

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



TESIS

**SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS VÍA ELIMINACIÓN
DE ENLACES**

POR

M.C. ELIEZER GARZA GONZÁLEZ

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR
EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DICIEMBRE, 2015

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS VÍA ELIMINACIÓN
DE ENLACES**

POR

M.C. ELIEZER GARZA GONZÁLEZ

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR
EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

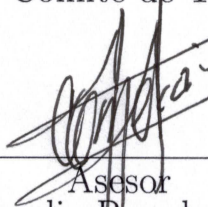
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN,

DICIEMBRE 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis
“**SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS VIA ELIMINACIÓN
DE ENLACES**” realizada por el alumno **M.C. Eliezer Garza González**,
matrícula 1143335 sea aceptada por su defensa como opción al grado de
Doctor en Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis

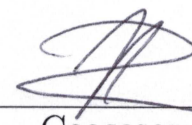


Asesor
Dr. Cornelio Posadas Castillo



Coasesor:

Dr. David A. Díaz Romero



Coasesor:

Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán

Coasesor:

Dr. César Cruz Hernández

Coasesor:

Dr. Juan A. Almendral Sánchez



Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirección de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Diciembre del 2015

Este trabajo se lo dedico a mi papá; porque sin él, la cadena de eventos que me trajo aquí, nunca hubieran ocurrido. Dónde quiera que estés, gracias.

Agradecimientos

En lo personal, la realización de esta tesis me ha costado sangre, sudor y lágrimas, literalmente. Hasta ahora, es el reto más grande que me he propuesto a terminar. Esta investigación ha visto lo mejor y lo peor de mi, logros y fracasos, momentos de absoluta motivación y momentos de sinsabores con un ligero tinte gris. Es en este lapso en el que perdí a mi padre, quien de no haberme dado un pequeño empujón en esta dirección, tal vez jamás hubiera logrado comenzar el doctorado. Esta investigación, la cual de ahora en adelante la considero como una colosal hazaña de resistencia a la frustración y el fracaso, no pudo haber sido hecha sin ciertas personas. Personas a las cuales agradezco por su apoyo, cariño, sabiduría, aguante, e incluso poca fe. En realidad no hay suficiente espacio para mencionarlos a todos, pero si quisiera agradecer el valioso apoyo de:

El Dr. Cornelio Posadas Castillo, por haber confiado en mi desde la maestría y por haberme dado consejos tanto académicos, como personales. Gracias por el tiempo invertido en mi, y gracias sobretodo por su paciencia.

El Dr. Juan Almendral Sánchez, de quien he recibido no sólo apoyo, si no toda su sabiduría. Gracias, por tu amistad y que se sepa que tu visión me sirvió mucho cuando estaba completamente perdido.

A Javier, Inma, Irene, Pepe, David y Aleksander del Centro de Tecnología Biomédica en Madrid; por haberme aceptado con brazos abiertos y dado su amistad. Aleksander, tú y tu familia que tanto aman a México; por haberme hecho sentir como en casa. A Ricardo, Adrián, Daniel, Mariano y Johann, por su gran amistad, y sin los cuales me hubiera vuelto loco.

A mis compañeros Melany, Allan y Otoniel, a quienes conocí mejor cuando regresé de mi estancia y ahora aprecio mucho por haber hecho este último año más ameno.

A mis compañeros del departamento de control, por su amistad, apoyo, palabras de aliento y por permitirme hacer uso de sus instalaciones para terminar este trabajo.

A mi papá Eliezer, por haberme impulsado a dar lo mejor de mí. Papá, dónde quiera que estés, gracias por todos esos momentos que me hiciste pasar, y con los cuales me he convertido en el hombre que soy.

A mi mamá Irene. Gracias por siempre confiar en mi, por tus palabras de aliento, tu amable sonrisa, y tu inconfundible amor. Gracias por haberme hecho más humano con tu ejemplo, y

gracias por ser como eres.

A mi hermana Lucy. Tú me haz visto en mis mejores y en mis peores. Gracias por aguantarme, comprenderme, y por hacerme ver que no hay que tenerle miedo a nada. Te admiro como no tienes idea, gracias por inspirarme a ser mejor cada día.

La UANL y del Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por las facilidades brindadas y por la beca otorgada para mi sostenimiento económico durante la realización de este proyecto.

Quisiera dedicar estas últimas líneas para esta cita; resume no sólo mi trabajo profesional, sino la gran búsqueda a la que todos nos enfrentamos:

“... Todos estamos conectados. Unidos por un hilo invisible, infinito en su potencial y frágil en su diseño. Y aun mientras estamos conectados, también somos meros individuos. Recipientes vacíos para ser llenados con infinitas posibilidades. Un surtido de pensamientos, creencias. Una colección de recuerdos y experiencias inconexas.

¿Puedo yo, ser yo sin esto? ¿Puedes tú, ser tú? Y si este hilo invisible que nos mantiene a todos juntos se cortara, cesara, ¿entonces qué? ¿Qué sería de miles de millones de almas solitarias y desconectadas? Ahí radica la gran búsqueda de nuestras vidas. A encontrarnos. A conectarnos. A aferrarnos. Para cuando nuestros corazones estén puros, y nuestros pensamientos en línea, todos seamos verdaderamente uno. Capaces de reparar nuestro frágil mundo, y de crear un universo de infinitas posibilidades”.

Un hilo invisible - Tim Kring

Índice general

Índice general	vi
Índice de tablas	viii
Índice de figuras	ix
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Hipótesis	4
1.3 Objetivos	4
1.4 Metodología	5
1.5 Estructura de Tesis	5
2 Caos y sincronización	7
2.1 Caos	7
2.2 Sincronización	11
2.3 Conclusiones	13
3 Redes	14
3.1 Antecedentes históricos	14
3.2 Acoplamiento, matrices, y clasificación de redes	15
3.3 Propiedades importantes de las redes	18
3.3.1 Grado promedio y distribución del grado	18
3.3.2 Coeficiente de agrupamiento	18
3.3.3 Asortatividad	19

3.3.4	Intermediación	20
3.4	Modelos de redes	20
3.4.1	Redes de mundo pequeño	20
3.4.2	Redes de escala libre	22
3.5	Conclusiones	24
4	Función Maestra de Estabilidad	25
4.1	La función maestra de estabilidad	26
4.2	Sincronizabilidad	29
4.3	Conclusiones	30
5	Teoría de perturbación	31
5.1	Conclusiones	34
6	Métodos utilizados	36
6.1	Métodos con teoría de perturbación	37
6.2	Métodos de eliminación directa	38
6.3	Método de ataque al oscilador con el grado más alto (usando asortatividad)	39
6.4	Métodos con asortatividad	40
6.5	Método con intermediación	41
6.6	Método aleatorio	41
7	Resultados	43
8	Conclusiones	52
8.1	Trabajo Futuro	55
9	Contribuciones	57
9.1	Principales contribuciones de este trabajo doctoral	57
9.2	Productos derivados de este trabajo doctoral	58
	Bibliografía	60

Índice de tablas

2.1	Tabla de osciladores caóticos. Con los parámetros mostrados en cada oscilador, se muestra un comportamiento caótico.	10
7.1	Se muestra el cambio en el valor propio λ_N y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al eliminar enlaces usando todos los algoritmos, en redes de mundo pequeño de grado promedio 4, 8, y 12. Si el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} \geq 0.0373256$ (4.11) la red es sincronizable, y está marcado por una línea roja horizontal.	46
7.2	Se muestra el cambio en el valor propio λ_N y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al eliminar enlaces usando todos los algoritmos, en redes de escala libre de grado promedio 4, 8, y 12. Si el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} \geq 0.0373256$ (4.11) la red es sincronizable, y está marcado por una línea roja horizontal.	47
7.3	La tabla muestra el cambio en el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al eliminar todos los enlaces usando los algoritmos, en una red de escala libre, y de grado promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12. Si el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} \geq 0.0373256$ (4.11) la red es sincronizable, y está marcado por una línea roja horizontal. Se observa como sólo las redes de libre escala de $\langle k \rangle = 8$ y 12 adquieren la capacidad de sincronía usando los algoritmos AR , ARe y AD . Los algoritmos SD y SDe no pudieron realizarse debido al tiempo de cómputo requerido.	48
7.4	Muestra el cambio absoluto promediado en los valores propios λ_N y λ_2 producidos por los diferentes algoritmos. El promedio es el cambio en 100 diferentes redes y promediado a partir de 35 enlaces removidos en el modelo de mundo pequeño y a partir de 30 enlaces removidos en el modelo de escala libre.	49

Índice de figuras

1.1	A la izquierda, imagen del videojuego “Democracy 3” el cual es un simulador gubernamental y revela cómo afectan las decisiones políticas de un presidente a un país. A la derecha, imagen del videojuego “Plague Inc.” el cual es un juego de estrategia y simulación. Éste usa modelos epidémicos reales para simular la propagación de una plaga. Aquí la plaga es el jugador, y la meta es acabar con la humanidad.	2
1.2	A la izquierda, representación gráfica de una red de mundo pequeño formada por las interacciones entre las diferentes funciones de un cerebro sano. A la derecha, la representación gráfica de una red de escala libre formada por la interacción financiera entre países. A mayor tamaño el círculo, mayor producto interno bruto. A mayor tamaño el enlace, mayor inversión económica entre países. . . .	5
2.1	A la izquierda, Edward Norton Lorenz (1917-2008). A la derecha, el oscilador caótico de Lorenz.	8
2.2	Gráfica comparativa de la divergencia exponencial presente en el primer estado $x_{i,1}$ de dos osciladores caóticos de Lorenz $i = 1, 2$ a condiciones iniciales similares pero diferentes $x_1(0) = (1, 0, 0)$ y $x_2(0) = (1.1, 0, 0)$	9
2.3	A la izquierda, fragmento del retrato de Christiaan Huygens (1629-1695) por el autor G. Edelinck (1685). A la derecha, una recreación del experimento de los dos relojes de péndulo de Huygens, recreada por Czolczynski et al. en 2011 [59].	12

3.1	A la izquierda, fragmento del retrato de Leonhard Euler (1707-1783) por el autor Jakob Emanuel Handmann (1756). En el centro, mapa de Königsberg en 1736 acentuando el río Pregel en azul y los puentes en verde. A la derecha, el grafo derivado de la solución al problema de los siete puentes, superpuesto sobre las notas de Euler.	15
3.2	a) El acoplamiento unidireccional permite transferir energía (representado por una flecha) del oscilador 1 al oscilador 2, pero no permite transferencia del oscilador 2 al oscilador 1. b) El acoplamiento bidireccional permite la transferencia de energía del oscilador 1 al oscilador 2 y viceversa.	16
3.3	Representación gráfica de los diferentes tipos de redes: a) Red no direccionada, b) Red direccionada, y c) Red pesada o con pesos en los acoplamientos.	16
3.4	Representación en matriz de adyacencia \mathbf{A} , matriz de grado \mathbf{D} y matriz Laplaciana \mathbf{L} de una red no direccionada de cuatro osciladores.	18
3.5	Representación gráfica del algoritmo para generar redes de mundo pequeño. Se comienza con una red regular como a), donde la probabilidad de reconectar un enlace es cero, $p = 0$. Se aumenta la probabilidad de que los enlaces se reconecten a osciladores diferentes, es entonces donde las propiedades de las redes de mundo pequeño aparecen, como en b). Si la probabilidad de reconexión es de $p = 1$, todos los enlaces son reconectados de manera aleatoria, y a la red resultante se le conoce como red aleatoria c).	21
3.6	Representación gráfica de una red $N = 30$ de escala libre producida con el modelo BA.	23
4.1	Gráficas ilustrativas de los posibles casos de la función maestra de estabilidad de una red de osciladores caóticos. El caso 1 (verde), $\Lambda(\alpha)$ es monótonamente creciente. El caso 2 (rojo), $\Lambda(\alpha)$ es monótonamente decreciente. El caso 3 (azul), $\Lambda(\alpha)$ consta de un rango acotado de valores negativos.	28
7.1	El error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) de la sincronía de la red dinámica decrece por cada 5 enlaces eliminados usando el algoritmo AR . La red fue creada usando 300 osciladores caóticos de Rössler con una topología de mundo pequeño con grado promedio $\langle k \rangle = 4$	50

- 7.2 El error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) de una red de osciladores caóticos de Rössler de $N = 300$ y $\langle k \rangle = 4$. Se observa como el $\langle e \rangle$ disminuye su valor con los primeros 50 enlaces eliminados en la red usando el algoritmo **AR**. 50
- 7.3 Gráfico del error medio de sincronización $\langle e \rangle$ contra el porcentaje de enlaces eliminados en redes de modelo WS de 300 osciladores caóticos de Rössler con grados promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 , al ser sometidos al algoritmo **AR**. Se observa cómo las redes $\langle k \rangle = 4$ (azul) puede disminuir el valor de $\langle e \rangle$, pero sólo se pueden eliminar hasta un 15% de enlaces. Al eliminarse más enlaces, $\langle e \rangle$ se incrementa. Las redes $\langle k \rangle = 8$ (verde) y $\langle k \rangle = 12$ (rojo) pueden eliminar hasta un 50% y un 65%, respectivamente, antes de que $\langle e \rangle$ se incremente. 51

Capítulo 1

Introducción

Por primera vez en la historia, la raza humana ha logrado intercambiar recursos, comunicado ideas, conocimiento y opiniones a una velocidad insospechada. Antes, para comunicar una idea a otra persona en otra ciudad, sólo había un puñado de opciones. Ahora, cualquiera tiene la capacidad de enviar un “tuit” desde cualquier lugar, y hacer que miles, incluso millones lo lean. De hecho, las más recientes aplicaciones, como Periscope, permiten transmitir video en vivo desde el celular. La velocidad a la que se transfiere información, ideas y opiniones, es abismal; y cualquiera que haya visto las conferencias de Tom Scott, sabe a qué me refiero. En palabras de Tom Scott: “En algún momento un acontecimiento va a ocurrir, y miles de personas creerán que estuvieron ahí (por medio de la aplicación Periscope)... Pronto, la pregunta ya no será, ¿dónde estuviste cuando X ocurrió?, sino ¿lo estabas viendo cuando sucedió?” [1]. Ya sea por contactos celular, amigos en Facebook, seguidores en Twitter, o «inserte su red social favorita aquí»; ahora todos estamos conectados de alguna manera u otra. Éste es el poder de las redes.

Las redes están en todos lados y quizás son parte íntegra del cómo está constituido el universo. Las redes pueden ser entidades abstractas como una red de amigos y colaboradores; así como también pueden ser objetos tangibles como el internet, la red eléctrica y la red formada por nuestras neuronas. Incluso videojuegos como “Democracy 3” y “Plague Inc.” hacen uso de

lo aprendido en redes complejas, ver Figura 1.1



Figura 1.1: A la izquierda, imagen del videojuego “Democracy 3” el cual es un simulador gubernamental y revela cómo afectan las decisiones políticas de un presidente a un país. A la derecha, imagen del videojuego “Plague Inc.” el cual es un juego de estrategia y simulación. Éste usa modelos epidémicos reales para simular la propagación de una plaga. Aquí la plaga es el jugador, y la meta es acabar con la humanidad.

La ciencia de las redes complejas, se ha dedicado a estudiar el comportamiento emergente de individuos al estar conexos entre sí. Tan importante es este tema, que la revista Science dedicó la edición 5411 [2] al estudio de estos sistemas; tocando disciplinas como matemáticas [3], en criptografía [4,5], química [6–8], biología [9–13], geografía [14], clima [15,16] y economía [17–19]. Otros artículos de interés en redes se pueden encontrar en Nature bajo la autoría de Steven Strogatz [20], o de mayor especialización en Physics Reports por Stefano Boccaletti et al. [21].

1.1 Planteamiento del problema

El presente trabajo se centra en la sincronización de osciladores caóticos acoplados en red. Este proceso dinámico se ha observado en sistemas naturales y en aplicaciones tecnológicas [22–26]. Algunas aplicaciones son las redes compuestas por múltiples robots autónomos, efectuando tareas cooperativas [27], o redes de láseres, que al estar en sincronía pueden producir mayor potencia [28]. Por las diversas aplicaciones, existe un interés en sincronizar una red de osciladores y en tratar de entender la relación entre las propiedades estructurales de las redes y

su comportamiento.

Diferentes tipos de estrategias, en torno a la sincronización de redes de osciladores, se han desarrollado a lo largo de los años. Muchas de las cuales funcionan aplicando un control directamente en los osciladores, como control no lineal [29], control discontinuo [30], o control pinning [31]. Este tipo de estrategias alteran la dinámica de cada oscilador para llegar a un estado de sincronía. Esto en muchos casos, porque la estructura de la red no permite una fácil sincronización de los sistemas. Además en muchas ocasiones, la implementación física de estos sistemas de control a una fracción (o todos) los osciladores, pueden representar muchos recursos económicos.

Se ha observado que la estructura de una red, también llamada topología, afecta algunos procesos dinámicos como la sincronía en redes de osciladores caóticos [21, 32–34]. Usando este principio, se han creado estrategias para que una red llegue a la sincronía. Algunas estrategias, logran llegar a una red sincronizada cambiando sólo los acoplamientos de la red entre los osciladores [35, 36], sin cambiar la cantidad de enlaces u osciladores en la red. Por otra parte, otras estrategias se centran en añadir o eliminar enlaces u osciladores [37–40] de una red. Al añadir enlaces, aumenta la conectividad entre osciladores, aumentando la transferencia de energía y mejorando la capacidad de la red a sincronizar [21, 41]. La ventaja en estos casos, es que la topología nueva permite la sincronización de la red, evitando así el uso de algún control en los osciladores.

La implementación física para sincronizar una red añadiendo enlaces u osciladores, podría significar una mayor inversión en recursos económicos. La estrategia de cambiar los acoplamientos entre osciladores, podría representar una menor inversión económica que las anteriores. Pero si se considera eliminar enlaces u osciladores, podría significar la menor inversión de todas.

La eliminación de enlaces en una red, ha sido muy estudiada para observar la robustez y

vulnerabilidad [42–45], debido a su naturaleza destructiva. Sin embargo, pensar que la eliminación de enlaces pueda ser usado para permitir que una red sincronice, no es intuitivo. Muchos problemas de sincronización se pueden resolver incrementando la cantidad de enlaces entre los osciladores, o simplemente incrementando la relación que tienen los osciladores entre sí, a lo que se conoce como fuerza de acoplamiento. Sin embargo, la red de osciladores caóticos de Rössler ha demostrado que al aumentar la fuerza de acoplamiento, es posible perder la capacidad de la red a sincronizar debido a sus propiedades [32]. Es en este tipo de problemas, donde la estrategia de eliminar enlaces pueda ser usada para encontrar la topología óptima de la red para la sincronía, a partir de la topología original.

