

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**“ANÁLISIS NUMÉRICO COMPUTACIONAL DEL FLUIDO DE UNA  
PELÍCULA DE ACEITE EN UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN  
AUTOMOTRIZ POR ENGRANES”**

**POR**

**ING. JUAN CARLOS BARBOSA SEGURA**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA AUTOMOTRIZ**

**MARZO, 2019**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**“ANÁLISIS NUMÉRICO COMPUTACIONAL DEL FLUIDO DE UNA  
PELÍCULA DE ACEITE EN UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN  
AUTOMOTRIZ POR ENGRANES”**

**POR**

**ING. JUAN CARLOS BARBOSA SEGURA**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA AUTOMOTRIZ**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO**

**MARZO DE 2019**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “ANÁLISIS NUMÉRICO COMPUTACIONAL DEL FLUIDO DE UNA PELÍCULA DE ACEITE EN UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN AUTOMOTRIZ POR ENGRANES” realizada por el alumno “JUAN CARLOS BARBOSA SEGURA”, con número de matrícula 1883751, sea aceptada para su defensa como opción al grado de “MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA AUTOMOTRIZ”

El Comité de Tesis



---

Dr. Martín Castillo Morales  
Asesor



---

Dr. Mario Alberto Bello Gómez  
Revisor



---

M.C. Edgar Alberto García Ramos  
Revisor

Vo. Bo.



---

Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirección de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Marzo del 2019

## AGRADECIMIENTOS

A CONACYT por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de posgrado, obteniendo las habilidades y conocimientos para realizar la presente investigación.

Al cuerpo académico de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería Automotriz (MCIA), que me apoyaron y dieron los conocimientos necesarios para mi formación profesional en el posgrado y en especial al Dr. Jacobo Hernández Sandoval y la Dra. Tania Paloma Beber Solano quienes hicieron posible mi admisión y estancia en el posgrado.

Al Dr. Martín Castillo Morales por su disposición, consejos, revisiones y conocimientos transmitidos para enriquecer el contenido de este trabajo.

Al Dr. Mario Alberto Bello Gómez por sus acertadas asesorías, debido a su amplio conocimiento en el tema. Su énfasis e interés en las revisiones contribuyó a un mejor trabajo final. Su amistad y paciencia también fueron importantes.

Al Dr. Carlos Manuel Rodríguez Román, por su desinteresada ayuda y apoyo para enseñarme y brindarme sus conocimientos y hacer posible la realización de este trabajo.

A Sistema automotrices de México (SISAMEX) por la confianza depositada en mí para realizar el proyecto de investigación, en un tema de interés para la empresa. Sobre todo, al Maestro en ciencias Edgar Alberto García Ramos, por darme la oportunidad, confianza, conocimientos e información útil para realizar el presente proyecto y su incondicional amistad.

Al Centro de Innovación DRIVEN por permitirme el desarrollo de este proyecto en sus instalaciones, así como mi desarrollo profesional, en especial al Ing. Ricardo Daniel Apaez Pérez por todo su apoyo.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mis padres y hermana quien estuvieron siempre aquí conmigo, me apoyaron en mi educación y me aconsejaron y son mi guía y apoyo en la vida.

## DEDICATORIA

A Dios por darme la oportunidad de vivir esta experiencia desde Colombia a México.

Deseo dedicar este trabajo a mi papa Álvaro Barbosa Díaz, a mi madre Gladys Segura Gómez y mi querida hermana Heidy Divina Barbosa Segura quienes han estado aquí conmigo de corazón y han visto el camino que he recorrido para llegar hasta acá.



# CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS .....	vi
INDICE DE TABLAS .....	x
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xi
RESUMEN .....	xv
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1. Problemática .....	7
1.2. Objetivo general .....	8
1.2.1. Objetivos específicos .....	8
1.3. Hipótesis .....	9
1.4. Justificación .....	9
CAPÍTULO II. TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES Y PÉRDIDAS DE POTENCIA.....	11
2.1. Introducción al engrane y sistema diferencial de transmisión .....	11
2.2. Los engranes y su teoría del diente .....	14
2.2.1. Ley fundamental de engranaje .....	15
2.2.2. La forma involuta del diente .....	17
2.2.3. Nomenclatura del diente del engrane .....	18
2.2.4. Nomenclatura de los engranes cónicos e hipoides .....	20
2.3. Clasificación de los engranajes .....	24
2.3.1. Engranajes cilíndrico recto .....	25
2.3.2. Engranajes cilíndricos helicoidales.....	25
2.3.3. Engranajes cónicos rectos.....	26
2.3.4. Engranajes cónicos en espiral.....	26
2.3.5. Engranajes cónicos zerol .....	29
2.3.6. Engranajes hipoides .....	30
2.4. Lubricación de engranajes cónicos en espiral e hipoides .....	32
2.5. Pérdidas de potencia en una caja de engranajes.....	33
2.5.1. Pérdidas de potencia por cargas independientes.....	35
CAPÍTULO III. DINÁMICA DE FLUIDOS .....	39
3.1. Características de los fluidos .....	39
3.2. Clasificación de los flujos de fluidos .....	42
3.2.1. Flujo viscoso y flujo invíscido.....	42
3.2.2. Fluidos Newtonianos y No-Newtonianos.....	43
3.2.3. Flujo interno y externo .....	44
3.2.4. Flujo compresible e incompresible.....	45
3.2.5. Flujo monofásico y multifásico .....	45
3.2.6. Flujo laminar y turbulento .....	46
3.2.7. Flujo natural y forzado.....	47
3.2.8. Flujo estacionario y no-estacionario.....	47
3.3. Leyes de conservación del movimiento de fluidos.....	48
3.3.1. Marcos de referencia Lagrangiano vs Euleriano .....	48
3.3.2. Modelos de flujo .....	50
3.3.3. La derivada sustancial (cambio de una variable por el movimiento) ...	51
3.3.4. Divergencia de la velocidad.....	53
3.3.5. Ecuaciones gobernantes de la dinámica de fluidos.....	55

3.3.6. Momento angular o momento de la cantidad de movimiento .....	61
3.3.7. Ecuaciones de Navier-Stokes .....	63
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS NUMÉRICO COMPUTACIONAL .....	65
4.1. Introducción a la dinámica de fluidos computacional .....	65
4.2. Conservación de cantidades escalares .....	66
4.3. Discretización de las ecuaciones gobernantes por FVM .....	67
4.3.1. Descripción general del método de volumen finito .....	68
4.3.1. Discretización espacial: Mallas .....	69
4.3.2. Forma y posición del volumen de control .....	72
4.3.3. Aproximación de integrales de superficie e integrales de volumen .....	73
4.3.4. Aproximación de funciones y derivativas: Interpolación .....	75
4.3.5. Discretización temporal .....	78
4.4. Modelos multifase-Método de volumen de fluido .....	80
4.4.1. Generalidades de volumen de fluido .....	81
4.4.2. Ecuación de fracción volumétrica .....	82
4.4.3. Propiedades del material .....	82
4.4.4. Ecuación de transporte para fluidos multifase .....	83
4.5. Introducción de los modelos de mallas dinámicas .....	84
4.5.1. Método de malla dinámica .....	84
4.5.2. Método de malla deslizante .....	87
4.6. Turbulencia y su modelado .....	88
4.6.1. Estructura del flujo turbulento .....	89
4.6.2. Efecto de la turbulencia en ecuaciones de Navier-Stokes .....	90
4.6.3. Modelos de turbulencia computacional .....	92
4.7. Solucionador de flujo basado en presión .....	98
4.7.1. Acoplamiento presión-velocidad .....	100
4.7.2. Algoritmo tiempo-avance .....	102
CAPÍTULO V. METODOLOGÍA .....	104
5.1. Introducción .....	104
5.2. Modelado CAD de la geometría .....	105
5.2.1. Desarrollo de la geometría CAD .....	107
5.2.2. Delimitación del dominio .....	110
5.3. Generación de la malla .....	117
5.3.1. Mallado para simulación con malla dinámica .....	119
5.3.2. Mallado para simulación con malla deslizante .....	120
5.4. Definición del modelo de simulación en CFD .....	124
5.4.1. Generalidades del diferencial mecánico a simular y las ecuaciones a resolver .....	125
5.4.2. Modelo multifase VOF .....	126
5.4.3. Modelo de turbulencia .....	127
5.5. Definición de materiales y propiedades .....	128
5.6. Condiciones de frontera y de operación .....	130
5.6.1. Condiciones de operación del diferencial .....	130
5.6.2. Condiciones de frontera para el método con malla deslizante .....	133
5.6.3. Condiciones de frontera para el método con malla dinámica .....	134
5.7. Método de solución .....	137
5.7.1. Consideraciones y parámetros adicionales en el modelo .....	138

5.8. Criterios de convergencia .....	140
5.9. Reporte de momentos y cálculo de las pérdidas de potencia.....	141
5.10. Análisis de datos .....	142
5.11. Simulación y parámetros de estudio .....	142
<b>CAPÍTULO VI. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>146</b>
6.1. Resultados de la modelación numérica.....	146
6.1.1. Caso 1, velocidades de rotación del piñón (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm).....	146
6.1.2. Caso 2, nivel de inmersión del aceite (15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros) .....	155
6.1.3. Caso 3, inclinación del diferencial a 15 grados .....	165
6.1.4. Caso 4, velocidades de rotación del piñón con malla dinámica y deslizante .....	173
6.2. Discusión.....	186
<b>CAPÍTULO VII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>189</b>
7.1. Conclusiones .....	189
7.2. Recomendaciones .....	191
7.3. Aportación científica.....	192
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>193</b>

## INDICE DE FIGURAS

---

Figura 1. 1: Engranés cónicos en espiral (a) e hipoides (b).....	1
Figura 2. 1: Diagrama básico de un sistema de transmisión de un vehículo. ....	11
Figura 2. 2: Esquema básico de un diferencial. ....	13
Figura 2. 3: Diagrama de ruedas dentadas llamados engranes. ....	14
Figura 2. 4: Geometría básica de un par de engranes. ....	16
Figura 2. 5: Generación de una involuta.....	17
Figura 2. 6: Nomenclatura básica del diente de un engrane. ....	18
Figura 2. 7: Algunas dimensiones en la zona de engrane.....	19
Figura 2. 8: Nomenclatura de engranes cónicos.....	21
Figura 2. 9: Dimensiones básicas de un par de engranes cónicos. ....	22
Figura 2. 10: Dimensiones básicas de un par de engranes cónicos y hipoides.....	23
Figura 2. 11: Arreglo de ejes de engranes. ....	24
Figura 2. 12: Tipos de Engranajes cilíndricos rectos.....	25
Figura 2. 13: Engranajes cilíndricos helicoidales paralelos y cruzado.....	25
Figura 2. 14: Engranajes cónicos rectos. ....	26
Figura 2. 15: Par de engranes cónicos en espiral.....	26
Figura 2. 16: Esquema del sentido del diente para engranajes cónico en espiral...27	
Figura 2. 17: Superficie convexa y cóncava de engranes cónicos en espiral. ....	28
Figura 2. 18: Sentido y giro de rotación de un par de engranes cónico en espiral. 28	
Figura 2. 19: Engranajes cónicos zerol.....	29
Figura 2. 20: Esquema de los Engranajes cónicos en espiral (a) y zerol (b). ....	29
Figura 2. 21: Engranajes hipoides. ....	30
Figura 2. 22: Definición de desplazamiento hipoide positivo (a) y negativo (b). .31	
Figura 2. 23: Perfil de diente de los engranajes hipoides. ....	31
Figura 2. 24: Diagrama básico de lubricación por salpicadura. ....	33
Figura 2. 25: Composición de las pérdidas de potencia de una transmisión. ....	34
Figura 2. 26: Clasificación de los Pérdidas de potencia por cargas independiente 36	
Figura 2. 27: Pérdidas debido a la zona de acoplamiento. ....	37
Figura 2. 28: Cambio de volumen zona de engranaje. ....	37
Figura 2. 29: Pérdidas por agitación (a) y Pérdidas por resistencia al viento (b)...38	
Figura 3. 1: Deformación de un fluido entre dos placas paralelas.....	39
Figura 3. 2: Fenómeno de condición de No-deslizamiento y capa límite. ....	41
Figura 3. 3: Fuerzas que actúan en un elemento de fluido. ....	41
Figura 3. 4: Dirección de la presión sobre las fronteras. ....	41
Figura 3. 5: Capas de fluido generadas por el movimiento de placa superior.....	42
Figura 3. 6: Fotografía de una corriente de flujo sobre una placa plana. ....	43
Figura 3. 7: Fluidos Newtonianos y No-Newtonianos. ....	44
Figura 3. 8: Flujo externo (a) y Flujo interno (b). ....	44
Figura 3. 9: Régimen de multifase (gas-líquido) en una tubería. ....	46
Figura 3. 10: Régimen de flujo para una placa plana. ....	47
Figura 3. 11: Trayectoria de una partícula de fluido, enfoque Lagrangiano. ....	49
Figura 3. 12: Volumen de control de un fluido, enfoque Euleriano. ....	49
Figura 3. 13: Volumen de control finito a) y b); Elemento infinitesimal c) y d)....	50
Figura 3. 14: Elemento de fluido que se mueve en una línea de corriente. ....	51

Figura 3. 15: Volumen de Control finito (a); Elemento infinitesimal (b). .....	53
Figura 3. 16: Diagrama de las formas de fuerzas, segunda ley de Newton.....	57
Figura 3. 17: Elemento infinitesimal de un fluido que se mueve con el flujo.....	58
Figura 4. 1: Esquema de una Celda y sus nodos.....	68
Figura 4. 2: Formas de celdas bidimensionales.....	70
Figura 4. 3: Formas de celdas tridimensionales.....	70
Figura 4. 4: Identificación de los nodos y sus vecinos a); Malla estructurada b)....	71
Figura 4. 5: Malla No-estructurada en 3D (a) y 2D (b). .....	71
Figura 4. 6: Volumen de control de celda centrada (a) y celda en el vértice (b). ...	72
Figura 4. 7: Volumen de control para la malla en 2D (a) y 3D (b). .....	73
Figura 4. 8: Aproximación a) regla del punto medio; b) trapezoidal; c) Simpson. 74	
Figura 4. 9: Flujo de masa dependiente del valor de $\phi e$ en método UDS. ....	76
Figura 4. 10: Flujo de masa dependiente del valor de $\phi e$ en método QUICK.....	77
Figura 4. 11: Aproximación de $\phi e$ por el método CDS.....	77
Figura 4. 12: Geometría de una bomba rotativa (a); Mallado de la bomba (b). ....	87
Figura 4. 13: Velocidad en un punto dentro de un flujo turbulento. ....	89
Figura 4. 14: Esquema general de los modelos de turbulencia.....	93
Figura 4. 15: Esquema general de los métodos de solución. ....	99
Figura 4. 16: Un volumen de control y sus componentes de velocidad vecinos..	101
Figura 4. 17: Esquema iterativo del avance de tiempo para el solucionador. ....	103
Figura 5. 1: Diagrama de la metodología a seguir en el trabajo. ....	104
Figura 5. 2: Diferencial de camión pesado. ....	105
Figura 5. 3: Modelo CAD del diferencial de un eje trasero para camión pesado. 106	
Figura 5. 4: Ejes y engranes hipoides (Piñón-Corona). ....	106
Figura 5. 5: Simplificación de la geometría a) Detalles; b) Sin detalles. ....	108
Figura 5. 6: Soporte o camisa del eje de la corona dentro del diferencial. ....	109
Figura 5. 7: Rotación de los engranes y verificación de no contacto. ....	109
Figura 5. 8: Dominio del volumen de fluido dentro del diferencial, c) Corte plano x- y, d) Corte plano y-z. ....	110
Figura 5. 9: Zona de engranaje entre el piñón y la corona. ....	111
Figura 5. 10: Método de modelado de engranes, movimiento de flancos. ....	112
Figura 5. 11: Reducción del perfil del diente de la corona. ....	112
Figura 5. 12: Espacio entre el piñón y la corona en la zona de acoplamiento.....	113
Figura 5. 13: Geometría final para la simulación con mallado dinámico.....	113
Figura 5. 14: Traslado del piñón para el desacoplamiento con la corona.....	115
Figura 5. 15: Definición de volúmenes para simulación con malla deslizante. ...	115
Figura 5. 16: Distancia mínima entre los volúmenes de revolución.....	116
Figura 5. 17: Geometría final para simulación, condición inclinada 15°. ....	117
Figura 5. 18: Calidad de una esfera, oblicuidad. ....	118
Figura 5. 19: Espectro de oblicuidad para la calidad de la malla. ....	118
Figura 5. 20: Tetraedro lineal de 4 nodos. ....	119
Figura 5. 21: Mallado para simulación con malla dinámica.....	120
Figura 5. 22: Tamaño de elemento usado para la zona de malla dinámica. ....	120
Figura 5. 23: Mallado para simulación con malla deslizante. ....	121
Figura 5. 24: Tamaño de elemento usado para la zona de malla deslizante.....	121
Figura 5. 25: Malla para simulación con velocidad de 2000 rpm del piñón. ....	122
Figura 5. 26: Malla para diferencial inclinado.....	123

Figura 5. 27: Metodología iterativa de geometría y mallado.....	124
Figura 5. 28: Comportamiento de la viscosidad con respecto a la temperatura ...	129
Figura 5. 29: Comportamiento de la densidad con respecto a la temperatura. ....	129
Figura 5. 30: Archivo UDF en código C++ usado en la simulación. ....	131
Figura 5. 31: Fracción de volumen inicial en el diferencial (18.7 litros). ....	132
Figura 5. 32: Ilustración del parámetro del nivel de aceite. ....	132
Figura 5. 33: Solidos de revolución y paredes de los engranes. ....	133
Figura 5. 34: Definición de interfaces para malla deslizante.....	134
Figura 5. 35: Definición de interfaces en cada malla dinámica.....	136
Figura 5. 36: Ejemplo de residuales en uno de los casos de simulación. ....	140
Figura 6. 1: Momentos generados en la corona a 121.95 rpm, 304.88 rpm y 487.8 rpm. ....	147
Figura 6. 2: Pérdida de potencia (corona) a 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm del piñón .....	148
Figura 6. 3: Momentos generados en el piñón a 500 rpm,1250 rpm y 2000 rpm.	149
Figura 6. 4: Pérdida de potencia del piñón a 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm. ....	149
Figura 6. 5: Momento total generado para diferentes velocidades. ....	150
Figura 6. 6: Perdidas de potencia del diferencial a diferentes velocidades. ....	151
Figura 6. 7: Fracción volumétrica del aceite a diferentes velocidades. ....	152
Figura 6. 8: Lineas de corriente alrededor de los engranes .....	153
Figura 6. 9: Resultados de la masa del aceite para cada velocidad de rotación en rpm del piñón. ....	154
Figura 6. 10: Momentos generados en la corona a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado.....	156
Figura 6. 11: Perdida de potencia (corona) a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado.....	157
Figura 6. 12: Momentos generados en el piñón a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado.....	158
Figura 6. 13: Pérdida de potencia (piñón) a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado.....	158
Figura 6. 14: Momento total generado para diferentes niveles de inmersión.....	159
Figura 6. 15: Perdidas de potencia para diferentes niveles de inmersión. ....	160
Figura 6. 16: Fracción volumétrica del aceite a diferentes niveles de inmersión.	161
Figura 6. 17: Lineas de corriente alrededor de los engranes, nivel de llenado. ....	162
Figura 6. 18: Resultado de conservación de masa para el llenado de 15.1 litros .	163
Figura 6. 19: Resultado de conservación de masa para el llenado de 22 litros. ...	164
Figura 6. 20: Momentos generados (corona), para el diferencial inclinado. ....	165
Figura 6. 21: Perdidas de potencia en la corona para el diferencial inclinado. ....	166
Figura 6. 22: Par momento generado (piñón) para el diferencial mecánico inclinado 15° .....	167
Figura 6. 23: Perdida de potencia en el piñón para el diferencial inclinado.....	167
Figura 6. 24: Momento total generado en el diferencial para posición inclinado.	168
Figura 6. 25: Total pérdidas de potencia generado en el diferencial inclinado. ...	169
Figura 6. 26: Fracción volumétrica del aceite, posición inclinado. ....	170
Figura 6. 27: Lineas de corriente alrededor de los engranes, posición inclinado.	171
Figura 6. 28: Resultado de conservación de masa, posición inclinado. ....	172
Figura 6. 29: Momentos generados (corona) con malla dinámica a 500 rpm. ....	174

Figura 6. 30: Momentos generados (corona) con malla dinámica a 1250 rpm. ...	175
Figura 6. 31: Momentos generados (corona) con malla dinámica a 2000 rpm. ...	175
Figura 6. 32: Momentos generados (piñón) con malla dinámica a 500 rpm. ....	176
Figura 6. 33: Momentos generados (piñón) con malla dinámica a 1250 rpm. ....	177
Figura 6. 34: Momentos generados (piñón) con malla dinámica a 2000 rpm. ....	177
Figura 6. 35: Total torque generado con malla dinámica y malla deslizante. ....	178
Figura 6. 36: Total perdidas de potencia, con malla dinámica y deslizante. ....	179
Figura 6. 37: Fracción volumétrica del aceite, malla dinámica a 500 RPM.....	181
Figura 6. 38: Fracción volumétrica del aceite, malla dinámica a 1250 RPM.....	182
Figura 6. 39: Fracción volumétrica del aceite, malla dinámica a 2000 RPM.....	183
Figura 6. 40: Conservación de masa calculado con malla dinámica. ....	184
Figura 6. 41: Resultado de residuales para 1250 rpm del piñón y 18.7 litros. ....	187

## INDICE DE TABLAS

---

Tabla 1: Especificaciones generales del engrane piñón y corona (diferencial)....	107
Tabla 2: Datos usados para el cálculo del número de Reynolds.....	127
Tabla 3: Propiedades de lubricante.....	128
Tabla 4: Propiedades del lubricante 85W-140 usados en la simulación. ....	130
Tabla 5: Propiedades del aire usados en la simulación.....	130
Tabla 6: Velocidad y sentido de giro del diferencial. ....	131
Tabla 7: Parámetros generales usado en el programa de cómputo en CFD. ....	139
Tabla 8: Matriz de experimentos, proyectos simulados. ....	143
Tabla 9: Matriz de experimentos-Agrupados por Casos. ....	144
Tabla 10: Resultados (promedio) de error masa de aceite, velocidades rotación. ....	155
Tabla 11: Resultados (promedio) de error masa de aceite, nivel de llenado. ....	164
Tabla 12: Resultados (promedio) de error masa de aceite, posición inclinado. ...	173
Tabla 13: Resultados (promedio) de las pérdidas de potencia. ....	179
Tabla 14: Resultados (promedio) de error masa de aceite, malla dinámica. ....	185
Tabla 15: Datos técnicos de simulación mediante el uso de malla deslizante y malla dinámica a tres diferentes velocidades de rotación del piñón.....	186

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$\vec{a}$	Vector aceleración
$A$	Area
$c$	Velocidad del sonido
$d_p$	Diámetro del círculo de paso
$dS$	Elemento infinitesimal de superficie
$e$	Energía interna
$E_t$	Energía total por unidad de masa
$E_{ij}$	Valor promedio estable del tensor de la razón de deformación
$e'_{ij}$	Valor de tensor de la razón de deformación fluctuante en el tiempo
$e_{ij}$	Tensor de la razón de deformación
$F$	Fuerza aplicada sobre un área determinada
$\vec{F}_i$	Fuerza aplicada en la dirección del vector unitario $\hat{i}$
$\vec{F}_p$	Vector de fuerza de presión
$\vec{F}_v$	Vector de fuerza viscosas
$F_s$	Fuerzas de superficie
$h$	Profundidad de inmersión del engrane
$\bar{h}$	Numero adimensional de nivel de inmersión
$\vec{H}$	Vector momento de la cantidad de movimiento
$\hat{i}$	Vector unitario en la dirección x
$\hat{j}$	Vector unitario en la dirección y
$\hat{k}$	Vector unitario en la dirección z
$k$	Energía cinética turbulenta
$K$	Energía cinética promedio
$k(t)$	Energía cinética instantánea de un flujo turbulento
$k_{ij}$	Constante de rigidez del resorte entre el nodo i y su vecino nodo j
$l$	longitud característica de los remolinos turbulentos
$L$	Longitud característica de la geometría
$m$	masa
$\vec{M}$	Vector momento o torque de una fuerza con respecto a un punto
$\mathcal{M}$	Modulo
$\dot{m}_{\text{entrada}}$	Razón de flujo de masa de entrada
$\dot{m}_{\text{salida}}$	Razón de flujo de masa de salida
$Ma$	Numero de Mach
$N$	Numero de dientes
$N_g$	Numero de dientes del engrane conducido.
$N_p$	Numero de dientes del engrane conductor o piñón.
$\vec{n}$	Vector unitario perpendicular a la superficie

$P$	Valor promedio estable de la presión
$P$	Presión
$P'$	Valor de presión fluctuante en el tiempo
$\mathcal{P}$	Potencia
$P_V$	Total, pérdidas de potencia
$P_{VB}$	Perdidas de potencia por cargas dependientes por rodamientos
$P_{VBO}$	Perdidas de potencia por cargas independientes por rodamientos
$P_{VG}$	Perdidas de potencia por cargas dependientes por engranes
$P_{VGO}$	Perdidas de potencia por cargas independientes por engranes
$P_c$	Paso circular
$P_d$	Paso diametral
$\dot{Q}$	Razón de flujo de calor con respecto al tiempo
$\dot{q}$	Razón de calor adicionado por unidad de masa.
$\vec{q}$	Vector de flujo de calor
$\vec{r}$	Vector posición
$r_{ex}$	Radio exterior del engranaje
$r_g$	Radio de paso del engrane impulsado
$r_p$	Radio de paso del engrane piñón
$Re$	Numero adimensional de Reynolds
$Re_{cr}$	Numero adimensional de Reynolds critico
$R_t$	Relación de transmisión
$\vec{S}_m$	Vector de fuerzas de cuerpo actuando sobre un elemento de fluido
$S_m$	Magnitud de fuerzas de cuerpo
$S_{mx}$	Fuerzas de cuerpo en la dirección x
$S_{my}$	Fuerzas de cuerpo en la dirección y
$S_{mz}$	Fuerzas de cuerpo en la dirección z
$S_\phi$	Fuerzas de cuerpo debido a la variable $\phi$
$S_e$	Fuerzas de cuerpo en la cara e
$S_f^k$	Fuentes de generación
$T$	Temperatura
$t$	Tiempo
$U$	Valor promedio estable de la velocidad en la dirección x
$u$	Magnitud de componente de velocidad en la dirección x
$u'$	Componente fluctuante de la velocidad en la dirección x
$\vec{V}$	Vector de velocidad con componentes unitarias $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$
$\vec{V}'$	Vector de velocidad fluctuante
$\vec{V}$	Vector de velocidad promedio estable
$\overline{V}_f$	Velocidad de la fase $f$
$V$	Velocidad del flujo
$v$	Magnitud de componente de velocidad en dirección y

$V$	Valor promedio estable de la velocidad en la dirección y
$v'$	Componente fluctuante de la velocidad en la dirección y
$w$	Magnitud de componente de velocidad en dirección z
$w'$	Componente fluctuante de la velocidad en la dirección z
$W$	Valor promedio estable de la velocidad en la dirección z
$\dot{W}_s$	Trabajo realizado por las fuerzas de presión
$\dot{W}_\mu$	Trabajo realizado por las componentes normal y cortante de las fuerzas viscosas sobre la superficie de control
$\varphi$	Efecto del flujo de una propiedad cualquiera
$\varphi'$	Valor de una propiedad fluctuante en el tiempo
$\phi$	Variable de cambio cualesquiera, en función de $\phi(x, y, z, t)$ o cantidad escalar
$\overline{\varphi'}$	Valor promedio de una propiedad fluctuante en el tiempo
$\varphi_f$	Fracción volumétrica de la fase $f$
$\oint\oint$	Integral doble cerrada
$\Gamma_f^k$	Coefficiente de difusión de la fase $f$ y un valor arbitrario $k$
$\alpha_g$	Ángulo de paso de la corona
$\alpha_p$	Ángulo de paso del piñón
$\theta_e$	Angulo equiangular de la cara o celda
$\lambda_e$	Factor lineal de interpolación de la cara e
$\mu$	viscosidad de un fluido (viscosidad absoluta o dinámica)
$\mu_{ef}$	Viscosidad efectiva
$\mu_t$	Viscosidad turbulenta
$\rho_f$	Densidad física de la fase $f$
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzo (fuerzas superficiales/área)
$\tau_{ii}$	Esfuerzo Normal en dirección del vector i
$\tau_{ij, Turbulento}$	Tensor de esfuerzos de Reynolds
$\tau_{ij}$	Esfuerzo cortante en paralelo al plano i,j
$\vec{\omega}$	Vector de velocidad angular
$\omega_1$	Velocidad angular del engrane de entrada.
$\omega_2$	Velocidad angular del engrane de salida
$\phi_e$	valor de la variable $\phi$ en la cara e
$\phi_f^k$	Variable escalar que solo está asociado a la fase $f$
$\forall$	Volumen de control
$\Delta\vec{x}_i$	Desplazamiento del nodo i
$\Delta\vec{x}_j$	Desplazamiento del nodo j, el cual es el nodo vecino de i
$\Delta t$	tamaño de paso de tiempo
$\nabla$	Operador Nabla, $\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$
$\mathcal{L}(\phi)$	Operador espacial que incluye los demás termino no-transitorios de la ecuación de transporte
$\Gamma$	Coefficiente de difusión, circulación o intensidad de torbellino
$\Phi$	Valor promedio de una propiedad de manera estable
$\delta\forall$	Elemento infinitesimal de volumen

$\varepsilon$	Razón de disipación (épsilon)
$\rho$	densidad
$\tau$	Esfuerzo cortante

## RESUMEN

---

Hoy en día, la industria automotriz ha avanzado en el estudio de la mejora de la eficiencia en el diseño de transmisiones mecánicas de potencia. Así, cada día los requisitos de fiabilidad y rendimiento son más severos. Muchos fabricantes de ejes y cajas de engranajes diferenciales han incrementado su inversión en investigación para reducir las pérdidas de potencia por los efectos viscosos del lubricante, el sistema de lubricación por salpicadura dentro del envolvente y obtener una distribución de aceite más deseable a temperaturas de operación más bajas.

En esta investigación, se presenta el estudio de las pérdidas de potencia de la rotación del aceite del eje diferencial del vehículo de engranaje hipoides. Basado en dinámica de fluidos computacional (CFD) utilizando el software comercial ANSYS-Fluent 19.1. Se ha creado un modelo numérico en 3D para simular el flujo multifase aire-aceite, aplicando el enfoque de volumen de fluidos (VOF) del modelo multifase Eulerian-Eulerian.

Trabajos recientes presentan la efectividad del CFD en el estudio de las pérdidas de potencia de las transmisiones mecánicas por engranajes. Estos estudios para la configuración de engranajes hipoidales indican algunas limitaciones, como la configuración apropiada del modelo de turbulencia, la selección del modelo de malla para el dominio del fluido en movimiento, especialmente en la zona de acoplamiento, las condiciones para simular mayores tiempos de rotación de los engranajes dentro de la caja (para alcanzar tiempos mayores a 0.5 segundos), por lo que se necesita un incremento del esfuerzo computacional y mejores requisitos de hardware de la computadora.

Estudios anteriores han utilizado diferentes técnicas de simulación de malla en engranajes hipoidales. En el presente estudio, se desarrolló una comparación, entre la malla dinámica y la malla deslizante. La malla dinámica puede deformarse por la forma del dominio a lo largo del tiempo debido al movimiento de rotación de los límites en las paredes de los engranajes. Por otro lado, la malla deslizante se puede utilizar con una breve modificación de la geometría 3D del diferencial. Como resultado, se obtiene un movimiento independiente de los límites de la pared de cada engranaje, lo que hace que

sus nodos se muevan rígidamente en una zona de malla dinámica con respecto a otra área de malla estacionaria para cada engranaje.

