

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA DURANTE
LA FORMACIÓN DE ESCARCHA EN SUPERFICIES
HORIZONTALES CON FLUJO PARALELO

POR

HERNÁN ALBERTO RAMÍREZ HERNÁNDEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y RENOVABLE

JUNIO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA DURANTE
LA FORMACIÓN DE ESCARCHA EN SUPERFICIES
HORIZONTALES CON FLUJO PARALELO

POR
HERNÁN ALBERTO RAMÍREZ HERNÁNDEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y RENOVABLE

DIRECTOR
DR. FAUSTO ALEJANDRO SÁNCHEZ CRUZ

JUNIO, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA DURANTE
LA FORMACIÓN DE ESCARCHA EN SUPERFICIES
HORIZONTALES CON FLUJO PARALELO

POR
HERNÁN ALBERTO RAMÍREZ HERNÁNDEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y RENOVABLE

DIRECTOR
DR. FAUSTO ALEJANDRO SÁNCHEZ CRUZ

JUNIO, 2017

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Transferencia de calor y masa durante la formación de escarcha en superficies horizontales con flujo paralelo», realizada por el alumno Hernán Alberto Ramírez Hernández, con número de matrícula 1447161, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Energías Térmica y Renovable.


El Comité de Tesis




Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz
Director



Dr. Simón Martínez Martínez
Co-Director




Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz
Revisor



M.C. Fabian Fagotti
Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, mayo 2017

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	xvii
1. Introducción	1
1.1. Resumen	1
1.2. Motivación	2
1.3. Hipótesis	4
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo general	5
1.4.2. Objetivos particulares	5
1.5. Metodología	6
2. Estado del arte	8
2.1. Estudios numéricos	8
2.1.1. Modelo en el dominio de la escarcha	9
2.1.2. Modelo con dos subdominios	10
2.1.3. Modelo con flujo multifase	14

2.2. Estudios experimentales	18
3. Modelo matemático	22
3.1. Proceso de formación de escarcha	22
3.1.1. Etapa de crecimiento de cristales	22
3.1.2. Etapa de crecimiento de la escarcha	23
3.1.3. Etapa de desarrollo completo	23
3.2. Modelo físico de estudio	23
3.3. Elección del modelo matemático	26
3.3.1. Consideraciones del modelo	27
3.4. Cálculo de las propiedades	29
3.4.1. Aire húmedo	29
3.4.2. Escarcha	30
3.5. Condiciones de frontera	32
3.5.1. Frontera superior	32
3.5.2. Frontera inferior	33
3.5.3. Frontera izquierda	34
3.5.4. Frontera derecha	34
3.6. Condiciones iniciales	35
3.6.1. Subdominio del aire	35
3.6.2. Subdominio de la escarcha	36

3.7. Modelado del crecimiento de la escarcha	37
4. Dinámica de fluidos computacional	40
4.1. Ecuación general de transporte	42
4.2. Método de los volúmenes finitos	43
4.2.1. Discretización del dominio	44
4.2.2. Términos difusivos	46
4.2.3. Términos convectivos	49
4.2.4. Término temporal	53
4.2.5. Ecuación final discretizada	54
4.2.6. Campo de flujo	56
4.2.7. Malla desplazada	59
4.2.8. Ecuaciones de cantidad de movimiento	61
4.2.9. Correcciones de velocidad y presión	63
4.3. Aplicación al crecimiento de escarcha	67
4.3.1. Cantidad de movimiento	68
4.3.2. Conservación de la energía	70
4.3.3. Transporte de vapor de agua	70
4.4. Modelado de la densificación	73
4.5. Balance de masa en la interfaz	74
4.6. Criterio de convergencia	78

4.7. Algoritmo del código de formación de escarcha	78
5. Validación experimental	81
5.1. Instalación experimental	81
5.2. Placa plana	83
5.3. Experimento	85
5.3.1. Condiciones de estudio	86
5.4. Tratamiento de imágenes	88
5.5. Estudio de validación	91
6. Resultados y discusión	98
6.1. Análisis de dependencia de malla	98
6.2. Estudio de sensibilidad	102
6.3. Diseño de experimentos	104
6.3.1. Crecimiento de la capa de escarcha	105
6.4. Evaluación cuantitativa de las propiedades en el dominio	110
6.4.1. Densidad	110
6.4.2. Temperatura	113
6.4.3. Humedad específica	116
6.4.4. Velocidad	118
6.5. Densidad y conductividad promedio de la escarcha	121
6.6. Transferencia de calor y masa hacia la superficie fría	124

6.7. Distribución de las propiedades en el dominio	128
7. Conclusiones	137
7.1. Trabajos futuros	142
A. Modelado de la densificación	143
B. Solución de las ecuaciones discretizadas	146
C. Coeficientes de las ecuaciones discretizadas	151
D. Mediciones en los experimentos	157

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Consumo energético por sectores en México en 2016 [2].	3
1.2. Consumo dentro del sector residencial en México en 2015 [3].	3
2.1. Modelo del primer grupo: (a) Modelo físico, (b) Modelo matemático. Adaptado de [24].	9
2.2. Comparación con datos experimentales. Adaptado de [25].	10
2.3. Modelo con dos subdominios. Adaptado de [30].	11
2.4. Comparación de los resultados numéricos con datos experimentales. Adaptado de [28].	12
2.5. Espesor de la capa de escarcha y campo de velocidad. Adaptado de [7].	13
2.6. Comparación del espesor de la escarcha entre resultados numéricos y experimentales. Adaptado de [8].	14
2.7. Modelo con flujo multifase.	15
2.8. Fracción de volumen de sólido [9].	16
2.9. Distribución de la fracción de volumen del hielo [5].	17
2.10. Predicción de la temperatura a distintos tiempos [5].	18

2.11. Esquema de la sección de pruebas. Adaptado de [27].	19
2.12. Sección de pruebas. Adaptado de [33].	19
2.13. Banco de pruebas. Adaptado de [34].	20
2.14. Esquema del experimento de Lenic. Adaptado de [7].	21
3.1. Proceso de formación de escarcha. Adaptado de [7].	24
3.2. Modelo físico de estudio.	25
3.3. Dominio computacional elegido.	25
3.4. Condiciones iniciales y de frontera.	35
3.5. Balance unidimensional en la interfaz <i>aire-escarcha</i> . Adaptado de [8].	38
4.1. Dominio discreto [45].	41
4.2. Malla computacional.	45
4.3. Perfil de variación lineal [45].	48
4.4. Predicción de ϕ_P con diferentes esquemas para un rango de Pe	50
4.5. Esquema UPWIND. a) Caso $u > 0$, b) Caso $u < 0$	53
4.6. Variación de la propiedad ϕ de acuerdo distintos esquemas [45]. . . .	54
4.7. Volumen de control en una dimensión [45].	58
4.8. Campo de presión en “zigzag”.	58
4.9. Malla desplazada para la componente u	60
4.10. Mallas desplazadas para u y v	60
4.11. Volumen de control para la componente u	62

4.12. Algoritmo SIMPLE.	66
4.13. Matriz para identificar los nodos.	68
4.14. Comparación de las ecuaciones 4.54 y 4.56.	72
4.15. Balance de masa en la interfaz. Adaptado de [8].	75
4.16. Crecimiento hacia los nodos de aire.	76
4.17. Algoritmo de solución.	80
5.1. Calorímetro túnel de viento.	82
5.2. Esquema de la placa de cobre.	83
5.3. Distribución de la temperatura en la placa.	84
5.4. Placa aislada con poliestireno extruido.	84
5.5. Diagrama del experimento.	86
5.6. Instalación experimental.	87
5.7. Procedimiento para la toma de fotografías.	88
5.8. Borde de la placa de cobre.	89
5.9. Medición del espesor usando LabVIEW.	90
5.10. Conversión de píxeles a milímetros.	90
5.11. Medición del espesor para el Caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$).	91
5.12. Crecimiento de escarcha - Caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$).	92
5.13. Dominio utilizado en la validación.	93

5.14. Crecimiento en $x = 5$ cm. Barras de error del 10 % - Caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).	95
5.15. Crecimiento en $x = 5$ cm. Barras de error del 10 % - Caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).	95
5.16. Crecimiento en $x = 5$ cm. Barras de error del 10 % - Caso 03 ($T_a=5^\circ\text{C}$; $H.R.=56\%$; $T_s=-24.4^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).	96
5.17. Perfiles de porosidad en $x = 5$ cm - Caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).	97
5.18. Perfiles de densidad en $x = 5$ cm - Caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).	97
6.1. Dominio computacional.	99
6.2. Perfil de temperatura en diferentes mallas. Barras de error del 5 %. . .	100
6.3. Perfil de velocidad en diferentes mallas. Barras de error del 5 %. . . .	100
6.4. Tiempos de simulación.	101
6.5. Sección de la malla computacional.	102
6.6. Perfil de temperatura para diferentes pasos de tiempo a $t=3,600$ s. Barras de error del 5 %.	104
6.7. Perfil de velocidad para diferentes pasos de tiempo a $t=3,600$ s. Barras de error del 5 %.	105
6.8. Crecimiento - Caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).	107
6.9. Efecto de la $H.R.$ con valores bajos de T_a y u_a	108
6.10. Efecto de la $H.R.$ con valores altos de T_a y u_a	108

6.11. Efecto de la T_a con valores bajos de $H.R.$ y u_a 109

6.12. Efecto de la T_a con valores altos de $H.R.$ y u_a 109

6.13. Efecto de la u_a con valores bajos de $H.R.$ y T_a 109

6.14. Efecto de la u_a con valores altos de $H.R.$ y T_a 109

6.15. Densidad en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). . . 112

6.16. Densidad en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$). . 112

6.17. Densidad en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). . 112

6.18. Densidad en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$). 112

6.19. Temperatura en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). 114

6.20. Temperatura en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$). 114

6.21. Perfil de temperatura en $y = h$ ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s;
 $Re=679$). 115

6.22. Temperatura dentro de la escarcha ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$
m/s; $Re=2717$). 115

6.23. Temperatura en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). 116

6.24. Temperatura en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$). 116

6.25. Humedad en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). . . 118

6.26. Humedad en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$). 118

6.27. Perfil de humedad en $y = h$ ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). 118

6.28. Humedad en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$). . 119

6.29. Humedad en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$). 119

6.30. Perfiles de velocidad en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).	120
6.31. Perfiles de velocidad en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).	120
6.32. Perfiles de velocidad en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).	122
6.33. Perfiles de velocidad en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).	122
6.34. Densidad promedio - Casos S01 y S08	123
6.35. Conductividad promedio - Casos S01 y S08	124
6.36. Calor transferido hacia la placa S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).	127
6.37. Calor transferido hacia la placa S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).	127
6.38. Flujo de masa en $x = L/2$ - S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).	128
6.39. Flujo de masa en $x = L/2$ - S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).	128
6.40. Distribución de densidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.	131
6.41. Distribución de temperatura - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.	132
6.42. Distribución de humedad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.	133

6.43. Distribución de la componente en x de la velocidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.	134
6.44. Distribución de la componente en y de la velocidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.	135
6.45. Distribución del vector de la velocidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.	136
B.1. Aplicación línea por línea del TDMA [50].	150
D.1. Humedad relativa - Caso 01	158
D.2. Temperatura del aire - Caso 01	158
D.3. Temperatura de la placa - Caso 01	159
D.4. Humedad relativa - Caso 02	159
D.5. Temperatura del aire - Caso 02	160
D.6. Temperatura de la placa - Caso 02	160
D.7. Humedad relativa - Caso 03	161
D.8. Temperatura del aire - Caso 03	161
D.9. Temperatura de la placa - Caso 03	162

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Propiedades constantes del aire a presión atmosférica.	30
4.1. Coeficientes de la ecuación general de transporte.	43
4.2. Coeficientes para la ecuación de cantidad de movimiento.	68
4.3. Coeficientes para la ecuación de conservación de la energía.	70
4.4. Coeficientes para la ecuación de concentración de vapor de agua.	70
5.1. Condiciones de los experimentos.	87
6.1. Características de las mallas.	98
6.2. Diseño de experimentos.	106

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Hermelinda Hernández Lara y Hugo Guadalupe Ramírez Mendoza por todo su apoyo incondicional durante la realización de este trabajo.

A mis hermanos, Hugo Guadalupe, Héctor Leonardo y Miguel Ángel por ser una parte importante en mi vida.

Al Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz por su confianza al incluirme en las distintas actividades dentro del grupo de trabajo y por su orientación y apoyo en la realización de este trabajo.

Al Dr. Simón Martínez Martínez por su soporte como Subdirector de Estudios de Posgrado.

A mis profesores M.C. Miguel García Yera, Dr. Santos Méndez, Dr. Arturo Morales, Dr. Oscar de la Garza de León y Dr. Azael Capetillo por todas sus enseñanzas.

A mis compañeros de generación, Alberto Arenas, Gabriela García y en especial a Pablo Gómez-Gordo por su amistad y por apoyarnos siempre en el tiempo que compartimos en el programa de maestría.

A los compañeros de generaciones anteriores, Víctor Madrid, Adolfo Benítez, Mayra Mendoza, Jesús Juárez, Omar Torres, Jessica Casanova y José Camacho.

A los compañeros de generaciones posteriores, Víctor Sánchez, Luis Fernando Rua, Guillermo Rubio, Flor de Lis Corral, Cecilia Pérez y Soraima Carmona.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, en especial al Grupo de Energías Térmica y Renovable (GETR) por permitirme participar en los distintos proyectos y actividades dentro del grupo.

Al CONACyT por el apoyo recibido para la realización de Investigación Básica a través del proyecto número 221993.

Al CONACyT por el apoyo recibido a través de la beca con clave 576035 que me brindó a partir del 01 de enero de 2015 hasta el 31 de diciembre de 2016 para realizar mis estudios de maestría.

NOMENCLATURA

Símbolos romanos

w	Humedad específica	[kg/kg]
c_p	Calor específico	[J/kg · K]
D	Coefficiente de difusión de masa	[m ² /s]
u	Componente de la velocidad en dirección x	[m/s]
v	Componente de la velocidad en dirección y	[m/s]
t	Tiempo	[s]
p	Presión	[Pa]
T	Temperatura	[°C]
q_{sub}	Calor de sublimación del agua	[J/kg]
V	Volumen	[m ³]
A_{1-3}	Constantes de la ecuación 3.13	[-]
y_f	Espesor de la capa de escarcha	[m]
\dot{m}	Flujo másico de vapor de agua	[kg/s · m ²]
SC	Superficie de control	[m ²]
i	Posición del nodo en dirección x	[-]

j	Posición del nodo en dirección y	[-]
k	Posición del nodo en dirección z	[-]
\vec{u}	Vector de velocidad	[m/s]
S	Término fuente	[-]
\vec{F}_x	Fuerzas de cuerpo en dirección x	[-]
\vec{F}_y	Fuerzas de cuerpo en dirección y	[-]
\dot{q}	Generación de calor	[J]
P	Nodo de referencia	[-]
E, W, N, S	Nodos vecinos al nodo P en los puntos cardinales	[-]
SE	Nodo Sureste del nodo P	[-]
\vec{n}	Vector unitario	[-]
\bar{S}	Valor promedio del término fuente	[-]
S_C	Término constante del término fuente	[-]
S_P	Término proporcional a ϕ del término fuente	[-]
F	Coefficientes convectivos	[kg/m · s]
D	Coefficientes difusivos	[kg/m · s]
a	Coefficientes de la ecuación discretizada	[kg/m · s]
b	Término fuente de la ecuación discretizada	[-]
A	Área	[m ²]
B_{0-4}	Constantes de la ecuación 4.56	[-]
C_{0-4}	Constantes de la ecuación 4.57	[-]

<i>Frost</i>	Matriz con la geometría de la escarcha	[-]
n	Número de nodos en la dirección x	[-]
m	Número de nodos en la dirección y	[-]

Símbolos griegos

Γ	Coefficiente de difusión	[kg/m · s]
γ	Constante de la ecuación 3.9	[-]
λ	Conductividad térmica	[J/m · s · K]
μ	Viscosidad dinámica	[kg/m · s]
ϕ	Propiedad escalar de la ecuación general de transporte	[-]
ρ	Densidad	[kg/m ³]
τ	Tortuosidad del medio	[-]
ε	Porosidad de la capa de escarcha	[-]
α	Difusividad térmica	[m ² /s]
Δx	Tamaño del volumen del nodo en x	[m]
Δy	Tamaño del volumen del nodo en y	[m]
δx	Distancia en x de nodos vecinos	[m]
δy	Distancia en y de nodos vecinos	[m]
ΔV	Cambio del volumen de la escarcha	[m ³]
ΔL	Avance de la escarcha	[m]
ΔC	Porcentaje ocupado por la escarcha en los nodos vecinos de aire	[-]

Subíndices

<i>a</i>	Aire
<i>dif</i>	Difusivo
<i>e, w, n, s</i>	Caras del volumen del nodo
<i>ef</i>	Valor efectivo dentro de la escarcha
<i>f</i>	Escarcha
<i>gas</i>	Fase gaseosa
<i>i</i>	Hielo
<i>in</i>	Valores de entrada
<i>nv</i>	Nodos vecinos
<i>prom</i>	Valor promedio
<i>s</i>	Valor en la superficie
<i>sat</i>	Valor de saturación
<i>sol</i>	Fase sólida

Superíndices

'	Corrección de los valores
*	Valores adimensionales
*	Valores supuestos (pág. 62)
0	Valores iniciales o del paso de tiempo anterior

Números adimensionales

<i>C</i>	Número de Courant
<i>Fo</i>	Número de Fourier

Pe Número de Péclet

Pr Número de Prantl

Re Número de Reynolds

Operadores

∇ Operador nabla

$\| A, B \|$ El mayor entre los números A y B

Acrónimos

H.R. Humedad relativa

SIMPLE Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

TDMA Tri-Diagonal-Matrix-Algorithm

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 RESUMEN

La formación de escarcha es un fenómeno muy común que ocurre cuando se tiene una superficie a baja temperatura en un ambiente con aire húmedo. Este fenómeno ocurre debido a que el vapor de agua contenido en el aire cambia de fase, depositándose sobre la superficie fría. El estudio de este fenómeno es de gran importancia debido a que el espesor y las propiedades termofísicas (i.e. conductividad térmica y densidad) de la capa de escarcha afectan considerablemente a la transferencia de calor que ocurre entre el aire húmedo y la superficie fría.

Debido a esto, en los últimos 20 años se han realizado diversos estudios numéricos y experimentales para poder conocer las condiciones bajo las cuales se favorece la formación de la escarcha, además de conocer la variación de sus propiedades y el efecto que tiene esta variación a la transferencia de calor.

Para poder predecir el crecimiento de la capa de escarcha sobre superficies planas a bajas temperaturas en condiciones de convección forzada, en este trabajo de investigación se desarrolló un código numérico empleando el Método de los volúmenes finitos. Para lograr esto, fue necesario resolver las ecuaciones que gobiernan dicho fenómeno, es decir, las ecuaciones de conservación de masa, conservación de cantidad

de movimiento, conservación de la energía y transporte de especies para todo el dominio, mismo que incluía la capa de escarcha y el aire húmedo. Para calcular la tasa de crecimiento se realizó un balance de masa en la interfaz *escarcha-aire* en donde se estimó la diferencia entre los flujos de masa que provenían del lado del aire y los flujos de masa que se difundían dentro de la capa de escarcha, y esta diferencia correspondía a la masa que contribuye al crecimiento de la escarcha. Además de esto, se calculó la variación de las propiedades termofísicas dentro de la capa de escarcha considerando que ésta es un medio poroso. Para validar el código numérico, se realizó un estudio experimental en un calorímetro tipo túnel de viento en el que es posible tener controladas las variables involucradas en el fenómeno (i.e. temperatura, humedad relativa, velocidad del aire). El parámetro que se validó fue el espesor de la capa de escarcha. Se realizaron tres casos de estudio, con el fin de poder comparar los resultados numéricos a diferentes condiciones y se encontró una diferencia relativa menor del 10 % en la mayoría de los puntos en donde se midió el espesor, siendo que al final de la placa el error fue mayor, de entre 12 % y 22 %, presumiblemente por la transición al régimen turbulento.

1.2 MOTIVACIÓN

Debido a la alta demanda de energía que existe a nivel mundial, constantemente se buscan diversas estrategias que permitan conseguir un ahorro de energía en los diversos sectores de la sociedad. De acuerdo a la Secretaría de Energía [1] por medio del Sistema de Información Energética [2], el consumo de energía eléctrica en México en el año 2016 fue de 218,072 GWH, de los cuales un 27 % corresponde al sector residencial, siendo el segundo sector que mayor energía consume, solamente por debajo del sector industrial con un 57 % (Figura 1.1). Dentro del sector residencial, la iluminación representa el 40 % del consumo total, seguido por el refrigerador con un 29 % en el año 2015 de acuerdo con la Comisión nacional para el uso eficiente de la energía [3] (Figura 1.2). Debido al alto consumo energético que representan los

sistemas de refrigeración es necesario buscar las diferentes áreas de oportunidad que existen en donde se pudiera conseguir un ahorro de energía.

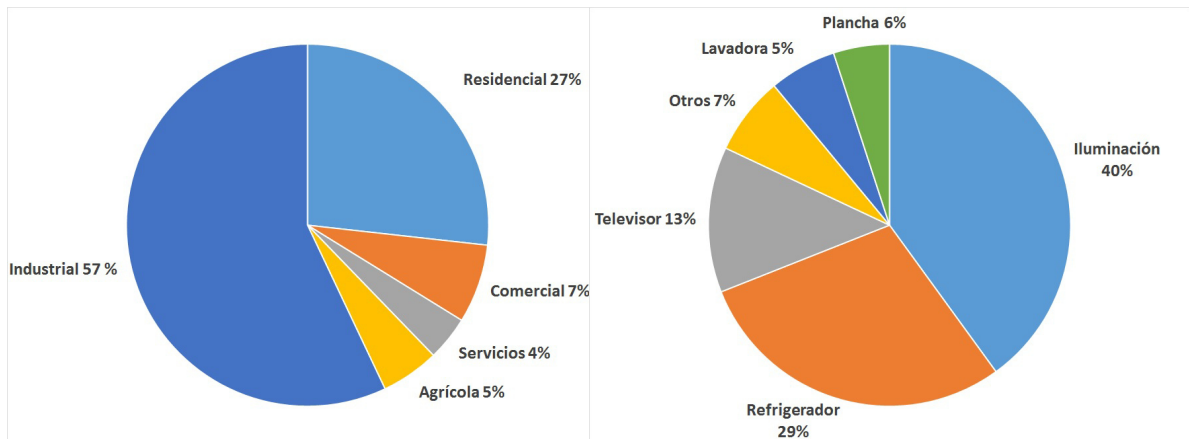


Figura 1.1: Consumo energético por sectores en México en 2016 [2].

Figura 1.2: Consumo dentro del sector residencial en México en 2015 [3].

La formación y crecimiento de escarcha es un fenómeno muy común, y en la mayoría de los casos indeseable, que ocurre en diversos campos de la ingeniería, como por ejemplo en los sistemas de refrigeración, bombas de calor, criogenia y aeronáutica. En particular, los sistemas de refrigeración se utilizan para el confort térmico en una habitación, así como también para conservar los alimentos. La mayoría de estos sistemas emplean la compresión de vapor. Estos sistemas se componen principalmente de cuatro dispositivos: (1) Compresor, (2) Condensador, (3) Válvula de expansión y (4) Evaporador.

El objetivo del evaporador en un sistema de refrigeración es extraer el calor contenido en la cavidad que se desea enfriar (el compartimiento del congelador en el caso de los refrigeradores domésticos) y transferirlo hacia el fluido refrigerante. Si el evaporador se encuentra operando a una temperatura por debajo del punto de rocío, el vapor de agua contenido en el aire se condensará depositándose en la superficie del evaporador, y si esta temperatura se encuentra por debajo del punto de congelación del agua, se formará escarcha.

La capa de escarcha que se forma afecta en gran medida al desempeño del evaporador y de todo el sistema de refrigeración debido a dos fenómenos que ocurren. El primero se debe a que la escarcha se comporta como un aislante térmico, esto debido a que la escarcha es un medio poroso compuesto por partículas de hielo y espacios de aire húmedo el cual posee una baja conductividad térmica, afectando la transferencia de calor que debe ocurrir entre el aire y el refrigerante. El segundo fenómeno es que, conforme la capa de escarcha crece, se produce un bloqueo en el flujo del aire forzado alrededor del evaporador ocasionando un aumento en la caída de presión afectando también al desempeño del equipo.

Es posible mejorar el desempeño de los sistemas de refrigeración al reducir la formación de escarcha en el evaporador. Debido a esto, es de gran importancia contar con un modelo adecuado que prediga la formación de escarcha, así como la variación de sus propiedades. Para poder lograr esto, es necesario evaluar modelos de transporte de calor y masa con cambio de fase de la literatura que podamos implementar y comparar con datos experimentales.

1.3 HIPÓTESIS

Es posible implementar modelos matemáticos de los fenómenos de transporte con modelos de crecimiento de escarcha para crear modelos robustos que predigan la transferencia de masa durante el cambio de fase en el fenómeno de formación y crecimiento de escarcha, considerando la variación de las propiedades más relevantes de la escarcha y del aire. Llevando a cabo un estudio experimental se podrá validar los modelos matemáticos dando respaldo a estos modelos robustos, mismos que tendrán factibilidad de aplicación en el proceso de diseño de intercambiadores de calor que operan bajo condiciones de formación de escarcha.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Identificar un modelo matemático que prediga transferencia de masa durante el cambio de fase en el proceso de formación de escarcha que pueda ser validado mediante un estudio experimental de forma exitosa, y que pueda ser aplicado en estudios computacionales de la formación y densificación de la escarcha.

1.4.2 OBJETIVOS PARTICULARES

1. **Revisión de diversos modelos para la predicción de formación y crecimiento de escarcha**

Se realizó una búsqueda intensiva para poder identificar diversos modelos que se han implementado en los últimos años para predecir la formación de la escarcha, así como la variación de las propiedades, ya sean modelos analíticos, numéricos, unidimensionales, bidimensionales, etc.

2. **Identificación de un modelo matemático adecuado que se pueda implementar en un código CFD**

De los modelos matemáticos encontrados, se eligió aquel que resuelva las ecuaciones de gobierno tanto para el dominio del aire como para el dominio de la escarcha, esto con el fin de eliminar la dependencia de correlaciones experimentales que puedan modificar la predicción del fenómeno. Además, es necesario que pueda predecir la variación de las propiedades más relevantes tanto de la escarcha como del aire.

3. **Desarrollo de un código CFD**

Con el modelo identificado se desarrolló un código numérico que emplea la

Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, por sus siglas en inglés) para resolver las ecuaciones de gobierno, tanto para el subdominio del aire como en el subdominio de la escarcha. El dominio computacional utilizado es bidimensional, pero se podrá implementar en estudios de tres dimensiones así como también diversas geometrías.

4. **Llevar a cabo un estudio experimental para validar los resultados numéricos.**

Para validar los resultados numéricos obtenidos, se llevó a cabo un estudio experimental en un calorímetro tipo túnel de viento en el laboratorio. Al comparar los resultados numéricos con los experimentales ha sido posible validar el modelo matemático que predice el proceso de formación y densificación de escarcha.

1.5 METODOLOGÍA

Esta investigación se llevó a cabo siguiendo la siguiente metodología:

1. **Revisión bibliográfica:** Se realizó una revisión bibliográfica para conocer el fenómeno de la formación de escarcha sobre superficies planas y cilíndricas, mediante estudios numéricos y experimentales. Se identificaron las variables que influyen en este fenómeno y los modelos matemáticos que se han utilizado para estudiar este fenómeno.
2. **Selección del modelo matemático:** De los modelos matemáticos encontrados en la literatura, se eligieron aquellos que utilizan la Dinámica de Fluidos Computacional para resolver el problema en estado transitorio, en dos dimensiones y con dos dominios (aire húmedo y escarcha).
3. **Implementar el modelo en un código escrito en lenguaje Fortran:** El modelo elegido se implementará en un código escrito en lenguaje *Fortran*

discretizando las ecuaciones de gobierno en un esquema de *Volúmenes Finitos (Finite Volume Method)*, utilizando el algoritmo *SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations)* para el acoplamiento de los campos de velocidad y presión en las ecuaciones de *Navier-Stokes*, y utilizando el algoritmo *TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)* para resolver el sistema de ecuaciones.

- 4. Llevar a cabo un estudio experimental para validar el código numérico:** Con el fin de validar el código numérico se realizó un estudio experimental en las instalaciones de la FIME. Se utilizó una placa plana de cobre la cual se mantuvo a una temperatura constante. Esta placa se colocó dentro del *túnel de viento*, ubicado en los *Laboratorios de Investigación e Innovación en Tecnología Energética (LIITE)*, para poder tener controladas las variables que afectan el fenómeno, i.e. humedad, temperatura y velocidad en el aire.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE

En las últimas dos décadas se han llevado a cabo muchos estudios referentes al fenómeno de formación de la escarcha, tanto numéricos [4–9] como experimentales [10–15] para evaluar el fenómeno de formación de escarcha, las condiciones en las cuales este fenómeno ocurre, la variación de las propiedades dentro de la escarcha y el efecto que tiene sobre la transferencia de calor. Estos estudios se han realizado en diversas geometrías, ya sea sobre placas planas, en geometrías cilíndricas [16, 17] o en el evaporador completo [18–23]. Este capítulo se separa en dos secciones: *Estudios numéricos* 2.1 y *Estudios experimentales* 2.2, donde se describirán los estudios más relevantes encontrados en la literatura.

2.1 ESTUDIOS NUMÉRICOS

Los métodos computacionales que se han desarrollado para el modelado de la formación de escarcha, pueden ser clasificados en tres grupos [5] de acuerdo al enfoque que poseen.

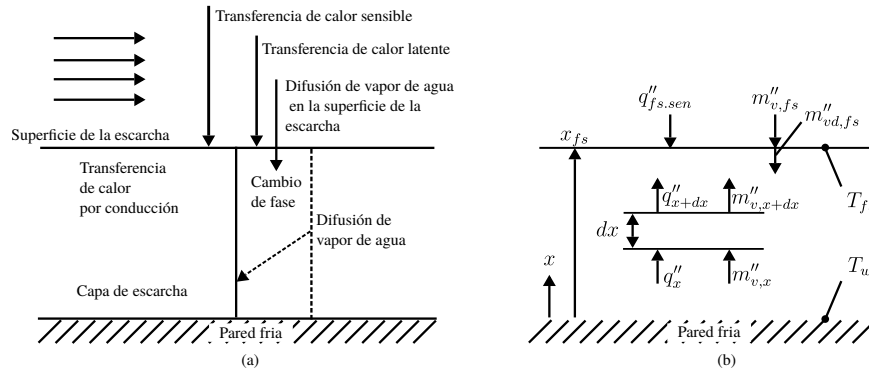


Figura 2.1: Modelo del primer grupo: (a) Modelo físico, (b) Modelo matemático. Adaptado de [24].

2.1.1 MODELO EN EL DOMINIO DE LA ESCARCHA

El primer grupo se enfoca solamente en el dominio de la escarcha, sin tomar en cuenta la influencia del flujo del aire. La transferencia de calor y masa la calculan mediante correlaciones empíricas para la difusión en el dominio del aire [24–27]. En la Figura 2.1 se puede ver un diagrama como el que generalmente se emplea en este grupo.

Jones en 1975 [25] fue de los primeros en desarrollar un modelo que predice la formación de escarcha considerando la variación en los distintos parámetros involucrados, i.e., velocidad del aire, temperatura y humedad; los modelos utilizados en ese tiempo los consideraban constantes. Este modelo se basa en la difusión molecular del vapor de agua a la superficie de la escarcha y realiza un balance de energía y masa dentro de la misma. Supone que la densidad de la escarcha no varía con el espacio, y como condiciones iniciales considera un espesor de 2×10^{-5} m y una densidad entre 8 y 48 kg/m³, demostrando que la densidad inicial no afecta en gran medida el espesor a tiempos posteriores. Al comparar los resultados del modelo con datos experimentales (Figura 2.2), encuentra una desviación del 30 %.

Kwan-Soo Lee [27] desarrolló un modelo unidimensional para la formación de escarcha sobre una superficie plana. Su modelo se basa en la difusión molecular del

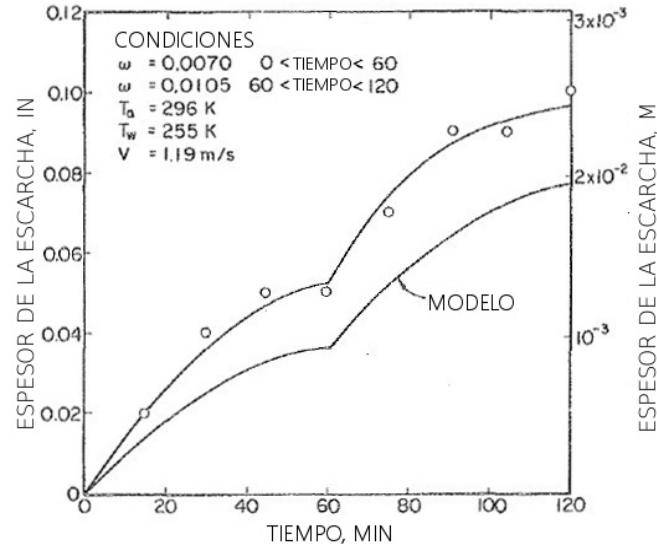


Figura 2.2: Comparación con datos experimentales. Adaptado de [25].

vapor de agua y en la liberación de calor debido al cambio de fase que ocurre cuando el vapor de agua pasa a formar parte de la escarcha. Para obtener la distribución de la densidad y de la temperatura dentro de la escarcha, se resuelven dos ecuaciones considerando que la difusión de masa y la transferencia de calor ocurren solamente en la dirección normal a la superficie fría. Para conocer la transferencia de calor en el lado del aire se utiliza una relación para obtener el coeficiente de transferencia de calor en función del número de Reynolds, por otro lado la conductividad térmica la calculan en función de la densidad. Para validar el modelo, se realizaron pruebas experimentales en un túnel de viento en donde variaban la velocidad y la humedad en el aire obteniendo un error de entre 10 y 19.2%. Este experimento se explicará a mayor detalle en la sección 2.2.

2.1.2 MODELO CON DOS SUBDOMINIOS

El segundo grupo considera ambos dominios, el de la escarcha y el del aire húmedo, con condiciones en la interfaz que conecta ambas regiones [7, 22, 28–30], tal como se muestra en la Figura 2.3.

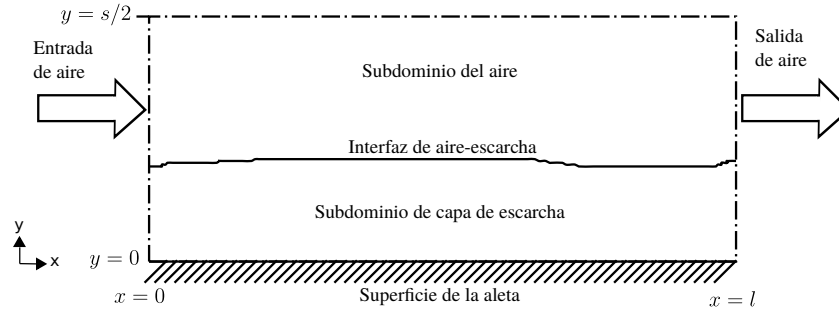


Figura 2.3: Modelo con dos subdominios. Adaptado de [30].

Lee [28] y Yang [22, 29] utilizaron este método para calcular el crecimiento de escarcha sobre una placa fría con flujos laminar y turbulento. Lee [28] presenta un modelo matemático para predecir el comportamiento de la formación de escarcha considerando dos regiones, una para el flujo del aire y otra para la capa de escarcha, sin utilizar correlaciones experimentales y considerando que los procesos son cuasi-estables, además de que la densidad no varía en la dirección normal a la superficie fría. Para el dominio del aire se resuelven las ecuaciones de continuidad, momentum, energía y concentración de masa, y para el dominio de la escarcha sólo se resuelven una ecuación modificada para la difusión de masa y la ecuación de la energía. Este modelo requiere como condiciones iniciales la densidad y el espesor de la escarcha, las cuales se obtienen de datos experimentales. Como condición de frontera para el acoplamiento de las ecuaciones de gobierno en la interfaz, se tiene que cumplir un balance de energía entre el dominio del aire y el de la escarcha. Se realizaron pruebas experimentales para validar el modelo y obtuvieron un error de 10%. En la Figura 2.4 se muestra la comparación de los resultados numéricos con los datos experimentales a tres condiciones de operación.

Por otro lado, Lenic [7] presenta un modelo en el que considera dos subdominios, uno para el aire y otro para la escarcha como el descrito por Lee [28], pero tomando en cuenta dos dimensiones y en estado transitorio. Para el subdominio del aire considera las ecuaciones de continuidad, momentum, energía y transporte del vapor de agua, mientras que en el subdominio de la escarcha solamente la ecuación de la energía y la de difusión de masa. Para obtener la densidad se utiliza una

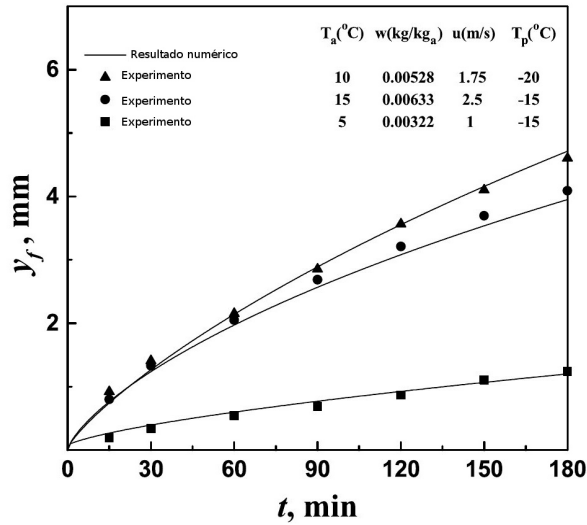


Figura 2.4: Comparación de los resultados numéricos con datos experimentales. Adaptado de [28].

correlación en función de la porosidad y con esta densidad se obtiene la conductividad térmica. El dominio computacional que utilizan representa el espacio entre dos aletas de un evaporador. Las ecuaciones de gobierno antes mencionadas, se discretizan utilizando el *método de los volúmenes finitos*, utilizan mallas desplazadas para las componentes de la velocidad, para los términos convectivos y difusivos utilizan el esquema “*Power law*”, para el término temporal utilizan el esquema totalmente implícito y para revolver el acoplamiento de las velocidades y las presiones se utilizó el algoritmo SIMPLER. Este algoritmo se escribió en un código Fortran.

Para validar el código numérico se realizó una serie de experimentos a distintas condiciones (los cuales se comentarán en la sección 2.2) para obtener el espesor y la temperatura en distintos puntos de la placa. Estos resultados demostraron que el código sí predice de manera acertada el espesor de la capa de escarcha, teniendo un error relativo menor del 10% en el tiempo final. Una vez que validaron el código se procedió a realizar una serie de once experimentos variando los diferentes parámetros involucrados, i.e. velocidad, temperatura y humedad en el aire, así como la temperatura en la superficie. Entre los resultados que reportan se encuentran: la variación del espesor de la escarcha con respecto a tiempo (Figura 2.5), la distribu-

ción de temperatura, la distribución de la humedad en el aire y la conductividad de la escarcha.

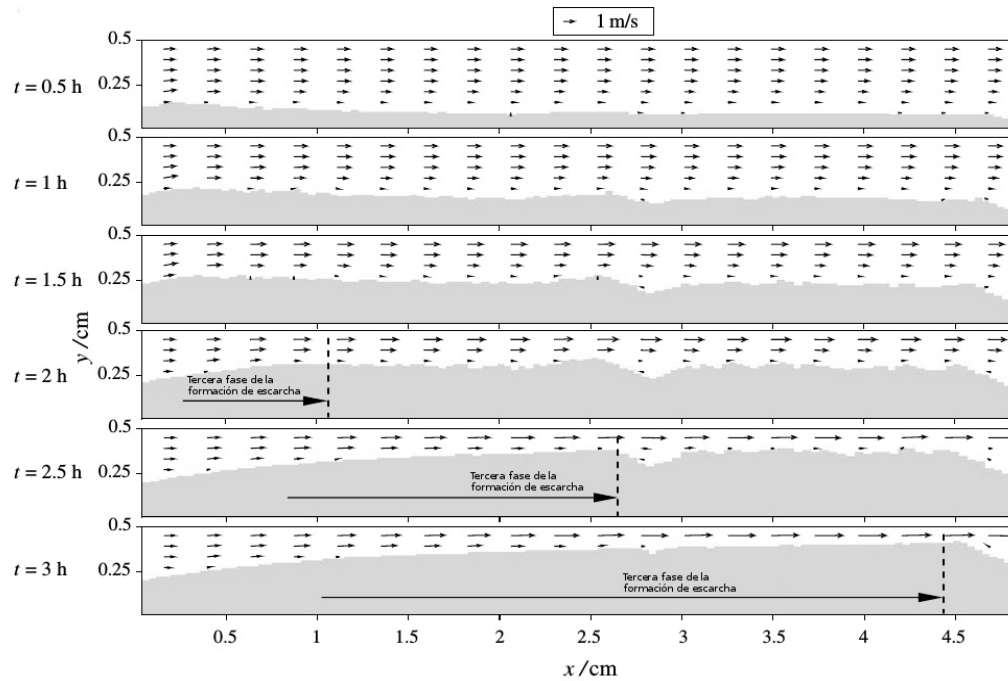


Figura 2.5: Espesor de la capa de escarcha y campo de velocidad. Adaptado de [7].

Recientemente, J.M. Armengol [8] desarrolló un código en lenguaje Fortran para predecir el crecimiento de la escarcha sobre una superficie plana, además de predecir la variación de las propiedades dentro de la escarcha. Él utilizó un solo dominio en el cual se incluía la capa de escarcha y el flujo del aire y no utilizaron una condición en la interfaz *escarcha-aire*. Dependiendo de si los nodos correspondían a la parte de escarcha o aire, las propiedades termofísicas tomaban los valores correspondientes y de la misma forma las ecuaciones de transporte se resolvían de diferente manera para el aire y para la escarcha. Este estudio es muy parecido al presentado por Lenic [7], la gran diferencia fue que el crecimiento de la escarcha se consideró en dos dimensiones, de esta manera fue posible modelar el crecimiento tanto en dirección vertical como en horizontal. Para poder observar el crecimiento en dirección horizontal se requirió extender el dominio más allá de la placa fría. Entre los resultados reportados por Armengol se tiene la comparación del espesor de la

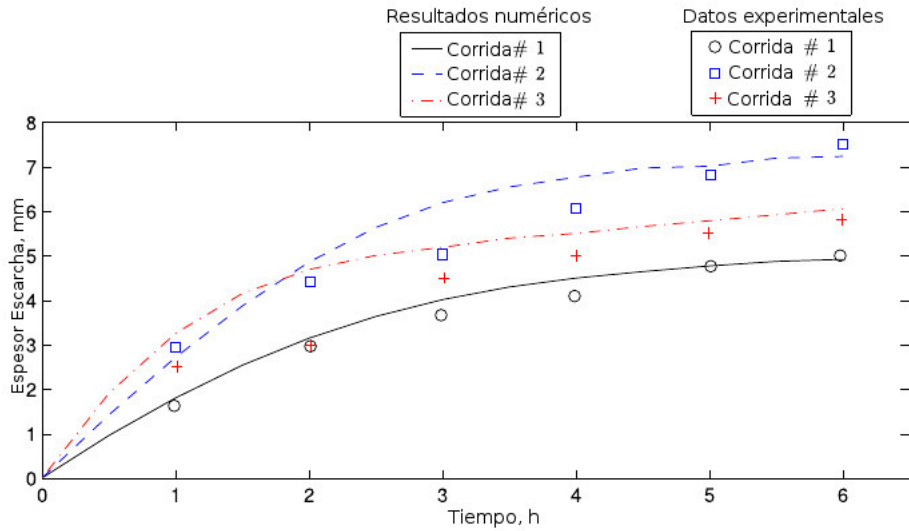


Figura 2.6: Comparación del espesor de la escarcha entre resultados numéricos y experimentales. Adaptado de [8].

escarcha obtenido con el código numérico con datos experimentales para tres condiciones, teniendo una desviación máxima de 23.1 %. Esto se observa en la Figura 2.6. Además reportan los contornos de temperatura, humedad, densidad y conductividad para una de las condiciones.

2.1.3 MODELO CON FLUJO MULTIFASE

El tercer grupo resuelve las ecuaciones de gobierno para ambas fases simultáneamente en el dominio computacional, empleando un modelo de flujo multifase utilizando el software comercial *ANSYS FLUENT*® [4, 9, 31, 32]. En la Figura 2.7 se puede observar un esquema de este tipo de modelado.

Cui en 2011 propone un nuevo modelo dependiente del tiempo y el espacio para predecir el crecimiento de escarcha sobre placas planas [9] y sobre superficies cilíndricas [31], este modelo lo introduce como término fuente utilizando el software comercial *ANSYS FLUENT*®. El modelo introduce un término llamado *fracción de volumen de sólido* α_{sol} , el cual varía entre 0 y 1, tomando el valor de 1 cuando exista

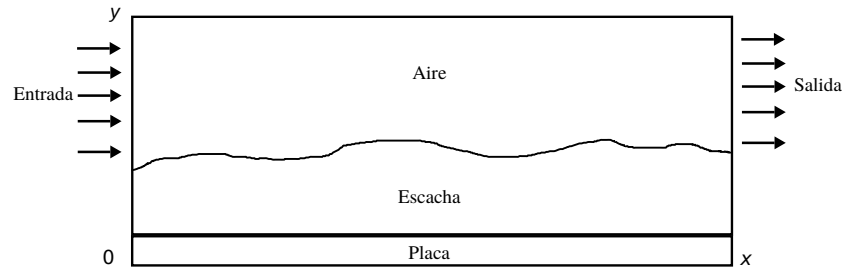


Figura 2.7: Modelo con flujo multifase.

solamente la fase sólida y 0 cuando exista solamente la fase gaseosa. Se plantea una ecuación para la variación de la fracción de volumen para el sólido, mientras que para la fase gaseosa se calcula el complemento a la unidad, esto es $\alpha_{gas} = 1 - \alpha_{sol}$. Este modelo resuelve las ecuaciones de continuidad, conservación de cantidad de movimiento y energía para ambas fases y una ecuación de conservación de humedad para la fase gaseosa. Todas estas ecuaciones están acopladas entre sí mediante los términos fuente o sumidero según sea el caso, por ejemplo, la masa que se deposita para formar escarcha nueva se considera como sumidero para la ecuación de continuidad de la fase gaseosa y la ecuación de conservación de humedad, mientras que para la ecuación de continuidad de sólido se considera como fuente. Además estos términos fuente también afectan a las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y energía. La masa de humedad que se deposita es calculada mediante un modelo matemático que emplea la teoría de la nucleación.

Al resolver el sistema de ecuaciones propuesto en un dominio discreto se obtienen fracciones de volumen de sólido locales. Al principio, la masa de humedad que sufre el cambio de fase de gas a sólido causa que la fracción de volumen de sólido comience a crecer. Los nodos que presenten una fracción de sólido mayor o igual a cierto valor son considerados formalmente como escarcha mientras que, por debajo de dicho valor se consideran todavía como fluido con partículas sólidas dispersas. El hecho de tener una fracción de volumen de sólido local permite observar tanto el crecimiento como la densificación de la escarcha a lo largo de todo el dominio. Dentro de los resultados reportados por Cui se encuentran contornos de fracción de

volumen de sólido a distintos tiempos (Figura 2.8), la variación de la densidad y la conductividad térmica.