1.2 Hipótesis

La teoría de perturbación [46–48] forma un conjunto de esquemas de aproximación, que puede ser usada para encontrar el cambio aproximado de un sistema al ser perturbado. Existe la posibilidad de usar esta herramienta para determinar los cambios de una red cuándo a ésta se le elimina un enlace. Posteriormente, se podría desarrollar un algoritmo que elimine sólo los enlaces que aumenten la capacidad de la red a sincronizar.

1.3 Objetivos

Este trabajo presenta como objetivo general, el de llevar a una red de osciladores caóticos de Rössler a una dinámica sincronizada, sin aumentar el número de acoplamientos en la topología inicial y sin alterar la dinámica de los osciladores con algún controlador. Por consiguiente, se restringe la solución buscada a eliminar la menor cantidad de enlaces posibles de una red, para incrementar su capacidad para sincronizar, o sincronizabilidad.

1.4 Metodología

Primero se presenta el estado del arte del tema de sincronización de redes complejas. Se definen los tipos de osciladores a usar, el tipo de sincronización que se desea y el tipo de redes en que los osciladores son acoplados. La función maestra de estabilidad es una herramienta usada para determinar las condiciones necesarias para que una red tenga la capacidad de sincronizar. Se procede a generar una estrategia para eliminar enlaces, usando la teoría de perturbación, con el objetivo de cumplir con las condiciones de sincronía planteadas en la función maestra de estabilidad. Una vez planteados estos métodos, se comparan con otros métodos encontrados en la literatura [42,45]. Posteriormente se generan conclusiones de los resultados obtenidos.

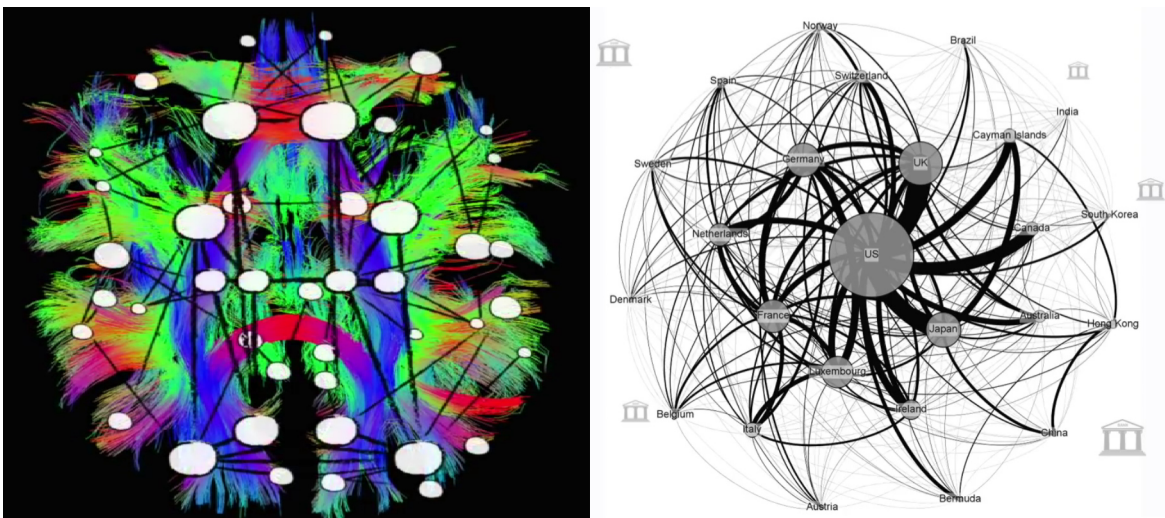


Figura 1.2: A la izquierda, representación gráfica de una red de mundo pequeño formada por las interacciones entre las diferentes funciones de un cerebro sano. A la derecha, la representación gráfica de una red de escala libre formada por la interacción financiera entre países. A mayor tamaño el círculo, mayor producto interno bruto. A mayor tamaño el enlace, mayor inversión económica entre países.

1.5 Estructura de Tesis

Esta tesis se organiza de la manera siguiente:

En el capítulo 2 se da un breve resumen dos conceptos básicos, el caos y la sincronización. Se explora sus orígenes, sus características principales, y los tipos de sistemas caóticos y sincronización que son usados a lo largo de esta tesis.

En el capítulo 3 se da un resumen del concepto de red. Se expone su origen histórico, matrices y propiedades importantes, y la sección termina con una descripción de los modelos de redes de mundo pequeño y redes de escala libre.

En el capítulo 4 se presenta la función maestra de estabilidad como herramienta para encontrar los límites ante los cuales la red es estable. La sección ahonda en cómo es usada, y su importancia en la estabilidad y sincronizabilidad.

En el capítulo 5 se presenta un breve resumen de la teoría de perturbación. También es aplicada para la resolución del problema de esta tesis.

En el capítulo 6 se enlistan los algoritmos derivados del uso en de la teoría de perturbación, otros métodos que se consideraron importantes, y los métodos encontrados en la literatura. Posteriormente son probados en redes de mundo pequeño y redes de escala libre.

En el capítulo 7 se discuten los resultados obtenidos al usar los métodos en la sección anterior, en redes de mundo pequeño y redes de escala libre.

En el capítulo 8 se da una breve conclusión a partir de los resultados obtenidos, al igual que se presentan oportunidades y problemas abiertas que pueden abordarse posteriormente.

Finalmente, en el capítulo 9, se presentan algunas las contribuciones de este trabajo.

Capítulo 2

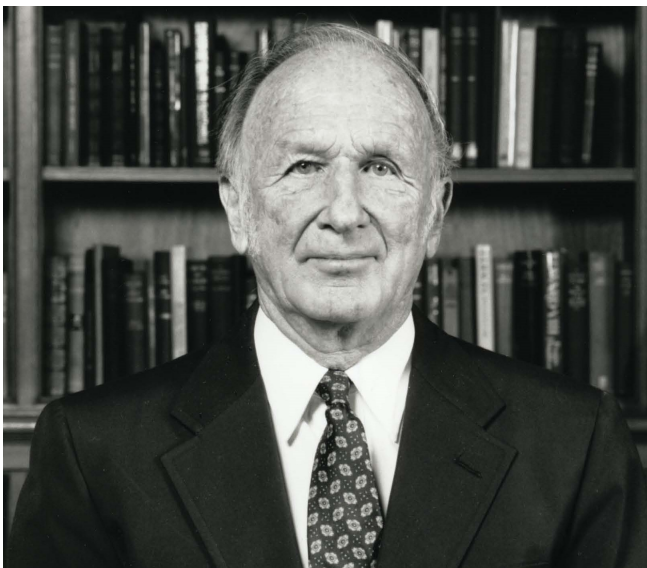
Caos y sincronización

Este capítulo de la tesis versa sobre la sincronización de redes complejas, y éstas están conformadas por osciladores caóticos. Es de esperarse que este tema demande el conocimiento de muchas otras disciplinas para poder ser entendido. Este capítulo es una breve introducción a dos conceptos esenciales como lo son el caos y la sincronía. De ambos conceptos, sólo se abordan los temas relevantes para cumplir el objetivo de tesis. Para el tema caos, basta con mencionar sus principales características y su importancia en la ciencia, ya que como ejemplo de tesis se usan los osciladores caóticos de Rössler. El tipo de sincronía a la que se espera alcanzar entre los osciladores, es la sincronización exacta y completa o sincronización aproximada, y estos dos conceptos son explicados más adelante.

2.1 Caos

La teoría del caos es el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos que son muy sensibles a condiciones iniciales, es aperiódico, y su comportamiento es determinístico. Según [24], un sistema determinístico es considerado caótico cuando su evolución es sensible a sus condiciones iniciales. Esta propiedad implica que dos trayectorias emergentes con condiciones iniciales muy similares, se separan exponencialmente en el tiempo.

Uno de los primeros investigadores en predecir la existencia de este tipo de sistemas, fue el francés Henri Poincaré en los 1890s; cuando trabajaba en el problema de las interacciones de tres cuerpos celestes. Sus resultados fueron tan inesperados, que los describió como, “tan extraños que no puedo soportar contemplarlos”; y posteriormente abandonó dicho trabajo. El físico holandés Balthasar van der Pol encontró un problema similar al trabajar con circuitos electrónicos en 1927. Él y su colega van der Mark describen que para ciertas frecuencias, los circuitos con los que estaban trabajando, ejercían un “ruido irregular”, que luego sería reconocido como uno de los primeros descubrimientos experimentales de los sistemas caóticos. No sería hasta 1963, cuando Edward N. Lorenz acuñó la palabra caos para describir esta clase de sistemas en su artículo “Deterministic Nonperiodic Flow” [16]. Su interés fue crear un modelo matemático para el pronóstico del clima, ver Figura 2.1. Este modelo sería posteriormente llamado el oscilador caótico de Lorenz. Se observó que el sistema es muy sensible a condiciones iniciales.



Edward N. Lorenz

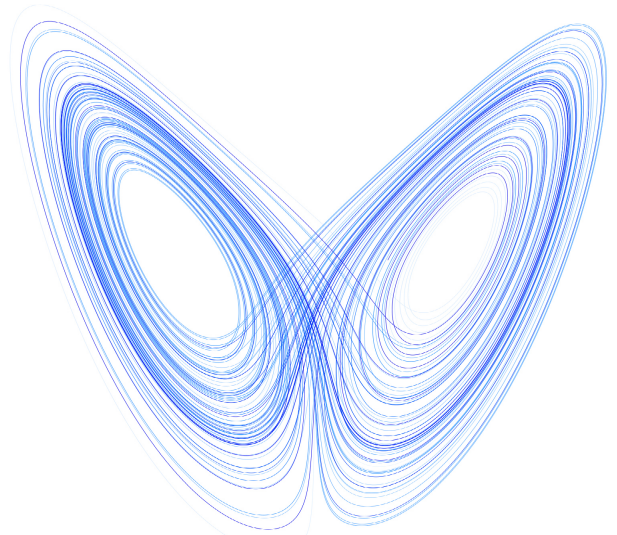


Figura 2.1: A la izquierda, Edward Norton Lorenz (1917-2008). A la derecha, el oscilador caótico de Lorenz.

Existen muchos ejemplos de este tipo de sistemas, como el crecimiento de la población de insectos [53], en el pronóstico del clima [16], en economía [54,55], en el movimiento de satélites artificiales [56], circuitos electrónicos [57], entre otros. Los sistemas caóticos poseen varias características en común. A condiciones iniciales diferentes, las trayectorias de un sistema caótico divergen exponencialmente cuando el tiempo tiende a infinito, ver Figura 2.2. Esto se debe a que los sistemas caóticos poseen, como condición necesaria, al menos un exponente de Lyapunov positivo. El exponente de Lyapunov es la tasa de cambio promedio de las trayectorias del atractor. Al existir más de un exponente de Lyapunov positivo, se dice que el sistema es hipercaótico; y representa una mayor velocidad de divergencia de las trayectorias.

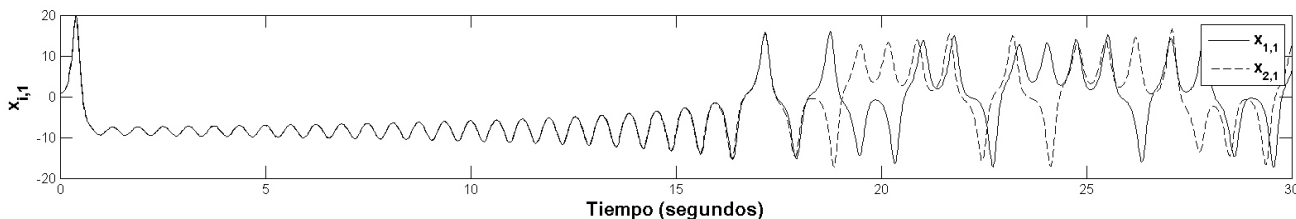
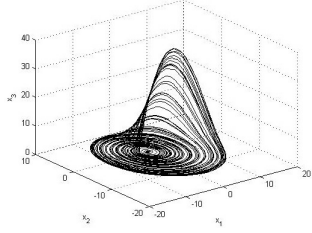
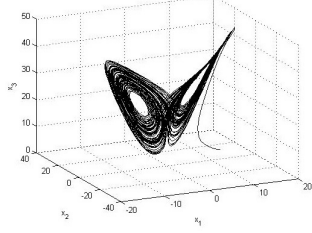
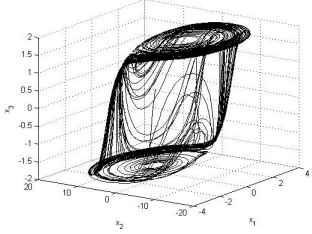
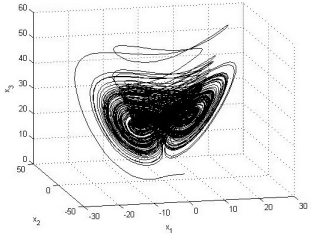
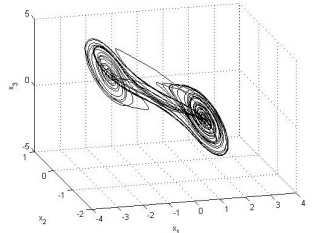


Figura 2.2: Gráfica comparativa de la divergencia exponencial presente en el primer estado $x_{i,1}$ de dos osciladores caóticos de Lorenz $i = 1, 2$ a condiciones iniciales similares pero diferentes $x_1(0) = (1, 0, 0)$ y $x_2(0) = (1.1, 0, 0)$.

Un sistema caótico está regido por ecuaciones diferenciales o en diferencias no lineales y su comportamiento es determinístico. Un atractor es una región del espacio de estados hacia la cual convergen las trayectorias del sistema. Las trayectorias no se ajustan a un punto fijo, órbita periódica o cuasiperiódica cuando $t \rightarrow \infty$. Se pueden observar algunos ejemplos de osciladores caóticos en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Tabla de osciladores caóticos. Con los parámetros mostrados en cada oscilador, se muestra un comportamiento caótico.

Oscilador caótico de Rössler	
$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c) \\ (a &= 0.4, b = 2, c = -4)\end{aligned}$	
Oscilador caótico de Lorenz	
$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \\ (\sigma &= 10, r = 28, b = \frac{8}{3})\end{aligned}$	
Oscilador caótico de Histéresis	
$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \gamma x_1 + cx_3 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \delta x_2 \\ \epsilon \dot{x}_3 &= (1 - x_3^2)(sx_1 + x_3) - \beta x_3 \\ (\gamma &= 0.2, c = 2, \omega = 10, \delta = 0.001, \\ s &= 1.667, \beta = 0.001, \epsilon = 0.3)\end{aligned}$	
Oscilador caótico de Chen	
$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \\ (a &= 35, b = 3, c = 28)\end{aligned}$	
Oscilador caótico de Chua	
$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p(x_2 - x_1 - f(x)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -qx_2 \\ f(x) &= m_0x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(x + 1 - x - 1) \\ (p &= 10, q = 14.87, m_0 = -0.68, m_1 = -1.27)\end{aligned}$	

2.2 Sincronización

El término sincronía se refiere a la coincidencia en el tiempo o a la simultaneidad de hechos o fenómenos. Según Pecora y Carroll [26], “(la sincronización ocurre si) las trayectorias de uno de los sistemas convergen a los mismos valores que el otro y estos (los osciladores) mantienen el paso uno con el otro.”

Históricamente, el holandés Christiaan Huygens realizó la primera descripción formalmente documentada de este fenómeno a mediados del siglo XVII [58, 59]. Su documento relata la sincronización de los péndulos de un par de relojes, al estar suspendidos en una viga de madera, como en la Figura 2.3. La sincronía regresaba después de un tiempo incluso si la dinámica de los relojes era perturbada.

En el tema, Steven Strogatz en su libro “Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life” [60], expresa a detalle cómo se ha encontrado sincronía en muchas áreas del conocimiento. Cito: “La sincronía aparece en los lugares más inverosímiles: de las órbitas de los satélites a los electrones, del zumbido de los grillos a la tendencia en mujeres que pasan mucho tiempo juntas a menstruar aproximadamente al mismo tiempo... El orden no es sólo posible, es inevitable.” Algunos ejemplos en la naturaleza son: el destellar de las luciérnagas [13], la floración del bambú [61], la órbita sincrónica entre la Luna y la Tierra [62], entre otros.

El tema de interés para esta tesis, es la sincronización entre osciladores caóticos acoplados en redes. Existen diferentes tipos de sincronización entre osciladores caóticos, como la sincronización completa en osciladores idénticos [26], sincronización de fase [63], sincronización con retraso [64], sincronización generalizada [65], sincronización intermitente [66], sincronización de fase imperfecta [67], la sincronización aproximada [68] y la sincronización usando sistemas Hamiltonianos [69].

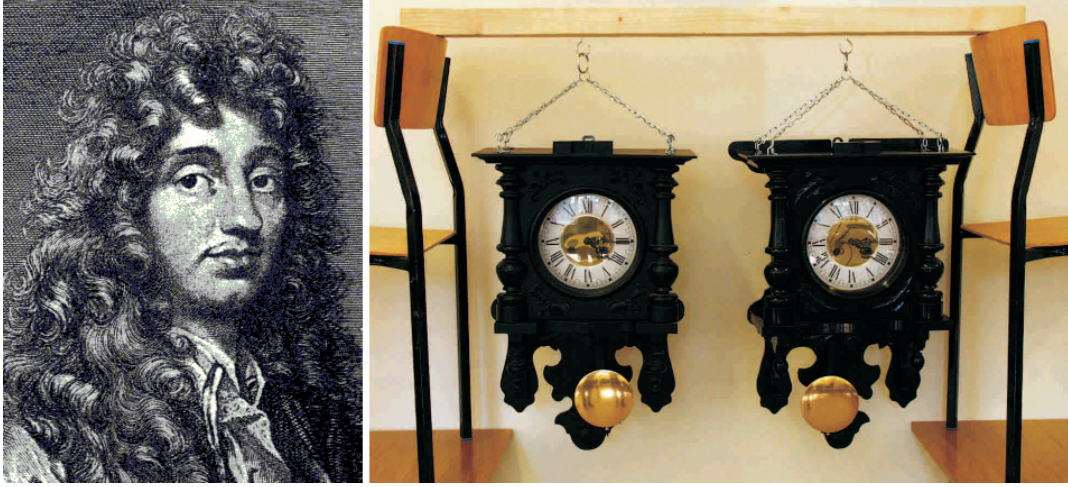


Figura 2.3: A la izquierda, fragmento del retrato de Christiaan Huygens (1629-1695) por el autor G. Edelinck (1685). A la derecha, una recreación del experimento de los dos relojes de péndulo de Huygens, recreada por Czolczynski et al. en 2011 [59].

