes. Así, los individuos cambian de ubicación si el porcentaje de ellos en una vecindad es menor que el límite establecido φ . El modelo se plantea como sigue: Un individuo $\mathbf{P}_{i,j}(t)$ cambia su ubicación a una célula j desocupada si

$$\varphi > \left\{ \frac{n_{i,j}^b(t)}{[n_{i,j}^w(t) + n_{i,j}^b(t)]} \right\}, \quad (\text{B.13})$$

$$\text{o } \varphi > \left\{ \frac{n_{i,j}^w(t)}{[n_{i,j}^w(t) + n_{i,j}^b(t)]} \right\}, \quad (\text{B.14})$$

$$\text{entonces } \mathbf{P}_{i,j}(t) \longrightarrow \mathbf{P}_j(t+1), \text{ otro caso } \mathbf{P}_{i,j}(t+1) = \mathbf{P}_{i,j}(t). \quad (\text{B.15})$$

Entonces cuando el número de células vacías incrementa, la velocidad para encontrar una ubicación aceptable aumenta. Además si la tolerancia entre individuos de distintas vecindades aumenta, entonces la tasa para que se encuentre una ubicación aceptable también incrementa. Si el límite de tolerancia disminuye, no emerge ningún patrón estable.

Si el sistema no converge con cierta cantidad de celdas vacías y un límite de tolerancia, significa que no hay suficientes celdas vacías para que los individuos se acumulen respecto a sus preferencias. El otro caso es que si el porcentaje de vecindades que satisfacen entre los individuos es lo suficientemente grande respecto al límite de tolerancia, significa que los patrones son más segregados de lo que el nivel de límite puede implicar. El fin de este modelo es mostrar las reglas donde los individuos pueden vivir en grandes minorías que producen segregaciones grandes si existe una ubicación con un individuo en desacuerdo, intentando cambiar de opinión o de ubicación.

Apéndice C

Ecuación de difusión

Consideremos una partícula que se mueve en dos dimensiones, donde para cada una de las ocho direcciones posibles se traslada con una cierta probabilidad como muestra la siguiente imagen.

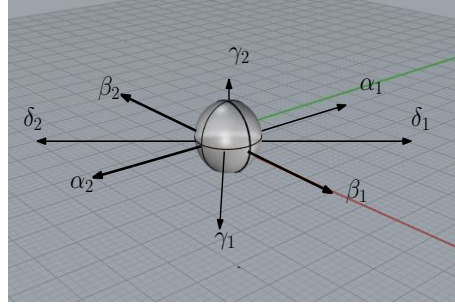


FIGURA C.1: Probabilidades en cada dirección

Suponemos que cada paso que da la partícula tiene tamaño $\Delta x = 1$ en un tiempo $\Delta t = 1$. Entonces la probabilidad de que se encuentre en la posición (i, j) en el tiempo $n + 1$ se define como:

$$P_{n+1}(i, j) = \alpha_1 P_n(i - 1, j) + \alpha_2 P_n(i + 1, j) + \beta_1 P_n(i, j - 1) + \beta_2 P_n(i, j + 1) + \gamma_1 P_n(i - 1, j - 1) + \gamma_2 P_n(i + 1, j + 1) + \delta_1 P_n(i + 1, j - 1) + \delta_2 P_n(i - 1, j + 1).$$

Como probabilidades que son, la suma $(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) = 1$. Si consideramos que los desplazamientos son cada vez más pequeños cuando $n \rightarrow \infty$, podemos renombrar las variables (n, i, j) como (t, x, y) para representar las relaciones de escalamiento siguientes: $x = n_1 \Delta t$, $y = n_2 \Delta t$ en $t = n \Delta t$.