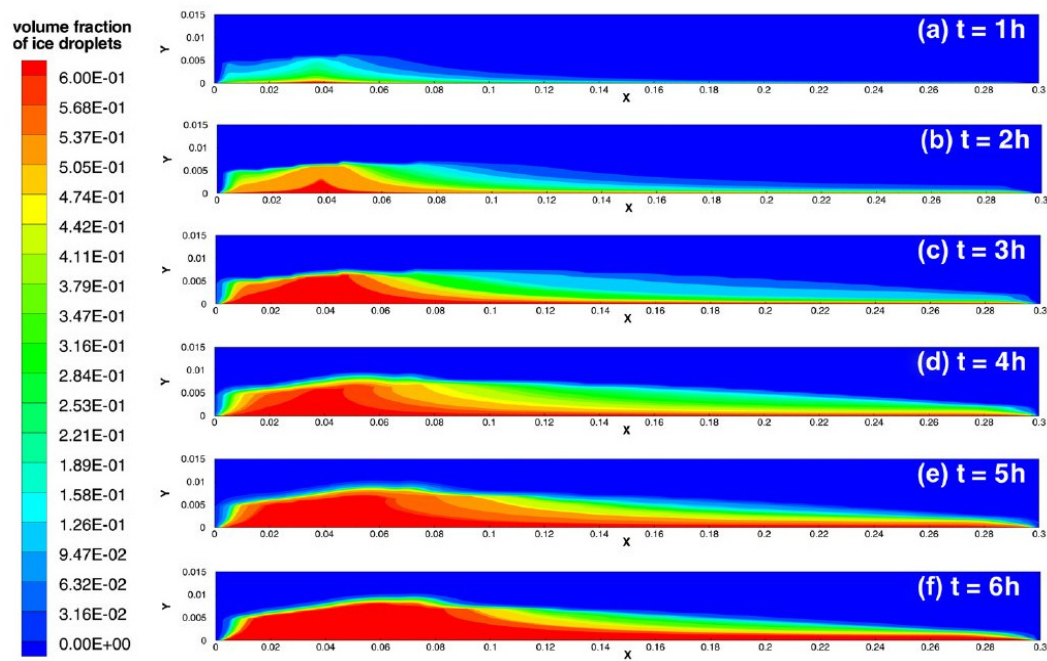


Figura 2.8: Fracción de volumen de sólido [9].

Xiaomin Wu en 2016 [5] desarrolla un modelo de transferencia de masa en el cambio de fase para predecir la formación y densificación de escarcha en una placa plana. Este modelo se emplea como un término fuente en el software comercial *ANSYS FLUENT*® utilizando un modelo *Euler multifase*, cuyos resultados se comparan con datos experimentales obtenidos del estudio realizado por Kwon en el 2006 [33]. Este modelo contiene dos fases, la primera corresponde al aire húmedo y la segunda fase corresponde al hielo que forma la escarcha. Para cada fase se resuelven las ecuaciones de conservación de momentum, energía y masa, además de una ecuación de conservación de especies para el vapor de agua. El modelo para predecir la cantidad de masa que sufre el cambio de fase de gas a sólido se incluye en las ecuaciones de gobierno por medio de los términos fuente. Este modelo se basa en la premisa de que la “fuerza conductora” para condensar el vapor de agua en hielo es la diferencia entre la presión parcial del vapor de agua del aire húmedo y la presión del vapor de agua saturado, las cuales están relacionadas con la diferencia

de concentración de vapor. Por lo tanto, la transferencia de masa se relaciona con la diferencia de concentración de vapor y la densidad efectiva en el aire húmedo:

$$\dot{m}_{ai} = \tau \alpha_a \rho_a [w_{va} - w_s(T)] \quad (2.1)$$

de donde τ es un coeficiente de relajación del tiempo, α_a es la fracción de volumen de aire y ρ_a es la densidad del aire.

Entre los resultados reportados por Xiaomin se encuentra la comparación de la distribución de temperatura experimental y numérica, y los contornos de la fracción de volumen de hielo, mostrado en la Figura 2.9, y los contornos de temperatura de la Figura 2.10.

La distribución de temperatura en la placa de aluminio está en concordancia con los resultados experimentales reportados por Kwon [33]. La morfología de la formación de escarcha también es consistente con los resultados experimentales; la escarcha primero se forma en la parte central de la placa, debido a que en esta zona se encuentra la temperatura menor y gradualmente se extiende aguas arriba y aguas abajo. Otro punto importante es la distribución de densidades, la cual muestra que cerca de la superficie fría es más densa mientras que conforme se va alejando de la superficie, la densidad disminuye.

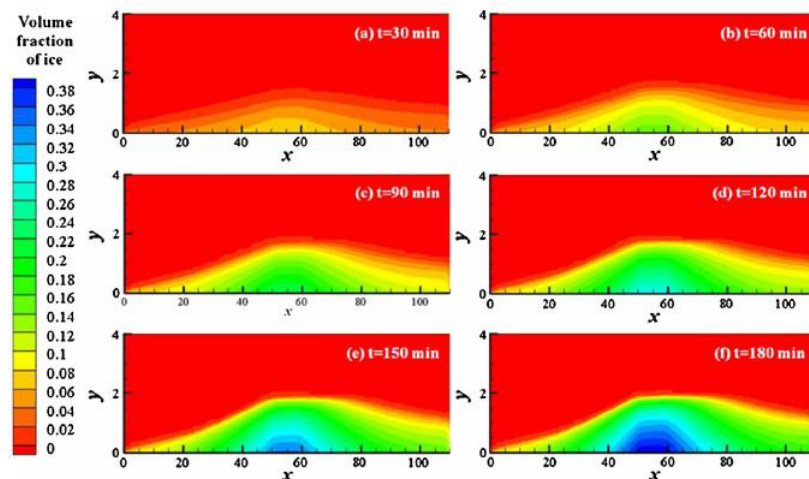


Figura 2.9: Distribución de la fracción de volumen del hielo [5].

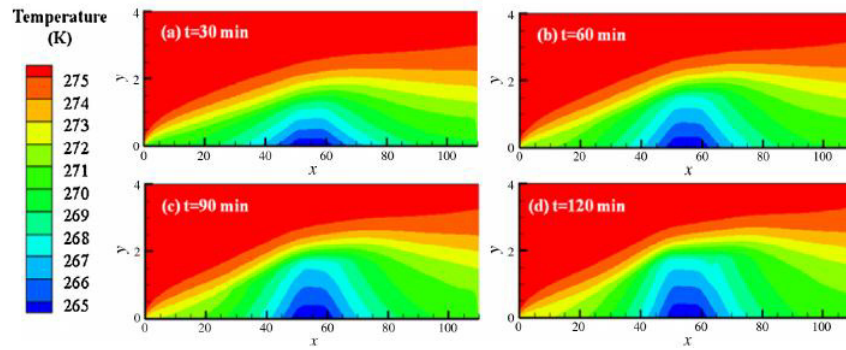


Figura 2.10: Predicción de la temperatura a distintos tiempos [5].

2.2 ESTUDIOS EXPERIMENTALES

Además de los estudios teóricos que se han desarrollado para la predicción de la formación de escarcha, existen también diversos estudios experimentales que se han realizado para conocer este fenómeno; en esta sección se resumen los más relevantes. Kwan-Soo Lee [27] en 1997 propuso un modelo unidimensional para predecir la formación de escarcha y para validar dicho modelo realizó pruebas experimentales utilizando un túnel de viento de circuito cerrado. Este se compone de una sección de prueba, una sección de enfriamiento, la cámara climática, un caudalímetro, cuatro estabilizadores de flujo, un ventilador y dos pantallas antes y después de la sección de pruebas. En la Figura 2.11 se puede observar a mayor detalle la sección de pruebas, en la cual se tiene la placa a baja temperatura (1), dos mallas de termopares antes y después de la placa fría (2), dos sensores de humedad (3), dos estabilizadores de flujo de aire (4), dos placas de acrílico (5) y un aislante térmico (6). En este estudio reportan cinco pruebas, en las cuales se mantuvieron la temperatura del aire y la temperatura de la placa fría como constantes, mientras que variaban el contenido de humedad de 50 a 80 % y la velocidad del aire de 0.5 a 2.0 m/s.

J. T. Kwon en el año 2006 [33] llevó a cabo un estudio experimental para conocer las características de la formación de escarcha en una superficie plana con enfriamiento local dentro del régimen laminar. Para el control de humedad y tem-

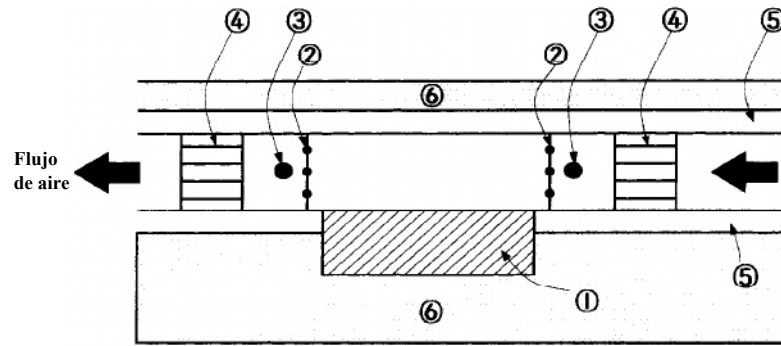


Figura 2.11: Esquema de la sección de pruebas. Adaptado de [27].

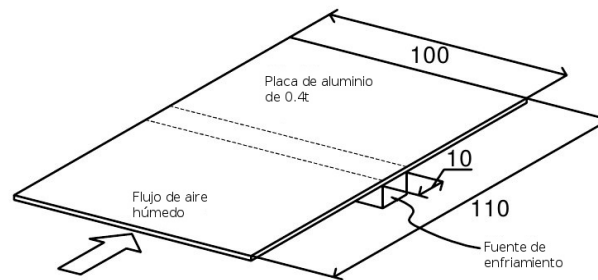


Figura 2.12: Sección de pruebas. Adaptado de [33].

peratura, las pruebas se realizaron dentro de una cámara climática. En la Figura 2.12 se muestra a detalle la sección de prueba, en la cual se tiene un canal de 4 mm \times 100 mm por donde pasa el aire, en la parte inferior se tiene una placa de aluminio la cual se enfría en la parte central con nueve módulos Peltier de 4 Watts cada uno. Se mide la temperatura en la entrada y salida del canal, para conocer la masa promedio de la escarcha se utiliza una balanza electrónica, y para determinar el espesor de la escarcha se utilizó un microscopio. Entre los resultados reportados se tiene la distribución de temperaturas a lo largo de la placa, el flujo de calor y el espesor de la escarcha.

En 2009 Christian J.L. Hermes et al. [34] presentaron un estudio teórico y experimental para la predicción de la formación y densificación de la escarcha en superficies planas. El banco de pruebas que construyeron para llevar a cabo el estudio se muestra en la Figura 2.13, el cual fue colocado dentro de una cámara de

clima controlado en la que se controlaron la temperatura y humedad en el aire. Los parámetros utilizados en las pruebas fueron, velocidades de 0.7 a 1.0 m/s, humedad relativa de 40 a 90%, temperatura del aire de -20 a 30°C y la temperatura en la placa fría de -30 a 0°C. Para enfriar la placa se utilizó un dispositivo de refrigeración termoeléctrico el cual se compone de una placa de aluminio en el lado frío y un intercambiador de calor en el lado caliente, y se utilizó un ventilador axial para impulsar el flujo de aire y dos estabilizadores de flujo a la entrada del ducto. Para la medición del espesor se tomaron fotografías a la capa de escarcha cada minuto. Se llevaron a cabo dos conjuntos de experimentos, uno para conocer la variación del espesor de la escarcha a través del tiempo y otro para conocer la densidad. En los resultados reportados se muestran las fotografías del espesor de la escarcha a distintos tiempos, con un tiempo máximo de dos horas. Por otra parte, reportan también las densidades calculadas a distintas condiciones, las cuales las comparan con una correlación propuesta por Hayashi [35], demostrando que los resultados así calculados están muy alejados de la realidad. Para solucionar esto, modifican la correlación original de Hayashi agregando la influencia de la temperatura de la placa y de esta forma obtienen mejores resultados.

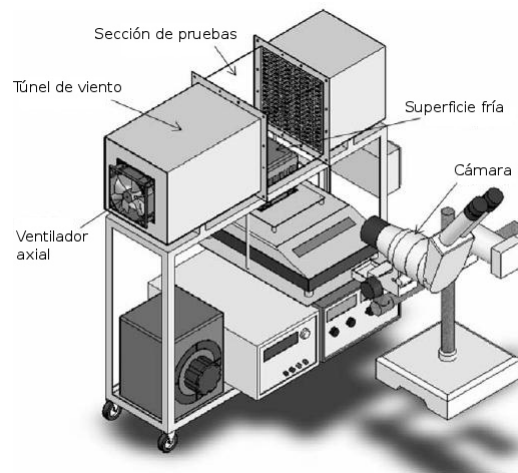


Figura 2.13: Banco de pruebas. Adaptado de [34].

Como se mencionó en la subsección 2.1.2, Lenic en 2009 [7] validó su código numérico realizando pruebas experimentales. Estas pruebas se llevaron a cabo en

un túnel de viento semi-abierto el cual posee un ventilador radial en la entrada, teniendo la sección de pruebas en la salida. En esta sección se colocó una placa plana de aluminio enfriada directamente por evaporación de refrigerante. Este túnel se colocó dentro de una cámara climática en donde se controlaba la temperatura y humedad en el aire. Los rangos de temperatura y humedad fueron de 19 a 23 °C y 37 a 60 %, respectivamente. Para medir la distribución de temperatura en la placa de aluminio se colocaron ocho termopares tipo K. Además de estos termopares, se colocaron otros más en la entrada, junto con sensores de velocidad y humedad. El esquema de este experimento, así como la distribución de los termopares sobre la placa de aluminio se muestran en la Figura 2.14.

Los resultados reportados por Lenic para validar el código numérico, muestra la distribución de temperatura, el espesor de la escarcha obtenidos con el código numérico, y su comparación con pruebas experimentales.

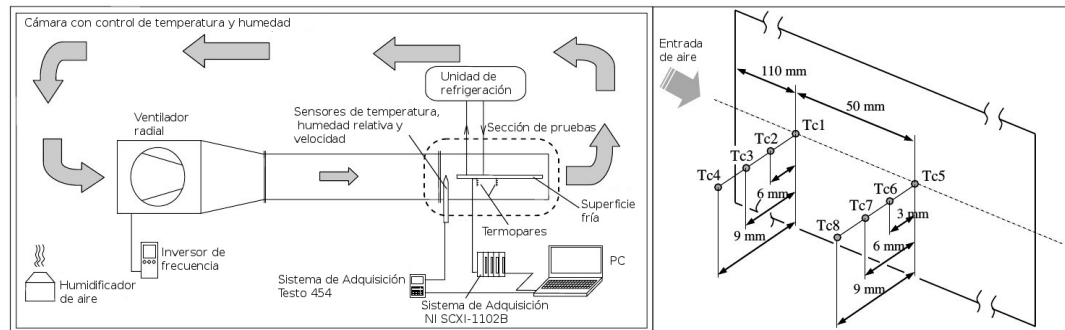


Figura 2.14: Esquema del experimento de Lenic. Adaptado de [7].

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

3.1 PROCESO DE FORMACIÓN DE ESCARCHA

El proceso de formación de la escarcha se puede dividir en tres etapas características, tal como lo propuso Hayashi [35]. Estas etapas son las siguientes:

- Etapa de crecimiento de cristales.
- Etapa de crecimiento de la escarcha.
- Etapa de desarrollo completo.

3.1.1 ETAPA DE CRECIMIENTO DE CRISTALES

Al inicio del proceso de formación de escarcha, el vapor de agua contenido en el aire húmedo pasa por un proceso de condensación o deposición sobre la superficie fría formando cristales sobre la misma. Estos cristales sirven de núcleos para los nuevos cristales que se depositan formando columnas de hielo, por lo que no se considera como un medio poroso y los fenómenos involucrados son transferencia de calor por convección y transferencia de masa y no existe difusión. Esta etapa posee un periodo

de tiempo muy corto pero tiene consecuencias en las etapas posteriores del proceso.

3.1.2 ETAPA DE CRECIMIENTO DE LA ESCARCHA

En esta etapa los cristales siguen creciendo en todas las direcciones. El vapor de agua que se condensa como gotas de agua y se deposita en partículas de hielo que se van colocando entre las columnas de hielo, por lo que después de un tiempo la capa de escarcha se convierte en un medio poroso compuesto por columnas de hielo y huecos de aire húmedo. En esta etapa la masa transferida a la capa de escarcha contribuye tanto al espesor como a la densidad.

3.1.3 ETAPA DE DESARROLLO COMPLETO

Esta etapa comienza en el momento en donde la temperatura de la superficie de la escarcha alcanza el punto de fusión del hielo. El calor latente liberado al ocurrir el cambio de fase provoca un aumento en la temperatura de la superficie de la escarcha, esto provocará que la escarcha de la superficie se derrita y se filtre a través del medio poroso alcanzando la superficie fría provocando que se vuelva a congelar. Este proceso de condensación/deposición, fusión y congelación continúa hasta que se alcance el equilibrio térmico. En esta etapa ocurre un aumento de la densidad y de la conductividad térmica, y el crecimiento de la escarcha es más suave. Estas tres etapas características las podemos observar en la Figura 3.1.

3.2 MODELO FÍSICO DE ESTUDIO

Para la presente investigación es de interés el estudio de la formación y crecimiento de la escarcha que ocurre sobre una aleta de un evaporador, en el cual fluye refrigerante a baja temperatura que se evapora al pasar por los tubos de alu-

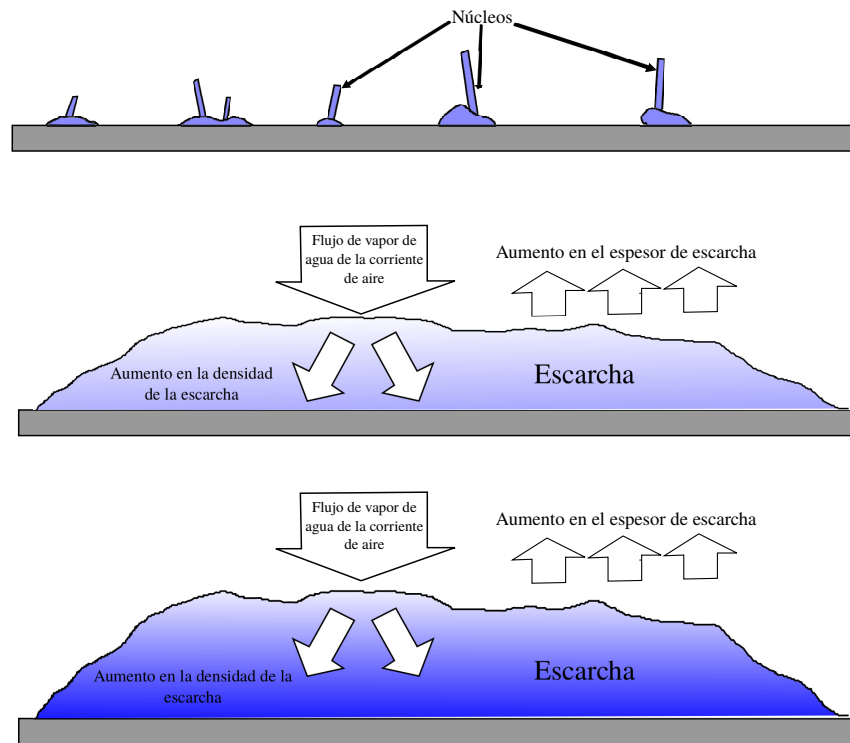


Figura 3.1: Proceso de formación de escarcha. Adaptado de [7].

minio provocando un descenso en la temperatura de las aletas de aluminio, y como consecuencia disminuye la temperatura del flujo de aire que pasa a través de éstas. Durante este proceso, ocurre una transferencia de calor y masa sobre la superficie del evaporador. Dado que la formación de la escarcha solamente aparece en el lado del aire, este estudio se limitará a esta región, y se considerará que la temperatura de las aletas es constante.

El *dominio computacional* elegido es el que se muestra en la Figura 3.2, que consiste en el espacio bidimensional entre dos aletas, teniendo así una simetría en la frontera norte, la entrada de aire en la frontera oeste y la salida de aire en la frontera este. En el caso de la frontera sur se tiene una región correspondiente a aire y otra región representando la aleta a baja temperatura. Se eligió una región de aire en la frontera sur, tal como lo propone Armengol [8] debido a que esto permite que la escarcha crezca en dirección horizontal, y no solamente en la dirección vertical, como lo manejan en la mayoría de los estudios de crecimiento de escarcha. Utilizando

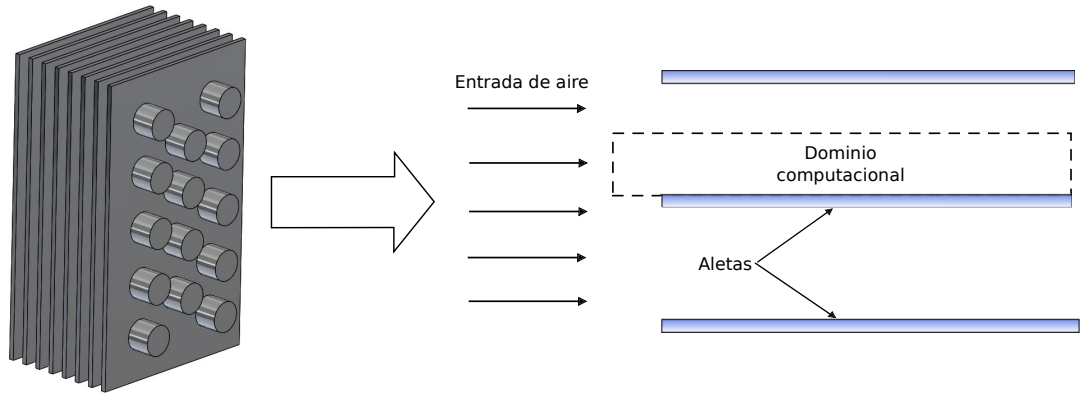


Figura 3.2: Modelo físico de estudio.

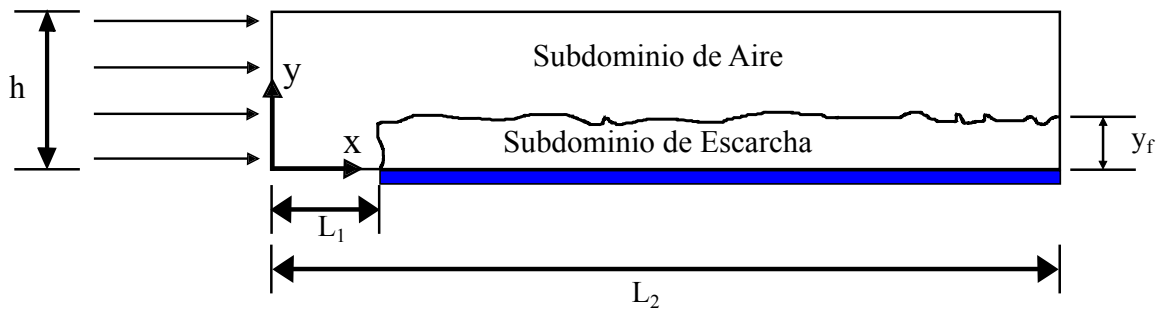


Figura 3.3: Dominio computacional elegido.

este enfoque nos permite tener condiciones de frontera más realistas, dado que no estamos forzando el crecimiento en una sola dirección.

El dominio de cómputo se puede ver esquemáticamente en la Figura 3.3, en donde podemos observar que tenemos dos subdominios, uno para el aire y otro para la escarcha. Esto nos permite calcular la conservación de cantidad de movimiento, la conservación de la energía y el transporte de vapor de agua en la región perteneciente al aire, por lo que no dependemos de correlaciones obtenidas experimentalmente, las cuales se han obtenido para ciertas geometrías específicas con ciertas condiciones.

3.3 ELECCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

En el capítulo anterior se presentaron los diversos modelos que se han propuesto en los últimos años. De los tres grupos presentados, se tiene interés en el grupo dos (Modelo con dos subdominios) y el grupo tres (Modelo con flujo multifase) debido a que resuelven las ecuaciones de gobierno para el dominio del aire sin utilizar correlaciones empíricas como en el grupo uno (Modelo en el dominio de la escarcha). Debido a esto, dichos modelos no estarían limitados a las condiciones a las cuales se obtuvieron las correlaciones.

De estos dos grupos, en el tercero utilizaron el software comercial *ANSYS FLUENT*® para resolver un modelo multifase Euler-Euler, en el cual se resuelven las ecuaciones de cantidad de movimiento, conservación de masa y energía para ambas fases y una ecuación de conservación de especies para el vapor de agua en la fase gaseosa. Se empleaba un solo dominio en donde ambas fases interactuaban entre sí (aire húmedo y hielo) y todas estas ecuaciones se encontraban acopladas mediante los términos fuente.

Por otra parte, en el grupo dos emplearon dos subdominios, uno para el aire húmedo y otro para la escarcha. Para el subdominio del aire se resolvieron las ecuaciones de conservación de masa, conservación de momentum, conservación de energía y conservación de especies, y para el subdominio de la escarcha solo se resolvieron las ecuaciones de la energía y una ecuación modificada de difusión de masa.

Debido a la complejidad de trabajar con las ecuaciones de gobierno del grupo tres, las cuales incluyen los tensores de esfuerzos en las ecuaciones de conservación de momentum y conservación de la energía y no toman en cuenta ciertas consideraciones importantes, como suponer que el aire húmedo es un *fluido Newtoniano*, se optó por utilizar un modelo matemático utilizado en el grupo dos. Entre los estudios pertenecientes a este grupo, existen dos en los que se crean *códigos CFD* en lenguaje *Fortran* [7, 8] para resolver las ecuaciones de gobierno, utilizando un esquema de

volúmenes finitos. Estos modelos los han resuelto solo en dos dimensiones y utilizan un sistema de coordenadas cartesiano, pero se pudieran extender a estudios en tres dimensiones utilizando paquetes de CFD robustos y flexibles como *OpenFOAM*®, el cual es un paquete de CFD de libre distribución y de código abierto con el que se puede resolver problemas complejos de mecánica de fluidos, incluyendo reacciones químicas, transferencia de calor y turbulencia en tres dimensiones. La ventaja más conveniente consiste en la posibilidad de emplear mallas no estructuradas que son particularmente útiles en el discretizado de geometrías complejas, asegurando al mismo tiempo el uso de los modelos que el usuario defina. De esta forma sería posible simular el fenómeno de la formación de escarcha en geometrías más complejas como un evaporador completo, y tomar decisiones en la fase del diseño de los mismos.

3.3.1 CONSIDERACIONES DEL MODELO

El fenómeno de la formación de escarcha es muy complicado de modelar debido a diversos factores, como el hecho de que la tasa de transferencia de masa varía continuamente debido a que las condiciones térmicas siempre varían, por otro lado, las propiedades de la escarcha no son constantes, principalmente la conductividad térmica y la densidad, y por último, en la última etapa del proceso, la repetición del ciclo de fusión y congelación, hace que la conductividad y densidad de la escarcha adquieran valores mayores o menores sin que el espesor de la escarcha se vea afectado. Es por esto que se requiere considerar ciertas simplificaciones dentro del modelo:

1. El aire húmedo se puede considerar como un *fluido newtoniano* [36], y esto facilita enormemente resolver las ecuaciones de gobierno.
2. El flujo laminar es el régimen de flujo que se considera en este estudio, debido a que el número de Reynolds local, considerando un flujo paralelo a una placa plana, es menor de 8150. Sobre placas planas, la transición a flujo turbulento

comienza en 5×10^5 [36,37]. Por otra parte, considerando un flujo entre placas paralelas, el número de Reynolds es de 1087, ocurriendo la transición cuando el Re alcanza valores de 2000 [36].

3. La densidad (ρ_a), calor específico ($c_{p,a}$) y el coeficiente de difusividad molecular (D_a) del aire se consideran constantes. En la sección 3.4 se menciona que para el rango de temperatura utilizado, estas propiedades no tienen grandes variaciones [38].
4. La velocidad, humedad, temperatura del aire en la entrada, y la temperatura de la superficie fría se consideran constantes.
5. La temperatura de la placa se considera que se encuentra muy por debajo del punto de congelación del agua, por lo que se supone que el vapor de agua pasa directamente a la fase sólida.
6. Se desprecia el efecto de la gravedad.

El modelo matemático a resolver se compone de las siguientes ecuaciones:

Subdominio del aire

- Conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

- Cantidad de movimiento en x :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.2)$$

- Cantidad de movimiento en y :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

- Conservación de la energía:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

- Transporte del vapor de agua:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot w)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

Subdominio de la escarcha

- Conservación de la energía:

$$\frac{\partial(\rho_f T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_f}{c_{p,f}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda_f}{c_{p,f}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{q_{sub}}{c_{p,f}} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \quad (3.6)$$

- Razón de densificación [24]:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

3.4 CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES

3.4.1 AIRE HÚMEDO

Como se mencionó anteriormente, en el caso del aire húmedo se consideró la densidad, el calor específico y el coeficiente de difusividad molecular del vapor de agua en el aire como constantes, cuyos valores se muestran en la tabla 3.1, donde los valores de ρ_a y $c_{p,a}$ corresponden a los valores del aire seco a una temperatura de 10°C y la D_a a una temperatura de 25°C. Estas suposiciones son válidas para un rango de temperatura de 0°C < T ≤ 30°C. Como se puede observar en el estudio realizado en 2008 por P.T. Tsilingiris [38], los valores de estas propiedades no varían mucho con la temperatura y las curvas correspondientes a las distintas humedades relativas tampoco varían mucho. A mayores temperaturas ($T > 40^\circ\text{C}$) si se observa un decremento considerable en las propiedades, por ejemplo, la densidad a una temperatura de 50°C disminuye 4.8% y a 100°C disminuye 37.5%, esto al incrementar la humedad relativa de 0 a 100%.

Tabla 3.1: Propiedades constantes del aire a presión atmosférica.

Propiedad	Valor	Unidad
ρ_a	1.246	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$c_{p,a}$	1006	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
D_a	0.26×10^{-4}	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Por otro lado, la viscosidad y la conductividad térmica se consideran que dependen únicamente de la temperatura y no de la humedad [38]. En este estudio se utilizó la *Ley de Sutherland* para el calculo de estas propiedades:

$$\mu(T) = \mu' \left(\frac{T}{T'} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T' + S}{T + S} \quad (3.8)$$

$$\lambda(T) = \mu(T) \frac{\gamma R}{(1 - \gamma) Pr} \quad (3.9)$$

donde $T'=273$ K, $S=110.5$ K, $\gamma = 1.4$, $R=287$ J · kg⁻¹ · K⁻¹, $\mu' = 1.68 \times 10^{-5}$ kg·m⁻¹·s⁻¹ y Pr=0.71.

3.4.2 ESCARCHA

Debido a que la escarcha la definimos previamente como un medio poroso compuesto por partículas de hielo y espacios de aire húmedo, sus propiedades toman en cuenta los parámetros de la porosidad y la densidad. Estos se relacionan de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{V_a}{V} = \frac{\rho_i - \rho_f}{\rho_i - \rho_a} \quad (3.10)$$

donde ε representa la porosidad (la cual posee un valor entre 0 y 1), ρ_i la densidad del hielo, ρ_a la densidad del aire, ρ_f la densidad de la escarcha, V_a el volumen de los

espacios de aire y V el volumen total.

Para calcular el calor específico de la escarcha $c_{p,f}$ se toman en cuenta los calores específicos y las densidades del aire húmedo y del hielo, así como también la porosidad del medio. De esta forma, el valor del calor específico tomará un valor cercano al c_p del hielo o del aire dependiendo de la porosidad.

$$c_{p,f} = \frac{(c_{p,i}\rho_i(1 - \varepsilon) + c_{p,a}\rho_a\varepsilon)}{\rho_f} \quad (3.11)$$

Para el cálculo del coeficiente de difusividad molecular dentro de la capa de escarcha se utilizó la relación utilizada por Na y Webb [26], la cual está en función del factor de la tortuosidad del medio y la porosidad:

$$D_{ef} = D_a\varepsilon\tau = D_a\varepsilon\frac{1 + \varepsilon}{2} \quad (3.12)$$

La morfología de los cristales de hielo que se forman en la primera etapa del fenómeno de la formación de escarcha se dividen en dos grupos, placas y columnas. Dentro de estos dos grupos existe una gran variedad de formas [24]. Asimismo, dicha morfología depende de las condiciones en las que se depositan los cristales (i.e. la temperatura de la placa y la cantidad de humedad en el aire), tal como lo explican Na y Webb [24]. En la literatura, la propiedad que se ha documentado como altamente influenciada por la morfología de la escarcha es la conductividad. En el presente estudio, la primera etapa del fenómeno no se resuelve. En su lugar, se especifica como condición inicial la existencia de una delgada capa de escarcha cuyas propiedades se definen de manera consistente con la literatura especializada con base en evidencia experimental. En este estudio, la conductividad térmica se modela como una propiedad que es función de la densidad de la escarcha, usando la relación propuesta por Kwan-Soo-Lee [27, 28], misma que se ha utilizado en estudios anteriores [4, 7, 8] dando lugar a resultados consistentes con la evidencia experimental:

$$\lambda = A_1 + A_2\rho_f + A_3\rho_f^2 \quad (3.13)$$

donde $A_1 = 0.132$, $A_2 = 3.13 \times 10^{-4}$ y $A_3 = 1.6 \times 10^{-7}$.

3.5 CONDICIONES DE FRONTERA

Para poder resolver las ecuaciones diferenciales parciales es necesario conocer las condiciones en la frontera del dominio en el que estemos resolviendo, además de las condiciones iniciales. Estas condiciones pueden ser de tres tipos: Dirichlet, Neumann y Robin. La condición de Dirichlet es cuando se conoce el valor de la variable en la frontera del dominio, la condición de Neumann es cuando conocemos el valor de la derivada de la variable en la frontera y la condición de Robin es una combinación lineal de las condiciones anteriores. En la Figura 3.4 se muestra un esquema con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales utilizadas en el problema, y a continuación se detallarán cada una de ellas.

3.5.1 FRONTERA SUPERIOR

En la frontera superior solo existe el subdominio del aire. En esta frontera se considera una condición de simetría, debido a que se supone que dicha frontera se encuentra exactamente a la mitad de separación entre las placas planas que corresponden a las superficies de las aletas. Asimismo, se supone que la temperatura de la aleta superior es igual a la temperatura de la aleta inferior. En tal caso, es posible considerar que existe simetría entre las condiciones de frontera hidrodinámicas y térmicas, respecto a este plano que se ha definido como plano de simetría [7, 8]. Las derivadas con respecto a y de la temperatura, humedad y la componente en x de la velocidad son cero, mientras que la componente en y de la velocidad también equivale a cero.

En $y = h$:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = v = 0$$

3.5.2 FRONTERA INFERIOR

En esta frontera se tienen los dos subdominios, por lo que necesitamos especificar las condiciones de frontera para ambos subdominios. Para el subdominio del aire tenemos nuevamente una condición de simetría. Esta condición se especifica de esta manera debido a que consideramos que la aleta del evaporador es muy delgada, por lo que el efecto del flujo en el borde de entrada es despreciable; es necesario evaluar este efecto en dominios que si consideran el borde de entrada. Las derivadas con respecto a la dirección y de las variables temperatura, humedad y componente en x de la velocidad son igual a cero, mientras que la componente en y de la velocidad equivale a cero. Para el subdominio de la escarcha tenemos una condición de no deslizamiento por lo cual tendremos el valor de las componentes de la velocidad iguales a cero, el cambio del valor de la humedad con respecto a la dirección y también será cero, lo cual representa una superficie impermeable y para la temperatura tendremos un valor constante, el cual es la temperatura superficial de la placa fría. En el caso real de una aleta de un evaporador, la temperatura a lo largo de la aleta disminuye en función de las dimensiones y la conductividad térmica de la misma, de acuerdo a un modelo consistente con [39]:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L - x) + (h/mk) \sinh m(L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.14)$$

donde θ se define como el exceso de temperatura ($\theta = T(x) - T_\infty$). Este modelo es función de la temperatura de la base de la aleta (θ_b), las dimensiones de la aleta, el coeficiente de convección y la conductividad térmica de la aleta. Estos últimos tres parámetros se encuentran agrupados en el término m .

Para simplificar el modelo, se elige el caso ideal en el que la conductividad térmica de la aleta es infinita por lo que la temperatura en la aleta será constante.

En $y = 0$; $0 \leq x < L_1$:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = v = 0$$

En $y = 0$; $L_1 \leq x \leq L_2$:

$$u = v = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ; \quad T = T_s$$

3.5.3 FRONTERA IZQUIERDA

En esta frontera solo se tiene el subdominio del aire. Aquí se tienen las condiciones de entrada al dominio por lo que se conocen los valores de las variables temperatura (T_{in}), humedad (w_{in}) y las componentes de la velocidad son u_{in} en la dirección x y $v = 0$ en la componente y .

En $x = 0$:

$$T = T_{in} \quad ; \quad w = w_{in} \quad ; \quad u = u_{in} \quad ; \quad v = 0$$

3.5.4 FRONTERA DERECHA

Esta frontera representa la salida del dominio. En el subdominio del aire tenemos que las derivadas con respecto a x de todas las variables son cero. Por otro lado, en el subdominio de la escarcha tenemos que las componentes de la velocidad, y los cambios de temperatura y humedad con respecto a x son cero.

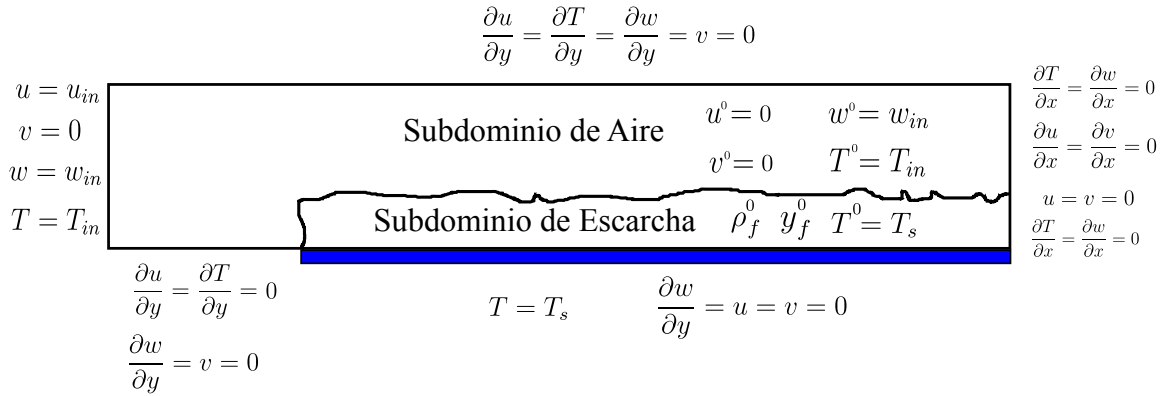


Figura 3.4: Condiciones iniciales y de frontera.

En $x = L_2$; $0 \leq y \leq y_f$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad u = v = 0$$

En $x = L_2$; $y_f < y \leq h$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

3.6 CONDICIONES INICIALES

3.6.1 SUBDOMINIO DEL AIRE

Al inicio del problema se tiene el fluido en reposo, es decir, las componentes de la velocidad u y v son cero. Por otro lado, la humedad es w_{in} , y la temperatura es T_{in} .

$$T^0 = T_{in} \quad ; \quad w^0 = w_{in} \quad ; \quad u^0 = v^0 = 0$$

3.6.2 SUBDOMINIO DE LA ESCARCHA

El modelo que se emplea en este estudio no toma en cuenta la primer etapa del proceso de formación de escarcha, que se describe en la sección 3.1.1, debido a la complejidad que conlleva. Para compensar esto, esta primer etapa se toma como condición inicial para modelar la segunda, por lo que tenemos una densidad inicial (ρ_f^0) y un espesor inicial (y_f^0) en la capa de escarcha. En estudios anteriores [34,40] se ha señalado que la densidad inicial tiene gran influencia en el crecimiento posterior de la capa de escarcha por lo que este valor es muy importante. Existen diversas formas de obtener este valor: (i) de manera experimental, (ii) por medio de una correlación experimental y (iii) con un valor fijo. Debido a que la primer etapa del proceso de formación de escarcha dura muy poco tiempo y el espesor es muy pequeño, resulta muy complicado determinar de forma experimental este valor, por lo que generalmente se recurre a la segunda y tercer opción. A lo largo de los años se han utilizado diversas correlaciones para la obtención de la densidad, las cuales están limitadas a las condiciones en las cuales se obtuvieron dichas correlaciones. Una de las más utilizadas es la desarrollada por Hayashi [35], la cual es función de la temperatura de la capa de escarcha. Posteriormente Hermes [34] modificó la correlación de Hayashi para incluir el efecto de la temperatura de la placa, y tiempo después Kandula [6] modificó la correlación de Hermes para incluir la temperatura de fusión del hielo. Wang [10] en 2012 modificó la correlación de Hayashi con el fin de obtener la densidad inicial, esto al darse cuenta de que sigue siendo un problema este valor en los modelos actuales. En la correlación propuesta por Wang se incluye el efecto de la temperatura de la capa de escarcha, la temperatura de la placa y la temperatura del ambiente. La última opción es asignar un valor fijo. Jones y Parker [25] consideraron que el valor de la densidad inicial dentro del rango 8 a 48 kg/m³ no afecta a la tasa de crecimiento de la capa de escarcha ni a su valor final. En base a esto, diversos estudios han utilizado el valor de 30 kg/m³ como densidad inicial junto con un valor de 0.02 mm como espesor inicial [7,8,24] y otros han considerado 25 kg/m³ [41]. En este estudio se tomará la densidad inicial con un valor fijo de 48

kg/m³ debido a que valores menores provocan que la tasa de crecimiento sea muy alta debido a la porosidad tan alta que posee la capa de escarcha. Como se explicará más adelante, la primer línea de nodos que están en la superficie fría corresponden a escarcha, por lo que se buscó que el espesor de la capa de escarcha fuera muy cercano al valor de 0.02 mm reportado en la literatura, obteniendo un valor de 0.014 mm con el número de nodos utilizado. La temperatura inicial de la escarcha se consideró igual a la temperatura de la placa T_s debido a que el espesor de la escarcha es muy pequeño y en principio podemos despreciar la resistencia térmica de la misma.

$$\begin{aligned} \rho_f^0 &= 48\text{kg/m}^3 \quad ; \quad y_f^0 = 0.014\text{mm} \\ T^0 &= T_s \quad ; \quad w^0 = w_{sat}(T_s) \quad ; \quad u^0 = v^0 = 0 \end{aligned}$$

3.7 MODELADO DEL CRECIMIENTO DE LA ESCARCHA

Debido a que la capa de escarcha crece con el tiempo es necesario calcular la razón de crecimiento de la misma. En estudios anteriores [7, 24] se ha encontrado que el crecimiento de la escarcha se considera solamente en dirección perpendicular a la superficie. Esto no es del todo cierto, debido a que la escarcha puede crecer en cualquier dirección, aunque si tiende a crecer más en la dirección perpendicular a la superficie.

Lenic [7] considera que la masa que contribuye al crecimiento de la escarcha es la diferencia entre el flujo másico proveniente de la humedad contenida en el aire y el flujo másico que se difunde dentro de la escarcha, tal como se muestra en la Figura 3.5. Esta diferencia la podemos expresar como:

$$\rho_f \frac{dy}{dt} = \dot{m}_a - \dot{m}_{dif} \quad (3.15)$$

donde \dot{m}_a es el flujo másico proveniente del aire y \dot{m}_{dif} es el flujo que se difunde

dentro de la escarcha. Estos flujos son calculados de acuerdo al estudio de Le Gall [42] y posteriormente así los calcularon Lenic [7] y Armengol [8]:

$$\dot{m}_a = \rho_a D \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.16)$$

$$\dot{m}_{dif} = -\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.17)$$

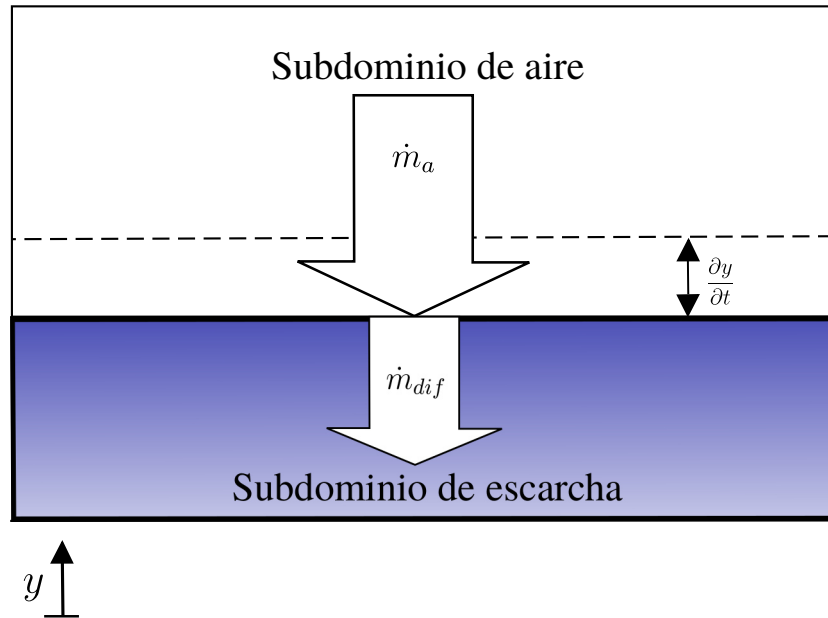


Figura 3.5: Balance unidimensional en la interfaz *aire-escarcha*. Adaptado de [8].

Como se mencionó en la sección 3.2, el dominio elegido para este estudio abarca una zona de aire en la frontera sur con el fin de permitir el modelado del crecimiento de la escarcha en la dirección horizontal. Para poder extender el crecimiento en dos direcciones es necesario realizar un balance de masa en uno de los nodos de la escarcha ubicados en la interfaz *aire-escarcha* [8]:

$$\rho_f \frac{dV}{dt} = \int_{SC} \dot{m} dA \quad (3.18)$$

Esta ecuación la podemos interpretar como la relación entre el cambio de masa

en la escarcha con la sumatoria de todos los flujos máxicos involucrados, ya sean flujos máxicos provenientes del aire o flujos máxicos que se difunden dentro de la escarcha. En la sección 4.5 se detallará la discretización de esta ecuación.

CAPÍTULO 4

DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

Como se observó en el capítulo anterior el modelo matemático a resolver se compone de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (*EDP*) no lineales, acopladas, bidimensionales, en estado transitorio y con propiedades variables. Para poder resolver este tipo de *EDP* es necesario recurrir a métodos numéricos que nos permitan encontrar una solución aproximada a la solución real, esto debido a que al día de hoy no es posible obtener una solución analítica de dichas ecuaciones, excepto para ciertos casos muy particulares [43, 44].

Las *EDP* que definen la dinámica de fluidos están basadas en el concepto del medio continuo, el cual está definido en el tiempo y el espacio sin la posibilidad de que existan *huecos* en los cuales las propiedades del medio no estén definidas, por lo que estas propiedades se consideran como variables continuas en el tiempo y espacio. La solución a estas ecuaciones son también funciones continuas.