Los resultados numéricos del seguimiento de flujo con malla dinámica y malla deslizante demuestran una buena correlación del consumo de energía total de los engranajes hipoidales en el diferencial mecánico y las características del flujo de lubricación. Además, se logra un tiempo de flujo de simulación de 1 segundo con una malla deslizante en un tiempo de cálculo más bajo en comparación con el modelo dinámico de malla. Estas simulaciones fueron comparadas con trabajos previos y literatura investigada.

Predecir las pérdidas de energía generadas por el sistema diferencial de eje con un modelo de simulación en un tiempo de cálculo más corto, y lograr un mayor tiempo de salpicadura de lubricación, ayudaría a ahorrar tiempo para obtener resultados y evitar el uso de tamaños de paso de tiempo más pequeños en la simulación de configuraciones de engranajes complejos. Además, el estudio de la dinámica de fluidos en el interior del gabinete ayudará a los diseñadores a optimizar la carcasa, así como a futuros estudios de transferencia de calor, diferentes métodos de lubricación sin necesidad de desarrollar una plataforma de prueba física.

# CAPÍTULO I.

## INTRODUCCIÓN

---

Los engranajes han encontrado su uso habitual en la industria automotriz y aeroespacial, en máquinas rotativas como turbinas, compresores, bombas de engranajes y generalmente en cajas de transmisión de vehículos. Dado que los engranajes transmiten energía a través de un movimiento de rotación a diferentes velocidades, torques y dirección, la potencia se pierde debido a la fricción de deslizamiento y rodadura entre los elementos engranados y las pérdidas de giro debido al batido, salpicadura y fuerzas viscosas del lubricante-aire que rodea el sistema [1].

En el caso específico de los engranajes cónicos, tanto en espiral como hipoides, mostrados de izquierda a derecha en la figura 1.1, se encuentran en diferentes máquinas-herramientas, transmisiones de ejes traseros y delanteros de vehículos, transmisiones de helicópteros entre otros; los cuales se usan para transmitir movimientos entre ejes no paralelos. Si bien por lo general estos engranes se hacen para un ángulo entre ejes de  $90^\circ$ , se producen casi para cualquier ángulo. Los dientes se funden, fresan o generan y solo los dientes generados se consideran exactos [2].

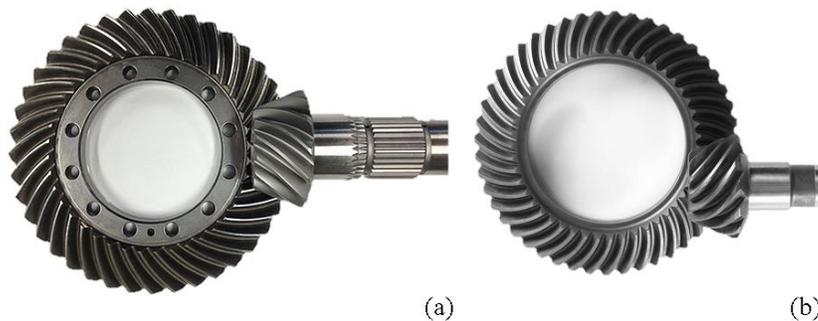


Figura 1. 1: Engranajes cónicos en espiral (a) e hipoides (b) [3, 4].

Los engranajes cónicos espiral tienen ejes que se cruzan e interceptan, mientras que los engranajes hipoides tienen un eje desplazado entre los dos ejes. La principal diferencia entre los engranes cónicos en espiral y el hipóide, es que en el caso de este último contienen un tamaño de piñón más grande, un número de dientes de piñón más pequeño, una relación de contacto más alta y una mayor resistencia a la fatiga por contacto. Por otro lado, su desventaja con respecto a los engranajes cónicos en espiral es que experimentan mayores velocidades de deslizamiento, lo que resulta en mayores pérdidas de potencia debido a una fricción deslizante excesiva [5].

Los engranes hipoides transportan grandes cargas y operan a altas velocidades de rotación. Investigaciones previas se han centrado en el entendimiento de muchos aspectos de estos tipos de engranes, en los que se incluye: la geometría del engrane, la dinámica de los engranes, la lubricación, el análisis y medición de tensiones, la desalineación de sus ejes, así como como la aplicación del método de elemento finito para el análisis numérico de esfuerzos en los dientes [6, 7].

Los elementos que componen el mecanismo de engranajes cónico en espiral o hipóide son: piñón al impulsor, que normalmente es el de diámetro menor y corona al impulsado. Estos son importantes para la transmisión de energía de ejes no paralelos que por su geometría en espiral tiene un contacto más suave, generando un menor ruido en la transmisión [8].

Sin embargo, los mecanismos básicos de los cuales se rigen los principales modos de engranes cónicos en espiral e hipoides todavía no se entienden completamente. Debido a la complicada geometría de los dientes, los análisis son considerablemente complejos a diferencia de los engranes de dientes rectos o engranes helicoidales.

En algunas aplicaciones de aeronaves militares y automóviles por ejemplo se diseñan sistema de engranes a menudo en condiciones muy cercanas a los límites de máxima densidad de potencia, por lo cual es un riesgo alto la inversión en la fabricación de engranajes con mejores diseños y materiales.

Desarrollar toda una infraestructura física para tener un banco de pruebas y experimentar en diferentes condiciones reales los cuales pueden llegar a cierto porcentaje

de falla o fracaso, hacen la necesidad de encontrar alternativas. De manera que a través de la simulación computacional es una opción para probar la eficiencia del mecanismo y su lubricación sin grandes costos y periodos de tiempo.

El lubricante es importante para la capacidad de carga, la presencia de una pequeña capa de lubricante entre las dos superficies de los dientes, entre el impulsor y el impulsado ayuda a propagar la carga e incrementar el área de contacto para la carga transmitida, por lo tanto, reduce las tensiones de contacto en las superficies [9].

Los primeros trabajos de investigación se concentraron en los tipos de fallas que pueden tener estos engranes cónicos en espiral, que de acuerdo con Chao, Baxter y Cheng [10] las fallas de los engranajes suelen clasificarse en dos categorías: fallas estructurales que incluyen fatiga por flexión, rotura de dientes y golpes de los engranajes con el recinto; y las fallas relacionadas con la lubricación que incluyen desgaste, picadura superficial y la rayadura. Los métodos actuales usados para predecir la picadura superficial y el rayado del engranaje son principalmente empíricos y no son completamente de confianza.

En el area de diseño de cajas de transmision y diferenciales el espesor de la película lubricante entre los dientes que engranan se vuelve cada vez mas importante en la investigacion, el logro de una película elastohidrodinámica intacta entre ambas superficies de cada engrane, impide el frotamiento, el desgaste y minimiza la picadura superficial. Por lo cual, para asegurar el espesor mínimo de esta capa de lubricante se desarrollan análisis termoelastohidrodinámico de la lubricación de engranajes a través de soluciones numéricas y computacionales de las ecuaciones gobernantes de la mecánica de fluidos, acopladas con Reynolds, elasticidad y energía para la presión, la temperatura y el espesor de la película junto con el efecto de las condiciones de operación ayudan a determinar el rendimiento de la unidad de transmisión [11].

Así mismo, los efectos viscosos de los fluidos dentro de la carcasa de diferenciales y transmisiones de automóviles en donde se alojan los engranes cónicos en espiral o hipoides ocasionan pérdidas de potencia. El cual de acuerdo de a Niemann y Winter [12], las diferentes fuentes de pérdidas de potencia se pueden clasificar en dos categorías : (i) pérdidas de potencia por carga dependiente y (ii) pérdidas de potencia por carga

independiente. Las primeras están relacionadas a las pérdidas de potencia mecánica debido al deslizamiento o fricción del contacto de engranajes y demás elementos mecánicos como sellos y rodamientos. Mientras las segundas están relacionadas principalmente por efectos viscosos que a su vez está dividida en pérdidas de potencia por la agitación o batido del fluido a causa de la rotación de los engranajes, pérdidas por corriente que son el resultado de la interacción entre el aceite/aire y los movimientos de rotación de elementos como los engranes y ejes y pérdidas por compresión del aceite debido al cambio de volumen que sufre el fluido de compresión y expansión que ocurre en la zona de engrane o espacio pequeño que deja el engranaje de piñón-corona .

En cuanto al análisis de este tipo de comportamiento en los fluidos que causan perdidas de potencia en las cajas de transmisión se han desarrollando estudios de los fluidos a través de la dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en ingles). Este campo de investigación está dedicado a solucionar los principios de conservación de masa, segunda ley de newton y conservación de energía que gobiernan el movimiento del fluido a través de las ecuaciones de continuidad, momento y energía. El cual, al solucionar estas ecuaciones de flujo de fluidos en la computadora, se pueden obtener detalles del campo de flujo, los esfuerzos de corte, velocidades, perfiles de presión, líneas de corriente, temperaturas, variaciones de viscosidad, densidades entre otras propiedades. De esta manera se emplea el análisis computacional para abreviar el ciclo de diseño por medio de estudios paramétricos controlados con cuidado y así reducir la cantidad necesaria de análisis experimental [13].

Las técnicas computacionales se empezaron a aplicar para entender el comportamiento del campo de flujo del aire/aceite dentro de un sistema de diferencial mecánico a causa de la rotación de los engranes cónicos en espiral a altas velocidades. A partir de allí modelos simples del dominio del fluido de un engrane dentro de su carcasa se empezaron a diseñar y desarrollar a través de simulaciones por CFD y validando sus resultados con datos experimentales en un banco de pruebas [14, 15].

Así mismo, se exponen análisis en los diferentes diseños en la cubierta o recinto en cómo afecta la dirección del flujo del fluido y su variación en el torque, el cual se traducen en pérdidas de potencia generadas [16].

El incremento y la demanda de sistemas diferenciales donde se trabaja con engranes cónicos en espiral e hipoides están enfocados en que sean más eficientes, confiables y que sus pérdidas de potencia por efectos de fricción y/o deslizamiento por partes mecánicas (ejes, sellos, rodamientos etc.) y efectos viscosos sean menores. De manera que ha implicado la necesidad de tener distintos modelos y por medio de un software de CFD que desarrolla diferentes métodos numéricos y algoritmos iterativos para solucionar y resolver las ecuaciones que se aplican en el dominio del fluido en donde el mecanismo de engranajes trabaja.

De esta manera se puede caracterizar el espesor de la película del lubricante, predecir la distribución del aceite, las temperaturas que se generarán con la rotación y agitación del fluido, las presiones por compresión y contracción en las regiones de contacto a causa del engranaje del piñón-corona entre otros aspectos relacionados con el movimiento del fluido.

Ahora bien, el presente trabajo se concentra en el sistema de engranaje piñón-corona, los cuales son engranes tipo cónico en espiral e hipoides a causa del desplazamiento del eje del engrane-piñón con respecto al eje del engrane-corona.

Se busca la distribución y flujo del aceite inmerso dentro del recinto o carcasa. Así mismo entender la contracción y expansión del volumen que ocurre en la región más pequeña de contacto o zona de engranaje, su influencia por las condiciones de operación, como son las propiedades del lubricante y la velocidad de rotación.

Para estudiar el comportamiento del fluido en un diferencial de forma numérica, el programa de cómputo de dinámica de fluidos comercial que se utiliza es Ansys-Fluent que se especializa para modelar el flujo de fluidos, la transferencia de calor y las reacciones químicas en geometrías complejas.

Este programa de cómputo proporciona flexibilidad completa de la malla, incluyendo la capacidad de resolver problemas de flujo usando mallas no estructuradas que pueden generarse sobre geometrías complicadas con relativa facilidad. Los tipos de malla soportados incluyen cuadrículas 2D triangulares/cuadriláteros, tetraédricos 3D,

hexaedros, pirámides, cuñas, poliédricas y mixtas. Ansys-Fluent también le permite refinar su malla en base a la solución de flujo [17].

Considerando que la lubricación por inmersión dentro del sistema diferencial mecánico es un proceso complejo con dos fases de flujo aire-aceite, se desarrollará la construcción de un modelo multifase, para el análisis del flujo del lubricante dentro del armazón. De igual manera se aplicará un modelo de turbulencia para simular las fluctuaciones turbulentas en el flujo medio. Este debido al propio efecto que generan el movimiento rotatorio de los engranes que causan una alta razón de deformación en el fluido y un gran grado de flexibilidad en las líneas de flujo.

Hay que mencionar además que el programa computacional Ansys-Fluent para el caso de flujo de dos fases se trabajara mediante el modelo de volumen de fluido o VOF por sus siglas en inglés, el cual se fundamenta en una técnica numérica que permite rastrear y localizar la superficie libre o interfaz fluido-fluido, resolviendo un solo conjunto de ecuaciones de momento y rastreando la fracción de volumen de cada uno de los fluidos en cada celda en todo el dominio [18].

Por otra parte, el programa computacional contiene diferentes modelos de turbulencia que ayudan a caracterizar los campos de velocidad fluctuantes y solucionar las ecuaciones gobernantes (continuidad, momento y energía) de manera instantánea, promediándolas en el tiempo o promediándolas en conjunto, esto debido a la presencia de grandes y pequeñas escalas de remolinos o vorticidades que se ven en el fenómeno de turbulencia. Para el caso este trabajo se utilizara el enfoque computacional de Navier-Stokes de numero de Reynolds promedio o RANS por sus siglas en ingles el cual se tiene en cuenta el incremento de intensidad de mezclado y difusión debido a los remolinos turbulentos y se promedian que comparado con otros modelos de turbulencia consumen menos recursos computacionales [19], en capítulos posteriores se hablará más a detalle al respecto.

En esta estapa de la simulacion de analisis por medio de CFD se empezará con un modelo desarrollado previamente en un programa de computo (CAD) o Diseño asistido por computadora, en el cual se representará el modelo físico real, que se validará con

investigaciones y trabajos previos realizados y consistirá en sus partes mecánicas, como engranajes ,camisa y ejes.

## **1.1. Problemática**

La empresa SISAMEX es un fabricante de clase mundial en la manufactura de componentes automotrices de gran calidad. La compañía provee productos como ejes, frenos, componentes relacionados y ensambles para camiones y tracto camiones.

Para ser más específicos la empresa fábrica engranes cónicos en espiral e hipoides los cuales son ensamblados en ejes diferenciales de camiones y tracto camiones. Estos vehículos en condiciones reales de operación, se ha observado que su diferencial mecánico presenta algunos problemas como: alto calentamiento del aceite, fricción excesiva, desgaste en la superficie de los engranes, mayor consumo de combustible entre otros que van relacionados principalmente por la falta de lubricación en la zona de acoplamiento del diferencial, y las pérdidas de eficiencia en la transmisión de los engranes por tener que mover el aceite a la acción de rotación de los engranes.

Aunque actualmente la compañía ha desarrollado algunas pruebas físicas experimentales para entender el comportamiento del lubricante que se encuentra inmerso dentro del diferencial. Estos son limitados al momento de observar, monitorear y obtener datos de lo que sucede en la zona de engrane dentro del mecanismo piñón-corona. Y de igual forma restringidos para ciertas condiciones de operación.

Además del diseño y fabricación de un banco de pruebas que sea versátil para diferentes escenarios, implicaría un alto costo de inversión, grandes tiempos de elaboración para monitorear diferentes propiedades dentro del diferencial mecánico e incluso imposible monitorearlas y rastrearlas durante el tiempo de operación.

Debido a la dificultad de poder observar y analizar el comportamiento del lubricante en ciertas zonas del eje del diferencial y de esta manera entender y comprender el origen y causas de algunos problemas que se tienen en su transmisión mecánica, debido a la agitación y batido del aceite sumergido en el diferencial. se desea tener un modelo virtual que pueda predecir con bastante aproximación el patrón de flujo, cómo afecta en la zona

de engrane y las pérdidas de potencia que se generan por la lubricación por inmersión dentro del diferencial a diferentes escenarios de operación.

## **1.2. Objetivo general**

Desarrollar el análisis numérico en dinámica de fluido computacional para el estudio del comportamiento del fluido alojado en un diferencial de engranajes, midiendo la influencia de los parámetros de operación con el fluido usado.

### **1.2.1. Objetivos específicos**

- Investigar y comprender el método de volumen de fluido para obtener valores correctos de distribución del aceite en el diferencial mecánico en simulaciones multifase.
- Implementación de un método apropiado de acuerdo con el software para la interacción de mallas dinámicas, las mallas que se deforman y su remallado para cada paso de tiempo definido.
- Analizar el movimiento del fluido por medio del software de dinámica de fluido computacional
- Evaluar la eficiencia del mecanismo de engranaje usando el lubricante bajo ciertos tipos de operación de trabajo y nivel de fluido.
- Sustentar y comparar los resultados del análisis numérico de la simulación con literatura de datos y trabajos previos.
- Desarrollar una metodología que permita aplicar este tipo de análisis de CFD en diferentes configuraciones de caja de engranajes

### **1.3. Hipótesis**

Es posible realizar un modelo 3D de simulación en Ansys-Fluent para la geometría compleja de los engranajes cónicos hipoide a través del método de volumen de fluido y de este modo poder efectuar el análisis numérico variando algunos parámetros importantes del sistema en la interacción piñón-corona con el fluido y poder comprender la influencia de estos en las condiciones de operación como velocidad y torque.

### **1.4. Justificación**

Con el propósito de entender el sistema de lubricación por inmersión en el diferencial mecánico específico se desarrolla una investigación a través de un programa computacional con un modelo de simulación que permita emular y predecir con aproximación, el comportamiento del lubricante bajo condiciones reales de operación, con diferentes características de lubricantes usados entre otros aspectos. De modo que se pueda estudiar, analizar y ampliar el entendimiento del patrón de flujo del aceite dentro del armazón del diferencial y obtener más información de cómo varía en el tiempo algunas propiedades, como también las pérdidas de potencia que sufre la transmisión y de igual manera poder simular diferentes escenarios y situaciones de operación.

Al observarse la necesidad de evitar la construcción de modelos experimentales físicos para demostrar la eficiencia del producto y diseño desarrollado. Con los actuales programas computacionales que existen para el análisis de dinámica de fluidos, y por medio de los métodos numéricos se podría realizar investigaciones más amplias para la discretización espacial y temporal del fenómeno que sucede al estar el lubricante en constante agitación por el movimiento de los engranes. En el caso de las condiciones de operación como velocidad de rotación y torque aplicado, junto con las propiedades del lubricante usado. Se podrá observar cómo afectan en el rendimiento de la transmisión con el diseño del armazón o recinto del mecanismo piñón-corona.

Desarrollando un modelo de simulación computacional, se crearía dentro de la investigación una metodología para la solución numérica de la teoría y leyes naturales que se rigen alrededor de la agitación de un fluido por rotación de componentes sólidos. El

cual podría aplicarse a diferentes configuraciones de mecanismos que involucren engranes en rotación al agitar o mover un fluido dentro de un recinto.

Así mismo tener una metodología para crear modelos de simulación a partir de diseños previos de cajas de engranes permitirá predecir cómo sería el movimiento del fluido dentro del diferencial, que tan lubricado está el sistema de engranes, como también observar otras condiciones de operación, que evitará la construcción de un banco de pruebas para emular condiciones reales en el campo, disminuyendo inversión y tiempo.

## CAPÍTULO II.

# TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES Y PÉRDIDAS DE POTENCIA

### 2.1. Introducción al engrane y sistema diferencial de transmisión

Los engranes sirven para transmitir una rotación entre dos ejes con una relación de velocidad angular constante, así mismo se dice de un par de engranaje, ruedas dentadas o engrane para describir el acoplamiento que se utiliza para transmitir torque y velocidad angular entre dos ejes mediante contacto directo entre dos cuerpos sólidos. Estos estarán unidos rígidamente a cada uno de los ejes y como los engranes son giratorios también transmiten potencia [20].

El uso de engranes para la transmisión de potencia en el tren motriz de vehículos se ha generalizado ampliamente debido a su buena eficiencia y a su confiabilidad y alta capacidad para transmitir grandes potencias [21].

El mecanismo que transmite la potencia desarrollada por el motor de un automóvil a las ruedas motrices o en su conjunto a la transmisión de potencia, se compone de: embrague, caja de cambios, juntas universales, eje de transmisión, diferencial, semi-ejes, ruedas y llantas como se muestra en el diagrama básico de la figura 2.1.

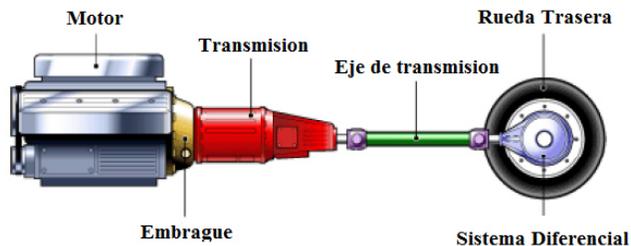


Figura 2. 1: Diagrama básico de un sistema de transmisión de un vehículo [21].

En la actualidad se sabe que una gran parte de las fallas de este tipo de transmisiones se debe al desgaste de los dientes de los engranes en vista de que estos son los que realizan la mayor parte del trabajo, y dicho desgaste va relacionado a que tan eficiente es el sistema de lubricación el cual puede ocasionar pérdidas de potencia del engranaje.

Estas pérdidas de potencia están influenciadas por el punto de carga (velocidad, torque, acoplamiento de engranaje y temperatura del lubricante) y son causadas por diferentes elementos que hacen parte del sistema de transmisión (como son rodamientos, engranes, sellos, etc.). En el caso de los engranes, estos generan pérdidas de potencia dependiente de la carga por los efectos de fricción en la película lubricante y por cargas independientes, derivadas principalmente de los efectos viscosos de compresión, agitación y efecto de viento en el lubricante [22]. Que más adelante se explicarán estas pérdidas de potencia en los sistemas de engranes y su clasificación.

Uno de los componentes donde se involucran más los engranes y dónde hay más aporte de pérdida de potencia en el sistema de transmisión es el diferencial, en el cual se centra este trabajo.

La definición de un diferencial está dada como un conjunto de engranajes que transmiten potencia a las ruedas y permite la rotación de dos ejes a diferentes velocidades de las ruedas durante una curva y el cual normalmente se encuentra en ejes traseros de autos y camiones.

Cuando un vehículo toma una curva o da un giro, las ruedas exteriores tendrán que viajar a una mayor distancia en comparación con las ruedas interiores en un instante de tiempo durante la curva. En el caso en el que el automóvil tuviera un eje rígido entre sus ruedas exterior e interiores y sin ningún dispositivo, algunas de las ruedas se patinarían con respecto a las otras, por consiguiente para evitar este deslizamiento, se debe incorporar el mecanismo de engranes que permitirá reducir la velocidad de las ruedas internas y aumentar la velocidad de las ruedas exteriores al tomar una curva y al mismo tiempo debe mantener iguales las velocidades de todas las ruedas cuando el vehículo siga una trayectoria recta línea recta [23, 24].

El diferencial como se mencionó anteriormente se encuentra entre las dos ruedas, y está unido a cada rueda por un semi-eje que está girando a través de los engranes que normalmente son de tipo cónicos en espiral e hipoides, los cuales se describirán más adelante [25].

Dentro de un diferencial se pueden distinguir dos engranes principales: el piñón el cual es de diámetro menor y está conectado al eje de transmisión a través de una junta universal siendo el elemento motriz y el segundo engrane el cual se le identifica como corona, es el de mayor diámetro en el mecanismo y el que recibe la velocidad angular del piñón siendo el elemento impulso. Un esquema simple se puede ver en la figura 2.2.

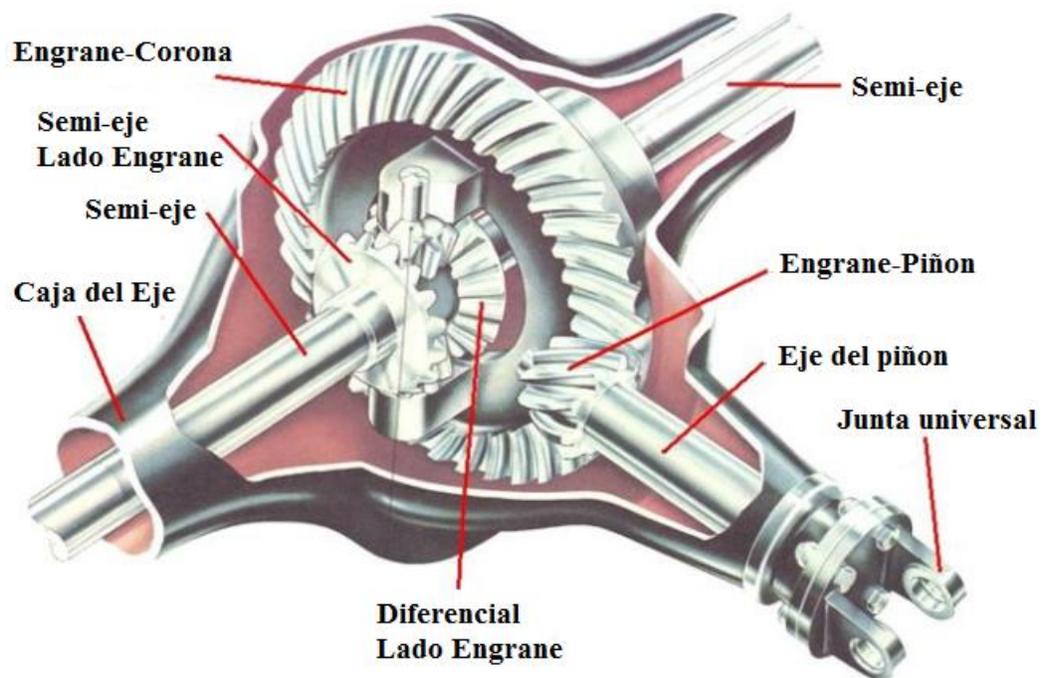


Figura 2. 2: Esquema básico de un diferencial [26].

En relación con este mecanismo de tren de engranes acoplados dentro del diferencial se examinará brevemente ahora los tipos de engranes que se manejan, su clasificación y se enfocará en dos mecanismo típicos en los sistemas diferenciales que son de ejes que no son paralelos y no se intersecan que son los engranes hipoides y los que se intersecan a 90 grados como los cónicos en espiral y se finalizará hablando de los sistemas de lubricación de estos tipo de par de engranaje [26].

## 2.2. Los engranes y su teoría del diente

Como se ha mencionado anteriormente la forma más sencilla de transferir movimiento giratorio de un eje a otro es usando dos cilindros en rodamiento. Si en ellos existe fricción suficiente en el punto de contacto se evitará deslizamiento entre los cilindros, hasta el punto en que la fuerza de fricción máxima en el punto de contacto sea rebasada por la demanda de transferencia de torque entre el conducido con respecto al conductor.

Ahora bien, si a estos cilindros o ruedas se adiciona unos dientes convirtiéndose en ruedas dentadas y hacen que los dientes de una rueda impulsadora encajen con precisión en los espacios entre los dientes de la rueda impulsada. Los dientes del conductor impulsará o empujará a los dientes del conducido, lo cual constituye una fuerza perpendicular al radio de la rueda, razón por la cual transmite un torque o par torsional y como está girando, transmite potencia [27]. Esto se puede observar en la figura 2.3.

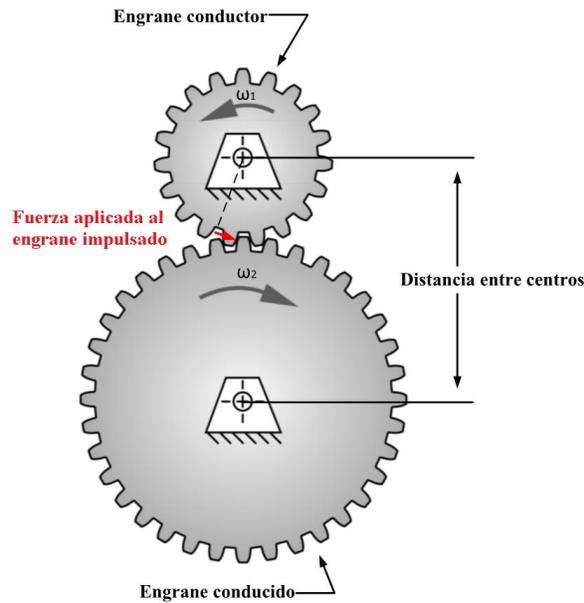


Figura 2. 3: Diagrama de ruedas dentadas llamados engranes [27].

En la anterior figura se puede observar el piñón que es el engrane conductor y con menor número de dientes es el encargado de girar a una velocidad de  $\omega_1$ , imprime una fuerza perpendicular sobre el punto de contacto y superficie del diente del engrane conducido transmitiendo la velocidad y haciendo girar a una velocidad angular de  $\omega_2$ .

### 2.2.1. Ley fundamental de engranaje

Los dientes de los engranes son para que se produzca el engranaje y sostengan una velocidad constante y eviten el deslizamiento entre los elementos rodantes en contacto. Estos deben satisfacer la ley fundamental de engranaje el cual expresa que la forma o perfil de los dientes debe ser tal, que la normal común en el punto de contacto entre los dos dientes debe pasar siempre por un punto fijo sobre la línea de centros (llamándose tangencial); haciendo que la razón de velocidad angular entre los elementos de la transmisión permanezca constante en toda la conexión o acción conjugada [27].

De aquí se define la *relación de velocidad angular o relación de transmisión* ( $R_t$ ) de un tren de engranes (dos o más engranes acoplados) como la razón de velocidad angular de entrada o del engrane conductor motriz, entre la velocidad angular de salida o engrane conducido o de igual forma expresado como la relación entre el número de dientes del engrane impulsado entre el número de dientes del engrane impulsor [28].

$$R_t = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_g}{N_p} = \frac{r_g}{r_p} \quad (\text{Ecuación 1})$$

Dónde:

- $\omega_2$  : Velocidad angular del engrane de salida.
- $\omega_1$  : Velocidad angular del engrane de entrada.
- $N_g$  : Numero de dientes del engrane conducido.
- $N_p$  : Numero de dientes del engrane conductor o piñón.
- $r_p$  : Radio de paso del engrane piñón.
- $r_g$  : Radio de paso del engrane impulsado.

Parte de esta nomenclatura general básica se puede observar en la figura 2.4 la cual tiene las superficies de los cilindros de rodamiento que son los *círculos de paso o círculos primitivos* con sus respectivos radios de paso de los engranes. El punto de contacto entre los cilindros permanece sobre la línea de centros, y este punto se conoce como *punto de paso (P)*. Punto en el cual tienen la misma velocidad tangencial para ambas superficies de cilindros [2].