Por simplicidad de notación consideramos que $\mathbf{x} = (x, y)$, entonces:

$$P_{n+1}(i, j) \rightarrow \mathbf{P}(t + \Delta t, \mathbf{x}) \cong \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \Delta t,$$

Para el término del lado izquierdo de la igualdad, utilizamos la fórmula de Taylor en $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0$ como sigue,

$$\mathbf{P}(t, x + \Delta x, y) \cong \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(t, x, y + \Delta y) &\cong \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} \cdot (\Delta y)^2, \\
 P_{n+1}(i, j) \rightarrow \mathbf{P}(t, x + \Delta x, y + \Delta y) &\cong \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) \pm \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x} \cdot \Delta x \pm \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y} \cdot \Delta y + \\
 &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} \cdot (\Delta y)^2.
 \end{aligned}$$

Ahora, del lado derecho de la igualdad, de acuerdo a las probabilidades de la figura anterior, se realiza la parametrización siguiente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Delta t &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad + (\alpha_2 - \alpha_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - \delta_2 + \delta_1) \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x} \Delta x \\
 &\quad + (\beta_2 - \beta_1 + \gamma_2 - \gamma_1 + \delta_2 - \delta_1) \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y} \Delta y \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} \cdot (\Delta y)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x \partial y} \cdot (\Delta x)(\Delta y).
 \end{aligned}$$

Nombremos a $a = \alpha_2 - \alpha_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - \delta_2 + \delta_1$, $b = \beta_2 - \beta_1 + \gamma_2 - \gamma_1 + \delta_2 - \delta_1$, $c = \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2$. Como la suma de $(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) = 1$, entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Delta t &= a \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x} \Delta x + b \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2, \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} \cdot (\Delta y)^2 + \frac{1}{2} c \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x \partial y} \cdot (\Delta x)(\Delta y). \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Al momento de despejar Δt en ambos lados de la igualdad, la relación en el límite entre los incrementos en la posición respecto al tiempo suelen representar una velocidad. Por lo cual decimos que

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left(a \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \equiv v_x \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left(b \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \equiv v_y,$$

de la misma manera, para los otros términos tenemos

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \equiv \mathfrak{D}_x \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left(b \frac{(\Delta y)^2}{\Delta t} \right) \equiv \mathfrak{D}_y \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} \left(c \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \right) \equiv \mathfrak{D}_{xy},$$

que son los coeficientes de difusión respecto a la dirección. Luego, sustituyendo en la ecuación (C.1),

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = v_x \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y} + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_x \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_y \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_{xy} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\partial x \partial y},$$

que puede ser escrita a través del producto punto como sigue:

$$\frac{\partial P(t, \mathbf{x})}{\partial t} = v \bullet \nabla P(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbb{D} \mathbb{H},$$

esta es la ecuación de difusión, donde \mathbb{D} es la matriz de los coeficientes de difusión y \mathbb{H} es la matriz hessiana de P ,

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \mathfrak{D}_x & \mathfrak{D}_{xy} \\ \mathfrak{D}_{yx} & \mathfrak{D}_y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix},$$

y donde cada elemento de la matriz \mathbb{H} es

$$H_{xx} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad H_{xy} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \quad H_{yx} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \quad H_{yy} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

Apéndice D

Algoritmos

En esta sección se muestran los algoritmos que se utilizaron para la simulación de la dinámica descrita en el capítulo 4. Se construye el procedimiento de los algoritmos para el cambio de usos de suelo implementando un autómata celular en **RStudio. Versión 1.0.136**. Éstos se enlistan en la siguiente tabla

Algoritmo	Propósito
Principal	Realiza la simulación llamando a cada una de las funciones siguientes para toda la malla y para cada tiempo $t \in \{0, \dots, T\}$.
Dist-Neigh	Contabiliza las celdas distintas en cada una de las vecindades de Moore (8 celdas).
Probability	Calcula la probabilidad de cambio para cada celda según sus factores.
Prob_Neigh	Después de la función <i>Dist-Neigh</i> , se modifica el valor de la probabilidad en la celda con respecto a sus celdas distintas a ella.
Monte_Carlo	Genera números pseudoaleatorios y elige la transición adecuada del uso de suelo.
Proportions	Almacena las distribuciones de los cambios para cada uso de suelo en cada iteración.