Para poder resolver un problema de dinámica de fluidos utilizando métodos numéricos es necesario seguir una serie de pasos que nos permitan llegar a la solución aproximada. Lo primero es definir el medio continuo, para lo cual se establecen las *EDP* que gobiernan el fenómeno. En este punto se genera un sistema de *EDP* a resolver. A continuación tenemos que definir nuestro dominio del problema, el cual

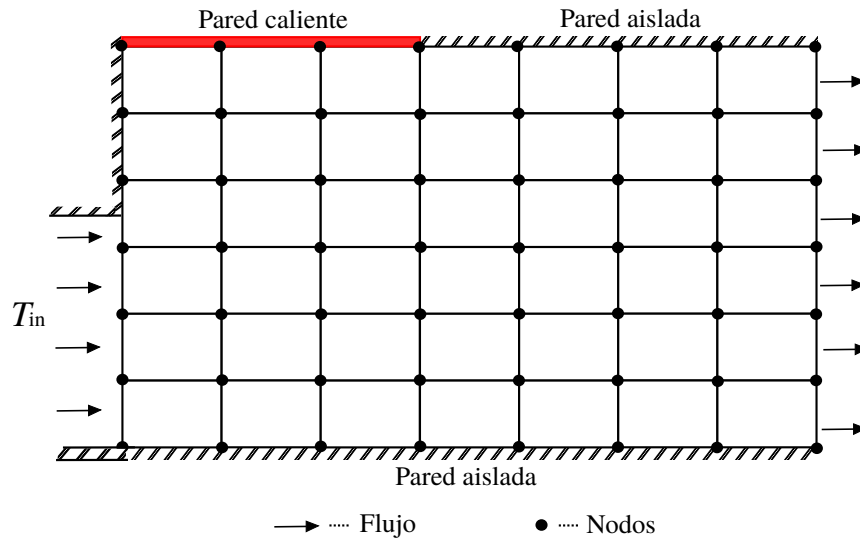


Figura 4.1: Dominio discreto [45].

es una región en el espacio y en el tiempo dentro del cual se encontrará la solución. Originalmente el dominio es un medio continuo dentro del cual es posible encontrar el valor de las propiedades en cada punto del espacio y en cada instante del tiempo, pero como no es posible para un equipo de cómputo guardar esta infinidad de puntos, lo que se hace es definir ciertos puntos de interés dentro del espacio, llamados nodos (Figura 4.1), y en ciertos instantes del tiempo en los cuales se calcularán los valores de las propiedades. Es decir, pasamos de un problema de variables continuas $f(x, y, z, t)$ a uno de variables discretas $\phi_{i,j,k}$, en donde i, j, k definen la ubicación del nodo en tres dimensiones, esto para un cierto instante de tiempo. Una vez definido nuestro dominio computacional tenemos que discretizar el sistema de EDP aproximando las derivadas de las propiedades mediante expresiones en diferencias, como puede ser utilizar las series de Taylor. Esto definirá las ecuaciones algebraicas correspondientes para las variables discretas, estas ecuaciones se aplican a cada uno de los nodos dentro del dominio, por lo cual resulta un sistema de ecuaciones algebraicas. Este sistema de ecuaciones se solucionará mediante algún método iterativo o uno directo de inversión de matriz.

4.1 ECUACIÓN GENERAL DE TRANSPORTE

Si observamos las ecuaciones diferenciales que componen el modelo matemático mostrado en la sección 3.3 nos podemos dar cuenta de que todas estas ecuaciones poseen las mismas características. Estas ecuaciones de transporte se componen de un término temporal, un término convectivo, un término difusivo y un término fuente. Debido a esto, es común expresar todas estas ecuaciones mediante una *ecuación general de transporte*:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{Término temporal}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\vec{u}\phi)}_{\text{Término convectivo}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)}_{\text{Término difusivo}} + \underbrace{S}_{\text{Término fuente}} \quad (4.1)$$

de donde:

- ϕ representa la propiedad a calcular.
- Γ representa el coeficiente de difusión.
- S representa el término fuente.

Dependiendo de la propiedad ϕ que estemos calculando, los términos Γ y S tomarán diferente significado, tal como se puede observar en la tabla 4.1.

Existen diversos métodos para discretizar la ecuación de transporte como: el método de las diferencias finitas (empleado generalmente para la derivada temporal), métodos espectrales, elementos finitos y volúmenes finitos. En problemas de dinámica de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa y combustión es común emplear el método de los volúmenes finitos, el cual se explicará en la siguiente sección.

Tabla 4.1: Coeficientes de la ecuación general de transporte.

Ecuación	ϕ	Γ	S
Continuidad	1	0	0
Cantidad de movimiento en dirección x	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{F}_x$
Cantidad de movimiento en dirección y	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{F}_y$
Energía	T	$\frac{\lambda}{c_p}$	\dot{q}
Transporte de especies	w	ρD	m''

4.2 MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS

El método de los volúmenes finitos se basa en la integración de las ecuaciones de transporte involucradas en los volúmenes de control dentro del dominio computacional. El resultado de esta integración expresa la conservación exacta de las propiedades relevantes para cada volumen de control independientemente del tamaño de la malla, y por consecuencia la conservación en todo el dominio.

La conservación de una variable general de flujo ϕ (e.g. la temperatura T) dentro de un volumen finito de control se puede expresar como un balance entre los procesos que tienden a incrementar o disminuir el valor de dicha variable. En otras palabras tenemos:

$$\begin{bmatrix} \text{Razón de cambio} \\ \text{de } \phi \text{ dentro} \\ \text{del volumen de} \\ \text{control con} \\ \text{respecto al} \\ \text{tiempo.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Razón neta de} \\ \text{incremento de } \phi \\ \text{debido a la} \\ \text{convección dentro} \\ \text{del volumen} \\ \text{de control.} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Razón neta de} \\ \text{incremento de } \phi \\ \text{debido a la} \\ \text{difusión dentro} \\ \text{del volumen} \\ \text{de control.} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Razón neta de} \\ \text{creación de } \phi \\ \text{dentro del} \\ \text{volumen de} \\ \text{control.} \end{bmatrix}$$

Es necesario dividir todo el dominio computacional en pequeños subdominios que no se superpongan, a los cuales se les denomina volúmenes de control, y a cada uno de estos se le asigna un punto llamado “nodo”, al conjunto de estos nodos se le denomina *mallá computacional*. Al integrar la ecuación de transporte en uno de los volúmenes de control se genera una ecuación algebraica, la cuál se aplica en cada uno de los nodos dentro del dominio. Esta ecuación relaciona el valor de la variable ϕ del nodo, con los valores de ϕ de los nodos vecinos. Esta relación de los valores de ϕ con los valores vecinos generará un sistema de ecuaciones algebraicas, que tendrá que ser resuelto por medio de un método iterativo.

4.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

Como se mencionó, el arreglo de “nodos” generará lo que se conoce como *mallá computacional*. Un ejemplo de esta mallá lo podemos ver en la Figura 4.2. Cada uno de los puntos rojos mostrados en la figura representan los nodos del dominio, siendo P el nodo que estemos analizando, E el nodo del este, W el nodo del oeste, N el nodo del norte y S el nodo del sur. El cuadro gris representa el volumen de control del nodo P y las letras minúsculas representan las caras de este volumen. Por otro lado, Δx y Δy representan las dimensiones del volumen, mientras que δx y δy la distancia entre dos nodos consecutivos. Los valores de Δx no necesariamente tienen que ser igual a δx , ni iguales a Δy . Es común emplear mallás no homogéneas ($\Delta x \neq \Delta y$) en soluciones numéricas, esto debido a que en ciertos fenómenos la variable ϕ que estemos calculando tiene variaciones muy grandes con respecto a una dirección mientras que en otra dirección estas variaciones son menores. Por ejemplo, en el cálculo del campo de flujo sobre una placa, la velocidad varía mucho en la dirección “ y ” perpendicular a la placa, siendo que cerca de la placa la velocidad es casi cero y conforme nos alejamos de la placa este valor incrementa. Por otro lado, la variación de la velocidad no presenta grandes cambios en la dirección “ x ” paralela a la placa. Debido a esto, es necesario tener valores de Δy muy pequeños cerca de la

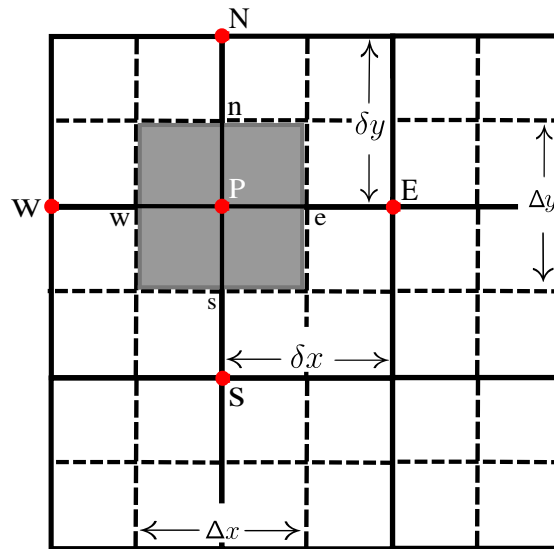


Figura 4.2: Malla computacional.

superficie para poder apreciar los cambios de la velocidad, mientras que los valores de Δx pueden ser más grandes.

Existen dos opciones para ubicar las caras de los nodos de la malla. Por un lado, podemos ubicar las caras en el punto medio de dos nodos consecutivos o podemos ubicar el nodo exactamente en el centro geométrico del volumen de control. En la primera opción, se tiene la ventaja de que al momento de calcular las propiedades en las caras del volumen podremos utilizar un promedio aritmético entre los valores correspondientes a los nodos vecinos. Por otro lado, se tiene la desventaja de que el valor de una propiedad en el punto P no representa de forma adecuada el valor correspondiente a todo el volumen, debido a que este punto no se encuentra en el centro del volumen, sino que se encuentra cercano a uno de los nodos vecinos.

En la segunda opción, al tener el nodo exactamente en el centro del volumen, el valor de la propiedad representa de manera más aproximada el valor del volumen. La desventaja es que, al no tener las caras en el punto medio de dos nodos, ya no podremos utilizar un promedio aritmético sino que tendremos que recurrir a un promedio ponderado. En este estudio se utilizará la segunda opción.

En los apartados siguientes se explicará la integración de la *ecuación general de transporte* 4.1 en un volumen como el mostrado en la Figura 4.2, utilizando diversos esquemas dependiendo de la naturaleza de los términos.

4.2.2 TÉRMINOS DIFUSIVOS

Para describir la discretización del término difusivo, se utilizará el caso bidimensional en estado permanente con término fuente:

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (4.2)$$

Recordando el *Teorema del gradiente* tenemos:

$$\int_V \nabla \lambda dV = \int_S \lambda \vec{n} dS \quad (4.3)$$

y además, el *Teorema de la divergencia*:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{u} dV = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (4.4)$$

donde V es un volumen de control, S es una superficie de control, dS es un diferencial de superficie y \vec{n} es un vector unitario normal a dicha superficie. Aplicando este teorema a la ecuación 4.2 podemos cambiar la integral de volumen por una integral de superficie, en donde el vector unitario \vec{n} , en el caso bidimensional, se compone de $i, -i, j$ y $-j$. Aplicando la integral en cada una de las caras del nodo tenemos:

$$\int_V [\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)] dV = \int_S [(\Gamma \nabla \phi \vec{n})] dS \quad (4.5)$$

$$\int_S \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e (1) + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w (-1) + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n (1) + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s (-1) \right] dS + \int_V S dV = 0 \quad (4.6)$$

Dado que estamos utilizando el caso bidimensional utilizaremos la unidad en la dirección z , por lo que dS será igual a $dy(1)$ o $dx(1)$ dependiendo del caso. Aplicando la integral a cada uno de los términos tenemos:

$$\int_S \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e dy(1) - \int_S \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w dy(1) + \int_S \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n dx(1) - \int_S \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s dx(1) + \int_V S dx dy(1) = 0 \quad (4.7)$$

En este punto, aplicamos una de las suposiciones más importantes en el *Método de los Volúmenes Finitos* al considerar que los flujos son constantes en cada una de las caras, por lo cual sacamos de la integral el flujo difusivo e integramos cada uno de los términos. Asimismo consideramos que S es constante en el interior del volumen de control, quedando:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \Delta y - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \Delta y + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n \Delta x - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \Delta x + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0 \quad (4.8)$$

El término \bar{S} representa el valor promedio del término fuente dentro del volumen de control. Hay casos en donde el término fuente depende del propio valor de la propiedad ϕ por lo cual es necesario expresar una relación entre estos dos términos. Una forma común de expresar esta dependencia es mediante un comportamiento lineal debido a que las ecuaciones resultantes de la discretización son ecuaciones lineales. El término fuente quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_P \quad (4.9)$$

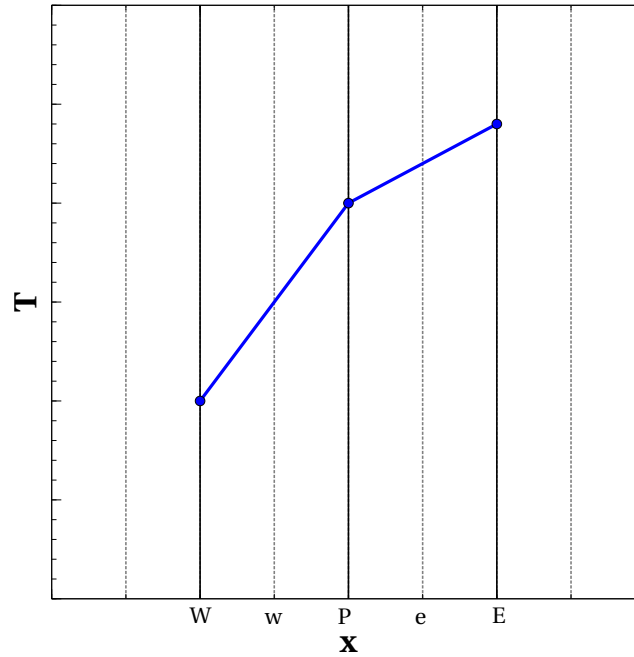


Figura 4.3: Perfil de variación lineal [45].

donde S_C es la parte constante y S_P es la parte proporcional a la variable ϕ .

A continuación tenemos que suponer la forma en que se comportan las derivadas que aparecen en la ecuación 4.8. Normalmente se emplea una variación lineal entre nodos (Figura 4.3), debido a que la distancia entre los nodos es muy pequeña. Utilizando esta variación es posible evaluar las derivadas en cada una de las caras del volumen. Utilizando la nomenclatura de la Figura 4.2 la ecuación nos quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \Gamma_e \Delta y \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x} \right) - \Gamma_w \Delta y \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x} \right) \\ & + \Gamma_n \Delta x \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y} \right) - \Gamma_s \Delta x \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y} \right) + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.3 TÉRMINOS CONVECTIVOS

Para poder evaluar los términos convectivos, es necesario conocer previamente el campo de flujo. En este punto supondremos que conocemos este campo, y en la sección 4.2.6 se explicará a detalle el método utilizado para el cálculo de las componentes de la velocidad.

De la misma forma que en el término difusivo, se aplicará el teorema de la divergencia de Gauss, para cambiar la integral de volumen por una integral de superficie. Se utilizará un caso puramente convectivo en estado permanente bidimensional:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) dV = \int_S (\rho \vec{u} \phi) \vec{n} dS \quad (4.11)$$

Aplicando la integral de superficie en cada una de las caras del nodo, y sustituyendo el vector unitario tenemos:

$$\int_S (\rho \vec{u} \phi) \vec{n} dS = \int_S [(\rho u \phi)_e(1) + (\rho u \phi)_w(-1) + (\rho v \phi)_n(1) + (\rho v \phi)_s(-1)] dS \quad (4.12)$$

Nuevamente, suponiendo que los flujos convectivos en cada una de las caras del nodo son constantes, podemos sacar estos términos de la integral y luego integramos:

$$(\rho u \phi)_e \int_S dy - (\rho u \phi)_w \int_S dy + (\rho v \phi)_n \int_S dx - (\rho v \phi)_s \int_S dx = 0 \quad (4.13)$$

$$(\rho u \phi)_e \Delta y - (\rho u \phi)_w \Delta y + (\rho v \phi)_n \Delta x - (\rho v \phi)_s \Delta x = 0 \quad (4.14)$$

Como podemos ver en la ecuación anterior es necesario evaluar los valores de ϕ en las caras del nodo. Para hacer esto, podemos emplear una variación lineal de la forma:

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad (4.15a)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (4.15b)$$

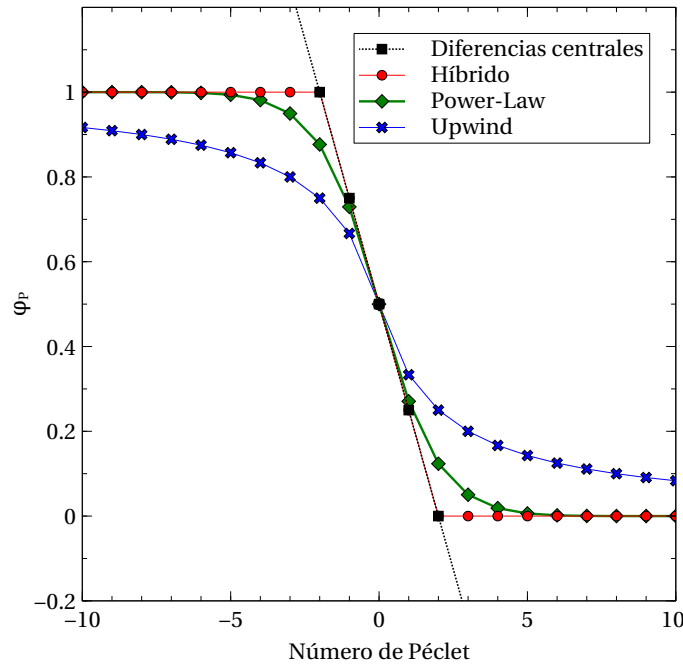


Figura 4.4: Predicción de ϕ_P con diferentes esquemas para un rango de Pe .

El problema de utilizar una variación lineal entre los nodos, es que no se ve reflejado el efecto que causa el campo de flujo sobre la variable. Debido a esto, existen diversos esquemas que se emplean en los términos convectivos, como el *Esquema Upwind*, el *Esquema Hybrid* y el *Esquema Power-Law*. En la Figura 4.4 se muestra la comparación del valor de ϕ de estos esquemas, para diferentes números de Péclet Pe . De todos estos esquemas, el que requiere de un menor costo computacional y que entrega buenos resultados es el *Esquema Upwind*, por lo cual es el que se empleará en este estudio. En el apartado siguiente se explicará este esquema.

4.2.3.1 ESQUEMA UPWIND

Antes de comenzar con la explicación del esquema, arreglaremos la ecuación de manera más compacta introduciendo dos nuevos términos, F y D . Los cuales representan el “peso” que tiene la convección y la conductancia de difusión, respectivamente. Estos términos se definen como sigue:

$$F = \rho u \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (4.16)$$

Incluyendo estos términos y despreciando el término temporal y el término fuente, la ecuación nos quedaría:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S) \quad (4.17)$$

de donde:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad (4.18a)$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad (4.18b)$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x \quad (4.18c)$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad (4.18d)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x} \quad (4.19a)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x} \quad (4.19b)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y} \quad (4.19c)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y} \quad (4.19d)$$

El esquema *Upwind* señala que el valor de la propiedad ϕ en la interfaz entre dos nodos es igual al valor de ϕ del nodo del cual proviene la corriente del flujo. Esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{si} \quad F_e > 0 \quad (4.20a)$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si} \quad F_e < 0 \quad (4.20b)$$

Otra manera de representarlo es utilizando el operador $\| \mathbf{A}, \mathbf{B} \|$ el cual nos indica el mayor entre los términos A y B.

$$F_e \phi_e = \phi_P \| F_e, 0 \| - \phi_E \| -F_e, 0 \| \quad (4.21a)$$

$$F_w \phi_w = \phi_W \| F_w, 0 \| - \phi_P \| -F_w, 0 \| \quad (4.21b)$$

$$F_n \phi_n = \phi_P \| F_n, 0 \| - \phi_N \| -F_n, 0 \| \quad (4.21c)$$

$$F_s \phi_s = \phi_S \| F_s, 0 \| - \phi_P \| -F_s, 0 \| \quad (4.21d)$$

Este esquema entrega buenos resultados para flujos altamente convectivos. La intensidad del efecto de convección la podemos determinar mediante el número adimensional de *Péclet*, el cual nos relaciona los coeficientes convectivos con los difusivos:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x} \quad (4.22)$$

A partir de números de *Pe* iguales o mayores que 2, el esquema *Upwind* nos entregará buenos resultados. En la Figura 4.5 podemos ver representado este esquema en donde en la Figura 4.5a el valor de $\phi_w = \phi_W$ y $\phi_e = \phi_P$. Por otro lado, en la Figura 4.5b, el valor de $\phi_w = \phi_P$ y $\phi_e = \phi_E$.

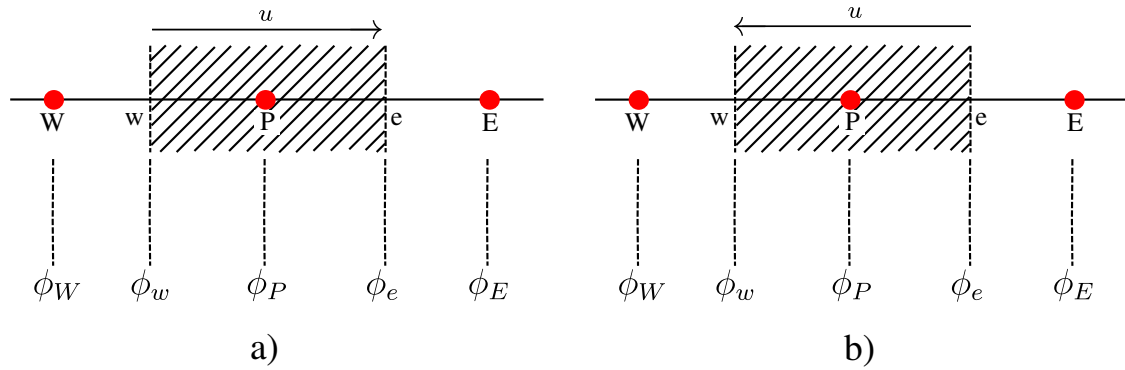


Figura 4.5: Esquema UPWIND. a) Caso $u > 0$, b) Caso $u < 0$.

4.2.4 TÉRMINO TEMPORAL

Para conocer la variación de la variable ϕ con respecto al tiempo, es necesario integrar todos los términos en un intervalo de tiempo. Para poder resolver una ecuación diferencial transitoria es necesario conocer la condición inicial, de la misma forma al discretizar nuestra ecuación necesitaremos conocer los valores de nuestras variables en el tiempo t para cada uno de los nodos que componen el dominio computacional y a partir de estos valores podremos calcular los valores en el tiempo $t + \Delta t$. Los valores iniciales (o del tiempo anterior) se denotarán como ϕ^0 mientras que los valores del tiempo actual serán ϕ . El orden de integración dependerá de la naturaleza del término, por ejemplo, en el término temporal primero integraremos con respecto al tiempo y a continuación con respecto al volumen, mientras que los otros términos el orden es inverso. Al momento de integrar con respecto al tiempo se considerará que el valor en el nodo ϕ_P prevalece en todo el volumen de control:

$$\int_V \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \right] dt dV = \rho_P^0 (\phi_P - \phi_P^0) \Delta x \Delta y \quad (4.23)$$

En las secciones anteriores se describió la manera de integrar con respecto al volumen los términos difusivos, convectivos y fuente; ahora nos falta conocer como varía la propiedad de estos términos en los distintos nodos ϕ_E, ϕ_W, ϕ_N y ϕ_S con respecto al tiempo. Existen varias suposiciones y algunas de ellas se pueden

generalizar proponiendo [45]:

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0] \Delta t \quad (4.24)$$

donde f representa un factor de peso cuyo valor se encuentra entre 0 y 1. Existen tres esquemas principales dependiendo del valor que tome f . Cuando $f = 1$ se tiene el *esquema totalmente implícito*, con $f = 0.5$ es el *esquema Crank-Nicolson* y con $f = 0$ el *esquema explícito*, los cuales se muestran en la Figura 4.6. Debido a que los esquemas Crank-Nicolson y el Explícito pueden generar soluciones físicamente poco realistas, tal como se explica en Patankar [45] se optó por implementar el *Esquema totalmente implícito*.

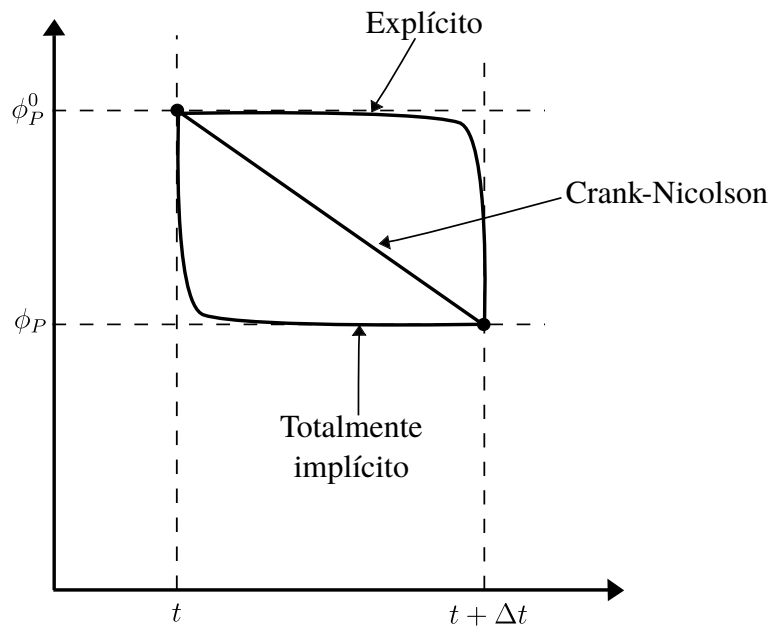


Figura 4.6: Variación de la propiedad ϕ de acuerdo distintos esquemas [45].

4.2.5 ECUACIÓN FINAL DISCRETIZADA

En este punto ya se conoce la manera de discretizar una ecuación de transporte que contenga términos difusivos, términos convectivos, términos temporales y

término fuente.

Integrando en el tiempo los términos convectivos, términos difusivos y el término fuente tenemos:

$$\begin{aligned} \rho_P^0 \phi_P \Delta x \Delta y - \rho_P^0 \phi_P^0 \Delta x \Delta y &= \int_t^{t+\Delta t} [-F_e \phi_e + F_w \phi_w - F_n \phi_n + F_s \phi_s \\ &+ D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S \\ &+ S_C \Delta x \Delta y + S_P \Delta x \Delta y \phi_P] dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

Y utilizando el esquema totalmente implícito ($f = 1$) y despejando Δt tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_P^0 \phi_P \Delta x \Delta y}{\Delta t} - \frac{\rho_P^0 \phi_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} &= -F_e \phi_e + F_w \phi_w - F_n \phi_n + F_s \phi_s \\ &+ D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S \\ &+ S_C \Delta x \Delta y + S_P \Delta x \Delta y \phi_P \end{aligned} \quad (4.26)$$

Resulta útil expresar la ecuación 4.26 como la ecuación discretizada 4.27, en la que el valor del nodo ϕ_P tiene influencia de los cuatro nodos vecinos (para el caso bidimensional). En esta ecuación los coeficientes a_E, a_W, a_N y a_S incluyen los efectos de los términos convectivos y difusivos. Por otro lado el coeficiente b representa el término fuente.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (4.27)$$

donde:

$$a_E = D_e + \parallel -F_e, 0 \parallel \quad (4.28a)$$

$$a_W = D_w + \parallel F_w, 0 \parallel \quad (4.28b)$$

$$a_N = D_n + \parallel -F_n, 0 \parallel \quad (4.28c)$$

$$a_S = D_s + \|F_s, 0\| \quad (4.28d)$$

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (4.28e)$$

$$a_P = D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| + D_n + \|F_n, 0\| + D_s + \|-F_s, 0\| \quad (4.28f)$$

$$+ \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_P \Delta x \Delta y$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (4.28g)$$

$$b = a_P^0 \phi_P^0 + S_C \Delta x \Delta y \quad (4.28h)$$

La ecuación 4.27 es la ecuación discretizada de la ecuación general de transporte 4.1 para la variable ϕ , para el caso bidimensional.

4.2.6 CAMPO DE FLUJO

En las secciones anteriores se detalló como discretizar la ecuación general de transporte 4.1 para la variable ϕ considerando que se conocía el campo de flujo, el cual se encuentra incluido en el término convectivo. El problema es que, excepto para ciertos casos particulares, no se conoce el campo de flujo y lo tenemos que calcular de alguna forma. Las componentes del vector de la velocidad se calculan mediante las ecuaciones de momentum, las cuales son casos particulares de la ecuación general de transporte como se observó en la tabla 4.1. Ahora, dado que ya desarrollamos un método para resolver la ecuación general de transporte, solo tendríamos que resolverla para el caso particular con $\phi = u$, ó $\phi = v$ según sea el caso, y con sus respectivos coeficientes de difusión y términos fuente. Aquí surge el problema de que tenemos el gradiente de presión como parte del término fuente y no conocemos el campo de presión ni tampoco tenemos una forma directa de calcularlo.

El campo de presión está indirectamente especificado en la *ecuación de continuidad* debido a que solamente el campo de presión correcto producirá el campo de flujo que cumpla con la ecuación de continuidad. Esta información indirecta dentro de la ecuación de continuidad se tiene que transformar en un algoritmo directo para poder

calcular el campo de presión y así calcular el campo de flujo. Antes de explicar este algoritmo, se detallará otro de los problemas que surgen al intentar solucionar las ecuaciones de momentum.

4.2.6.1 REPRESENTACIÓN DEL TÉRMINO GRADIENTE DE PRESIÓN

Si tomamos el caso unidimensional de la componente en x de la velocidad y la discretizamos, nos damos cuenta que el único término extra que existe es el gradiente de presión $(-\frac{dp}{dx})$. Al integrar este término sobre el volumen de control mostrado en la Figura 4.7 nos queda la caída de presión $p_w - p_e$. Para expresar estos valores en función de las presiones de los nodos, podemos suponer una variación lineal y que las caras se ubican en el punto medio de dos nodos. Tenemos:

$$p_w - p_e = \frac{p_W + p_P}{2} - \frac{p_P + p_E}{2} = \frac{p_W - p_E}{2} \quad (4.29)$$

Esto significa que la ecuación de momentum tendrá la diferencia de presión entre nodos alternados y no entre nodos consecutivos. Esto nos genera dos problemas, por un lado observamos que los valores se toman de una malla más gruesa a la que realmente se está empleando afectando a la precisión del cálculo. Por otro lado, consideremos el campo de presión propuesto en la Figura 4.8. No podemos considerar este campo de presión como un campo real, pero si aplicamos $p_W - p_E$ en cualquiera de los nodos nos percatamos que esta diferencia será siempre cero para cualquier nodo. Esto se interpretaría en la ecuación de momentum como que el campo de presión es uniforme, lo cual no es correcto y nos entregaría resultados erróneos. Esto mismo sucedería para los casos bidimensional y tridimensional.

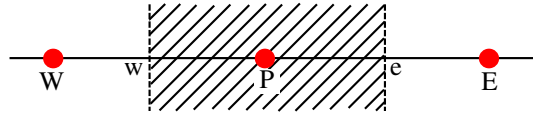


Figura 4.7: Volumen de control en una dimensión [45].

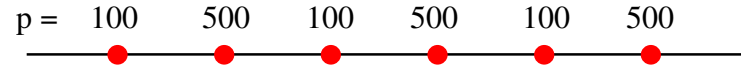


Figura 4.8: Campo de presión en “zigzag”.

4.2.6.2 REPRESENTACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Al momento de discretizar la ecuación de continuidad, surge un problema similar al del gradiente de presión. Si tomamos el caso en estado permanente, unidimensional y con densidad constante, tenemos:

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (4.30)$$

Integrando en el volumen de control de la Figura 4.7, nos quedaría:

$$u_e - u_w = 0 \quad (4.31)$$

Utilizamos una variación lineal de las velocidades para tener los valores de los nodos, y consideramos que las caras del volumen se encuentran en el punto medio de dos nodos consecutivos:

$$\frac{u_P - u_E}{2} - \frac{u_W - u_P}{2} = 0 \quad (4.32)$$

$$u_E - u_W = 0 \quad (4.33)$$

Esto significa que la ecuación de continuidad requiere que las velocidades sean

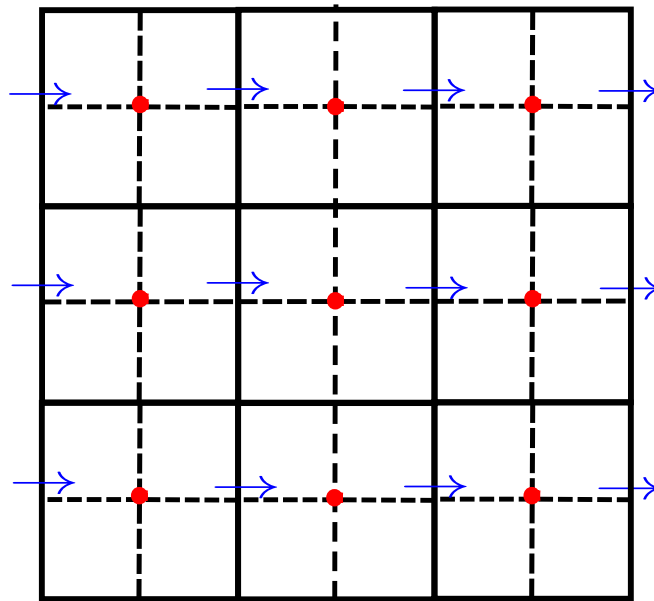
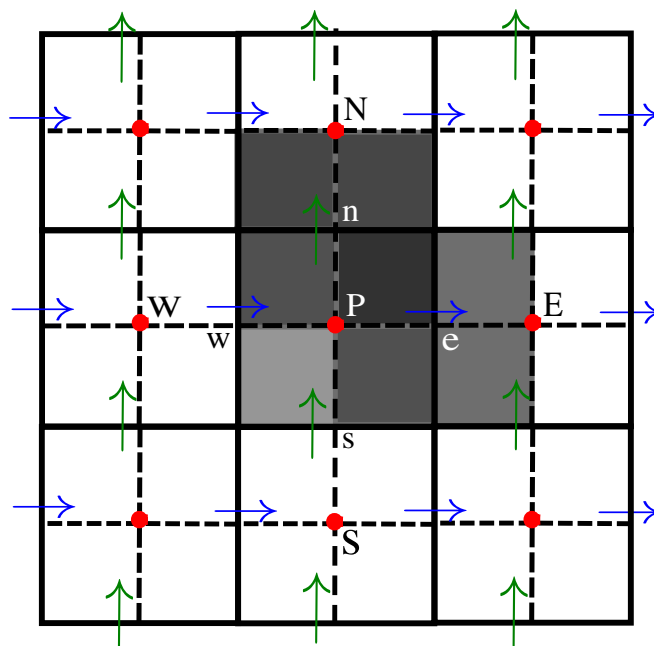
iguales en nodos alternados y no en los nodos consecutivos. Si tenemos un campo de velocidad con los mismos valores al campo de presión mostrado en la Figura 4.8, nos podemos dar cuenta que este campo satisface la ecuación de continuidad, siendo que es un campo irreal.

4.2.7 MALLA DESPLAZADA

Los problemas mencionados en las secciones anteriores pueden ser resueltos al darnos cuenta que no tenemos la obligación de calcular los valores de las componentes de la velocidad en los mismos nodos en donde calculamos las otras propiedades. Al utilizar una malla distinta a la malla de las otras propiedades los problemas antes mencionados desaparecerán.

La estrategia consiste en “desplazar” la malla de nodos para crear otras mallas en donde se calcularían las componentes de la velocidad. Los nodos de las mallas desplazadas caerían justo en las caras de los volúmenes de los nodos de la malla principal. Así, la componente de la velocidad en “ x ” se calcularía en las caras normales a la dirección “ x ”. Para observarlo de manera más clara, en la Figura 4.9 tenemos la malla desplazada para la componente en “ x ” de la velocidad.

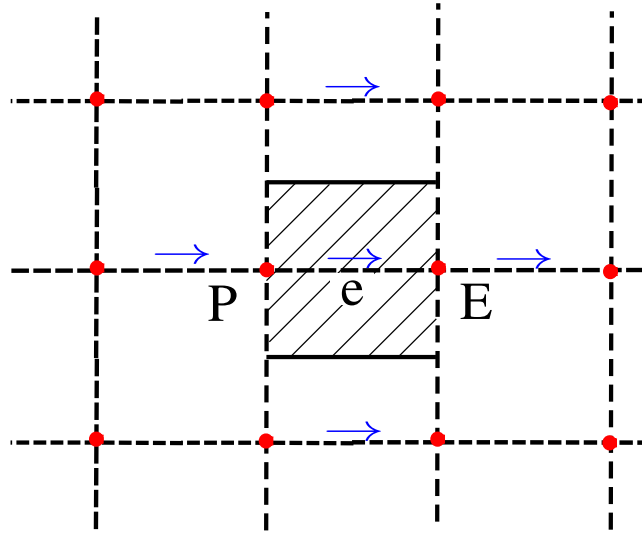
En esta figura los puntos representan los nodos de la malla principal en donde se calcularán las otras propiedades (e.g. temperatura y humedad) así como las escalares (e.g. densidad, calor específico, viscosidad, etc.). Por otro lado, las flechas representan los nodos de la malla desplazada que se utilizará para calcular la componente u de la velocidad. Las líneas continuas representan las caras de los volúmenes de control de la malla principal, y como podemos observar, los nodos de la malla desplazada se ubican exactamente en las caras “este” y “oeste” de estos volúmenes. En la Figura 4.10 podemos observar las dos mallas desplazadas para las dos componentes de la velocidad en donde las flechas verticales representan los nodos de la malla para la componente v .

Figura 4.9: Malla desplazada para la componente u .Figura 4.10: Mallas desplazadas para u y v .

Al utilizar esta estrategia tenemos la ventaja de que al momento de calcular los flujos convectivos de las ecuaciones 4.18 no necesitaremos emplear una interpolación para el cálculo de las velocidades en las caras de los nodos, debido a que ya conocemos el valor de las velocidades en las caras de los nodos de la malla principal. Se tiene otra ventaja, mucho más relevante, la cual consiste en que al discretizar la ecuación de continuidad en un volumen de control típico se tendrá la diferencia de velocidad entre dos nodos adyacentes evitando así que campos de flujo irreales cumplan con la ecuación de continuidad. Esto se puede observar en la Figura 4.10. Además, la diferencia de presiones entre dos nodos adyacentes se convertirá en la “fuerza natural conductiva” [45] para la componente de la velocidad que se encuentre en medio de estos dos nodos. Esto evitará que campos de presiones como los mostrados en la Figura 4.8 cumplan con la ecuación de momentum.

4.2.8 ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de cantidad de movimiento son un caso particular de la ecuación general de transporte tomando la variable ϕ como la componente de la velocidad correspondiente, y los respectivos valores del coeficiente de difusión Γ y del término fuente S . Debido a que las componentes de la velocidad se calculan en mallas desplazadas, las ecuaciones discretizadas serán un poco diferentes a la ecuación discretizada anteriormente para la variable ϕ . Si tomamos el volumen mostrado en la Figura 4.11 podemos observar que los valores de presión caen justo en las caras de este volumen, lo cual nos permite utilizar la diferencia $p_P - p_E$ como la fuerza que actúa en el volumen para la componente de la velocidad u . El cálculo de los coeficientes difusivos (D) y convectivos (F) requerirán de algún tipo de interpolación pero esencialmente es el mismo procedimiento visto en las secciones anteriores. La ecuación discretizada para la componente u nos quedaría de la siguiente forma:

Figura 4.11: Volumen de control para la componente u .

$$a_e u_e = \sum a_{nv} u_{nv} + b + (p_P - p_E) A_e \quad (4.34)$$

donde a_{nv} son los coeficientes de los nodos vecinos, los cuales incluyen la influencia de los efectos difusivos y convectivos en las caras de los volúmenes de control, y b representa el término fuente, tal como se definió anteriormente. Hay que notar que el término $(p_P - p_E) A_e$ también es parte del término fuente, pero se decidió no incluirlo debido a que estos valores son parte de la solución.

Las ecuaciones de momentum solo podrán ser resueltas cuando tengamos la información del campo de presión. Sólo cuando tengamos el campo de presión correcto se podrá obtener el campo de flujo que cumpla con la ecuación de continuidad. Si suponemos un campo de presión p^* , podremos obtener un campo de velocidades denominado como u^* y v^* . Estas componentes se obtendrían al solucionar las siguientes ecuaciones:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nv} u_{nv}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e \quad (4.35a)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nv} v_{nv}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n \quad (4.35b)$$

4.2.9 CORRECCIONES DE VELOCIDAD Y PRESIÓN

Tenemos que encontrar una manera de ir mejorando la presión supuesta p^* , de tal forma que las velocidades u^* y v^* cumplan con la ecuación de continuidad. Para esto se propondrá que la presión correcta se obtiene de la siguiente manera:

$$p = p^* + p' \quad (4.36)$$

donde p' es la corrección de la presión. Para saber cómo responden las velocidades al cambio de la presión, se propone emplear algo similar a la corrección de la presión:

$$u = u^* + u' \quad (4.37a)$$

$$v = v^* + v' \quad (4.37b)$$

Si restamos la ecuación 4.35a de la ecuación 4.34 tenemos:

$$a_e u'_e = \sum a_{nv} u'_{nv} + (p'_P - p'_E) A_e \quad (4.38)$$

Para simplificar se eliminará el término de la sumatoria en la ecuación anterior. Patankar [45] hace una discusión sobre este movimiento. Tenemos:

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E) \quad (4.39)$$

donde:

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (4.40)$$

La ecuación 4.39 es llamada la fórmula de corrección de la velocidad, la cual la podemos escribir como:

$$u_e = u_e^* + d_e(p'_P - p'_E) \quad (4.41)$$

La ecuación 4.41 muestra como la velocidad supuesta u_e^* será corregida con las correcciones a las presiones para poder obtener la velocidad real u_e . De manera similar se obtiene la ecuación para obtener la velocidad v_n .

$$v_n = v_n^* + d_n(p'_P - p'_N) \quad (4.42)$$

4.2.9.1 ECUACIÓN DE CORRECCIÓN DE PRESIÓN

Ahora transformaremos la ecuación de continuidad en una ecuación para la corrección de presión. Para el caso bidimensional la ecuación es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (4.43)$$

Integrando sobre el volumen de control del nodo P de la Figura 4.10 utilizando el esquema de diferencias centrales para las derivadas del espacio y el esquema totalmente implícito para la derivada temporal, tenemos:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\Delta x = 0 \quad (4.44)$$

Al sustituir las ecuaciones de las componentes de la velocidad obtenidas anteriormente, 4.41 y 4.42, tendremos después de simplificar:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (4.45)$$

donde:

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y \quad (4.46a)$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \quad (4.46b)$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x \quad (4.46c)$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x \quad (4.46d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (4.46e)$$

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x \quad (4.46f)$$

Para calcular los valores de las densidades en las caras de los nodos se utilizará una interpolación conveniente entre los valores de las densidades en los nodos.

Podemos observar que el término de la ecuación 4.46f es el negativo de la ecuación de continuidad 4.44 evaluada en términos de las velocidades supuestas. Si b es cero significa que las velocidades supuestas en conjunto con $(\rho_P^0 - \rho_P)$ satisfacen la ecuación de continuidad y ya no se requiere corregir la presión. Así, el término b representa una “fuente de masa” que las correcciones en la presión deben eliminar.

4.2.9.2 ALGORITMO SIMPLE

Ahora que se han obtenido las ecuaciones necesarias para calcular las componentes de la velocidad así como el campo de presión, se detallará el algoritmo utilizado. Este algoritmo tiene el nombre de *SIMPLE* (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) y establece la serie de pasos iterativos que se tienen que seguir para poder obtener el campo de flujo:

1. Comenzamos con un campo de presión supuesto p^* .
2. Resolvemos las ecuaciones 4.35a, 4.35b para obtener las componentes de la velocidad u^* y v^* .

3. Obtenemos p' resolviendo la ecuación 4.45.
4. Calculamos el valor de p mediante la ecuación 4.36.
5. Resolvemos las ecuaciones 4.41 y 4.42 para obtener las componentes de la velocidad u y v .
6. Utilizamos la presión corregida p como la nueva presión supuesta p^* , regresamos al paso 2 y repetimos todo el procedimiento hasta que la solución converga.

En la Figura 4.12 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo *SIMPLE*.

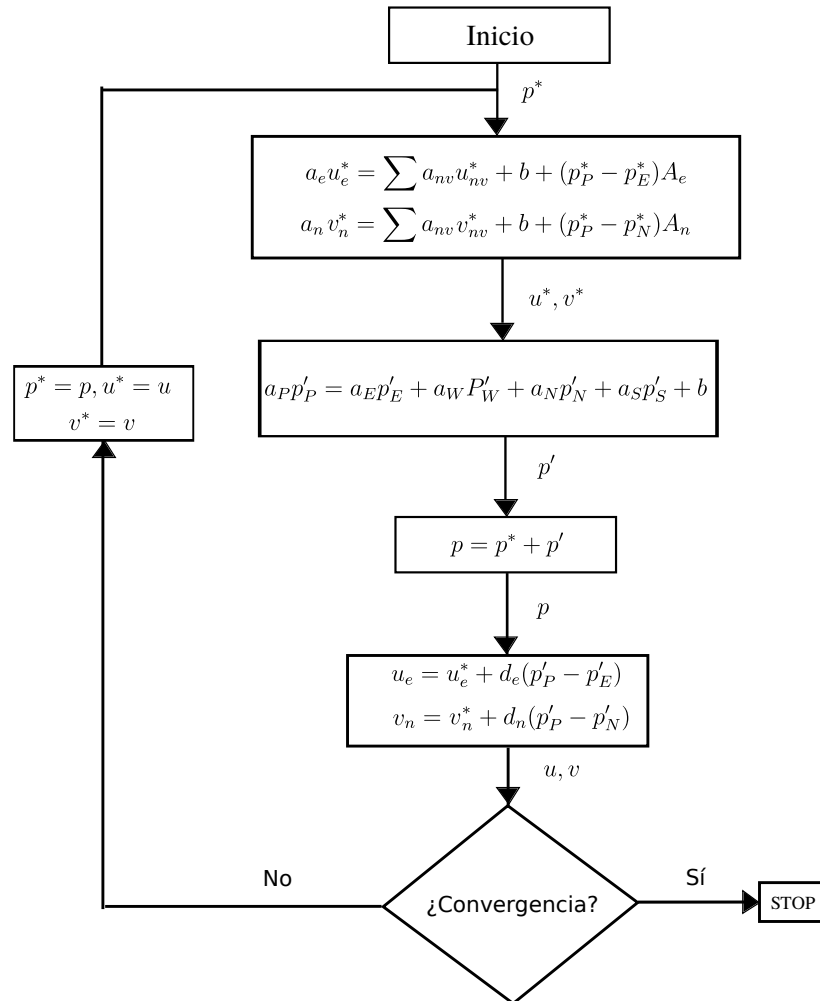


Figura 4.12: Algoritmo SIMPLE.

4.3 APLICACIÓN AL CRECIMIENTO DE ESCARCHA

Hasta el momento se ha explicado el método para la solución de la *ecuación general de transporte*, con lo cual se resolverá la ecuación de la energía, la de humedad, y las de cantidad de movimiento, tal como se detalló en la sección 4.2.8. Para poder calcular el crecimiento de la escarcha sobre la superficie fría, se requiere primero resolver las ecuaciones antes mencionadas para los dos subdominios (aire húmedo y escarcha) como se mostró en la Figura 3.3.