En este trabajo, se aborda la sincronización de osciladores caóticos idénticos. El caso con perturbaciones entre los enlaces, retraso en la señal, y caso discreto, está afuera de los alcances de esta tesis. La sincronización idéntica y completa en osciladores caóticos idénticos ocurre cuando todos los estados de dos o más osciladores acoplados entre sí, evolucionan en el tiempo a la misma dinámica. Considere un conjunto de osciladores caóticos idénticos representados por el modelo dinámico $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$, donde $\dot{\mathbf{x}}_i = [\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in}]^\top \in R^n$ son las variables de estado del i -ésimo oscilador, $i = 1, 2, \dots, N$ define los diferentes N osciladores y \mathbf{F} es un campo vectorial en R^n . Se dice que los sistemas sincronizan de forma exacta y completa si y sólo si,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0, \quad (2.1)$$

donde $i, j = 1, 2, \dots, N$ representan todos los osciladores caóticos, $i \neq j$, $\mathbf{x}_i(t) \in R^n$ y $\mathbf{x}_j(t) \in R^n$ representan los estados del par de osciladores caóticos i y j , y parten de condiciones iniciales diferentes $\mathbf{x}_i(0) \neq \mathbf{x}_j(0)$.

Con la ecuación (2.1) es posible obtener la diferencia de los estados entre cada oscilador posible en la red y comparar uno por uno si el sistema ha sincronizado. Si lo que se desea es obtener un único valor que determine el error de la sincronía de la red, una solución es usar

el error medio de sincronización («mean synchronization error») [23, 71, 72]. El error medio de sincronización $\langle e \rangle$ está definido por

$$\langle e \rangle = \frac{1}{\sum_{l=1}^{N-1} (N-l)} \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{h=1}^n (x_{i,h} - x_{j,h})^2}, \quad (2.2)$$

donde N es la cantidad de nodos en la red, n es la cantidad de estados en el oscilador, $x_{i,h}$ y $x_{j,h}$ son los valores en el estado h entre los osciladores i y j , respectivamente, donde $i \neq j$. Se considera que una red llega a una sincronización exacta y completa si $\langle e \rangle \rightarrow 0$ [23, 71, 72]. De igual manera, la sincronización aproximada o práctica ocurre si el error medio de sincronización, permanece uniformemente acotado por un valor positivo $\rho \in R$, esto es $\langle e \rangle \leq \rho$.

2.3 Conclusiones

En este capítulo se abordan los temas de osciladores caóticos y la sincronización entre ellos, al estar acoplados entre sí. Los osciladores caóticos son sensibles a las condiciones iniciales, a pesar de tener una naturaleza determinística. Los osciladores caóticos usados como enfoque principal son sólo los osciladores caóticos de Rössler; y se asegura que las condiciones iniciales sean diferentes para cada oscilador. Los osciladores son acoplados entre sí, formando una red; y la sincronización deseada entre osciladores, es la sincronización exacta y completa, o la sincronización aproximada o práctica.

En el siguiente capítulo se explora los diferentes tipos de acoplamientos que se observan entre osciladores. También se da una clasificación de redes y las matrices que se pueden obtener para su estudio. Posteriormente, una breve descripción de algunas propiedades de las redes es dada, junto con los dos modelos para crear redes que son usados a lo largo de la tesis.

Capítulo 3

Redes

En este trabajo, se explora las propiedades de las redes compuestas por osciladores caóticos. Estas propiedades pueden cambiar dependiendo del acoplamiento entre osciladores. Por esta razón, es importante contar con algunos términos, propiedades y nomenclaturas que describen a las redes. El siguiente capítulo da una breve introducción al tema de redes. Se presentan algunos antecedentes, propiedades importantes y dos modelos para crear redes.

Es importante destacar, que en el lenguaje usado en redes (o teoría de grafos), es común usar el término “nodo” para referirse al objeto al cual se está acoplando en una red. Debido al tema de tesis, y que las redes están compuestas por osciladores caóticos, hemos optado por usar el término “oscilador” para describir dichos objetos.

3.1 Antecedentes históricos

Históricamente, el estudio de las redes ha sido parte de la teoría de grafos. Leonard Euler publicó la solución al problema de los siete puentes de Königsberg en 1736, con lo cual nació la teoría de grafos. El problema consistió en encontrar una ruta para pasar por cada uno de los puentes de la ciudad de Königsberg una sola vez y regresar al punto de partida. Euler

representó cada isla con un punto (nodo) y cada puente por una línea (enlace), ver Figura 3.1. Demostró que no era posible, ya que el número de líneas que inciden en cada punto no es par.

Ejemplos de este comportamiento existen como las redes en ecología [73], en relaciones sociales [74,75], red de artículos científicos [76,77], redes neuronales [78], redes metabólicas [79], entre otros.

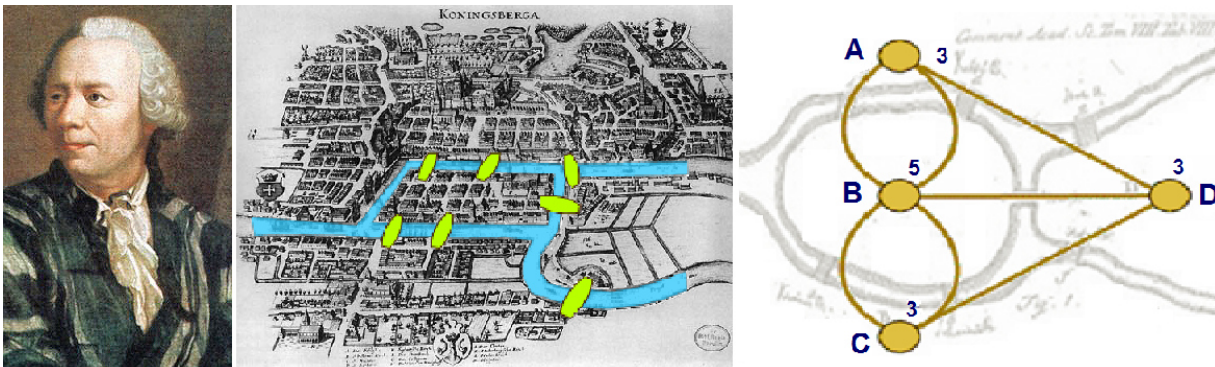


Figura 3.1: A la izquierda, fragmento del retrato de Leonhard Euler (1707-1783) por el autor Jakob Emanuel Handmann (1756). En el centro, mapa de Königsberg en 1736 acentuando el río Pregel en azul y los puentes en verde. A la derecha, el grafo derivado de la solución al problema de los siete puentes, superpuesto sobre las notas de Euler.

3.2 Acoplamiento, matrices, y clasificación de redes

Una red consiste en dos o más osciladores acoplados entre sí. Existen dos configuraciones de acoplamiento entre osciladores: el acoplamiento unidireccional y el acoplamiento bidireccional, ver Figura 3.2. El acoplamiento unidireccional o configuración maestro-esclavo [26, 80, 81] se presenta cuando un oscilador maestro transmite energía e impone su dinámica sobre otro oscilador esclavo; mientras que el esclavo no transmite energía de vuelta al oscilador maestro. Aquí, la dinámica final entre los dos osciladores está dictada por la dinámica del oscilador maestro. El acoplamiento bidireccional [82] se presenta cuando los osciladores se influencian el uno al otro. La dinámica nueva emergente, puede o no, ser diferente a la dinámica original de alguno de los osciladores.

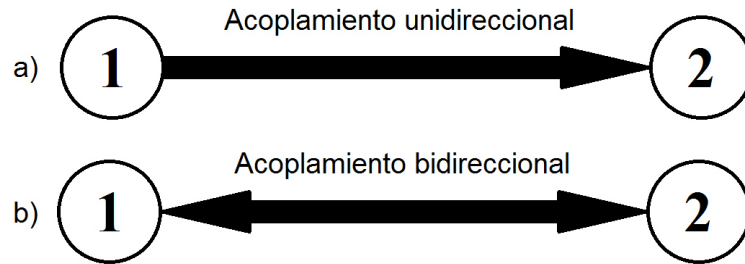


Figura 3.2: a) El acoplamiento unidireccional permite transferir energía (representado por una flecha) del oscilador 1 al oscilador 2, pero no permite transferencia del oscilador 2 al oscilador 1. b) El acoplamiento bidireccional permite la transferencia de energía del oscilador 1 al oscilador 2 y viceversa.

Redes que tienen únicamente acoplamientos bidireccionales, se les conoce como redes no direccionadas. Redes que tienen al menos un enlace unidireccional, se les llama redes direccionadas. A las redes cuyo acoplamiento está asociado a un peso, es decir, que un enlace tiene una influencia diferente que otros enlaces en la red, se les llama redes pesadas, o con peso en sus enlaces; esto sin importar si es una red direccionada o no direccionada, ver Figura 3.3. Para este trabajo, se contempla únicamente redes no direccionadas sin peso en sus enlaces.

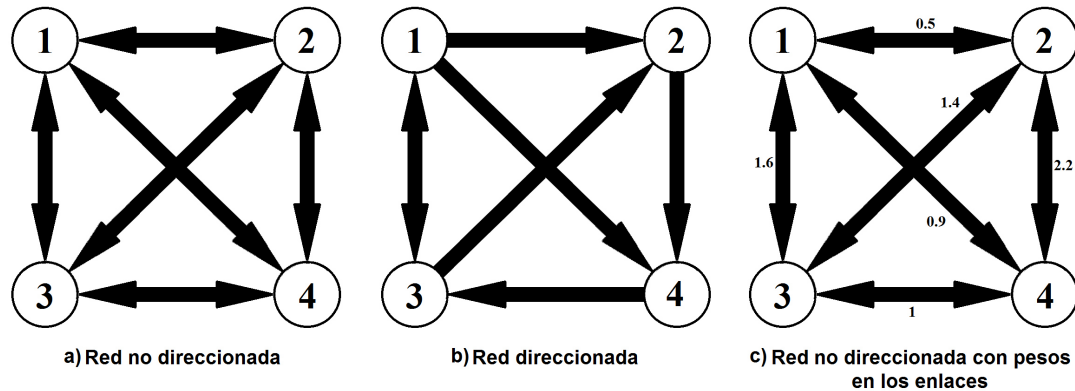


Figura 3.3: Representación gráfica de los diferentes tipos de redes: a) Red no direccionada, b) Red direccionada, y c) Red pesada o con pesos en los acoplamientos.

Todos los tipos de redes mencionadas se pueden representar usando formalismos matriciales. Estas matrices son útiles para estudiar las propiedades de las redes. Existen tres matrices que

son de principal interés: la matriz de adyacencia, la matriz de grado y la matriz Laplaciana. La matriz de adyacencia $\mathbf{A} \in R^N$ es una matriz que contiene información del acoplamiento de los osciladores, y sus elementos a_{ij} se definen como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j \text{ y } n_i \text{ está acoplado a } n_j, \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde n_i y n_j son los osciladores i y j de la red, respectivamente. La diagonal de la matriz de adyacencia es de ceros para una red cuyos osciladores no se pueden conectar a si mismos. Se puede observar un ejemplo en la Figura 3.4.

La matriz de grado $\mathbf{D} \in R^N$ es una matriz que contiene información del grado de cierto oscilador. El grado $k_i \in R$ es la cantidad de enlaces acoplados a un oscilador i en una red [21,83], y es definido en términos de los elementos de la matriz de adyacencia de la siguiente manera:

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad (3.2)$$

donde N es el número de osciladores en la red. Los elementos d_{ij} de la matriz de grado \mathbf{D} se definen como

$$d_{ij} = \begin{cases} k_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Se puede observar un ejemplo en la Figura 3.4.

La matriz Laplaciana $\mathbf{L} \in R^N$ es la representación matricial de un grafo o red. Está definida como la resta entre la matriz de grado y la matriz de adyacencia, $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ y contiene información del grado de cada oscilador, y de cómo están acoplados entre sí. Sus elementos l_{ij} se definen como

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } i \neq j \text{ y } n_i \text{ está acoplado a } n_j, \\ k_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Se puede observar un ejemplo en la Figura 3.4. Es de notar que si la red es no direccionada (todos los acoplamientos son bidireccionales), la matriz es simétrica, es decir $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$, y ésta es una propiedad importante a lo largo de la tesis.

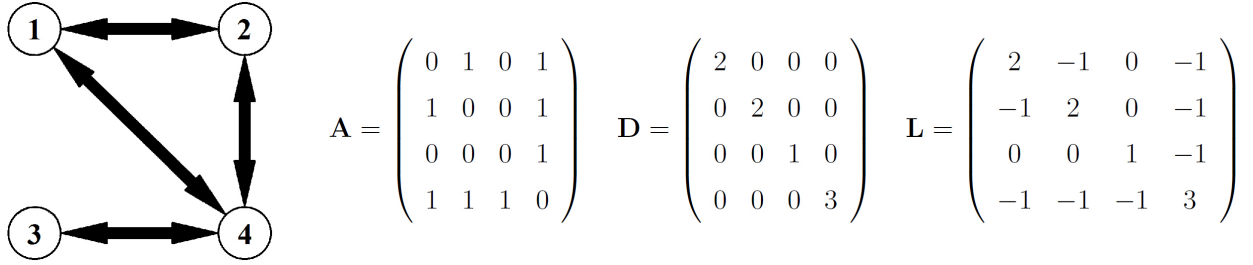


Figura 3.4: Representación en matriz de adyacencia \mathbf{A} , matriz de grado \mathbf{D} y matriz Laplaciana \mathbf{L} de una red no direccionada de cuatro osciladores.

3.3 Propiedades importantes de las redes

3.3.1 Grado promedio y distribución del grado

El grado promedio $\langle k \rangle$ se calcula de la siguiente manera [21]:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i, \quad (3.5)$$

donde k_i es el grado y representa la cantidad de enlaces acoplados a un oscilador i y N es el número de osciladores en la red. La distribución del grado $P(k)$ es la probabilidad de encontrar un oscilador, escogido al azar, con el grado k y es

$$P(k) = \frac{M(k)}{N}, \quad (3.6)$$

donde $M(k)$ es el número de osciladores con el grado k . La distribución del grado es una de las principales diferencias encontradas entre los dos modelos que serán usados para crear redes. Estos modelos son descritos posteriormente en el capítulo.

3.3.2 Coeficiente de agrupamiento

En redes sociales, es típico que dos individuos que tienen un amigo en común se conozcan. A esta propiedad se le llama agrupamiento. El coeficiente de agrupamiento de un oscilador en una

red, cuantifica qué tan interconectado (o agrupado) está con otros osciladores vecinos. Suponga que un oscilador i en la red tiene k_i enlaces y éstos se acoplan con k_i número de osciladores diferentes. Estos osciladores diferentes son todos vecinos del oscilador i . Entonces el número máximo de enlaces que pueden existir entre ellos es de $k_i(k_i - 1)/2$, y esto ocurre cuando cada vecino del oscilador i está acoplado a todos los otros vecinos del oscilador i . El coeficiente de agrupamiento local c_i por oscilador, según Watts y Strogatz [21, 49], se define como la razón entre el número real de enlaces e_i que existe entre estos k_i osciladores y el número total de enlaces posibles $k_i(k_i - 1)/2$, es decir:

$$c_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (3.7)$$

El coeficiente de agrupamiento de la red es el promedio de c_i sobre todos los osciladores, es decir:

$$\langle c \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i. \quad (3.8)$$

Por definición, $0 \leq c_i \leq 1$ y $0 \leq \langle c \rangle \leq 1$.

3.3.3 Asortatividad

La asortatividad es una preferencia de los osciladores en una red, a acoplarse a otros que sean similares entre sí. Para el resto de la tesis, la asortatividad es vista en términos de grado del oscilador. Es decir, la asortatividad en un oscilador, es la preferencia a acoplarse con otro oscilador de su mismo grado o similar. El coeficiente de asortatividad r_{ij} en [84] está dado por

$$r_{ij} = (k_i - \langle k \rangle)(k_j - \langle k \rangle), \quad (3.9)$$

donde i y j son osciladores conectados por un enlace; k_i y k_j son los grados de dichos osciladores, respectivamente; y $\langle k \rangle$ es el grado promedio de la red.

3.3.4 Intermediación

La intermediación («betweenness centrality») es una medida de relevancia que cuantifica el número de veces que un enlace (u oscilador) actúa como un puente a lo largo de un camino más corto entre otros dos osciladores. La medida puede funcionar tanto para enlaces o para osciladores. Para el resto de la tesis la intermediación es vista en términos de enlaces. Un enlace con intermediación alta, tiene una gran influencia en la transferencia de dinámicas a través de la red, bajo la suposición de que la transferencia sigue el camino más corto. El coeficiente de intermediación b_e de un enlace e se define como [21, 41, 42]:

$$b_e = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{n_{ij}(e)}{n_{ij}}, \quad (3.10)$$

donde n_{ij} es el número de enlaces en los caminos cortos entre osciladores i y j , $i \neq j$, y $n_{ij}(e)$ es el número de enlaces en los caminos cortos entre osciladores i y j que incluyen el enlace e .

3.4 Modelos de redes

De entre los muchos modelos para generar redes, hemos elegido el modelo de Watts-Strogatz (WS) para redes de mundo pequeño [49, 50] y el modelo de Barabási-Albert (BA) para las redes de libre escala [51, 52]; que han sido ampliamente estudiadas y son similares a las redes reales.

3.4.1 Redes de mundo pequeño

Las redes de mundo pequeño son un tipo de redes en el cual la mayoría de sus osciladores no están acoplados entre sí; sin embargo, el camino para llegar de un oscilador a otro, es relativamente corto. Una red de mundo pequeño posee valores altos de coeficiente de agrupamiento $\langle c \rangle$, cualesquiera dos osciladores de la red se comunican por un camino de osciladores intermedios relativamente pequeño, y la distribución del grado $P(k)$ es uniforme. Uno de los primeros en

describir y modelar este tipo de redes, fueron Watts y Strogatz (WS). El modelo de red de mundo pequeño de WS se puede generar con el siguiente algoritmo [49, 50]:

Algoritmo para generar el modelo de red de mundo pequeño de WS.