TABLA D.1: Descripción de los algoritmos.

Principal

Propósito: Realiza la simulación llamando a cada una de las funciones siguientes para toda la malla y para cada tiempo $t \in \{0, \dots, T\}$. Al momento de recibir como entrada la imagen después de ser cargada por archivos .shp, se genera una matriz de suelos en formato .csv de acuerdo a una caracterización específica de suelos y una matriz de elevaciones también en formato .csv y se les dimensiona de acuerdo a un nivel de zoom (designado por el usuario) que ronda entre los valores de nivel 21 : 44×44 pixeles, hasta el nivel 1 : 911×911 . Almacena los nuevos valores para cada función al renombrar cada una de ellas en las siguientes nuevas funciones:

Función(es): `prob`, `local_prob`, `[land(t+1),changes,weight]`, `ini_prob`

Algorithm D.1

1: Input: n, m	▷ Dimensión del sistema (malla)
2: Input: ini_land	▷ Matriz de tipos de suelo en cada posición del sistema
3: Input: $time$	▷ Cantidad de iteraciones
4: Input: L	▷ Cantidad de tipos de suelo
5: Input: k	▷ Cantidad de factores
6: Input: $beta$	▷ Vector con los coeficientes de los factores
7: Input: $fact = [fact_1, \dots, fact_k]$	▷ Sucesión de matrices de factores en cada posición del sistema
8: Input: $val = [val_1, \dots, val_k]$	▷ Sucesión de matrices con valores de cada factor en cada celda
9: Input: ini_prob	▷ Matriz de probabilidades iniciales
10: Input: $weight$	▷ Matriz de pesos de la malla
11: $land(1) = ini_land$	▷ Configuración inicial del sistema
12: for ($t = 1 : time$) do	▷ Inicio ciclo for
13: $prob = probability(weight, ini_prob, land(t), L, n, m)$	▷ Actualiza las probabilidades
14: $local_prob = prob_neight(L, n, m, prob, land(t))$	▷ Considera las celdas distintas en κ
15: $[land(t+1), changes, weight] = monte_carlo(val, fact, beta, k, local_prob, land(t), n, m, L)$	
16: $ini_prob = proportions(changes, L, ini_prob)$	▷ Proporciones iniciales
17: Descomponer la matriz de suelos $land(t + 1)$ en sus factores $fact_1, \dots, fact_k$	
18: $fact = [fact_1, \dots, fact_k]$	▷ Actualización de factores
19: end for	▷ Fin de ciclo for
20: Output: $land$	▷ Configuraciones de tipos de suelo

Dist-Neigh

Propósito: Contabiliza las celdas distintas en cada vecindad de Moore (8 celdas). Considera que el sistema tiene como condición de frontera a todas aquellas celdas con el uso de suelo *P prohibido* que está representado con -1 . El suelo prohibido está determinado por la elevación, es decir, el autómata identifica a todas las celdas que estén por encima de un nivel de elevación y no las considera en el proceso.

Función: `dist_neigh` \leftarrow `function(M,i,j,n,m)`

Algorithm D.2

```
1: Input:  $M, i, j, n, m$ 
2: function DIST-NEIGH( $M, i, j, n, m$ )
3:    $Frontier = cbind(rep(0, (n + 2)), rbind(rep(0, m), M, rep(0, m)), rep(0, (n + 2)))$ 
4:    $Neigh = Frontier[i : (i + 2), j : (j + 2)]$ 
5: end function
6: Output:  $Neigh$ 
```

Probability

Propósito: Calcula la probabilidad de cambio para cada celda dependiendo del uso de suelo que almacena. Debido a que el uso de suelo queda determinado por sus factores, los pesos generados por éstos son una condición inicial que va actualizándose para cada tiempo. Para cada factor se tiene una matriz de existencia y ausencia que no cambia en el tiempo, sin embargo sus valores en conjunto se actualizan por cómo se lleva a cabo la dinámica del proceso.