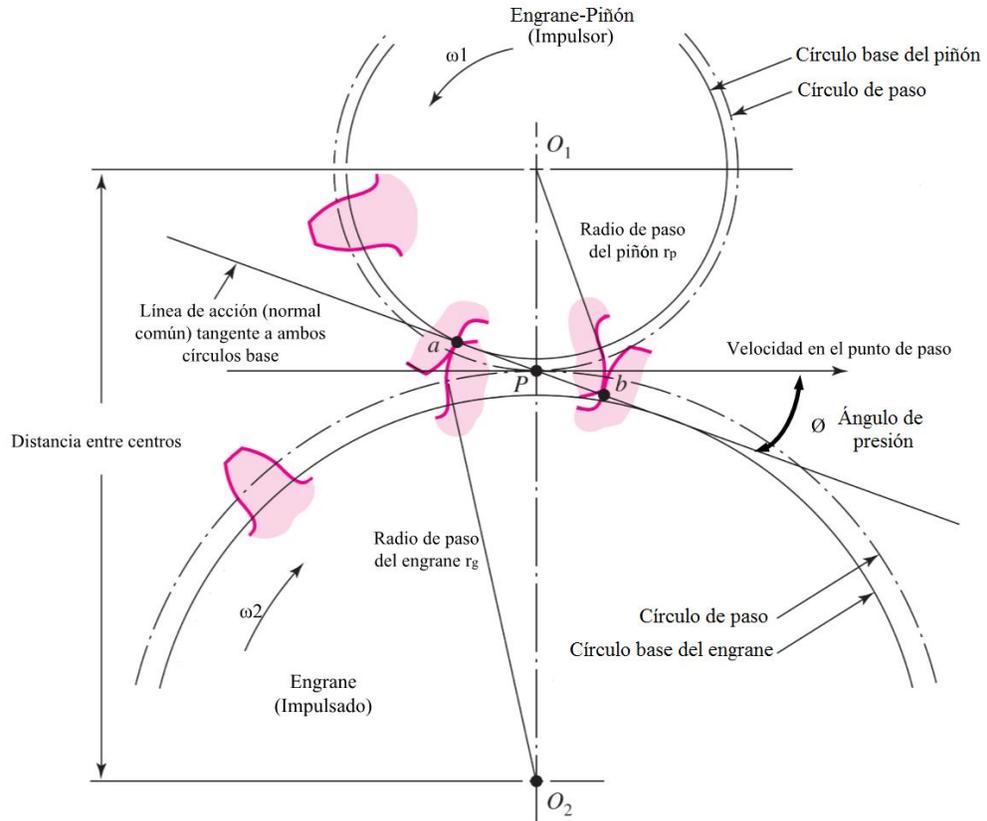


Figura 2. 4: Geometría básica de un par de engranes [2].

Como se observó en la figura 2.4 se tiene una línea *de acción o presión*, el cual es tangente de los círculos base de los engranes y definen el acoplamiento de trabajo entre el piñón y la corona.

Iniciando en el punto (a) que es el contacto inicial cuando el flanco del primer diente del piñón entra en contacto con la punta del diente de la corona y en donde el círculo del adendum o cabeza de la corona cruza la línea de acción. A medida que se acoplan el punto de contacto se desliza hacia arriba del diente el piñón y hacia abajo en el flanco del diente de la corona, finalizando en el punto (b) el cual termina el recorrido en la punta del diente del piñón y en donde el círculo de cabeza del piñón cruza la línea de acción, A dicha distancia entre los puntos “a” y “b” se le conoce como *longitud de acción*.

Ahora bien, para el ángulo entre la línea de acción y la dirección de la velocidad en el punto de paso de modo que la línea de acción gira  $\phi$  grados en la dirección de giro del engrane impulsado se conoce como *ángulo de presión* [29] , ver figura 2.4.

## 2.2.2. La forma involuta del diente

La forma de la curva de la involuta para el perfil o forma del diente del engrane se puede observar de la figura 2.5, el cual es un hilo que se genera como si de este, se estuviera desenrollando una cuerda tensa a partir de un cilindro.

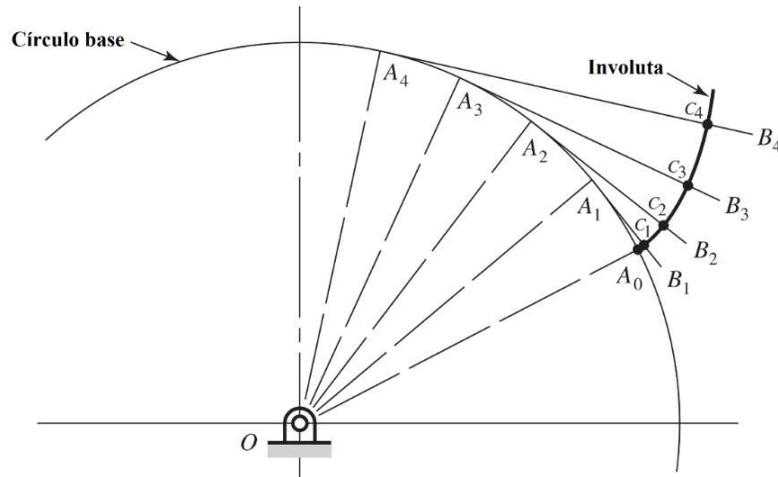


Figura 2. 5: Generación de una involuta [30].

El procedimiento para la forma de la involuta consta de los siguientes pasos o guía [30] :

- Se divide el círculo base del engrane en un número de segmentos iguales o porciones iguales, de tal forma que ubicamos los puntos  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$  etc.
- Comenzando en  $A_1$ , se traza la línea recta  $A_1B_1$ , el cual es tangente al círculo base y perpendicular al radio  $OA_1$ , de igual manera se trazan las respectivas líneas rectas en  $A_2, A_3 \dots$  etc. y así sucesivamente.
- Posteriormente a lo largo de la línea  $A_1B_1$  se proyecta la distancia de  $A_1A_0$ , formando y ubicando el punto  $C_1$ , sucesivamente en la línea  $A_2B_2$  se proyecta la distancia  $A_2A_0$  o dicho de otra manera sería el doble de distancia de  $A_1A_0$  y así ubicamos el punto  $C_2$ , continuando así de manera progresiva en las demás rectas.
- Finalmente se establece la curva de la involuta a partir del punto  $A_0$ , y continuando en los puntos  $C_1, C_2, C_3, C_4 \dots$  etc.

De aquí se puede mencionar que, de la curvatura de la involuta, su centro instantáneo siempre se encuentra en el punto de tangencia de la cuerda con el círculo base. Así mismo si se traza una tangente en la involuta esta será normal a la cuerda.

Estos engranes hechos a partir de la curva de la involuta tienen al menos un par de dientes en contacto uno con el otro.

### 2.2.3. Nomenclatura del diente del engrane

Como se mencionó anteriormente los cilindros en los cuales se desenrolla las cuerdas se llaman *círculo base*, tanto del engrane motriz, como del engrane conducido y que se observa en la figura 2.4 y figura 2.5. De igual manera se identificaron los *círculos de paso*, los cuales son las superficies de rodamiento que para el par de engranes acoplados estos son tangentes entre sí y es por donde se produce el contacto para la transmisión de un engrane a otro.

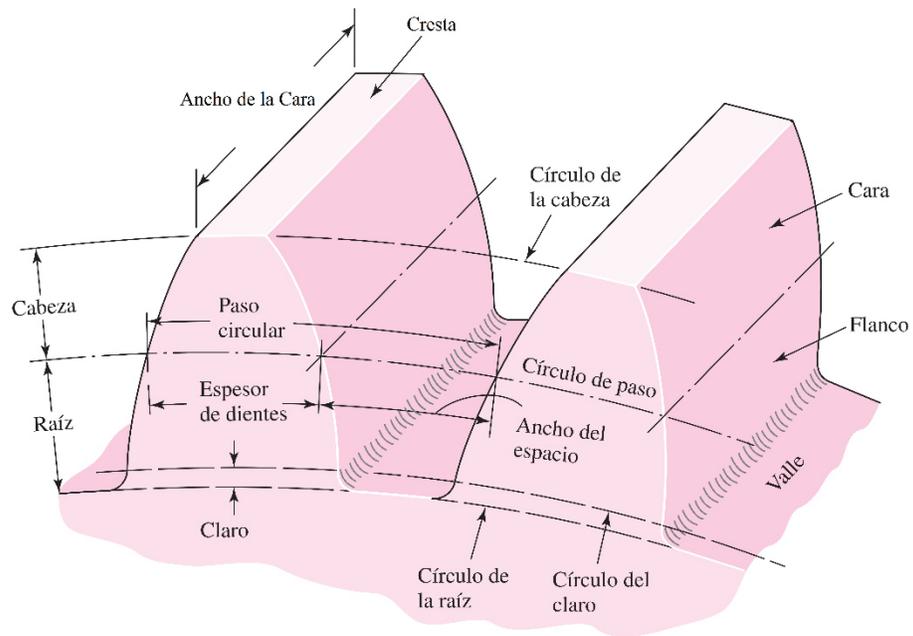


Figura 2. 6: Nomenclatura básica del diente de un engrane [2].

A partir de diferentes fuentes [2, 27–30] y los manuales estándar de la asociación americana de fabricantes de engranajes o AGMA por su siglas en ingles [31, 32] se

resumen las definiciones y nomenclatura básicas del diente de un engrane los cuales se indican a continuación.

A partir del círculo base y del círculo primitivo los cuales forman la involuta y perfil de diente diseñado se puede observar en la figura 2.6 la *altura total o profundidad total* de un diente como la suma de la *cabeza o adéndum* que va desde la distancia radial entre la cresta y el círculo de paso. La *raíz o dedéndum* que es equivalente desde el fondo o el valle hasta el círculo de paso. De allí se tiene el *círculo de raíz* (valle del diente) y *círculo de la cabeza* (hasta la cresta del diente).

Otro parámetro importante por definir es el *paso circular ( $P_c$ )* que es la distancia medida sobre el círculo de paso y va desde un punto del diente hasta otro punto del diente adyacente, siguiendo la trayectoria del círculo de paso. Por consiguiente, el paso circular es la suma del *espesor del diente* más el *ancho del espacio*.

Se debe agregar que el ancho del espacio del diente es mayor que el espesor del diente. De no ser así los engranes, al acoplar un diente de un engrane con el otro trabajarían con los dientes muy apretados. La diferencia entre el ancho del espacio de un diente y el espesor del diente de acoplamiento, medido desde los círculos de paso se le conoce como *huelgo o Backlash* en su significado en inglés, y se puede apreciar en la figura 2.7.

Otra definición a tener en cuenta es el *claro o clearance (c)* en su significado en inglés y está dado por la cantidad que el *dedéndum* de un engrane dado excede el adéndum de su engrane acoplado. Ver figura 2.7 para su ilustración

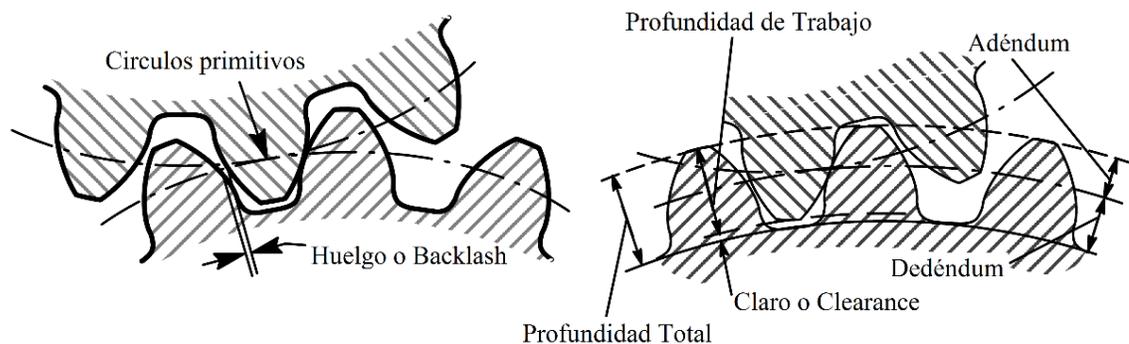


Figura 2. 7: Algunas dimensiones en la zona de engrane [31].

El *ancho de la cara* de un diente se mide a lo largo del eje del engrane y allí que algunos autores lo definen como *cara*, a la superficie del ancho de la cara desde el círculo de paso hasta la cresta es decir al adéndum y al *flanco*, como la superficie del ancho de la cara desde el círculo de paso hasta el valle, es decir el dedéndum (ver figura 2.6).

Teniendo en cuenta la definición de *paso circular*, el cual determina el tamaño del diente se tiene que el diámetro del círculo de paso ( $d_p$ ) y el número de dientes del engrane ( $N$ ) expresado como [30]:

$$P_c = \frac{\pi d_p}{N} \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Así mismo para el sistema inglés se puede expresar la razón entre el número de dientes y el diámetro de paso ( $d_p$ ) en pulgadas como *paso diametral* ( $P_d$ ) referido como número de dientes por pulgada.

$$P_d = \frac{N}{d_p} \quad \text{(Ecuación 3)}$$

Para el sistema internacional, usando engranes métricos se define un parámetro llamado *modulo* ( $\mathcal{M}$ ), es cuál es el recíproco del paso diametral y el diámetro de paso, pero este expresado en milímetros.

$$\mathcal{M} = \frac{d_p}{N} \quad \text{(Ecuación 4)}$$

#### 2.2.4. Nomenclatura de los engranes cónicos e hipoides

En cuanto a engranes que se usan para transmitir movimiento entre ejes que se intersectan o no paralelos, se requiere del grupo de engranes cónicos, los cuales en su clasificación se explican más adelante.

Un esquema básico de la sección transversal de un *par de engranes cónicos* acoplados se puede ver en la figura 2.8. En el cual el paso de engranes cónicos se mide desde el extremo mayor del diente o sobre el cono posterior y desde allí se definen el tamaño y perfil como se mencionó previamente para el cálculo del paso circular.

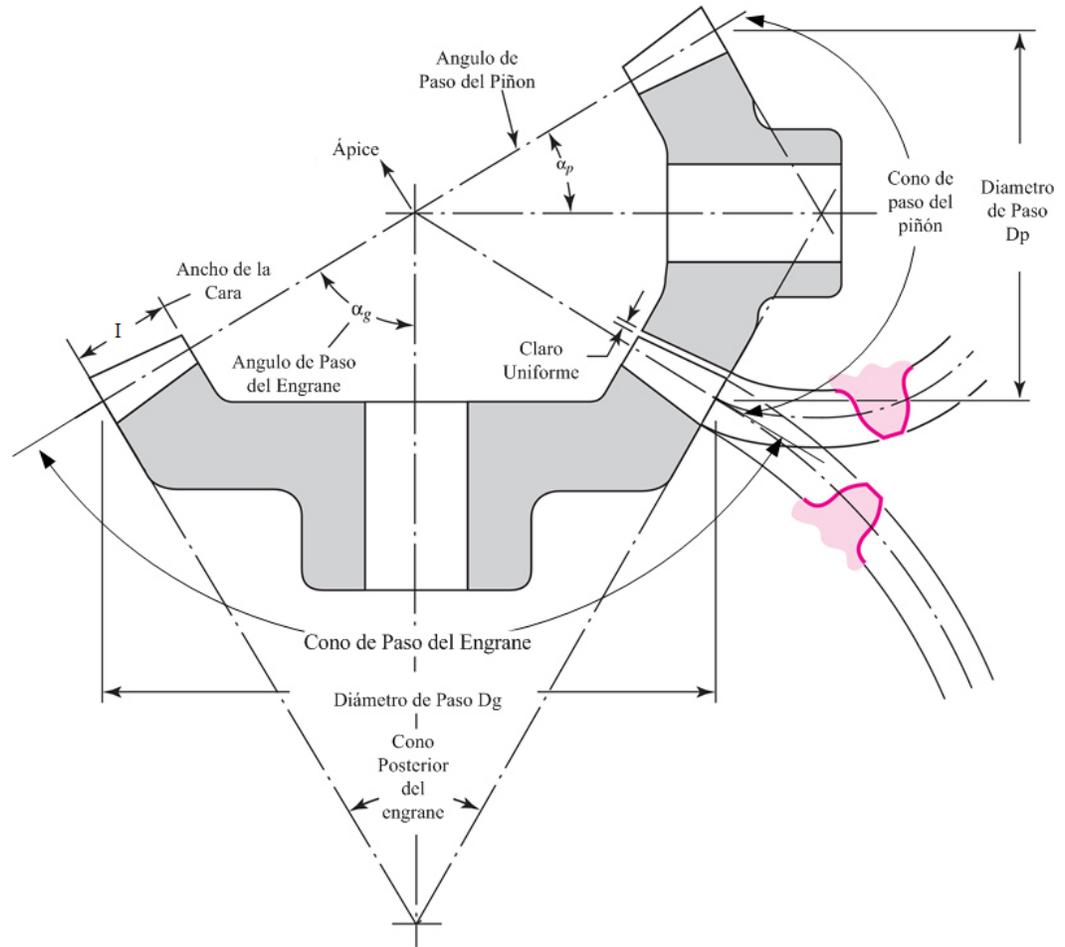


Figura 2. 8: Nomenclatura de engranes cónicos [2].

De aquí se puede observar que el *claro* (*clearance en inglés*) es uniforme y los *ángulos de paso del piñón* ( $\alpha_p$ ) y *la corona* ( $\alpha_g$ ) están definidos por los *conos de paso* que se unen en el *ápice* o vértice. Dichos ángulos de paso están definidos por los diámetros de paso del piñón (engrane más pequeño que usualmente el motriz) y de la corona (engrane de mayor diámetro y normalmente el conducido) los cuales estas relacionados con el número de dientes por las siguientes expresiones [27]:

$$\tan \alpha_p = \frac{N_p}{N_g} = \frac{r_p}{r_g} \quad (\text{Ecuación 5})$$

$$\tan \alpha_g = \frac{N_g}{N_p} = \frac{r_g}{r_p} \quad (\text{Ecuación 6})$$

También se puede apreciar el *ancho de la cara* (F) para un perfil de dientes cónicos.

Otras dimensiones básicas de los engranes cónicos se pueden apreciar en la figura 2.9, donde para el acoplamiento entre el piñón y la corona, se forman dos conos de paso y se tiene el vértice o ápice en común, a partir de allí se pueden observar los *diámetros de paso* (H) y (E), formados desde la parte posterior del engrane, su *ángulo de Eje* (J) que para este caso es de  $90^\circ$  el cual es posición perpendicular [32].

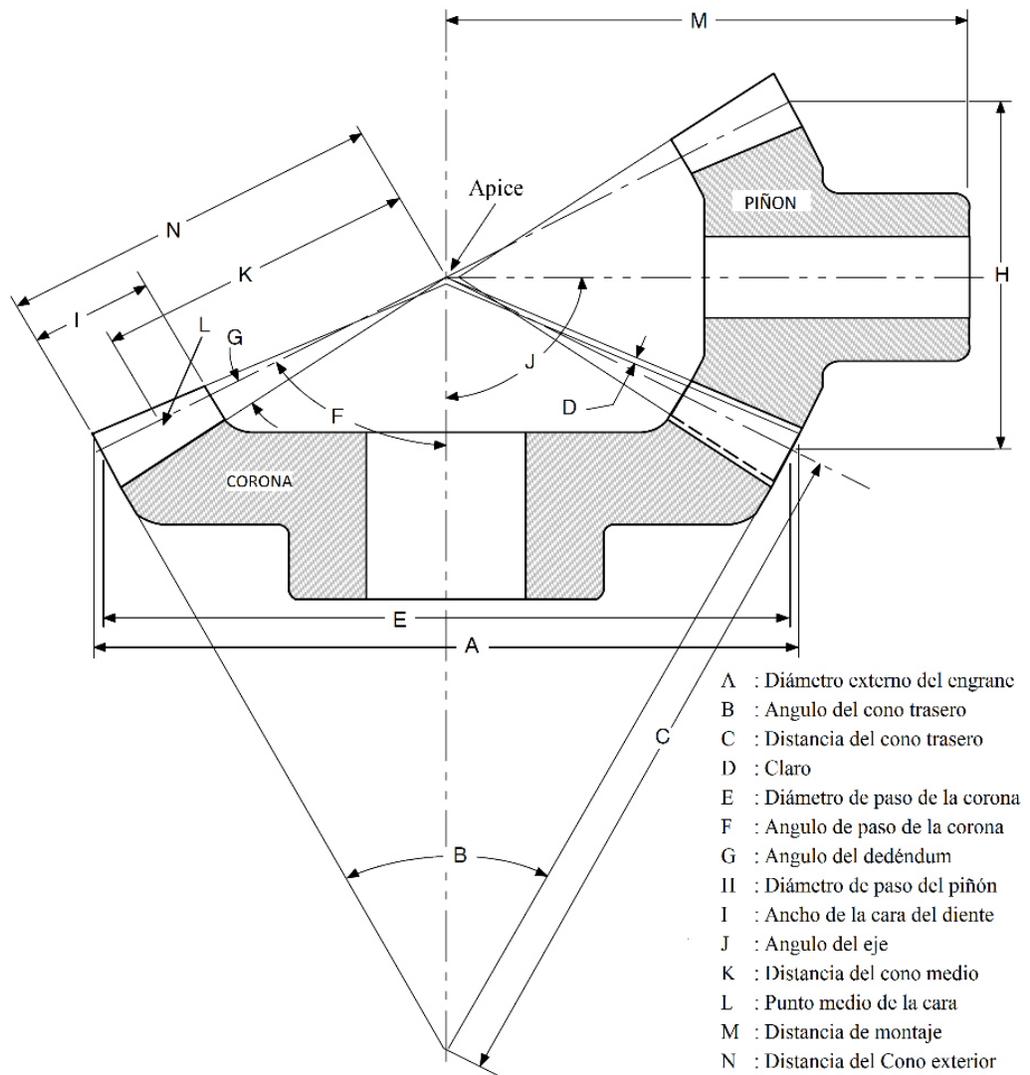


Figura 2. 9: Dimensiones básicas de un par de engranes cónicos [32].

Para el caso de engranajes cónicos e hipoides en el cual sus ápices de los conos de la corona y del piñón no coinciden debido a un desplazamiento del conductor con respecto al conducido, se tienen las siguientes dimensiones que se pueden observar en la figura 2.10.

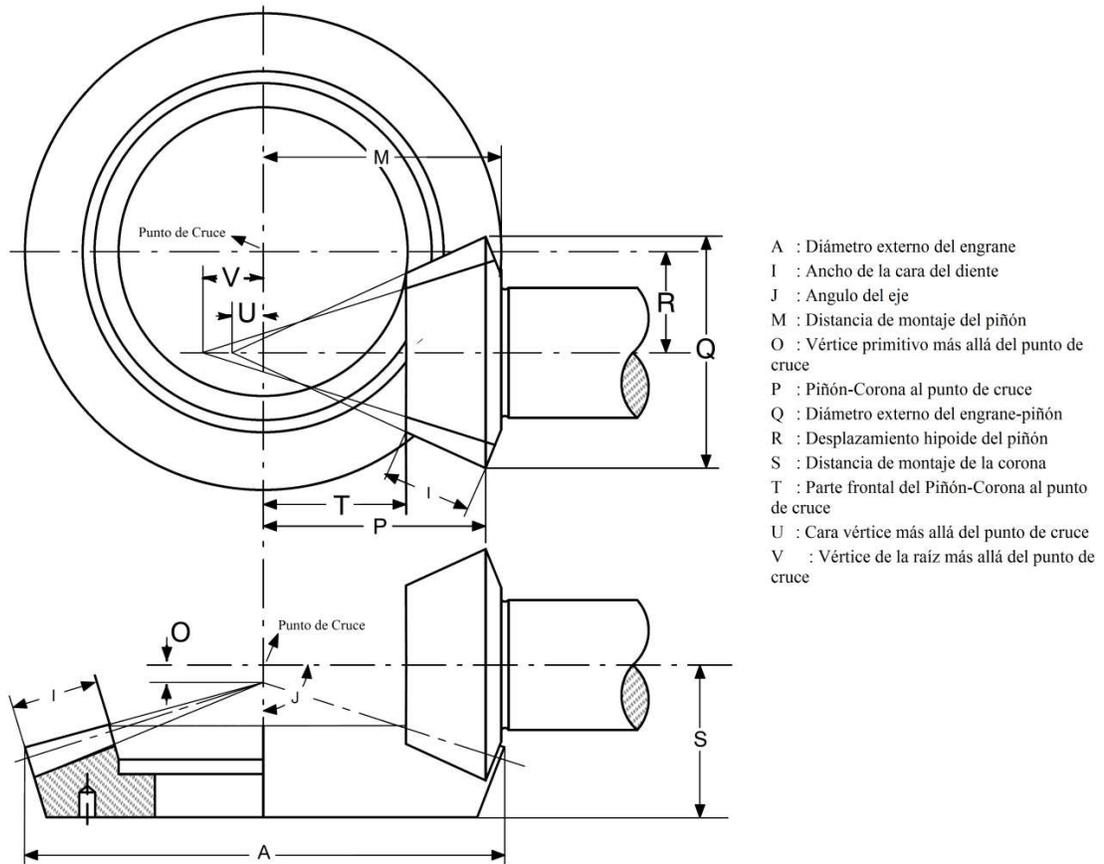


Figura 2. 10: Dimensiones básicas de un par de engranes cónicos y hipoides [32].

De la figura anterior se puede resaltar el *desplazamiento hipoides del piñón* (*hypoid offset* en inglés). El cuál es la distancia del plano del eje del piñón al eje de la corona. La *distancia de montaje del piñón* (*M*) con respecto a la corona, el cual es la longitud que hay desde la parte trasera o posterior del piñón al eje de la corona. A su vez la proyección del eje de la corona sobre alguno de los planos del eje del piñón se forma el *punto de cruce*. Y de igual manera esta la *distancia de montaje de la corona* (*S*) con respecto al piñón, el cual es la longitud que hay desde la parte trasera de la corona hasta al eje del piñón [32].

También se pueden observar los *diámetros externos del piñón* (*Q*) y *la corona* (*A*) entre otras distancias descritas en la figura 2.10.

### 2.3. Clasificación de los engranajes

Los engranes son elementos de máquinas que sirven para transmitir movimiento y/o potencia de un eje a otro, esta transferencia puede ser o no uniforme y también puede ir acompañada de cambios en la dirección, velocidad y torque del eje. Los engranajes y sistemas de engranajes se clasifican generalmente de acuerdo a su posición relativa de los ejes de un par de engranes, su dirección de rotación y la relación de velocidad que se obtiene [33].

Por ejemplo, en la figura 2.11 se puede observar el acomodo más general de los ejes de dos engranes, cuando estos no son paralelos, ni perpendiculares y no se intersectan. La distancia más corta entre los dos ejes se llama desplazamiento o distancia entre centros y es la medida sobre la línea de centros que es perpendicular y común entre ellos. Todos los demás tipos de par de engranes son casos especiales de esta forma básica. (engranajes de ejes paralelos, engranajes de ejes que se intersectan entre otros) [34, 35].

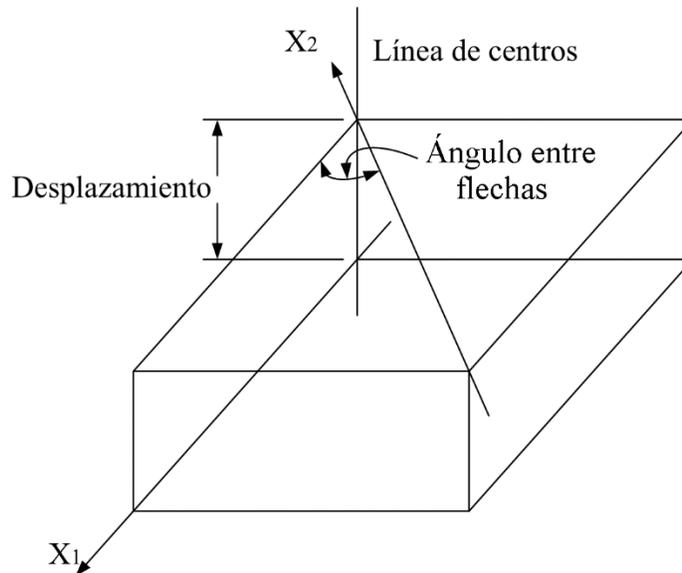


Figura 2. 11: Arreglo de ejes de engranes [34].

Considerando lo anterior se discutirán los principales tipos de engranes que se ven en arreglos para transmisión de potencia, concentrándonos en los tipos de engranajes que se encuentran comúnmente en los diferenciales como lo son los engranajes cónicos en espiral y los engranajes hipoides.

### 2.3.1. Engranajes cilíndrico recto

Este es de los más sencillos arreglos de par de engranes en donde se transmite potencia entre ejes que son paralelos (figura 2.12). Tiene sus dientes en el exterior de un cilindro y son paralelos al eje de rotación [36].

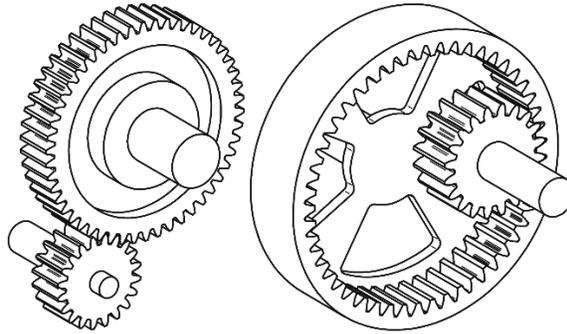


Figura 2. 12: Tipos de Engranajes cilíndricos rectos [36].

### 2.3.2. Engranajes cilíndricos helicoidales

Se utilizan para transmitir movimiento entre ejes paralelos o cruzados. Los dientes de los engranajes se cortan en una espiral que envuelve un cilindro, estos dientes se encuentran a lo largo de una hélice en un ángulo con respecto al eje de rotación del engrane (figura 2.13). Por el acoplamiento en que ocurre entre los dientes hace que dos o más dientes de cada engrane estén siempre en contacto. En comparación con los engranajes rectos, estos son menos ruidoso ya que el acoplamiento se produce gradualmente [37].

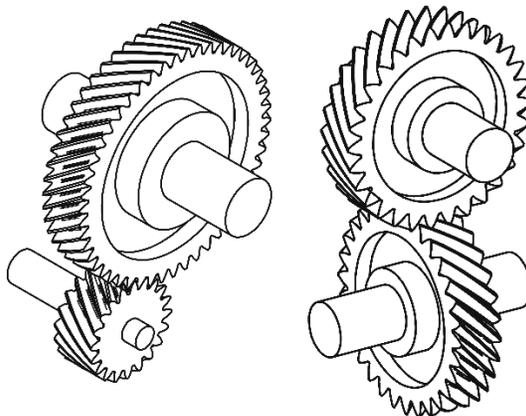


Figura 2. 13: Engranajes cilíndricos helicoidales paralelos y cruzado [36].

### 2.3.3. Engranajes cónicos rectos

Este par de engranes transmite movimiento rotatorio entre dos ejes no paralelos o ejes que se intersectan, estos ejes suelen ser a  $90^\circ$  entre sí. Presentan dientes rectos formados en superficies cónicas, que si se extienden los dientes desde la parte posterior del cono hacia el ápice se intersectarían con el eje de rotación (figura 2.14). Su contacto en el engrane impulsado, empieza en la parte superior del diente y avanza hacia la raíz. Por la forma de las superficies cónicas, la acción de acoplamiento, se asemeja a la de dos conos rodando uno sobre el otro [38].

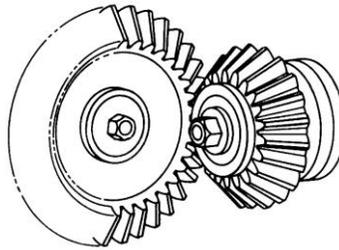


Figura 2. 14: Engranajes cónicos rectos [37].

### 2.3.4. Engranajes cónicos en espiral

El par de engranes cónicos en espiral tienen dientes que se curvan a lo largo de la longitud del diente y se colocan en ángulo (figura 2.15), debido a la espiral son más complejos de fabricar. Esta forma de los dientes ayuda a un acoplamiento gradual con una mayor relación de contacto. Producen una transmisión más suave y silenciosa desde el engrane motriz al engrane conducido, en comparación de los engranajes cónicos de dientes rectos.

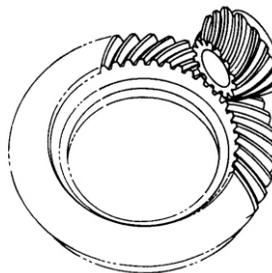


Figura 2. 15: Par de engranes cónicos en espiral [37].

Normalmente se utilizan cuando se requieren altas velocidades (mayores a 1000 Rev./min) y en aplicaciones de relación de reducción en velocidad grande. Estos engranajes cónicos en espiral generalmente están fabricados para ángulos de presión de 16 °, 17.5 °, 20 ° y 22.5 °. Y para ángulos de espiral de 35 grados comúnmente [35, 39].