1) Comenzar con una red acoplada con vecinos cercanos, que consisten en N osciladores acomodados en anillo, donde cada oscilador i es adyacente a cada oscilador vecino, $i = 1, 2, \dots, K/2$, donde K es par.

2) Se permite que cada enlace se reconecte a un oscilador diferente usando una probabilidad de reconexión p , de tal manera que la transición entre el orden ($p = 0$) y aleatorio ($p = 1$) puedan ser fácilmente monitoreada, ver Figura 3.5.

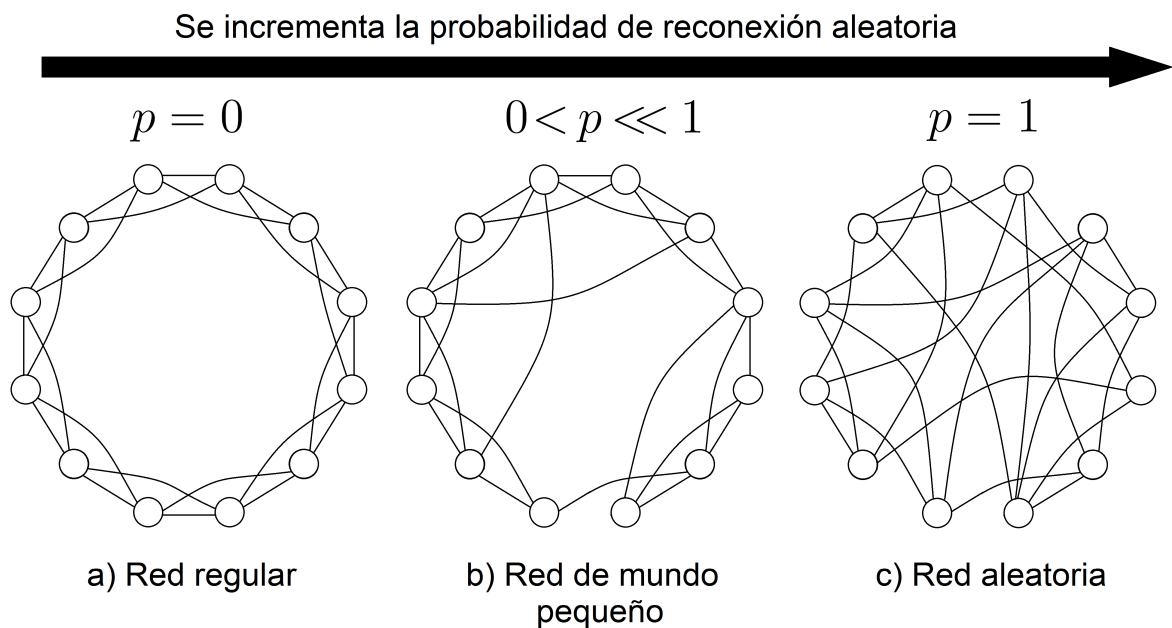


Figura 3.5: Representación gráfica del algoritmo para generar redes de mundo pequeño. Se comienza con una red regular como a), donde la probabilidad de reconectar un enlace es cero, $p = 0$. Se aumenta la probabilidad de que los enlaces se reconecten a osciladores diferentes, es entonces donde las propiedades de las redes de mundo pequeño aparecen, como en b). Si la probabilidad de reconexión es de $p = 1$, todos los enlaces son reconectados de manera aleatoria, y a la red resultante se le conoce como red aleatoria c).

La reconexión, en este contexto, significa cambiar un extremo del enlace, a un oscilador nuevo elegido aleatoriamente del resto de la red; con la restricción de que dos diferentes osciladores cualesquiera no puede tener más de una conexión entre sí, y ningún oscilador puede conectarse consigo mismo. Se ha encontrado que incluso para probabilidades p pequeñas de reacoplamiento, las distancias promedio entre osciladores se disminuyen significativamente. No obstante, bajo las mismas probabilidades, el coeficiente de agrupamiento $\langle c \rangle$ no cambia sustancialmente.

3.4.2 Redes de escala libre

Las redes de escala libre son redes cuya distribución de grado $P(k)$ sigue una ley de potencia. Esto implica que en la red existen osciladores que están altamente acoplados y que el grado no está distribuido uniformemente. A estos osciladores que están altamente acoplados, se les llama “hubs”. Barabási y Albert (BA) fueron los primeros en argumentar, que los modelos anteriores fallan al no considerar dos importantes propiedades de redes reales. Primeramente, muchas redes reales se forman al introducir nuevos osciladores al sistema acoplándose a los ya existentes; a esto se le llama crecimiento. En segundo lugar, los nuevos osciladores tendrán una tendencia a acoplarse a ciertos osciladores, normalmente de grado mayor; a esto se le llama conexión preferencial. El algoritmo de BA para generar una red de escala libre es el siguiente [51]:

Algoritmo para generar el modelo de red de libre escala BA.

1) **Crecimiento:** Comenzar con un número pequeño m_0 de osciladores; a cada paso, un nuevo oscilador m es introducido a la red y es acoplado a un oscilador ya existente.

2) **Acoplamiento Preferencial:** La probabilidad \prod_i de que un nuevo oscilador será conectado a un oscilador i (uno de los m osciladores ya existentes) depende en el grado k_i del oscilador

i , de tal manera que $\prod_i = k_i / \sum_j k_j$.

Después de una cantidad de pasos t , este algoritmo resulta en una red con $N = t + m_0$ osciladores y mt enlaces. Si la red crece de acuerdo con estas dos reglas, la red evoluciona a un estado de escala invariante. Lo que significa que la forma de la distribución de grado $P(k)$ no cambia con el cambio de escala (o incremento de osciladores), ver Figura 3.6.

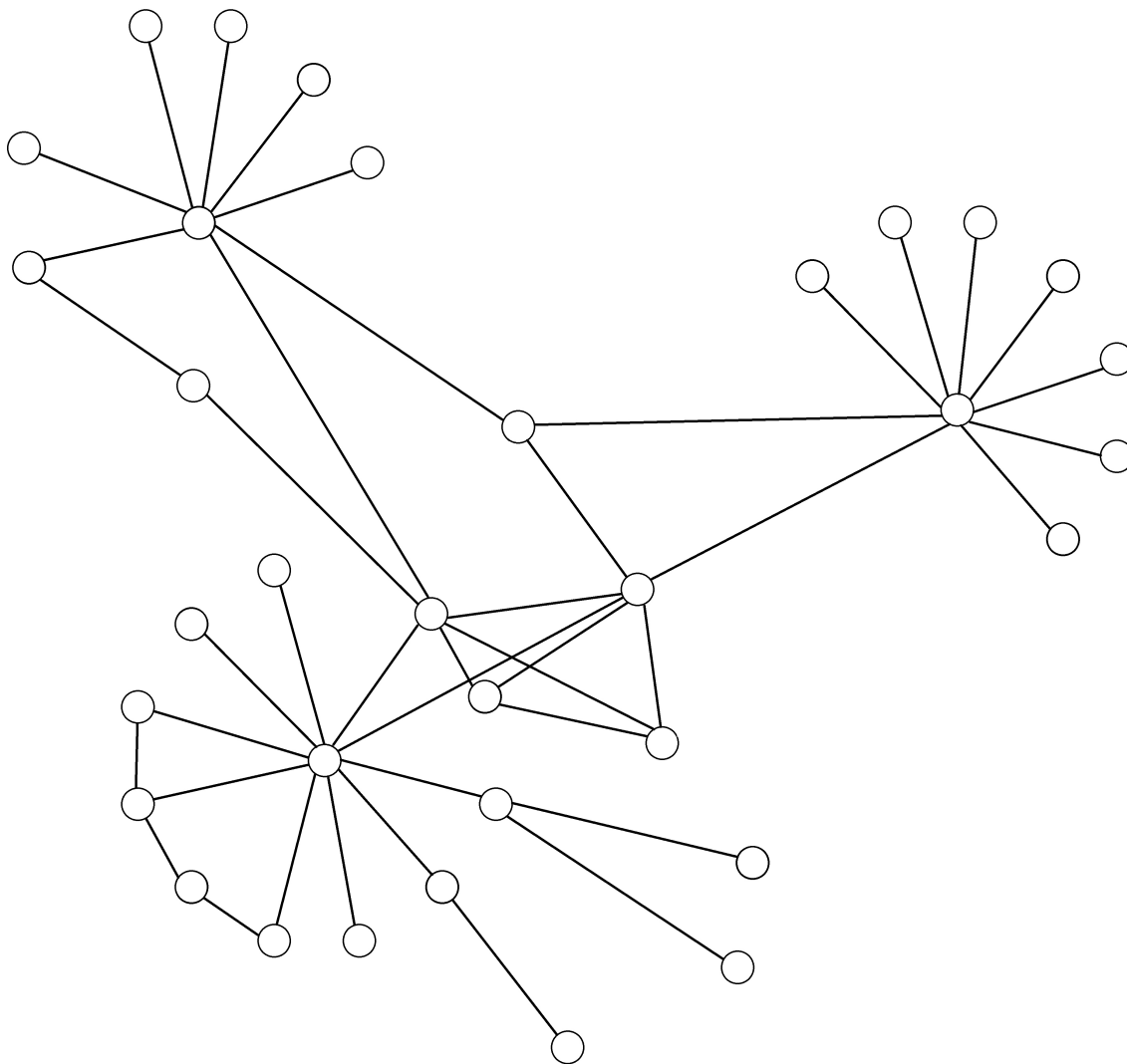


Figura 3.6: Representación gráfica de una red $N = 30$ de escala libre producida con el modelo BA.

3.5 Conclusiones

Como se menciona en el capítulo, dos de los modelos más usados para generar redes, son el modelo de mundo pequeño y el modelo de escala libre. Estos modelos han sido ampliamente estudiados y presentan propiedades encontradas en redes reales. Los osciladores caóticos de Rössler son acoplados usando estos modelos, bajo un acoplamiento únicamente bidireccional. Se excluye del estudio las redes direccionadas y redes con pesos en sus enlaces. Existe suficiente evidencia en la literatura que sugiere que los resultados pueden variar a diferentes grados promedio $\langle k \rangle$. Las redes de mundo pequeño y escala libre son generadas para alcanzar grados promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 . En capítulos posteriores las propiedades como asortatividad e intermediación, son usadas dentro de una metodología como criterio de eliminación de enlaces.

La matriz Laplaciana \mathbf{L} es de especial interés debido a que sus valores propios tienen propiedades que revelan si la red tiene la capacidad de sincronizar o no. El siguiente capítulo explora estas propiedades, al usar la herramienta llamada función maestra de estabilidad. Esta herramienta permite observar las condiciones suficientes para que la red pueda sincronizar.

Capítulo 4

Función Maestra de Estabilidad

En este capítulo se muestran dos conceptos fundamentales para la sincronización de redes complejas eliminando enlaces. 1) Los criterios bajo los cuales la red tiene la capacidad de sincronizar, a esto se le conoce como sincronizabilidad. 2) Medir el cambio en la dinámica de la red al ser eliminado cualquier enlace. Ambos conceptos ayudan al desarrollo de un método para llevar a la red a un estado de sincronía, eliminando la menor cantidad de enlaces posibles.

Un enfoque para observar sincronizabilidad es usando la función maestra de estabilidad (MSF por sus siglas en inglés). Ésta nos permite analizar la red usando los exponentes de Lyapunov obtenidos de la ecuación maestra de estabilidad, y los valores y vectores propios de la matriz Laplaciana de la red. Con los exponentes de Lyapunov se puede obtener un rango de valores para los cuales la red es estable y para redes no direccionadas, también sincronizable. Estos valores son directamente proporcionales a los valores propios de la matriz Laplaciana, y permite observar el cambio producido al eliminarse un enlace. Para el resto de la tesis, la MSF es vista en función de la sincronización.

Primero se aborda el análisis matemático de la función maestra de estabilidad. Con las conclusiones obtenidas, se obtiene qué determina la sincronizabilidad de la red. Finalmente, se analiza el problema de tesis con estos conceptos.

4.1 La función maestra de estabilidad

En el estudio del comportamiento en redes de sistemas dinámicos acoplados entre sí, surgió la pregunta: ¿cuándo una red ya sincronizada, es estable? La pregunta y respuesta fue planteada en 1998 por los investigadores Louis M. Pecora y Thomas L. Carroll en su artículo llamado “Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems” [32]. Suponga que existe un sistema que describe una red de N osciladores de manera que

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j), \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in})^\top \in R^n$ es un vector n -dimensional de las variables dinámicas del i -ésimo oscilador idéntico; $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$ son las dinámicas no acopladas de cada i -ésimo oscilador; \mathbf{L} es una matriz Laplaciana simétrica ($\mathbf{L} = \mathbf{L}^\top$) generada por la ecuación (3.4), y representa la topología de la red; $\mathbf{H}(\mathbf{x}_j) = (\mathbf{H}(\mathbf{x}_{j1}), \mathbf{H}(\mathbf{x}_{j2}), \dots, \mathbf{H}(\mathbf{x}_{jn}))^\top$ es una función arbitraria m -dimensional del j -ésimo oscilador y determina cuál variable de estado es usada en el acoplamiento; y σ es la fuerza de acoplamiento en la red. Se declara que existe una sincronización exacta y completa entre los osciladores tal que

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_N \equiv \mathbf{x}_s, \quad (4.2)$$

donde \mathbf{x}_s es un vector m -dimensional y representa la dinámica emergente final de la red, y por lo tanto $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_s$ para todo i . Entonces la ecuación a la red sincronizada es

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) + \sigma \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_s), \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}_s)$ son todos los osciladores sincronizados y tienen una dinámica idéntica. Para obtener la ecuación variacional de (4.3), suponga que $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in})^\top$ son las variaciones en el i -ésimo oscilador, entonces la ecuación queda como

$$\dot{\xi}_i = (D\mathbf{F} + \sigma \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} D\mathbf{H}) \xi_i, \quad (4.4)$$

donde $D\mathbf{F}$ y $D\mathbf{H}$ son funciones Jacobianas. Al usar la multiplicación de Kronecker, la ecuación queda como

$$\dot{\xi}_i = (1_N \otimes D\mathbf{F} + \sigma \mathbf{L}_N \otimes D\mathbf{H})\xi_i. \quad (4.5)$$

La variación de cada oscilador es clara al obtener los valores propios λ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) de la matriz Laplaciana \mathbf{L}_{ij} , de tal modo que

$$\dot{\xi}_k = (D\mathbf{F} + \sigma \lambda_k D\mathbf{H})\xi_k. \quad (4.6)$$

Se define que $\mu_k \equiv \sigma \lambda_k$, y por lo tanto

$$\dot{\xi}_k = (D\mathbf{F} + \mu_k D\mathbf{H})\xi_k. \quad (4.7)$$

En el caso general, la matriz Laplaciana puede ser una red direccionada o no direccionada, con pesos o sin pesos en los enlaces. En este caso, los valores propios λ_k pueden ser complejos. Entonces se define $\mu = \alpha + \beta i$, y la función maestra de estabilidad es

$$\dot{\zeta} = (D\mathbf{F} + (\alpha + \beta i)D\mathbf{H})\zeta. \quad (4.8)$$

De la ecuación (4.8), se puede calcular el máximo exponente de Lyapunov evaluado en α y β , $\Lambda(\alpha, \beta)$, donde $\alpha, \beta \in R$. El máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha, \beta)$ crea una superficie en el plano complejo en \mathbf{R}^3 . Entonces, dada una fuerza de acoplamiento σ , se puede localizar $\sigma \lambda_k$, y el signo correspondiente del máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha, \beta)$, determina si la red sincroniza. Si todos los valores propios diferentes de cero, $\sigma \lambda_k$ para $k = 2, 3, \dots, N$, corresponden al espacio de estados donde el máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha, \beta)$ es negativo, la dinámica de la red sincroniza. Para el resto de la tesis, los valores propios λ_k serán tomados como valores positivos por conveniencia.

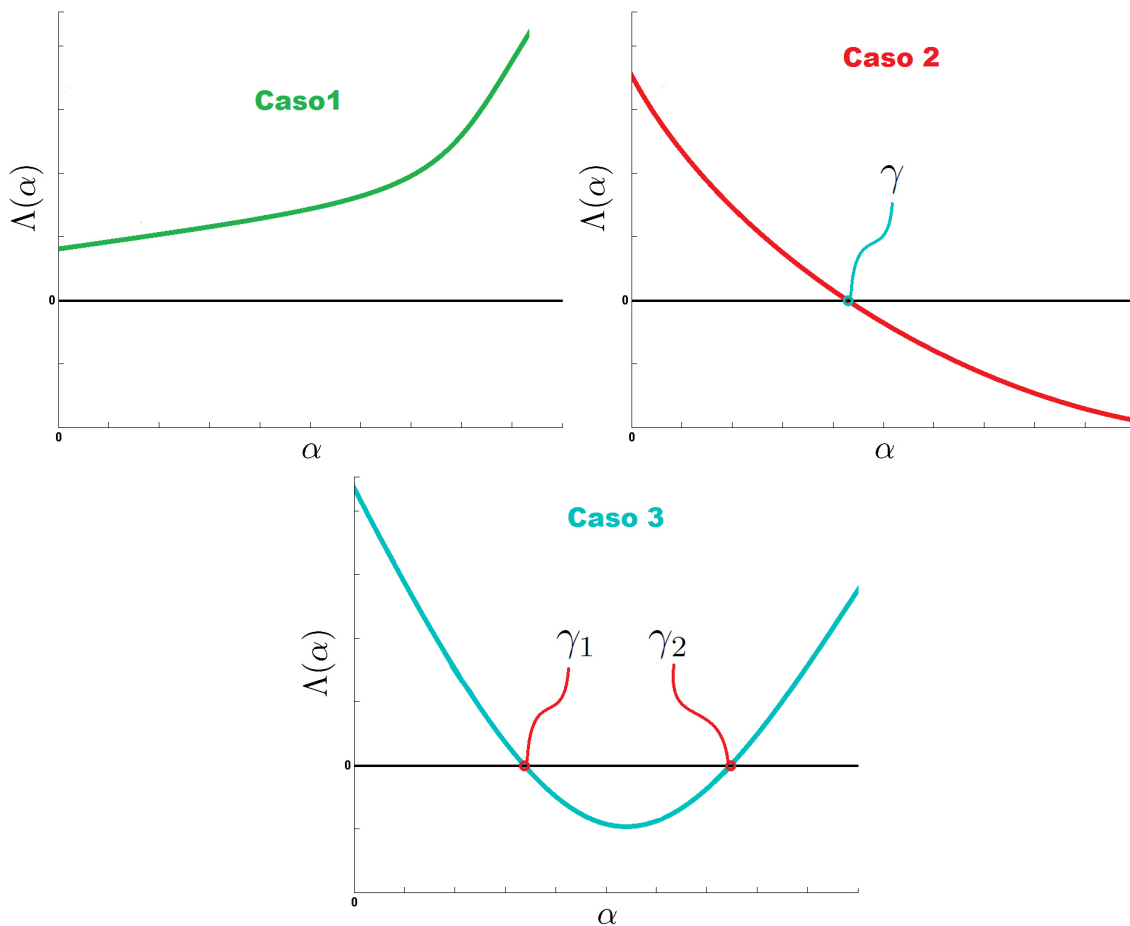


Figura 4.1: Gráficas ilustrativas de los posibles casos de la función maestra de estabilidad de una red de osciladores caóticos. El caso 1 (verde), $\Lambda(\alpha)$ es monótonamente creciente. El caso 2 (rojo), $\Lambda(\alpha)$ es monótonamente decreciente. El caso 3 (azul), $\Lambda(\alpha)$ consta de un rango acotado de valores negativos.