Dado que los dos subdominios se encuentran acoplados, será necesario conocer la condición en la interfaz *aire-escarcha* para cada una de las ecuaciones de transporte, pero esta información no la conocemos. Debido a esto, se decidió resolver las ecuaciones en un solo dominio empleando las propiedades termofísicas correspondientes a los diferentes nodos de escarcha o aire y teniendo diferentes coeficientes en las ecuaciones discretizadas, tal como lo empleó Armengol [8].

El principal problema de utilizar esta estrategia es la localización de la interfaz aire-escarcha. Para solucionar esto, se utilizó una matriz del mismo tamaño que el número de nodos empleados en el dominio con el fin de identificar si un nodo corresponde a escarcha o a aire. Un nodo de escarcha se encuentra en la interfaz cuando alguno de sus nodos vecinos corresponde a aire. En la Figura 4.13 se muestra la matriz, en la cual el número 0 representa a los nodos de aire mientras que el número 1 representa a los de la escarcha.

Dado que la capa de escarcha crece con el paso del tiempo, la matriz también cambiará haciendo que las propiedades cambien para los nuevos nodos de escarcha y afectando a las ecuaciones de transporte.

A continuación se explicará la forma en que se solucionarán cada una de las ecuaciones para ambos subdominios.

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

0 ... Escarcha 1 ... Aire — ... Interfaz

Figura 4.13: Matriz para identificar los nodos.

4.3.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Como se mencionó anteriormente, para solucionar las ecuaciones de cantidad de movimiento se utilizó mallas desplazadas y el algoritmo **SIMPLE** para el acoplamiento con la presión.

Para el subdominio del aire se utilizaron los coeficientes mostrados en la tabla 4.2. Como se mencionó en la sección 3.4.1 la viscosidad dinámica no será constante sino que será función de la temperatura local.

Tabla 4.2: Coeficientes para la ecuación de cantidad de movimiento.

Ecuación	ϕ	Γ	S
Cantidad de movimiento en dirección x	u	μ_a	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Cantidad de movimiento en dirección y	v	μ_a	$-\frac{\partial p}{\partial y}$

Para el subdominio de la escarcha se utilizará una estrategia descrita por Patankar [45]. Es común conocer los valores de las variables en las fronteras del dominio, pero esta estrategia nos permite asignar valores conocidos a nodos internos del dominio como parte de la solución numérica. La estrategia consiste en emplear valores para el término fuente de un orden mucho mayor que los otros términos de la ecuación.

ción discretizada, de tal forma que estos términos no tengan “peso” dentro de la ecuación. Si tenemos la ecuación discretizada:

$$a_P \phi_P = \sum a_{nv} \phi_{nv} + b \quad (4.47)$$

y utilizamos los términos fuente como:

$$S_C = 10^{30} \phi_{P,deseado} \quad (4.48a)$$

$$S_P = -10^{30} \quad (4.48b)$$

Al utilizar valores tan grandes, podemos despreciar los otros términos de la ecuación, quedando:

$$a_P \phi_P = b \quad (4.49)$$

donde:

$$a_P = -S_P \Delta x \Delta y \quad (4.50a)$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y \quad (4.50b)$$

Por lo tanto, el valor de ϕ_P deseado nos quedaría:

$$\phi_P = \frac{-S_C * \phi_{P,deseado}}{S_P} \quad (4.51)$$

Utilizando esta técnica es posible especificar un valor deseado de ϕ en cualquiera de los nodos. En este caso queremos que la velocidad en el subdominio de la escarcha sea cero, por lo cual se emplea $S_C = 0$ y $S_P = -10^{30}$ en los nodos correspondientes a escarcha.

4.3.2 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Para la ecuación de la conservación de la energía se utilizarán distintos valores para las propiedades termofísicas y para los términos fuente. Estos valores los podemos ver en la tabla 4.3

Tabla 4.3: Coeficientes para la ecuación de conservación de la energía.

Ecuación	ϕ	Γ	S
Conservación de la energía en el aire	T	$\frac{\lambda_a}{c_{p,a}}$	0
Conservación de la energía en la escarcha	T	$\frac{\lambda_f}{c_{p,f}}$	$\frac{q_{sub}}{c_{p,f}} \frac{\partial(\rho_f)}{\partial t}$

El $c_{p,a}$ se considera constante, mientras que la λ_a se considera que varía en función de la temperatura local. Por otro lado, las propiedades de la escarcha ($c_{p,f}$ y λ_f) varían en cada paso de tiempo como se detalló en la sección 3.4.

Tal como se mencionó en la sección 3.3.1, se considera que el vapor de agua cambia de fase directamente al estado sólido, por lo que el término q_{sub} representa el calor de sublimación del agua y se considera constante $q_{sub}=2,833,000$ J/kg. Por último, el término $\frac{\partial(\rho_f)}{\partial t}$ representa la densificación de la escarcha.

4.3.3 TRANSPORTE DE VAPOR DE AGUA

Para resolver el transporte de vapor de agua en el subdominio del aire se utilizaron los coeficientes mostrados en la tabla 4.4

Tabla 4.4: Coeficientes para la ecuación de concentración de vapor de agua.

Ecuación	ϕ	Γ	S
Concentración de vapor de agua	w	$\rho_a D$	0

Dentro de la escarcha se considera que la humedad corresponde a la humedad de

saturación a la temperatura local [6, 8]. Estos valores los podemos obtener mediante la ecuación:

$$w_{sat} = 0.622 \frac{p_v}{p_a} \quad (4.52)$$

donde p_v es la presión parcial del vapor de agua y p_a es la presión parcial del aire seco. Estas dos presiones se relacionan mediante:

$$p = p_a + (H.R.)p_v \quad (4.53)$$

donde p es la presión de la mezcla. Al tener el aire húmedo saturado ($H.R. = 100$) tenemos:

$$w_{sat} = 0.622 \frac{p_{v,sat}}{p - p_{v,sat}} \quad (4.54)$$

El valor de la presión parcial del vapor saturado es función de la temperatura, y para calcularlo se emplea la siguiente ecuación [46]:

$$\ln(p_{v,sat}) = E_1/T + E_2 + E_3T + E_4T^2 + E_5T^3 + E_6T^4 + E_7\ln(T) \quad (4.55)$$

de donde $E_1 = -5.6745359 \times 10^3$, $E_2 = 6.3925247$, $E_3 = -9.6778430 \times 10^{-3}$, $E_4 = 6.2215701 \times 10^{-7}$, $E_5 = 2.0747825 \times 10^{-9}$, $E_6 = -9.4840240 \times 10^{-13}$ y $E_7 = 4.1635019$.

Debido a que el cálculo de Logaritmos y la función exponencial consumen mayor tiempo de cómputo, como los mostrados en la ecuación 4.55, se decidió obtener los valores de humedad saturada mediante los datos de humedad en función de la temperatura reportados en el *ASHRAE Handbook: Fundamentals* [46]. Se ajustaron dos polinomios para obtener un mejor ajuste a los datos en temperaturas muy bajas:

$$w_{sat}(T) = B_0T^4 + B_1T^3 + B_2T^2 + B_3T + B_4 \quad \text{para } T \geq -25^\circ C \quad (4.56)$$

$$w_{sat}(T) = C_0T^4 + C_1T^3 + C_2T^2 + C_3T + C_4 \quad \text{para } T < -25^\circ C \quad (4.57)$$

donde $B_0 = 8 \times 10^{-10}$, $B_1 = 1 \times 10^{-7}$, $B_2 = 9 \times 10^{-6}$, $B_3 = 3 \times 10^{-4}$, $B_4 = 3.7 \times 10^{-3}$, para la ecuación 4.56, y $C_0 = 2 \times 10^{-10}$, $C_1 = 5 \times 10^{-8}$, $C_2 = 5 \times 10^{-6}$, $C_3 = 2 \times 10^{-4}$, $C_4 = 2.8 \times 10^{-3}$ para la ecuación 4.57. La temperatura se encuentra en $^\circ C$ y la humedad en [kg/kg].

Al comparar las humedades obtenidas de las ecuaciones 4.54 y 4.56, observamos que las curvas son muy similares y se tiene una diferencia relativa menor del 5%. Esta comparación se muestra en la Figura 4.14. Es importante notar que estos polinomios son válidos a presión atmosférica estándar.

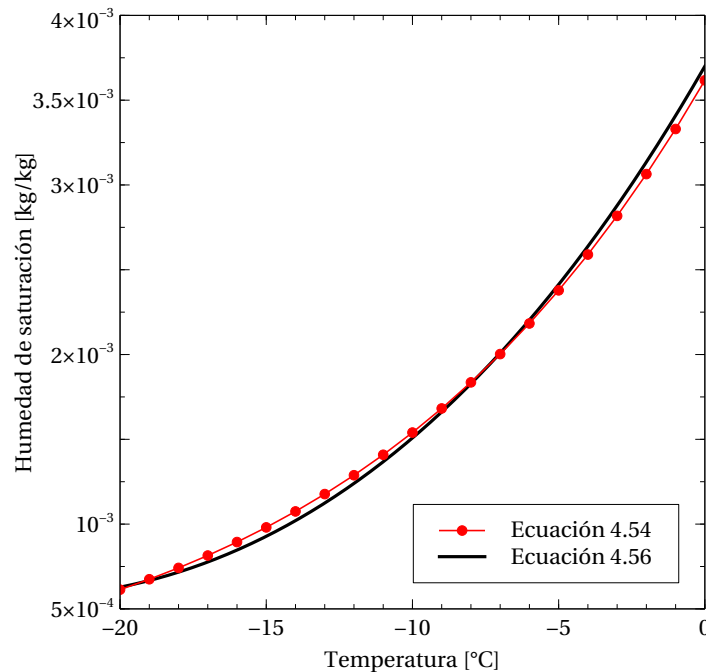


Figura 4.14: Comparación de las ecuaciones 4.54 y 4.56.

Para asignar estos valores a los nodos correspondientes a la escarha se utiliza la misma estrategia que en las ecuaciones de cantidad de movimiento 4.3.1. Para

esto, se calculó el valor de w_{sat} solamente en los nodos de escarcha y en estos nodos se utilizó los valores $S_C = 10^{30} \times w_{sat}(T)$, y $S_P = -10^{30}$. De esta manera los valores dentro de la escarcha siempre corresponderán a los valores de $w_{sat}(T)$.

4.4 MODELADO DE LA DENSIFICACIÓN

El parámetro más importante dentro de la escarcha es su densidad. Esto debido a que con esta podemos calcular la porosidad de la escarcha y como consecuencia todas las otras propiedades (conductividad, calor específico, difusividad). La densidad de la escarcha cambia con el paso del tiempo, haciéndose cada vez mayor, hasta llegar al punto en que alcance la densidad propia del hielo, es decir, que tenga una porosidad de 0. Por esto es necesario tener una expresión con la que podamos calcular la nueva densidad de la escarcha en cada paso de tiempo y con esto volver a calcular todas las propiedades de la escarcha.

En [24] proponen la siguiente ecuación para la densificación:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (4.58)$$

Integrando los términos de la ecuación 4.58 sobre un volumen como el de la Figura 4.2 y utilizando un esquema totalmente implícito para la derivada temporal y diferencias finitas centrales para las derivadas espaciales tendremos la siguiente ecuación discretizada:

$$a_D \rho_{f,P} = a_E w_E + a_W w_W + a_N w_N + a_S w_S + a_P w_P + b \quad (4.59)$$

de donde:

$$a_D = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (4.60a)$$

$$a_E = (\rho_a D_{ef})_e \frac{\Delta y}{\delta x} \quad (4.60b)$$

$$a_W = (\rho_a D_{ef})_w \frac{\Delta y}{\delta x} \quad (4.60c)$$

$$a_N = (\rho_a D_{ef})_n \frac{\Delta x}{\delta y} \quad (4.60d)$$

$$a_S = (\rho_a D_{ef})_s \frac{\Delta x}{\delta y} \quad (4.60e)$$

$$a_P = -a_E - a_W - a_N - a_S \quad (4.60f)$$

$$b = a_D \rho_{f,P}^0 \quad (4.60g)$$

En el apéndice A se reporta el procedimiento para obtener estos coeficientes. Como podemos observar en la ecuación discretizada 4.59, el cálculo del nuevo valor de la densidad dentro de la escarcha se encuentra en función del campo de humedad y de la densidad de la escarcha del tiempo anterior, por lo que el cálculo de la nueva densidad será un cálculo directo y no requiere que sea un proceso iterativo. Este calculo se realizará en cada paso de tiempo.

4.5 BALANCE DE MASA EN LA INTERFAZ

Como se mencionó anteriormente, para poder modelar el crecimiento de escarcha en dos dimensiones se requiere hacer un balance de masa en uno de los nodos correspondientes a la interfaz como el de la Figura 4.15, el cual posee 2 nodos vecinos de aire por lo que el flujo másico proviene de estas dos direcciones. Para realizar el balance de masa en la interfaz, se seguirá el procedimiento descrito en el trabajo de Armengol [8], el cual se describe a continuación.

Si integramos la ecuación 3.18 en un nodo como el de la Figura 4.2 tenemos:

$$\rho_f \frac{dV}{dt} = \sum_{SC} \dot{m}_a A - \sum_{SC} \dot{m}_{dif} A \quad (4.61)$$

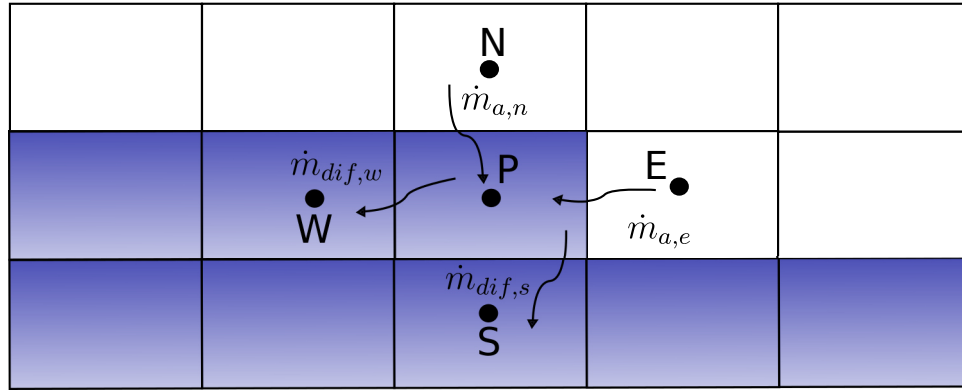


Figura 4.15: Balance de masa en la interfaz. Adaptado de [8].

donde A representa el área normal al flujo másico, \dot{m}_a es el flujo másico proveniente del aire y \dot{m}_{dif} es el flujo másico que se difunde dentro de la escarcha y que contribuye a la densificación de la misma. El término de la izquierda de la ecuación 4.61 lo podemos interpretar como el cambio de masa que existe dentro del volumen de control.

Debido a que el volumen de control puede recibir masa en varias de sus caras será necesario considerar los cambios del volumen en cada una de las direcciones del volumen. El volumen de control tendrá un mayor crecimiento en aquella cara que reciba mayor masa, es decir, en la que el gradiente de humedad sea mayor.

Las ecuaciones 4.62 representan los cambios de volumen de cada una de las caras, en función de los flujos másicos provenientes del aire.

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_e = \frac{\dot{m}_{a,e}A_e}{\sum \dot{m}_a A_T} \frac{dV}{dt} \quad (4.62a)$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_w = \frac{\dot{m}_{a,w}A_w}{\sum \dot{m}_a A_T} \frac{dV}{dt} \quad (4.62b)$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_n = \frac{\dot{m}_{a,n}A_n}{\sum \dot{m}_a A_T} \frac{dV}{dt} \quad (4.62c)$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_s = \frac{\dot{m}_{a,s}A_s}{\sum \dot{m}_a A_T} \frac{dV}{dt} \quad (4.62d)$$

en 4.62a, $\dot{m}_{a,e}$ representa el flujo másico que entra al volumen de control por la cara “este”, A_e es el área normal al flujo másico, que en nuestro caso bidimensional será

igual a Δy , y $\frac{dV}{dt}$ es el cambio de volumen total del nodo, por lo cual tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_e + \left(\frac{dV}{dt}\right)_w + \left(\frac{dV}{dt}\right)_n + \left(\frac{dV}{dt}\right)_s \quad (4.63a)$$

$$\frac{\dot{m}_{a,e}A_e}{\sum \dot{m}_a A_T} + \frac{\dot{m}_{a,w}A_w}{\sum \dot{m}_a A_T} + \frac{\dot{m}_{a,n}A_n}{\sum \dot{m}_a A_T} + \frac{\dot{m}_{a,s}A_s}{\sum \dot{m}_a A_T} = 1 \quad (4.63b)$$

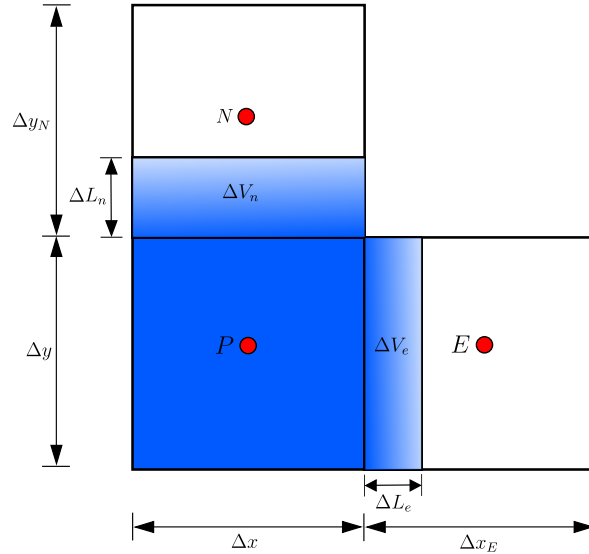


Figura 4.16: Crecimiento hacia los nodos de aire.

En la Figura 4.16 se muestra un esquema del crecimiento de un volumen de control, en el cual los vecinos del lado “este” y “norte” corresponden a aire. En esta figura ΔV_n y ΔV_e representan los cambios en el volumen en las direcciones norte y este, respectivamente. Por otro lado, ΔL_n y ΔL_e representan el “avance” que tuvo la escarcha en los nodos de aire vecinos.

Para representar la porción de escarcha que ocupa en los nodos vecinos de aire se utilizan las siguientes ecuaciones para cada una de las direcciones del volumen:

$$\Delta C_e = \frac{\Delta L_e}{\Delta x_E} \quad (4.64a)$$

$$\Delta C_w = \frac{\Delta L_w}{\Delta x_W} \quad (4.64b)$$

$$\Delta C_n = \frac{\Delta L_n}{\Delta x_N} \quad (4.64c)$$

$$\Delta C_s = \frac{\Delta L_s}{\Delta x_s} \quad (4.64d)$$

El término ΔC representa la fracción ocupada por la escarcha en los nodos de aire vecinos, por lo que siempre tendrá un valor entre 0 y 1, siendo 0 cuando el nodo es completamente aire y 1 cuando el nodo fue totalmente ocupado por la escarcha.

Aproximando linealmente:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_e = \left(\frac{dx}{dt}\right)_e A_e \quad (4.65)$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_e = \frac{\Delta L_e}{\Delta t} A_e \quad (4.66)$$

despejando ΔL_e y aplicando el mismo procedimiento para las otras 3 direcciones tenemos:

$$\Delta L_e = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)_e}{A_e} \Delta t \quad (4.67a)$$

$$\Delta L_w = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)_w}{A_w} \Delta t \quad (4.67b)$$

$$\Delta L_n = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)_n}{A_n} \Delta t \quad (4.67c)$$

$$\Delta L_s = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)_s}{A_s} \Delta t \quad (4.67d)$$

En este estudio los nuevos nodos de escarcha aparecerán cuando ΔC sea igual a 1, entonces el nodo vecino involucrado pasará de aire a escarcha. A este nuevo nodo de escarcha se le asigna el mismo valor de densidad del nodo que esté en contacto, es decir:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial n} = 0 \quad (4.68)$$

donde n es la dirección en la que la escarcha creció. A partir de este valor de escarcha se calculan las otras propiedades involucradas.

4.6 CRITERIO DE CONVERGENCIA

Para considerar que el código numérico encontró una solución adecuada, es necesario definir un criterio de convergencia. Este criterio se define como la suma de los valores absolutos de los residuales de cada nodo. El residual $R_{i,j}^\phi$ corresponde al residual de la propiedad ϕ del nodo i,j de la iteración actual. Este residual se calcula como:

$$R_{i,j}^\phi = a_P^{i,j} \phi_{i,j} - a_E^{i,j} \phi_{i+1,j} - a_W^{i,j} \phi_{i-1,j} - a_N^{i,j} \phi_{i,j+1} - a_S^{i,j} \phi_{i,j-1} - b \quad (4.69)$$

Y la suma de los valores absolutos de los residuales de todos los nodos del dominio computacional es:

$$\mathbf{R} = \sum |R_{i,j}^\phi| \quad (4.70)$$

El residual \mathbf{R} de la iteración actual debe ser menor que $\mathbf{R}_{max}=1 \times 10^{-5}$.

4.7 ALGORITMO DEL CÓDIGO DE FORMACIÓN DE ESCARCHA

En esta sección se explicará la serie de pasos que se siguen en el código numérico para predecir el crecimiento de la escarcha así como la variación de las propiedades de la misma. Al inicio del código se llama a una subrutina que contiene los valores de las condiciones iniciales (i.e. $T^0, u^0, v^0, w^0, \rho^0$ y $Frost^0$), así como las dimensiones del dominio a utilizar y los parámetros de la simulación (e.g. tiempo de simulación, pasos de tiempo, residual máximo). Con los valores iniciales se calcularán las propiedades termofísicas en cada uno de los nodos utilizando diferente estrategia dependiendo de

la naturaleza del nodo, tal como se explicó en la sección 3.4

Teniendo los valores de las componentes de la velocidad del tiempo anterior, la densidad y la viscosidad, así como la geometría de la escarcha es posible calcular el campo de velocidades utilizando el algoritmo *SIMPLE* y la estrategia mencionada en la sección 4.3.1 para el bloqueo de la velocidad dentro de la escarcha.

Una vez que tengamos el campo de velocidades del tiempo actual, procederemos a calcular el campo de temperatura y el campo de humedad. En este punto se tiene el inconveniente de que en la ecuación de la energía utilizada dentro de la escarcha se tiene el término de la densificación $\frac{\partial(\rho_f)}{\partial t}$ dentro del término fuente de la ecuación, pero como no conocemos el valor de la densidad en el tiempo actual no podemos evaluar este término, y para calcular el nuevo valor de la densidad necesitamos conocer el campo de humedad, tal como se observa en la ecuación 4.58. Lo que se hizo fue considerar que no existe variación en la densidad, es decir, $\frac{\partial(\rho_f)}{\partial t} = 0$ y de esta manera obtenemos un campo de temperatura estimado T^* . Con este campo de temperatura estimado, se procede a calcular el campo de humedad, el cual en el subdominio de la escarcha es función de la temperatura local, por lo que obtendremos un campo de humedad estimado w^* . Con este campo de humedad ahora es posible calcular el valor de la densidad dentro de la escarcha para el tiempo actual ρ_f , y posteriormente calcular los campos de temperatura T y humedad w reales. A continuación se calculará la nueva geometría de la escarcha utilizando el procedimiento explicado en la sección 4.3, y posteriormente se vuelven a calcular las propiedades termofísicas. Con la nueva geometría de la capa de escarcha se vuelve a calcular el nuevo campo de velocidades en el paso de tiempo siguiente. Este algoritmo se puede observar en el diagrama de flujo de la Figura 4.17, en donde los valores con superíndice 0 representan los valores iniciales y *Frost* representa la matriz de escarcha la cual irá cambiando con el tiempo.

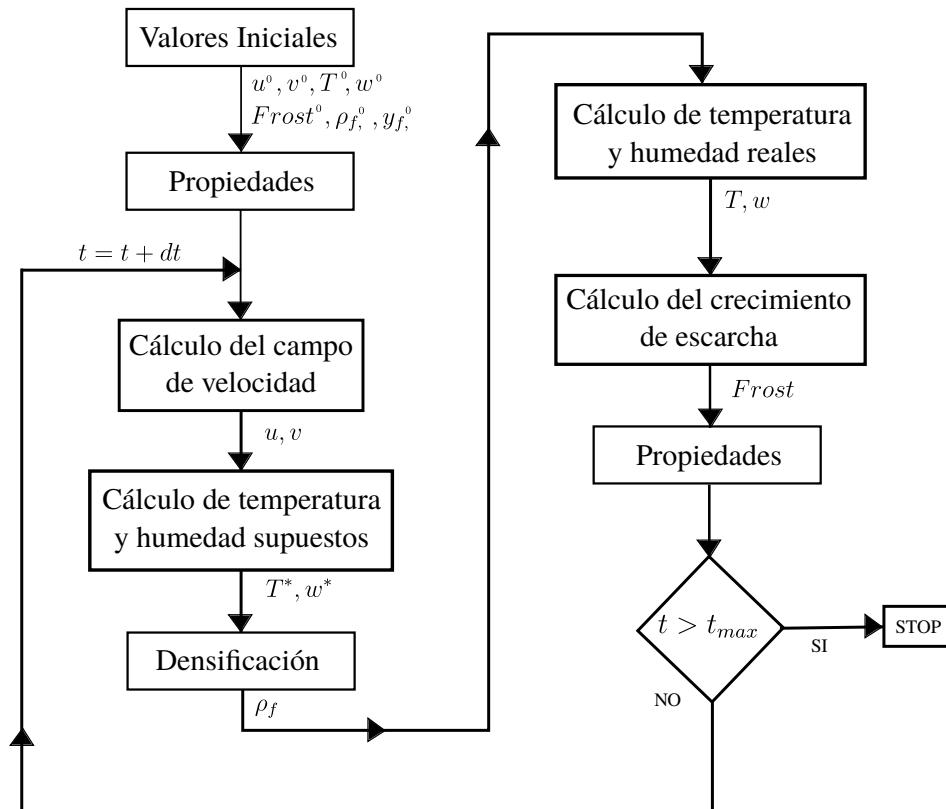


Figura 4.17: Algoritmo de solución.

CAPÍTULO 5

VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Con el objetivo de poder validar los resultados obtenidos del código numérico se realizaron una serie de experimentos a diversas condiciones. En este capítulo se explicará la instalación experimental utilizada en los experimentos, así como las mediciones obtenidas, la metodología para conocer el espesor de la capa de escarcha y el estudio de validación del código numérico. El dominio computacional y las condiciones de frontera elegidos para generar los resultados numéricos, que serán validados mediante su comparación con resultados experimentales, no son exactamente iguales a las condiciones de interés en esta investigación, tal como se explicará en la Sección 5.5.

5.1 INSTALACIÓN EXPERIMENTAL

Para poder tener las condiciones termodinámicas del aire controladas fue necesario utilizar un calorímetro tipo túnel de viento el cual nos permite tener la temperatura, la humedad relativa y la velocidad del aire controladas.

En la Figura 5.1 se muestra el esquema de este equipo, así como sus componentes. Este equipo se compone de unas guías **(9)** y **(1)** para hacer que el flujo de aire sea homogéneo; para las mediciones en la entrada de la sección de pruebas **(2)**,

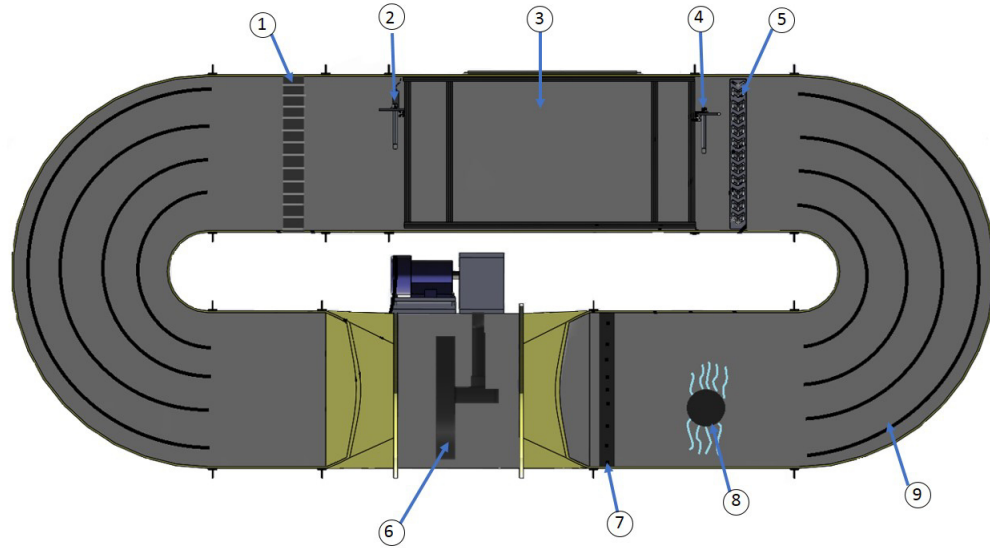


Figura 5.1: Calorímetro túnel de viento.

se tuvo un sensor *RTD* ($\pm 1/10 (0.3 + 0.005|T|)^{\circ}C$) para medir la temperatura, un sensor de humedad *OMEGA* modelo *HX85A* cuyo rango de medición es de 5 a 95 % ($\pm 1\%$) y para la velocidad se utilizó un velocímetro *TSI VelociCalc*® modelo 9545, cuyo rango de operación es de 0 a 30 m/s (± 0.015 m/s). Después se tiene la sección de pruebas (**3**), la cual posee dimensiones de 100 cm \times 80 cm, luego a la salida de la sección (**4**) se cuenta con otro sensor *RTD* y otro sensor de humedad. Para variar la temperatura en el aire se tiene un evaporador (**5**) y una resistencia eléctrica (**7**), y para aumentar la humedad se cuenta con un distribuidor de vapor (**8**), el cual se encuentra conectado a un humidificador instalado fuera del túnel. Por último, para variar la velocidad del flujo de aire se cuenta con un ventilador (**6**), al cual le podemos variar la velocidad de giro usando un variador de frecuencia. Para el control de las variables se utilizó un sistema de adquisición de datos *NI CompactRIO-9024* y un programa desarrollado en el software *LabVIEW 2014*. En el Apéndice D se reporta las mediciones realizadas durante los experimentos.

5.2 PLACA PLANA

Para los experimentos se utilizó una placa de cobre unida a una placa de acrílico, la cual se puede observar en la Figura 5.2. La placa de cobre posee un ranurado por el cual se hizo fluir una mezcla de glycol con agua a -30°C aproximadamente con el objetivo de provocar un descenso en la temperatura de la superficie de la placa. Se utilizó una cámara termográfica con el fin de observar la distribución de la temperatura sobre la superficie de la placa (Figura 5.3) y así asegurar que la temperatura fuera constante y uniforme en el experimento.

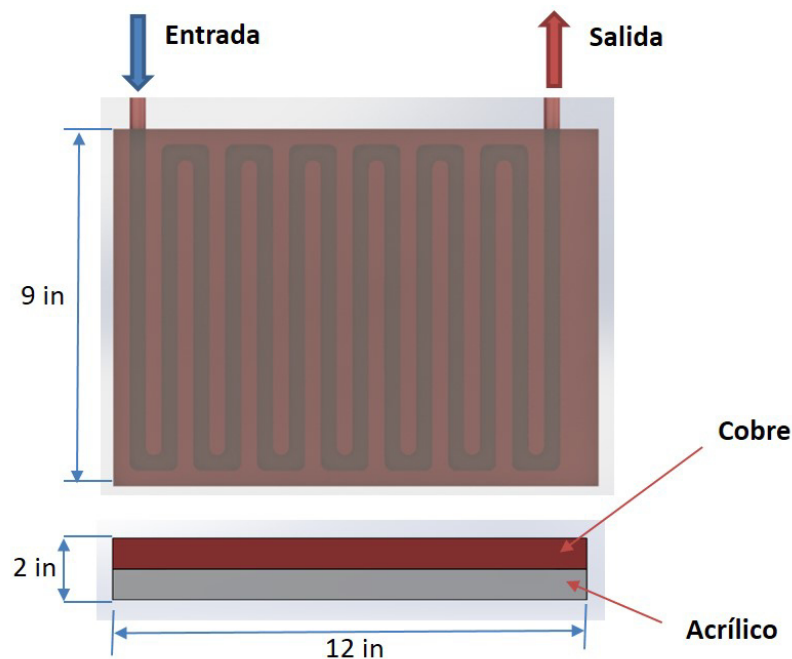


Figura 5.2: Esquema de la placa de cobre.

La placa se aisló con poliestireno extruido de 2 pulgadas de espesor en todas sus caras dejando expuesta solamente una tercera parte de la superficie de cobre (Figura 5.4) con el fin de que la temperatura en la superficie descendiera más rápido y alcanzara un valor menor. Para monitorear la temperatura de la placa durante el experimento se colocaron tres termopares tipo T ($\pm 0.5^{\circ}\text{C}$) a 3, 6 y 9 pulgadas desde el borde de entrada a la placa, de tal manera que estos no influyeran en el

crecimiento de la escarcha. De esta forma asegurábamos que la temperatura fuera la misma en toda la placa.

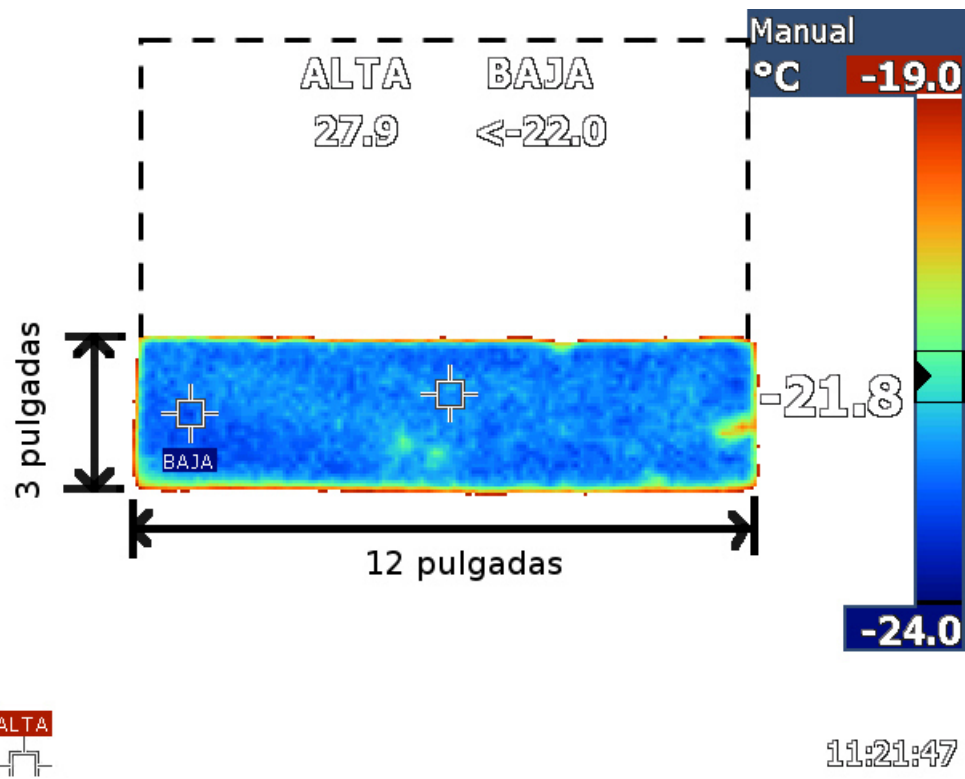


Figura 5.3: Distribución de la temperatura en la placa.

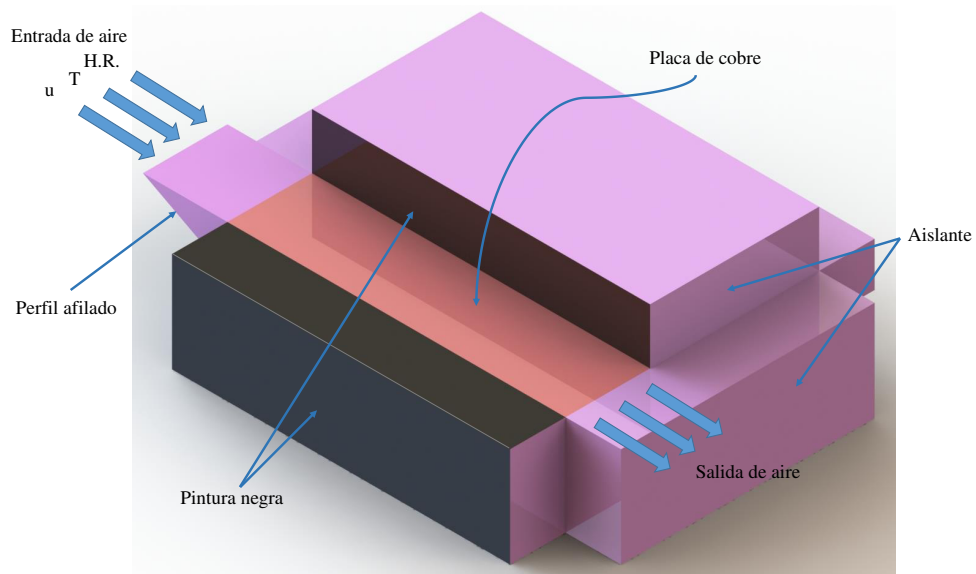


Figura 5.4: Placa aislada con poliestireno extruido.

5.3 EXPERIMENTO

Los experimentos para validar el código numérico consistieron en colocar la placa plana dentro de la sección de pruebas en el túnel de viento para tener controlados los valores de temperatura, humedad relativa y velocidad en el aire. Se empleó un baño térmico (*PolyScience PP15R-40*) y se hizo circular una mezcla de etilenglicol con agua al 50% a $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ dentro de la placa con el fin de provocar un descenso de la temperatura en la superficie de la misma. Con el fin de evitar la deposición de escarcha sobre la placa antes de alcanzar las condiciones controladas se colocó una película de plástico sobre la placa, la cual se retiraba cuando iniciaba la prueba. Una vez que todas las variables en el aire estuvieran controladas y que la temperatura de la placa ya no descendiera, en este punto se iniciaba la prueba.

En la Figura 5.5 se muestra un diagrama del experimento. Como se observa en el diagrama, se utilizaron 2 *RTD*'s para medir la temperatura del fluido en la entrada y salida de la placa, un caudalímetro *IFM SM6000* con un rango de medida de 0.10 a 25 l/min $\pm(2\% \text{ Valor medido} + 0.5\% \text{ Valor límite del rango de medición})$. Con estos datos medidos y con el c_p del fluido refrigerante (el cual se consideró constante, ya que su variación con la temperatura es casi nula) fue posible calcular la transferencia de calor que ocurrió entre el aire y el fluido refrigerante y observar la variación de esta transferencia conforme la capa de escarcha fue creciendo.

El parámetro que nos interesa medir en los experimentos, con el fin de compararlo con los resultados del código CFD, es la variación del espesor de la escarcha. Para obtener esta medición se utilizó una cámara *Nikon 3300* (24.2 megapíxeles) con el lente *AF Zoom-NIKKOR 70-300mm f/4-5.6G*. Esta cámara se colocó sobre un sistema de posicionamiento por coordenadas tipo “*Traverse*” y la toma de fotografías se realizó desde la computadora utilizando el software *digiCamControl*.

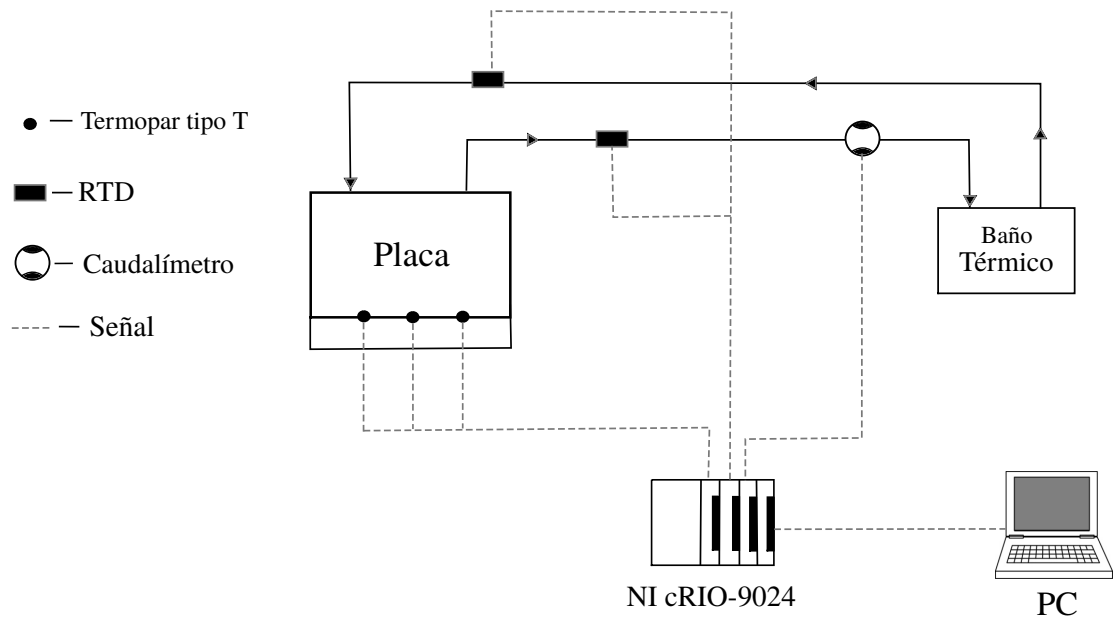


Figura 5.5: Diagrama del experimento.

Cada prueba tuvo una duración máxima de 4 horas, debido a que después de este tiempo las condiciones dentro del túnel ya no se mantienen controladas, debido a la escarcha que se deposita en el evaporador del sistema de enfriamiento del túnel. Evaluaciones preliminares mostraron que el fenómeno es lento, por lo que las fotografías se tomaron cada 10 minutos. En la Figura 5.6 se puede observar la instalación experimental completa, en la cual se observa el túnel de viento utilizado, la cámara fotográfica colocada en el sistema de posicionamiento por coordenadas, justo enfrente de la sección de pruebas en donde estuvo la placa de cobre.

5.3.1 CONDICIONES DE ESTUDIO

Se llevaron a cabo tres experimentos a condiciones distintas y con tres réplicas cada uno para eliminar el error aleatorio y conseguir mejores resultados. En el Capítulo 2 se realizó una búsqueda intensiva sobre experimentos de formación de escarcha en placas planas. Analizando los resultados de estos estudios se llegó a la conclusión de que las variables que mayor influencia tienen en el fenómeno de depo-

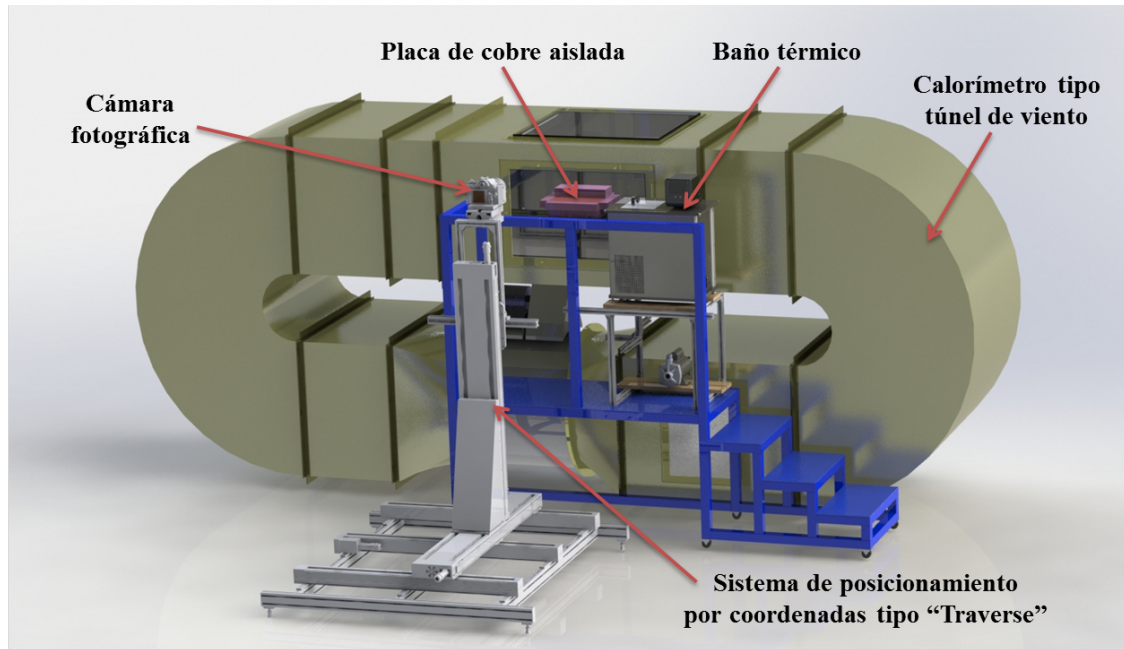


Figura 5.6: Instalación experimental.

Tabla 5.1: Condiciones de los experimentos.

	T_a [°C]	Humedad relativa [%]	T_s [°C]	Velocidad [m/s]	Re
Caso 01	8	60	-20.8	0.4	8150
Caso 02	15	70	-23.7	0.4	8150
Caso 03	5	56	-24.4	0.4	8150

sición y crecimiento de escarcha son la humedad contenida en el aire, y la diferencia de temperatura (ΔT) entre las temperaturas del aire y la placa. Debido a esto, en los experimentos se mantuvo la velocidad del aire constante y la temperatura de la placa se mantuvo a la temperatura mínima que se podía alcanzar en esas condiciones. La humedad relativa y la temperatura del aire fueron variando en cada experimento. En la tabla 5.1 se muestran las condiciones que se eligieron para los tres casos, en donde el número de Reynolds se calculó al final de la placa. Estas condiciones se eligieron basándonos en las condiciones empleadas en estudios similares [10, 28, 47, 48] y en las limitantes del túnel de viento, debido a que humedades relativas por debajo de 55 % y por encima 70 % son muy difíciles de controlar.

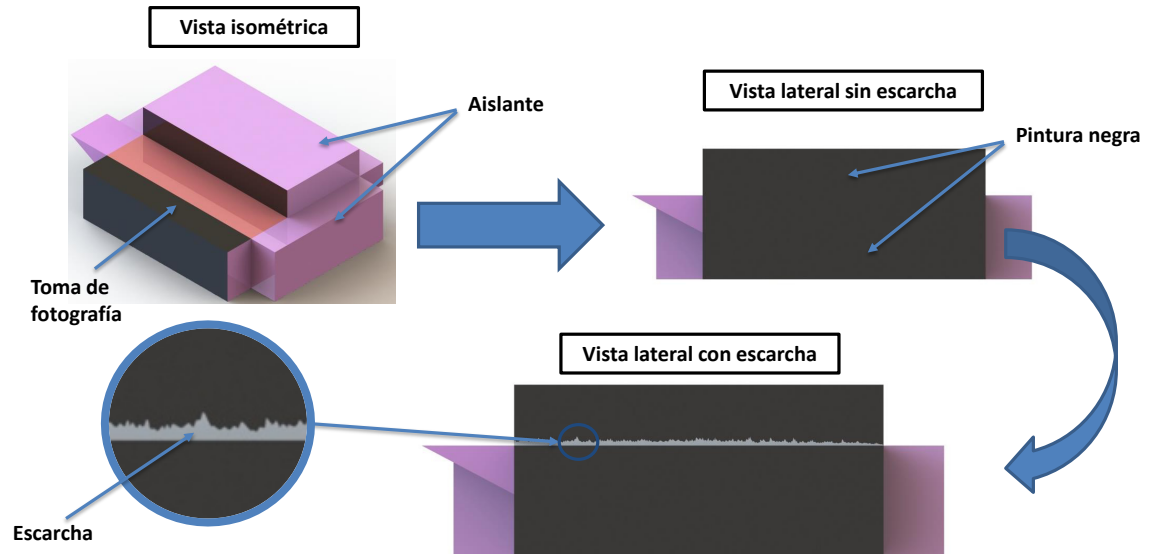


Figura 5.7: Procedimiento para la toma de fotografías.