*Perfil del diente y sentido de giro de los engranajes cónicos en espiral.*

El perfil del diente y sentido de giro es un concepto relevante para el entendimiento de los engranajes que, aunque inician con los engranajes cónicos en espiral, también aplica para el funcionamiento del par de engranes zerol e hipoides que trabajan en los diferenciales de cajas de transmisión.

El desplazamiento de mano derecha o mano izquierda está definido observando los engranes de frente desde el vértice o ápice de su cono que forman. Se coloca un diente en posición de 12 en punto del reloj, si el diente visto desde su parte frontal hacia la parte trasera del engrane se curva en sentido a las manecillas del reloj, se dice que el engrane es de mano derecha de espiral inversamente si se curva en sentido contrario de las manecillas del reloj, es de mano izquierda la espiral [40], como se puede observar en la figura 2.16.

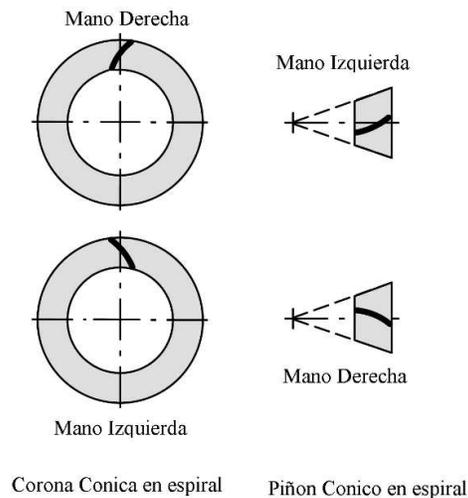


Figura 2. 16: Esquema del sentido del diente para engranajes cónico en espiral [31].

Cabe mencionar que los dientes tienen un lado convexo y un lado cóncavo, que dependiendo de la superficie sobre la que actúa la fuerza, la dirección y magnitud cambian y de igual forma depende de cual sea el engrane motriz y cuál es el engrane conducido.

En la figura 2.17 se pueden identificar un engranaje cónico en espiral, el perfil de diente y su dirección de la curva o espiral con perfil de mano derecha y perfil de mano izquierda.

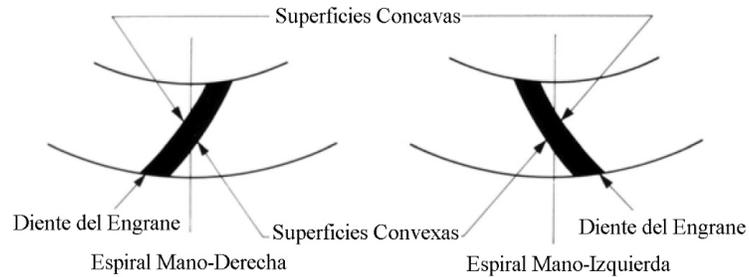


Figura 2. 17: Superficie convexa y cóncava de engranes cónicos en espiral [41].

En cuanto a la dirección de las fuerzas, estas están determinadas por la mano de la espiral y la dirección de rotación, dicha rotación se determina mirando desde la parte posterior del piñón hacia el ápice (figura 2.18-a) y puede ser en sentido de las manecillas del reloj o en contra de las manecillas del reloj [41].

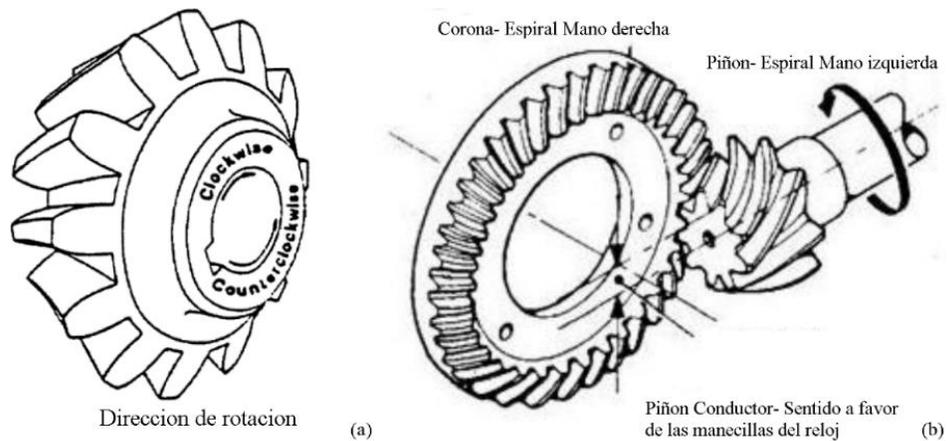


Figura 2. 18: Sentido y giro de rotación de un par de engranes cónico en espiral [32].

Así por ejemplo, si el perfil del diente del engrane conductor o piñón es de mano izquierda de espiral y es el engrane motriz girando a favor de las manecillas del reloj, esto es, el lado de su superficie cóncava es la que entrará en contacto en el primer diente de la corona o conducido el cual su perfil del diente deberá ser de mano derecha de espiral con lado de superficie convexa [41], así como se observa en la figura 2.18-b.

### 2.3.5. Engranajes cónicos zerol

Este par de engranes son una clase de los engranajes cónicos en espiral, los cuales también tienen los dientes curvos como los engranes en espiral, pero van en la misma dirección que los dientes de los engranajes cónico recto (figura 2.19); presentando los dientes un ángulo espiral 0 grados, esto quiere decir que los dos extremos de los dientes están en el mismo plano que el eje del engranaje (coplanares) [39].

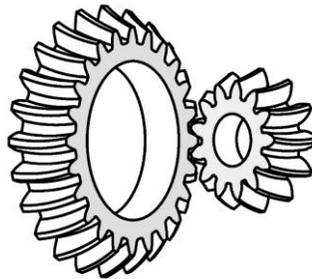


Figura 2. 19: Engranajes cónicos zerol [32].

La diferencia entre los engranajes cónicos en espiral y cónicos zerol se puede observar en la figura 2.20.

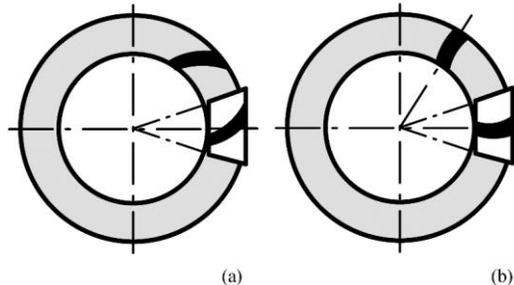


Figura 2. 20: Esquema de los Engranajes cónicos en espiral (a) y zerol (b) [31].

Los engranajes zerol poseen características de engranajes cónicos rectos y espirales. En cuanto a su resistencia, caen entre engranajes cónicos rectos y en espiral y, por lo tanto, se emplean generalmente para aplicaciones de carga media. Se fabrican usualmente con ángulos de presión entre  $14.5^\circ$  y  $25^\circ$  como también tienen la superficie de sus dientes con acabados de precisión. Por otro lado, los engranajes con ángulos de espiral de menos de 10 grados a veces se denominan también engranajes zerol [32].

### 2.3.6. Engranajes hipoides

Estos Engranajes están dentro del grupo de los cuales sus ejes de los engranes no son paralelos, ni se intersectan, simplemente se cruzan (figura 2.21). Normalmente formando un ángulo entre ejes de 90 grados y son similares a los engranajes cónicos en espiral, excepto que el eje del piñón está desplazado perpendicularmente por encima o por debajo del eje de la corona [32].

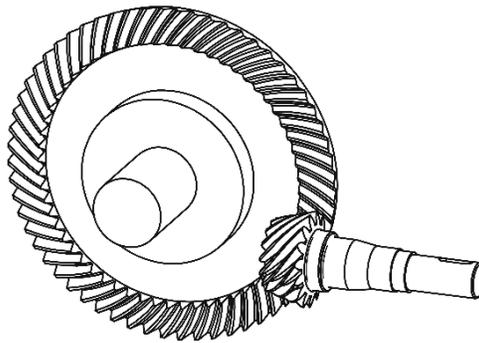


Figura 2. 21: Engranajes hipoides [36].

En funcionamiento, los engranajes hipoidales tienen alta resistencia y rigidez, trabajan más suave y silenciosos que los engranes cónicos en espiral; soportan cargas de choque, se pueden emplear para una gran reducción de velocidad, tienen movimiento uniforme y alta presión de contacto entre los dientes lo cual requiere una lubricación extrema [35].

Dentro del par de engranes hipoides la dirección del desplazamiento se determina mirando el conjunto de engranes con el piñón a la derecha y el desplazamiento se da en el eje del piñón con respecto al eje de la corona es así que se puede hacer la siguiente distinción [40]:

*Desplazamiento positivo:* el eje del piñón se desplaza en dirección al ángulo de espiral de la corona; el ángulo de espiral del piñón es más grande que el de la corona y el diámetro del piñón aumenta comparado con uno equivalente que no se desplaza (figura 2.22 –a).

*Desplazamiento negativo:* el eje del piñón se desplaza en dirección opuesta al ángulo de espiral de la corona; el ángulo de espiral del piñón es más pequeño que el de la corona y el diámetro del piñón disminuye comparado con uno equivalente que no se desplaza (figura 2.22 –b).

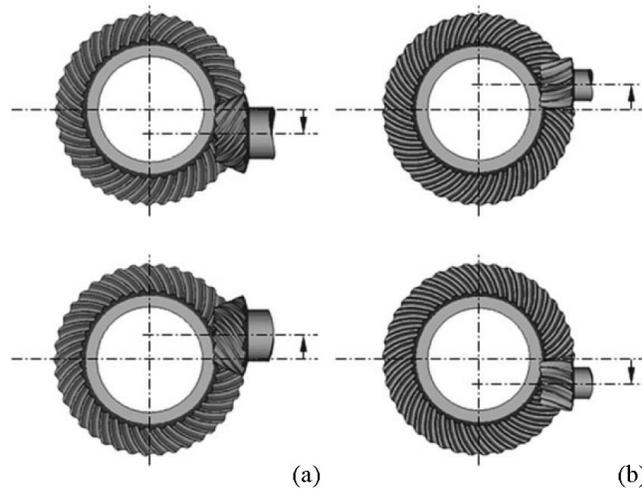


Figura 2. 22: Definición de desplazamiento hipoide positivo (a) y negativo (b) [40].

Adicionalmente en la figura 2.23 se puede observar el sentido de los dientes para los engranajes hipoides, el cual es similar a lo descrito para los engranes cónicos en espiral. Para esta ilustración la corona es de perfil de diente de mano derecha y se acopla en un piñón de perfil de diente de mano izquierda.

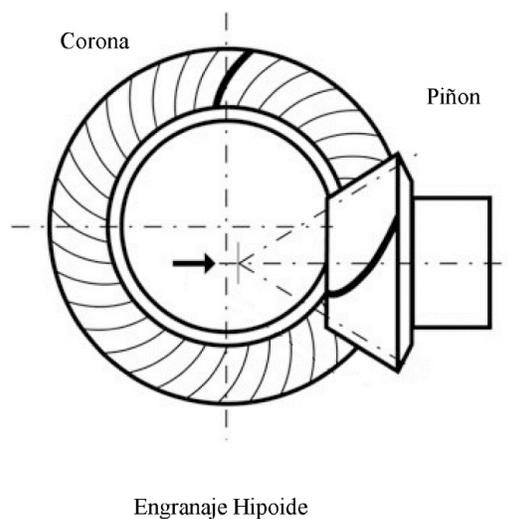


Figura 2. 23: Perfil de diente de los engranajes hipoides [40].

## 2.4. Lubricación de engranajes cónicos en espiral e hipoides

La lubricación de los engranajes tiene como objetivo la reducción de fricción que existirá al haber contacto entre metal-metal del engrane conductor y el engrane conducido al tener acoplamiento. Así mismo disminuir el desgaste y hacer como medio convectivo de disipación de calor generado por la misma fricción. Adicionalmente protege los componentes contra la corrosión, y con aditivos que pueda llegar a tener el lubricante sirviendo de inhibidores de oxidación, depresores del punto de fluidez, detergentes y dispersantes ayudando a la protección y evitando daños a los engranajes. [40].

Para las cajas y diferenciales de transmisión hay diferentes métodos de aplicaciones de la lubricación como lo son lubricación por grasa; lubricación por salpicadura y lubricación por rocío.

*Lubricación por grasa:* este se aplica en sistemas de engranajes que funcionan a baja velocidad (menos de 6m/s de velocidad tangencial del engrane). La grasa es simplemente aceite derivado del petróleo suspendido en una emulsión de jabón, el cual debe tener una viscosidad adecuada y una buena fluidez. En condiciones de cargar elevadas y operación continua, no es adecuada y no tiene efecto de disipador de calor.

La grasa deber ser suficiente para asegurar que los dientes del par de engranes estén lubricados, pero un exceso puede dar como resultado un arrastre viscoso y perdida de potencia [42].

*Lubricación forzada:* se utiliza en sistemas de transmisión por engranes cuyas velocidades tangenciales de los engranes alcanzan 10 a 20 m/s, esta lubricación está diseñada utilizando unas boquillas con aceite circulando a una presión adecuada por medio de una bomba del lubricante. Este sistema de lubricación debe ser cuidadosamente colocado para garantizar que el aceite llegue a las superficies de contacto, ya que las fuerzas centrifugas y el flujo de aire que escapa tenderán a desviar el chorro del lubricante [42].

*Lubricación por salpicadura:* es el método comúnmente usado, los engranajes simplemente se sumergen en un baño de aceite, alojando los engranes en una caja, la cual

se llena parcialmente con un lubricante adecuado. La inmersión debe ser tal que al menos uno de los miembros de cada engranaje esté parcialmente sumergido en el lubricante.

La rotación del engrane llevará el lubricante a los engranajes y mantendrá lubricados los engranes que no estén sumergidos (ver diagrama básico figura 2.24-a) y en el caso de un montaje de engranajes cónicos en espiral o hipoides, la corona es la que mayor parte por su rotación salpicará el aceite y llevará en la zona de engrane la lubricación con el piñón (figura 2.24-b).

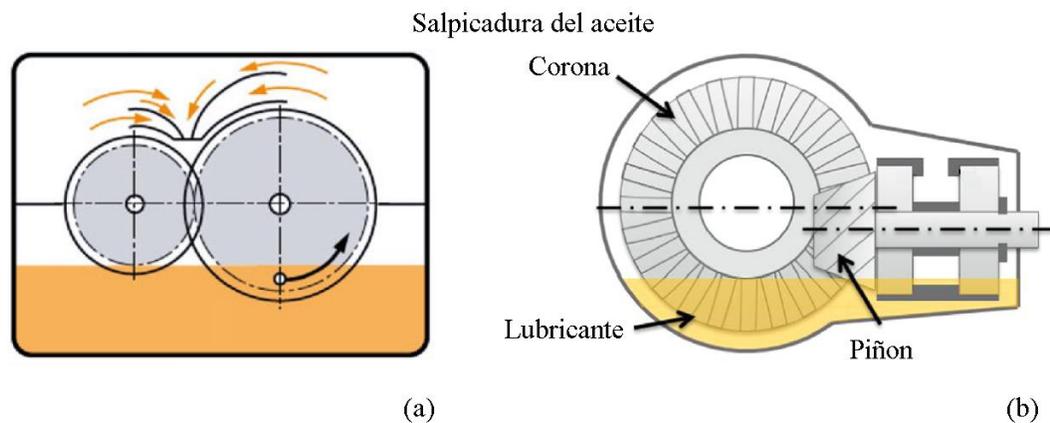


Figura 2. 24: Diagrama básico de lubricación por salpicadura [43].

Este tipo de lubricación por salpicadura necesita al menos 3 m/s de velocidad tangencial del engrane para ser efectiva. Y su nivel de aceite debe monitorearse en condiciones estáticas y dinámicas para garantizar que sea correcto para la aplicación y que no se produzcan pérdidas excesivas como resultado de la agitación de lubricante [43].

## 2.5. Pérdidas de potencia en una caja de engranajes

Las pérdidas de potencia en cajas de transmisión y en ejes diferenciales siempre ha sido un tema relevante para el estudio del desempeño y eficiencia de la transmisión, como se mencionó en el capítulo I, las pérdidas de potencia se encuentran dentro de dos grupos: los primeros son las pérdidas de *potencia por carga dependiente*, las cuales son perdidas de potencia directamente proporcional a la carga transmitida y están asociadas al deslizamiento entre los diferentes componentes mecánicos y fricción por el contacto entre superficies que se genera [12].

El otro grupo son las pérdidas de *potencia por cargas independiente*, o también llamadas pérdidas de potencia por centrifugado o giro (Spin Power Losses en inglés) y están relacionadas a la agitación o batido del lubricante debido a la rotación de los engranajes y el efecto viscoso en si del fluido dentro de la caja de engranajes.

No obstante, las pérdidas de potencia de estos dos grupos a menudo son comparables en condiciones de alta carga y baja velocidad pero investigaciones han demostrado que las pérdidas por giro dominan por encima de las pérdidas de potencia por carga dependiente en condiciones de altas velocidades de operación [44].

Dentro de una caja de transmisión por engranes, hay diferentes fuentes de pérdidas de potencia que de acuerdo con Lord [45] menciona que del total de pérdidas, el 50 % proviene rodamientos los cuales están montados en los ejes; el 40 % deriva de las pérdidas por el acoplamiento del par de engranes y que se produce en el punto de contacto donde transmite el torque; y finalmente el 10% de las pérdidas de potencia resultan de dos tipos de pérdidas; una por agitación o batido que ocurren cuando un par de engranes inmerso parcialmente en un lubricante, al rotar a cierta velocidad angular producen un costo de energía extra que se requiere para mover el fluido (tema de estudio de este trabajo) y las pérdidas de potencia por resistencia al viento que son las pérdidas en un conjunto de engranajes causadas por el arrastre de los engranes cuando se está ejecutando en el aire o un medio de una sola fase.

Resumiendo la clasificación de las pérdidas de potencia, diferentes investigadores [12, 46, 47] subdividen las pérdidas de potencia por cargas dependientes y cargas independientes, como se puede observar en la figura 2.25.

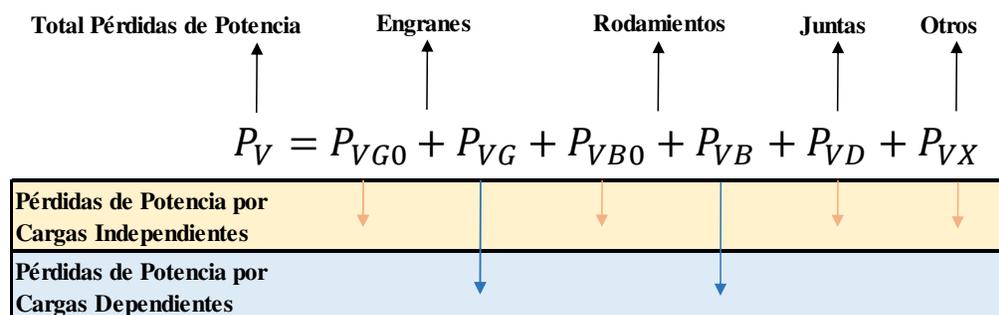


Figura 2. 25: Composición de las pérdidas de potencia de una transmisión [47].

Donde el total de pérdidas de potencia se subdividen de acuerdo al origen con los subíndices en engranes (G), rodamientos (B), contactos en juntas (D) y fuentes genéricas (X), quedando como:

$P_{VG}$  , refiriéndose a las pérdidas de potencia por carga dependiente de los engranajes y surgen esencialmente por el deslizamiento entre los flancos y caras de los dientes de los engranes.

$P_{VB}$  , indica las pérdidas de potencia por carga dependiente de los rodamientos y se vincula al deslizamiento entre los elementos rodantes y los anillos.

$P_{VB0}$  , este pertenece a las pérdidas de potencia por carga independiente de los rodamientos y están relacionadas con efectos viscosos debido a la lubricación.

$P_{VD}$ , son las pérdidas de potencia por las juntas y sellos y están relacionadas al deslizamiento y que son independientes de la carga

$P_{VX}$ , son otras perdidas de potencia de fuentes genéricas.

Y el de componente de estudio de esta tesis ,  $P_{VC0}$  las cuales son los pérdidas de potencia por carga independiente de los engranajes debido a la interacción entre el lubricante y la rotación de los engranes [47].

### **2.5.1. Pérdidas de potencia por cargas independientes**

Las Pérdidas de potencia  $P_{VC0}$  como se mencionó anteriormente se deben a la rotación de los engranes y su interacción con un fluido y que a su vez pueden ser categorizadas en dos grupos : (i) pérdidas de potencia debido al engranaje en la zona de acoplamiento y (ii) pérdidas de potencia debido al movimiento y arrastre del fluido, estas a su vez se dividen en pérdidas por batido o agitación y pérdidas por resistencia al viento [48]. Estas se pueden ver en el diagrama de la figura 2.26 con su significado en inglés.

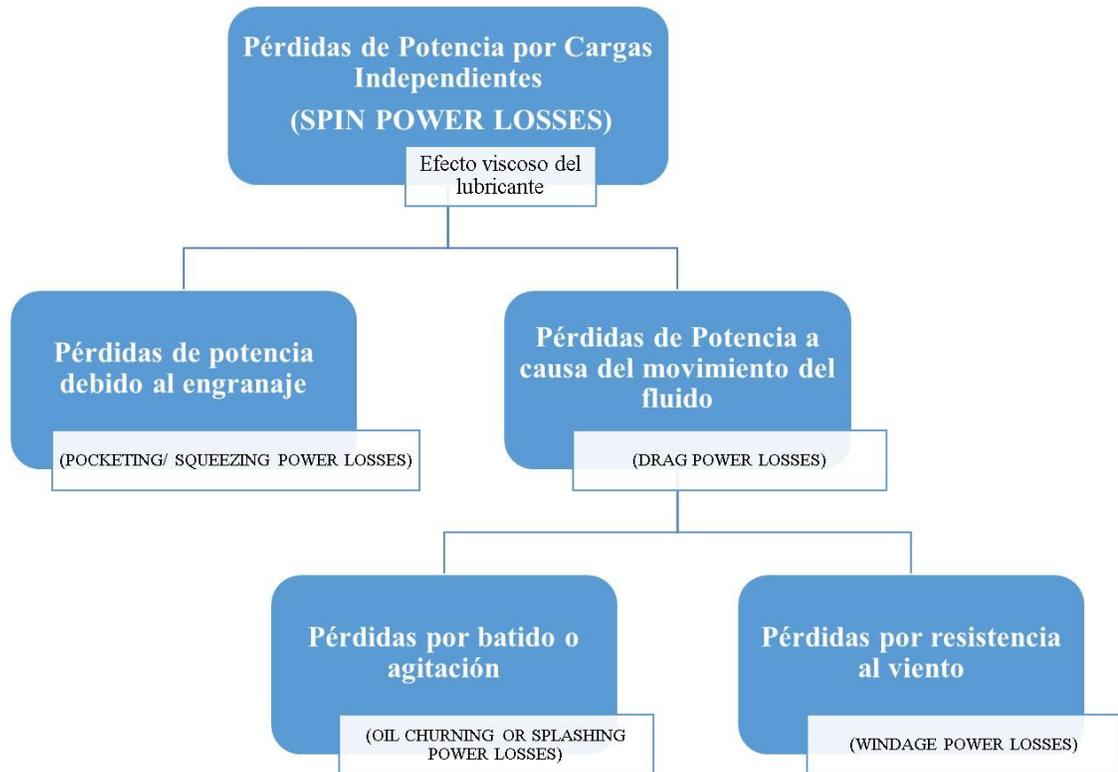


Figura 2. 26: Clasificación de los Pérdidas de potencia por cargas independiente.

Como se puede ver en el diagrama de la figura 2.26 las pérdidas de potencia por cargas independientes son pérdidas que no son directamente proporcional a la carga, pero indirectamente se ven afectadas por la variación de las propiedades del lubricante y sus efectos viscosos a causa de la temperatura inducida por la fricción, deslizamiento y rodadura de las partes mecánicas y las cuales son directamente proporcional a la carga.

#### *Pérdidas de potencia debido al engranaje*

El primer grupo de orden inferior de magnitud de las pérdidas de potencia por carga independiente son las pérdidas que ocurren en la zona de acoplamiento o zona de engranaje. Estas, son debidas a la interacción de los dientes de un engrane con los dientes de su engrane acoplado.

Además, son consideradas pérdidas de potencia por compresión-expansión, llamado en ingles *Pocketing/Squeezing Power Losses* por el hecho de que el fluido cambia de volumen en la cavidad entre los dientes durante el acoplamiento, lo que provoca una

sobrepresión que comprime y expande la mezcla aire/ lubricante (figura 2.27), debido a las propiedades viscosas del lubricante, se induce una disipación de potencia [50, 51].

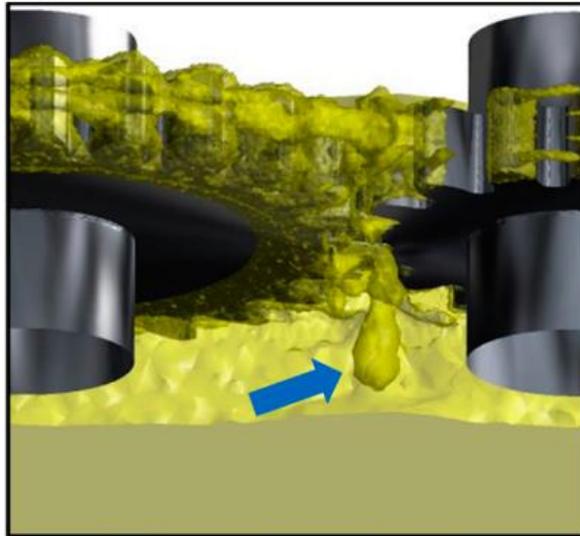


Figura 2. 27: Pérdidas debido a la zona de acoplamiento [51].

En la figura 2.28 se ilustra el fenómeno de cambio de volumen del fluido donde dicho volumen disminuye de (a) en el cual inicia el contacto a (b). en la figura 2.28-c se muestra cuando un segundo par de engranes se acopla y hasta en (d) donde crece rápidamente el volumen de la cavidad por donde pasa el fluido [49].

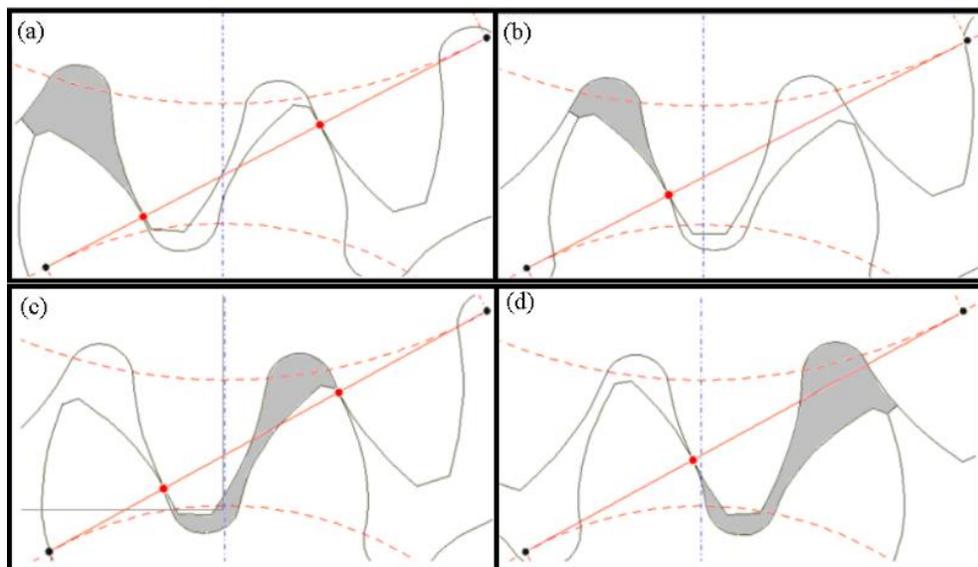


Figura 2. 28: Cambio de volumen zona de engranaje [49].

### *Pérdidas de potencia a causa del moviendo y arrastre del fluido*

Como se mencionó anteriormente en la figura 2.26 en su clasificación las pérdidas debidas al movimiento del fluido se dividen en pérdidas de potencia por agitación o batido (Churning Power Losses en inglés) y perdidas de potencia por resistencia al viento (Windage Power Losses en inglés).

Las pérdidas por agitación están relacionadas a la lubricación, significa que, durante el funcionamiento del engranaje, mediante la rotación de los engranes se desarrolla un movimiento de flujo del lubricante (un líquido como se ilustra en la figura 2.29-a), creando un momento de retraso en el engranaje. Que en el entorno multifase representaría la fase secundaria y no las perdidas encontradas debido a la fase primaria (generalmente aire).

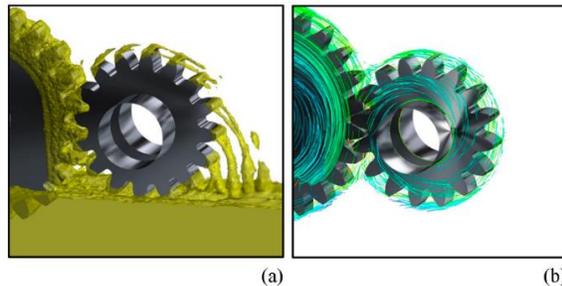


Figura 2. 29: Pérdidas por agitación (a) y Pérdidas por resistencia al viento (b) [51].

Por el contrario las pérdidas por resistencia al viento se refieren a las pérdidas asociadas con el movimiento del fluido envolvente (un gas como se ilustra en la figura 2.29-b), que en el entorno multifase representa la fase primaria (generalmente aire), y no las pérdidas encontradas debido a la fase secundaria [52].

A menudo también las pérdidas por agitación o batido del aceite también se nombran como pérdidas de potencia por salpicadura (Splashing Power Losses en inglés) conforme al hecho que la lubricación del engranaje se hace por inmersión de lubricante hasta cierto nivel y por la rotación de los engranes se ve como salpica o chapotea el lubricante dentro del recinto o carcasa de la transmisión, estas pérdidas al encontrar los engranes en un medio multifase (aire/aceite) no se pueden descuidar y son las de orden de mayor magnitud dentro de las pérdidas de potencia por cargar independiente, las cuales son parte central de este trabajo.

# CAPÍTULO III.

## DINÁMICA DE FLUIDOS

---

### 3.1. Características de los fluidos

Iniciando desde el concepto más básico se dice que cualquier sustancia en fase líquida o gaseosa se conoce como fluido, esta sustancia se puede deformar continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante sin importar que tan pequeño sea este esfuerzo o similarmente se puede decir que es una sustancia a la cual no puede soportar cualquier esfuerzo cortante cuando está en reposo.

La diferencia entre un sólido y un fluido como muchos autores lo mencionan está en la capacidad de la sustancia para oponer resistencia al esfuerzo cortante. Mientras en un sólido puede oponer resistencia a un esfuerzo cortante aplicado, siendo proporcional a la deformación. En el caso de un fluido, su esfuerzo cortante será proporcional a una razón de deformación y nunca dejará de deformarse mientras se esté aplicando de manera constante un esfuerzo cortante [13, 53, 54].

Para ilustrar mejor, se tiene el ejemplo clásico en donde se coloca una sustancia entre dos placas separadas a una distancia ( $d$ ) (figura 3.1). La placa inferior es fija y la placa superior se aplica una Fuerza ( $F$ ) causando que la placa se mueva a una velocidad uniforme ( $U$ ). Se ejercerá sobre la superficie en contacto entre la placa y la sustancia un esfuerzo cortante ( $F/A$ ), siendo ( $A$ ) el área de contacto.