Función: `probability` \leftarrow `function(weight, ini_prob, land, L, n, m)`

Algorithm D.3

```

1: function PROBABILITY(weight, ini_prob, land, L, n, m)
2:   trans = [trans1, ..., transL]
3:    $\Phi = 0$ 
4:   for l = 1 : L do
5:     for i = 1 : n do
6:       for j = 1 : m do
7:         if (land(i, j)  $\neq$  0) then
8:           search = ini_prob(land(i, j), l)
9:           if (search == 1) then
10:            transl(i, j) = 1
11:          else transl(i, j) =  $\frac{\textit{search} * e^{\textit{weight}(\textit{i}, \textit{j})}}{1 - \textit{search}}$ 
12:             $\Phi = \Phi + \textit{trans}_l(\textit{i}, \textit{j})$ 
13:          end if
14:        end if
15:      end for
16:    end for
17:  end for
18:  for l = 1 : L do
19:    transl =  $\frac{\textit{trans}_l}{\Phi}$ 
20:  end for
21:  return (trans)
22: end function

```

Prob_Neight

Propósito: Después de la función *Dist-Neigh*, se modifica el valor de la probabilidad en la celda con respecto a sus celdas distintas a ella en su vecindad Ω . Cuando se posiciona en una celda, identifica a su vecindad correspondiente y después observa cuales son las celdas que pertenecen a su frontera, es decir, a aquellas celdas que tienen un uso de suelo distinto a ella para luego calcular una ponderación de la probabilidad calculada con respecto a esta restricción.

Función: `prob_neight` \leftarrow `function(L, n, m, prob, land)`

Algorithm D.4

```

1: function PROB_NEIGHT( $L, n, m, prob, land$ )
2:    $transF = [transF^1, \dots, transF^L]$ 
3:    $\Gamma = 0$ 
4:   for  $i = 1 : n$  do
5:     for  $j = 1 : m$  do
6:       for  $l = 1 : L$  do
7:          $\Omega =$  vecindad de Moore de la celda  $(i, j)$ 
8:          $dist\_cell =$  Cantidad de celdas en  $\Omega$  distintas a la celda  $(i, j)$ 
9:          $transF^l(i, j) = \frac{dist\_cell}{8} * prob_l(i, j)$ 
10:         $\Gamma = \Gamma + transF^l(i, j)$ 
11:       end for
12:     end for
13:   end for
14:   for  $l = 1 : L$  do
15:      $transF^l = \frac{transF^l}{\Gamma}$ 
16:   end for
17:   return ( $transF$ )
18: end function

```

Monte_Carlo

Propósito: Genera números aleatorios para realizar la transición apropiada de uso de suelo para cada celda después de haber calculado y definido la probabilidad a través de las funciones *probability*, *dist_neigh* y *prob_neight*.

Función: `monte_carlo` \leftarrow `function(val, fact, beta, k, local_prob, land, n, m, L)`

Algorithm D.5

```

1: function MONTE_CARLO(val, fact, beta, k, local_prob, land, n, m, L)
2:   New_land =  $\mathcal{O}_{n \times m}$ 
3:   Change =  $\mathcal{O}_{L \times L}$ 
4:   New_weight =  $\mathcal{O}_{n \times m}$ 
5:   for (i = 1 : n) do
6:     for (j = 1 : m) do
7:       Aplicar montecarlo [local_prob1, ..., local_probL] para el suelo  $s \in \{1, \dots, L\}$ 
8:       New_land(i, j) = s
9:       Change(land(i, j), s) = Change(land(i, j), s) + 1
10:    end for
11:  end for
12:   $z = \sum_{i=1}^k \text{beta}(i) * \text{fact}_i \circ \text{val}_i$ 
13:  for (i = 1 : n) do
14:    for (j = 1 : m) do
15:       $\text{New\_weight}(i, j) = z(i, j) - \ln \left( \frac{\text{Change}(\text{land}(i, j), \text{New\_land}(i, j))}{1 - \text{Change}(\text{land}(i, j), \text{New\_land}(i, j))} \right)$ 
16:    end for
17:  end for
18:  return (New_land, Change, New_weight)
19: end function

```

Proportions

Propósito: Esta función acumula para cada tiempo aquellas celdas que cambiaron de un uso de suelo a otro de acuerdo a las transiciones de suelo configuradas, que son realizadas de acuerdo a una probabilidad inicial en el sistema.