Para nuestro caso de estudio, la red es no direccionada y sin pesos en los acoplamientos. Por lo tanto, la matriz Laplaciana es simétrica, y se forman, como en la ecuación (3.4). Esto indica que los valores propios λ_k son reales ($\beta = 0$) y por lo tanto $\alpha_k = \sigma\lambda_k$. El sistema está sincronizado, sí y sólo sí, todos α_k de la red corresponden con un signo negativo del máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha)$.

4.2 Sincronizabilidad

Mediante el análisis del máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha)$, los resultados de Pecora y Carroll en [32], indican que existen tres posibles casos. Para el caso 1, todos los valores del máximo exponente de Lyapunov son positivos, $\Lambda(\alpha) > 0$, por lo tanto la red no sincroniza. En el caso 2, el máximo exponente de Lyapunov decrece monótonamente. Como se observa en la Figura 4.1, existe un valor $\alpha > \gamma$ tal que $\Lambda(\alpha) < 0$. Por lo tanto, la red es sincronizable si y sólo si $\sigma\lambda_k > \gamma$, para $k = 2, 3, \dots, N$. Esta red se puede sincronizar ajustando el valor proporcional de la fuerza de acoplamiento σ de la red, o en algunos casos aumentando la cantidad de enlaces en la red.

El caso de interés para la tesis, es el caso 3, ya que se establece que existen dos valores $\gamma_1, \gamma_2 \in \alpha$, donde $\gamma_1 < \gamma_2$, tal que existen valores negativos del máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha) < 0$, si y sólo si $\gamma_1 < \alpha < \gamma_2$, ver Figura 4.1. En consecuencia, se puede garantizar sincronía de una red si y sólo si las condiciones

$$\sigma\lambda_2 > \gamma_1 \text{ y } \sigma\lambda_N < \gamma_2, \quad (4.9)$$

se cumple. La condición es equivalente a

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_N} > \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) garantiza la existencia de al menos un valor de σ para el cual la red sincroniza. A esto se le conoce como cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ («eigenratio») y define la sincronizabilidad. Es de notar que los valores de γ_1 y γ_2 son determinados por las funciones F y H . Mientras que los valores λ_2 y λ_N dependen de la topología de la red. Por lo tanto, la sincronizabilidad de una red puede ser definida independientemente de la dinámica de los osciladores.

El oscilador caótico de Rössler cae en el caso 3 según [32, 85]. Los valores de γ_1 y γ_2 para que los valores del máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha)$ del oscilador caótico de Rössler sean

negativos, son $\gamma_1 = 0.206$ y $\gamma_2 = 5.519$ [85]. Entonces el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ debe ser

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_N} > 0.0373256... \quad (4.11)$$

para que la red sea sincronizable. En consecuencia $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} = 0.0373256$ representa el caso crítico, donde existe sólo un valor de σ para que la red pueda sincronizar.

Eliminar enlaces de una red tiene muchas implicaciones. Este concepto es muy conocido en el área de distribución eléctrica, para observar robustez a fallas y vulnerabilidad a ataques [43,45]. La eliminación de enlaces provoca que los valores propios λ_k pertenecientes a la matriz Laplaciana de dicha red, disminuyan de valor y tiendan a cero [21], donde para redes no direccionadas y sin pesos en los enlaces, $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$. El cambio producido en los valores propios λ_k al eliminarse un enlace, es diferente para cada enlace en la red, ésto debido a su posición en el acoplamiento de la red. Por otra parte, si los suficientes enlaces son eliminados, eventualmente un oscilador puede ser desacoplado de la red y entonces el valor propio $\lambda_2 = 0$.

4.3 Conclusiones

Al observar el caso 3 de la función maestra de estabilidad, es claro que para lograr el objetivo de la tesis, dos condiciones deben ocurrir: 1) El valor propio λ_2 no puede llegar a cero, $\lambda_2 \neq 0$. Esto garantizaría que el número de osciladores en la red, no ha disminuido. 2) El enlace seleccionado debe disminuir el valor propio λ_N lo más posible, mientras que el valor propio λ_2 disminuya lo menos posible. En consecuencia, es posible sólo bajar el valor λ_N a un valor tal que la condición (4.11) se cumpla.

En el siguiente capítulo se presenta una técnica para predecir el cambio en los valores propios de una matriz Laplaciana. Lo que haría posible seleccionar el enlace que cumpla con las dos condiciones descritas anteriormente.

Capítulo 5

Teoría de perturbación

Este capítulo muestra un resumen de la teoría de perturbación y su implementación en el estudio de redes. La técnica es usada para encontrar el cambio aproximado en los valores propios de la matriz Laplaciana de una red, al remover un enlace. Posteriormente se crea un algoritmo para eliminar enlaces basándose en el cambio más grande en el valor propio λ_N como criterio de selección de enlaces.

La teoría de perturbación es un conjunto de esquemas de aproximación para describir un sistema en términos de uno más simple. Es común que no se pueda resolver un problema matemático de manera exacta. Si la solución exacta es disponible, ésta exhibe una dependencia entre sus parámetros que es muy difícil usar como tal. Suponga que un parámetro δ existe para un sistema, y que la solución existe y es simple si $\delta = 0$. La teoría de perturbación nos muestra cómo la solución es alterada (o perturbada) para valores pequeños de δ , pero diferentes de cero. Básicamente se pretende encontrar una expresión de la solución deseada, en términos de una serie de potencias con el parámetro δ , el cual cuantifique la desviación de la solución exacta del problema. Se supone que $\delta = 1$, al indicar que la remoción de un enlace es total y no parcial. Para el problema de tesis, únicamente se observa la aproximación del primer orden de la serie de potencias y se supone que los términos sucesivos son cada vez más pequeños que el anterior.

Considere la siguiente ecuación

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_0 + \delta \mathbf{S}, \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{L}_0 \in R^N$ es una matriz simétrica Laplaciana $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0^T$ y describe la topología inicial de la red, $\mathbf{L}_1 \in R^N$ es una matriz simétrica Laplaciana $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1^T$ y describe la topología resultante de la red después de la perturbación, $\delta \in R$ es una ganancia que controla la magnitud de la perturbación y $\mathbf{S} \in R^N$ es una matriz la cual describe una perturbación en la forma de remoción de un enlace y se describe como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

La definición de valores propios de \mathbf{L}_1 es $\mathbf{L}_1 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Al sustituirlo con (5.1), se obtiene

$$(\mathbf{L}_0 + \delta \mathbf{S} - \lambda) \mathbf{v} = 0. \quad (5.3)$$

Se supone que (5.3) puede ser expandida en Taylor para λ y \mathbf{v} , tal que

$$\lambda(\delta) = \lambda(0) + \frac{\lambda'(0)}{1!} \delta + \frac{\lambda''(0)}{2!} \delta^2 + \cdots, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{v}(\delta) = \mathbf{v}(0) + \frac{\mathbf{v}'(0)}{1!} \delta + \frac{\mathbf{v}''(0)}{2!} \delta^2 + \cdots, \quad (5.5)$$

donde $\lambda(\delta)$ se define como el valor propio perturbado y $\mathbf{v}(\delta)$ como el vector propio perturbado pertenecientes a la matriz Laplaciana \mathbf{L}_1 , $\lambda(0)$ y $\mathbf{v}(0)$ son el valor propio y vector propio cuando la perturbación es nula perteneciente a la matriz Laplaciana \mathbf{L}_0 , respectivamente. El valor de cada término de la serie de Taylor, es sucesivamente más pequeño que el anterior, por tanto se define una función $G \equiv \frac{\mathbf{v}''(0)}{2!} \delta^2 + \cdots$ que engloba el resto de las correcciones de la perturbación y se supone que $G \approx 0$, para sólo observar la aproximación en el primer orden. Entonces las

ecuaciones (5.4) y (5.5), definidas sólo para la aproximación de primer orden se reescriben como

$$\lambda_{(1)} = \lambda_{(0)} + \delta\lambda'_{(0)}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{v}_{(0)} + \delta\mathbf{v}'_{(0)}, \quad (5.7)$$

donde $\lambda_{(1)} \approx \lambda(\delta)$ y $\mathbf{v}_{(1)} \approx \mathbf{v}(\delta)$ son definidos como el valor propio y vector propio de la matriz Laplaciana \mathbf{L}_1 para la aproximación de primer orden, $\lambda_{(0)} = \lambda(0)$ y $\mathbf{v}'_{(0)} = \mathbf{v}'(0)$ son el valor propio y vector propio de la matriz Laplaciana \mathbf{L}_0 . Usando ecuaciones (5.6) y (5.7), en (5.3) se obtiene

$$(\mathbf{L}_0 + \delta\mathbf{S} - \lambda_{(0)} - \delta\lambda'_{(0)})(\mathbf{v}_{(0)} + \delta\mathbf{v}'_{(0)}) = 0, \quad (5.8)$$

y se agrupan en términos de δ , la ecuación está dado por

$$\delta^2(\mathbf{S}\mathbf{v}'_{(0)} - \lambda'_{(0)}\mathbf{v}'_{(0)}) + \delta(\mathbf{S}\mathbf{v}'_{(0)} - \lambda'_{(0)}\mathbf{v}_{(0)} + \mathbf{L}_0\mathbf{v}'_{(0)} - \lambda_{(0)}\mathbf{v}'_{(0)}) + (\mathbf{L}_0\mathbf{v}_{(0)} - \lambda_{(0)}\mathbf{v}_{(0)}) = 0. \quad (5.9)$$

Entonces se procede a igualar a 0 los términos sucesivos de la serie δ^2 , δ^1 , y δ^0 en la ecuación (5.9) de la manera siguiente

$$\delta^2 \rightarrow \mathbf{S}\mathbf{v}'_{(0)} - \lambda'_{(0)}\mathbf{v}'_{(0)} = 0, \quad (5.10)$$

$$\delta^1 \rightarrow \mathbf{S}\mathbf{v}'_{(0)} - \lambda'_{(0)}\mathbf{v}_{(0)} + \mathbf{L}_0\mathbf{v}'_{(0)} - \lambda_{(0)}\mathbf{v}'_{(0)} = 0, \quad (5.11)$$

$$\delta^0 \rightarrow \mathbf{L}_0\mathbf{v}_{(0)} - \lambda_{(0)}\mathbf{v}_{(0)} = 0. \quad (5.12)$$

Se multiplican por la izquierda por $\mathbf{v}_{(0)}^\top$ a (5.11), nos queda la ecuación

$$\mathbf{v}_{(0)}^\top \mathbf{S}\mathbf{v}'_{(0)} + \mathbf{v}_{(0)}^\top \mathbf{L}_0\mathbf{v}'_{(0)} = \lambda'_{(0)}\mathbf{v}_{(0)}^\top \mathbf{v}_{(0)} + \lambda_{(0)}\mathbf{v}_{(0)}^\top \mathbf{v}'_{(0)}. \quad (5.13)$$

Los vectores propios de una matriz simétrica forman una base ortonormal, según el teorema espectral, entonces $\mathbf{v}_{(0)}^\top \mathbf{v}_{(0)} = 1$. La ecuación (5.12) indica que $\mathbf{L}_0\mathbf{v}_{(0)} = \lambda_{(0)}\mathbf{v}_{(0)}$. Ambas instancias simplifican (5.13) de manera que

$$\lambda'_{(0)} = \mathbf{v}_{(0)}^\top \mathbf{S}\mathbf{v}'_{(0)}. \quad (5.14)$$

Se introduce (5.14) en (5.6) y se supone una ganancia $\delta = 1$ por conveniencia. Entonces

$$\lambda_{(1)} = \lambda_{(0)} + \mathbf{v}_{(0)}^T \mathbf{S} \mathbf{v}_{(0)}. \quad (5.15)$$

Esta ecuación aún se puede simplificar más; considerando que la perturbación \mathbf{S} únicamente elimina un enlace, y entonces perturba a los elementos pertenecientes a ese enlace en los vectores propios. Por lo tanto, la ecuación al ser simplificada, está dada por

$$\lambda_{(k,1)} = \lambda_{(k,0)} - (m_{(k,0)} - n_{(k,0)})^2, \quad (5.16)$$

donde $k = 2, 3, \dots, N$ y denota todos los valores propios diferentes de cero; $m_{(k,0)}$ y $n_{(k,0)}$ son los elementos m y n del k -ésimo vector propio de la matriz \mathbf{L}_0 , respectivamente; y $\lambda_{(k,1)}$ y $\lambda_{(k,0)}$ son el k -ésimo vector propio de la matriz \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_0 , respectivamente. Ésta es la notación que es usada para el resto de la tesis. Con la ecuación (5.16), se puede deducir que $\lambda_{(k,1)} < \lambda_{(k,0)}$ y con ello se concluye que con cada enlace eliminado se disminuye el valor propio de la matriz Laplaciana \mathbf{L}_0 . Ahora se concluye que el cambio aproximado $\rho_k(e)$ en cualquier valor propio k dado de una matriz Laplaciana simétrica \mathbf{L}_0 , causado por remover el enlace e es

$$\rho_k(e) = (m_{(k,0)} - n_{(k,0)})^2. \quad (5.17)$$

Como resultado, es posible evaluar cada enlace por su cambio aproximado en los valores propios.

5.1 Conclusiones

La teoría de perturbación nos ha permitido encontrar una ecuación (5.17) que evalúa el cambio aproximado en los valores propios de una matriz Laplaciana, ante la eliminación de un enlace en una red. Al observar el cambio aproximado ρ_N , es posible seleccionar el enlace que produzca el mayor cambio en el valor propio λ_N . También la red debe sincronizar si $\frac{\lambda_2 - \rho_2}{\lambda_N - \rho_N} > 0.0373256$, como lo establece la ecuación (4.11). Ambas instancias pueden ser usadas como criterio para

eliminar un enlace en una red, y que aumente el cambio en el valor propio λ_N o aumente la sincronizabilidad con el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$.

En el siguiente capítulo, el cambio ρ es usado para crear un algoritmo; por el cual se puede seleccionar el enlace que provee el máximo cambio en λ_N . Usando ésto, se puede remover la cantidad mínima necesaria de enlaces para llevar a la red a la sincronía. Además, se presentan a detalle algoritmos que también fueron generados con el propósito de aumentar la sincronizabilidad y algoritmos encontrados en la literatura.

Capítulo 6

Métodos utilizados

En este capítulo se enlistan los métodos para eliminar enlaces. Primero se presentan los métodos con teoría de perturbación propuestos como principal solución al problema de tesis. También se desarrollaron los métodos de eliminación directa y la modificación al método de ataque, como una solución al problema. Estos métodos se comparan con los encontrados en la literatura, principalmente en el artículo de Holme (2002) [42]. En este artículo, se aprecian algunas metodologías usando propiedades, como el grado y la intermediación, como criterio de selección de enlaces a eliminar. Estas propiedades se describen en el capítulo 3. Cabe mencionar que el artículo [42], principalmente utiliza estas metodologías para observar la vulnerabilidad y robustez en redes complejas. En la literatura se encuentran algunas variantes que también son estudiadas. Estas variantes se pueden dividir en dos categorías: métodos usando únicamente la topología inicial de la red (denominados “una vez”), y métodos ajustando la topología al ser eliminado un enlace (denominados “recalculada”).

Para los métodos desarrollados, existen dos posibles criterios de selección que son estudiados. El primer criterio se basa en eliminar el enlace que produzca el mayor cambio en el valor propio más grande λ_N . El segundo criterio selecciona el enlace que aumente el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (4.11) y con ello aumentar la sincronizabilidad.

Los métodos a discutir siguen de manera general las siguientes fases: 1) la creación de red (red de mundo pequeño o red de escala libre), 2) evaluación de la propiedad principal del método, 3) selección del enlace a eliminar basado en la evaluación, y 4) recopilación de resultados.

6.1 Métodos con teoría de perturbación

El siguiente método se plantea como principal solución al problema de tesis. Como se observa en el capítulo 5, la teoría de perturbación puede indicar el cambio aproximado (o perturbación) ρ_k en los valores propios λ_k de una matriz Laplaciana \mathbf{L} , si se elimina un enlace en la red de osciladores asociada con \mathbf{L} . Por lo tanto, al usar la ecuación (5.17), el valor de ρ_N podría ser un criterio de selección de enlace a eliminar. Además, el valor del cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (4.11), el cual indica sincronizabilidad, también puede ser un buen criterio de selección. Tomando en cuenta ρ_k (5.17) y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (4.11) como criterios de selección, se lograron desarrollar los siguientes cuatro algoritmos:

A) Aproximación una vez (\mathbf{AO} por sus siglas en inglés)

1. El algoritmo calcula la perturbación ρ_N (5.17) producida por cada enlace en la red.
2. Remueve los enlaces, del que produce la perturbación ρ_N (5.17) más alta, a la más baja.

B) Aproximación una vez usando cociente (\mathbf{AOe})

1. El algoritmo calcula la perturbación ρ_2 y ρ_N (5.17) producida por cada enlace en la red.
2. Se calcula el cociente usando los valores propios perturbados de la manera $\frac{\lambda_2 - \rho_2}{\lambda_N - \rho_N}$ (4.11).
3. Remueve los enlaces, del que producen el cociente más alto, al más bajo.

C) Aproximación recalculada (*AR*)

1. El algoritmo calcula la perturbación ρ_N (5.17) producida por cada enlace en la red.
2. Remueve el enlace con la perturbación ρ_N (5.17) más alta.
3. El proceso se repite.