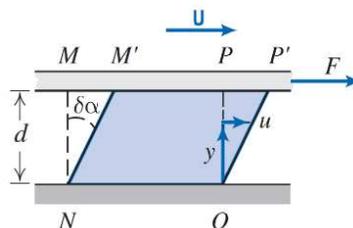


Figura 3. 1: Deformación de un fluido entre dos placas paralelas [54].

Para el caso de un fluido, experimentalmente se ha demostrado *la condición de no-deslizamiento*. Cuando un fluido en movimiento entra en contacto con un sólido este se detiene por completo en la superficie y adquiere velocidad cero con respecto a ella [55], esto significa que cada partícula de fluido fluye paralelamente a la placa (de M a M' y de P a P') variando su velocidad (u) desde cero de la placa inferior hasta la velocidad (U) de la placa superior; siendo F directamente proporcional a (A) y (U) e inversamente proporcional a la distancia (y) que hay entre la separación de las dos placas (d).

Considerando que todo esfuerzo es una fuerza aplica sobre un área determinada, se tiene que el esfuerzo cortante es:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{U}{y} = \tau = \mu \frac{U}{y} \quad (\text{Ecuación 7})$$

Donde  $\mu$  es el factor de proporcionalidad o *viscosidad del fluido* y depende de cada fluido y la razón  $\frac{U}{y}$  es la velocidad angular o *rapidez de deformación angular* del fluido, de modo que se puede escribir como  $\left(\frac{du}{dy}\right)$ , ya que expresan la razón de cambio de la velocidad con respecto a la distancia sobre la que ocurre. Teniendo de esta manera:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (\text{Ecuación 8})$$

Siendo la ecuación 8 una característica del comportamiento de la mayoría de los fluidos también conocida como la *ley de viscosidad de Newton* [53].

El fenómeno de *no-deslizamiento* es aquel donde el fluido adquiere velocidad cero sobre la superficie que entra en contacto con una placa fija, en el cual se observa la evolución del gradiente de velocidad y la formación de capas. La primera capa adherida a la superficie desacelera a la siguiente capa y así sucesivamente, debido a las fuerzas viscosas que hay entre las capas del fluido.

La velocidad inicial del fluido igual a cero o inmediatamente adherida a la superficie, va aumentando hasta la velocidad de la corriente principal o una velocidad en el infinito, esto muestra una región en donde los efectos viscosos son significativos como

los gradientes de velocidad. A esta zona de capa delgada junto a la pared se le conoce como *capa límite* [55] y se puede ver en la figura 3.2.

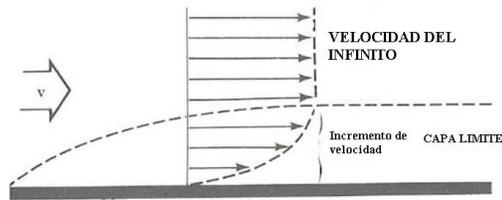


Figura 3. 2: Fenómeno de condición de No-deslizamiento y capa límite [55].

Análogo a lo que sucede en un sólido y como se ha mencionado anteriormente el esfuerzo se define como la fuerza sobre unidad de área, de manera que sobre la superficie de un fluido actúan dos componentes, una que es el esfuerzo normal y que actúa perpendicularmente al área y otra que es la componente tangencial de la fuerza que actúa sobre el área superficial y se llama esfuerzo cortante, figura 3.3.

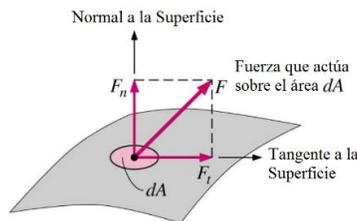


Figura 3. 3: Fuerzas que actúan en un elemento de fluido [13].

En el caso de un fluido en reposo confinado en un recipiente, por ejemplo: si se toma un elemento de volumen pequeño sobre una de las fronteras sólidas, este ejercerá un esfuerzo normal el cual se llama *Presión* y actuará uniformemente en todas las direcciones del elemento de volumen, figura 3.4.

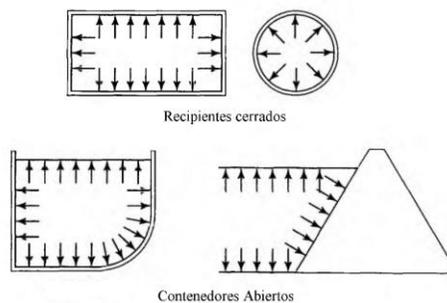


Figura 3. 4: Dirección de la presión sobre las fronteras [56].

Por otro lado, las paredes del recipiente no ejercen esfuerzos cortantes infiriendo que todo fluido en reposo se encuentra en estado cero de esfuerzos cortantes.

## 3.2. Clasificación de los flujos de fluidos

La básica y simple clasificación del fluido es la que se ha mencionado anteriormente y es por su estado de la materia: gaseoso y líquido, cuando el fluido adquiere movimiento, la naturaleza del flujo puede variar de acuerdo con el medio que se encuentre, las propiedades del fluido, la condición de flujo entre otros aspectos que se mencionara a continuación.

### 3.2.1. Flujo viscoso y flujo invíscido

Cuando se deforma un fluido a la acción de un esfuerzo cortante, este lo va haciendo a través de capas, las cuales se mueven una encima de otra desarrollando una fricción entre ellas (figura 3.5), la capa más lenta trata desacelerar a la más rápida; a esta resistencia interna del fluido o razón de deformación se cuantifica mediante la propiedad de viscosidad del fluido y es causada por la fuerza de cohesión de las moléculas en un líquido o colisiones entre las moléculas en el caso que sea un gas [13].

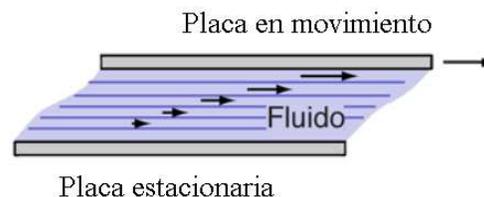


Figura 3. 5: Capas de fluido generadas por el movimiento de placa superior [57].

Considerando lo anterior puede clasificarse en términos generales ya sea como *flujo invíscido* o *flujo viscoso*. Un *flujo invíscido* es aquel en el que los efectos viscosos no influyen de manera significativa en el flujo. Aunque se sabe que todo fluido tiene viscosidad, se considera flujo invíscido en la zona de un fluido donde sus esfuerzos cortantes son despreciables comparado con las fuerzas inerciales o de presión por el contrario en un *flujo viscoso* los efectos de la viscosidad son importantes y no se pueden ignorar [58].

Un ejemplo de flujo viscoso e invíscido se muestra en la figura 3.6, la cual es una fotografía tomada para la región de flujo de una corriente de fluido sobre una placa plana donde se señalan las regiones de flujo viscoso, las cuales son próximas a la placa en ambos lados, además de las regiones de flujo invíscido las cuales se encuentra fuera de ella.

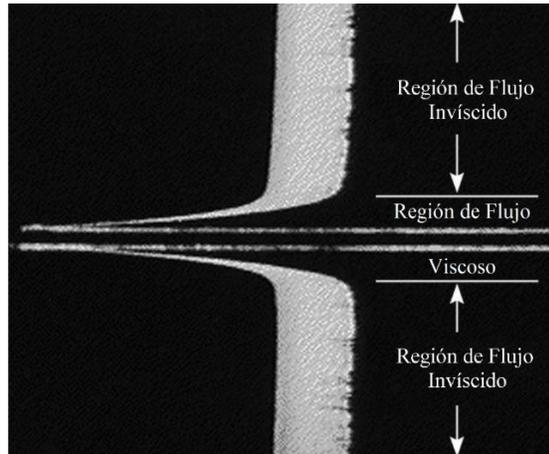


Figura 3. 6: Fotografía de una corriente de flujo sobre una placa plana [59].

### 3.2.2. Fluidos Newtonianos y No-Newtonianos

Los fluidos se clasifican en *Newtonianos* cuando tienen una relación lineal entre la magnitud del esfuerzo cortante aplicado y la rapidez de la deformación resultante ( $\mu$ ) obedeciendo a la *ley de viscosidad de Newton*. Estando la viscosidad solo en función de la condición del fluido, en particular de la temperatura y no en función la magnitud del gradiente de velocidad  $\left(\frac{du}{dy}\right)$  [56].

Caso contrario se encuentran los fluidos *No-Newtonianos* los cuales no se comportan de acuerdo a la ecuación 8. En estos, la viscosidad depende del esfuerzo cortante y la razón a la cual es aplicado, es decir depende del gradiente de velocidad como de la condición de fluido. Los fluidos No-Newtonianos a su vez se subdividen en No-dependientes del tiempo y dependientes del tiempo. En los primeros el comportamiento de la viscosidad depende solo del esfuerzo cortante a temperatura constante, mientras que los dependientes del tiempo además de depender del esfuerzo cortante aplicado, también dependen del tiempo del esfuerzo a la cual es sometido el fluido [58].

Una comparativa entre los fluidos Newtonianos y No-Newtonianos se puede ver en la figura 3.7 del esfuerzo cortante versus la razón de deformación

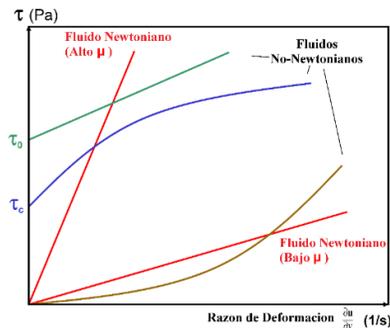


Figura 3. 7: Fluidos Newtonianos y No-Newtonianos [58].

### 3.2.3. Flujo interno y externo

De acuerdo con la configuración de flujo se pueden clasificar en *flujos externos* y *flujos internos*. Los *flujos externos* ocurren cuando un flujo desarrolla libremente sus capas límites sin restricciones impuestas por las superficies adyacentes, es decir, el flujo de un fluido no está limitado sobre la superficie y los efectos viscosos quedan limitados a la capa límite cerca de la superficie sólida mientras que el flujo alejado del objeto sólido es invíscido, como se ilustra en la figura 3.8-a.

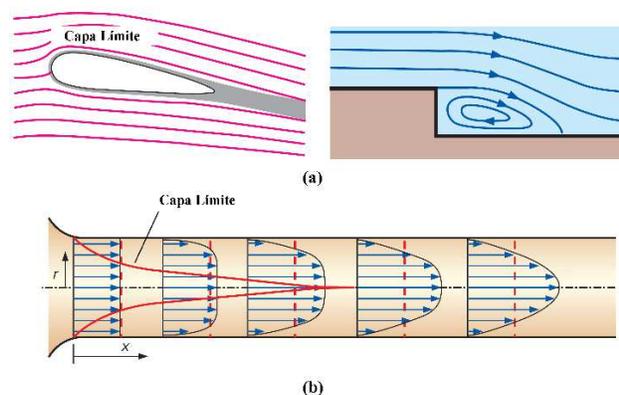


Figura 3. 8: Flujo externo (a) y Flujo interno (b) [60].

Ahora bien, un *flujo interno* es cuando se obliga a fluir en un canal confinado o si el flujo está completamente limitado por las superficies sólidas, por lo tanto, las capas límite no pueden desarrollarse sin ser finalmente restringidas, figura 3.8-b [60].

### 3.2.4. Flujo compresible e incompresible

Otra forma de clasificar los flujos es con respecto a su efecto de compresibilidad, es decir, al cambio de volumen de una sustancia cuando se sujeta a un cambio de presión. Entonces se dice que un *flujo es incompresible* si la densidad permanece constante a lo largo de todo el flujo. Por lo tanto, el volumen de cada partícula del fluido permanece inalterado sobre el curso de su movimiento o a medida que se desplaza a través del campo de flujo, que es el caso de la mayoría de los líquidos [56].

En cambio, un *flujo compresible* es aquel en el cual el volumen de una partícula dentro de fluido cambia con la posición, implicando que la densidad va a cambiar a través del campo de flujo, que es el caso de la mayoría de los gases en altas velocidades.

Se debe agregar también que los flujos compresibles son clasificados de acuerdo al número de *Mach* que se define como:

$$Ma = \frac{V}{c} = \frac{\text{Velocidad del Flujo}}{\text{Velocidad del sonido}} \quad (\text{Ecuación 9})$$

De allí se dice que para ( $Ma < 1$ ) el flujo es subsónico y su densidad es relativamente constante; para ( $Ma = 1$ ) se llama flujo sónico y el cambio de densidad es cercanamente igual al cambio de velocidad y para ( $Ma > 1$ ) la densidad cambia más rápido que la velocidad y se llama flujo supersónico. En algunos fluidos cuando el ( $Ma < 0.3$ ) este se considera como flujo incompresible ya que el cambio en su densidad es casi insignificante a la presión y gradiente de velocidad [60].

### 3.2.5. Flujo monofásico y multifásico

Con respecto a su fase, los flujos pueden ser *monofásicos* o de una sola fase la cual puede ser líquido o gas. De otro modo son *flujos multifásicos* en los cuales múltiples fases están presentes en el campo de flujo como se puede observar en la figura 3.9, por ejemplo: líquido-gas, líquido-sólido, gas-sólido [61].

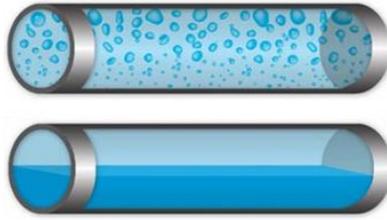


Figura 3. 9: Régimen de multifase (gas-líquido) en una tubería [62].

### 3.2.6. Flujo laminar y turbulento

Los fluidos de acuerdo con su patrón de flujo pueden ser *flujo laminar* el cual las partículas de un fluido se mueven en trayectorias paralelas y ordenadas a través de suaves capas o laminas. En cambio, cuando las partículas de un fluido a través de su trayectoria se mueven de forma desordenada y aleatoriamente en todas las dimensiones a velocidades fluctuantes se llaman *flujo turbulento*. Cuando el proceso en el cual un flujo se convierte de laminar a turbulento es conocido como *flujo transitorio* [63].

Un número adimensional encontrado como parámetro para identificar la transición de flujo laminar a turbulento es el *Número de Reynolds* el cual dependerá de la geometría, la rugosidad de la superficie, la velocidad de flujo, la temperatura de la superficie y el tipo de fluido entre otros aspectos y se define como [60]:

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (\text{Ecuación 10})$$

Donde:

$V$ : es la velocidad promedio del flujo (m/s)

$\rho$ : Densidad del fluido (kg/m<sup>3</sup>)

$\mu$  : Viscosidad de fluido (kg/m\*s)

$L$ : Longitud Característica de la geometría (m)

En la figura 3.10 se puede observar el típico ejemplo de los diferentes regímenes de flujo, al iniciar un fluido con velocidad constante y chocar sobre una superficie plana, hace que al comienzo de la longitud característica de la superficie se desarrolle una capa

límite laminar y a medida que se aleja pase por una zona de transición y termine en una capa límite turbulenta.

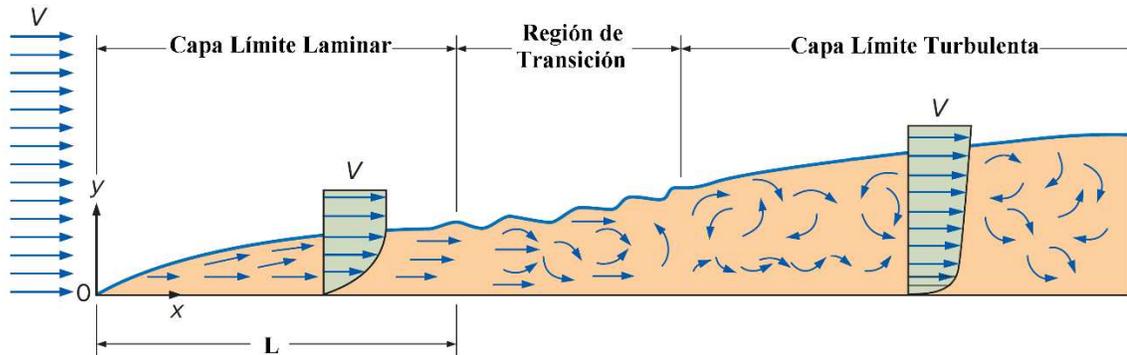


Figura 3. 10: Régimen de flujo para una placa plana [60].

### 3.2.7. Flujo natural y forzado

Con respecto a cómo se inicia el movimiento de un fluido se puede clasificar como un *flujo natural* o un *flujo forzado*. Se considera flujo natural a cualquier movimiento del fluido debido a medios naturales, por ejemplo, las corrientes marinas en el mar, el flujo del viento, el efecto de flotación donde el fluido caliente sube y el flujo frío baja. Por otro lado, en el flujo forzado el fluido se obliga a fluir sobre una superficie o en un tubo por medio de medios externos, como una bomba o un ventilador [13].

### 3.2.8. Flujo estacionario y no-estacionario

Los flujos también se pueden clasificar con respecto al comportamiento en el tiempo, ya que, dentro de las propiedades de un fluido como la velocidad, la presión entre otras. Estas pueden estar en función del tiempo además de ser función del espacio o posición.

Los *flujos estacionarios* implican que no hay cambio en un punto del flujo con el tiempo, es decir sus propiedades en un punto en el flujo no dependen del tiempo y se mantienen estas propiedades constantes con respecto al tiempo. Lo opuesto a esto es un *flujo no-estacionario* el cual es el tipo de flujo en que las propiedades como velocidad, presión, densidad, etc., en algún punto del campo de flujo dependen del tiempo [64].

### 3.3. Leyes de conservación del movimiento de fluidos

El principio de conservación establece que ciertas propiedades físicas (es decir, cantidades medibles) no cambian en el transcurso del tiempo dentro de un sistema físico aislado, es decir que el sistema no interactúa con su entorno de alguna manera. A estas cantidades medibles se dice que están conservadas, estas posteriormente se derivan en las leyes de conservación consideradas como los principios fundamentales de la mecánica de fluidos. Ejemplos de conservación de cantidades son la masa, momento y energía [57] es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales se verán posteriormente.

#### 3.3.1. Marcos de referencia Lagrangiano vs Euleriano

Las leyes de conservación que involucran el flujo de fluidos, la descripción, su movimiento y propiedades asociadas, pueden ser formuladas matemáticamente siguiendo un marco de referencia Lagrangiano (volumen de material) o un marco de referencia Euleriano (volumen de control).

En el enfoque Lagrangiano el campo de flujo está dividido por un gran número de partículas de fluido de tamaño finito. Cada partícula de fluido, el cual tiene masa, momento, energía interna, entre otras propiedades, estas se siguen y monitorean a medida que se mueve a través del espacio y el tiempo.

Cada partícula se rastrea utilizando un campo de vector de posición el cual es independiente del tiempo  $r_A$ , generalmente seleccionado desde el centro de masa de la partícula en algún tiempo inicial  $t_0$ . El flujo se describe mediante una función  $r(r_A, t)$ .

Una línea de trayectoria que describe la partícula hasta un tiempo posterior  $r_A(t + \delta t)$ , (figura 3.11) es el resultado de la colección de posiciones de la partícula ocupada en diferentes momentos [65].

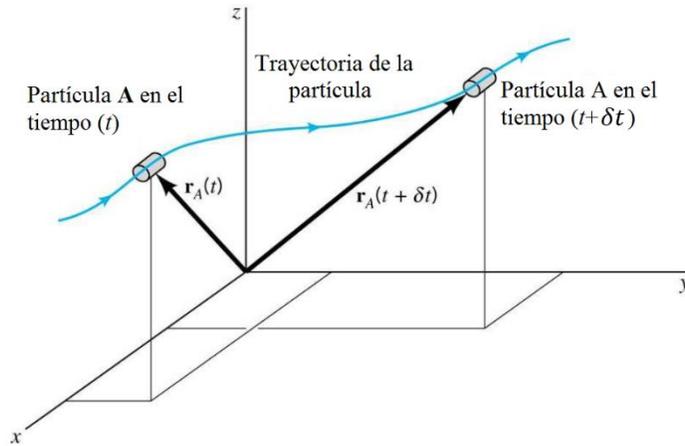


Figura 3. 11: Trayectoria de una partícula de fluido, enfoque Lagrangiano [66].

Mientras que, el marco de referencia Euleriano (figura 3.12) se enfoca en como las propiedades del flujo cambian en un elemento de fluido que está fijo en el espacio y en el tiempo, en lugar de seguir el flujo de partículas individuales.

La descripción del flujo de fluidos se define en un volumen finito o volumen de control, el cual, el fluido fluye a través de ella y es determinado por el análisis del comportamiento de las funciones.

En este marco no es necesario seguir el rastro de la posición y la velocidad de una masa fija de partículas de fluido, en cambio se definen variables de campo, en funciones de espacio y el tiempo [66, 67]. En la figura 3.12 se puede observar que para la descripción Euleriana se puede saber el campo de velocidad  $\vec{V}$  en cualquier lugar y cualquier instante.

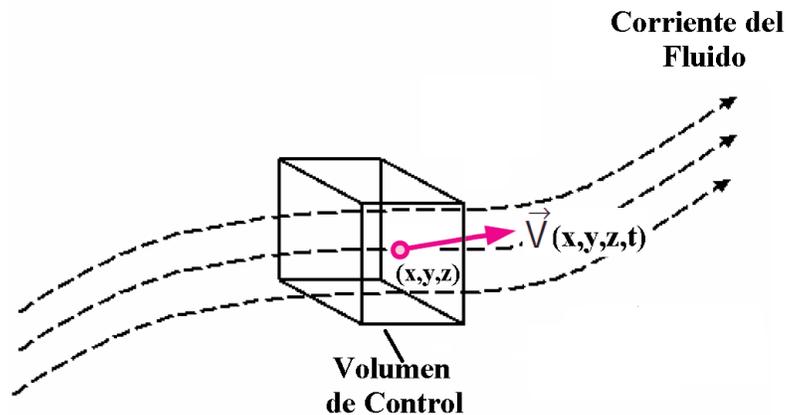


Figura 3. 12: Volumen de control de un fluido, enfoque Euleriano [67].

### 3.3.2. Modelos de flujo

A continuación, se describe cuatro modelos de flujo en los cuales se basa los dos marcos de referencia anteriormente descritos y ayudan a visualizar el movimiento de un fluido como medio continuo e identificar sus variables de conservación principales (masa, momento y energía).

Considerando el campo de flujo general que se ilustra en la figura 3.13 a través de líneas de trayectoria, en un primer caso se puede describir un volumen de control ( $V$ ), limitado a través de una superficie de control ( $S$ ) el cual está cerrado en todo el volumen de modo que este volumen de control finito se encuentra fijo en el espacio y el fluido moviéndose a través de él, como se muestra en la figura 3.13-a. En un segundo caso este volumen de control finito se mueve con el fluido de manera que las mismas partículas de fluido están siempre en el mismo volumen de control, figura 3.13-b.

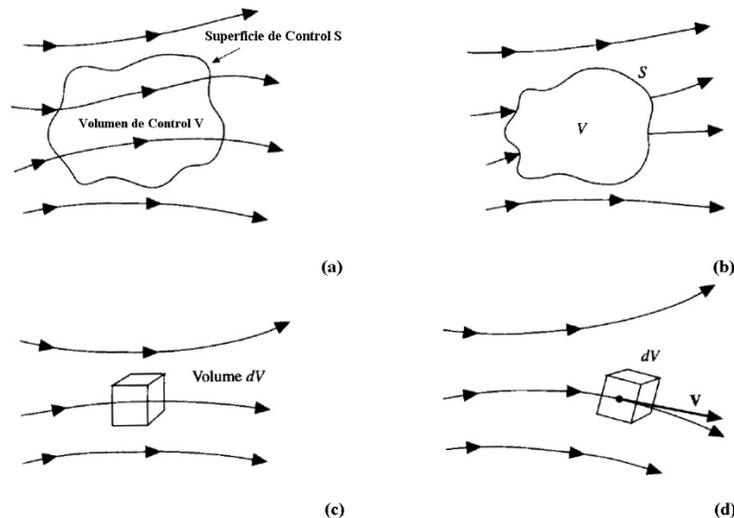


Figura 3. 13: Volumen de control finito a) y b); Elemento infinitesimal c) y d) [68].

De esta manera para ambos casos en lugar de mirar todo el campo de flujo a la vez, solo se contempla el fluido que está en la región de volumen finito. De aquí las ecuaciones que se obtienen por aplicar por principios físicos fundamentales (masa, momento y energía) en el volumen de control finito son en forma *integral*. Estas formas integrales de las ecuaciones gobernantes (se describirán posteriormente en este capítulo) pueden ser descritas también de manera de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, se puede considerar el enfoque en el cual se toma un elemento de fluido infinitesimal dentro del flujo con un diferencial de volumen ( $dV$ ). El elemento pequeño de fluido puede ser fijo en el espacio en el cual el fluido se mueva a través de este (figura 3.13-c) o por el contrario este elemento de fluido infinitesimal se mueva a lo largo de una trayectoria con velocidad ( $V$ ) igual a la velocidad del flujo local en cada punto como se observa en la figura 3.13-d [68].

### 3.3.3. La derivada sustancial (cambio de una variable por el movimiento)

Antes de explicar y derivar las ecuaciones gobernantes de la dinámica de fluidos se debe entender y establecer una notación que se ilustra a través de la figura 3.14 en donde se tiene un elemento de fluido infinitesimal que se mueve a lo largo de una trayectoria con velocidad local  $V_1$  de un punto 1 a velocidad local  $V_2$  cuando la misma partícula llega al punto 2.

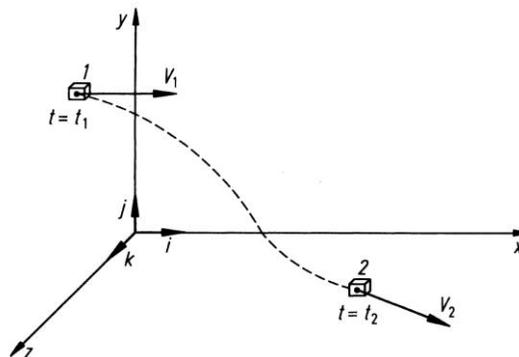


Figura 3. 14: Elemento de fluido que se mueve en una línea de corriente [69].

El cambio con el tiempo de una variable de campo en un flujo se puede expresar en forma Lagrangiana y Euleriana. La representación de la razón de cambio respecto al tiempo de una propiedad del fluido (velocidad, temperatura, densidad, etc.), que sigue una partícula de fluido a medida que se desplaza por el campo de flujo (campo de velocidad) y que es el enfoque Lagrangiano se llama *derivada material, total o sustancial* y se denota como  $\frac{D}{Dt}$ .

Ahora bien, considerando una variable de campo cualquiera  $\phi$ , en una especificación Euleriana tiene la forma  $\phi = \phi(x, y, z, t)$ . Siguiendo una partícula, el

cambio de  $\phi$  en un tiempo  $t_1$  a  $t_2$  ( $\delta t$ ) es  $\frac{D\phi}{Dt}$ . En este tiempo  $\delta t$  la partícula se ha movido una distancia  $\delta x, \delta y, \delta z$  en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente. Desde el punto de vista Euleriano, la razón de cambio con respecto al tiempo de una posición fija en el espacio se denomina derivada Euleriana o derivada local y se denota  $\frac{\partial\phi}{\partial t}$

La derivada sustancial de una variable se puede derivar a través de la aplicación de la regla de la cadena para explicar los cambios inducidos por todas las variables independientes a lo largo del camino y está dada como [69]:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{Razón de cambio local}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla\phi}_{\text{Razón de cambio Convectivo}} \quad \text{(Ecuación 11)}$$

Recordando:

$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$  ; Vector de velocidad, cada componente depende de  $(x, y, z, t)$

$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$  ; El cual es el operador Nabla

En resumen, la *derivada sustancial o total* (ecuación 11) físicamente representa la razón de cambio con respecto al tiempo al seguir el movimiento de un elemento de fluido y está compuesta por dos componentes principales:

*Derivada local*: representa la razón de cambio con respecto al tiempo en un punto fijo en el campo de flujo.

*Derivada convectiva*: representa la razón de cambio con respecto al tiempo debido al movimiento del elemento del fluido de una locación a otra en el campo de flujo, donde las propiedades del flujo son espacialmente diferentes [65].

Para observar más, específicamente el significado de la derivada sustancial, se tiene un campo vectorial de temperatura de un fluido donde su derivada total es:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T \quad (\text{Ecuación 12})$$

De nuevo, la ecuación 12 de la derivada sustancial  $\frac{DT}{Dt}$  declara físicamente que la temperatura del elemento del fluido está cambiando a medida que el elemento pasa por un punto en el flujo porque en ese punto la temperatura del campo de flujo en sí misma puede fluctuar con el tiempo (la *derivada local*  $\frac{\partial T}{\partial t}$ ) y porque el elemento del fluido simplemente está en camino a otro punto en el campo de flujo donde la temperatura es diferente (la *derivada convectiva*  $(\vec{V} \cdot \nabla)T$ ) [69].

### 3.3.4. Divergencia de la velocidad

Otro concepto importante que se debe entender antes para poder derivar las ecuaciones gobernantes de la dinámica de fluidos es el significado físico de la divergencia de la velocidad  $(\nabla \cdot \vec{V})$ .

Para ilustrarlo hay que considerar el diagrama esquemático de la figura 3.15-a, un volumen de control finito que se mueve con el fluido y el cual se indica con sus líneas de trayectoria.

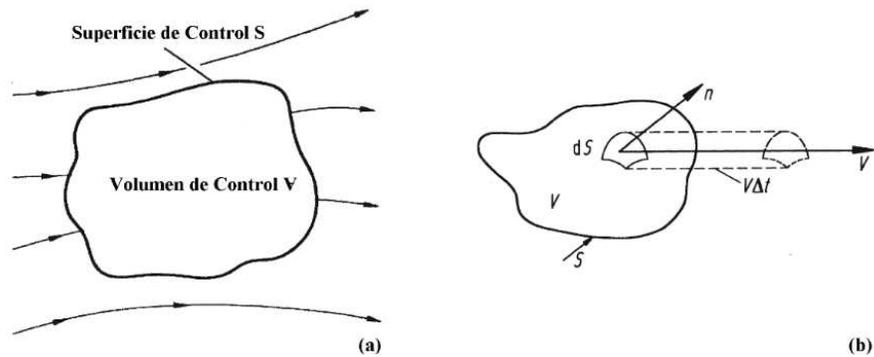


Figura 3. 15: Volumen de Control finito (a); Elemento infinitesimal (b) [69].

Este volumen de control tiene la misma cantidad de partículas que se mueven con el fluido por lo cual tiene una masa fija y es invariante en el tiempo, sin embargo, su volumen de control  $\forall$  y superficie de centro  $S$  están cambiando con el tiempo a medida que se mueve en diferentes regiones del flujo por ende se encontrarán diferentes valores de densidad  $\rho$  en el campo del fluido. El cambio de volumen de control ( $\Delta\forall$ ) se puede representar como esta en la figura 3.15-b tomando un elemento infinitesimal de la superficie  $dS$  que se mueve a una velocidad local  $\vec{V}$ , el cambio del volumen de control debido al incremento o decremento de  $dS$  en un tiempo  $\Delta t$  es igual al volumen a lo largo de un cilindro con área de base  $dS$  y altura  $(\vec{V}\Delta t) \cdot \vec{n}$ , donde  $\vec{n}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie  $dS$  por lo cual se tiene la siguiente ecuación [68, 69]:

$$\Delta\forall = [(\vec{V}\Delta t) \cdot \vec{n}] dS = (\vec{V}\Delta t) \cdot \vec{d}S \quad (\text{Ecuación 13})$$

Ahora el cambio de volumen total seria la sumatoria de la doble integral de superficie y si se quiere hacer la razón de cambio del volumen de control con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{D\forall}{Dt} = \frac{1}{\Delta t} \iint (\vec{V} \cdot \Delta t) \cdot \vec{d}S = \iint (\vec{V} \cdot \vec{d}S) \quad (\text{Ecuación 14})$$

Que aplicando el teorema de la divergencia y otros arreglos matemáticos se tiene:

$$\frac{D\forall}{Dt} = \iint (\vec{V} \cdot \vec{d}S) = \iiint (\nabla \cdot \vec{V}) d\forall \quad (\text{Ecuación 15})$$

Puede ser rescrita como para un elemento infinitesimal de volumen  $\delta\forall$  como:

$$\frac{D(\delta\forall)}{Dt} = (\nabla \cdot \vec{V}) \delta\forall \quad (\text{Ecuación 16})$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left( \frac{1}{\delta\forall} \right) \frac{D(\delta\forall)}{Dt} \quad (\text{Ecuación 17})$$

Finalmente la ecuación 17 es la divergencia de la velocidad y físicamente significa la razón de cambio con respecto al tiempo del cambio de volumen de un elemento de fluido que se mueve por unidad de volumen [68, 69].