5.4 TRATAMIENTO DE IMÁGENES

Las mediciones del crecimiento de la capa de escarcha se realizaron en una zona correspondiente a una tercera parte de la placa, específicamente a 2, 5 y 8 centímetros del inicio de la placa. Para poder medir el espesor de la capa de escarcha, las fotografías se tomaron de tal forma que solo se pudiera observar el borde de la placa en el tiempo cero, y a partir de ese punto comenzara a crecer la escarcha. Para esto, fue necesario enfocar la cámara en el punto donde comienza la placa de cobre. Debido a que el aislante que se le colocó a la placa era de color claro (rosa) y el color de la escarcha es blanco, fue necesario pintar de color negro el aislante de la parte lateral para que la escarcha resaltara y las mediciones fueran más precisas. Este procedimiento se observa de manera más clara en la Figura 5.7.

Para poder medir el espesor, se utilizó un programa desarrollado en el software *LabVIEW*, el cual toma la imagen original y la convierte a escala de grises. Posteriormente nos permite trazar una línea sobre la imagen y nos muestra la intensidad de

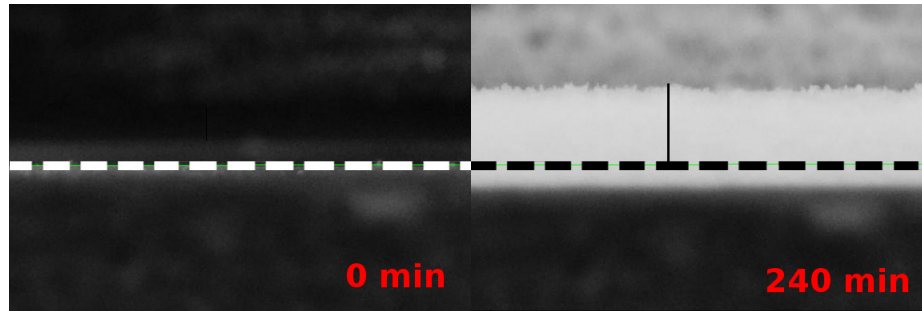


Figura 5.8: Borde de la placa de cobre.

luz que poseen cada uno de los píxeles que se encuentran en esa línea. De esta forma es posible detectar los píxeles correspondientes a escarcha debido a la intensidad de luz, y descartar los píxeles correspondientes a la pintura negra del aislante.

Fue necesario detectar el borde de la placa en el tiempo cero, y tomar este punto como el inicio de la escarcha debido a que en imágenes posteriores este borde se pierde y se observa que la escarcha crece un poco en dirección hacia la cámara, lo cual da la sensación de que el espesor de la escarcha es mayor. En la Figura 5.8 podemos observar el primer tiempo y el último tiempo de uno de los casos. La línea horizontal corresponde al borde de la placa de cobre a partir de la cual la escarcha crecerá, por otro lado la línea vertical indica los píxeles de los cuales queremos conocer su intensidad de luz. En la imagen del tiempo 240 minutos se observa como el borde de la placa de cobre se pierde cuando la escarcha crece.

En la Figura 5.9a observamos una de las mediciones del espesor de la escarcha de uno de los casos estudiados. Podemos ver en la Figura 5.9b una gráfica que nos muestra en el eje vertical, el nivel de intensidad de luz que poseen los píxeles que se encuentran debajo de la línea vertical, mientras que en el eje horizontal nos muestra el número de píxeles que componen dicha línea. De esta forma podemos conocer el espesor de la escarcha de cada una de las fotos en píxeles. Para poder convertir los píxeles a unidades de milímetros fue necesario colocar una regla justo en el borde de la placa de cobre y medir cuántos píxeles corresponden a 1 mm, tal como se muestra en la Figura 5.10. De esta forma encontramos que 27 píxeles correspondían a 1 mm.

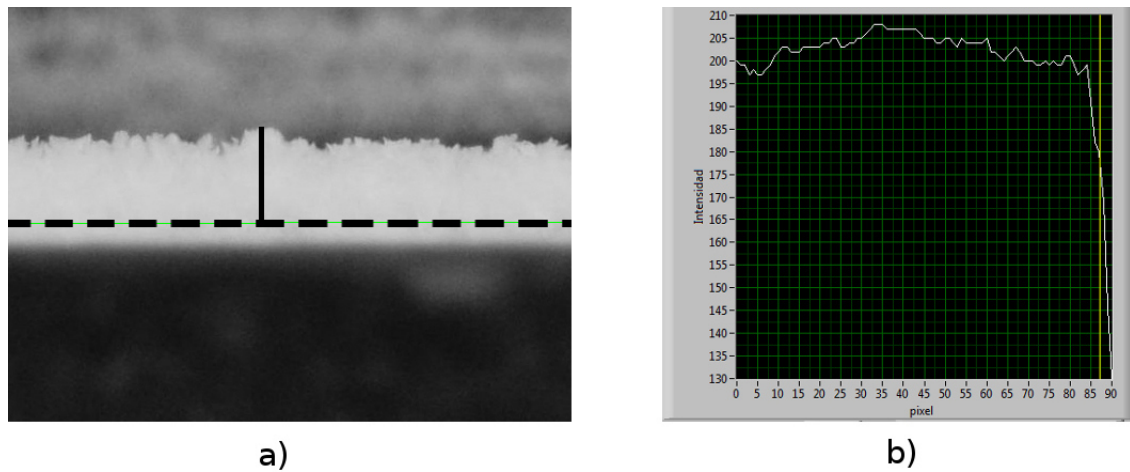


Figura 5.9: Medición del espesor usando LabVIEW.

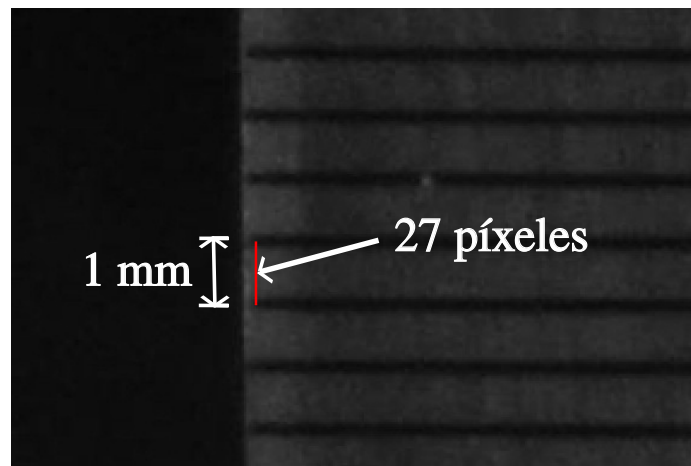


Figura 5.10: Conversión de píxeles a milímetros.

En los casos con baja humedad (casos 01 y 03) la forma de la escarcha fue muy uniforme sin muchas irregularidades, por lo que las mediciones se realizaron en los puntos correspondientes a 2, 5 y 8 centímetros. Por otro lado, en el caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$), el cuál poseía mayor humedad, la capa de escarcha no tenía una forma uniforme y poseía muchas irregularidades. Las mediciones en este caso se realizaron obteniendo un promedio aritmético entre un pico y un valle en una zona cerca de los puntos correspondientes de medición. En la Figura 5.11 podemos observar la forma de la capa de escarcha del caso 02.

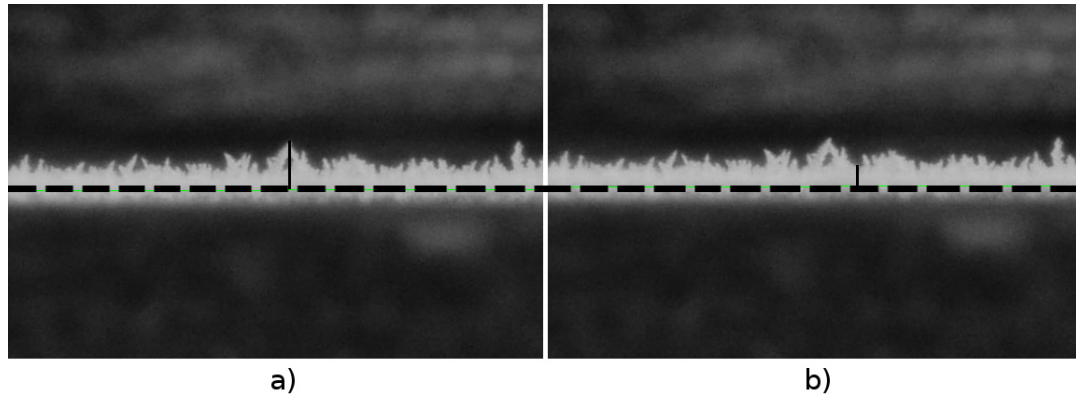


Figura 5.11: Medición del espesor para el Caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$).

En la Figura 5.12 observamos la evolución temporal del crecimiento de la escarcha del caso 02. Observamos que a partir de 120 minutos la forma de la capa de la escarcha es más uniforme y ya no se observan las mismas irregularidades como en los tiempos iniciales.

5.5 ESTUDIO DE VALIDACIÓN

Para la validación del código numérico, se comparó el crecimiento de la capa de escarcha con respecto al tiempo en los puntos correspondientes a 2, 5 y 8 centímetros de la placa.

Se realizaron tres simulaciones numéricas utilizando las condiciones de la tabla 5.1, en donde el valor de la humedad relativa lo tenemos que ingresar al código como humedad específica y para esto necesitamos la temperatura del aire y la presión, ésta última se tomó como la presión atmosférica. El tiempo de simulación del proceso fue de 4 horas, ya que las pruebas experimentales tuvieron esta duración.

Debido a que la placa era muy grande (12 pulgadas), se eligió como dominio computacional la tercera parte de la placa, esto con el fin de tener menor número de nodos y así reducir el tiempo de cómputo. Además de esto, de esta forma evitamos

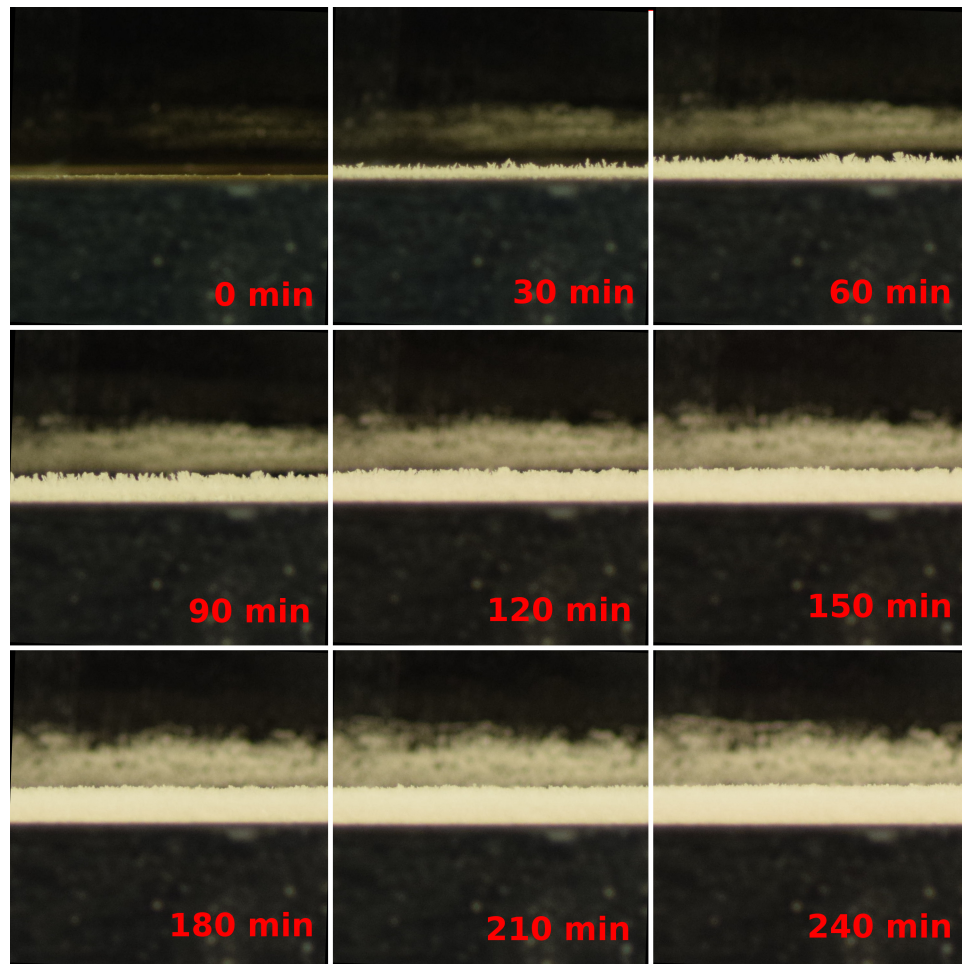


Figura 5.12: Crecimiento de escarcha - Caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$).

tener números de Reynolds local muy grandes, y aseguramos que el flujo de aire se encuentre dentro del régimen laminar [37].

En la Figura 5.4 podemos observar que en el borde de entrada de la placa, se colocó un perfil afilado con el fin de evitar recirculación del flujo de aire a la entrada de la placa y permitir que dicho flujo sea uniforme sobre la misma. Debido a esto, fue necesario tener una zona en el dominio computacional que represente esta sección y que permita que la capa límite se desarrolle como ocurre en el modelo físico. En la Figura 5.13 se muestra el dominio utilizado en las simulaciones numéricas que se compararon con los experimentos.

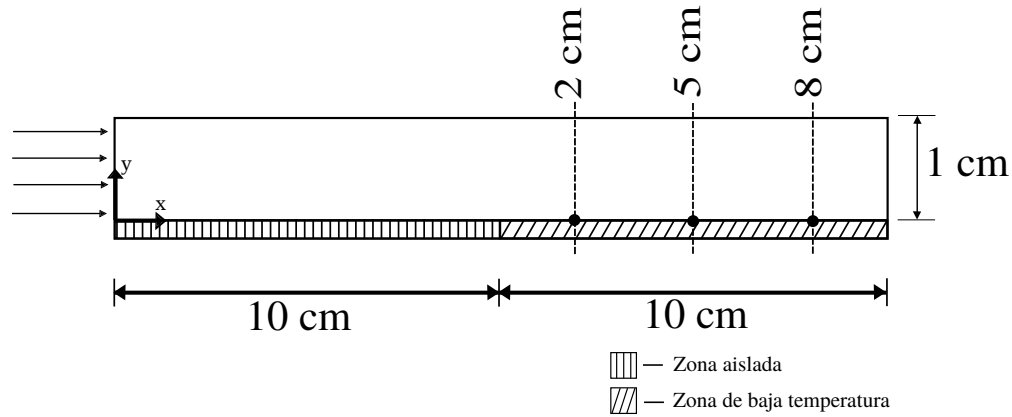


Figura 5.13: Dominio utilizado en la validación.

El dominio computacional es una sección de 20 cm de largo por 1 cm de altura, y se compone de dos zonas. La primera zona (líneas verticales) representa una superficie sólida aislada ($\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$) y la segunda (líneas diagonales) representa la superficie a baja temperatura ($T_s < 0$ °C, $u = 0$, $v = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$) en la cual se depositará la humedad para formar la capa de escarcha. La primer zona permite que la capa límite se desarrolle antes de llegar a la superficie de baja temperatura. También podemos observar los tres puntos en donde se realizarán las mediciones, a 2, 5 y 8 centímetros del inicio de la zona a baja temperatura.

En la Figura 5.14 se observa el crecimiento de la capa de escarcha con el tiempo de la prueba experimental, y la predicción realizada con el código numérico para las condiciones correspondientes al caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s). Estas curvas corresponden al punto central de la placa a baja temperatura (5 cm). Como podemos observar, el código numérico predice de forma acertada la tendencia de la curva de crecimiento de la capa de escarcha, teniendo una tasa de crecimiento muy grande en la primer etapa del fenómeno, aproximadamente de 1 hora, y posteriormente la tasa de crecimiento va disminuyendo con el tiempo. De igual forma, en la Figura 5.15 la tendencia de la tasa de crecimiento es muy similar con los datos experimentales. Solo en el caso 03 (Figura 5.16) se muestra una diferencia en la tendencia de la curva, siendo que el código numérico predice un crecimiento casi lineal, aunque en los tiempos finales los valores de crecimiento sí

coinciden con los datos experimentales. En los tres casos, los resultados numéricos quedan por debajo de los datos experimentales. Esta diferencia pudiera deberse a que no se resuelve la primera etapa del fenómeno en el modelo, ni se considera el efecto de la morfología de los cristales de hielo en las propiedades, sino que se especifican como condición inicial; eligiendo otra condición (espesor inicial y/o densidad inicial) se pudiera reducir la diferencia entre los resultados numéricos y experimentales. Los errores relativos en los tiempos finales quedaron debajo del 10 %, siendo de 9.37, 3.74 y -2.62 % para el caso 01, 02 y 03 respectivamente, mientras que el error absoluto mayor en este mismo tiempo fue de 0.17 mm correspondiente al caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$). En la posición de 2 centímetros de igual forma se tuvieron buenos resultados con errores relativos debajo del 9 %, excepto para el caso 03 ($T_a=5^\circ\text{C}$; $H.R.=56\%$; $T_s=-24.4^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$), con un error relativo del 35 %. En la posición a 8 centímetros es en donde se observan las mayores desviaciones, de 22, 18 y 12 %. Esta discrepancia en los resultados lo podemos atribuir a que en las zonas finales de la placa, los números de Re son elevados (cerca de 10^4). Recordemos que sobre superficies planas el flujo comienza la transición de *laminar-turbulento* en el orden de $Re = 5 \times 10^5$ [36, 37], en este caso el flujo no se desarrolla sobre una superficie completamente plana, si no que se desvía al chocar con la capa de escarcha y se acelera por la reducción del área. Debido a esto, el flujo pudiera estar dentro de la transición al flujo turbulento por lo que, la suposición planteada anteriormente del flujo totalmente laminar ya no aplicaría en esta zona, y debido a esto el crecimiento de la capa de escarcha difiere en esta zona en los tres casos.

La forma de estas tasas de crecimiento las podemos atribuir a que en los tiempos iniciales, la capa de escarcha posee una porosidad muy alta, es decir, tiene muchos “huecos” de aire, permitiendo así que los flujos de masa de la humedad contenida en el aire entren fácilmente. En tiempos posteriores, los flujos máscicos contribuirán al aumento de la densidad dentro de la capa de escarcha disminuyendo la porosidad. Teniendo una porosidad menor, será más complicado que la humedad contenida en el aire entre a la capa de escarcha. En la Figura 5.17 podemos ver el perfil de la

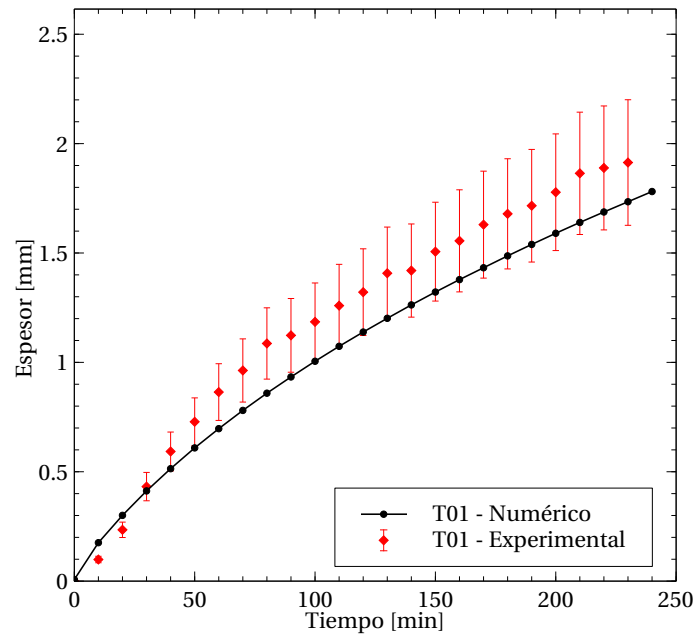


Figura 5.14: Crecimiento en $x = 5$ cm. Barras de error del 10 % - Caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).

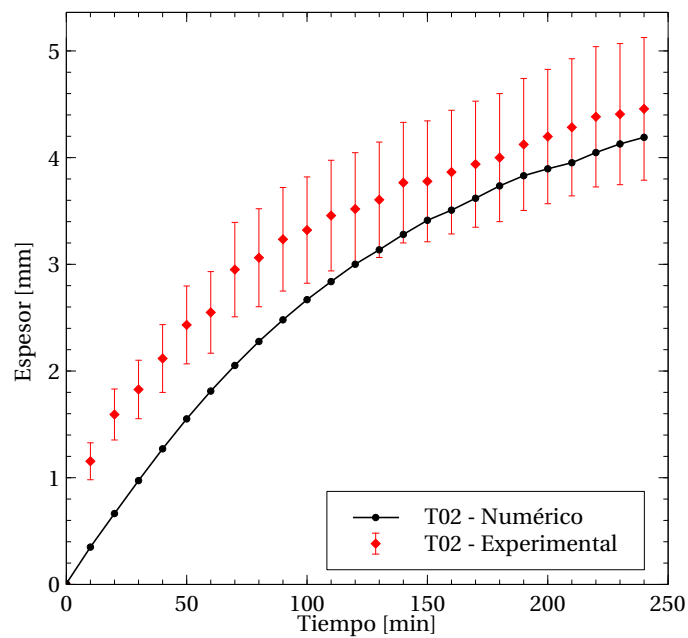


Figura 5.15: Crecimiento en $x = 5$ cm. Barras de error del 10 % - Caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).

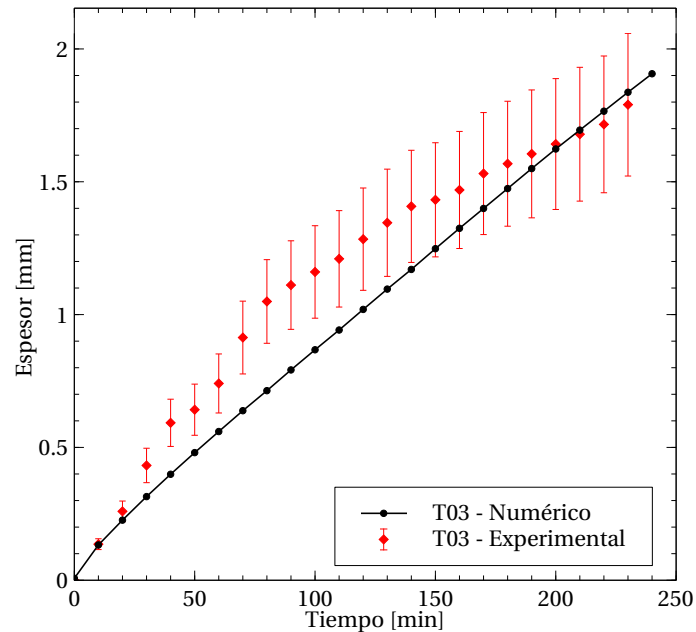


Figura 5.16: Crecimiento en $x = 5$ cm. Barras de error del 10 % - Caso 03 ($T_a=5^\circ\text{C}$; $H.R.=56\%$; $T_s=-24.4^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).

porosidad dentro de la capa de escarcha de uno de los casos. Cada perfil corresponde a un tiempo diferente y se observa que la porosidad disminuye con el paso del tiempo. Otro punto importante que se observa en esta figura, es el valor de la porosidad en la superficie de la placa, teniendo un valor muy cercano a cero, esto debido a que en la superficie se tiene el valor de densidad mayor y conforme nos alejamos de la superficie, este valor disminuye.

En la Figura 5.18 se observan los perfiles de la densidad para distintos tiempos. Como se comentó anteriormente, la densidad de la capa de escarcha y la porosidad se encuentran relacionados mediante la ecuación 3.10 por lo que los perfiles tienen comportamientos similares. Se observa que la densidad incrementa con el paso del tiempo, como se pudiera esperar debido a que los flujos difusivos dentro de la escarcha contribuyen a la densificación, tal como se comentó en la sección 4.4.

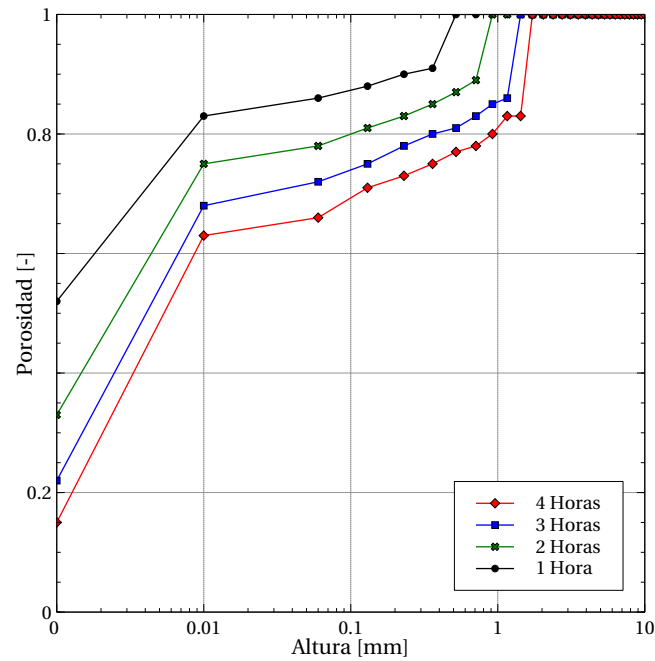


Figura 5.17: Perfiles de porosidad en $x = 5$ cm - Caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).

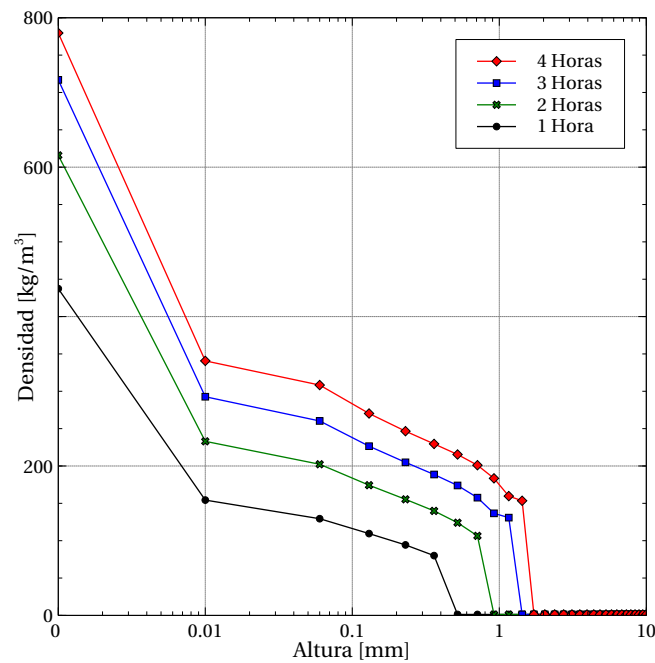


Figura 5.18: Perfiles de densidad en $x = 5$ cm - Caso 01 ($T_a=8^\circ\text{C}$; $H.R.=60\%$; $T_s=-20.8^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).

CAPÍTULO 6

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 ANÁLISIS DE DEPENDENCIA DE MALLA

Para poder obtener mejores resultados se necesita tener una malla con un número alto de nodos, pero se tiene el inconveniente de que al tener mayor número de nodos se tendrá un mayor número de ecuaciones por resolver, lo que implica un mayor costo computacional. Con el fin de obtener una malla lo suficientemente fina que sea capaz de representar los gradientes de las propiedades, pero que no consuma un número exagerado de horas de cómputo, se decidió realizar un *análisis de dependencia de malla*. En la tabla 6.1 se muestra las distintas mallas que se utilizaron, el tamaño de los volúmenes (Δx y Δy) y el número de nodos que poseían, en donde n representa los nodos en el eje x y m los nodos en el eje y .

Tabla 6.1: Características de las mallas.

	n [-]	m [-]	Δx [m]	Δy mínimo [m]
Malla 1	73	17	0.00150	4.80×10^{-05}
Malla 2	98	23	0.00112	2.54×10^{-05}
Malla 3	130	30	0.00084	1.40×10^{-05}
Malla 4	163	38	0.00067	9.0×10^{-06}
Malla 5	203	47	0.00054	5.82×10^{-06}

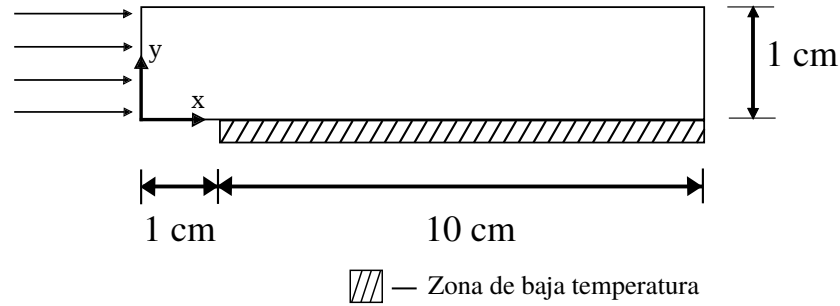


Figura 6.1: Dominio computacional.

En estas cinco mallas se simuló el fenómeno de crecimiento de escarcha utilizando el dominio mostrado en la Figura 6.1. Se simuló 3,600 segundos del fenómeno y se compararon los perfiles de temperatura y los de velocidad.

En la Figura 6.2 se muestra los perfiles de temperatura en el punto central de la placa ($x = 6$ cm) en el tiempo final de la simulación. Todos los perfiles siguen el mismo comportamiento pero, el perfil de la temperatura de la malla 1 (menor número de nodos) se encuentra más alejado de los otros, seguido por el perfil de la malla 2. Los perfiles de las otras tres mallas prácticamente coinciden.

Por otro lado, en la Figura 6.3 se muestran los perfiles de la velocidad en la misma posición y en el mismo tiempo de la Figura 6.2. En esta figura podemos apreciar claramente que los perfiles correspondientes a la malla 1 y 2 se alejan de forma considerable de la solución con la malla más fina. Nuevamente, las tres mallas restantes muestran resultados muy similares.

Los tiempos de cómputo correspondientes a estas cinco simulaciones se muestran en la Figura 6.4. Como se mencionó anteriormente, conforme aumentemos el número de nodos que componen el dominio computacional se necesitará un mayor tiempo de cómputo para llegar a la solución. De las cinco mallas podemos descartar la malla 1 y la malla 2 debido a que los resultados obtenidos son los que más se alejan del resultado con la malla más fina. Si comparamos los valores de temperatura y velocidad de la malla 3 con la malla 5 (la más fina) en el punto correspondiente a 5 mm de la altura encontramos que existe una diferencia relativa menor del 5%,

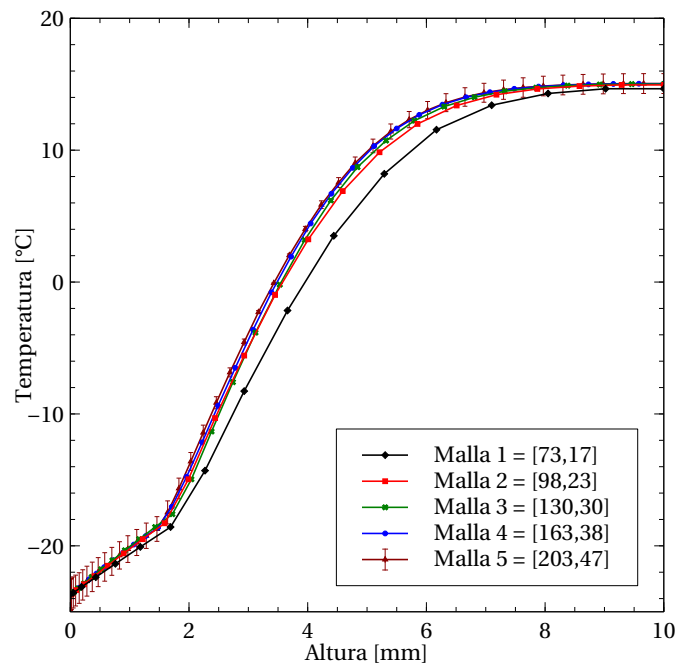


Figura 6.2: Perfil de temperatura en diferentes mallas. Barras de error del 5%.

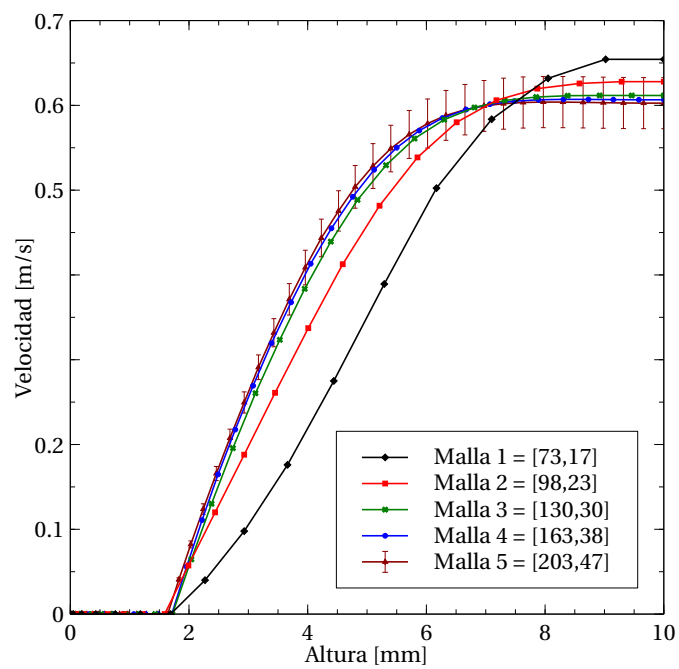


Figura 6.3: Perfil de velocidad en diferentes mallas. Barras de error del 5%.

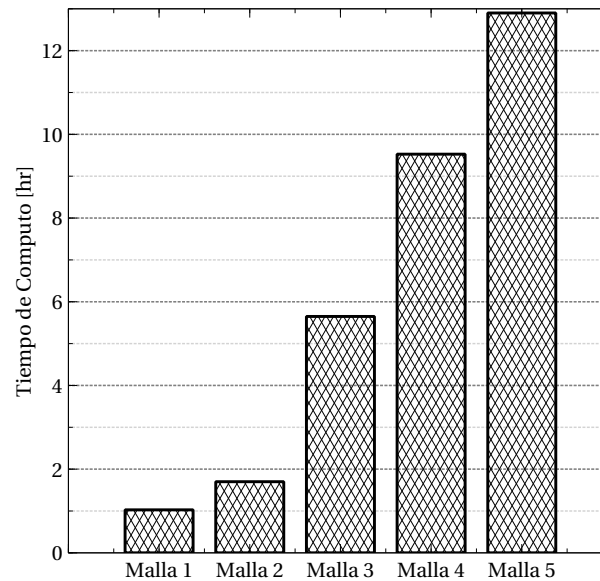


Figura 6.4: Tiempos de simulación.

mientras que al comparar los resultados de la malla 4 con la malla 5 la diferencia relativa es menor del 2%. La malla 5 es la que toma el mayor tiempo de cómputo, siendo de 13 horas para una hora de simulación del fenómeno, y la diferencia con respecto a las mallas 3 y 4 no es muy relevante por lo cual descartamos también esta malla. Ahora, a la malla 4 le toma cuatro horas más de cómputo que a la malla 3, 9.56 horas. Debido a esto y a que los resultados de ambas mallas son muy similares, en las simulaciones siguientes se utilizará la malla 3 con el fin de simular cuatro horas del fenómeno y con distintas condiciones.

Un aspecto importante a considerar en la malla es que, debido a que la variación del vector de la velocidad con respecto a la dirección y es muy grande en la zona cercana a la superficie es necesario que la malla sea muy fina en esta zona. Una opción es emplear una cantidad grande de nodos en dirección y , pero no es recomendado debido a que el tiempo de cómputo aumentará considerablemente. La segunda opción es hacer que los nodos cercanos a la placa estén muy cerca entre ellos y mientras nos alejamos de la placa la distancia entre nodos se vaya incrementando, debido a que en zonas más alejadas de la placa la velocidad ya no tiene variaciones importantes.

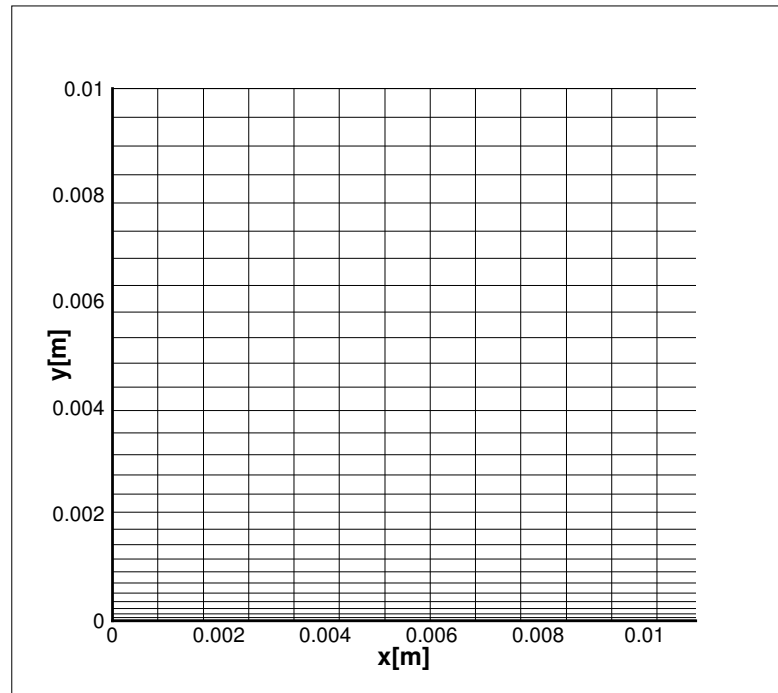


Figura 6.5: Sección de la malla computacional.

Esta opción fue la que se utilizó y en la Figura 6.5 se muestra una pequeña sección de la malla utilizada, en donde podemos observar que cerca de la superficie inferior la malla es mucho más fina, con lo cual podremos observar el efecto de la capa límite [36].

6.2 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD

Otro parámetro muy importante dentro de las simulaciones numéricas es la elección del *paso de tiempo*, esto debido a que si elegimos un paso de tiempo muy grande con el fin de disminuir el tiempo de cómputo es probable que nuestros resultados no sean los adecuados, por el contrario, si elegimos un paso de tiempo muy pequeño, el tiempo de cómputo será muy elevado. Para la elección del paso de tiempo adecuado y para evitar problemas de convergencia en la solución numérica, es común recurrir al número de Courant, el cual se define como:

$$C = \frac{u\Delta x}{\Delta t} \quad (6.1)$$

donde u es la velocidad, Δx es el tamaño del volumen del nodo y Δt es el paso de tiempo. El número de Courant da una idea de cómo se mueven las partículas de fluido dentro de nuestro dominio. Para un $C \leq 1$ indica que las partículas de fluido avanzan, al menos, de un nodo a otro en un paso de tiempo, mientras que si tenemos $C > 1$, indica que las partículas de fluido avanzan dos o más celdas dentro del dominio en ese mismo paso de tiempo, pudiendo afectar a la convergencia de la solución numérica. Si calculamos el paso de tiempo para un número de Courant de uno, utilizando el Δx de la malla tres y una velocidad $u = 0.4$ m/s tendremos un paso de tiempo igual a 0.002 segundos. Si consideramos que el tiempo característico del fenómeno de formación de escarcha es muy grande, y que se tiene pensado simular el fenómeno por, al menos, cuatro horas nos encontramos con el problema de que utilizando este paso se requiere resolver las ecuaciones diferenciales y las propiedades casi siete millones de veces, lo cual haría que la simulación numérica se demorara semanas.

Para evitar esto, y dado que el campo de flujo no se ve modificado de manera notable en varios minutos del fenómeno (hasta que la capa de escarcha crezca), se decidió utilizar pasos de tiempo de un orden más grande. Si tomamos el caso 02 ($T_a=15^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-23.7^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s) mostrado en la Figura 5.15 podemos ver que la curva correspondiente a los datos experimentales muestra que a 10 minutos del fenómeno, el espesor de la capa de escarcha alcanza un valor de aproximadamente 1 mm, siendo el caso con el mayor crecimiento. Para poder observar de manera adecuada el crecimiento en los tiempos iniciales (que es en donde el crecimiento es más notable), se decidió dividir el tiempo de 10 minutos en 60, con lo que se obtuvo un paso de tiempo de 10 segundos. A partir de este paso de tiempo se eligieron otros cuatro pasos de tiempo más pequeños con el fin de llevar a cabo un estudio de sensibilidad. Los pasos de tiempo elegidos fueron: 10, 5, 1, 0.5 y 0.1 segundos. Se simuló una hora del fenómeno de crecimiento de escarcha utilizando la

mallá 3, y después se compararon los perfiles de temperatura y velocidad.

En la Figura 6.6 podemos observar los perfiles de temperatura para los distintos pasos de tiempo en el tiempo final de una hora y en el plano central de la placa ($x = 6$ cm). Los perfiles de temperatura de los pasos de tiempo 1 y 2 se desvían de forma significativa de los otros tres, lo mismo ocurre con los perfiles de la velocidad mostrados en la Figura 6.7, por lo que descartamos estos dos pasos de tiempo. Comparando los perfiles de los pasos de tiempo 3 y 5 nos damos cuenta que existe una diferencia relativa menor del 2% por lo cual se optó por utilizar este paso de tiempo, con el fin de acelerar los cálculos numéricos.

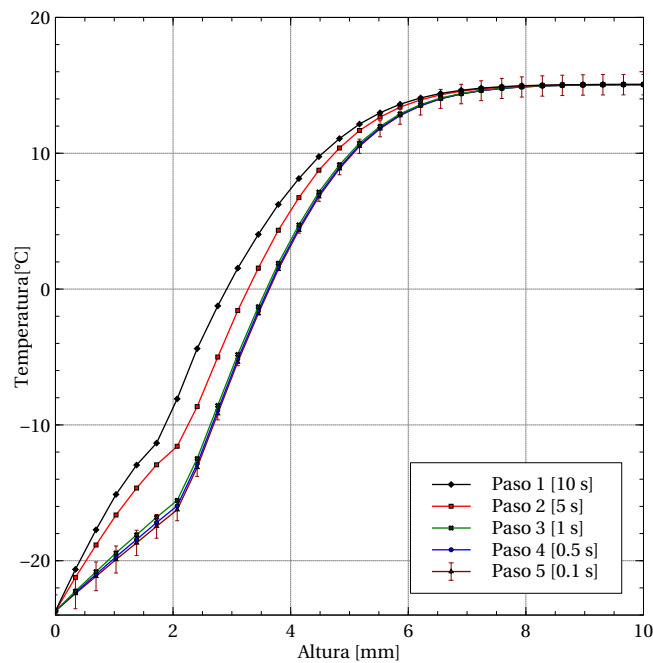


Figura 6.6: Perfil de temperatura para diferentes pasos de tiempo a $t=3,600$ s. Barras de error del 5%.

6.3 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Con el fin de evaluar el efecto que tienen los distintos parámetros involucrados en el espesor y las propiedades de la escarcha, se realizó un diseño de experimentos

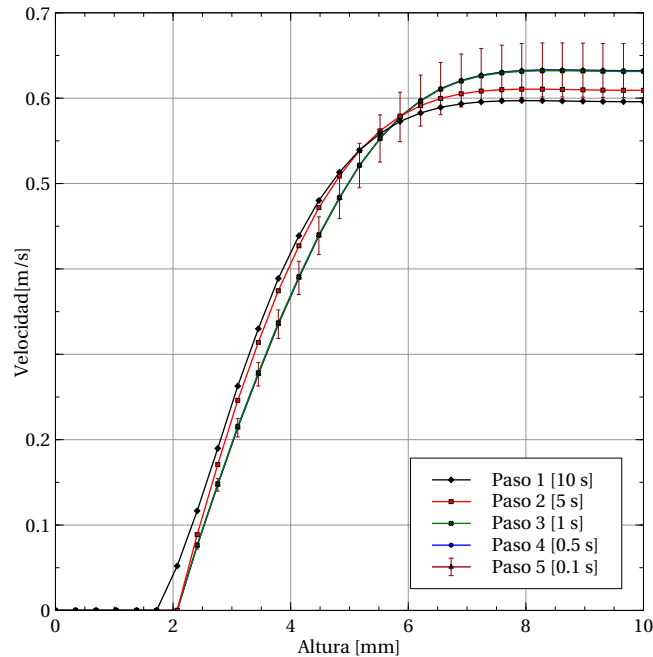


Figura 6.7: Perfil de velocidad para diferentes pasos de tiempo a $t=3,600$ s. Barras de error del 5%.

utilizando tres factores con dos niveles, por lo cual se realizaron ocho simulaciones. Los factores elegidos fueron la velocidad del aire, la humedad relativa y la temperatura del aire, mientras que la temperatura de la placa se mantuvo constante en las ocho simulaciones. Las condiciones de las simulaciones se muestran en la tabla 6.2. Todas las simulaciones se realizaron en el dominio de la Figura 6.1 con un paso de tiempo de 1 segundo y utilizando 3,900 nodos (malla 3).

6.3.1 CRECIMIENTO DE LA CAPA DE ESCARCHA

El espesor de la capa de escarcha se midió en tres puntos de la placa, correspondientes a 2, 5 y 8 centímetros del inicio de la placa. En las ocho simulaciones, las curvas de crecimiento fueron muy similares a las mostradas anteriormente en la sección 5.5 y los mayores crecimientos siempre se presentaron en la zona aguas arriba y disminuía con la distancia aguas abajo, lo cual es consistente con los resultados

Tabla 6.2: Diseño de experimentos.

	Velocidad [m/s]	H.R. [%]	T_a [°C]	T_s [°C]
S01	0.1	50	3	-20
S02	0.4	50	3	-20
S03	0.1	70	3	-20
S04	0.4	70	3	-20
S05	0.1	50	10	-20
S06	0.4	50	10	-20
S07	0.1	70	10	-20
S08	0.4	70	10	-20

de estudios reportados en la literatura [31]. Esta diferencia en los espesores se debe a que los gradientes de humedad son mayores en la zona aguas arriba y van disminuyendo conforme nos alejamos del borde de entrada, esto debido al efecto de la *capa límite de concentración*. Este efecto ocurre cuando tenemos una concentración de especies en la superficie diferente a la concentración de especies en la corriente libre y es similar a la *capa límite de la velocidad* y a la *capa límite térmica* [39]. En la sección 3.7 se mostró la ecuación para calcular los flujos másicos provenientes del aire, los cuales son directamente proporcionales al gradiente de concentración $\frac{\partial w}{\partial y}$, por lo que los flujos másicos siempre serán menores conforme nos alejemos del borde de entrada y al tener menor flujo másico el crecimiento de la capa de escarcha será menor.