D) Aproximación recalculada usando cociente (*ARe*)

1. El algoritmo calcula la perturbación ρ_2 y ρ_N (5.17) producida por cada enlace en la red.
2. Se calcula el cociente usando los valores propios perturbados de la manera $\frac{\lambda_2 - \rho_2}{\lambda_N - \rho_N}$ (4.11).
3. Remueve el enlace con el cociente más alto.
4. El proceso se repite.

6.2 Métodos de eliminación directa

Un enfoque posible al problema, es la directa remoción del enlace que decrementa más el valor de λ_N . También es posible la eliminación directa el enlace que produce el mayor cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$. Es por esto, que se han desarrollado los siguientes dos algoritmos:

A) Eliminación directa (*SD* por sus siglas en inglés)

1. Un enlace es eliminado.
2. El λ_N de la matriz Laplaciana es calculado y guardado.
3. El enlace es restaurado.
4. El proceso se repite hasta que cada enlace ha sido eliminado, su λ_N calculado y grabado, y el enlace ha sido restaurado, únicamente una vez.

5. De los datos obtenidos, el enlace que produjo el mayor cambio en λ_N , es eliminado permanentemente.
6. El proceso se repite.

B) Eliminación directa usando cociente (*SDe*)

1. Un enlace es eliminado.
2. El cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (4.11) de la matriz Laplaciana es calculado y guardado.
3. El enlace es restaurado.
4. El proceso se repite hasta que cada enlace ha sido eliminado, su cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (4.11) calculado y grabado, y el enlace ha sido restaurado, únicamente una vez.
5. De los datos obtenidos, el enlace que produjo el mayor cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (4.11), es eliminado permanentemente.
6. El proceso se repite.

6.3 Método de ataque al oscilador con el grado más alto (usando asortatividad)

En el artículo [42], se usa un algoritmo que se enfoca en remover un enlace aleatorio del oscilador con el grado k (3.2) más alto. Se ha modificado este concepto, y ahora se selecciona un enlace con el coeficiente de asortatividad r_{xy} (3.9) más alto del oscilador con el grado k más alto. Esto tras observar mejores resultados al reducir λ_N lo más posible, y al mismo tiempo, disminuir λ_2 lo menos posible. El algoritmo es el siguiente:

A) Ataque al grado más alto (*AD*)

1. Se encuentra el oscilador con el grado k (3.2) más alto.

2. De ese oscilador, se elimina el enlace con el coeficiente de asortatividad r_{xy} (3.9) más alto.
3. El proceso se repite.

6.4 Métodos con asortatividad

El coeficiente de asortatividad r_{xy} (3.9) de un enlace acoplado a los osciladores x y y , indica una relación existente entre el grado de esos osciladores. Como se explica en la subsección 3.3.3, valores positivos de r_{xy} , dadas por la ecuación (3.9), indican una correlación entre osciladores de grado similar. En la literatura, se ha observado que eliminar enlaces de osciladores altamente acoplados (hubs) puede provocar un mayor impacto en la red en lo que respecta a su robustez [42, 83]. Al usar el coeficiente de asortatividad r_{xy} (3.9) como criterio de selección, se desarrollaron las siguientes dos algoritmos:

A) Asortativo una vez (**ASO**)

1. El algoritmo calcula el coeficiente de asortatividad r_{xy} (3.9) para cada enlace en la red.
2. Se remueve los enlaces del que produce el coeficiente r_{xy} (3.9) más alto, al más bajo.

B) Asortativo recalculado (**ASR**)

1. El algoritmo calcula el coeficiente de asortatividad r_{xy} (3.9) para cada enlace en la red.
2. Se remueve el enlace con el coeficiente r_{xy} (3.9) más alto.
3. El proceso se repite.

6.5 Método con intermediación

El coeficiente de intermediación («betweenness centrality») b_e en la ecuación (3.10) es capaz de cuantificar el número de veces que un enlace actúa como puente entre dos osciladores, más información en sección 3.3.4 y en los artículos [41] y [42]. Esta medida puede identificar el enlace de mayor relevancia para la red en términos de flujo entre dos osciladores cualesquiera. Por ello en la literatura es usado para observar vulnerabilidad y robustez [42]. Los dos algoritmos existentes son:

A) Intermediación una vez (**BO**)

1. El algoritmo calcula el coeficiente de intermediación b_e (3.10) para cada enlace en la red.
2. Se remueve los enlaces, del que produce el coeficiente b_e (3.10) más alto, al más bajo.

B) Intermediación recalculada (**BR**)

1. El algoritmo calcula el coeficiente de intermediación b_e (3.10) para cada enlace en la red.
2. Se remueve el enlace con el coeficiente b_e (3.10) más alto.
3. El proceso se repite.

6.6 Método aleatorio

Los métodos antes presentados son comparados entre sí en los siguientes capítulos. Al hacer esto, se pretende hacer obvio cuál de los métodos logra reducir el valor propio λ_N con la menor cantidad de enlaces eliminados, manteniendo el valor de λ_2 con el menor cambio posible. Como base para la comparación, los algoritmos deben, como requisito mínimo, dar mejores resultados

que eliminar los enlaces de manera aleatoria. El “método aleatorio” (\mathbf{R}) consta de eliminar, uno a uno, los enlaces de la red en forma aleatoria, y registrar el cambio en los valores propios λ_2 y λ_N para su posterior análisis.

En el siguiente capítulo se exhibe una discusión acerca de los resultados usando los métodos antes mencionados.

Capítulo 7

Resultados

El caso 3 de la función maestra de estabilidad es de especial interés debido a que existe un número acotado de valores negativos en el máximo exponente de Lyapunov $\Lambda(\alpha)$ que hacen que la red sea estable y sincronizable. Las redes son compuestas por osciladores caóticos de Rössler ya que son de caso 3 [32].

Los métodos mencionados en el capítulo 6 son probados usando dos de los modelos de red más estudiados: el modelo de Watts-Strogatz (WS) para redes de mundo pequeño [49, 50], y el modelo Barabási-Albert (BA) para redes de escala libre [51, 52].

Para el modelo WS, fueron usadas redes de $N = 300$ osciladores, y sólo 35 enlaces fueron eliminados usando todos los métodos descritos en el capítulo 6. Para observar la efectividad de los métodos y tener relevancia estadística, se crearon 100 redes con grados promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 respectivamente; para un total de 300 redes. Los resultados fueron promediados.

La Tabla 7.1 muestra el cambio en el valor propio λ_N y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ por cada enlace eliminado para las redes con $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12. En el caso de los valores propios λ_N (gráficas en columna izquierda), es deseable que el valor disminuya con la menor cantidad de enlaces eliminados. Por otra parte, en el caso del cambio en el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (gráficas en columna

derecha) se considera que la red es sincronizable si el cociente obtenido es mayor a 0.0373256 (4.11), marcado en las gráficas con una línea roja horizontal. Los algoritmos **AR**, **ARe**, **AD**, **SD**, **SDe** y **ASR** resultan ser los que producen el mayor cambio en λ_N para los primeros 35 enlaces removidos en el modelo de red WS. Sin embargo, hay que considerar el valor de λ_2 , ya que éste debe ser $\lambda_2 > 0$; de lo contrario significa que un oscilador está fuera de la red. Por lo tanto, al hacer el análisis con el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ se puede concluir que los algoritmos **AR** y **ARe** muestran ser los que disminuyen el valor de λ_N mientras aumentan la sincronizabilidad.

Para el modelo BA, fueron usadas redes de $N = 1000$ osciladores, y sólo 30 enlaces fueron eliminados usando los métodos descritos en el capítulo 6. Para observar la efectividad de los métodos y tener relevancia estadística, se crearon 100 redes con grados promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 respectivamente; para un total de 300 redes. Los resultados fueron promediados.

La Tabla 7.2 muestra el cambio en el valor propio λ_N y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ por cada enlace eliminado para las redes con $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12. En el caso de los valores propios λ_N (gráficas en columna izquierda), es deseable que el valor disminuya con la menor cantidad de enlaces eliminados. Por otra parte, en el caso del cambio en el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ (gráficas en columna derecha) se considera que la red es sincronizable si el cociente obtenido es mayor a 0.0373256 (4.11), marcado en las gráficas con una línea roja horizontal. Los algoritmos **SD**, **SDe**, **AD**, **AR** y **ARe** resultan ser los que producen el mayor cambio en λ_N para los primeros 30 enlaces removidos.

Los resultados mostrados en la Tabla 7.2 son muy similares. Esto es de esperarse, ya que la tendencia en los algoritmos es a eliminar enlaces de los hubs. Sin embargo la cantidad de enlaces eliminados resulta ser insuficiente para apreciar cuál algoritmo es el que disminuye a λ_N mientras aumenta la sincronizabilidad. Esto es debido a la cantidad de enlaces totales en las redes BA de 1000 osciladores. Los algoritmos como **SD** y **SDe** pueden dar buenos resultados, pero son de muy lenta ejecución.

Por tanto, en la Tabla 7.3 se muestra cómo cambia el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al ser eliminados todos los enlaces en una red de escala libre de $N = 1000$ con grados promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 . Se omite el resultado con el algoritmo **SD** y **SDe** en grados promedio $\langle k \rangle = 8$ y 12 , debido a su lenta ejecución. La Tabla 7.3 muestra que no se logra llegar a valores del cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ que sincronicen a las redes de escala libre de $\langle k \rangle = 4$ al eliminar enlaces. Por otra parte, se observa que en los casos de una red de escala libre de $\langle k \rangle = 8$ y 12 , eliminar enlaces puede ser una estrategia para llevar a la red a sincronía. Los algoritmos **AR**, **ARe** y **AD** muestran ser los que disminuyen el valor de λ_N mientras aumentan la sincronizabilidad.

La Tabla 7.4 muestra el cambio real promediado en los valores propios λ_N y λ_2 producidos por los diferentes algoritmos para cada iteración. Luego, es promediado para 35 enlaces eliminados usando el modelo WS y 30 enlaces eliminados con el modelo BA. Se observa que los modelos usando teoría de perturbación (**AR**, **ARe**, **AO** y **AOe**) provocan un cambio más grande en λ_N , mientras provocan un cambio marginal en el λ_2 .

En la Figura 7.1 se puede observar el efecto en el error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) en los osciladores, para cada 5 enlaces removidos usando el algoritmo **AR**. La red está compuesta por $N = 300$ osciladores caóticos de Rössler en una configuración de mundo pequeño con $\langle k \rangle = 4$. Usando esa misma red, la Figura 7.2 muestra como el error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) disminuye para los primeros 50 enlaces eliminados.

En la Figura 7.3 muestra el error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) en los osciladores de una red compuesta por $N = 300$ osciladores caóticos de Rössler en una configuración de mundo pequeño con $\langle k \rangle = 4, 8$, y 12 , al eliminarse todos los enlaces (representado en porcentaje) usando el algoritmo **AR**. Se observa que a grados promedio bajos, sólo es posible eliminar un bajo porcentaje de enlaces. De eliminarse más, el $\langle e \rangle$ tiende a subir. Por otra parte, a grados promedio más altos se puede eliminar más porcentaje de enlaces y seguir manteniendo un bajo valor de $\langle e \rangle$.

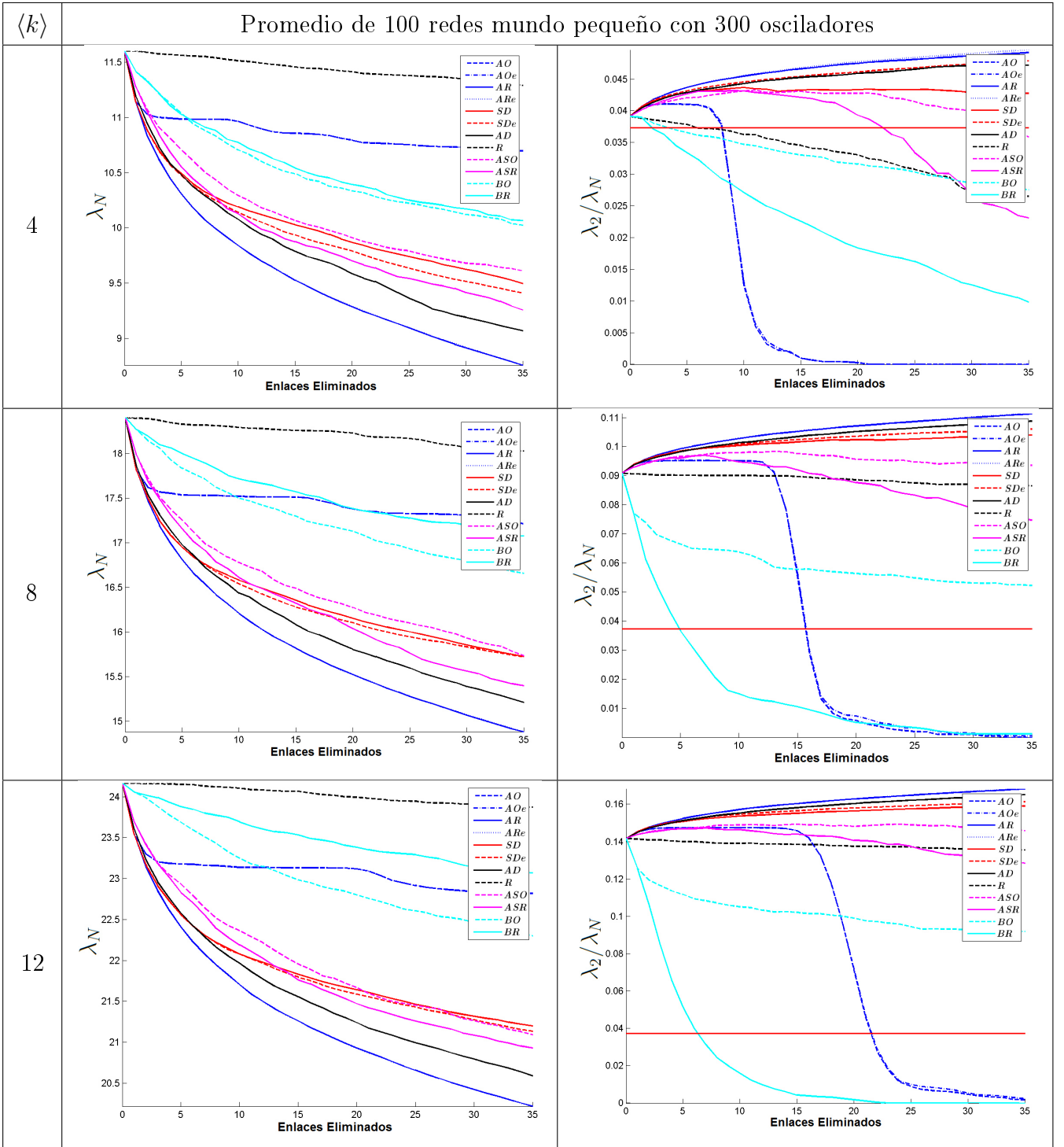


Tabla 7.1: Se muestra el cambio en el valor propio λ_N y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al eliminar enlaces usando todos los algoritmos, en redes de mundo pequeño de grado promedio 4, 8, y 12. Si el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} \geq 0.0373256$ (4.11) la red es sincronizable, y está marcado por una línea roja horizontal.

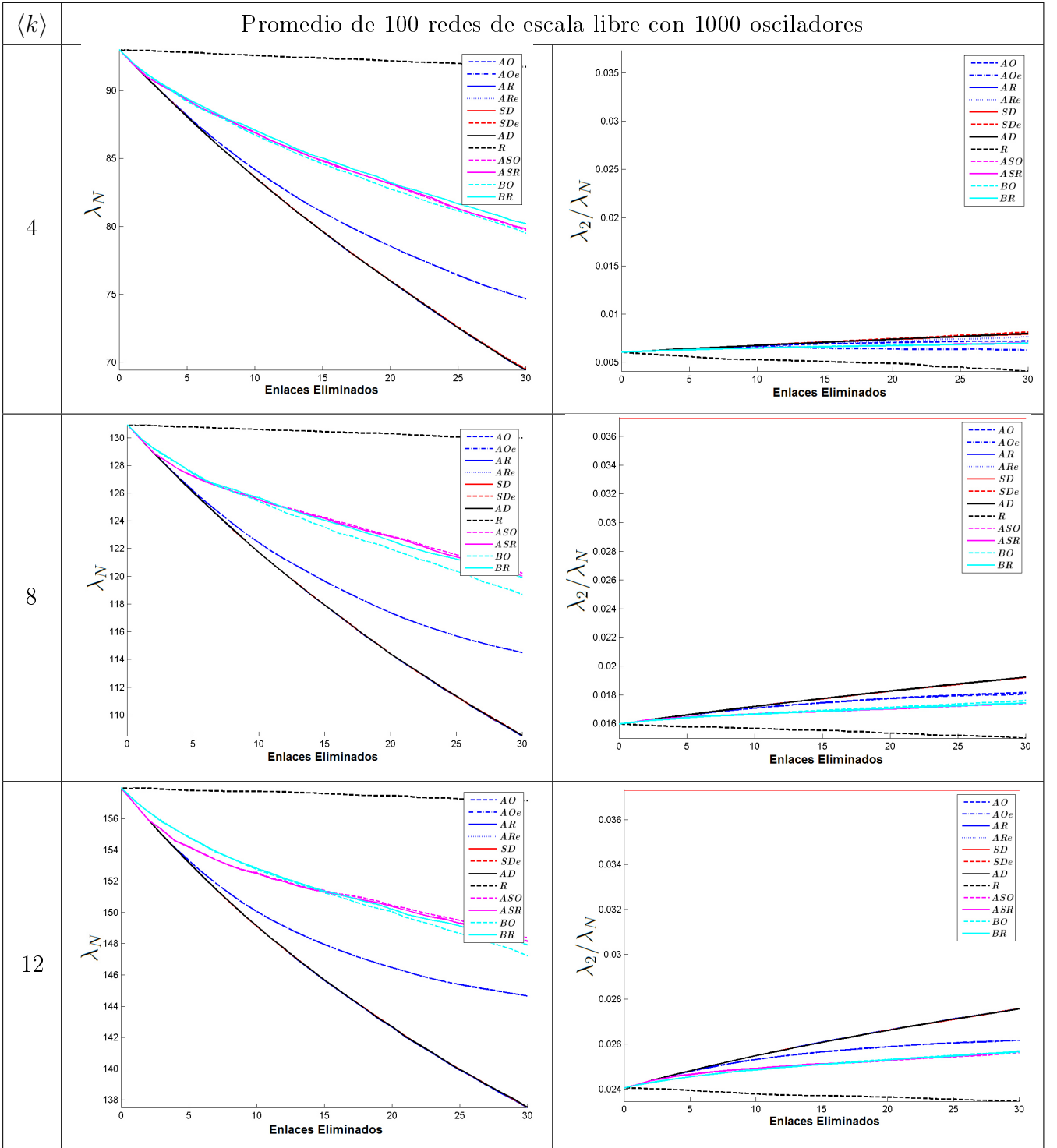


Tabla 7.2: Se muestra el cambio en el valor propio λ_N y el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al eliminar enlaces usando todos los algoritmos, en redes de escala libre de grado promedio 4, 8, y 12. Si el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} \geq 0.0373256$ (4.11) la red es sincronizable, y está marcado por una línea roja horizontal.