### 3.3.5. Ecuaciones gobernantes de la dinámica de fluidos

Las ecuaciones gobernantes de la dinámica de fluidos representan matemáticamente los principios fundamentales que son [70]:

- Conservación de la masa, no puede ser creada ni destruida. De este principio resulta la *Ecuación de continuidad*
- La razón de cambio del momento es igual a la suma de fuerzas en una partícula de fluido y toma lugar en la dirección de la fuerza neta (segunda ley de Newton) y de este principio se deriva la *Ecuación de momento*.
- La razón de cambio de la energía es igual a la suma de la razón de calor adicionado y razón de trabajo hecho en una partícula de fluido (primera ley de la termodinámica) y este principio está dado por la *Ecuación de energía*

#### *Ecuación de continuidad*

Con respecto a un volumen fijo de control el cual es atravesado por el flujo (marco de referencia Euleriano), el principio de conservación de masa o balance de masa establece lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de flujo de} \\ \text{masa de salida} \\ \text{del volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de flujo de} \\ \text{masa de entrada} \\ \text{en el volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de acumulación} \\ \text{de masa} \\ \text{dentro del volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right\} = 0$$

$$\dot{m}_{\text{salida}} - \dot{m}_{\text{entrada}} + \frac{dm}{dt} = 0 \quad (\text{Ecuación 18})$$

A partir de este balance de masa se puede encontrar la ecuación de continuidad de diferentes formas como sigue a continuación [68]:

Forma Euleriana con volumen de control finito fijo en el espacio el cual el flujo atraviesa

$$\iint \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = 0 \quad (\text{Ecuación 19})$$

Forma Euleriana con elemento infinitesimal fijo en el espacio donde el fluido se mueve atravesándolo

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{Ecuación 20})$$

Forma Lagrangiana en la cual el volumen de control finito se mueve con el fluido, tal que las mismas partículas de fluido siempre están en el volumen de control.

$$\frac{D}{Dt} \iiint \rho dV = 0 \quad (\text{Ecuación 21})$$

Forma Lagrangiana donde un elemento infinitesimal se mueve a lo largo de las líneas de trayectoria con velocidad  $V$  igual a la velocidad de flujo local de cada punto.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{Ecuación 22})$$

#### *Ecuación de Momento o Cantidad de movimiento*

Se puede comenzar la derivación de la ecuación de momento o cantidad de movimiento recordando la forma particular de la segunda ley de Newton que establece que la variación de momento lineal es causada por la fuerza neta que actúa sobre un elemento de masa.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{Ecuación 23})$$

De acuerdo al principio de la segunda ley de Newton se puede establecer lo siguiente [71]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerza neta que} \\ \text{actúa sobre un} \\ \text{volumen de control} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de flujo neto} \\ \text{de momentos a través} \\ \text{del volumen de control} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de acumulación} \\ \text{de momento dentro del} \\ \text{volumen de control} \end{array} \right\} = 0$$

Dentro de la fuerza neta que actúa ya sea en un volumen de control finito o un elemento de fluido, se puede clasificar como sigue en la figura 3.16.

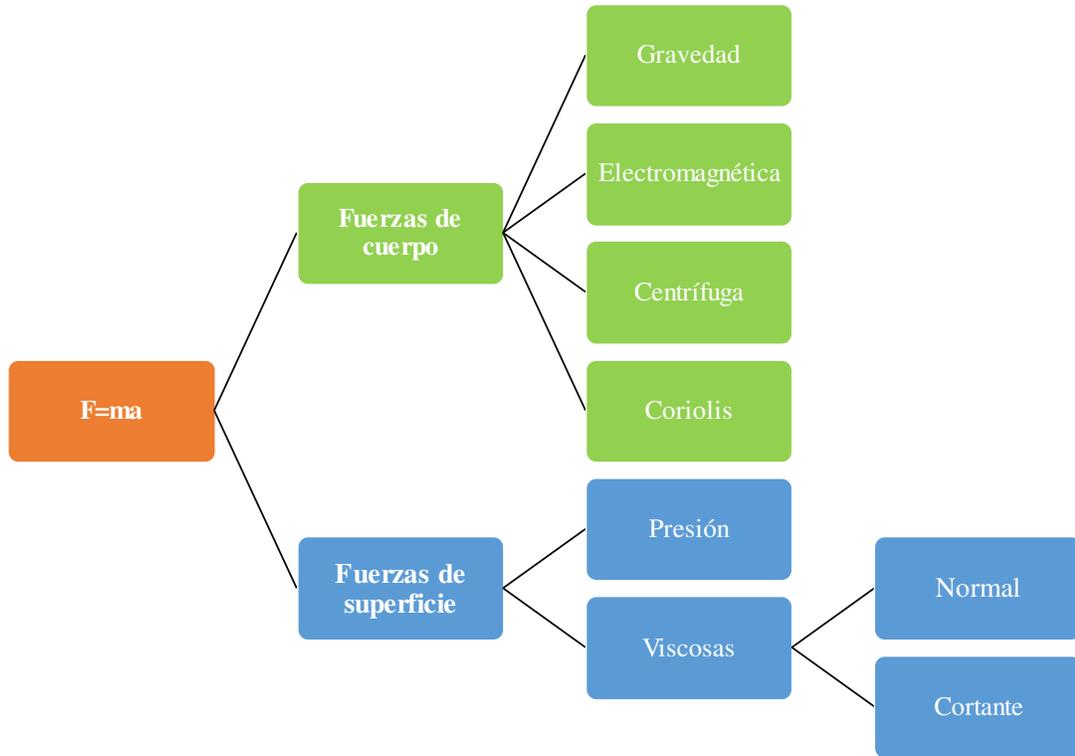


Figura 3. 16: Diagrama de las formas de fuerzas, segunda ley de Newton [70].

Por cual se tendría que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerza neta que} \\ \text{actúa sobre un} \\ \text{volumen de control} \end{array} \right\} = \{ \text{Fuerzas de Cuerpo} \} + \{ \text{Fuerzas de Superficie} \}$$

*Fuerzas de cuerpo:* Actúa directamente sobre la masa volumétrica del elemento de fluido y se pueden denotar como un vector por unidad de masa  $\vec{S}_m$  por el cual las fuerzas de cuerpo totales serian:

$$S_m = \iiint \rho \vec{S}_m dV \quad (\text{Ecuación 24})$$

*Fuerzas de superficie:* Actúa directamente sobre la superficie de un elemento de fluido y esta expresado matemáticamente como:

$$F_s = \iint (\sigma_{ij} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{Ecuación 25})$$

$\sigma_{ij}$  : Este término es el *tensor de esfuerzo* (fuerzas superficiales /área) por los efectos viscosos de esfuerzos normal y cortantes el cual resulta del análisis de un elemento infinitesimal de fluido que se mueve y se puede observar en la figura 3.17.

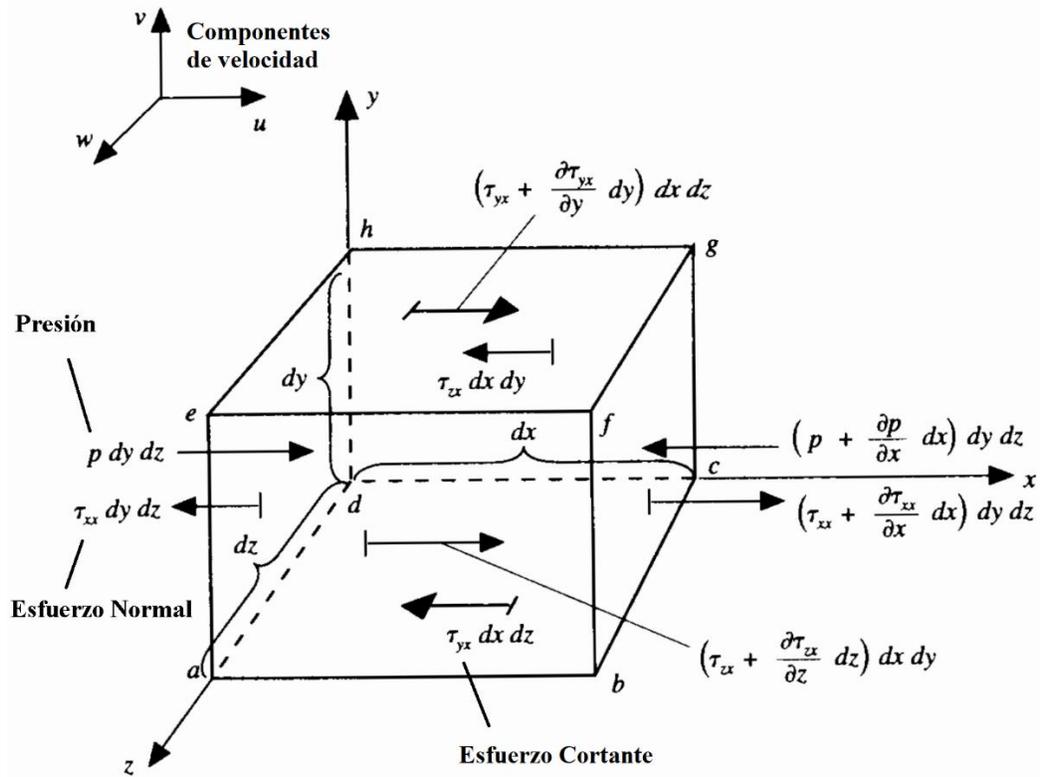


Figura 3. 17: Elemento infinitesimal de un fluido que se mueve con el flujo [68].

Se puede observar en la figura 3.17 que las fuerzas en la dirección x afectan a un elemento pequeño de fluido que se mueve con la trayectoria, en él se ven todas las fuerzas superficiales que intervienen, como los esfuerzos cortantes ( $\tau_{ij}$ ) que se relacionan con la razón de cambio de la deformación por cortante con respecto al tiempo; los esfuerzos normales ( $\tau_{ii}$ ) que son la razón de cambio del volumen del elemento de fluido con respecto al tiempo y las fuerzas de presión ( $P$ ) que actúan hacia el fluido [68].

En resumen, el tensor de esfuerzos que representa las fuerzas superficiales en todas las direcciones es como se indica en la ecuación 26.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -P + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -P + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -P + \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 26})$$

Por otro lado, recordando que el *Momento lineal o Cantidad de movimiento* se define como el producto de la masa por la velocidad en un instante dado ( $m * \vec{V}$ ). Se presenta las diferentes formas de la ecuación de momento [69].

Forma Euleriana con volumen de control finito fijo

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint (\rho \vec{V}) dV + \iint \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iint (\sigma_{ij} \cdot \vec{n}) dS + \iiint \rho \vec{S}_m dV \quad (\text{Ecuación 27})$$

Forma Euleriana con elemento infinitesimal fijo

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho S_m \quad (\text{Ecuación 28})$$

Forma Lagrangiana con un elemento infinitesimal moviéndose lo largo de las líneas de trayectoria.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho S_m \quad (\text{Ecuación 29})$$

A partir de la ecuación 28 (enfoque Lagrangiano) y Ecuación 29 (enfoque Euleriano) de la ecuación de momento se puede reescribir y descomponer en sus términos de dirección x, y, z en caso de la ecuación 29 de la forma Lagrangiana de un elemento de fluido que se mueve en el flujo se tiene:

Momento en x

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho S_{mx} \quad (\text{Ecuación 30})$$

Momento en y

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho S_{my} \quad (\text{Ecuación 31})$$

Momento en z

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho S_{mz} \quad (\text{Ecuación 32})$$

### *Ecuación de energía*

Como se mencionó anteriormente el principio de conservación de la energía dice que ‘la energía no se crea ni se destruye solo se transforma’ y de igual manera dicho en la primera ley de la termodinámica lo cual da paso con un elemento de fluido que se mueve con el flujo, se puede escribir el siguiente estamento [69]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de cambio} \\ \text{de la enegia dentro} \\ \text{del elemento de fluido} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de flujo de} \\ \text{calor neto hacia} \\ \text{el elemento de fluido} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de trabajo hecho} \\ \text{en el elemento de fluido} \\ \text{debido a las fuerzas de} \\ \text{cuerpo y superficiales} \end{array} \right\}$$

En donde sin entrar en detalle las diferentes formas de las ecuaciones son:

Forma Euleriana con volumen de control finito fijo (ecuación 33).

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint e \rho dV + \frac{\delta W_\mu}{dt} \quad (\text{Ecuación 33})$$

Forma Euleriana con elemento infinitesimal fijo (ecuación 34).

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot (E_t \vec{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho (\vec{S}_m \cdot \vec{V}) + \nabla \cdot (\sigma_{ij} \cdot \vec{V}) \quad (\text{Ecuación 34})$$

Forma Lagrangiana con un elemento infinitesimal moviéndose lo largo de las líneas de trayectoria [69].

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \dot{q} + \nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (\sigma_{ij} \cdot \vec{V}) + \rho (\vec{S}_m \cdot \vec{V}) \quad (\text{Ecuación 35})$$

Donde:

$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt}$ : razón de flujo de calor con respecto al tiempo

$\dot{W}_s = \frac{\delta W_s}{dt}$ : es trabajo realizado por las fuerzas de presión

$\dot{W}_\mu = \frac{\delta W_\mu}{dt}$ ; es el trabajo realizado por las componentes normal y cortante de las fuerzas viscosas sobre la superficie de control

$E_t = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right)$ : Energía total por unidad de masa compuesto por energía interna

( $e$ ) y energía cinética  $\left( \frac{v^2}{2} \right)$

$\vec{q}$ : vector de flujo de calor

$\dot{q}$ : La razón de calor adicionado por unidad de masa.

$-\nabla \cdot \vec{q}$ : razón de calor agregado al elemento de fluido

$\vec{S}_m$ : Fuerzas de cuerpo actuando en el elemento de fluido

### 3.3.6. Momento angular o momento de la cantidad de movimiento

Como se vio anteriormente a partir de la segunda ley de Newton se puede expresar la razón de cambio del momento lineal de los fluidos y las fuerzas que lo influyen.

En muchos problemas como es el caso de este trabajo, se analiza la rotación de un fluido por la acción del movimiento de los engranes en un diferencial mecánico, por definición, se genera un momento con respecto a un eje de la cantidad de movimiento o momento lineal del flujo del fluido, así como los efectos de rotación causados por ello. Este análisis y definición se expresa mediante la ecuación del momento angular o momento de la cantidad de movimiento [13, 72].

La primera definición a considerar es el momento de una fuerza con respecto a un punto se define como el producto vectorial de la fuerza por el vector posición como se describe en la siguiente ecuación:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{Ecuación 36})$$

Y recordando que la cantidad de movimiento es  $m * \vec{V}$  y sustituyendo al vector  $\vec{F}$  se tiene:

$$\vec{H} = \vec{r} \times m * \vec{V} \quad (\text{Ecuación 37})$$

Siendo la ecuación 37 el momento de la cantidad de movimiento de un instante con respecto a un punto de rotación.

De allí también se puede definir que la sumatoria de los momentos de fuerzas aplicados o momentos netos aplicados en un volumen de control de un fluido será igual a la razón de cambio del momento angular con respecto al tiempo como sigue [13].

$$\sum \vec{M} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (\text{Ecuación 38})$$

De manera general se puede interpretar el siguiente enunciado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de los momentos} \\ \text{externos que actúan} \\ \text{sobre el volumen de} \\ \text{control} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de cambio del} \\ \text{momento angular del} \\ \text{contenido del volumen} \\ \text{de control con respecto} \\ \text{al tiempo} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo del momento} \\ \text{angular hacia fuera} \\ \text{de la superficie de} \\ \text{control por el} \\ \text{flujo de masa} \end{array} \right\}$$

Expandiendo la ecuación 38 y de acuerdo con el enunciado anterior se tiene dentro de un volumen de control fijo:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt} \iiint (\vec{r} \times \vec{V}) \rho dV + \iint \rho (\vec{r} \times \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{Ecuación 39})$$

De la ecuación 39 se puede ver que la sumatoria de momentos de fuerzas que actúan sobre un volumen de control, son las fuerzas superficiales y las fuerzas de los cuerpos que actúan sobre toda la superficie y el cuerpo de este.

El momento neto de torsión son todos los momentos de estas fuerzas aplicados sobre la superficie de control, incluyendo de los momentos de torsión aplicados sobre el volumen de control.

### 3.3.7. Ecuaciones de Navier-Stokes

Se concluye este capítulo resumiendo la ecuación de cantidad de movimiento ya sea en su forma Euleriana (ecuación 28) o su forma Lagrangiana (ecuación 29).

Estas ecuaciones no se pueden desarrollar por sí misma, aún combinándola con la ecuación de continuidad (ecuación 20). Dando la necesidad de expresar el tensor de esfuerzos ( $\sigma_{ij}$ ) de la ecuación 26 en términos de incógnitas primarias, es decir densidad, presión y velocidad, por consiguiente se tiene que el tensor de esfuerzos en términos de su matriz de presión y de su tensor viscoso como sigue:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 40})$$

De aquí el tensor viscoso se puede escribir para *un fluido Newtoniano incompresible* con propiedades constantes como [13]:

$$\tau_{xx} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{Ecuación 41})$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es el *tensor de la razón de deformación* ya resumiendo el tensor de esfuerzos quedaría e introduciéndolo en la ecuación 40 se tiene:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 42})$$

De la ecuación 42, la componente diagonal del tensor se define como la razón de deformación lineal por esfuerzo normal y las demás componentes de la matriz como la razón de deformación por cortante.

De aquí se introduce el tensor de esfuerzos en componentes de tensor de deformación para las ecuaciones 30, 31 y 32 de la cantidad de movimiento en cada uno de sus componentes x, y, z y reagrupando matemáticamente como:

Cantidad de movimiento en x

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho S_{mx} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (\text{Ecuación 43})$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho S_{mx} + \mu \nabla^2 u \quad (\text{Ecuación 44})$$

Cantidad de movimiento en y

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho S_{my} + \mu \nabla^2 v \quad (\text{Ecuación 45})$$

Cantidad de movimiento en Z

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho S_{mz} + \mu \nabla^2 w \quad (\text{Ecuación 46})$$

Donde el término  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$  de la ecuación 43 se hace cero debido a que se está considerando un fluido incompresible y con densidad invariante con el tiempo.

De igual manera en su forma Euleriana, la ecuación de continuidad (ecuación 20), donde el término de la densidad dependiente del tiempo, se hace cero, quedando la ecuación como:

$$\rho(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{Ecuación 47})$$

Las ecuaciones 44, 45 y 46 se pueden escribir en una sola ecuación general como:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho S_m + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{Ecuación 48})$$

Finalmente para un fluido incompresible, Newtoniano y de viscosidad constante, la ecuación de continuidad (ecuación 47) junto con la ecuación 48 se conoce como la *Ecuación de Navier-Stokes* y donde la forma de cada componente en el espacio están dadas por las ecuaciones 44 , 45 y 46 [13, 70].

# CAPÍTULO IV.

## ANÁLISIS NUMÉRICO COMPUTACIONAL

---

### 4.1. Introducción a la dinámica de fluidos computacional

Como se vio en el capítulo anterior la ecuación de Navier-Stokes o ecuaciones (expresadas por componentes) junto con las ecuaciones de continuidad y energía son la base de la dinámica de fluidos y describen el fundamento teórico de los modelos numéricos que se utilizan en esta tesis.

Una dificultad grande con la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes es la capacidad de encontrar una solución analítica a las ecuaciones. Aparte de algunos casos donde se toman consideraciones y suposiciones para simplificar el cálculo, generalmente no es posible encontrar una solución analítica global a las ecuaciones de Navier-Stokes en una configuración determinada. Por lo tanto, es necesario resolver las ecuaciones numéricamente en puntos específicos dentro del flujo y utilizar un método de discretización que se aproxime a las ecuaciones diferenciales mediante un sistema de ecuaciones algebraicas. Esta solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes se conoce como dinámica de fluidos computacional, las cuales fueron desarrollados a través del programa de computo Ansys-Fluent y aplica aproximaciones a pequeños dominios en el espacio y tiempo por lo que la solución numérica proporciona resultados en ubicaciones discretas en el espacio y tiempo [52, 71].

Para este capítulo se expondrá el fundamento teórico de la discretización de las ecuaciones gobernantes, los diferentes enfoques de discretización que existen, pasando por el método de dominio de malla, y explicando los diferentes métodos que hay dentro del programa de cómputo. De esta manera se pueda estudiar la naturaleza del fenómeno

de simulación que se desarrollara en el campo de flujos multifase y modelos de turbulencia.

El capítulo se finalizará con la explicación de los tipos de solucionadores que tiene el programa de cómputo para solucionar las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad.

## 4.2. Conservación de cantidades escalares

Antes de empezar a hablar de los métodos de discretización de las ecuaciones gobernantes, se resalta que la forma integral de las ecuaciones descritas en el capítulo anterior, incluyendo la ecuación de Navier-Stokes, se pueden desarrollar en una ecuación de manera conservativa de cantidades escalares ( $\phi$ ) como sigue:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{V}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (\text{Ecuación 49})$$

Lo que significa que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de} \\ \text{incremento de} \\ \phi \text{ del elemento} \\ \text{de fluido} \\ \text{(Transitorio)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa neta de} \\ \text{flujo de } \phi \text{ fuera} \\ \text{del elemento} \\ \text{de fluido} \\ \text{(Convectivo)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de} \\ \text{incremento de} \\ \phi \text{ debido a la} \\ \text{difusion} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de} \\ \text{incremento de} \\ \phi \text{ debido a} \\ \text{fuentes} \\ \text{(Generacion)} \end{array} \right\}$$

De forma integral se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho\phi dV + \iiint \nabla \cdot (\rho\phi\vec{V}) dV = \iiint \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) dV + \iiint S_\phi dV \quad (\text{Ecuación 50})$$

Esta ecuación se denomina *la ecuación general de transporte* sobre un volumen de control determinado [67] y es la base principal para el método de discretización que se trabajó en el programa de cómputo usado en la tesis y que describiremos posteriormente.

### 4.3. Discretización de las ecuaciones gobernantes por FVM

Después de seleccionar el modelo matemático, se debe elegir un método de discretización adecuado. Es decir, un método para aproximar las ecuaciones diferenciales mediante un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en algún conjunto de ubicaciones discretas en el espacio y el tiempo. Hay muchos enfoques, pero los más importantes son: métodos de diferencias finitas, volumen finito y elementos finitos [73].

El *Método de diferencias finitas* o FDM por sus siglas en inglés, parte de la ecuación de conservación en su forma diferencial. El dominio de la solución está cubierto por una cuadrícula o malla. En cada punto de la malla, la ecuación diferencial se aproxima reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones en términos de los valores nodales de las funciones. El resultado es una ecuación algebraica por nodo de cuadrícula, en la que el valor de la variable y un cierto número de nodos vecinos aparecen como incógnitas. El más común para la representación de las derivadas de una función son las expansiones polinomiales de series de Taylor [74].

Por otro lado, el *Método de elemento finito* o FEM por sus siglas en inglés es un método de solución numérica en el cual un dominio dado se divide en un conjunto de subdominios, donde en cada subdominio las ecuaciones gobernantes son aproximadas por algún método variacional o de residuos ponderados. El hecho de dividir este dominio en pequeños subdominios es representar una función complicada en simples polinomios, teniendo en cuenta que cada segmento individual de la solución debe encajar con sus vecinos en el sentido de que la función y las posibles derivadas son continuas en los puntos de conexión o nodos [75].

El tercer método de discretización y en el cual se basa el programa de cómputo usado en este trabajo es el de *método de volumen finito* o FVM por sus siglas en inglés.

Similar a otros métodos numéricos desarrollados para la simulación del flujo de fluidos, el método de volumen finito transforma el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y donde el dominio analizado

se divide al igual que en FEM en subdominios en términos de elementos que pueden ser cuadriláteros, triángulos en 2D o en 3D como hexaedros, tetraedros o prismas [76].

### 4.3.1. Descripción general del método de volumen finito

El método de volumen finito se trabaja con la forma integral de las ecuaciones de conservación en forma Euleriana para el caso de continuidad (Ecuación 19), cantidad de movimiento (Ecuación 27) y energía (Ecuación 33), las cuales aplica para un volumen de control definido por una celda la cual sería la unidad de volumen más pequeña en todo el dominio, de tal manera que se puedan obtener las ecuaciones discretas para esta celda.

Como se puede observar en la figura 4.1 se considera un dominio dividido por una malla que componen pequeños volúmenes de control llamados celdas, de allí la malla define su frontera, la cual está conectada por sus nodos y nodos computacionales que se encuentran en el centro de cada volumen de control [67].

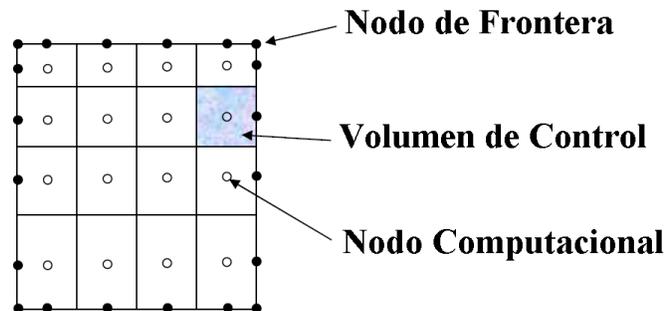


Figura 4. 1: Esquema de una Celda y sus nodos [67].

Este proceso de discretización en el método de volumen finito implica dos aspectos importantes: (i) las ecuaciones diferenciales se integran y transforman en ecuaciones de equilibrio sobre un elemento o volumen finito. Esto significa cambiar las integrales de superficie y volumen en relaciones algebraicas discretas sobre los elementos y sus superficies, utilizando una malla de integración de un orden específico y cuyo resultado sería un conjunto de ecuaciones semi-discretizadas.

(ii) los perfiles de interpolación se eligen para aproximar la variación de las variables dentro del elemento y relacionar los valores de superficie de las variables con sus valores de celda y así transformar las relaciones algebraicas en ecuaciones algebraicas [65].

Ahora bien, resolviendo la ecuación 50 en su forma integral y aplicando el *teorema de divergencia de Gauss* para un vector cualquiera  $\vec{f}$  que dice:

$$\iiint \nabla \cdot \vec{f} dV = \iint \vec{f} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{Ecuación 51})$$

Donde se tiene *la ecuación de transporte* como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \phi dV + \iint (\rho \phi V) \cdot \vec{n} dS = \iint \Gamma \nabla \phi dS + \iiint S_\phi dV \quad (\text{Ecuación 52})$$

Aquí el término  $\phi$  es la cantidad transportada, es decir, velocidad, masa o energía turbulenta y  $\Gamma$  es el coeficiente de difusión de la cantidad transportada. La ecuación 52 representa la integración de control de volumen el cual forma el paso clave que distingue el método de volumen finito a los demás métodos en CFD [77].

#### 4.3.1. Discretización espacial: Mallas

Antes de desarrollar la ecuación de transporte en forma discretizada de ecuaciones algebraicas por medio de FVM, se debe saber cómo es el desarrollo de la discretización espacial de cualquier dominio a analizar ya sea por FDM, FEM o el mismo FVM.

El dominio a analizar es dividido por celdas (unidad más pequeña) en medio de una malla, la celda puede tener diferentes formas geométricas y a su vez la malla puede ser básicamente de dos tipos.

Con respecto la geometría de la celda se tiene las siguientes formas:

En celdas Bidimensionales (figura 4.2)

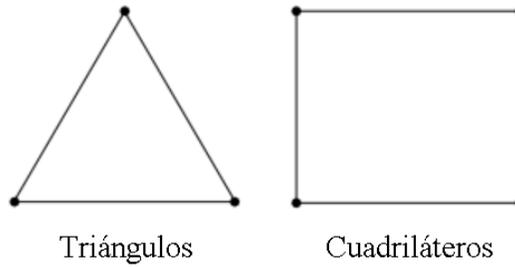


Figura 4. 2: Formas de celdas bidimensionales [78].

En celdas Tridimensionales (figura 4.3)

- Tetraedros (4 caras triangulares)
- Hexaedros (6 caras cuadriláteras)
- Piramidal (1 cara cuadrilátera, 4 caras triangulares)
- Prismática o cuña (3 caras cuadriláteras, 2 caras triangulares)
- Poliedros (No tienen un numero especifico de cara o nodos conectados)

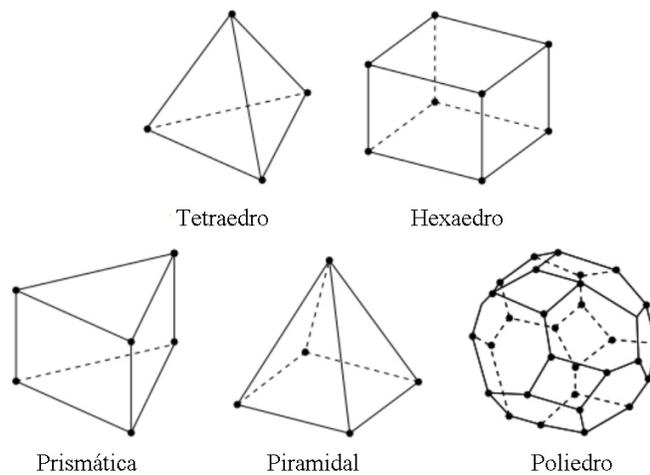


Figura 4. 3: Formas de celdas tridimensionales [78].

Para el caso de las mallas se tiene de dos tipos:

*Mallas estructuradas:* consta de una topología en la que las celdas (unidad más pequeña) están acomodadas en una estructura de matriz de tal manera que cada punto de

la malla (vértice, nodo) se identifica de forma única por los índices  $i, j, k$  y las coordenadas cartesianas correspondientes  $x, y, z$ , como se puede observar en la figura 4.4-a.

Las celdas de la malla son cuadriláteros en 2D y hexaedros en 3D (figura 4.4-b). Si la malla es de un cuerpo ajustado, también hablamos de malla curvilínea [19].

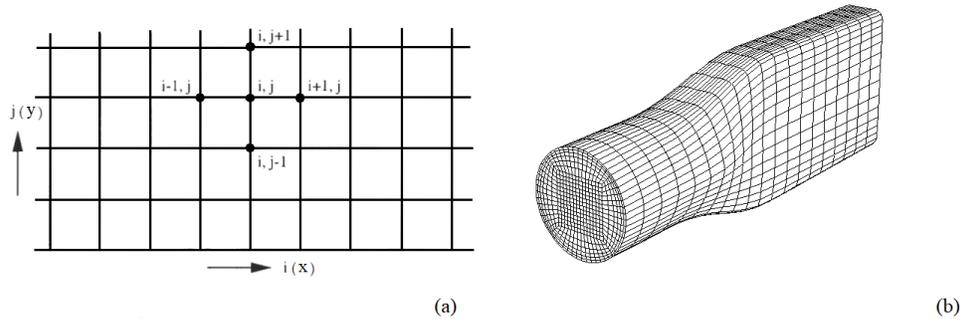


Figura 4. 4: Identificación de los nodos y sus vecinos (a); Malla estructurada (b) [19, 78].