En la Figura 6.8 se muestra el crecimiento de la capa de escarcha de la simulación S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s) para los tres puntos, en donde el crecimiento mayor se da en el punto correspondiente a dos centímetros. Con el fin de observar el efecto que tienen las distintas variables en el espesor, se analizaron cada una de ellas por separado. Para analizar el efecto que tiene la humedad relativa $H.R$ del aire, se mantuvieron los valores de la temperatura del aire T_a y de la velocidad del aire u_a como constantes durante la realización de los procesos

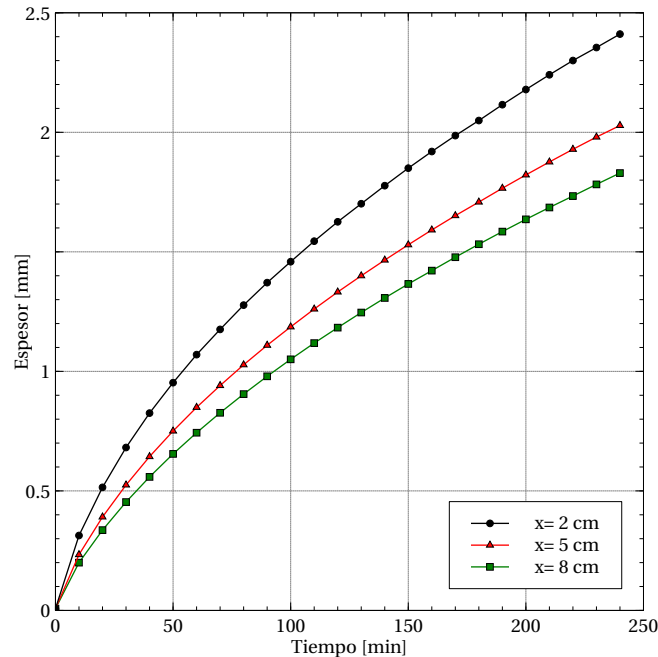


Figura 6.8: Crecimiento - Caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$).

y se analizaron dos condiciones de humedad (50 % y 70 %). Se estudiaron casos de velocidad y temperatura a valores bajos (Figura 6.9) y el segundo a valores altos (Figura 6.10). Observamos que para los casos de mayor humedad se tuvieron los mayores crecimientos, tal como era de esperarse ya que las partículas de hielo que se depositan sobre la placa plana provienen del vapor de agua contenido en el aire y que sufre un cambio de fase (fase gaseosa a sólida) provocado por la baja temperatura de la placa, y mientras tengamos mayor humedad en el aire, mayor será cantidad de vapor de agua que cambie de fase. La diferencia en el espesor para el tiempo final fue de 61 % y 51 % para los casos de bajos valores y altos valores de T_a y u_a , respectivamente.

Ahora, si mantenemos los valores de $H.R.$ y de u_a constantes, podemos ver el efecto que tiene la temperatura del aire sobre el espesor de la capa de escarcha. En la Figura 6.11 se muestran casos para valores bajos de $H.R.$ y u_a , mientras que en la Figura 6.12 se muestran casos para valores altos. Podemos observar que en el caso en donde la temperatura del aire fue mayor, la capa de escarcha alcanzó valores de espesor más altos, esto debido a que el aire a mayores temperaturas puede

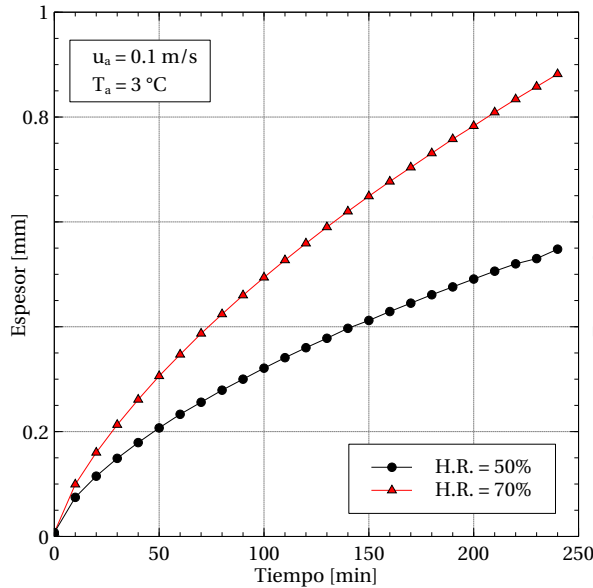


Figura 6.9: Efecto de la $H.R.$ con valores bajos de T_a y u_a .

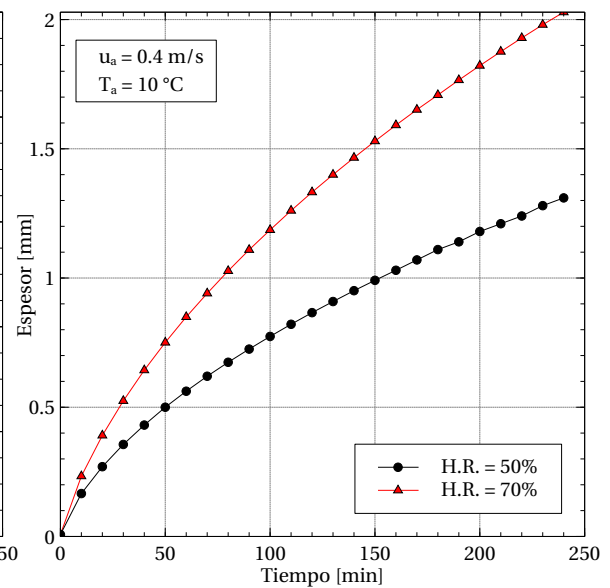


Figura 6.10: Efecto de la $H.R.$ con valores altos de T_a y u_a .

contener mayor cantidad de vapor de agua y mientras mayor vapor de agua tengamos disponible en el aire mayor será la posibilidad de que éste se deposite sobre la placa. La diferencia en los espesores en el tiempo final del caso de la Figura 6.11 fue de 71 %, mientras que en el caso de la Figura 6.12 fue de 61 %.

Por último, para observar el efecto que tiene la velocidad del aire u_a se mantuvo la $H.R.$ y la T_a como constantes. En la Figura 6.13 se muestran las curvas correspondientes al caso con valores bajos de $H.R.$ y de T_a , mientras que en la Figura 6.14 se muestra el caso con valores altos de $H.R.$ y T_a . En ambos casos el crecimiento fue mayor cuando la velocidad del aire fue mayor. La diferencia en los espesores en el tiempo final fueron de 41 % y 39 % en la Figuras 6.13 y 6.14, respectivamente. Esta diferencia en los espesores es menor que en los casos en donde se mostró el efecto de la $H.R.$ y de la T_a , por lo que el efecto que tiene la velocidad u_a en el espesor de la capa de escarcha es menor que el efecto de la humedad relativa $H.R.$ y de la temperatura del aire T_a .

En los apartados siguientes se analizarán los perfiles de la densidad, temperatura, humedad y velocidad para el caso que presentó el menor crecimiento y para el

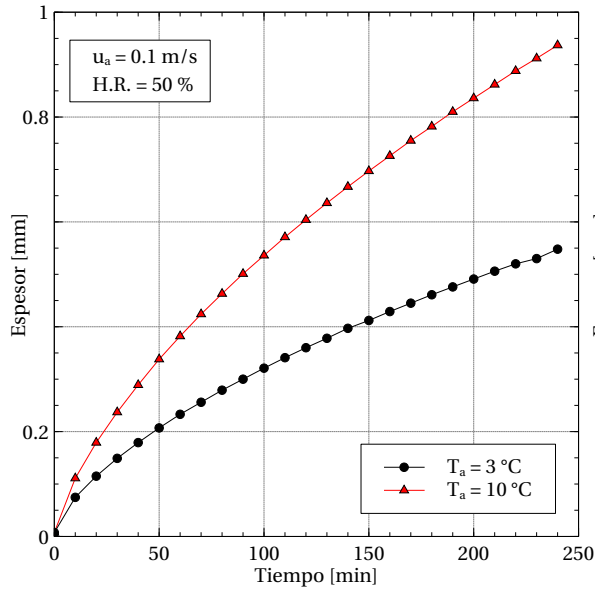


Figura 6.11: Efecto de la T_a con valores bajos de $H.R.$ y u_a .

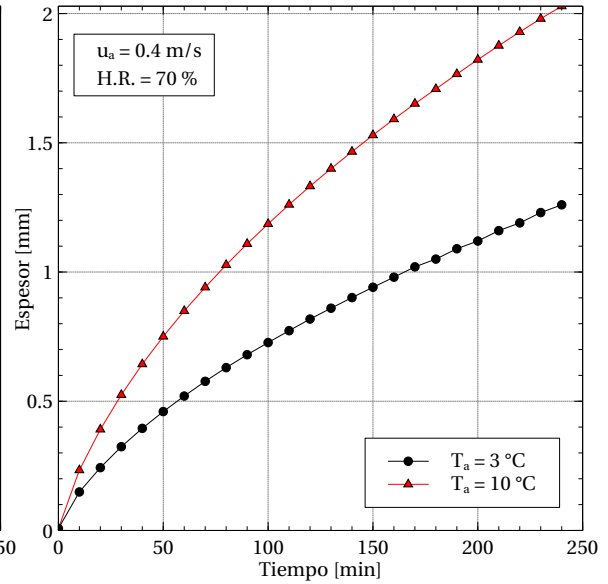


Figura 6.12: Efecto de la T_a con valores altos de $H.R.$ y u_a .

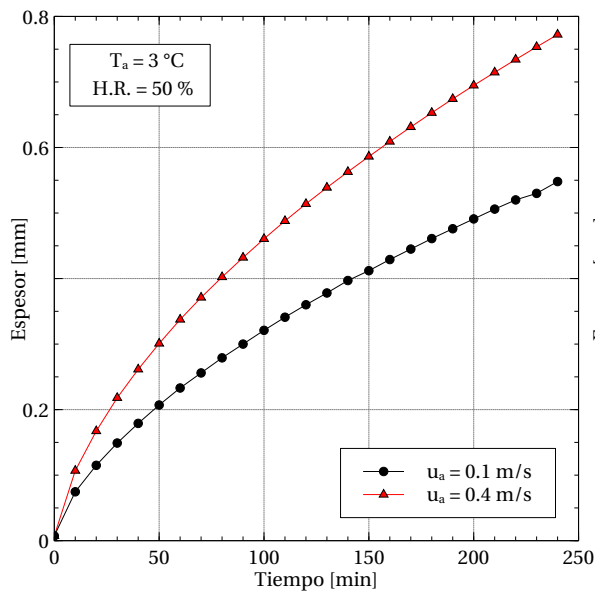


Figura 6.13: Efecto de la u_a con valores bajos de $H.R.$ y T_a .

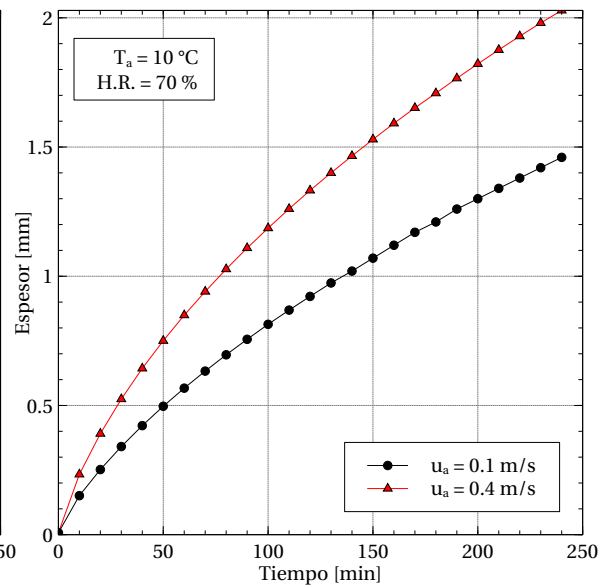


Figura 6.14: Efecto de la u_a con valores altos de $H.R.$ y T_a .

caso con el mayor crecimiento, es decir el S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1$ m/s) y el S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s), los cuales alcanzaron valores de 0.548 y 2.028 milímetros, respectivamente.

6.4 EVALUACIÓN CUANTITATIVA DE LAS PROPIEDADES EN EL DOMINIO

6.4.1 DENSIDAD

Para analizar los valores locales de densidad de forma más general, ésta se expresó de forma adimensional de la siguiente manera:

$$\rho^* = \frac{(\rho - \rho_a)}{(\rho_i - \rho_a)} \quad (6.2)$$

donde ρ_i y ρ_a corresponden a las densidades del hielo y del aire respectivamente por lo que el valor local adimensional de la densidad tendrá un valor de 0 cuando corresponda a la densidad del aire, y un valor de 1 cuando tenga la densidad del hielo. De igual manera, el valor de la altura se adimensionalizó con la altura del dominio “h”:

$$y^* = \frac{y}{h} \quad (6.3)$$

En las Figuras 6.15 y 6.16 se muestran variaciones de la densidad con el tiempo para los dos casos, en el punto central de la placa ($x = 6$ cm). Los valores de densidad aumentan conforme avanza el tiempo, tal como se esperaba debido a que, como se explicó en la sección 4.4, la variación de la densidad con el tiempo está en función de los flujos máxicos que se difunden dentro de la capa de escarcha, mismos que están en función de los gradientes de los valores de humedad específica. Se observa también que en la superficie de la placa fría se presentan los valores más grandes de densidad, y conforme nos alejamos de la misma los valores van disminuyendo hasta llegar a la zona de la interfaz *escarcha-aire* en donde se presenta una caída abrupta debido a que toma el valor de la densidad del aire (1.252 kg/m³). Este comportamiento se

encuentra reportado en estudios anteriores [4, 5, 9]. Por otro lado, el caso en el que el aire posee mayor humedad ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$), es el que presenta los valores más grandes de densidad para los cuatro tiempos mostrados. Esto es debido a que como existe mayor humedad disponible en el aire, los gradientes ayudan a difundir la humedad dentro de la capa de escarcha, alcanzando un valor adimensional de 0.965 para el tiempo de cuatro horas, es decir, casi la densidad del hielo (valor de 1). Por su parte, el valor máximo del caso S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1\text{ m/s}$) fue de 0.824.

En las Figuras 6.17 y 6.18 se muestra la variación de la densidad en cuatro puntos diferentes de la placa, correspondientes a 2, 4, 6 y 8 centímetros del borde de entrada de la placa, para el tiempo de cuatro horas. En estas gráficas podemos observar que conforme avanzamos en dirección x el valor de la densidad disminuye, y esto es debido a que los gradientes de humedad son menores conforme nos alejamos del borde de entrada, tal como se explicó anteriormente. Nuevamente, se observa que en la superficie de la placa es en donde se presentan los valores más altos de la densidad.

Como se mencionó anteriormente, el cálculo del valor de la densidad dentro de la escarcha es muy importante debido a que de ésta obtenemos el valor de la conductividad térmica, la porosidad, y posteriormente la difusividad efectiva y el calor específico dentro de la escarcha.

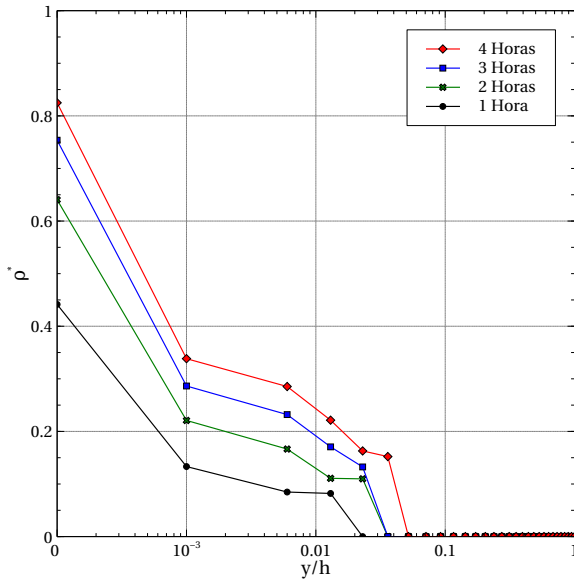


Figura 6.15: Densidad en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

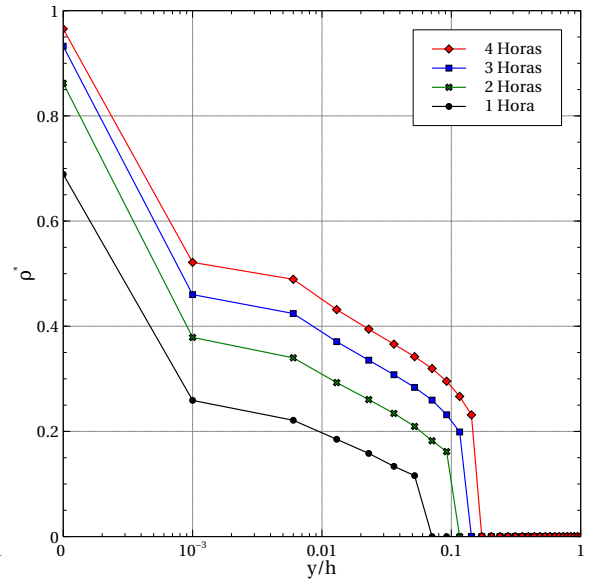


Figura 6.16: Densidad en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

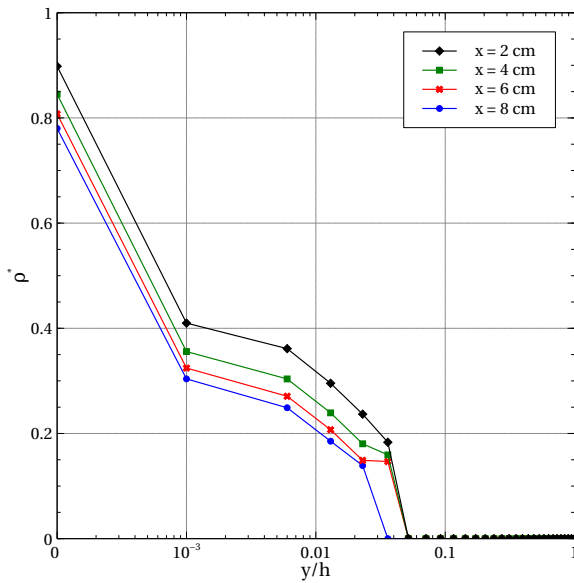


Figura 6.17: Densidad en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

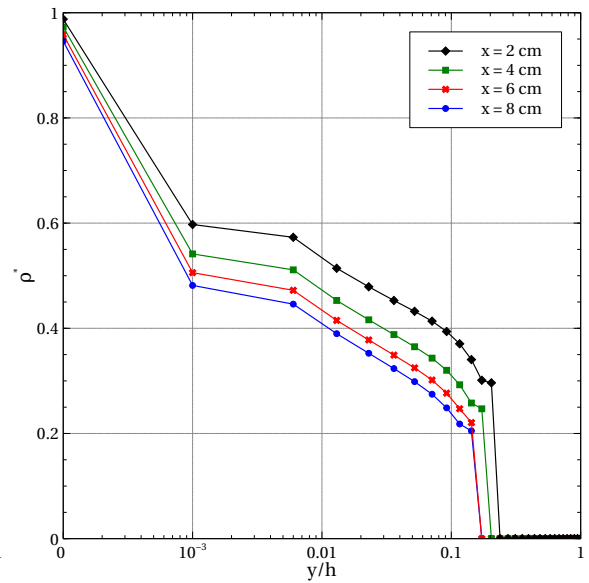


Figura 6.18: Densidad en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

6.4.2 TEMPERATURA

La temperatura en el dominio se expresó de forma adimensional utilizando los valores de la temperatura de la placa T_s y la temperatura de la corriente libre T_0 , según la ecuación 6.4, por lo que tomaría el valor de cero cuando la temperatura sea igual a la temperatura de la placa y uno cuando sea la temperatura de la corriente libre.

$$T^* = \frac{(T - T_s)}{(T_0 - T_s)} \quad (6.4)$$

En las Figuras 6.19 y 6.20 se observa la variación de los perfiles de temperatura con el tiempo para el punto central de la placa fría. Podemos ver que los valores de temperatura van disminuyendo conforme avanza el tiempo. Esta disminución de temperaturas se debe al efecto difusivo que ocurre entre la placa fría (y en tiempos posteriores, en la capa de escarcha) y el aire. Debido a que la capa de escarcha crece con el tiempo, los perfiles de temperatura comienzan a desarrollarse a una altura mayor, es por esto que el aire disminuye su temperatura. El efecto es más notable en el caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4\text{ m/s}$) debido a que en éste se alcanzan espesores más grandes de la capa de escarcha.

Si observamos la Figura 6.20 podemos ver que cerca de la placa el perfil es casi lineal, esta zona representa la temperatura dentro de la escarcha y conforme avanzamos en la altura existe una tendencia diferente que indica que estos valores corresponden al lado del aire. A partir de aquí, los perfiles desarrollan una forma común en un problema de convección de calor sobre una placa plana, es decir, se desarrolla la *capa límite térmica* [39] que ocurre cuando existe una diferencia de temperatura entre la placa y la temperatura de la corriente libre. Las primeras partículas que entran en contacto con la placa alcanzan el equilibrio térmico con ésta, y las partículas siguientes intercambian energía con las primeras y así consecutivamente provocando gradientes de temperatura; la zona donde se generan estos gradientes

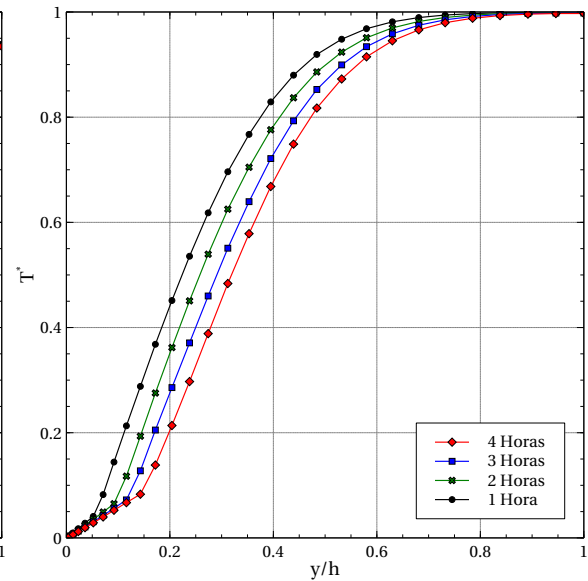
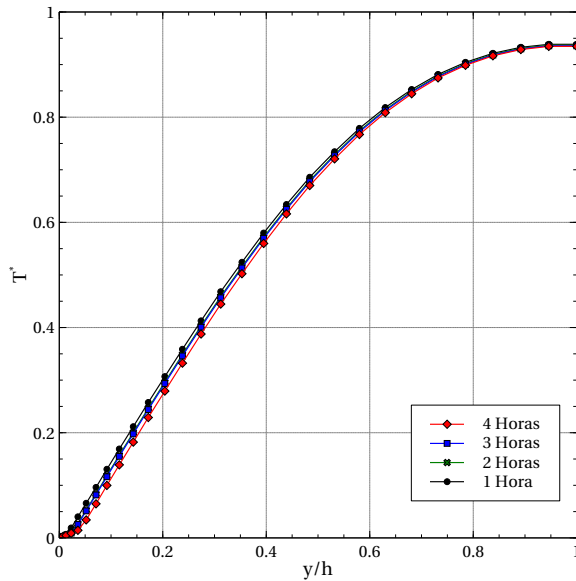


Figura 6.19: Temperatura en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).
 Figura 6.20: Temperatura en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

es la *capa límite térmica*. En el caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s) podemos observar que a partir de una altura $y^*=0.75$ los gradientes de temperatura son despreciables, es decir, en esta zona la *capa límite térmica* ya no existe y la temperatura en esta zona corresponde a la temperatura de la corriente libre, $T^* = 1$. Por otro lado, en el caso S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1$ m/s) es similar con la diferencia de que la capa de escarcha es más delgada por lo que casi no se observan los perfiles lineales de esta zona. Otro punto a destacar es que la temperatura adimensional nunca llega a un valor de uno, es decir, nunca alcanza la temperatura de la corriente libre y esto se debe a que el efecto difusivo es dominante, dado que la velocidad es muy pequeña al compararlo con el caso S08. En la figura 6.21 se muestra el perfil de la temperatura adimensional en $y = h$, y podemos apreciar que hasta $x/L=0.2$ se tiene la temperatura de la corriente libre ($T^*=1$) y después de $x/L=0.2$, esta temperatura disminuye, es por esto que en el caso S01, la temperatura adimensional nunca alcanza el valor de 1.

En la Figura 6.22 podemos ver un acercamiento a la zona correspondiente a la

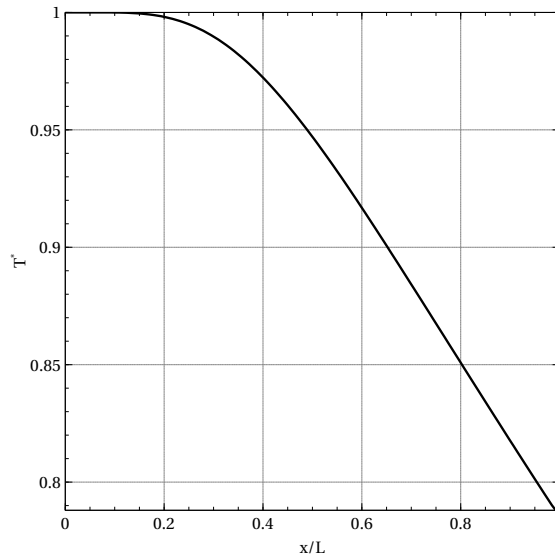


Figura 6.21: Perfil de temperatura en $y = h$ ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

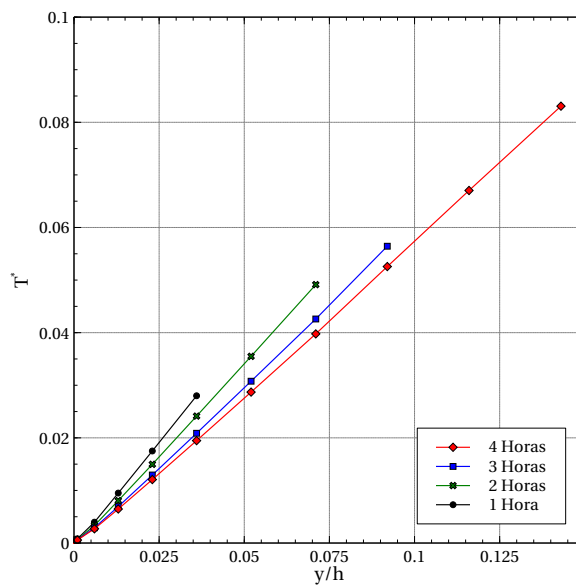


Figura 6.22: Temperatura dentro de la escarcha ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

capa de escarcha, que como se mencionó en esta zona los perfiles son casi lineales y esto es debido a que el efecto convectivo es despreciable dentro de la escarcha ya que el campo de velocidad es cero, por lo que solamente existiría transferencia de calor por conducción.

En las Figuras 6.23 y 6.24 se muestra los perfiles de temperatura para cuatro puntos distintos sobre la placa en el tiempo de cuatro horas. El comportamiento de los perfiles es muy similar a los anteriores, y podemos observar que a mayor distancia del borde de entrada la temperatura disminuye y esto se debe a que la *capa límite térmica* es más grande en estas zonas [39].

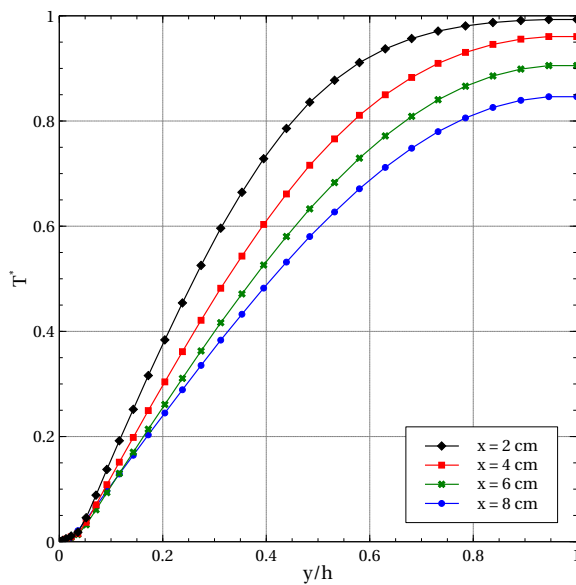


Figura 6.23: Temperatura en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

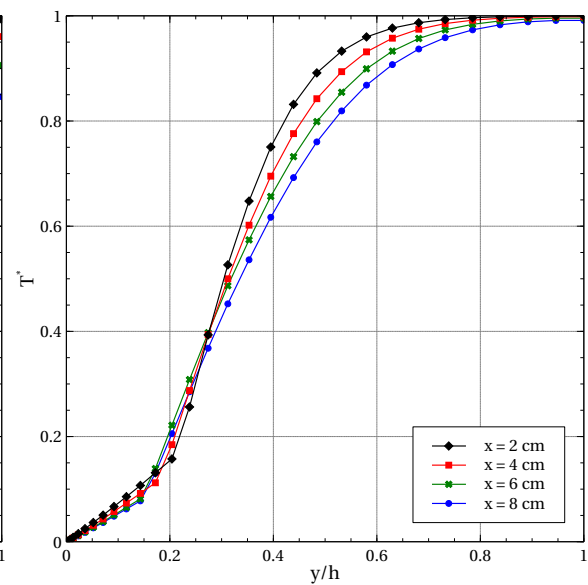


Figura 6.24: Temperatura en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

En el caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s) se observa que en la posición correspondiente a 2 centímetros, la zona correspondiente a la escarcha es más gruesa debido a que el espesor de la capa de escarcha siempre es mayor al inicio de la placa.

6.4.3 HUMEDAD ESPECÍFICA

Para el caso de la humedad específica se utilizó la forma adimensional utilizando la humedad específica de la superficie de la placa w_s y la humedad específica de la

corriente libre w_0 . La relación utilizada fue la siguiente:

$$w^* = \frac{(w - w_s)}{(w_0 - w_s)} \quad (6.5)$$

En las Figuras 6.25 y 6.26 se observa la variación de la humedad con el tiempo, y podemos ver que conforme avanza el tiempo, los perfiles de humedad toman valores menores. Esta disminución es debido al efecto difusivo que ocurre entre la capa de escarcha y el aire húmedo, y dado que la capa de escarcha crece con el tiempo, los perfiles de humedad comienzan a desarrollarse a una altura mayor que en los tiempos iniciales.

Al igual que en el caso de la temperatura, aquí también se observa que el perfil es casi lineal para la zona de la capa de escarcha y es debido a que el efecto convectivo es despreciable y solamente existe difusión. Podemos observar también, que en el caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s) la humedad específica llega hasta un valor de 1, es decir, toma el valor de la humedad específica de la corriente libre, cosa contraria al caso S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1$ m/s) en el cual llega hasta 0.87 y es debido a la baja velocidad del aire húmedo, con lo cual el efecto difusivo es mayor al efecto convectivo, por lo que nunca toma el valor correspondiente a la corriente libre. En la figura 6.27 se muestra el perfil de humedad adimensional en $y = h$, en donde podemos ver que, efectivamente a partir de $x/L=0.2$, el valor de la humedad se encuentra por debajo del valor de la corriente libre.

Para el caso de la variación de la humedad en distintos puntos (Figuras 6.28 y 6.29), sucede lo mismo que con la temperatura, en donde los perfiles con los valores más grandes corresponden a las distancias más cercanas del borde de entrada, y es debido a que el espesor de la capa límite de concentración es mayor en las zonas más lejanas del borde de entrada.

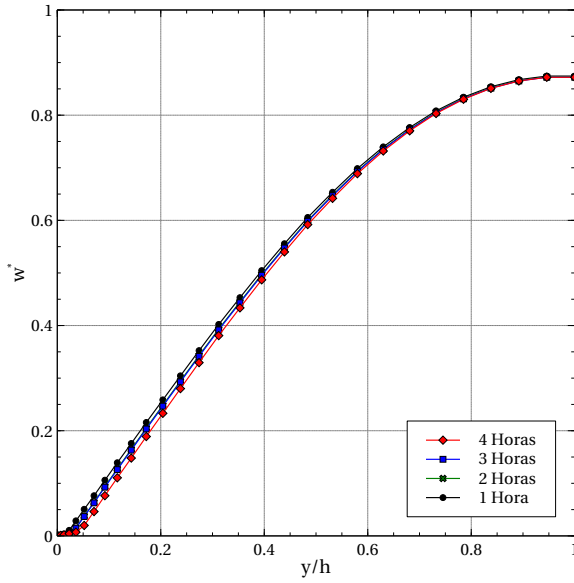


Figura 6.25: Humedad en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

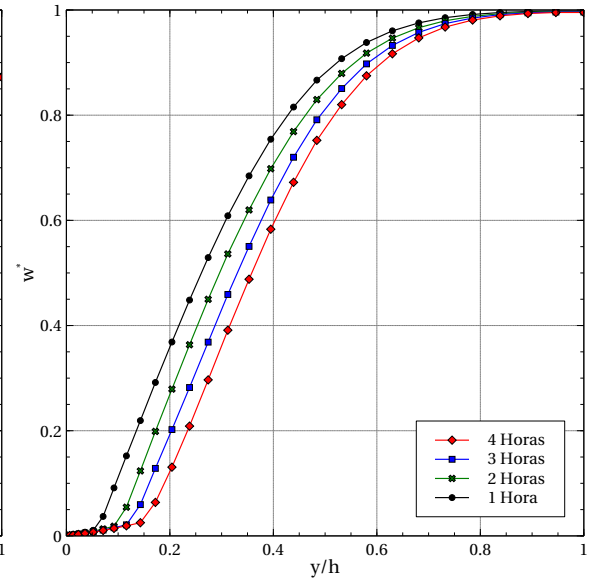


Figura 6.26: Humedad en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

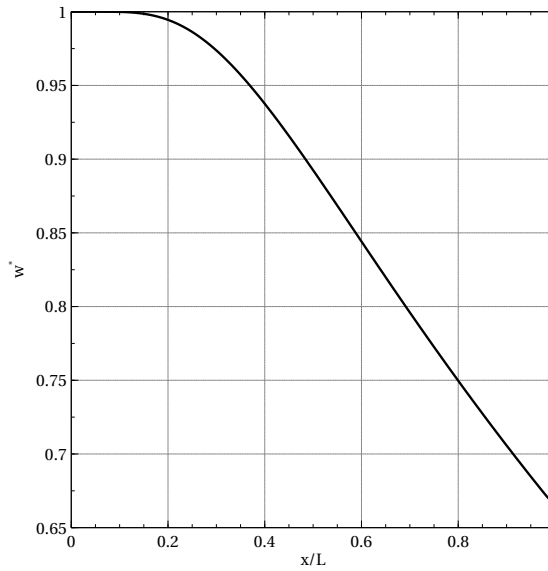


Figura 6.27: Perfil de humedad en $y = h$ ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

6.4.4 VELOCIDAD

Para analizar los perfiles de velocidad se adimensionalizó utilizando la velocidad correspondiente a la corriente libre de la siguiente manera:

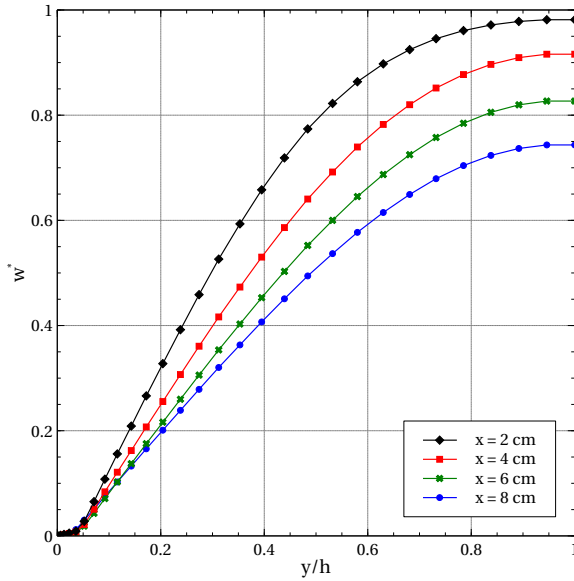


Figura 6.28: Humedad en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

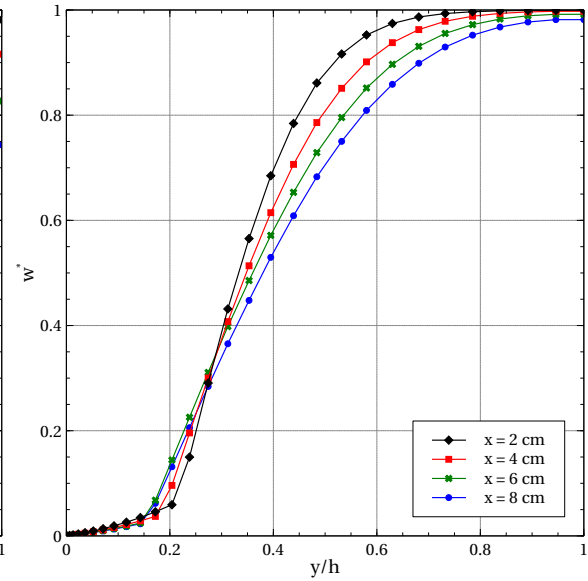


Figura 6.29: Humedad en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

$$u^* = \frac{u}{u_0} \quad (6.6)$$

Como se mostró en la Figura 3.2, el dominio computacional elegido representa el espacio entre dos placas planas por lo que, para simplificar el problema se utilizó una condición de simetría en la frontera norte. Para el caso de los perfiles de velocidad se decidió mostrar los perfiles completos incluyendo la placa superior. En las Figuras 6.30 y 6.31 se muestra la variación de la velocidad con respecto al tiempo en la posición central de la placa, y en las Figuras 6.32 y 6.33 la variación en distintos puntos sobre la placa en el tiempo correspondiente a 4 horas. Podemos ver que los perfiles de velocidad tienen un comportamiento parabólico y son similares al flujo entre dos placas paralelas, cuya solución es similar al caso de un flujo de Poiseuille [44], en donde los valores más grandes se presentan en el centro de las dos placas. Al observar la variación de los perfiles de velocidad con respecto al tiempo, nos damos cuenta que estos tienden a aumentar y es debido a que al pasar el tiempo, el espesor de la capa de escarcha se incrementa reduciendo la sección por donde pasa el flujo

de aire, y dado que el flujo másico de entrada de aire es constante, la velocidad se incrementa alcanzando valores más grandes que el correspondiente a la velocidad de entrada, llegando hasta $u^* = 1.44$ para el caso S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1$ m/s) y de $u^* = 1.60$ para el S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s). Otro punto a destacar en estos perfiles es que cerca de la superficie de las placas, se observa que el valor de la velocidad es cero dado que esta zona representa la capa de escarcha y como se mencionó en el Capítulo 4 la velocidad dentro de la escarcha siempre es nula.

Podemos observar que cerca de la superficie de la escarcha, los gradientes son más notables y es debido a que los esfuerzos cortantes son más grandes. Existe una zona cerca del punto medio de las placas en donde la velocidad alcanza su valor máximo y ya no existe variación de la velocidad, esto se observa de manera más clara en la Figura 6.31. En esta zona los esfuerzos cortantes son nulos debido a que la *capa límite* ya no existe.

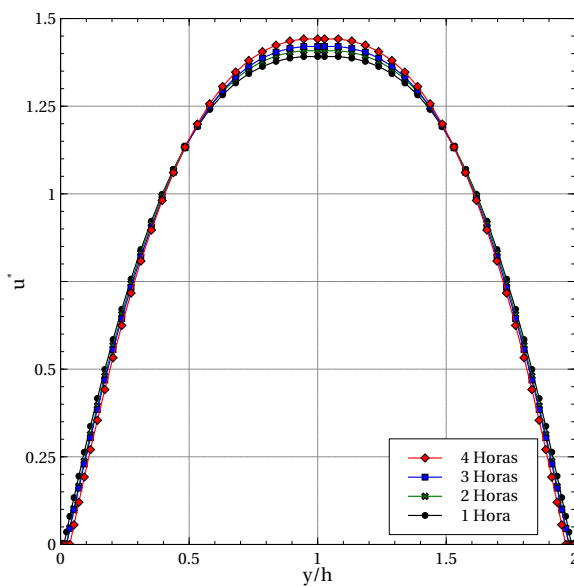


Figura 6.30: Perfiles de velocidad en $x=6$ cm ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

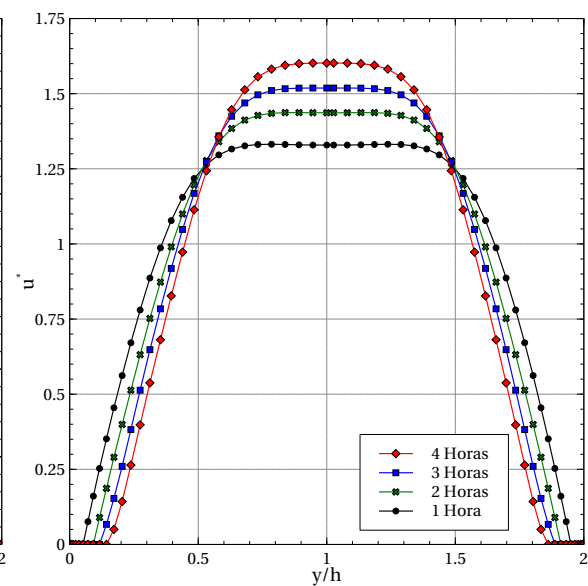


Figura 6.31: Perfiles de velocidad en $x=6$ cm ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

Al observar la variación de la velocidad en los distintos puntos sobre la placa

tenemos comportamientos diferentes en los casos S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1$ m/s) y S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s). Por un lado, en el caso S08 los perfiles de velocidad alcanzan valores más altos en los puntos más cercanos al borde de entrada y esto es debido a que, como se mencionó anteriormente, el espesor de la capa de escarcha alcanza valores más altos en la zona cercana al borde de entrada. Al tener un mayor espesor en esta zona, la sección por donde pasa el flujo de aire es menor provocando un incremento en la magnitud de la velocidad y disminuyendo al alejarnos del borde de entrada. Por otro lado, en el caso S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.1$ m/s) se observa que los perfiles de velocidad tienen un comportamiento contrario al caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s), aumentando conforme nos alejamos del borde de entrada. Este comportamiento es debido a que el espesor de la capa de escarcha no alcanza valores tan altos y a que la diferencia en los espesores en los distintos puntos de la placa no es tan grande, es decir, la capa de escarcha tiene muy poca influencia en la variación del campo de velocidad. Al tener un flujo entre dos placas, los perfiles de velocidad se desarrollan e incrementan al alejarnos del borde de entrada hasta llegar a una zona en donde los perfiles ya no varían con la dirección x y el perfil se ha desarrollado hidrodinámicamente. Esto sucede en el caso S01 y se observa en la Figura 6.32.

6.5 DENSIDAD Y CONDUCTIVIDAD PROMEDIO DE LA ESCARCHA

Como se mencionó anteriormente, la densidad es la propiedad más relevante dentro de la escarcha debido a que con ésta podemos obtener la conductividad térmica, la porosidad, la difusividad molecular efectiva y el calor específico. Es por esto que es de interés conocer el valor de la densidad de la capa de escarcha y no solamente la densidad local, tal como se reportó en la subsección 6.4.1. Una manera de conocer este valor es obteniendo el valor promedio de las densidades locales

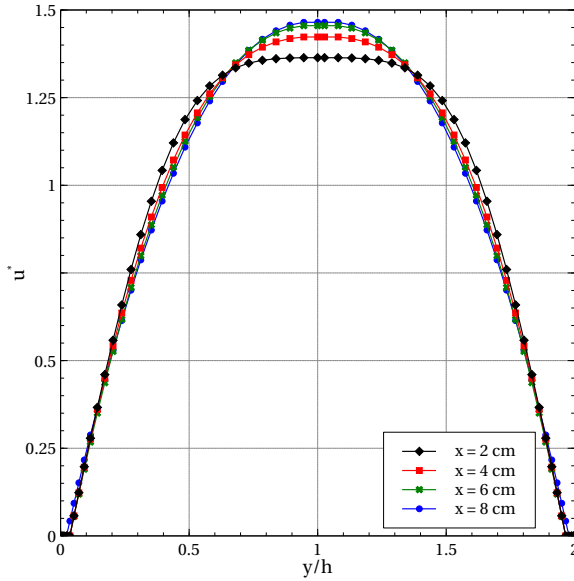


Figura 6.32: Perfiles de velocidad en $t=4$ horas ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

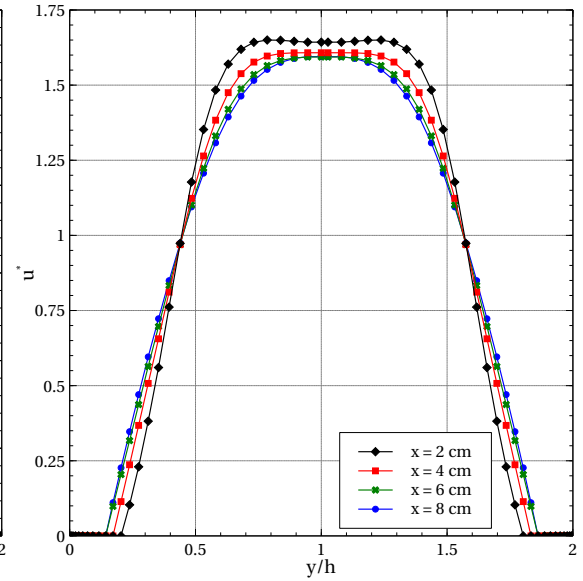


Figura 6.33: Perfiles de velocidad en $t=4$ horas ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

correspondientes a los volúmenes de los nodos de escarcha en cada tiempo. En la figura 6.34 se muestra la variación de la densidad promedio, la cual se adimensionalizó mediante la ecuación 6.2, mientras que el tiempo se muestra en minutos en el eje horizontal inferior y en el eje horizontal superior se muestra el tiempo adimensional, que se define como:

$$t^* = t \frac{D_a}{h^2} \quad (6.7)$$

donde h es la altura del dominio, t es el tiempo actual y D_a es la difusividad molecular del vapor de agua en el aire.

Podemos observar que conforme avanza el tiempo, el valor promedio de la densidad se incrementa de manera notable debido a los flujos máscicos del vapor de agua que penetran la capa de escarcha y que contribuyen a la densificación de la misma. Para los dos casos, las tendencias son muy similares pero, en el caso S08 el valor de la densidad promedio alcanza un valor mayor, y esto se debe a que este caso

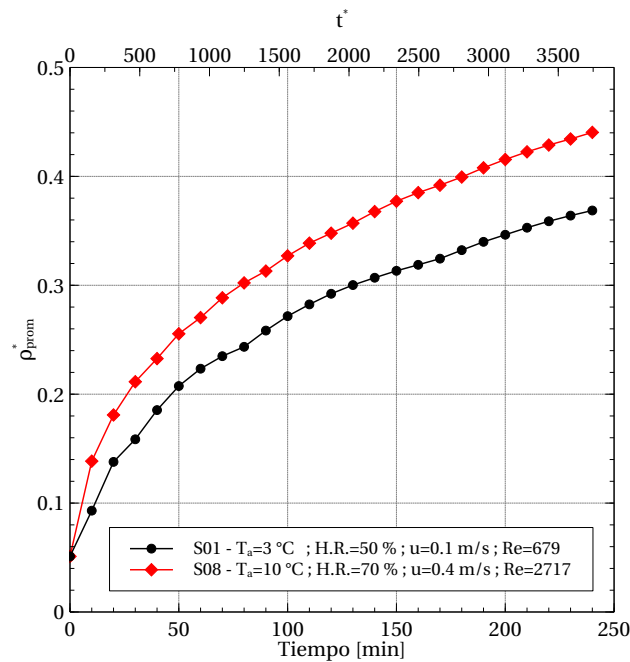


Figura 6.34: Densidad promedio - Casos S01 y S08

posee mayor contenido de humedad, por lo que los flujos máxicos serán mayores. En estudios anteriores [10, 22, 28] se han reportado los valores de las densidades de la escarcha, en los cuales podemos ver que las tendencias son similares. Los modelos utilizados en estos estudios no consideran la variación de los fenómenos con el tiempo, y consideran que la densidad no varía con el espacio y solamente con el tiempo, utilizando el valor de la densidad del tiempo anterior, el flujo máxico que contribuye a la densificación y el espesor de la capa de escarcha en ese tiempo. En este trabajo, el cálculo de la densidad se realiza mediante la ecuación 4.58, por lo que se considera que existe variación con el tiempo y con el espacio.