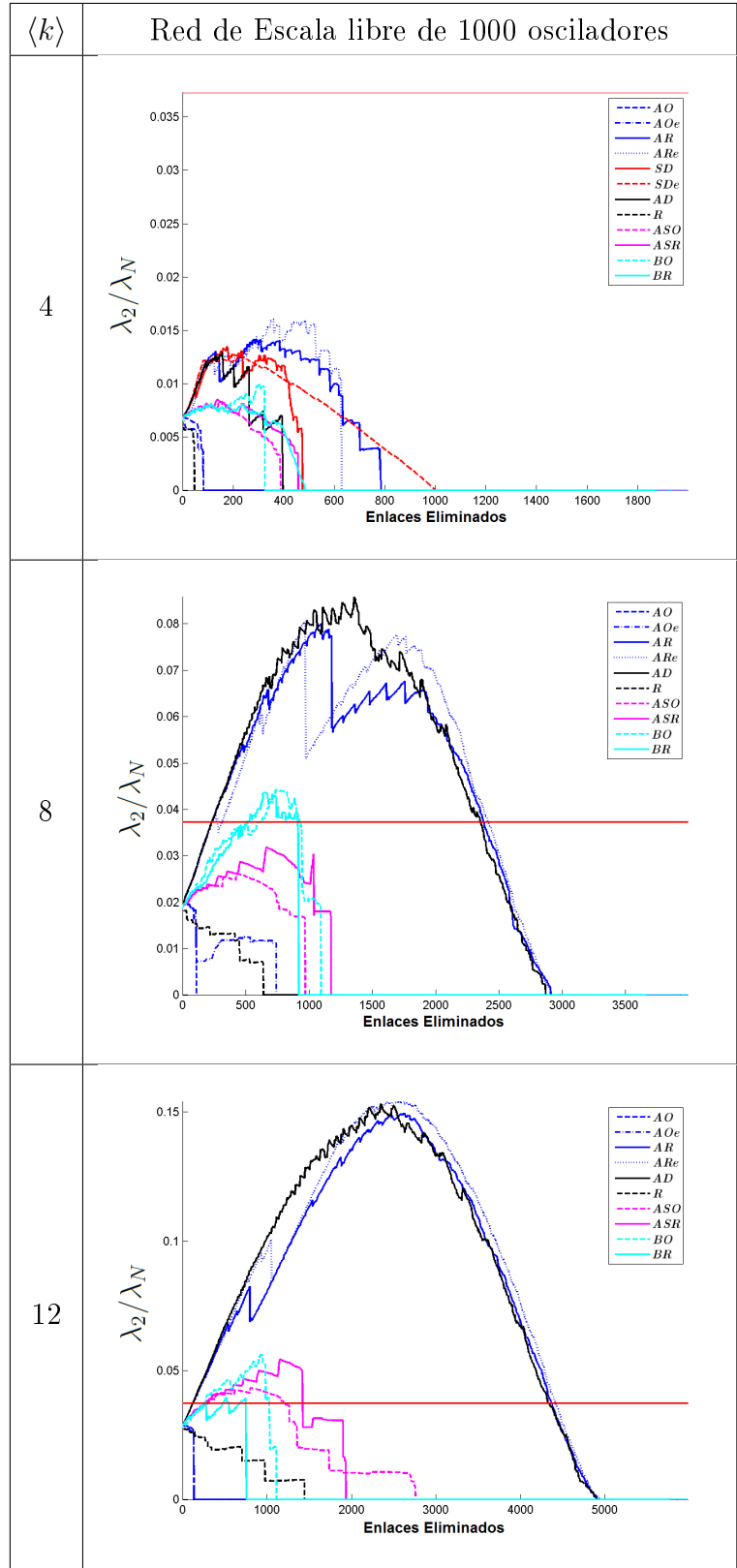


Tabla 7.3: La tabla muestra el cambio en el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ al eliminar todos los enlaces usando los algoritmos, en una red de escala libre, y de grado promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 . Si el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N} \geq 0.0373256$ (4.11) la red es sincronizable, y está marcado por una línea roja horizontal. Se observa como sólo las redes de libre escala de $\langle k \rangle = 8$ y 12 adquieren la capacidad de sincronía usando los algoritmos **AR**, **ARe** y **AD**. Los algoritmos **SD** y **SDe** no pudieron realizarse debido al tiempo de cómputo requerido.

Tabla 7.4: Muestra el cambio absoluto promediado en los valores propios λ_N y λ_2 producidos por los diferentes algoritmos. El promedio es el cambio en 100 diferentes redes y promediado a partir de 35 enlaces removidos en el modelo de mundo pequeño y a partir de 30 enlaces removidos en el modelo de escala libre.

λ_k	Nombre del Algoritmo	Mundo Pequeño			Escala libre		
		4	8	12	4	8	12
λ_N	Aproximación una vez (AO)	25.90	34.10	38.50	611.60	548.20	444.30
	Aproximación una vez usando cociente (AOe)	25.90	34.10	38.50	611.60	548.20	444.30
	Aproximación Recalculada (AR)	81.40	100.70	112.80	786.60	749.40	683.00
	Aproximación Recalculada usando cociente (ARe)	81.30	100.60	112.90	786.20	749.20	682.90
	Asortativo una vez (ASO)	57.00	76.40	87.80	443.10	357.50	320.30
	Asortativo Recalculado (ASR)	67.10	85.90	92.50	439.70	364.40	327.10
	Ataque al grado más alto (AD)	72.50	91.20	102.20	786.10	748.20	681.80
	Intermediación una vez (BO)	45.20	50.00	53.30	450.70	408.50	359.00
	Intermediación Recalculada (BR)	43.90	38.00	31.40	427.10	367.50	335.10
	Aleatorio (R)	8.90	10.80	8.50	42.10	32.60	27.20
	Eliminación directa (SD)	60.20	76.60	84.80	785.30	748.50	681.70
	Eliminación directa usando cociente (SDe)	62.70	76.70	86.70	783.60	747.80	681.80
λ_2	Aproximación una vez (AO)	12.90	47.60	96.20	0.69	0.12	0.04
	Aproximación una vez usando cociente (AOe)	12.90	47.40	96.00	3.00	0.54	0.03
	Aproximación Recalculada (AR)	0.61	0.33	0.32	0.40	0.06	0.03
	Aproximación Recalculada usando cociente (ARe)	0.50	0.28	0.27	1.20	0.05	0.01
	Asortativo una vez (ASO)	3.10	5.60	9.60	0.19	0.03	0.02
	Asortativo Recalculado (ASR)	6.80	14.80	20.80	0.19	0.03	0.02
	Ataque al grado más alto (AD)	0.69	0.39	0.31	0.39	0.05	0.02
	Intermediación una vez (BO)	5.10	22.90	39.10	0.30	0.06	0.70
	Intermediación Recalculada (BR)	10.20	47.10	97.40	0.22	0.04	0.02
	Aleatorio (R)	4.40	3.20	5.40	6.10	4.60	3.70
	Eliminación directa (SD)	1.30	0.93	1.10	0.46	0.15	0.06
	Eliminación directa usando cociente (SDe)	0.05	0.04	0.05	0.03	0.01	0.01

Nota: Los resultados son mostrados $\times 10^{-3}$ y truncados al segundo valor significativo por conveniencia.

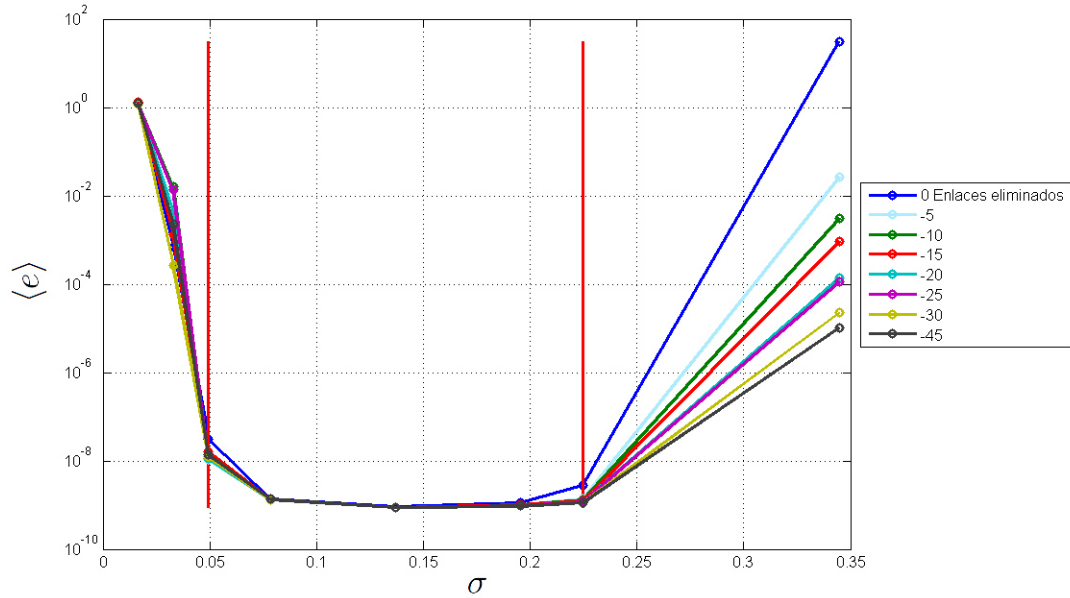


Figura 7.1: El error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) de la sincronía de la red dinámica decrece por cada 5 enlaces eliminados usando el algoritmo **AR**. La red fue creada usando 300 osciladores caóticos de Rössler con una topología de mundo pequeño con grado promedio $\langle k \rangle = 4$.

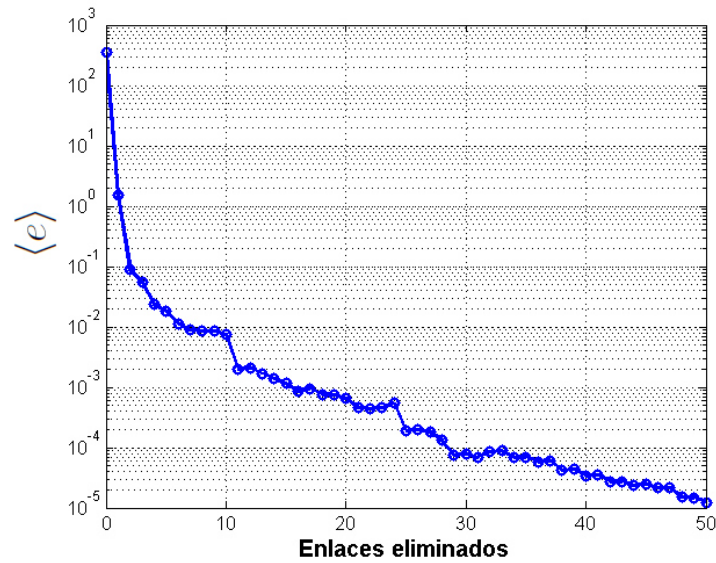


Figura 7.2: El error medio de sincronización $\langle e \rangle$ (2.2) de una red de osciladores caóticos de Rössler de $N = 300$ y $\langle k \rangle = 4$. Se observa como el $\langle e \rangle$ disminuye su valor con los primeros 50 enlaces eliminados en la red usando el algoritmo **AR**.

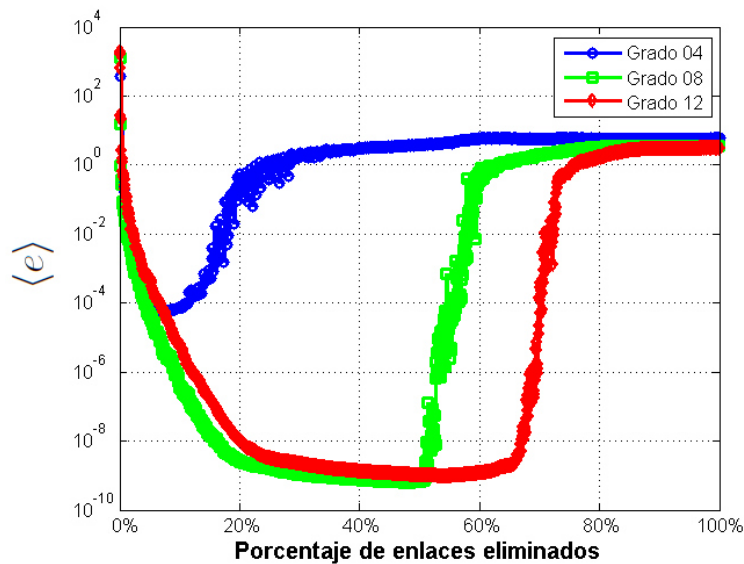


Figura 7.3: Gráfico del error medio de sincronización $\langle e \rangle$ contra el porcentaje de enlaces eliminados en redes de modelo WS de 300 osciladores caóticos de Rössler con grados promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 , al ser sometidos al algoritmo **AR**. Se observa cómo las redes $\langle k \rangle = 4$ (azul) puede disminuir el valor de $\langle e \rangle$, pero sólo se pueden eliminar hasta un 15% de enlaces. Al eliminarse más enlaces, $\langle e \rangle$ se incrementa. Las redes $\langle k \rangle = 8$ (verde) y $\langle k \rangle = 12$ (rojo) pueden eliminar hasta un 50% y un 65%, respectivamente, antes de que $\langle e \rangle$ se incremente.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis se plantea el problema de sincronizar una red de osciladores de Rössler, eliminando una mínima cantidad de enlaces. Se descarta la posibilidad de usar un algoritmo de “fuerza bruta”, que funciona eliminando cada uno de los enlaces en todas las combinaciones existentes, para luego seleccionar la que produzca los mejores resultados [86].

El problema de sincronizar redes de osciladores de Rössler puede ser observado usando la función maestra de estabilidad. Con ella se puede medir los cambios en términos de los valores propios λ_k ($k = 2, 3, \dots, N$) de una matriz Laplaciana perteneciente a una red, cuando un enlace es eliminado. También se obtienen las condiciones para que una red de osciladores de Rössler sincronice. Si la ecuación (4.11) se cumple, la red sincroniza.

Se usa la teoría de perturbación para conocer el cambio aproximado que sufren estos valores propios. Este conocimiento, sirve de criterio de selección de enlaces. Dos metodologías son creadas con este concepto; una para eliminar los enlaces que produzcan el mayor cambio ρ_N en el valor propio λ_N y otro con el propósito de que aumente el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$.

Se desarrollan dos metodologías con el criterio de la eliminación directa. Removiendo previamente los enlaces y guardando los cambios generados en los valores propios, una metodología

selecciona el enlace que produce el mayor cambio en el λ_N , y otro el que aumenta el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$. Se modifica también el método de ataque al osciladores con grado k más alto, encontrado en la literatura [42], para incluir asortatividad como parte del criterio. Las anteriores metodologías, son comparadas con metodologías encontradas en la literatura.

Tras analizar el método de eliminación aleatoria, revela que no es posible eliminar enlaces al azar y llevar una red a la sincronización. Esto confirma que existe un orden específico de enlaces a eliminar, para el cual la red sincroniza con la menor cantidad de enlaces eliminados.

Conforme la topología va cambiando, también las propiedades de la red. Al eliminar enlaces, las metodologías que son recalculadas se adaptan a estas nuevas propiedades. Los resultados de estos, tienden a reflejar un mayor cambio en valor de λ_N , que las metodologías que usan sólo la matriz Laplaciana original (denominados “una vez”).

Cabe destacar, que al sólo comparar las metodologías de topología original, el algoritmo **AO** y **AOe** logran disminuir el valor de λ_N más que **ASO** y **BO**, pero sólo para los primeros 3 enlaces eliminados. Si se eliminan más, el algoritmo **ASO** es el que más disminuye λ_N por cada enlace eliminado en redes de mundo pequeño, y el algoritmo **BO** para redes de escala libre. Para los algoritmos **AO** y **AOe**, el valor propio λ_2 tiende a cero en los primeros enlaces eliminados. Se concluye que para metodologías de topología original los algoritmos **AO** y **AOe** no aumentan la sincronizabilidad de la red para mundo pequeño y de escala libre.

Para las metodologías que recalculan la matriz Laplaciana al eliminarse un enlace, los algoritmos **AR**, **ARe**, **AD**, **SD** y **SDe** logran disminuir λ_N y aumentar la sincronizabilidad en las redes. El algoritmo **ARe** es el que logra aumentar más la sincronizabilidad para las redes de mundo pequeño y las redes de escala libre. Se concluye, que los algoritmos basados en teoría de perturbación, **AR** y **ARe**, optimizan a la red al eliminar los enlaces que no contribuyen a la sincronizabilidad.

Tras el análisis de los resultados de los algoritmos, se observa que las redes de mundo pequeño tienen la capacidad de sincronizar, pero ésta aumenta tras eliminar enlaces con los algoritmos **AR**, **ARe**, **SD**, **SDe** y **AD**. El aumento de sincronizabilidad significa que aumenta el rango de valores de la fuerza de acoplamiento σ que pueden sincronizar a la red. Las redes de escala libre con grado promedio $\langle k \rangle = 4, 8$ y 12 no cuentan con un valor de σ tal que lleve a la red a la sincronización. Las redes de escala libre para $\langle k \rangle = 8$ y 12 adquieren la capacidad de sincronizar una vez que algunos enlaces son eliminados con las diferentes metodologías. Se concluye que las redes de escala libre para $\langle k \rangle = 4$ no pueden sincronizarse eliminando enlaces y otro método debe usarse.

El error medio de sincronización $\langle e \rangle$ graficado contra el porcentaje de enlaces eliminados muestra que para las redes de grado promedio bajo, por ejemplo $\langle k \rangle = 4$, sólo unos pocos enlaces pueden ser eliminados con el algoritmo **AR**, alrededor de 15%. Para redes de grado promedio alto, por ejemplo $\langle k \rangle = 8$ y 12 , se pueden eliminar más enlaces, alrededor de 50% y 65% respectivamente. Esto podría representar que la red una vez sincronizada, tenga robustez a perder la sincronizabilidad si se eliminan más enlaces.