*Mallas No-estructuradas:* se dice de una malla no estructurada cuando su malla y sus nodos no tiene un orden específico, es decir una celda con sus celdas vecinas o nodos que los une no se puede identificar directamente por sus índices por lo cual las celdas se deben especificar explícitamente. Las mallas no-estructuradas permiten una mayor flexibilidad en la generación y adaptación en la forma de dominio. En 2D son triángulos (figura 4.5-b) y en 3D (figura 4.5-a) pueden ser tetraedros, piramidales, prismáticos y poliedros [19, 78].

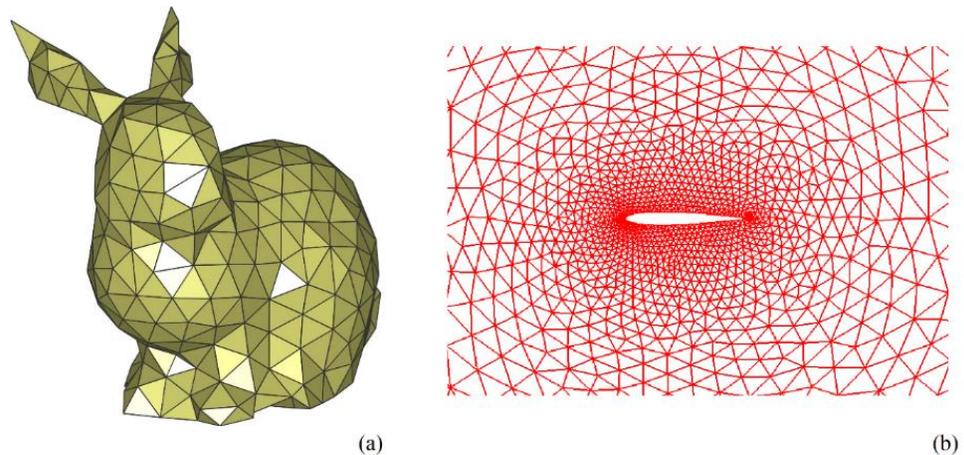


Figura 4. 5: Malla No-estructurada en 3D (a) y 2D (b) [78, 79].

Actualmente en los mallados se habla más de *mallas mixtas o híbridas* las cuales son una combinación de las dos anteriores, es decir tener malla de cuadriláteros y triángulos en 2D y una combinación de hexaedros, tetraedros, primas y pirámides en el caso 3D, la cual ayuda a tener una mayor adaptación a la forma del dominio y a reducir el almacenamiento de información de cada celda.

### 4.3.2. Forma y posición del volumen de control

Otro aspecto para tener en cuenta es la localización del flujo de solución y la geometría de la celda de volumen finito con respecto a la malla, el cual básicamente puede ser de dos tipos

*Celda centrada:* el volumen de control es idéntico a la malla de celdas y las cantidades del flujo están almacenadas en el centroide de la celda de volumen definida por las líneas de la malla [19], ver figura 4.6-a.

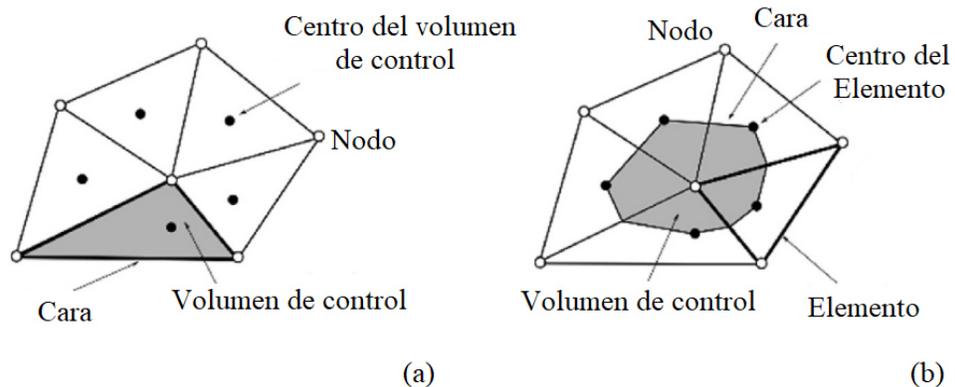


Figura 4. 6: Volumen de control de celda centrada (a) y celda en el vértice (b) [80].

*Celda en el vértice:* en este esquema todas las cantidades del flujo están asociadas a los nodos de la malla computacional y el volumen de control está definido como la unión de todas las celdas de la malla que tienen el vértice en común. Esto significa que los volúmenes de control asociados con dos puntos de la malla adyacentes se superponen entre sí [19], ver figura 4.6-b.

### 4.3.3. Aproximación de integrales de superficie e integrales de volumen

Para desarrollar la ecuación de transporte (ecuación 52) se debe considerar una primera aproximación: el flujo neto a través de toda la superficie del volumen de control será igual a la suma de la integral sobre todas las “k” número de caras. Quedando la expresión como:

$$\iint f \cdot \vec{n} dS = \sum_k \iint f \cdot \vec{n} dS \quad (\text{Ecuación 53})$$

Donde  $f$ , puede ser el flujo convectivo ( $\rho\phi V$ ) o difusivo ( $\Gamma\nabla\phi$ ), asumiendo que el campo de velocidad y densidad es conocida quedaría solo  $\phi$  como la variable desconocida de lo contrario serían el desarrollo de ecuaciones no-lineales acopladas [73].

Considerando la figura 4.7 en cual muestra una notación típica de un volumen de control en 2D y 3D, se puede ver que la superficie del volumen de control consiste en 4 caras del plano (figura 4.7-a) y 6 caras del plano (figura 4.7-b) las cuales están indicadas con letras minúsculas (e, n, s, w, t, b) con respecto al nodo central P.

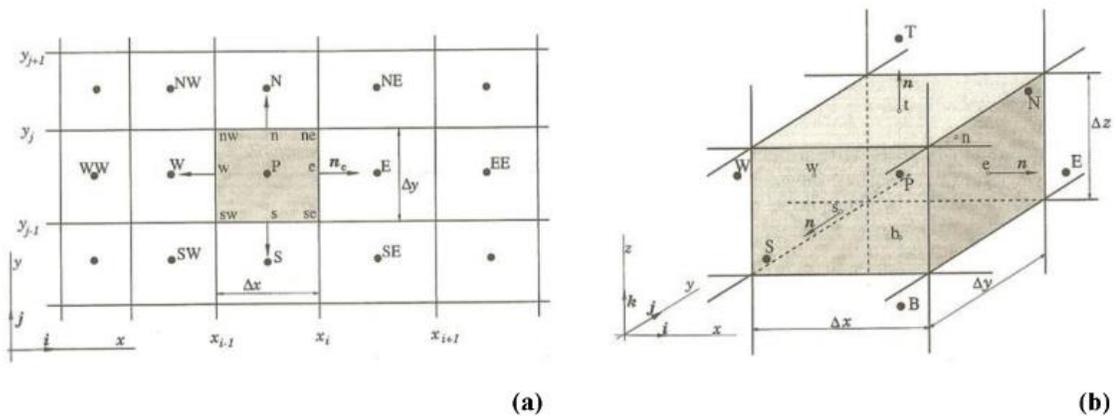


Figura 4. 7: Volumen de control para la malla en 2D (a) y 3D (b) [73].

Si se toma para el análisis de aproximación una superficie de control en 2D (figura 4.7-a), para calcular la ecuación 53, se necesitaría saber la integral de la variable  $f$  sobre dicha superficie de control.

Ahora bien, sí solo se toma una cara (ejemplo  $S_e$ ) de toda la superficie de control, se tendría nuevamente que el flujo neto que cruza esta superficie se obtendría, si se sabe la integral de  $f$  sobre toda la superficie de  $S_e$ , esta información no está disponible y solo se sabe los valores nodales (centro del volumen de control) de  $\phi$  sobre la superficie. Por consecuencia se debe introducir un modo de aproximación, dentro los principales y aplicado a la ecuación 53 se tiene [81]:

*la regla del punto medio*

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e \quad \text{(Ecuación 54)}$$

*la regla del trapecoide*

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{2} (f_{ne} + f_{se}) \quad \text{(Ecuación 55)}$$

*la regla de Simpson.*

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se}) \quad \text{(Ecuación 56)}$$

Cada una de las aproximaciones anteriores (ecuaciones 54, 55 y 56) toma la información de los nodos de sus vecinos adyacentes como se puede observar en la figura 4.8:

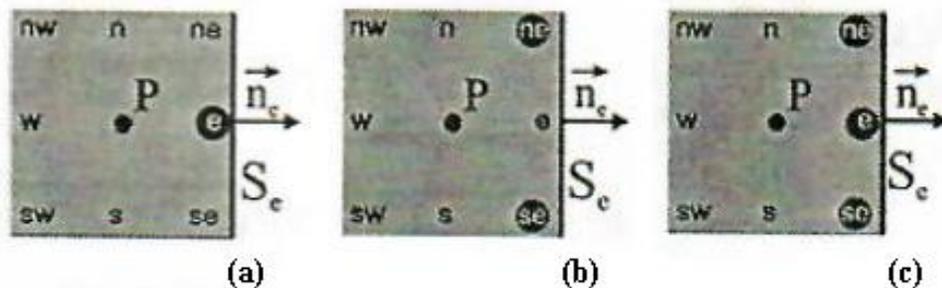


Figura 4. 8: Aproximación a) regla del punto medio; b) trapezoidal; c) Simpson [81].

Dado que el valor de  $f$  no está disponible en el centro de la cara de la celda (e), se debe obtener por interpolación.

Ahora bien, en la ecuación de transporte (ecuación 52) hay también términos que requiere integración sobre el volumen de todo un volumen de control, una aproximación de segundo orden es remplazar la integral de volumen por el producto del valor medio del integrando y el volumen de control y la forma aproximada como el valor del volumen de control en el centro (Nodo P).

$$Q_P = \int_V q dV = \bar{q} \Delta V \approx q_P \Delta V \quad (\text{Ecuación 57})$$

$q_P$  es el valor de  $q$  del centro del volumen de control. Como todas las variables están disponibles en el nodo P , no hay necesidad de interpolación [77].

#### 4.3.4. Aproximación de funciones y derivativas: Interpolación

Para las aproximaciones de las superficies y volumen de control de los términos convectivo ( $(\rho\phi V) \cdot \vec{n}$ ) y difusivo ( $\Gamma\nabla\phi$ ) se debe interpolar el valor de  $\phi$  el cual sería el único término desconocido, existen diferentes métodos de aproximación los cuales los principales son:

*Esquema de diferenciación contra el viento:* o *upwind differencing scheme* (UDS) por sus siglas en inglés, es el método más simple y los resultados de  $\phi$  se aproxima por una función escalonada. Aquí, el valor de  $\phi$  en la cara ( $\phi_e$ ) se determina dependiendo de la dirección del flujo de masa y toma el valor centrado de la celda, de corriente contra el flujo a la cara [72].

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{si } (V \cdot n)_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } (V \cdot n)_e < 0 \end{cases} \quad (\text{Ecuación 58})$$

El esquema de UDS se ilustra en la figura 4.9 en donde el valor de la masa depende del valor de  $\phi_e$

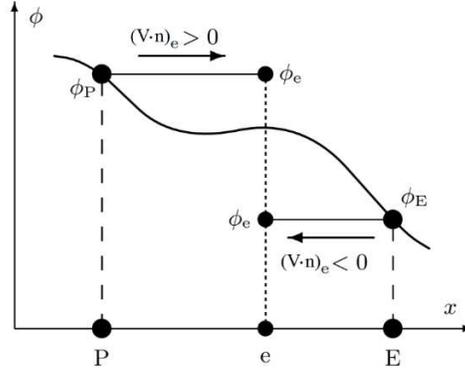


Figura 4. 9: Flujo de masa dependiente del valor de  $\phi_e$  en método UDS [72].

*Interpolación para cinética convectiva cuadrática contra el viento:* o QUICK por siglas en ingles. En este método, se ajusta un polinomio cuadrático a través de los dos puntos vecinos P y E, y un tercer punto, que se ubica en sentido ascendente (W o EE, siguiendo la nomenclatura de la figura 4.7-a) según la dirección del flujo y se evalúa este polinomio en el punto 'e' obteniendo la aproximación [72, 73]:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + g_1(\phi_E - \phi_P) + g_2(\phi_P - \phi_W) & \text{si } (V \cdot n)_e > 0 \\ \phi_E + g_3(\phi_P - \phi_E) + g_4(\phi_E - \phi_{EE}) & \text{si } (V \cdot n)_e < 0 \end{cases} \quad (\text{Ecuación 59})$$

$$g_1 = \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_W)}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} \quad (\text{Ecuación 60})$$

$$g_2 = \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} \quad (\text{Ecuación 61})$$

$$g_3 = \frac{(x_e - x_E)(x_P - x_e)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})} \quad (\text{Ecuación 62})$$

$$g_4 = \frac{(x_e - x_E)(x_P - x_e)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})} \quad (\text{Ecuación 63})$$

Donde  $(V \cdot n)_e > 0$  está indicando que el flujo va de P a E y para la interpolación se necesita el nodo W, o el nodo EE si el flujo va de E a P es decir  $(V \cdot n)_e < 0$  Como se puede ver en la figura 4.10

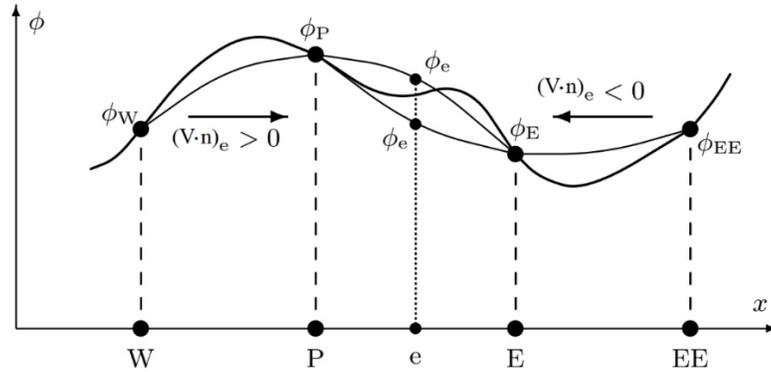


Figura 4. 10: Flujo de masa dependiente del valor de  $\phi_e$  en método QUICK [72].

*Esquema de diferenciación central:* O CDS por sus siglas en ingles se determina el valor de  $\phi$  en la cara ( $\phi_e$ ) por interpolación lineal entre los valores centrales de las celdas (figura 4.11) es decir entre sus nodos más cercanos y por medio de la siguiente expresión se tiene :

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad \text{(Ecuación 64)}$$

Donde  $\lambda$  representa el factor lineal de interpolación como:

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad \text{(Ecuación 65)}$$

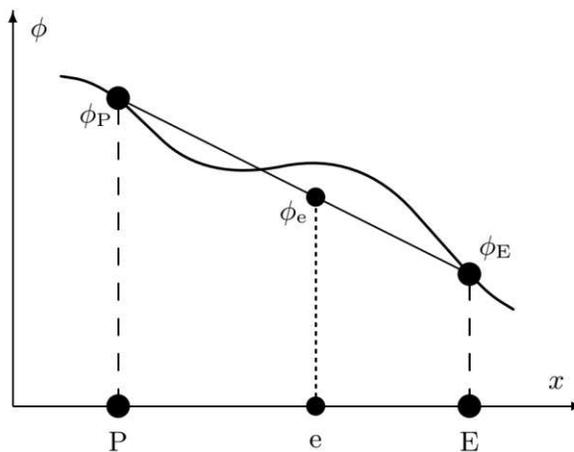


Figura 4. 11: Aproximación de  $\phi_e$  por el método CDS [72].

### 4.3.5. Discretización temporal

En muchas aplicaciones prácticas, los procesos en consideración son inestables y, por lo tanto, requieren para su simulación numérica la solución de ecuaciones dependientes del tiempo. El tiempo tiene un cierto papel excepcional en las ecuaciones diferenciales porque, a diferencia de las coordenadas espaciales, hay una dirección distinguida debido al principio de causalidad. Y como se puede ver en la ecuación de transporte (ecuación 52) se tiene un término transitorio, es decir dependiente del tiempo, y se puede describir para el análisis del tiempo como [65]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \phi dV + \iiint \mathcal{L}(\phi) dV = 0 \quad (\text{Ecuación 66})$$

Donde  $\mathcal{L}(\phi)$  es un operador espacial que incluye los demás termino no-transitorios de la ecuación de transporte, ya integrando la ecuación sobre un elemento ‘c’ cualquiera se tiene la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial(\rho\phi_c)}{\partial t} \forall_c + \mathcal{L}_c(\phi_c^t) = 0 \quad (\text{Ecuación 67})$$

Luego integrándolo con respecto al tiempo en el rango  $\left[ t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right]$  se tiene:

$$\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \frac{\partial(\rho\phi_c)}{\partial t} \forall_c dt + \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathcal{L}_c(\phi_c) dt = 0 \quad (\text{Ecuación 68})$$

Con el volumen tratándolo constante, el primer término de la ecuación 68, se convierte en una diferencia de flujos en las caras y el segundo término se trata con la regla de punto medio de la ecuación 54. Quedando de la siguiente manera el desarrollo de la ecuación como [65]:

$$\forall_c(\rho\phi_c)^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \forall_c(\rho\phi_c)^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \mathcal{L}_c(\phi_c^t)\Delta t = 0 \quad (\text{Ecuación 69})$$

$$\frac{(\rho\phi_c)^{t+\frac{\Delta t}{2}} - (\rho\phi_c)^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \forall_c + \mathcal{L}_c(\phi_c^t) = 0 \quad (\text{Ecuación 70})$$

Los métodos para la discretización del tiempo generalmente se dividen en dos clases según la elección de los puntos de tiempo el cual puede ser por *el método explícito* (calculan el estado del sistema en un momento posterior al actual) y *el método implícito* (su solución es el cálculo de una ecuación que tiene el estado del sistema actual y el estado posterior) [72]. Partiendo de lo descrito anteriormente se tienen los siguientes esquemas:

*Esquema de Euler implícito de primer orden*

El esquema de Euler implícito de primer orden se obtiene mediante el uso de un método de interpolación UDS, el valor de  $\rho\phi_c$  en la cara del elemento temporal se establece igual al valor en el centro del elemento contra el viento (ecuación 58) , por lo cual aplicándolo en la ecuación 70 que da [65] :

$$\frac{(\rho\phi_c)^t - (\rho\phi_c)^{t-\Delta t}}{\Delta t} \forall_c + \mathcal{L}_c(\phi_c^t) = 0 \quad (\text{Ecuación 71})$$

*Esquema de Euler explícito de primer orden*

$$\frac{(\rho\phi_c)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_c)^t}{\Delta t} \forall_c + \mathcal{L}_c(\phi_c^t) = 0 \quad (\text{Ecuación 72})$$

*Esquema de Euler explícito de segundo orden*

$$\frac{(\rho\phi_c)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_c)^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \forall_c + \mathcal{L}_c(\phi_c^t) = 0 \quad (\text{Ecuación 73})$$

*Esquema de Euler implícito de segundo orden*

$$\frac{3(\rho\phi_c)^t - 4(\rho\phi_c)^{t-\Delta t} + (\rho\phi_c)^{t-2\Delta t}}{2\Delta t} \forall_c + \mathcal{L}_c(\phi_c^t) = 0 \quad (\text{Ecuación 74})$$

#### 4.4. Modelos multifase-Método de volumen de fluido

El modelo de simulación que se trabaja en este trabajo está comprendido por varias fases, una está en estado gaseoso que es el aire y la otra en estado líquido que es un lubricante, esto es un flujo multifase que describe dos fases presentes. Dentro la clasificación de flujos multifase, las fases pueden estar dispersas o separadas. En la fase dispersa, una fase suele estar presente en forma de gotitas o partículas y en la separada el flujo de fluidos es inmiscibles, separados por una interfaz claramente definida [71].

Dentro del análisis de los fluidos computacionalmente y como los desarrolla para el cálculo numérico hay dos enfoques principales: el enfoque de Euler-Lagrange y el enfoque de Euler-Euler. El cual debido a la naturaleza del fenómeno que ocurre en el diferencial con los fluidos es el método Euler-Euler que se aplica para la simulación en este trabajo.

En el enfoque de Euler-Euler, las diferentes fases se tratan matemáticamente como interpenetrantes continuos, dado que el volumen de una fase no puede ser ocupado por la otra fase, se introduce el concepto de *fracción volumétrica de fase*. Estas fracciones de volumen se asumen que son funciones continuas en el espacio y tiempo y su suma es igual a uno. Esto se explicará posteriormente en este capítulo.

Con respecto a las ecuaciones de conservación para cada fase, estas se derivan para obtener un conjunto de ecuaciones, que tienen una estructura similar para todas las fases. Estas ecuaciones se cierran proporcionando relaciones constitutivas que se obtienen a partir de información empírica.

En el programa de computo utilizado en este trabajo hay disponibles tres modelos de multifase Euler-Euler diferentes: el modelo de volumen de fluido (VOF), el modelo de mezcla y el modelo de Euleriano, el modelo VOF es el más adecuado para trabajar y se desarrolla para rastrear el movimiento del lubricante dentro del diferencial en fases claramente definidas e inmiscibles [18].

#### 4.4.1. Generalidades de volumen de fluido

Este método es una técnica de seguimiento de la superficie aplicada a una malla Euleriana fija. Está diseñada para dos o más fluidos inmiscibles donde la posición de la interfaz entre los fluidos es importante.

En el modelo VOF, los fluidos comparten un único conjunto de ecuaciones de cantidad de movimiento, y la fracción volumétrica de cada uno de los fluidos en cada celda computacional se rastrea a lo largo del dominio.

La idea es definir un campo variable de fracción de fluidos ( $\varphi_f$ ) en un marco de referencia Euleriano fijo para su malla, indicando la fracción de volumen de cada fase en la celda como [82]:

$\varphi_f = 0$  : Si la celda está completamente vacía (De la fase secundaria, Solo está la fase primaria)

$\varphi_f = 1$  : La celda está completamente llena (De fase secundaria)

$0 < \varphi_f < 1$  : La celda contiene interfaces entre un fluido y dos o más fluidos.

Dentro de la fracción volumétrica definida en un dominio, se asigna a la fase primaria normalmente a la fase con densidad menos densa, por ejemplo, en el caso de un flujo multifase de gas-liquido, la fase primaria sería el gas. Para la fase secundaria denota las fases de mayor densidad en comparación con la fase primaria.

Los campos para todas las variables y propiedades son compartidos por las fases y representan los valores promedio de volumen. Esto siempre y cuando la fracción de volumen de cada una de las fases se conozca en cada ubicación. Por lo tanto, las variables y propiedades en cualquier celda del dominio están representada por una de las fases, o mezclas de fases, dependiendo de los valores de la fracción volumétrica en dicha celda [83].

#### 4.4.2. Ecuación de fracción volumétrica

Las fracciones de volumen representan el espacio ocupado por cada fase, y las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento se satisfacen en cada fase individualmente. La derivación de las ecuaciones de conservación se puede realizar promediando el equilibrio instantáneo local para cada una de las fases

El seguimiento de las interfaces entre las fases se realiza mediante la solución de una ecuación de continuidad para la fracción de volumen de una o más de las fases. Para la fase  $f$  esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (\varphi_f \rho_f \vec{V}_f) + \frac{\partial(\varphi_f \rho_f)}{\partial t} = S_{\varphi_f} \quad (\text{Ecuación 75})$$

Donde  $S_{\varphi_f}$  es un término fuente-generación el cual normalmente es cero.

El programa de computo en CFD no resuelve la ecuación de fracción volumétrica para la fase primaria, sino que la computariza basado en la restricción:

$$\sum_{f=1}^n \varphi_f = 1 \quad (\text{Ecuación 76})$$

Indicando la ecuación 76 que estas fracciones de volumen se asumen como funciones continuas en el espacio y tiempo siendo su suma igual a uno [18].

#### 4.4.3. Propiedades del material

Las propiedades que aparecen en la ecuación de transporte de movimiento están determinada por la presencia de cada fase en cada volumen de control. En un sistema de dos fases, por ejemplo, si las fases están representadas por aire y aceite, la fracción volumétrica de la segunda fase (aceite) es rastreada, entonces la densidad en cada celda está determinada como [84]:

$$\rho = \rho_{aceite} \varphi_{aceite} + \rho_{aire} (1 - \varphi_{aceite}) \quad (\text{Ecuación 77})$$

En general para un sistema de n-fases, la fracción volumétrica promediada es:

$$\rho_m = \sum_{f=1}^n \varphi_f \rho_f \quad (\text{Ecuación 78})$$

Todas las demás propiedades (por ejemplo, viscosidad) se calculan de esta manera.

#### 4.4.4. Ecuación de transporte para fluidos multifase

La ecuación de transporte de movimiento se puede desarrollar para dos tipos de escalares: por fase y promediada o mezclada, entonces a partir de la ecuación en su forma conservativa (ecuación 49) vista en el capítulo 3, se resuelve la ecuación de transporte dentro del volumen de control para un valor arbitrario  $k$  ocupado por una fase ( $f$ ) como [18]:

$$\frac{\partial(\varphi_f \rho_f \phi_f^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi_f \rho_f \phi_f^k \vec{V}_f) = \nabla \cdot (\Gamma_f^k \nabla \phi_f^k) + S_f^k \quad (\text{Ecuación 79})$$

Donde:

$\varphi_f$ : Fracción volumétrica de la fase  $f$

$\rho_f$ : Densidad física de la fase  $f$

$\vec{V}_f$ : Velocidad de la fase  $f$

$\Gamma_f^k$ : Coeficiente de difusión

$S_f^k$ : Fuentes de generación

$\phi_f^k$ : Variable escalar que solo está asociado a la fase  $f$

De aquí la ecuación 79 aplica para cada fase individualmente. Ahora si la variable de transporte  $\phi_f^k$  representa un campo físico que esta compartido entre varias fases o es considerado lo mismo para cada fase, se considera el escalar asociado con una mezcla de fases por lo cual la ecuación de transporte de movimiento quedaría entonces:

$$\frac{\partial(\rho_m \phi^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \phi^k \vec{V}_m) = \nabla \cdot (\Gamma_m^k \nabla \phi^k) + S_m^k \quad (\text{Ecuación 80})$$

Donde  $\rho_m$ , es la densidad promediada como se expone en la ecuación 78, desde la  $f = 1$  hasta “n” fases presentes y de manera análoga se desarrolla para los términos ( $\rho_m \vec{V}_m$ ),  $\Gamma_m^k$  y  $S_m^k$  que son la sumatoria de cada fase multiplicado por su fracción volumétrica  $\varphi_f$  [18].

## **4.5. Introducción de los modelos de mallas dinámicas**

De acuerdo con el movimiento de las paredes de los engranes dentro del eje-diferencial, la simulación de los dos fluidos que se realiza (aire y aceite), hace que su malla en algunas zonas tenga condiciones de frontera y movimiento. El trabajo que se realiza toma el fundamento de dos modelos de malla los cuales maneja el programa de cómputo.

El *método de mallas deslizantes* se utiliza en sistemas con partes rotativas donde se pueden encerrar un dominio específico con una superficie de revolución haciendo un movimiento relativo de los componentes estacionarios y giratorios.

El otro es el *método de mallas dinámicas* el cual se utiliza cuando sus límites de la malla se mueven rígidamente (sean lineales o giratorios) entre sí. de igual manera se usa cuando los límites de la malla se deforman o desvían [18].

### **4.5.1. Método de malla dinámica**

El modelo de malla dinámica que usa el programa de cómputo modela flujos donde la forma del dominio cambia con el tiempo debido al movimiento de los límites del dominio.

La actualización de la malla de volumen se maneja automáticamente por el programa de computo en cada paso de tiempo de acuerdo con las nuevas posiciones de los límites, para usar este método se debe proporcionar una malla de volumen inicial y la descripción del movimiento de cualquier zona de la malla que requiera desplazarse en el modelo [18].

La forma integral de la ecuación de conservación para un escalar general ( $\phi$ ), en un volumen de control cualquiera ( $\mathcal{V}$ ) a partir de la ecuación 52, cuyo límite se mueve, se puede reescribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \phi d\mathcal{V} + \iint (\rho \phi (V - V_g)) \cdot \vec{n} dS = \iint \Gamma \nabla \phi dS + \iiint S_\phi d\mathcal{V} \quad (\text{Ecuación 81})$$

Donde ya se han identificado cada una de las variables, adicionalmente se tiene ( $V_g$ ) que es la velocidad de la malla movable.

De la ecuación 81 el primer término se puede calcular usando el método explícito de primer orden con diferencias finitas quedando como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \phi d\mathcal{V} = \frac{\partial (\rho \phi \mathcal{V})}{\partial t} = \frac{(\rho \phi \mathcal{V})^{n+1} - (\rho \phi \mathcal{V})^n}{\Delta t} \quad (\text{Ecuación 82})$$

Donde ( $n$ ) y ( $n + 1$ ) , indican el nivel de tiempo actual y el nivel de tiempo siguiente respectivamente. Para el tiempo ( $n + 1$ ) su volumen se calcula a partir de:

$$\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n + \frac{d\mathcal{V}}{dt} \Delta t \quad (\text{Ecuación 83})$$

Ahora bien, dentro del método de malla dinámica hay tres métodos de movimiento de malla disponible en el programa de computo que se emplea en este trabajo, las cuales sirven para actualizar la malla de volumen en las regiones donde se deforman y están sujetas al movimiento de los límites y son: *el método de suavizado, el método local de remallado y el de capas dinámicas*. Aquí se mencionará los dos primeros los cuales se usan en el presente trabajo.

#### *Método de suavizado*

Dentro del conjunto de técnicas de método de suavizado se tiene el *método de suavizado basado en resortes* el cual las uniones entre dos nodos se idealizan como una red de resortes interconectados. La distancia inicial entre nodo y nodo antes de cualquier movimiento constituye el estado de equilibrio de la malla. Desde el momento que empieza el desplazamiento de los nodos en un límite dado, se genera una fuerza proporcional al

desplazamiento a lo largo de los resortes conectados al nodo, es decir la ley de Hook actúa sobre el nodo describiéndose como [18]:

$$\vec{F}_i = \sum_j^{n_i} k_{ij} (\Delta \vec{x}_j - \Delta \vec{x}_i) \quad (\text{Ecuación 84})$$

Donde:

$\Delta \vec{x}_i$ : Desplazamiento del nodo i

$\Delta \vec{x}_j$ : Desplazamiento del nodo j, el cual es el nodo vecino de i

$n_i$  : Es el número de nodos vecinos conectados al nodo i

$k_{ij}$ : Es la constante de rigidez del resorte entre el nodo i y su vecino nodo j

La constante de rigidez para los nodos de conexión i y j se define como:

$$k_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}} \quad (\text{Ecuación 85})$$

En el equilibrio, la fuerza neta en un nodo debido a todos los resortes conectados al nodo debe ser cero. Esta condición resulta en una ecuación iterativa tal que

$$\Delta \vec{x}_i^{m+1} = \frac{\sum_j^{n_i} k_{ij} \Delta \vec{x}_j^m}{\sum_j^{n_i} k_{ij}} \quad (\text{Ecuación 86})$$

Dado que los desplazamientos son conocidos en los límites (después de que las posiciones de los nodos del límite se han actualizado), la ecuación 86 se resuelve utilizando un barrido Jacobi en todos los nodos interiores. A convergencia, las posiciones se actualizan de tal manera que:

$$\vec{x}_i^{n+1} = \vec{x}_i^n + \Delta \vec{x}_i^{m, \text{convergado}} \quad (\text{Ecuación 87})$$

Donde  $(n)$  y  $(n + 1)$  , indican el nivel de tiempo actual y el nivel de tiempo siguiente respectivamente.