Por otro lado, a partir de los valores locales de las densidades dentro de la capa de escarcha, es posible calcular la conductividad térmica local de la escarcha mediante la ecuación 3.13, y posteriormente obtener la conductividad térmica promedio de la capa de escarcha. Para adimensionalizar la conductividad térmica, se utilizaron los valores de referencia de las conductividades térmicas del hielo y del aire mediante la ecuación:

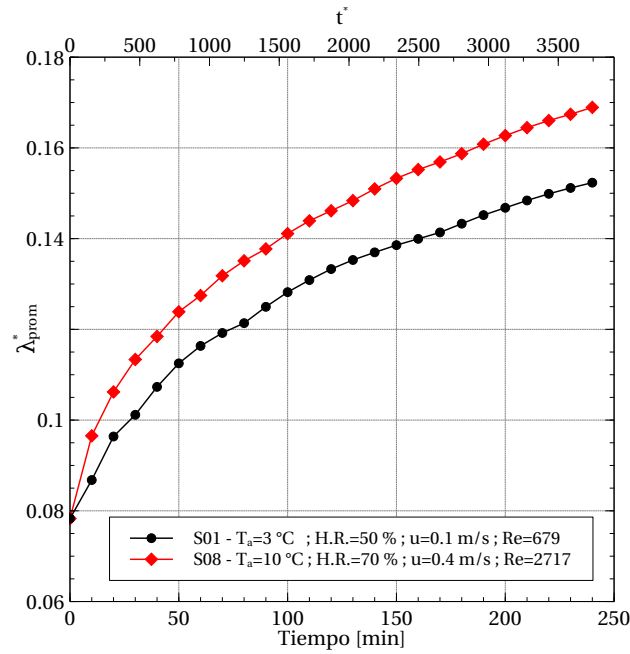


Figura 6.35: Conductividad promedio - Casos S01 y S08

$$\lambda_{prom}^* = \frac{\lambda_{prom} - \lambda_a}{\lambda_i - \lambda_a} \quad (6.8)$$

En la figura 6.35 se muestra la variación de la conductividad térmica promedio para los casos S01 y S08. En esta figura podemos observar que, al igual que en la densidad, los valores de conductividad aumentan con el paso del tiempo y que las curvas son muy similares a las de la densidad, lo cual era de esperar debido a que la conductividad se calcula directamente de la densidad.

6.6 TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA HACIA LA SUPERFICIE FRÍA

Una vez que se obtuvo la distribución de la temperatura dentro de todo el dominio, es posible calcular la transferencia de calor hacia la superficie fría, y observar cómo varía con el paso del tiempo. Existen dos parámetros en la capa de escarcha que afectan a la transferencia de calor, por un lado al densificarse la capa de escarcha

provoca un aumento en la conductividad térmica, favoreciendo la transferencia de calor, y por otro lado, al aumentar el espesor de la capa de escarcha provoca que la transferencia de calor disminuya. Para obtener el calor transferido, primero se obtuvo el flujo de calor local en la superficie fría. Para calcularlo se recurrió a la *Ley de Fourier* [39]:

$$q'' = -\lambda \frac{dT}{dy} \quad (6.9)$$

donde q'' es el flujo de calor en W/m^2 y λ es la conductividad térmica. Para el cálculo de la derivada de la temperatura con respecto a y , se emplearon diferencias finitas utilizando los tres nodos cercanos a la superficie [49], y para la conductividad térmica se utilizó una media armónica entre los dos nodos cercanos a la superficie. Con lo que tendremos:

$$q_i'' \approx -k_{prom} \frac{-3T_{i,j} + 4T_{i,j+1} - T_{i,j+2}}{y_3 - y_1} \quad (6.10)$$

donde:

$$k_{prom} = \frac{2k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}} \quad (6.11)$$

Una vez que se obtuvieron los flujos de calor locales en toda la superficie fría, se procedió a obtener el calor transferido hacia la placa, mediante la integral de los flujos de calor:

$$q = \int_A q'' dA = \int_0^L q''(1) dx \quad (6.12)$$

Esta integral la podemos aproximar mediante:

$$q \approx \sum_{i=1}^n q_i'' \Delta x_i \quad (6.13)$$

donde q es el calor transferido en W.

En la Figura 6.36 se muestra el calor transferido hacia la superficie para el caso S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s) durante las 4 horas que duró la simulación. Inicialmente, tiene una transferencia de calor de 13.5 W, teniendo solamente una pequeña capa de escarcha que se definió como condición inicial, y a los 10 minutos el calor transferido aumenta hasta 20.6 W. Este incremento en la transferencia de calor es debido a la densificación de la capa de escarcha, con lo cual se aumenta la conductividad térmica. En los siguientes tres tiempos, el aumento en el espesor influye sobre la transferencia de calor, disminuyéndola. Posteriormente, la transferencia de calor vuelve a aumentar hasta el minuto 160 debido nuevamente a la densificación de la escarcha, y a partir de este tiempo, comienza a disminuir en los tiempos siguientes, debido a que la capa de escarcha comienza a actuar como un aislante térmico.

La transferencia de calor en el caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s) la podemos ver en la Figura 6.37. En el primer tiempo, se posee un valor alto debido a que el espesor de la capa de escarcha es muy pequeño, posteriormente disminuye debido al crecimiento de la escarcha, y a que en tiempos iniciales la porosidad dentro de la escarcha es muy alta, lo que provoca que se tenga una conductividad térmica baja. Del minuto 10 hasta el minuto 70, la transferencia de calor se incrementa, debido a que la porosidad disminuye y la conductividad térmica aumenta, hasta alcanzar un valor máximo de 15.72 W. Después del minuto 70 el calor disminuye en cada paso de tiempo hasta llegar a un valor de 11.53 W en el tiempo final. En este caso, podemos observar de manera más clara la disminución de la transferencia de calor con el paso del tiempo, al compararlo con el caso S01.

Para conocer el flujo de masa local dentro de la capa de escarcha, se utilizó la *Ley de Fick*:

$$m'' = -D_{ef} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.14)$$

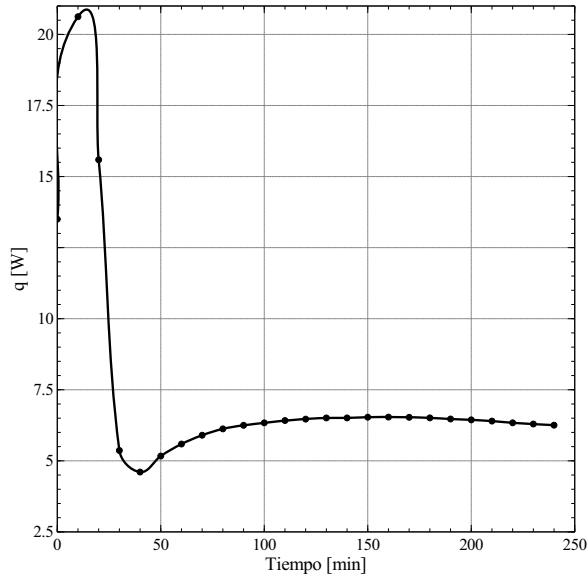


Figura 6.36: Calor transferido hacia la placa S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).

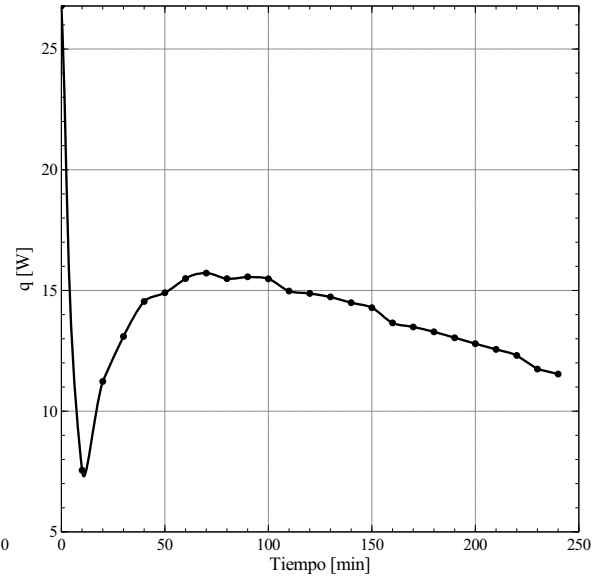


Figura 6.37: Calor transferido hacia la placa S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

donde D_{ef} es la difusividad molecular efectiva dentro de la escarcha, w es la humedad específica dentro de la escarcha, y m'' es el flujo másico.

En las Figuras 6.38 y 6.39 podemos observar los flujos de masa dentro de la capa de escarcha para distintos tiempos de los casos S01 y S08, respectivamente. En el eje horizontal se muestra el espesor adimensional, el cual se define como:

$$\varepsilon^* = \frac{y}{\varepsilon} \quad (6.15)$$

donde ε es el espesor local de la capa de escarcha en el tiempo actual. En ambos casos podemos observar que conforme nos acercamos a la superficie fría ($\varepsilon^* = 0$), el flujo másico disminuye debido a que en esta zona, la porosidad es menor, por lo que la masa no puede transportarse tan fácilmente como en la zona cercana a la superficie de la capa de escarcha ($\varepsilon^* = 1$), donde la porosidad es mayor. Por otro lado, al avanzar el tiempo los flujos másicos disminuyen debido a la densificación de la capa de escarcha, lo que significa que la porosidad disminuye en toda la escarcha

dificultando el transporte de masa. Además de la porosidad dentro de la escarcha, otro parámetro que afecta al flujo másico es el gradiente de humedad $\frac{\partial w}{\partial y}$; cerca de la superficie fría se tienen los gradientes más pequeños, y conforme nos alejamos hacia la superficie de la capa de escarcha, estos gradientes aumentan.

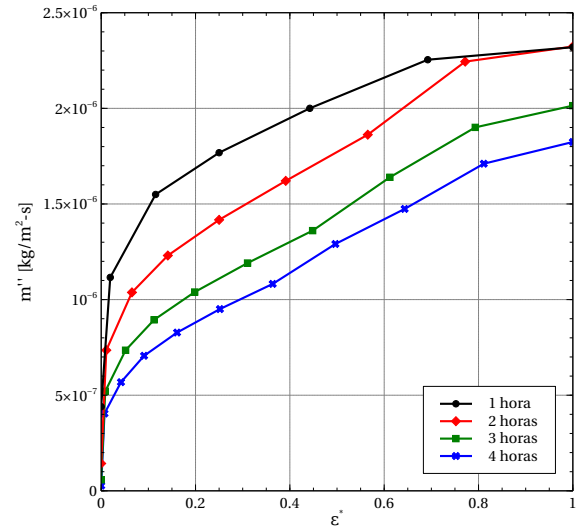
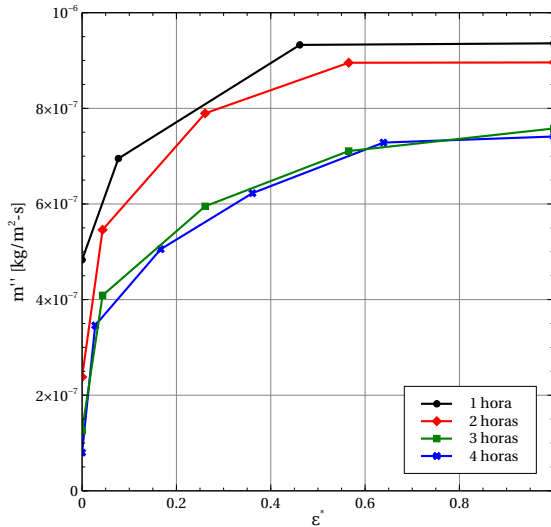


Figura 6.38: Flujo de masa en $x = L/2$ - S01 ($T_a=3^\circ\text{C}$; $H.R.=50\%$; $u=0.1$ m/s; $Re=679$).
 Figura 6.39: Flujo de masa en $x = L/2$ - S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $u=0.4$ m/s; $Re=2717$).

6.7 DISTRIBUCIÓN DE LAS PROPIEDADES EN EL DOMINIO

Con el fin de poder observar de manera más clara lo que sucede con las distintas propiedades en todo el dominio computacional, a continuación se muestran las distribuciones de densidad, temperatura, humedad y velocidad correspondientes a los tiempos a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas y d) 4 horas, para el caso S08 ($T_a=10^\circ\text{C}$; $H.R.=70\%$; $T_s=-20^\circ\text{C}$; $u=0.4$ m/s).

En la Figura 6.40 se muestra las distribuciones de la densidad en los diferentes tiempos, en donde podemos observar cómo aumenta el espesor de la capa de escarcha

y los valores de densidad. Se ve claramente que el espesor es más grande aguas arriba, al igual que los valores de densidad tal como se explicó anteriormente. Se observa además que la zona cerca al borde de entrada es la que tiene los valores más grandes de densidad, esto debido a que esta zona recibe flujos másicos provenientes de los nodos del norte y de los nodos del oeste por lo que rápidamente se densifica. Esto coincide con los resultados reportados por Armengol [8].

Las distribuciones de temperatura se muestran en la Figura 6.41, en donde podemos observar que los valores varían desde -20°C hasta 10°C , valores correspondientes a la temperatura de la placa y la temperatura de la corriente libre respectivamente. Casi no se aprecia la variación de la temperatura dentro de la escarcha, la cual se observa de manera más clara en la Figura 6.22. En el tiempo correspondiente a una hora, podemos ver el crecimiento de la *capa límite térmica* en donde, como se mencionó anteriormente, los gradientes son mayores corriente arriba y van disminuyendo conforme nos alejamos del borde de entrada.

Caso similar a la temperatura, en la Figura 6.42 se muestra las distribuciones de humedad específica en donde podemos observar el crecimiento de la *capa límite de concentración*, por lo que la zona más alejada al borde de entrada presenta los gradientes más pequeños de humedad ocasionando que los flujos másicos en esta zona sean menores y provocando así que, tanto el crecimiento de la capa de escarcha como los valores de densidad sean menores que en la zona cercana al borde de entrada. La humedad específica dentro de la capa de escarcha corresponde a la humedad de saturación a la temperatura local, tal como se detalló en la subsección 4.3.3.

Por último, para ilustrar la distribución de la velocidad dentro del dominio, se decidió mostrar las componentes del vector de la velocidad en diferentes figuras, y posteriormente la distribución del módulo del vector de la velocidad. En la Figura 6.43 se muestra la distribución de la componente en x , mientras que en la Figura 6.44 se muestra la componente en y . Debido a que la condición de frontera en la entrada la definimos como $u = 4 \text{ m/s}$ y $v = 0 \text{ m/s}$, la componente u es la que

domina, y por esta razón la distribución del módulo del vector de la velocidad es muy similar a la distribución de la componente u . La componente v presenta valores altos en la zona en donde comienza la capa de escarcha debido a que el flujo de aire se desvía bruscamente al chocar contra la capa de escarcha. Esto lo podemos apreciar en la Figura 6.44. En la Figura 6.45 se muestra las distribuciones del vector de la velocidad junto con los vectores locales en diferentes nodos dentro del dominio, esto a distintos tiempos. Tal como se observó anteriormente en la Figura 6.33, la velocidad es mayor en la zona corriente arriba debido a que, la sección por donde pasa el flujo másico de aire disminuye provocando un aumento en la velocidad. Esto se observa de manera más clara en el tiempo de cuatro horas. En la zona correspondiente a la capa de escarcha podemos ver que la velocidad tiene un valor de cero, debido a la estrategia explicada en la Sección 4.3.1. En esta figura es posible observar la *capa límite* de manera más clara gracias a los vectores de la velocidad, siendo que cerca de la superficie de la capa de escarcha existen valores muy bajos de la velocidad y éstos se incrementan al alejarnos de la superficie hasta alcanzar el valor de la corriente libre.

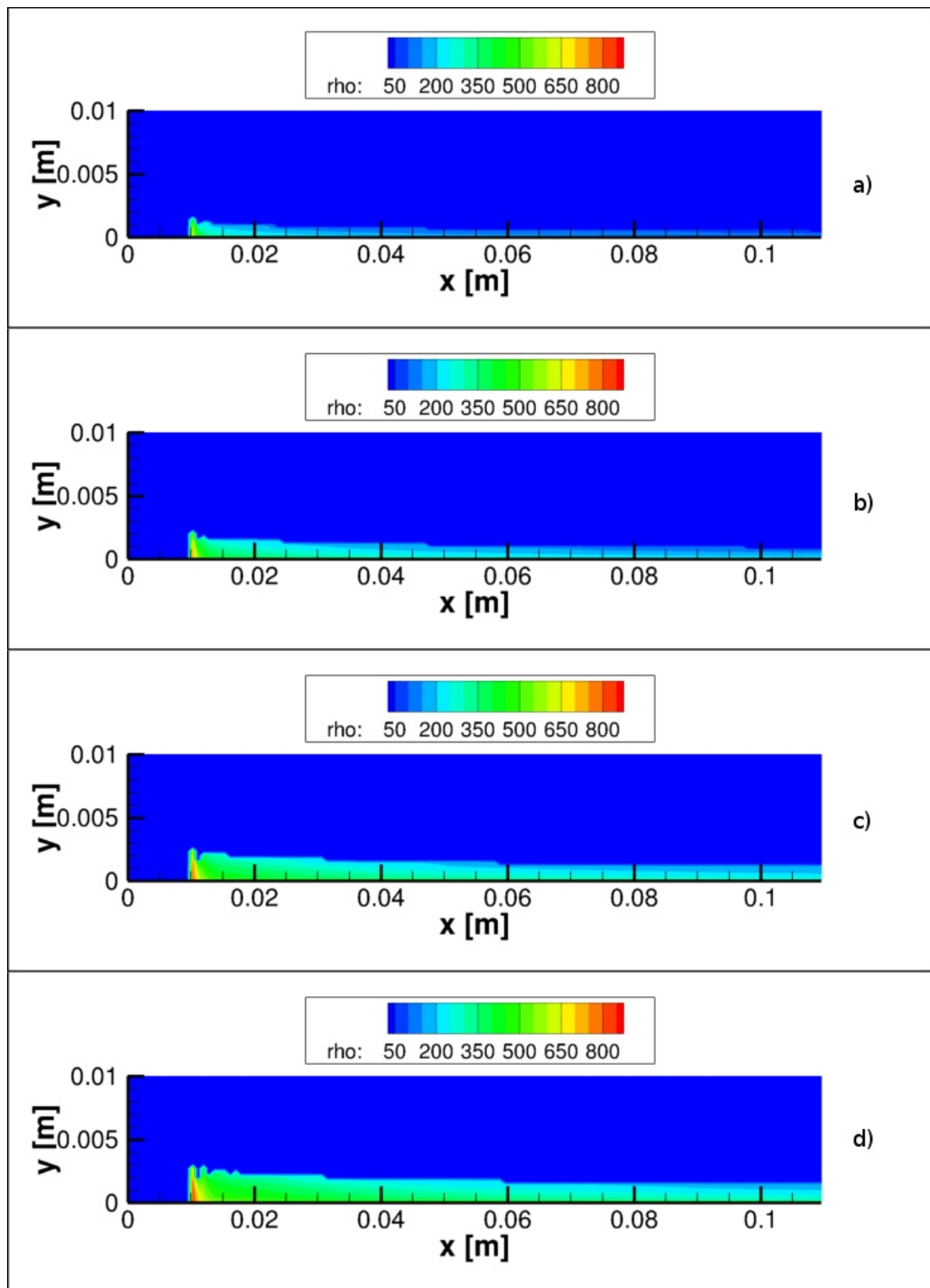


Figura 6.40: Distribución de densidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.

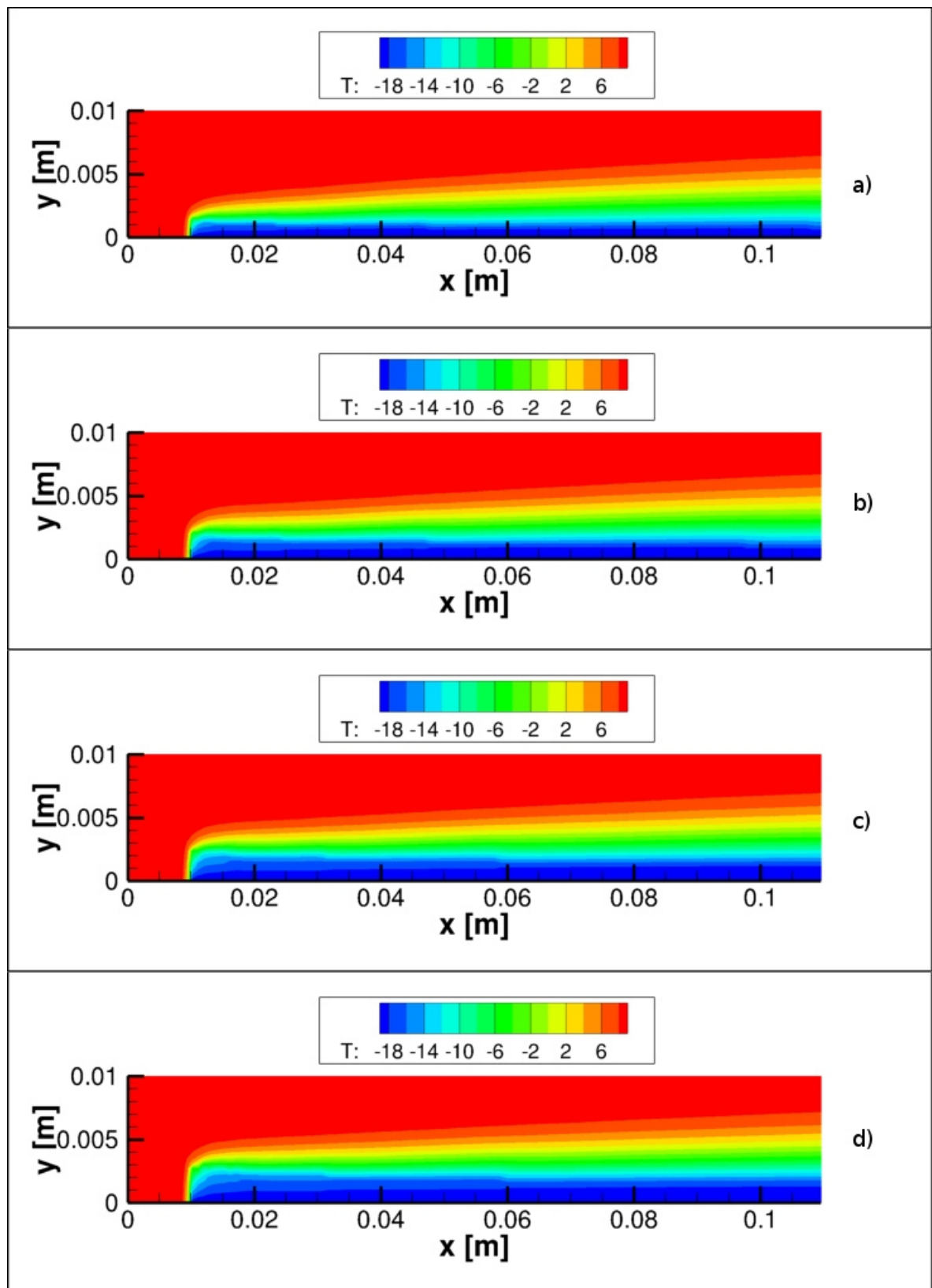


Figura 6.41: Distribución de temperatura - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.

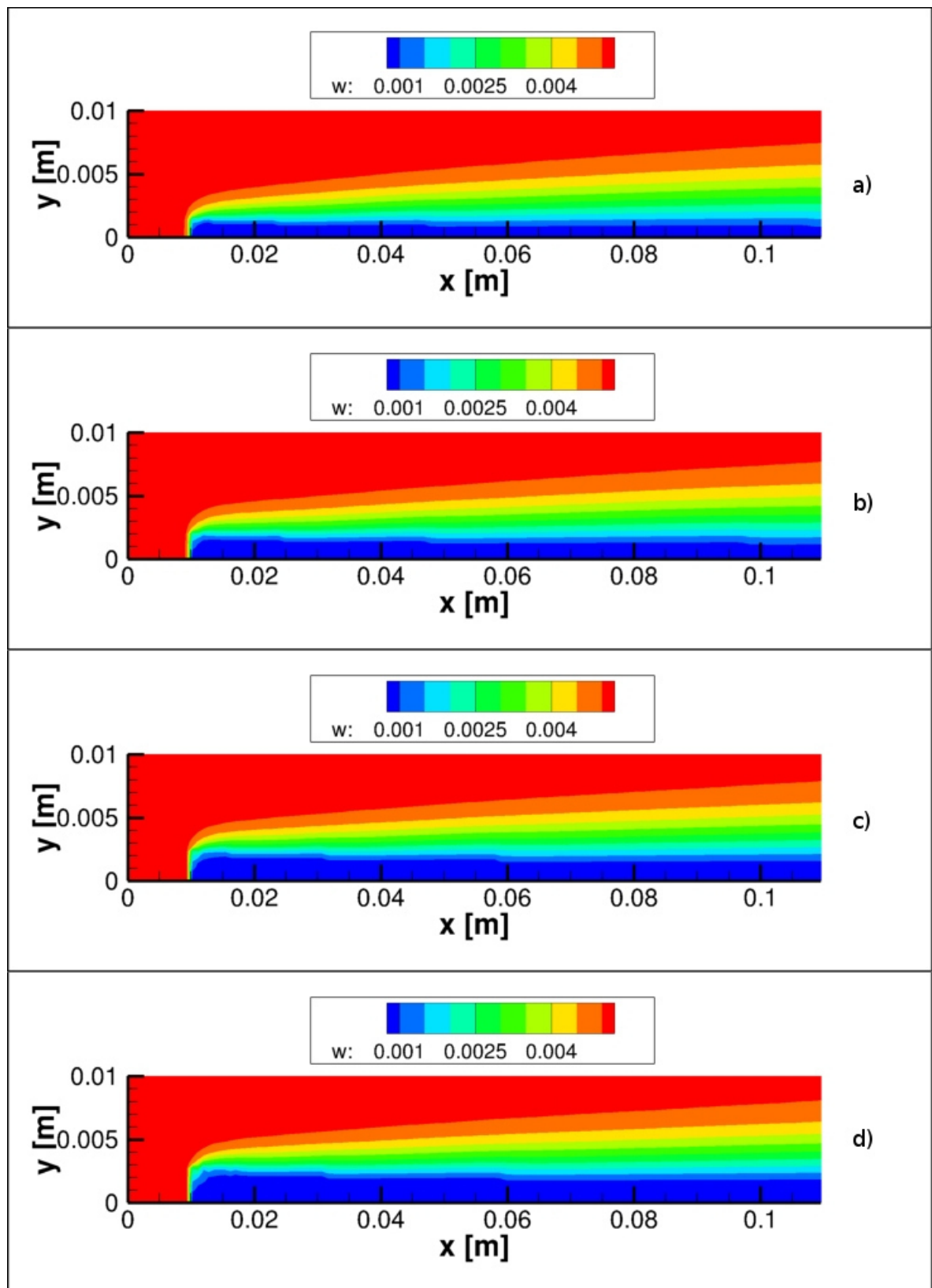


Figura 6.42: Distribución de humedad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.

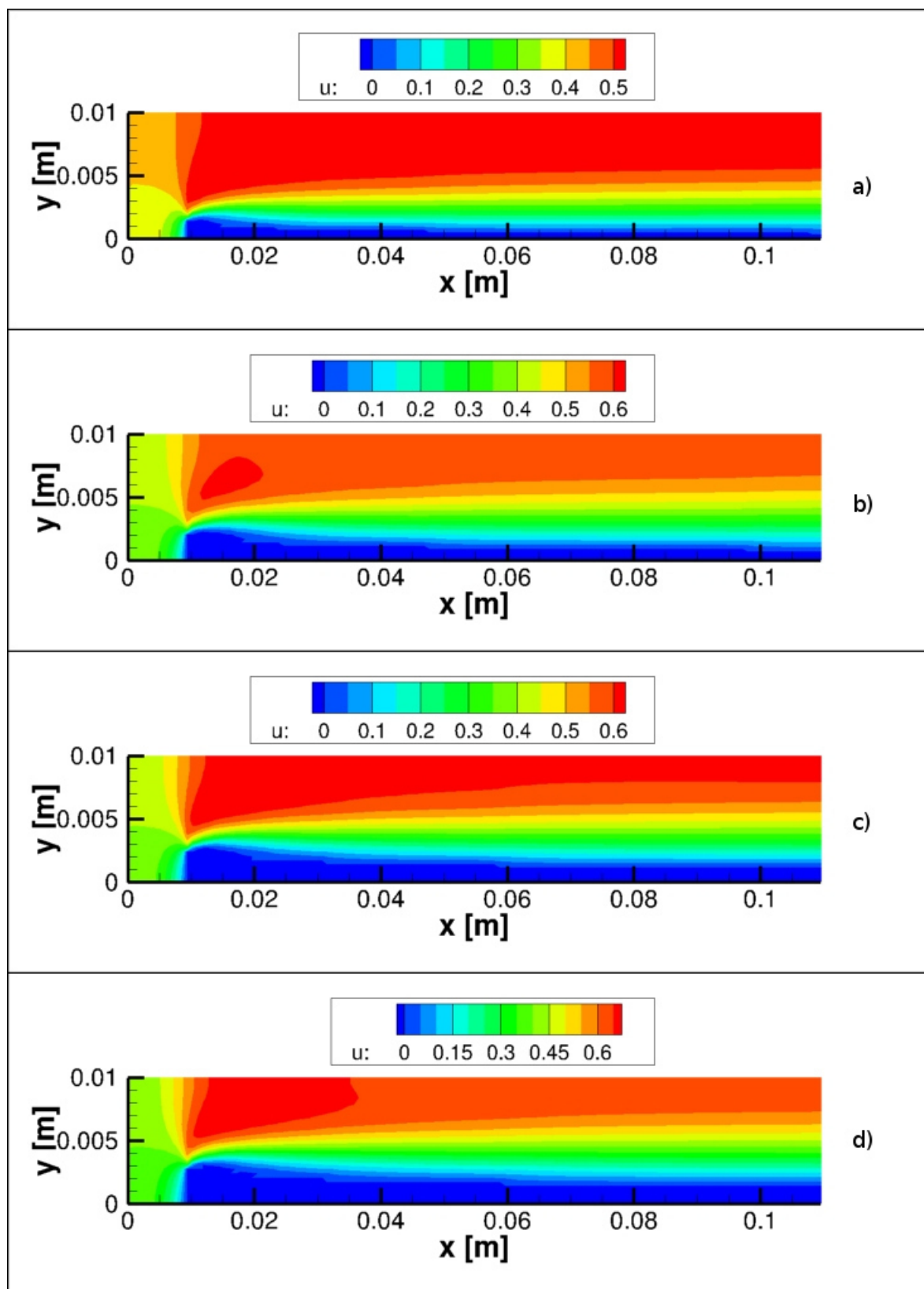


Figura 6.43: Distribución de la componente en x de la velocidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.

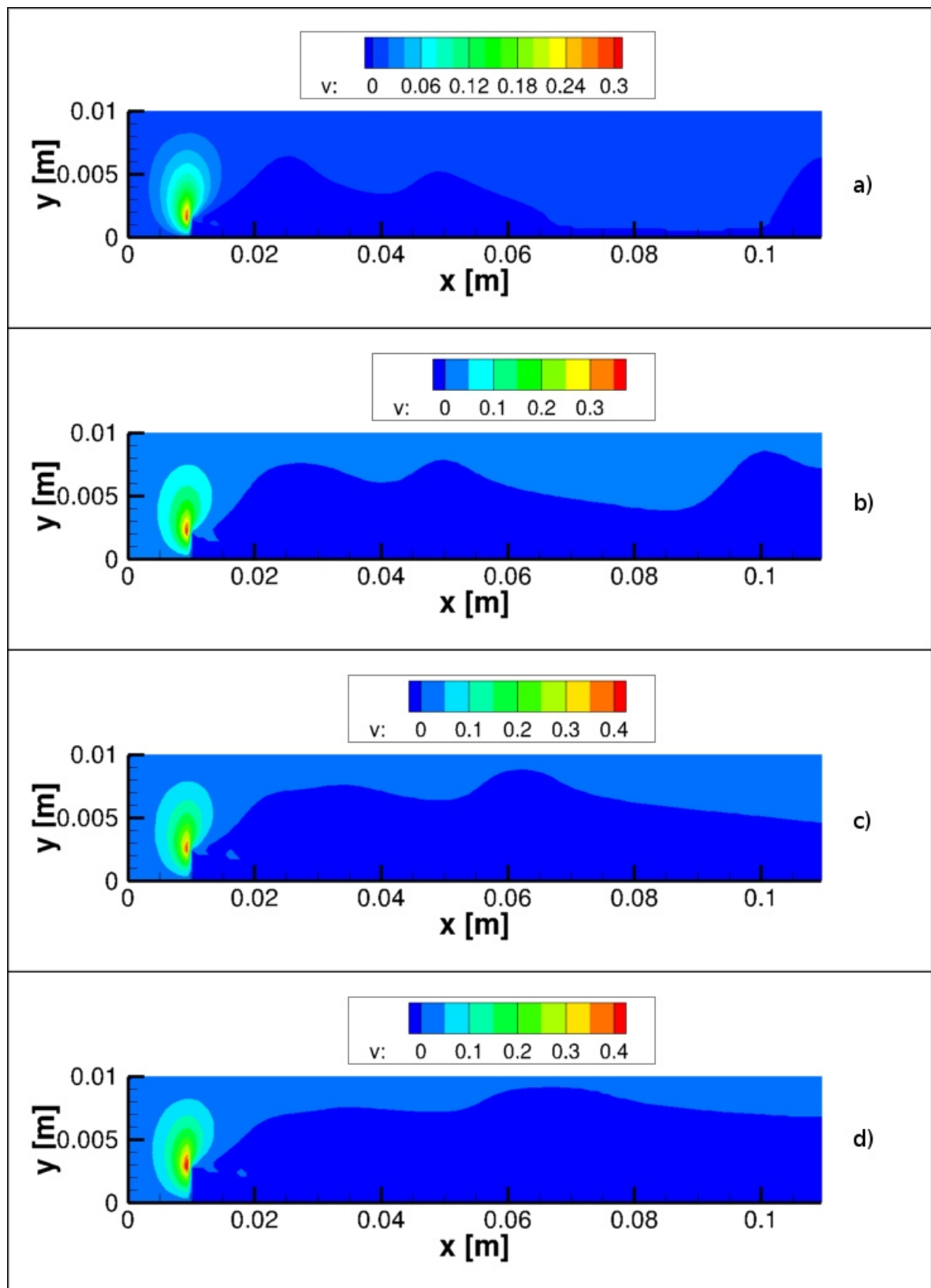


Figura 6.44: Distribución de la componente en y de la velocidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.

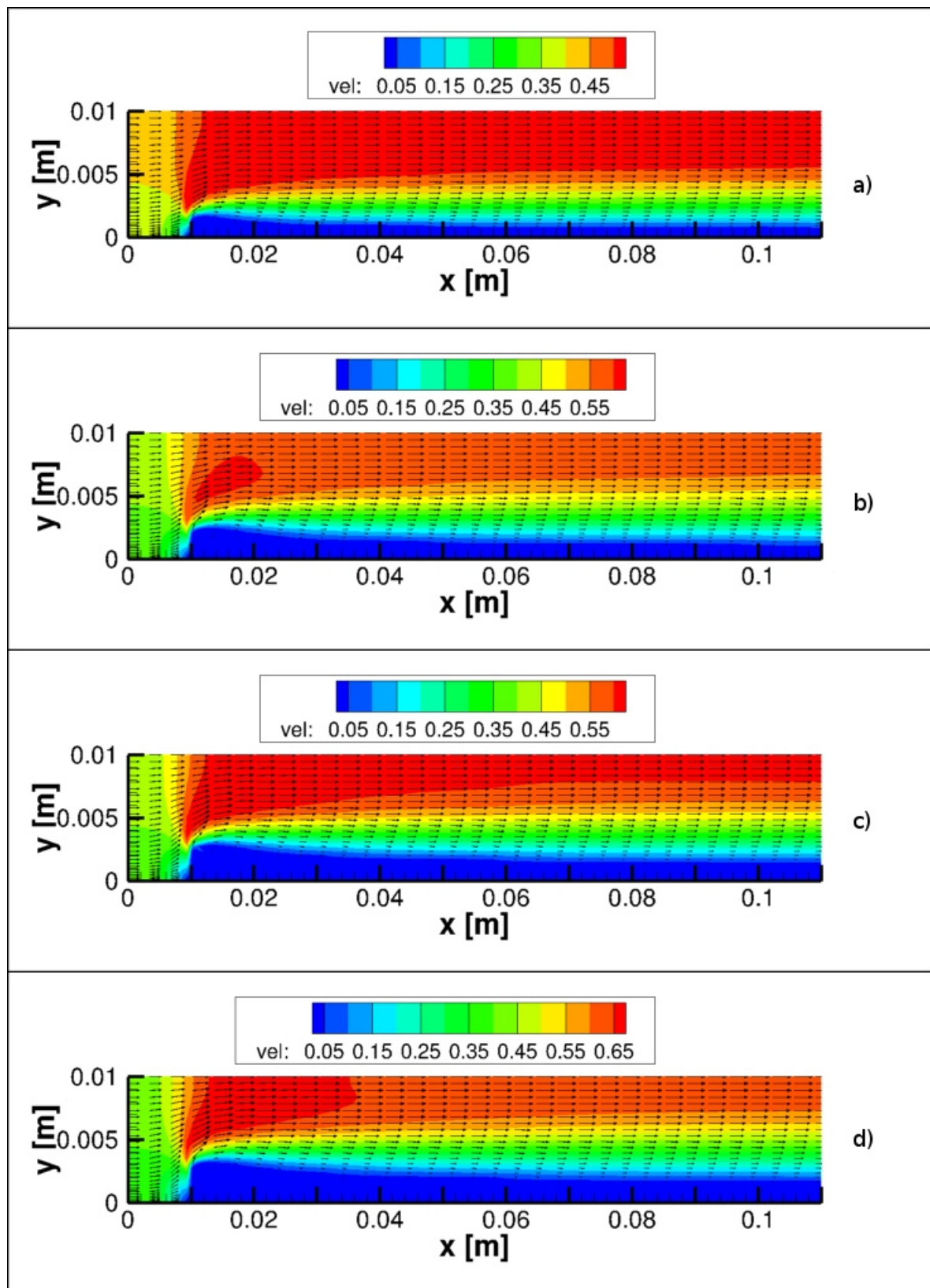


Figura 6.45: Distribución del vector de la velocidad - Caso S08. a) 1 hora, b) 2 horas, c) 3 horas, d) 4 horas.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

La formación de escarcha es un fenómeno muy común que ocurre en los intercambiadores de calor de los sistemas de refrigeración y en las bombas de calor. Dado que la capa de escarcha es un medio poroso que actúa como un aislante térmico, la transferencia de calor disminuye al presentarse este fenómeno. Por otro lado, al crecer la capa de escarcha se produce un aumento en la caída de la presión, afectando también al desempeño de los equipos. Con el fin de conocer los parámetros que afectan a este fenómeno y de buscar estrategias que permitan la reducción y/o remoción de la capa de escarcha, en los últimos 20 años se han intensificado los estudios referentes a este fenómeno y se han desarrollado modelos matemáticos que sean capaces de predecirlo. Entre los parámetros que afectan al fenómeno se encuentran la temperatura, humedad, y velocidad del aire, así como también la temperatura de la superficie a baja temperatura. Otro de los factores es la geometría de las superficies, por lo que se han realizado estudios sobre placas planas, tubos y bancos de tubos.

Para poder diseñar intercambiadores de calor más eficientes, es necesario realizar diversos estudios bajo condiciones de formación de escarcha. Para esto, es necesario contar con un modelo matemático robusto que nos permita predecir el fenómeno de formación de escarcha sobre diversas geometrías.

En este trabajo, se logró predecir de manera acertada la deposición y el creci-

miento de la capa de escarcha en superficies planas con flujo paralelo, así como la variación de las propiedades de la misma (i.e. densidad, porosidad, conductividad térmica, difusividad másica) mediante un código *CFD* escrito en lenguaje Fortran, el cual se pudiera implementar en paquetes *CFD* más robustos como *OpenFOAM*, con el fin de realizar estudios en geometrías complejas (e.g. banco de tubos). Se realizó una búsqueda en la literatura de modelos matemáticos que predijeran este fenómeno y que se pudiera implementar en un código *CFD* utilizando el Método de los Volúmenes Finitos (FVM). El modelo matemático utilizado se compone por las ecuaciones de la conservación de masa, la conservación de cantidad de movimiento, la conservación de la energía y la ecuación de transporte de especies, las cuales se resolvieron en un sólo dominio computacional utilizando diferentes coeficientes para las ecuaciones discretizadas, y diferentes propiedades termofísicas dependiendo de si el nodo a resolver correspondía a escarcha o aire. Al hacer esto no se requirió especificar una condición en la interfaz *escarcha-aire*. Se utilizaron diferentes estrategias para resolver las ecuaciones de gobierno dependiendo de la naturaleza de los nodos, si el nodo pertenecía a escarcha se utilizó una técnica llamada *Blocked-off*, descrita por Patankar [45] en la cual se obliga a que ciertos nodos tengan un valor deseado, en el caso del campo de velocidades se asignó un valor de cero dentro de la escarcha, mientras que para el campo de humedad específica se asignó el valor de la humedad saturada a la temperatura del nodo, utilizando un polinomio obtenido de una regresión polinomial de datos de la literatura [46]. Para el caso de la ecuación de la energía, en los nodos de escarcha se consideró un término fuente debido al cambio de fase.

El modelo matemático considera como condición inicial que ya ha concluido la primer etapa del proceso de formación de escarcha descrito por Hayashi [35]. Esta etapa tiene una duración muy corta de tiempo y resulta muy complicado modelarla. El modelo considera la solución de la segunda etapa, ya que es en ésta donde se presenta el mayor crecimiento y densificación. La tercera etapa no se modela debido a la complejidad que conlleva y a que el aporte al espesor y a la densificación es muy

pequeño.

Para resolver el acoplamiento del campo de velocidad con el de presión se utilizó el algoritmo SIMPLE junto con mallas desplazadas para las componentes de la velocidad, y para poder resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido de la discretización de las ecuaciones se utilizó el algoritmo TDMA. Para los distintos términos que componen las ecuaciones de gobierno se utilizaron diferentes esquemas para discretizarlos. Para los términos convectivos se utilizó el esquema Upwind, para el término temporal el esquema totalmente implícito y para los términos difusivos diferencias finitas. Para poder rastrear la interfaz escarcha-aire se utilizó una matriz con el mismo número de elementos que número de nodos que componen el dominio, y la cual poseía dos valores: 1 cuando el nodo pertenece a escarcha y 0 cuando el nodo pertenece a aire. Al inicio del problema se asigna la primera línea de nodos situados en la placa a baja temperatura como escarcha, con una densidad y un espesor iniciales y a partir de esta línea, la capa de escarcha crecería. La tasa de crecimiento de la capa de escarcha se calculó realizando un balance de masa en los nodos pertenecientes a la interfaz. Se calcularon los flujos máscicos provenientes del aire y los flujos máscicos que se difunden dentro de la escarcha (y que contribuyen a la densificación de la capa de escarcha), la diferencia entre estos dos será la masa que contribuye al crecimiento de la capa. Estos flujos máscicos se encontraban en función de los gradientes de humedad específica. La variación de la densidad dentro de la escarcha se obtuvo utilizando la ecuación 4.58, en la cual influyen solamente flujos difusivos, los cuales son directamente proporcionales a los gradientes de humedad. A partir del valor de la densidad de la escarcha se pudo obtener el valor de la porosidad del medio y posteriormente las otras propiedades involucradas (i.e. conductividad térmica, calor específico, difusividad máscica efectiva).

Para poder validar el código CFD se realizó un estudio experimental utilizando un calorímetro tipo *túnel de viento* en el cual se pudieron controlar la velocidad, la temperatura y la humedad relativa del aire. Se utilizó una placa plana de cobre y con un baño térmico se logró descender la temperatura de la superficie de tal forma que se

pudo observar la formación de escarcha. El parámetro utilizado para la validación fue el espesor de la capa de escarcha, por lo que se tomaron fotografías con una cámara de alta resolución y mediante un programa de análisis de imagen se logró medir la cantidad de píxeles que componen la capa de escarcha. Se realizaron tres casos con el fin de tener tres casos distintos y compararlos con el código numérico. Las mediciones se realizaron en tres puntos de la placa, a 2, 5 y 8 centímetros del inicio de la misma, los cuales se compararon con los puntos mostrados en el dominio computacional de la Figura 5.13. En el punto correspondiente a 5 centímetros, los errores relativos fueron menores del 10%, caso similar para la posición de 2 centímetros a excepción del caso 03, mientras que en la posición de 8 centímetros los errores fueron mayores para los tres casos, de entre 12% y 22%. Esta discrepancia se atribuye a que en la zona final de la placa los números de Re son muy grandes ($\approx 10,000$), por lo que el flujo pudiera dejar de ser laminar y estar en la transición hacia la turbulencia, por lo que el modelo matemático no sería capaz de resolverlo. Con esto concluimos que el código es capaz de predecir el espesor de la capa de escarcha hasta una distancia de 15 cm, como se observa en la Figura 5.13. Además de esto, las condiciones iniciales de la escarcha elegidas (ρ_f^0 y y_f^0) pudieron tener influencia en el espesor, por lo que se recomienda probar otros valores para conseguir mejores resultados. Estos valores pudieran estar influenciados por las condiciones del ambiente, tal como se ha propuesto en estudios anteriores [6, 10, 34], por lo que elegir las mismas condiciones para los tres casos pudiera no ser necesariamente lo más acertado. Debido a esto, se recomienda indagar más en el tema y llevar a cabo un estudio experimental con el fin de conseguir las mejores condiciones iniciales para la capa de escarcha.

Luego de la validación se realizaron ocho simulaciones utilizando diferentes condiciones de temperatura, humedad y velocidad en el aire, mientras que la temperatura de la placa se mantenía como constante. Los resultados de los espesores de la capa de escarcha muestran consistencia con la literatura, siendo que al tener mayor temperatura, humedad y velocidad los espesores siempre fueron mayores, teniendo el caso S08 como el de mayor espesor, dado que tenía los mayores valores de las tres

variables, y el caso S01 como el menor espesor. La medición del espesor de la escarcha en distintos puntos de la superficie también fue consistente con la literatura; el mayor espesor se presenta cerca del borde de ataque y disminuye conforme nos alejamos.

Además, el cálculo de las propiedades termofísicas dentro la escarcha mostraron buenos resultados. La densidad es la propiedad más importante de la escarcha, debido a que a partir de este valor, es posible obtener las demás propiedades dentro de la escarcha. Los perfiles obtenidos mostraron buenos resultados dado que los valores siempre fueron aumentando con el tiempo, y por otro lado, los valores más altos de densidad se presentaron cerca de la placa fría, tal como lo reportan estudios anteriores.

Por último, se mostró el efecto de la capa de escarcha sobre la transferencia de calor del aire hacia la superficie fría. Debido a que la capa de escarcha se comporta como un aislante térmico, el flujo de calor hacia la superficie disminuye al crecer la capa de escarcha. En tiempos iniciales se observó un aumento a la transferencia de calor conforme la porosidad disminuía, y posteriormente la transferencia de calor disminuía hasta el tiempo final de la simulación. Por otro lado, se mostraron los flujos de masa dentro de la capa de escarcha, en dónde se pudo apreciar que al avanzar el tiempo, los flujos de masa disminuían debido a que la porosidad y el gradiente de humedad dentro de la escarcha se hacían menores. Estos flujos también disminuían en la zona cercana a la superficie fría, dado que en esta zona es en donde se presentan los valores más bajos de porosidad.