Por último, el tiempo de cómputo de estos algoritmos no fue registrado durante su ejecución. Sin embargo las metodologías de eliminación directa, **SD** y **SDe**, resultan ser las que mayor tiempo de cómputo necesitaron para llegar a un resultado. Incluso se usó programación en paralelo para que los algoritmos **SD** y **SDe** pudieran reducir el tiempo de cómputo. Las metodologías presentadas por esta tesis (**AO**, **AOe**, **AR**, **ARe**, **AD**, **ASR**, **ASO**, **BO** y **BR**) representan un mucho menor tiempo de cómputo que las **SD** y **SDe**.

8.1 Trabajo Futuro

Se han encontrado algunos problemas abiertos en relación a este trabajo que pueden mencionarse como trabajo futuro en esta dirección. Estos son:

- **Investigar la robustez de las redes de mundo pequeño y de escala libre.** En el transcurso de ésta investigación, se observó que una gran parte de la literatura está enfocada al cálculo de la robustez, en lo que se refiere a la eliminación de enlaces y osciladores. Los métodos desarrollados para este trabajo, podrían ser útiles para expandir el conocimiento que actualmente se tiene en robustez y vulnerabilidad de la red a ataques.
- **Redes con control pinning.** A grandes razgos, estas redes tienen uno o varios osciladores maestros que direccionan la dinámica del sistema. Un estudio del comportamiento ante eliminación de enlaces aplicando los métodos aquí presentados, aún no se ha visto en la literatura. Es de aclarar que las matrices Laplacianas al ser direccionadas, no serían simétricas, y la creación de un nuevo algoritmo sería necesario.
- **Observar el comportamiento de las redes usando el modelo de Kuramoto ante los algoritmos de eliminación de enlaces.** Actualmente, las redes usando el modelo de Kuramoto han sido ámpliamente estudiadas. Un estudio de robustez aplicando estos métodos podría revelar mayor información sobre el comportamiento de estos sistemas.
- **Llevar a la sincronía una red real.** Para la aplicación de estos métodos y asegurar que el sistema sincronice, es importante que el oscilador en la red ocurra bajo el caso 3 de la MSF. De otra manera, no puede llevarse a la sincronía (caso 1), o tan sólo con aumentar la fuerza de acoplamiento σ es suficiente (caso 2).
- **Aplicar los métodos para llevar a la sincronización a una red de osciladores no idénticos.** Las redes estudiadas en este trabajo, utilizan el mismo tipo oscilador. La

MSF considera únicamente redes de osciladores idénticos. En este tipo de redes, habría que considerar algún otro método para observar sincronizabilidad y obtener los límites bajo los cuales son estables.

Capítulo 9

Contribuciones

9.1 Principales contribuciones de este trabajo doctoral

La siguiente lista muestra de manera de resumen las principales contribuciones de este trabajo de investigación doctoral “Sincronización de redes complejas”.

1. Se implementa una metodología para la eliminación de enlaces basados en teoría de perturbación y se desarrollaron 4 diferentes algoritmos: ***AR***, ***ARe***, ***AO*** y ***AOe***.
2. Se implementa una metodología para la eliminación directa de enlaces y se desarrollaron 2 algoritmos: ***SD*** y ***SDe***.
3. Se modifica la metodología de ataque al oscilador de grado mayor ***AD***, tras añadir selección por asortatividad.
4. Se comparan los algoritmos ***AR***, ***ARe***, ***AO***, ***AOe***, ***SD***, ***SDe*** y ***AD***, con los algoritmos encontrados en la literatura, como lo son: ***ASO***, ***ASR***, ***BO*** y ***BR***.
5. Se concluye que los algoritmos ***AO*** y ***AOe***, que eliminan enlaces basándose sólo en la topología original, producen resultados que bajan el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$ y por lo tanto bajan la sincronizabilidad de la red.

6. Se concluye que los algoritmos **AR** y **ARe** son los que reducen más el valor propio λ_N y aumentan más la sincronizabilidad de la red.
7. Se concluye que las redes de escala libre para $\langle k \rangle = 4$ no se pueden sincronizar eliminando enlaces.
8. Se concluye que los algoritmos desarrollados, **AR**, **ARe**, **SD**, **SDe** y **AD** logran llevar a una red de escala libre a un estado síncrono, logrando el objetivo de la tesis.
9. Se observa la posibilidad de que la red sincronizada usando algoritmos **AR** y **ARe**, sea robusta a perder sincronizabilidad, si se eliminan enlaces con el mismo algoritmo, para grados promedio como $\langle k \rangle = 8$ y 12.
10. Se observa que al aumentar el cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_N}$, también aumenta el rango de valores de σ para el cual la red sincroniza.

9.2 Productos derivados de este trabajo doctoral

A) Artículos en revistas indexadas

1. Posadas-Castillo C., Garza-González E., Díaz-Romero D.A., Alcorta-García, E., Cruz-Hernández C. [2014] *Synchronization of irregular complex networks with oscillators: Hamiltonian systems approach*, Journal of Applied Research and Technology Vol 12,4 782-791
2. Garza-González E., Posadas-Castillo C., Rodríguez-Liñan A., Cruz-Hernández C. [2015] *Chaotic synchronization of irregular complex network with Hysteretic circuit-like oscillators in Hamiltonian form and its application in private communications*. Aceptado para publicación en Revista Mexicana de Física.

B) Artículos en extenso en congresos internacionales

1. Garza-González E., Posadas-Castillo C., Díaz-Romero D.A., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Loya-Cabrera A.E., Castillo-Martínez R. [2011] *Synchronization of irregular complex networks with chaotic oscillators in Hamiltonian form like nodes* 2nd ICIAS Puebla, Puebla, México Oct. 5-8

C) Póster en congresos internacionales

1. Garza-González E., Almendral-Sánchez J., Posadas-Castillo C. [2013] *A study of the effect of the links in the synchronization of a complex network* NET-WORKS 2013 El Escorial (Madrid), Spain Dic. 11-13

D) Trabajos en proceso de sometimiento

1. Garza-González E., Almendral-Sánchez J., Posadas-Castillo C. [2015] *Study of the effect of the edges in the synchronization of a complex network*. Por someterse a la revista Chaos Solitons and Fractals.
2. García-Sepúlveda O., Soriano-Sánchez A.G., Platas-Garza M.A., Garza-González E., Posadas-Castillo C. [2015] *Synchronization of fractional order Lü chaotic oscillators application to voice encryption*. Por someterse a la revista The European Physical Journal Special Topics.

Bibliografía

- [1] T. Scott [2015] *The Speed of Outrage: Tom Scott at Thinking Digital 2015*, <https://www.youtube.com/watch?v=jE2PP7EowdM>
- [2] Science 284 79-109 [1999]
- [3] N. Goldenfeld & L.P. Kadanoff [1999] *Simple lessons from complexity*, SCIENCE Vol 284
- [4] C. Cruz Hernandez, R. M. Lopez Gutierrez, A. Y. Aguilar Bustos & C. Posadas Castillo [2010] *Communicating encrypted information based on synchronized hyperchaotic maps*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 11(5): 337-349 p. (PA: 100640)
- [5] C. Cruz Hernandez [2004] *Synchronization of time-delay Chua's oscillator with application to secure communication* Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 4(1): 1-13 p. (PA: 16479)
- [6] G.M. Whitesides & R.F. Ismagilov [1999] *Complexity in chemistry*, SCIENCE Vol 284
- [7] E.D. Cera, P.E. Phillipson, & J. Wyman [1989] *Limit-cycle oscillations and chaos in reaction networks subject to conservation of mass*, Journal of the Atmospheric Sciences 20 130-141.
- [8] D. Baltazar & B.L. Clarke [1987] *Bistability in chemical reaction networks: Theory and application to the peroxidase-oxidase reaction*, J. Chem. Phys. 87 (6)
- [9] C. Kock & G. Laurent [1999] *Complexity and the nervous system*, SCIENCE Vol 284
- [10] G. Weng, U.S. Bhalla & L.P. Kadanoff [1999] *Complexity in biological signaling systems*, SCIENCE Vol 284
- [11] J.K. Parrish & L. Edelstein-Keshet [1999] *Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation*, SCIENCE Vol 284
- [12] J.E. Keeley , W.J. Bond *Mast flowering and Semelparity in Bamboos: The Bamboo Fire Cycle Hypothesis* PAm. Nat. 1999, Vol. 152, pp. 383-391
- [13] C. Cabeza, et al. [2010] *Synchronization of fireflies using model of light controlled oscillators*, International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics

- [14] B.T Werner [1999] *Complexity in natural landform patterns*, SCIENCE Vol 284
- [15] D. Rind [1999] *Complexity and climate*, SCIENCE Vol 284
- [16] E.N. Lorenz [1963] *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences 20 130-141.
- [17] W.B. Arthur [1999] *Complexity and the economy*, SCIENCE Vol 284
- [18] J.B. Glattfelder, & S. Battistonet [2009] *Backbone of complex newtorks of corporations: The flow of control* Phys. Rev. E 80, 036104
- [19] S. Vitali, J.B. Glattfelder, & S. Battistonet [2011] *The newtork of global corporate control* PLOS ONE Vol. 6, 10 e25995.
- [20] S. Strogatz, [2001] *Exploring complex networks*, Nature 410 268-276.
- [21] S. Boccaletti, et al. [2006] *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports 424 175-306.
- [22] K.M. Cuomo, et al. [1993] *Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications*, IEEE Trans. on Circ. and Sys. II: Ana. and Dig. Signal Proc. vol. 40 (10)
- [23] S. Boccaletti, et al. [2002] *The synchronization of chaotic systems*, Physics Reports 366 1-101.
- [24] S. Boccaletti, et al. [2000] *The control of chaos: theory and applications*, Physics Reports 329 103-197.
- [25] S. Havlin et al. [2012] *Challenges in network science: Applications to infrastructures, climate, social systems and economics*, Eur. Phys. J. Special Topics 214, 273-293
- [26] L.M. Pecora & T.L. Carroll, [1990] *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. 64 821-824.
- [27] Y.U. Cao, A.S. Fukunaga & A.B. Kahng [1997] *Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions*, Autonomous Robots, 4, 1-23
- [28] H.G. Winful & S.S. Wang [1988] *Stability of phase locking in coupled semiconductor laser arrays*, Appl. Phys. Lett. 53 (20) 1894-1896
- [29] Q. Zhang & J. Lu [2006] *Chaos synchronization of a new chaotic system via nonlinear control*, Chaos, Solitons and Fractals 37, 175-179.
- [30] J.G. Barajas-Ramírez [2012] *Robust synchronization of a class of uncertain complex networks via discontinuous control*, Computers and Mathematics and Applications 64 956-964.
- [31] W. Lu [2007] *Adaptive dynamical networks via neighborhood information: Synchronization and pinning control*, CHAOS 17, 023122.

- [32] L.M. Pecora & T.L. Carroll [1997] *Master stability function for synchronized coupled systems*, Phys. Rev. Lett. 80 (10) 2109-2112.
- [33] R. Albert & A. Barabasi [2002] *Statistical mechanics of complex networks*, Rev. Mod. Phys 74.
- [34] M.E.J. Newman [2003] *The structure and function of complex networks*, SIAM Review 45, 167-256
- [35] A. Hagberg & D. Schult [2008] *Rewiring networks for synchronization*, CHAOS 18, 037105 2008
- [36] V.H.P. Louzada, et al. [2013] *Smart rewiring for network robustness*, Journal of Complex Networks 1, 150-159
- [37] Z. Duan et al. [2007] *Are networks with more edges easier to synchronize?*, Chinese Phys. B 18 3122. doi:10.1088/1674-1056/18/8/004
- [38] F.M. Atay & T. Biyikoglu [2005] *Graph operations and synchronization of complex networks*, Phys. Rev. E 72, 016217.
- [39] J.G. Restrepo, E. Ott, & B.R. Hunt [2006] *Characterizing the dynamical importance of network nodes and links*, Phys. Rev. Lett. 97, 094102.
- [40] C.Y. Yin et al. [2006] *Decoupling process for better synchronizability on scale-free networks*, Phys. Rev. E 74, 047102.
- [41] X.F. Wang & G. Chen [2002] *Synchronization in small-world dynamical networks*, Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 187-192.
- [42] P. Holme et al. [2002] *Attack vulnerability of complex networks*, Phys. Rev. E 65, 056109.
- [43] L. Daqing et al. [2000] *Spatial correlation analysis of cascading failures: Congestions and Blackouts*, Scientific Reports 4 5381 .
- [44] S. Shao et al. [2015] *Percolation of localized attack on complex networks*, New J. Phys. 17 023049.
- [45] G. Dong et al. [2013] *Robustness of network under targeted attack*, Phys. Rev. E 87 052804.
- [46] E. Schrödinger [1926] *Quantisierung als Eigenwertproblem*, [Quantification of the eigenvalue problem] Annalen der Physik 80 (13): 437-490
- [47] J.J. Sakurai & J. Napolitano *Modern quantum mechanics (2nd ed.)*, Addison Wesley ISBN 978-0-8053-8291-4. Cap. 5
- [48] W.E. Wiesel [2010] *Modern astrodynamics*, Ohio: Aphelion Press. p107 ISBN 978-145378-1470.

- [49] D.J. Watts & S.H. Strogatz [1998] *Collective dynamics of small world networks*, Nature 393, 440-442.
- [50] D.J. Watts [1999] *Networks, dynamics, and the small world phenomenon*, American Journal of Sociology 105, 493-527.
- [51] A. Barabasi & R. Albert [1999] *Emergence of scaling in random networks*, Science 286 509-512.
- [52] X.F. Wang [2002] *Complex networks: Topology, dynamics and synchronization*, Int. J. Bifurcation and Chaos, 12(5) 885-916.
- [53] R.F. Constantino et al. [1997] *Chaotic Dynamics in an Insect Population*, Science 275 389-391
- [54] R.H. Day [1983] *The emergence of chaos from classical economy growth*, Quarterly Journal of Economics 98 201-213.
- [55] C. Kyrtsov et al. [2006] *Evidence for chaotic dependence between US inflation and commodity prices*, Journal of Macroeconomics 28 256-266
- [56] A. Fradkov et al. [2004] *Energy speed-gradient control of satellite oscillations*, IFAC Automatic Control in Aerospace 417-422.
- [57] J.M. Muñoz-Pacheco et al. [2009] *Automatic synthesis of 2D-n-scrolls chaotic systems by behavioral modeling*, J. of App. Re. and Tec. 7 05-13
- [58] C. Huguenii [1673] *Horoloquium Oscilatorium* Apud F. Muguet, Parisiis
- [59] K. Czolczynski et al. [2011] *Huygen's odd sympathy experiment revisited*, Int. J. Bifurcation Chaos 21, 2047. DOI: 10.1142/S0218127411029628
- [60] S. Strogatz [2003] *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*, ISBN-13: 978-0786887217
- [61] J.E. Keeley & W.J. Bond [1999] *Mast flowering and semelparity in bamboos: The bamboo fire cycle hypothesis* Pam. Nat. 152 383-391
- [62] B. Gladman et al. [1996] *Synchronous locking of tidally evolving satellites*, Icarus 122 166-192
- [63] M. Rosenblum et al. [1996] *Phase synchronization of chaotic oscillators*, Phys. Rev. Let. 76, 11
- [64] M. Rosenblum et al. [1997] *From phase to lag synchronization coupled chaotic oscillators*, Phys. Rev. Let. 78, 22
- [65] L. Kocarev & U. Parlitz [1996] *Generalized synchronization, predictability and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems* Phys. Rev. Let. 76, 11

- [66] S. Boccaletti & D.L. Valladares [2000] *Characterization of intermittent lag synchronization* Phys. Rev. E 62, 5
- [67] M.A. Zaks et al. [1999] *Alternating locking rations in imperfect phase synchronization* Phys. Rev. Let. 82, 21
- [68] R. Femat & G. Solís-Perales [1999] *On the chaos synchronization phenomena* Phys. Let. A 262, 50-56
- [69] H. Sira-Ramírez, & C. Cruz-Hernández [2001] *Synchronization of chaotic systems: a generalized hamiltonian systems approach*, Int. J. Bifurcation Chaos 11, 1381 (2001). DOI: 10.1142/S0218127401002778
- [70] A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza, & D.A. Diaz-Romero [2015] *Performance improvement of chaotic encryption via energy and frequency location criteria* Mathematics and Computers in Simulation 112 14-27
- [71] J. Wang & Y. Zhang [2010] *Network synchronization in a population of star-coupled fractional nonlinear oscillators* Phys. Let. A 374,13 1464-1468
- [72] H. Fujisaka & T. Yamada [1983] *Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems* Prog. Theor. Phys. 69, 1 32-47
- [73] J.E. Cohen et al. [1990] *Community food webs: Data and theory*, Springer-Verlag
- [74] J. Scott [2000] *Social network analysis: A handbook*, Sage, London
- [75] S. Wasserman & K. Faust [1994] *Socal Network Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [76] M.E.J. Newman [2001] *Scientific collaboration networks I: Network construction and fundamental results* Physical Review E, 64(1)
- [77] S. Redner [1998] *How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution*, Eur. Phys. J. B4(2), 131-134.
- [78] J.G. White et al. [1986] *The structure of the nervous system of the nematode C. Elegans*, Philos. Trans. Roy. Soc. London 314, 1-340
- [79] E. Ravasz et al. [2002] *Hierarchical organization of modularity in metabolic networks*, Science 297, 1551-1555
- [80] U. Parlitz & L. Kocarev [1998] *Handbook of chaos control*, Ed. Springer-Verlag.
- [81] M. Hasler et a. [1995] Trans. R. Soc. Lond. A, 353: 115-126
- [82] H.G. Schuster [1995] *Deterministic chaos: An introduction*, Weinheim, Germany, VCH
- [83] X.F. Wang & G. Chen [2003] *Complex networks: Small-world, scale-free and beyond*, IEEE Circuits and Systems Magazine

- [84] M.E.J. Newman [2002] *Assortative mixing in networks*, Phys. Rev. Lett. 89, 208701.
- [85] J.A. Almendral, I. Serniña-Nadal, D. Yu, I. Leyva, & S. Boccaletti [2009] *Regulating synchronous states of complex networks by pinning interaction with an external node*, Physical Review E 80, 066111
- [86] D. Verma et al. [2014] *Comparison of Brute-Force and K-D Tree Algorithm*, International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering Vol. 3, 1.