Función: `prob_neight` \leftarrow `function(L, n, m, prob, land)`

Algorithm D.6

```
1: function PROPORTIONS(changes, L, ini_prob)
2:   New_prob =  $\mathcal{O}_{L \times L}$ 
3:   for (i = 1 : L) do
4:     Sum =  $\sum_{l=1}^k \text{changes}(i, l)$ 
5:     for (j = 1 : L) do
6:        $\text{New\_prob}(i, j) = \frac{\text{changes}(i, j)}{\text{Sum}}$ 
7:     end for
8:   end for
9:   return (New_prob)
10: end function
```

Bibliografía

- [1] Batty, M. (2005). *Cities and complexity: understanding cities with cellular automata, agent-based models, and fractals*. Massachusetts Institute of Tecnology, Cambridge, M.
- [2] Almeida, C., et. al. (2002). *Stochastic cellular automata modeling of urban land use dynamics: empirical development and estimation*. National Institute for Space Research, San Paulo, Brasil.
- [3] Batty, M., and Longley, P.A. (1994). *Fractal Cities: A Geometry of form and function*. Academic Press, San Diego, Calif.
- [4] Garreau, J. (1991). *Edge Cities: Life on the New Frontier*. Doubleday Books, New York.
- [5] Arthur, W.B. (1988). Urban Systems and Historical Path Dependence. In J.H. Ausubel and R. Herman (eds.), *Cities and Their Vital Systems: Infrastructure, Past, Present and Future*. National Academy Press, Washington, D. C., 85-97
- [6] Vicsek, T., and Szalay, A. S. (1987). Fractal Distribution of Galaxies Modeled by a Cellular Automaton-Type Stochastic Process. *Physical Review Letters*, 75, 1226-1229.
- [7] Schelling, T. C. (1971). Dynamic Models of Segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, 1, 143-186.
- [8] Krugman, P.R. (1996). *The Self-Organizing Economy*. Blackwell, Cambridge, Mass.
- [9] Hansen, W.G. (1959). How Accessibility Shapes land use. *Journal of the American Institute of Planners*, 25, 73-76.
- [10] Lowry, I. S. (1964). *Model of Metropolis*. Memorandum RM-4035-RC, Rand Corporation, Santa Monica, Calif.
- [11] Fujita, M., Krugman, P., and Venables, A. J. (1999). *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*. The MIT Press, Cambridge, Mass.
- [12] Goldenfeld, N., and Kadanoff, L.P. (1999). Simple Lessons from Complexity. *Science*, 284, 87-89.
- [13] Meneses, D., *Pasado, Presente y Futuro de las ciudades*. Universidad de Lovaina, Bélgica.
- [14] Aranguren, C. (2000), *La Ciudad como Objeto de Conocimiento y Enseñanza en las Ciencias Sociales*. Mérida, Venezuela.
- [15] Pumain, D., *La cuestión de las ciudades en la ordenación del territorio europeo*. Comisión de Geografía Urbana de la Unión Geográfica Internacional.