7.1 TRABAJOS FUTUROS

Con el fin de extender este estudio y de mejorar el código numérico se recomienda los siguientes puntos:

- Encontrar las mejores condiciones iniciales para la capa de escarcha en función de la temperatura, humedad y velocidad del aire, además de la temperatura de la placa.
- Llevar a cabo otra serie de experimentos en los cuales se tenga mayor certeza de que el flujo de aire es laminar y que no existe recirculación sobre la placa.
- Calcular la conductividad térmica en función de la porosidad y comparar los resultados con los obtenidos con la ecuación utilizada en el código, la cual fue propuesta por K.S. Lee [28] y está en función de la densidad de la escarcha.
- Extender este estudio a un caso en coordenadas cilíndricas en el código libre OpenFOAM, además de compararlo con experimentos.
- Incluir un modelo de turbulencia.
- Con el fin de mejorar el cálculo de los gradientes de las propiedades cerca de la superficie de la capa de escarcha, se recomienda que la malla computacional cambie con el crecimiento de la escarcha, para que sea más fina cerca de la superficie de la capa de escarcha.

APÉNDICE A

MODELADO DE LA DENSIFICACIÓN

En este apéndice se muestra el procedimiento con el que se obtuvieron los coeficientes de la ecuación discretizada 4.59. Expresando la ecuación A.1 de forma vectorial, tenemos:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_a D_{ef} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_a D_{ef} \nabla w) \quad (\text{A.2})$$

Integrando los términos en un volumen como el de la figura 4.2 y en un intervalo de tiempo tenemos:

$$\int_V \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dt dV = \int_t^{t+\Delta t} \int_V \nabla \cdot (\rho_a D_{ef} \nabla w) dV dt \quad (\text{A.3})$$

Primero nos enfocaremos en el término temporal. Utilizando el *Esquema totalmente implícito* y considerando el caso bidimensional ($dV = dx dy$) tenemos:

$$\int_V \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dt dV = \int_V (\rho_{f,P} - \rho_{f,P}^0) dx dy = (\rho_{f,P} - \rho_{f,P}^0) \Delta x \Delta y \quad (\text{A.4})$$

Para integrar en el volumen el término del lado derecho de la ecuación es necesario aplicar el *Teorema de la divergencia de Gauss*:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho_a D_{ef} \nabla \cdot w) dV = \int_S \rho_a D_{ef} \nabla \cdot (w \vec{n}) dS \quad (\text{A.5})$$

donde S es la superficie en la que estemos integrando y \vec{n} es un vector unitario normal a la superficie S . Considerando que $\Gamma = \rho_a D_{ef}$, y desarrollando A.5 tenemos:

$$\int \Gamma \frac{\partial w}{\partial x} (-1) dy + \int \Gamma \frac{\partial w}{\partial x} (1) dy + \int \Gamma \frac{\partial w}{\partial y} (-1) dx + \int \Gamma \frac{\partial w}{\partial y} (1) dx \quad (\text{A.6})$$

Considerando que los flujos difusivos en las caras del volumen son constantes e integrando:

$$\left(\Gamma \frac{\partial w}{\partial x} \right)_e \Delta y - \left(\Gamma \frac{\partial w}{\partial x} \right)_w \Delta y + \left(\Gamma \frac{\partial w}{\partial y} \right)_n \Delta x - \left(\Gamma \frac{\partial w}{\partial y} \right)_s \Delta x \quad (\text{A.7})$$

Utilizando una aproximación lineal para las derivadas espaciales:

$$\Gamma_e \Delta y \left(\frac{w_E - w_P}{\delta x} \right) - \Gamma_w \Delta y \left(\frac{w_P - w_W}{\delta x} \right) + \Gamma_n \Delta x \left(\frac{w_N - w_P}{\delta y} \right) - \Gamma_s \Delta x \left(\frac{w_P - w_S}{\delta y} \right) \quad (\text{A.8})$$

Ahora, integrando en el intervalo de tiempo los términos de A.8:

$$\begin{aligned} (\rho_{f,P} - \rho_{f,P}^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x} \right) (w_E - w_P) - \left(\frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x} \right) (w_P - w_W) \right. \\ \left. + \left(\frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y} \right) (w_n - w_P) - \left(\frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y} \right) (w_P - w_S) \right] dt \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Despejando el Δt obtenido de la integración:

$$\frac{(\rho_{f,P} - \rho_{f,P}^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} = \left(\frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x} \right) (w_E - w_P) - \left(\frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x} \right) (w_P - w_W)$$

$$+ \left(\frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y} \right) (w_N - w_P) - \left(\frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y} \right) (w_P - w_S) \quad (\text{A.10})$$

Reagrupando los términos nos quedaría:

$$\begin{aligned} a_D \rho_{f,P} - a_D \rho_{f,P}^0 &= a_E w_E - a_E w_P - a_W w_P + a_W w_W + a_N w_N \\ &\quad - a_N w_P - a_S w_P + a_S w_S \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$a_D \rho_{f,P} - a_D \rho_{f,P}^0 = a_E w_E + a_W w_W + a_N w_N + a_S w_S + a_P w_P \quad (\text{A.12})$$

Despejando el valor de la densidad de la escarcha en el tiempo actual ($\rho_{f,P}$):

$$\rho_{f,P} = \frac{a_E w_E + a_W w_W + a_N w_N + a_S w_S + a_P w_P + b}{a_D} \quad (\text{A.13})$$

de donde:

$$a_E = \frac{(\rho_a D_{ef})_e \Delta y}{\delta x} \quad (\text{A.14a})$$

$$a_W = \frac{(\rho_a D_{ef})_w \Delta y}{\delta x} \quad (\text{A.14b})$$

$$a_N = \frac{(\rho_a D_{ef})_n \Delta x}{\delta y} \quad (\text{A.14c})$$

$$a_S = \frac{(\rho_a D_{ef})_s \Delta x}{\delta y} \quad (\text{A.14d})$$

$$a_P = -a_E - a_W - a_N - a_S \quad (\text{A.14e})$$

$$a_D = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{A.14f})$$

$$b = a_D \rho_{f,P}^0 \quad (\text{A.14g})$$

APÉNDICE B

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS

En el capítulo 4 se detalló la forma para discretizar las ecuaciones que gobiernan el flujo de un fluido y la transferencia de calor. Esta discretización genera una ecuación algebraica por cada uno de los nodos que componen el dominio computacional, por lo cual tendremos un sistema de n ecuaciones, como n nodos tengamos en el dominio. Existen dos formas para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones, la primera es utilizando un método directo (e.g. inversión de matriz por la regla de Cramer y la eliminación Gaussiana) y la segunda es mediante un método iterativo. Los métodos iterativos se basan en la aplicación repetida de un algoritmo conduciendo a la convergencia de la solución, después de un número considerado de repeticiones.

El caso unidimensional nos generará un sistema de ecuaciones tri-diagonal, el cual sólo tiene tres coeficientes diferentes de cero en cada una de las ecuaciones. El algoritmo Thomas o TDMA (Tri-diagonal matrix algorithm) es una técnica para resolver de manera rápida un sistema de ecuaciones tri-diagonal. El TDMA es un método directo para casos unidimensionales, pero puede ser aplicado en casos de dos o tres dimensiones de manera iterativa en un modo línea por línea, además debido a su bajo costo computacional es altamente utilizado en códigos CFD. En este Apéndice se explicará este método basados en [45, 50].

Si tomamos la ecuación discretizada para el caso unidimensional tenemos:

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + b \tag{B.1}$$

Sustituyendo los subíndices W , P y E por $j - 1$, j y $j + 1$ respectivamente, además de los coeficientes a_W, a_P, a_E y el término fuente b por β_j, D_j, α_j y C_j y acomodando la ecuación tenemos:

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j \tag{B.2}$$

La matriz con el sistema de ecuaciones nos quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccc} \phi_1 & & & & & = C_1 & (B.3a) \\ -\beta_2\phi_1 & +D_2\phi_2 & -\alpha_2\phi_3 & & & = C_2 & (B.3b) \\ & -\beta_3\phi_2 & +D_3\phi_3 & -\alpha_3\phi_4 & & = C_3 & (B.3c) \\ & & -\beta_4\phi_3 & +D_4\phi_4 & -\alpha_4\phi_5 & = C_4 & . \\ & & & . & . & = . & : \\ & & & & -\beta_n\phi_{n-1} & +D_n\phi_n & -\alpha_n\phi_{n+1} = C_n & (B.3n) \\ & & & & & & \phi_{n+1} = C_{n+1} & (B.3n+1) \end{array}$$

En la matriz anterior los valores ϕ_1 y ϕ_{n+1} son los valores conocidos en la frontera. Las ecuaciones (B.3b-n) pueden ser reescritas como:

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \tag{B.4a}$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \tag{B.4b}$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4}\phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4}\phi_3 + \frac{C_4}{D_4} \tag{B.4c}$$

. . .

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n} \phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n} \phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n} \quad (\text{B.4n-1})$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas con eliminación *hacia adelante* y sustitución *hacia atrás*. La eliminación hacia adelante comienza eliminando ϕ_2 de la ecuación (B.4b) por sustitución de la ecuación (B.4a), quedando:

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \phi_4 + \left[\frac{\beta_3 \left(\frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right] \quad (\text{B.5a})$$

Si adoptamos la notación:

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad y \quad C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{B.5b})$$

la ecuación (B.5a) puede ser reescrita como:

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left[\frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right] \quad (\text{B.5c})$$

Si consideramos que:

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad y \quad C'_3 = \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}$$

la ecuación (B.5c) nos quedaría como:

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3 \quad (\text{B.6})$$

La ecuación (B.6) puede ser utilizada para eliminar ϕ_3 de (B.4c) y el procedimiento se repite hasta la última ecuación. Esto constituye la eliminación *hacia adelante*.

Para la sustitución *hacia atrás* usamos la forma general de la relación (B.6):

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C'_j \quad (\text{B.7a})$$

donde:

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (\text{B.7b})$$

$$C'_j = \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (\text{B.7c})$$

Para aplicar estas fórmulas en los nodos correspondientes a las fronteras ($j=1$ y $j=n+1$) se utilizarán los siguientes valores para A y C'

$$A_1 = 0 \quad y \quad C'_1 = \phi_1$$

$$A_{n+1} = 0 \quad y \quad C'_{n+1} = \phi_{n+1}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, es necesario primero acomodar las ecuaciones con la forma de la ecuación (B.2) e identificar α_j , β_j , D_j y C_j . Los valores de A_j y C'_j son calculados a continuación comenzando por $j = 2$ hasta $j = n$ usando las ecuaciones (B.7b) y (B.7c). Dado que los valores de ϕ son conocidos en la frontera ($n+1$) los valores de ϕ_j pueden ser obtenidos en orden inverso ($\phi_n, \phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2$) por medio de la ecuación (B.7a).

Recordemos que el método TDMA se aplica en sistemas tri-diagonales, los cuales surgen de los casos unidimensionales. En el caso bidimensional el sistema de ecuaciones genera una matriz penta-diagonal, por lo que en principio el TDMA no podría ser aplicado. Para poder emplearlo en estos casos, aplicaremos el TDMA a lo largo de una de las líneas de nodos del sistema, por ejemplo, la línea de Sur a Norte de la Figura B.1. Si consideramos la ecuación discretizada obtenida de la ecuación general de transporte bidimensional tenemos:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (\text{B.8})$$

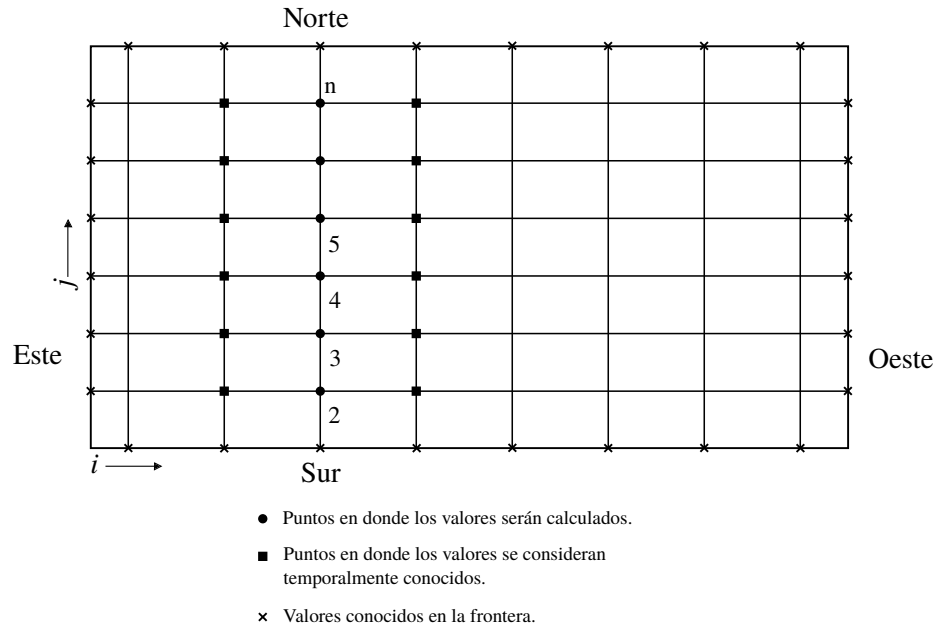


Figura B.1: Aplicación línea por línea del TDMA [50].

Acomodando la ecuación nos quedaría:

$$-a_S\phi_S + a_P\phi_P - a_N\phi_N = a_W\phi_W + a_E\phi_E + b \quad (\text{B.9})$$

Por el momento consideramos que conocemos el lado derecho de la ecuación (B.9). Empleando la nomenclatura utilizada anteriormente tenemos que, $\alpha_j = a_N$, $\beta_j = a_S$, $D_j = a_P$ y $C_j = a_W\phi_W + a_E\phi_E + b$. Con esto, ya es posible resolver a lo largo de la línea de Sur-Norte en los nodos $j=2$ hasta $j = n$ de la Figura B.1.

Al resolver para esta línea nos moveremos a la siguiente línea que vaya de Sur a Norte. Si nos movemos para el este, ya conoceremos los valores de ϕ_W del cálculo de la línea anterior. Por otro lado, el valor de ϕ_E sigue siendo desconocido, por lo que el proceso tiene que ser iterativo. El proceso de calcular línea por línea será repetido muchas veces a lo largo de las líneas de nodos hasta que la solución converga.

APÉNDICE C

COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS

En este apéndice se mostrarán los coeficientes obtenidos al discretizar las ecuaciones de gobierno mostradas en el capítulo 3 utilizando el método de los volúmenes finitos. Si recordamos, al discretizar la ecuación general de transporte obtuvimos la ecuación discretizada C.1 en donde los coeficientes a_P, a_E, a_W, a_N, a_S y b contenían los parámetros geométricos de los volúmenes de los nodos, los flujos difusivos, los flujos convectivos, coeficiente de difusión y el término fuente, por lo que para cada caso particular de las ecuaciones de gobierno los coeficientes tomarán diferentes parámetros.

Ecuación discretizada

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{C.1})$$

La ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S \quad (\text{C.2})$$

Al discretizar esta ecuación obtendremos los siguientes coeficientes:

$$a_E = D_e + || - F_e, 0 || \quad (\text{C.3a})$$

$$a_W = D_w + || F_w, 0 || \quad (\text{C.3b})$$

$$a_N = D_n + || - F_n, 0 || \quad (\text{C.3c})$$

$$a_S = D_s + || F_s, 0 || \quad (\text{C.3d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (\text{C.3e})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 u^0 + (p_P - p_E) \Delta y \quad (\text{C.3f})$$

$$a_P^0 = \frac{(\rho_E^0 + \rho_P^0) \Delta x \Delta y}{2 \Delta t} \quad (\text{C.3g})$$

$$S_C = 0 \quad (\text{C.3h})$$

Como se explicó en el capítulo 4, las ecuaciones de gobierno se resolverán de distinta manera dependiendo de si el nodo corresponde a la parte del aire o a escarcha. En este caso si el nodo pertenece a aire el término S_P será:

$$S_P = 0 \quad (\text{C.3i})$$

Si es escarcha se realizará un bloqueo con el término fuente, de forma que la velocidad de los nodos pertenecientes a la escarcha siempre tengan velocidad nula:

$$S_P = -10^{30} \quad (\text{C.3j})$$

$$F_e = \frac{\rho_e (u_E + u_P) \Delta y}{2} \quad (\text{C.4a})$$

$$F_w = \frac{\rho_w (u_P + u_W) \Delta y}{2} \quad (\text{C.4b})$$

$$F_n = \frac{\rho_n (v_N + v_P) \Delta x}{2} \quad (\text{C.4c})$$

$$F_s = \frac{\rho_s(v_S + v_{SE})\Delta x}{2} \quad (\text{C.4d})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{C.5a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{C.5b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{C.5c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{C.5d})$$

$$\Gamma = \mu \quad (\text{C.6})$$

La ecuación de la conservación de la energía es:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \quad (\text{C.7})$$

Al discretizarla nos resultarán los siguientes coeficientes:

$$a_E = D_e + || - F_e, 0 || \quad (\text{C.8a})$$

$$a_W = D_w + || F_w, 0 || \quad (\text{C.8b})$$

$$a_N = D_n + || - F_n, 0 || \quad (\text{C.8c})$$

$$a_S = D_s + || F_s, 0 || \quad (\text{C.8d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y + F_e - F_w + F_n - F_s \quad (\text{C.8e})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 T^0 \quad (\text{C.8f})$$

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{C.8g})$$

$$S_P = 0 \quad (\text{C.8h})$$

En el caso de que los nodos pertenezcan al aire, no se tendrá ninguna fuente de energía por lo que:

$$S_C = 0 \quad (\text{C.8i})$$

Para el lado de la escarcha tendremos una fuente de energía debido al cambio de fase:

$$S_C = \frac{q_{sub}(\rho_P - \rho_P^0)}{c_p} \quad (\text{C.8j})$$

Recordemos que el campo de velocidad es cero dentro de la escarcha, por lo que los términos convectivos en la ecuación de la energía desaparecen.

$$F_e = \rho_e u_P \Delta y \quad (\text{C.9a})$$

$$F_w = \rho_w u_W \Delta y \quad (\text{C.9b})$$

$$F_n = \rho_n v_P \Delta x \quad (\text{C.9c})$$

$$F_s = \rho_s v_S \Delta x \quad (\text{C.9d})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{C.10a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{C.10b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{C.10c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{C.10d})$$

$$\Gamma = \frac{\lambda}{c_p} \quad (\text{C.11})$$

La ecuación de conservación de especies es:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \cdot w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot w)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{C.12})$$

Y al discretizarla nos dará los siguientes coeficientes:

$$a_E = D_e + || - F_e, 0 || \quad (\text{C.13a})$$

$$a_W = D_w + || F_w, 0 || \quad (\text{C.13b})$$

$$a_N = D_n + || - F_n, 0 || \quad (\text{C.13c})$$

$$a_S = D_s + || F_s, 0 || \quad (\text{C.13d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y + F_e - F_w + F_n - F_s \quad (\text{C.13e})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 w_P^0 \quad (\text{C.13f})$$

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{C.13g})$$

Nuevamente, en el caso de que los nodos pertenezcan al aire no existirá el término fuente:

$$S_C = 0 \quad (\text{C.13h})$$

$$S_P = 0 \quad (\text{C.13i})$$

En caso contrario, es necesario asignar el valor de la humedad de saturación a la temperatura local, tal como se detalló en el capítulo 4 por lo que los términos fuente tomarán los siguientes valores:

$$S_C = 10^{30} w_{sat}(T) \quad (\text{C.13j})$$

$$S_P = -10^{30} \quad (\text{C.13k})$$

donde $w_{sat}(T)$ se obtiene del polinomio de cuarto orden 4.56 o 4.57, dependiendo de la temperatura que tengamos dentro de la escarcha. En esta ecuación, los términos

convectivos también desaparecen en el lado de la escarcha debido a que el campo de velocidades es nulo.

$$F_e = \rho_e u_P \Delta y \quad (\text{C.14a})$$

$$F_w = \rho_w u_W \Delta y \quad (\text{C.14b})$$

$$F_n = \rho_n v_P \Delta x \quad (\text{C.14c})$$

$$F_s = \rho_s v_S \Delta x \quad (\text{C.14d})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{C.15a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{C.15b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{C.15c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{C.15d})$$

APÉNDICE D

MEDICIONES EN LOS EXPERIMENTOS

En este Apéndice se muestra la variación de las propiedades involucradas en las pruebas experimentales, para los tres casos mostrados anteriormente en la tabla 5.1. La temperatura y la humedad relativa del aire fueron controladas por medio de un programa desarrollado en LabVIEW 2014 y con un NI CompactRIO-9024. La temperatura de la superficie de la placa no era controlada, solamente fue monitoreada por medio de tres termopares tipo T colocados sobre la superficie a 3, 6 y 9 pulgadas; el valor reportado es el promedio de los valores de los tres termopares. La velocidad del aire tampoco fue controlada, pero fue caracterizada dentro del túnel de viento en pruebas preliminares, utilizando diferentes frecuencias del motor del ventilador, y teniendo una variación de ± 0.05 m/s. Para obtener la incertidumbre de las mediciones, primero se obtuvo la desviación estándar de las mediciones mediante:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (\text{C.1})$$

donde σ es la desviación estándar, x_i es el valor medido, \bar{x} es la media aritmética de los valores medidos, y n es el total de los valores medidos. Las medidas mostradas en las Figuras de este Apéndice, corresponden al valor medio y la incertidumbre:

$$x = \bar{x} \pm \sigma \quad (\text{C.2})$$

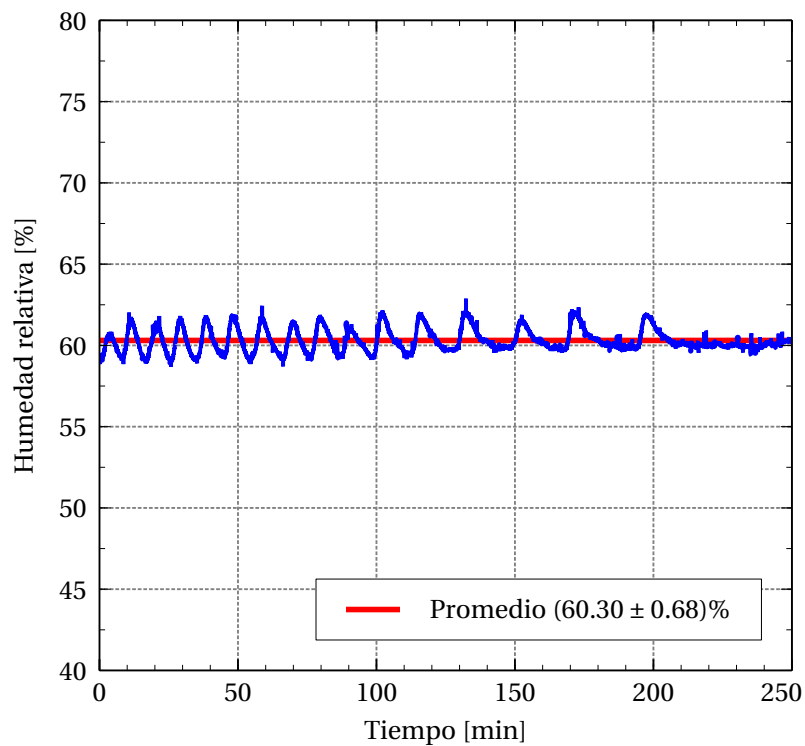


Figura D.1: Humedad relativa - Caso 01

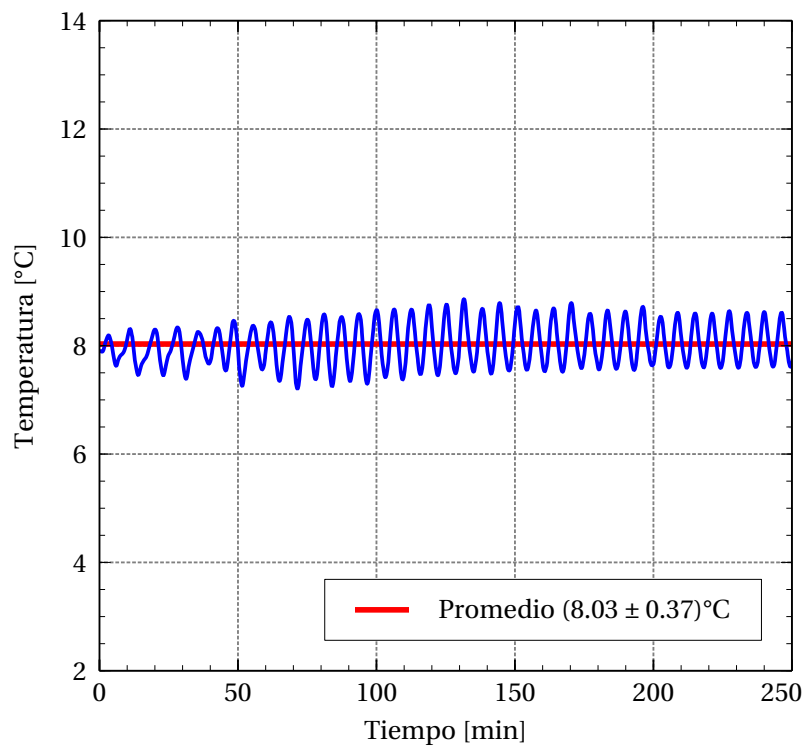


Figura D.2: Temperatura del aire - Caso 01

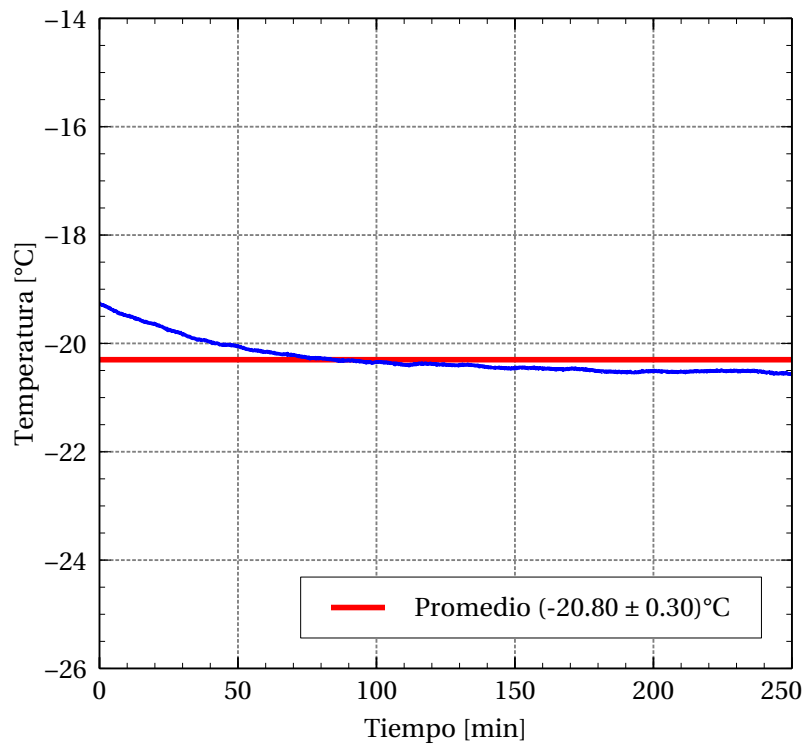


Figura D.3: Temperatura de la placa - Caso 01

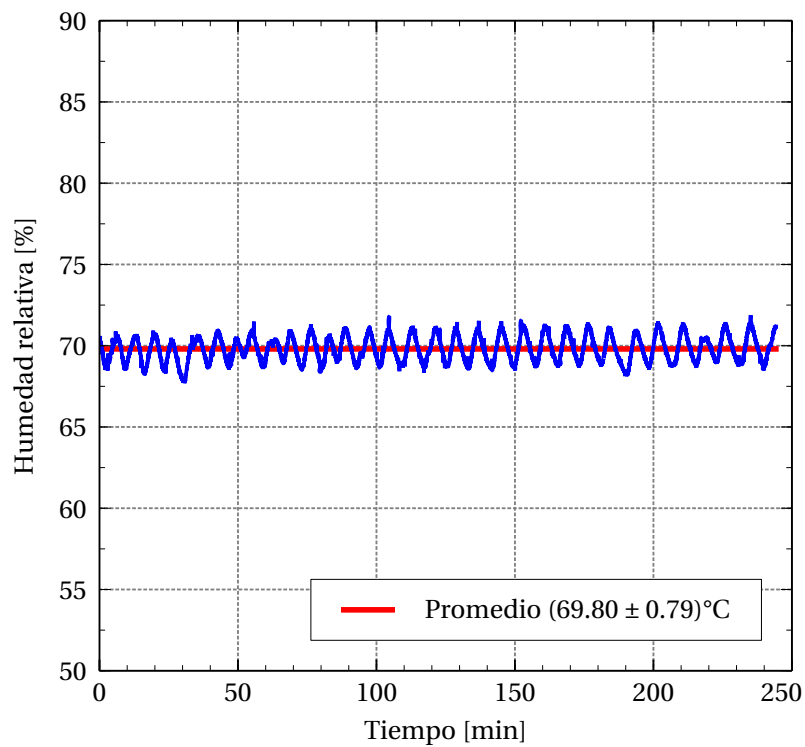


Figura D.4: Humedad relativa - Caso 02

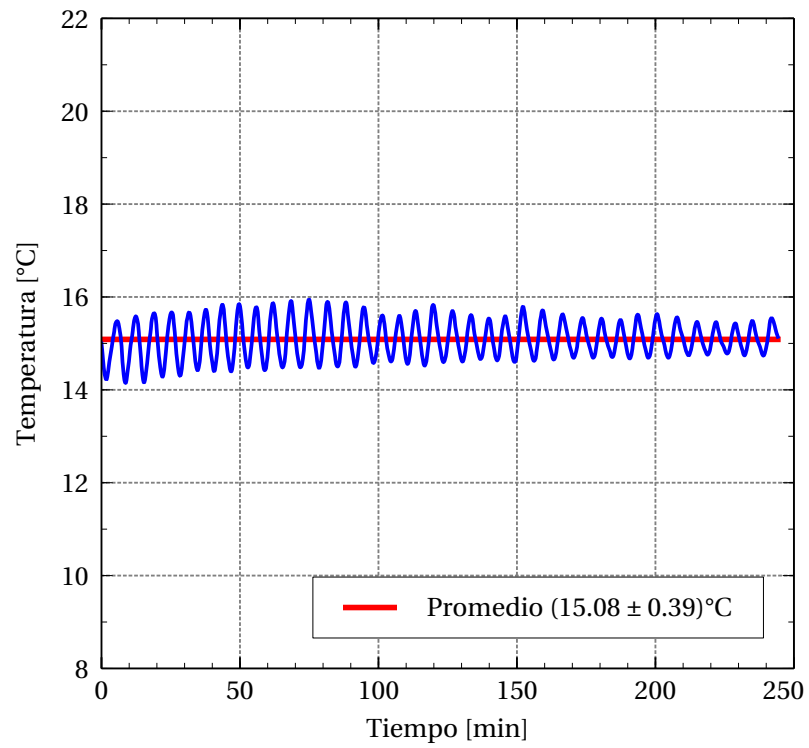


Figura D.5: Temperatura del aire - Caso 02

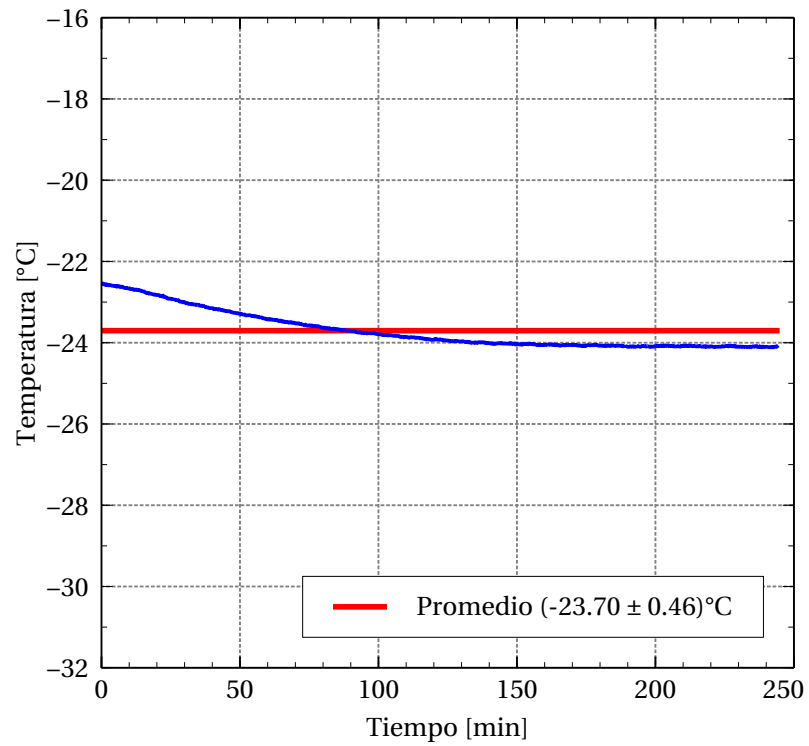


Figura D.6: Temperatura de la placa - Caso 02

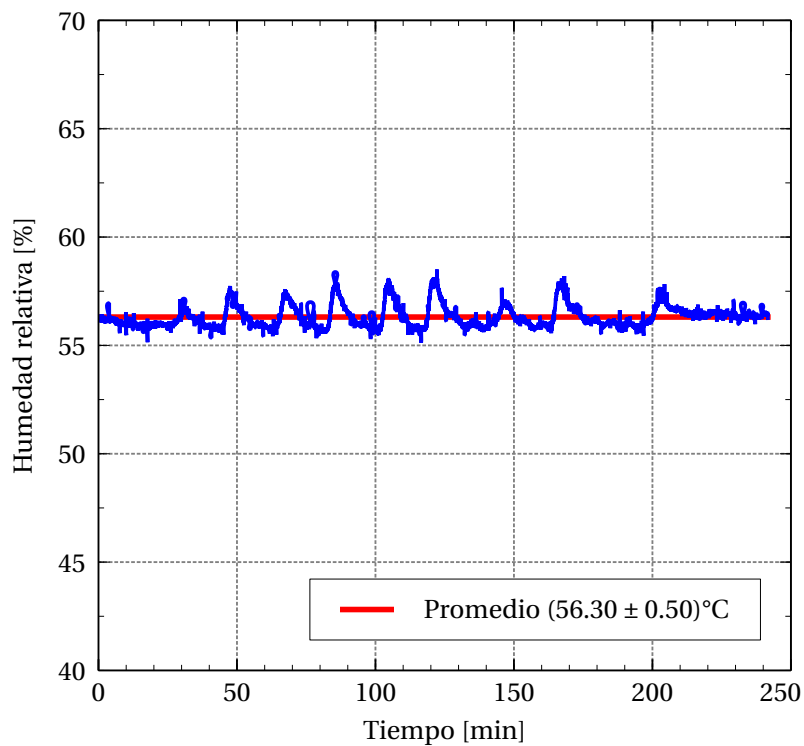


Figura D.7: Humedad relativa - Caso 03

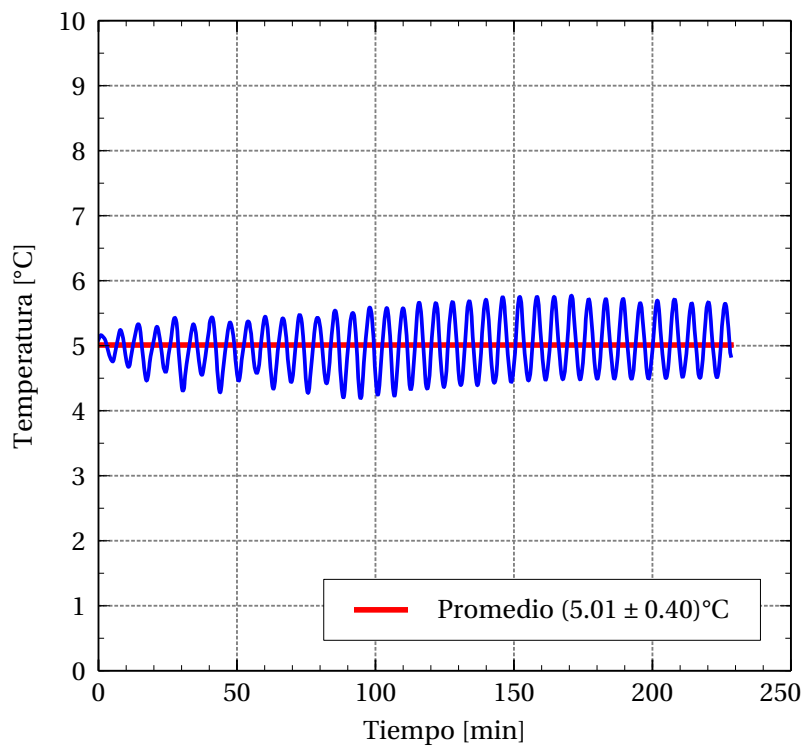


Figura D.8: Temperatura del aire - Caso 03

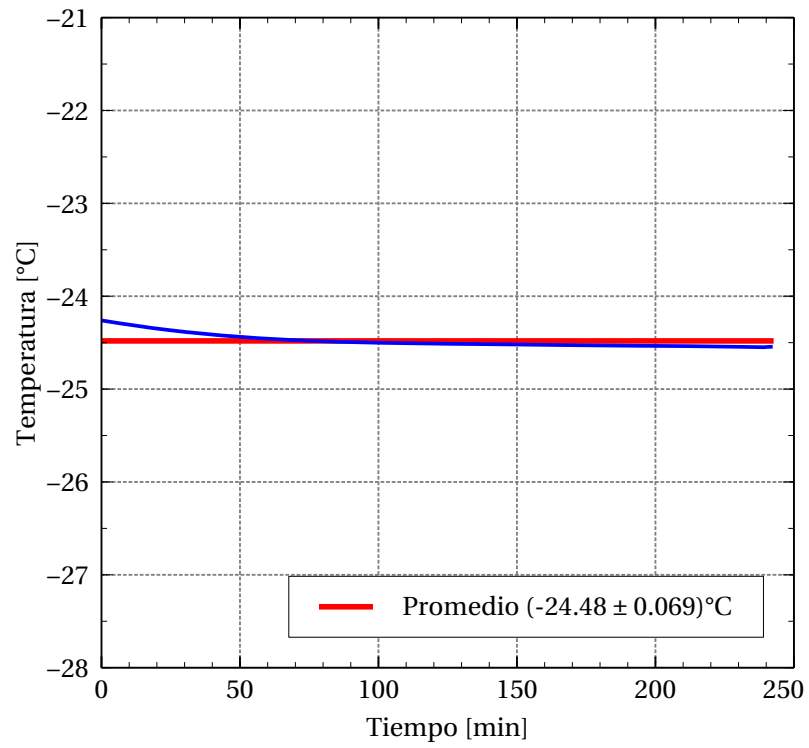


Figura D.9: Temperatura de la placa - Caso 03

BIBLIOGRAFÍA

- [1] SENER. Secretaría de Energía. <http://www.gob.mx/sener>, 2016.
- [2] SIE. Sistema de Información Energética. <http://sie.energia.gob.mx>, 2016.
- [3] CONUEE. Comisión Nacional para el Uso Eficiente de la Energía. <https://www.gob.mx/conuee>, 2016.
- [4] Donghee Kim, Chiwon Kim, and Kwan-Soo Lee. Frosting model for predicting macroscopic and local frost behaviors on a cold plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 82:135 – 142, 2015.
- [5] Xiaomin Wu, Qiang Ma, Fuqiang Chu, and Shan Hu. Phase change mass transfer model for frost growth and densification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 96:11 – 19, 2016.
- [6] Max Kandula. Frost growth and densification in laminar flow over flat surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(15–16):3719 – 3731, 2011.
- [7] Kristian Lenic, Anica Trp, and Bernard Frankovic. Transient two-dimensional model of frost formation on a fin-and-tube heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(1 - 2):22 – 32, 2009.
- [8] J.M. Armengol, C.T. Salinas, J. Xamán, and K.A.R. Ismail. Modeling of frost formation over parallel cold plates considering a two-dimensional growth rate. *International Journal of Thermal Sciences*, 104:245 – 256, 2016.

-
- [9] J. Cui, W.Z. Li, Y. Liu, and Z.Y. Jiang. A new time- and space-dependent model for predicting frost formation. *Applied Thermal Engineering*, 31(4):447 – 457, 2011.
- [10] W. Wang, Q.C. Guo, W.P. Lu, Y.C. Feng, and W. Na. A generalized simple model for predicting frost growth on cold flat plate. *International Journal of Refrigeration*, 35(2):475 – 486, 2012.
- [11] Mohammad Amini, Ahmad R. Pishevar, and Mahmood Yaghoubi. Experimental study of frost formation on a fin-and-tube heat exchanger by natural convection. *International Journal of Refrigeration*, 46:37 – 49, 2014.
- [12] Sang Hun Lee, Mooyeon Lee, Won Jae Yoon, and Yongchan Kim. Frost growth characteristics of spirally-coiled circular fin-tube heat exchangers under frosting conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 64:1 – 9, 2013.
- [13] Yongping Chen, Pengfei Lu, Chaoqun Shen, and Qian Zhang. Experimental study on frost formation on a cold surface in low atmospheric pressure. *Applied Thermal Engineering*, 90:86 – 93, 2015.
- [14] Xiaomin Wu, Shan Hu, and Fuqiang Chu. Experimental study of frost formation on cold surfaces with various fin layouts. *Applied Thermal Engineering*, 95:95 – 105, 2016.
- [15] Valter S. Nascimento Jr., Felipe R. Loyola, and Christian J.L. Hermes. A study of frost build-up on parallel plate channels. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 60:328 – 336, 2015.
- [16] Y. Barzanoni, H. Basirat Tabrizi, O. Noorshams, and H. Eftekhari. Correlation for frost properties on a cold cylinder surface in cross flow. *Heat and Mass Transfer*, 48(8):1477–1484, 2012.
- [17] K.A.R Ismail, C Salinas, and M.M Gonçalves. Frost growth around a cylinder in a wet air stream. *International Journal of Refrigeration*, 20(2):106 – 119, 1997.

-
- [18] Peng Liu, Mohammad Rafati Nasr, Gaoming Ge, Maria Justo Alonso, Hans Martin Mathisen, Farhad Fathieh, and Carey Simonson. A theoretical model to predict frosting limits in cross-flow air-to-air flat plate heat/energy exchangers. *Energy and Buildings*, 110:404 – 414, 2016.
- [19] Jieun Hwang and Keumnam Cho. Numerical prediction of frost properties and performance of fin–tube heat exchanger with plain fin under frosting. *International Journal of Refrigeration*, 46:59 – 68, 2014.
- [20] Sergey Anisimov, Andrzej Jedlikowski, and Demis Pandelidis. Frost formation in the cross-flow plate heat exchanger for energy recovery. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 90:201 – 217, 2015.
- [21] Huee-Youl Ye, Jin-Seong Park, and Kwan-Soo Lee. Critical operating conditions for prevention of frost formation in fin-tube heat exchangers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 76:279 – 285, 2014.
- [22] Dong-Keun Yang, Kwan-Soo Lee, and Dong-Jin Cha. Frost formation on a cold surface under turbulent flow. *International Journal of Refrigeration*, 29(2):164 – 169, 2006.
- [23] Yang Yao, Yiqiang Jiang, Shiming Deng, and Zuiliang Ma. A study on the performance of the airside heat exchanger under frosting in an air source heat pump water heater/chiller unit. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(17–18):3745 – 3756, 2004.
- [24] Byeongchul Na and Ralph L. Webb. New model for frost growth rate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(5):925 – 936, 2004.
- [25] BW Jones and JD Parker. Frost formation with varying environmental parameters. *Journal of Heat Transfer*, 97(2):255–259, 1975.
- [26] Byeongchul Na and Ralph L. Webb. Mass transfer on and within a frost layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(5):899 – 911, 2004.

- [27] Kwan-Soo Lee, Woo-Seung Kim, and Tae-Hee Lee. A one-dimensional model for frost formation on a cold flat surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(18):4359 – 4365, 1997.
- [28] Kwan-Soo Lee, Sung Jhee, and Dong-Keun Yang. Prediction of the frost formation on a cold flat surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(20):3789 – 3796, 2003.
- [29] Dong-Keun Yang and Kwan-Soo Lee. Modeling of frosting behavior on a cold plate. *International Journal of Refrigeration*, 28(3):396 – 402, 2005.
- [30] Kristian Lenic, Anica Trp, and Bernard Frankovic. Prediction of an effective cooling output of the fin-and-tube heat exchanger under frosting conditions. *Applied Thermal Engineering*, 29(11 - 12):2534 – 2543, 2009.
- [31] J. Cui, W.Z. Li, Y. Liu, and Y.S. Zhao. A new model for predicting performance of fin-and-tube heat exchanger under frost condition. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 32(1):249 – 260, 2011.
- [32] Dawei Zhuang, Guoliang Ding, Haitao Hu, Hirokazu Fujino, and Satoshi Inoue. Condensing droplet behaviors on fin surface under dehumidifying condition: Part i: Numerical model. *Applied Thermal Engineering*, pages–, 2015.
- [33] Jeong-Tae Kwon, Hyo Jae Lim, Young-Chul Kwon, Shigeru Koyama, Dong-Hwi Kim, and Chieko Kondou. An experimental study on frosting of laminar air flow on a cold surface with local cooling. *International Journal of Refrigeration*, 29(5):754 – 760, 2006.
- [34] Christian J.L. Hermes, Robson O. Piucco, Jader R. Barbosa Jr., and Cláudio Melo. A study of frost growth and densification on flat surfaces. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 33(2):371 – 379, 2009.
- [35] Y Hayashi, A Aoki, S Adachi, and K Hori. Study of frost properties correlating with frost formation types. *Journal of heat transfer*, 99(2):239 – 245, 1977.

-
- [36] Frank M White et al. Fluid mechanics, 2003.
- [37] Kay Gemba. Measurement of boundary layer on a flat plate. 2007.
- [38] P.T. Tsilingiris. Thermophysical and transport properties of humid air at temperature range between 0 and 100 c. *Energy Conversion and Management*, 49(5):1098 – 1110, 2008.
- [39] Theodore L Bergman, Frank P Incropera, David P DeWitt, and Adrienne S Lavine. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [40] Y.B. Lee and S.T. Ro. Analysis of the frost growth on a flat plate by simple models of saturation and supersaturation. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 29(6):685 – 696, 2005.
- [41] Florent Brèque and Maroun Nemer. Frosting modeling on a cold flat plate: Comparison of the different assumptions and impacts on frost growth predictions. *International Journal of Refrigeration*, 69:340 – 360, 2016.
- [42] R. Le Gall, J.M. Grillot, and C. Jallut. Modelling of frost growth and densification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(13):3177 – 3187, 1997.
- [43] Frank M White and Isla Corfield. *Viscous fluid flow*, volume 3. McGraw-Hill New York, 2006.
- [44] I.G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids, Fourth Edition*. Civil and mechanical engineering. Taylor & Francis, 2012.
- [45] Suhas Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press, 1980.
- [46] Refrigerating American Society of Heating, Air-Conditioning Engineers, and Ashrae. *2013 ASHRAE Handbook: Fundamentals*. ASHRAE Handbook Fundamentals Systems-International Metric System. ASHRAE, 2013.

-
- [47] Jung-Soo Kim, Kwan-Soo Lee, and Se-Jin Yook. Frost behavior on a fin considering the heat conduction of heat exchanger fins. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(11–12):2581 – 2588, 2009.
- [48] Amne El Cheikh and Anthony Jacobi. A mathematical model for frost growth and densification on flat surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 77:604 – 611, 2014.
- [49] Richard H Pletcher, John C Tannehill, and Dale Anderson. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC Press, 2012.
- [50] Henk Kaarle Versteeg and Weeratunge Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education, 2007.