- [16] Tsyganov, M., y otros (1999), *The mechanism of fractal-like structure formation by bacterial populations*. Institute for Theoretical and Experimental Biophysics, Moscú, Rusia.
- [17] d'Onofrio, A., *Fractal growth of tumors and other cellular populations: Linking the mechanistic to the phenomenological modeling and vice versa*. European Institute of Oncology, Milano, Italia.
- [18] Vázquez, J., Oliver, J. *Evolución de autómatas celulares utilizando algoritmos genéticos*. Universidad de Deusto, España.
- [19] Abundo, C., et al. (2013). *City population dynamics and fractal transport networks*. Instituto de Santa Fe. EUA.
- [20] Modis, T. (1994). *Fractal aspects of natural growth*. Technological Forecasting and social change.
- [21] Chen, Y. (2010). *Characterizing Growth and Form of Fractal Cities with Allometric Scaling Exponents*. College of Urban and Environmental Sciences, Beijing, China.
- [22] Shen, G. (2002). *Fractal dimension and fractal growth of urbanized areas*. University of Oklahoma, Norman, USA.
- [23] Lambin, E., et al. (2001). *The causes of land-use and land-cover change: moving beyond the myths*. University of Louvain, Belgium.
- [24] Baxendale, C., Buzai, G. (2011). *Dinámica del crecimiento urbano y pérdida de suelos productivos en el gran Buenos Aires, Argentina, 1869-2011. Análisis espacial basado en Sistemas de Información Geográfica*. Universidad de Buenos Aires, Argentina.
- [25] Bahadur, R. (2012). *Progress in Geospatial Analysis : Weight of Evidence in Geospatial Analysis* . Editor: Yuji Murayami, 97-106. Bahadur, R. (2012). *Progress in Geospatial Analysis : Weight of Evidence in Geospatial Analysis* . Editor: Yuji Murayami, pag. 97-106.
- [26] Olbritch, W., et. al. (1994). *Bayes estimation: A novel approach to derivation of internally consistent thermodynamic data for minerals, their uncertainties, and correlations*.
- [27] Gilbert, N. (2006). *Simulación para ciencias sociales*. University of Surrey, Reino Unido.
- [28] Good, I.J. (1985). *Weight of evidence: A brief survey*. Wrginia Polytechnic Institute and State University, EE. UU.
- [29] E. B. Phillips. *City Lights: Urban Suburban Life in the Global Society*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [30] Aguilera, A. (2007). *Urban segregation phenomena: a cellular automata approach*. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.
- [31] White, S. et. al. (2007). *Modeling epidemics using cellular automata*. Department of Applied Mathematics, España.
- [32] W. A. Tobler. Cellular geography. In S. Gale and G. Olsson, editors, *Philosophy in Geography*, pages 379-386, Dordrecht, 1979. D. Riedel Publishing Company.
- [33] López, E., et. al. (2001). *Predicting land cover and land use change in the urban fringe: A case in Morelia city, Mexico*. Instituto de Ecología, Michoacán, México.

-
- [34] Wirth, L. (2005). *El urbanismo como modo de vida*. En bifurcaciones [online]. núm. 2. World Wide Web document, URL: www.bifurcaciones.cl/002/reserva.htm. ISSN 0718-1132
- [35] Valladares, L. (2012). *La ciudad. Antecedentes y nuevas perspectivas*. Centro de Estudios urbanos y regionales, Guatemala.
- [36] Rodríguez, R. (2008). *Autómatas celulares y sistemas multiagentes para la modelación de ecosistemas*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del I.P.N., México.
- [37] Witter, T., Sander, L. (1981). *Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon*. Groupe de Physique de la Matière Condensée, Francia.
- [38] Ball, R. et. al. (1984). *Diffusion-controlled aggregation in the continuum approximation*. Institute for Theoretical Physics, Santa Barbara, USA.
- [39] Liu, Y. (2009). *Modelling Urban Development with Geographical Information Systems and Cellular Automata*. National Institute of Education, Singapur.
- [40] Makse, H., et. al. (1995). *Modelling urban growth patterns*. Center for Polymer Studies and Department of Physics, USA, and Department of Physics, Bar-Ilan University, Israel.
- [41] Barredo, J. et. al. (2002). *Modelling dynamic spatial processes: simulation of urban future scenarios through cellular automata*. Institute for Environment and Sustainability, Italia.