### *Método local de remallado*

A comparación del método de suavizado donde el desplazamiento de los nodos no es tan grande y está regido por las fuerzas de un resorte. Se tiene el método local de remallado y se utiliza cuando el desplazamiento de los nodos límites son tan grandes en comparación del tamaño de las celdas locales, haciendo que la calidad de la celda se deteriore y se pueda deformar hasta el punto de degenerarse. Esto haría una malla inválida, por ejemplo, el caso de una celda sobrepuesta dentro de otra dando origen a celdas con volúmenes negativos y por ende ocasionaría problemas de convergencia cuando la solución se actualice siempre al paso de tiempo.

Para la solución de la malla inválida, el programa de cómputo aglomera las celdas que violan los criterios de asimetría o tamaño y remalla localmente las celdas o caras aglomeradas. Si las nuevas celdas o caras satisfacen el criterio de máxima deformación, la malla se actualiza localmente con las nuevas celdas (con la solución interpolada de las celdas antiguas). De lo contrario, las nuevas celdas se descartan [18].

### **4.5.2. Método de malla deslizante**

En este método se emplea una zona donde la malla se mueve deslizándose con respecto a otra zona del dominio con malla estática. El movimiento de las zonas dinámicas se rastrea con respecto a un marco estacionario. Por lo tanto, no se siguen marcos de referencia móviles al dominio computacional, lo que ayuda a simplificar las transferencias de flujo a través de las interfaces.

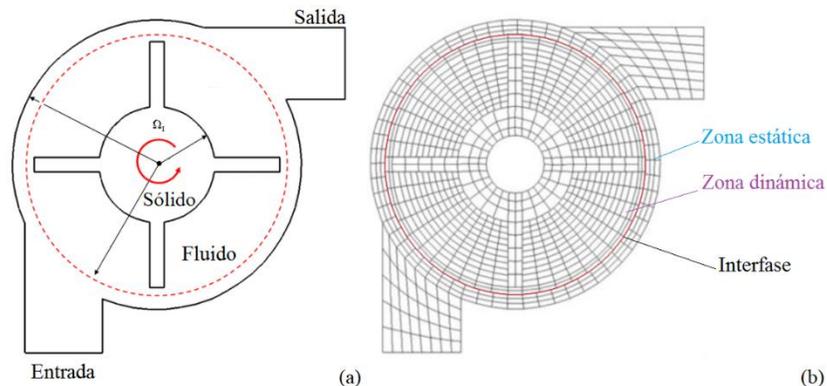


Figura 4. 12: Geometría de una bomba rotativa (a); Mallado de la bomba (b) [85].

Como se puede observar en la figura 4.12 se tiene un modelo simplificado de una bomba rotativa (Figura 4.12-a) y su zona de mallado (Figura 4.12-b) en ella se aplica el método de malla de deslizante, para la zona interior (zona dinámica) la cual estará girando a través de la interfaz con respecto a su parte externa del dominio (zona estática).

La formulación de la malla deslizante y el volumen de control se mantiene constante, por lo cual, de la ecuación 83,  $\frac{dV}{dt} = 0$  y  $V^{n+1} = V^n$  pudiendo expresar la ecuación 82 como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \phi dV = \frac{\partial (\rho \phi V)}{\partial t} = \frac{((\rho \phi)^{n+1} - (\rho \phi)^n) V}{\Delta t} \quad (\text{Ecuación 88})$$

En la técnica de malla deslizante se utilizan dos o más zonas de celdas. Cada zona de celdas está limitada por al menos una "zona de interfaz" donde se encuentra con la zona de celdas opuestas. Las zonas de interfaz de las zonas de celdas adyacentes están asociadas entre sí para formar una "interfaz de malla". Las dos zonas de celdas se moverán entre sí a lo largo de la interfaz de malla

Durante el cálculo, las zonas de celdas se deslizan (es decir, rotan o trasladan) entre sí a lo largo de la interfaz de malla en pasos discretos. A medida que se realiza la rotación o la traslación, se requiere la alineación de nodos a lo largo de la interfaz de malla [18].

#### 4.6. Turbulencia y su modelado

Acerca de los tipos de flujo descritos en el capítulo III, se tienen los flujos laminares y flujos turbulentos, siendo estos últimos flujos inestables que ocurren cuando las perturbaciones son altas y su naturaleza dependerá de: la geometría, velocidad de flujo, tipo de fluido, rugosidad de la superficie, temperatura entre otros aspectos. Estos están resumidos en el *número de Reynolds* el cual relaciona las fuerzas inerciales del fluido con las viscosas.

En un campo de flujo turbulento, las partículas de un fluido a través de su trayectoria se mueven de forma desordenada y aleatoriamente en todas las dimensiones a velocidades fluctuantes. De igual manera suceden estructuras de vorticidades aleatorias, es decir movimientos giratorios en el fluido, llamados remolinos de turbulencia [13].

### 4.6.1. Estructura del flujo turbulento

Como se ha mencionado los flujos turbulentos se caracterizan por campos de velocidad altamente inestables, irregular (aperiódico), con movimientos giratorios en el flujo y son tridimensionales. La velocidad promediada en el tiempo puede ser una función de solo dos coordenadas, pero el campo instantáneo fluctúa rápidamente en las tres dimensiones. Las fluctuaciones mezclan cantidades transportadas, como el momento, la energía y la masa, y hacen que las cantidades transportadas también fluctúen en el tiempo y en el espacio [73, 86].

De acuerdo con el número de Reynolds a partir de pruebas experimentales los flujos turbulentos ocurren a altos número de Reynolds según el número de Reynolds crítico ingenieril ( $Re_{cr}$ ) indica donde más probabilidad que sea turbulento que laminar [13, 70]:

#### *Flujos externos*

- A lo largo de una superficie plana  $Re_{cr} \geq 500000$
- Alrededor de un obstáculo  $Re_{cr} \geq 20000$

#### *Flujos internos*

- En una tubería  $Re_{cr} \geq 2300$

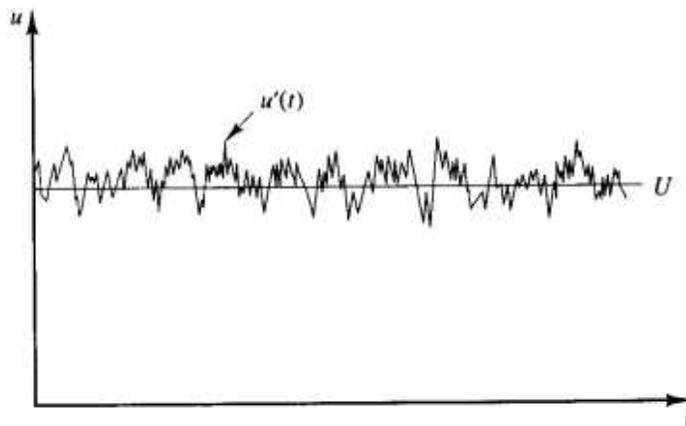


Figura 4. 13: Velocidad en un punto dentro de un flujo turbulento [70].

Las fluctuaciones hacen que en la turbulencia se ponga en contacto fluidos de diferente contenido de momento. La reducción de los gradientes de velocidad debido a la acción de la viscosidad hacen que se reduzca la energía cinética del flujo; en otras palabras, la mezcla es un proceso disipativo haciendo que la energía perdida se convierta irreversiblemente en energía interna del fluido [73].

Debido a la naturaleza aleatoria y manera caótica del flujo turbulento se descarta los cálculos basados en una descripción completa del movimiento de todas las partículas de fluido, en cambio, la velocidad por ejemplo se puede descomponer en un valor promedio estable  $U$  más una componente fluctuante  $u'(t)$ , (ver figura 4.13) quedando superpuesto la velocidad como:  $u(t) = U + u'(t)$ . en general, es menos complejo caracterizar un flujo turbulento por medio de los valores promedios de las propiedades de flujo ( $U, V, W, P$ , etc.) y las propiedades estadísticas de sus fluctuaciones ( $u'v', w'p'$ , etc.) [70].

Puesto que la naturaleza del comportamiento inducido al fluido multifase dentro del diferencial, causado por la rotación de los engranes (velocidades mínimas de 120 rpm), se puede considerar el tipo de flujo como turbulento donde se observa vorticidades de pequeñas y grandes escalas por la acción giratoria del fluido. Por ende, este modelo de simulación trabajó con un modelo de turbulencia, calculado a través de un valor de Reynolds crítico, mayor a 2,300 [70].

#### **4.6.2. Efecto de la turbulencia en ecuaciones de Navier-Stokes**

Aquí se examina el efecto de la turbulencia en el flujo promedio de tipo turbulento en la ecuación de Navier-Stokes o ecuaciones si se habla de las tres dimensiones espaciales ( $x, y, z$ ).

El efecto del flujo de una propiedad cualquiera ( $\varphi$ ) similar a como se mencionó en la sección anterior, el cual es dependiente del tiempo se puede definir como la suma del valor promedio de la propiedad estable ( $\Phi$ ) más el valor fluctuante en el tiempo ( $\varphi'$ ) con valor promedio 0, ya que es un valor instantáneo en cada unidad de tiempo quedando:

$$\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t) \quad (\text{Ecuación 89})$$

Del valor promedio fluctuante en el tiempo igual a cero se tiene:

$$\overline{\varphi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt = 0 \quad (\text{Ecuación 90})$$

Ahora bien, considerando el caso de un flujo continuo e incompresible con viscosidad y densidad constante las ecuaciones de Navier-Stokes de manera simplificada como se ve en las ecuaciones 44, 45, 46 y la ecuación de continuidad (ecuación 47) matemáticamente quedan:

Continuidad

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{Ecuación 91})$$

Momento en x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (\text{Ecuación 92})$$

Momento en y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (\text{Ecuación 93})$$

Momento en z

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (\text{Ecuación 94})$$

Ahora para aplicar el efecto de las fluctuaciones, para el vector de velocidad  $\vec{V}$ , sus componentes  $(u, v, w)$  y la presión  $P$ , se considera cada una de estas variables como la suma de su promedio estable y su fluctuación ( $\vec{V} = \vec{V} + \vec{V}'$ ;  $u = U + u'$ ;  $v = V + v'$ ;  $w = W + w'$ ;  $P = P + P'$ ). Existen otras consideraciones matemáticas que no se contemplan a detalle quedando las ecuaciones de la 91 a la 94 como:

Continuidad

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{Ecuación 95})$$

Momento en x

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (U\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 U + \left[ -\frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z} \right] \quad (\text{Ecuación 96})$$

Momento en y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot (V\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 V + \left[ -\frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial z} \right] \quad (\text{Ecuación 97})$$

Momento en z

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (W\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 W + \left[ -\frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial z} \right] \quad (\text{Ecuación 98})$$

Donde se identifican los tensores de esfuerzos, los tres normales y los tres cortantes como siguen: ( $\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2}$ ;  $\tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2}$ ;  $\tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$ ;  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'}$ ;  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \overline{u'w'}$ ;  $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \overline{v'w'}$ ) siendo estos términos de esfuerzos llamados los esfuerzos de Reynolds y las ecuaciones de la 96 a 98 se conocen como las *ecuaciones de Reynolds* [70].

De igual manera se puede agregar el termino de los efectos de la turbulencia en la ecuación de transporte de movimiento (ecuación 49) para un valor escalar ( $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ ) y fluido incompresible como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}) = \nabla \cdot (\Gamma_{\phi} \nabla \phi) + \left[ -\frac{\overline{\partial u' \phi'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v' \phi'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial w' \phi'}}{\partial z} \right] + S_{\phi} \quad (\text{Ecuación 99})$$

Siendo la ecuación anterior *la ecuación de transporte de movimiento de tiempo promedio* para un escalar  $\phi$  [70].

### 4.6.3. Modelos de turbulencia computacional

Dado que los flujos turbulentos tienen fluctuaciones que pueden ser de pequeña escala y alta frecuencia, con grandes y pequeños remolinos, estos son demasiado costosos computacionalmente hablando para simularlas directamente en cálculos a detalle e imprácticos para la ingeniería. En cambio, si se toman las ecuaciones de control instantáneas o exactas y se promedian en el tiempo y por conjuntos o manipulándolas de

otra manera para eliminar la resolución de escalas pequeñas, resultaría un conjunto modificado de ecuaciones que son computacionalmente menos costosas de resolver. Sin embargo, las ecuaciones modificadas contienen variables desconocidas adicionales, y se necesitan modelos de turbulencia para determinar estas variables en términos de cantidades conocidas. Por lo tanto, el modelado de turbulencia se puede describir como el proceso de cierre de las ecuaciones modificadas de Navier-Stokes al proporcionar los modelos de turbulencia requeridos [71, 86].

Existen diferentes enfoques para poder rastrear computacionalmente el fenómeno de turbulencia. Una tendencia general para los modelos de turbulencia es que entre menos aproximaciones se introduzcan, más potencia de cálculo se requiere. La figura 4.14 muestra una descripción general de los diferentes modelos de turbulencia que existen y como se puede observar, se puede encontrar un equilibrio entre la precisión del modelo y el costo computacional.

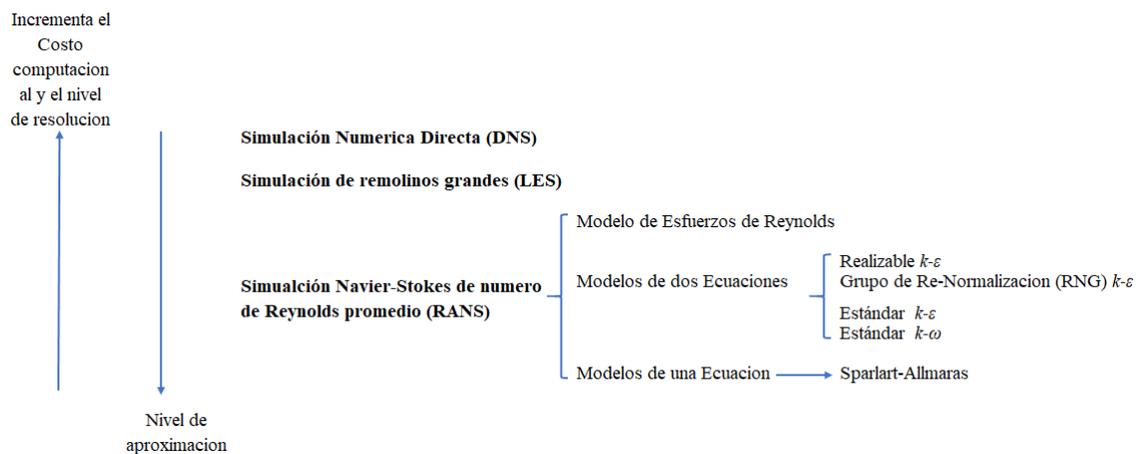


Figura 4. 14: Esquema general de los modelos de turbulencia [71].

Dentro de los enfoques generales de los modelos de turbulencia se tiene los siguientes como se indica en la figura 4.14

#### *Simulación Numérica directa*

Esta técnica llamada *Direct Numerical Simulation (DNS)* en inglés es el enfoque más preciso, el cual resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes sin promediar ni aproximar

más que las discretizaciones numéricas cuyos errores pueden estimarse y controlarse. En estas simulaciones todos los movimientos no estacionarios de todas las escalas del flujo turbulento son resueltas. Sin embargo, las diferencias en tamaño y la escala de tiempo entre los remolinos grandes y pequeños pueden ser de varios órdenes de magnitud. Además, estas diferencias se incrementan con el número de Reynolds, lo cual hace los cálculos de DNS de flujo turbulento sean aún más difíciles a medida que aumenta el número de Reynolds. Las soluciones de DNS demandan mallas tridimensionales muy finas, computadoras grandes y una enorme cantidad de tiempo del CPU [73].

#### *Simulación de Remolinos grandes*

Como se ha indicado, los flujos turbulentos contienen una amplia gama de escalas de longitud y tiempo, Dado que el problema principal en la simulación de flujos con altos números de Reynolds es el rango de varios tamaños de remolinos de grandes y pequeños en escalas de espacio y tiempo.

Los movimientos a gran escala son generalmente mucho más energéticos que los movimientos a pequeña escala; su tamaño y resistencia los convierten, con mucho, en los transportadores más efectivos de las propiedades conservadas. Las escalas pequeñas suelen ser mucho más débiles y proporcionan poco transporte de estas propiedades. Una solución lógica es filtrar las ecuaciones, resolviendo así solo las escalas de turbulencia intermedia a grande. La *simulación de remolinos grandes o Large-eddy simulation (LES)* por su nombre y siglas en inglés extiende la utilidad del DNS al dejar intencionalmente las escalas de turbulencia más pequeñas sin resolver. En LES la dinámica de las grandes escalas se computa explícitamente. Por lo tanto, LES necesita ser 3D y transitorio y es un método preferido para flujos en los que el número de Reynolds es demasiado alto o la geometría es demasiado compleja para permitir la aplicación de DNS [71, 73].

#### *Simulación Navier-Stokes de Numero de Reynolds promedio*

Este enfoque de modelado de turbulencia es el más práctico y ampliamente usado en la práctica en ingeniería y es el que se utiliza en este trabajo por sus características. Este modelo a su vez tiene diferentes submodelos o enfoques (figura 4.14).

Llamado *Reynolds Average Navier-Stokes (RANS)* por su nombre y siglas en ingles en vez de modelar los grandes o pequeños remolinos, en algunas ocasiones es más practico tomar los efectos del flujo promedio que en los detalles de las fluctuaciones, por lo que se adopta una aproximación estadística, promediando las ecuaciones de conservación durante un periodo de tiempo mucho más grande que el periodo característico de las fluctuaciones turbulentas [13].

En las aproximaciones de la turbulencia promediadas por Reynolds, toda la inestabilidad se considera parte de la turbulencia. Al promediar, la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes da lugar a términos que deben modelarse, como se describió en la sección 4.6.2. La base de este modelo de turbulencia, cada propiedad se modela con un valor promedio en estado estable más el valor variable de la misma propiedad fluctuando en el tiempo. Estas se encuentran resumidas para un fluido incompresible en las ecuaciones de la 96 a 98 en:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \nabla \cdot (\tau_{ij, Turbulento}) \quad (\text{Ecuación 100})$$

$$\tau_{ij, Turbulento} = - \begin{pmatrix} \overline{\rho u'^2} & \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho v'^2} & \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho u'w'} & \overline{\rho v'w'} & \overline{\rho w'^2} \end{pmatrix} \quad (\text{Ecuación 101})$$

Siendo la ecuación 101, el *Tensor de esfuerzos de Reynolds* [13], la cual es similar al tensor de esfuerzos viscosos descrito en la capítulo 3 (ecuación 26), al desarrollar la ecuación de Navier-Stokes y adicionando los efectos fluctuantes y caóticos de turbulencia.

La energía cinética instantánea  $k(t)$  de un flujo turbulento es la suma de la energía cinética promedio  $K$  y la energía cinética turbulenta  $k$  [67] :

$$K = \frac{1}{2} [U^2 + V^2 + W^2] \quad (\text{Ecuación 102})$$

$$k = \frac{1}{2} [\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}] \quad (\text{Ecuación 103})$$

$$k(t) = K + k \quad (\text{Ecuación 104})$$

Como se ilustra en la figura 4.14 existen diferentes submodelos de turbulencia, este trabajo se enfocara en los *modelos algebraicos de dos ecuaciones*, el cual añade dos ecuaciones más a la formulación matemática del problema, que deben resolverse de manera simultánea con las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento lineal (para el caso de este trabajo la ecuación de la energía no se activó) [13, 71, 73].

Junto con las dos ecuaciones adicionales que deben resolverse cuando se usa un modelo de turbulencia de dos ecuaciones, es necesario especificar otras dos *condiciones de frontera* para las propiedades de turbulencia en entradas y salidas del dominio computacional [13]. Se explicará dos submodelos dentro del grupo de modelos RANS en los cuales se basa este trabajo y se usa dentro del programa de computo.

#### *Estándar $k - \varepsilon$*

Es un modelo semi-empírico, y la derivación de las ecuaciones del modelo se basa en consideraciones fenomenológicas y empíricas. Este modelo es basado en ecuaciones de transporte para la energía cinética turbulenta ( $k$ ) y su razón de disipación ( $\varepsilon$ ). El modelo de la ecuación de transporte para  $k$  se deriva de la la ecuación exacta, mientras el modelo de la ecuación de transporte para  $\varepsilon$ , es obtenido usando razonamiento físico y tiene poca semejanza con su contraparte matemáticamente exacta [18].

La energía cinética turbulenta y la razón de disipación son obtenidas mediante la ecuación de transporte como [67, 70, 73]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho k \vec{V}) = \nabla \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \cdot k \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon + S_k \quad (\text{Ecuación 105})$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho \varepsilon \vec{V}) = \nabla \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \cdot \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij}) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (\text{Ecuación 106})$$

Donde  $E_{ij}$  viene de la descomposición de la razón de deformación de un elemento de fluido en un flujo turbulento, este es la suma de la razón promedio y su componente fluctuante siendo:

$$e_{ij}(t) = E_{ij} + e'_{ij} \quad (\text{Ecuación 107})$$

Donde  $\mu_t$  : es la viscosidad turbulenta y está definida como:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{Ecuación 108})$$

Estas ecuaciones contienen 5 constantes ajustables, que el modelo  $k - \varepsilon$  usa como datos empíricos para una amplia gama de flujos turbulentos:  $C_\mu: 0.09$  ;  $\sigma_k = 1.00$ ;  $\sigma_\varepsilon = 1.30$ ;  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ;  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ .

Longitud característica de los remolinos turbulentos ( $l$ ) como característica basado en observaciones de la disipación de energía de la turbulencia y está definido como:

$$\varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{l} \quad (\text{Ecuación 109})$$

Interpretando las ecuaciones 105 y 106 en palabras como viene en el mismo orden cada termino significa [70]:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{cambio de } k \text{ o } \varepsilon \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Transporte} \\ \text{de } k \text{ ó } \varepsilon \text{ por} \\ \text{convección} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Transporte} \\ \text{de } k \text{ ó } \varepsilon \text{ por} \\ \text{difusión} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{producción} \\ \text{de } k \text{ ó } \varepsilon \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{destrucción} \\ \text{de } k \text{ ó } \varepsilon \end{array} \right]$$

*Grupo Re-normalización ( $k - \varepsilon$ )*

Llamado en inglés y sus siglas *Renormalization group (RNG)* [87] es una técnica matemática que se puede usar para derivar un modelo de turbulencia similar al k-epsilon, esto da como resultado una forma modificada de la ecuación de  $\varepsilon$  que intenta explicar las diferentes escalas de movimiento a través de cambios en el término de producción [73].

Otros aspectos que incluye este modelo son el efecto de remolino en la turbulencia, lo que mejora la precisión de los flujos en remolino, además tiene una fórmula analítica para los números constantes adimensionales y una fórmula diferencial para la viscosidad efectiva [18, 87, 70, 73].

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho k \vec{V}) = \nabla \left[ \left( \mu + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k} \right) \nabla \cdot \mathbf{k} \right] + 2\mu_{ef} E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (\text{Ecuación 110})$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho \varepsilon \vec{V}) = \nabla \left[ \left( \mu + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k} \right) \nabla \cdot \mathbf{k} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (2\mu_{ef} E_{ij} \cdot E_{ij}) - C_{2\varepsilon}^* \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{Ecuación 111})$$

$$C_{2\varepsilon}^* = C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \frac{\eta}{\eta_0})}{1 + \beta \eta^3} \quad (\text{Ecuación 112})$$

$$\eta = \frac{(2E_{ij} \cdot E_{ij})^{1/2} k}{\varepsilon} \quad (\text{Ecuación 113})$$

Las valores constantes adimensionales para el modelo RNG son:  $C_\mu: 0.0845; \sigma_k = 0.7194; \sigma_\varepsilon = 1.30; C_{1\varepsilon} = 1.42; C_{2\varepsilon} = 1.68; \eta_0 = 4.38; \beta = 0.012$ .

Dentro de la teoría del modelo RNG, para altos números de Reynolds se trabaja con la viscosidad turbulenta de la ecuación 108 con numero  $C_\mu$  como se indicó anteriormente, para bajos números de Reynolds dentro el flujo turbulento se tiene la viscosidad efectiva y se obtiene de la ecuación diferencial para la viscosidad turbulenta [18]:

$$d\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = 1.72 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}} d\hat{v}; C_v \approx 100 \quad (\text{Ecuación 114})$$

$$\hat{v} = \frac{\mu_{ef}}{\mu} \quad (\text{Ecuación 115})$$

#### 4.7. Solucionador de flujo basado en presión

El programa de computo que se emplea en este trabajo se enfoca en el solucionador de flujo basado en presión el cual se usa para flujo incompresibles y el campo de velocidades se obtiene de las ecuaciones de momento y el campo de presión es extraído resolviendo la ecuación de corrección de presión que se obtiene al manipular las ecuaciones de continuidad y de momento.

Este enfoque del solucionador que usa el programa de computo se basa en el método de discretización FVM descrito anteriormente y resuelve las ecuaciones integrales gobernantes de la conservación de masa, momento y energía basándose con el control de volumen técnica que consiste en [18]:

- La división del dominio en volúmenes de control discretos usando una malla computacional
- La integración de las ecuaciones gobernantes en los volúmenes de control individuales para construir ecuaciones algebraicas para las variables

dependientes discretas ("incógnitas") tales como velocidades, presión, temperatura y escalares.

- La linealización de las ecuaciones discretizadas y solución del sistema de ecuaciones lineales resultantes para obtener valores actualizados de las variables dependientes.

El solucionador basado en presión, en el que la restricción de la conservación de masa del campo de velocidad se logra resolviendo una ecuación de corrección de presión. La ecuación de presión se deriva de las ecuaciones de continuidad y de momento de tal manera que el campo de velocidad, corregido por la presión, satisface la continuidad. Dado que las ecuaciones gobernantes no son lineales y están acopladas entre sí, el proceso de solución implica iteraciones en las que todo el conjunto de ecuaciones de control se resuelve repetidamente hasta que la solución converge.

Dentro del solucionador basado en presión hay dos tipos de solución: el algoritmo segregado, el cual resuelve la corrección de la presión y el momento secuencialmente y el algoritmo acoplado, el cual resuelve presión y momento simultáneamente [18] como se puede ilustrar en el esquema general de la figura 4.15.

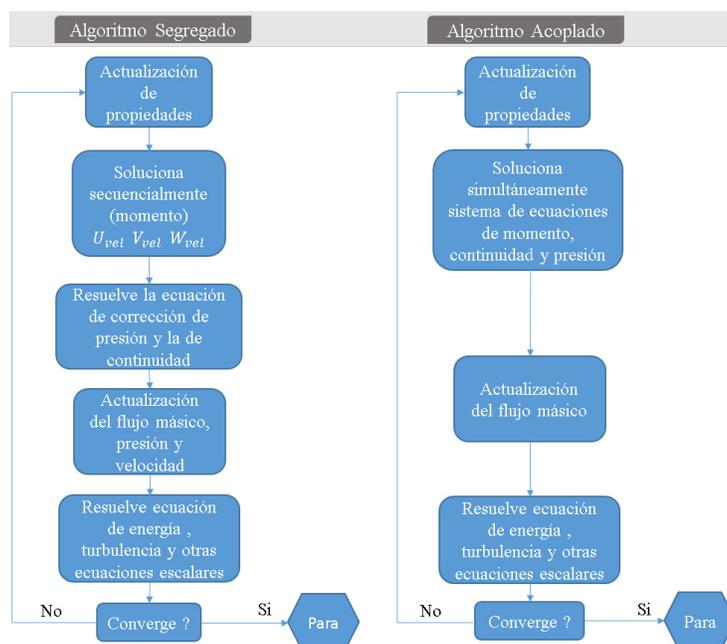


Figura 4. 15: Esquema general de los métodos de solución [18].

### 4.7.1. Acoplamiento presión-velocidad

El solucionador a base de la presión permite resolver el problema del flujo del fluido ya sea de forma segregada o acoplada.

Las ecuaciones de momento pueden ser resueltas solo cuando el campo de presión es dado o de algún modo estimado, a menos que se emplee el campo de presión correcto. El campo de velocidad resultante no satisficará la ecuación de continuidad, y usualmente se desarrolla una ecuación para la presión a través de la manipulación apropiada de la ecuación de continuidad discreta que hace que el campo de velocidad satisfaga la ecuación de continuidad [81].

El programa computacional proporciona la opción de elegir entre cinco algoritmos de acoplamiento de presión-velocidad aquí se hablará solo de uno que es el que se usa en este trabajo.

#### *Método semi-implícito para ecuaciones ligadas a presión*

Por sus siglas en ingles SIMPLE es basado en una serie iterativa de operaciones de adivinar y corregir para resolver las ecuaciones de control. Las componentes de la velocidad se calculan primero a partir de las ecuaciones de momento utilizando un campo de presión calculado. Las presiones y velocidades son las corregidas para satisfacer la continuidad. Este procedimiento continúa hasta que la solución converge [81].

El campo de presión se calcula a partir de una presión supuesta ( $p^*$ ) mas una corrección de ( $p'$ ) como sigue:

$$p = p^* + p' \quad (\text{Ecuación 116})$$

De manera similar se definen las velocidades supuestas en cada una de sus componentes, en el caso de 2D ( $u^*, v^*$ ) y se corrigen a partir de la presión de corrección como sigue [70]:

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j}[p'_{l-1,j} - p'_{l,j}]; \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (\text{Ecuación 117})$$

$$v_{I,J} = v_{I,J}^* + d_{I,j}[p'_{I,j-1} - p'_{I,j}]; \quad d_{i,j} = \frac{A_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{Ecuación 118})$$

La discretización para la ecuación de momento y continuidad con sus subíndices viene del análisis de la malla computacional de la figura 4.16.

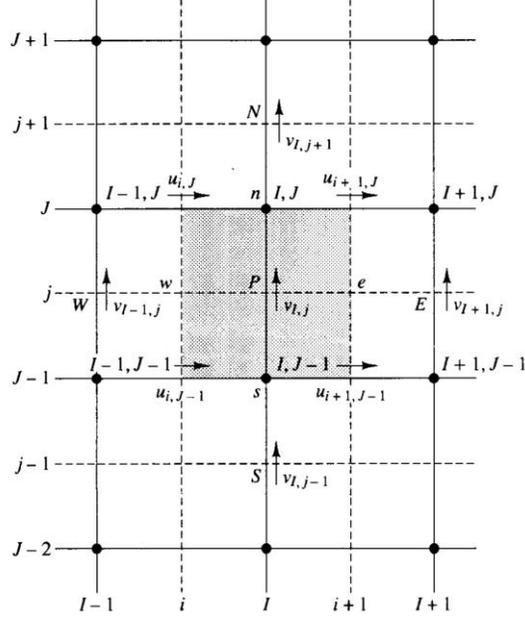


Figura 4. 16: Un volumen de control y sus componentes de velocidad vecinos [70]

La discretización de la ecuación para ( $p'$ ), resumida queda [70, 81] :

$$a_{I,J}p'_{I,J} = a_{I+1,J}p'_{I+1,J} + a_{I-1,J}p'_{I-1,J} + a_{I,J+1}p'_{I,J+1} + a_{I,J-1}p'_{I,J-1} + b'_{I,J}$$

Donde:

$$a_{I,J} = (\rho dA)_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} + (\rho dA)_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j} \quad (\text{Ecuación 119})$$

$$a_{I+1,J} = (\rho dA)_{i+1,J} \quad (\text{Ecuación 120})$$

$$a_{I-1,J} = (\rho dA)_{i,J} \quad (\text{Ecuación 121})$$

$$a_{I,J+1} = (\rho dA)_{I,j+1} \quad (\text{Ecuación 122})$$

$$a_{i,j-1} = (\rho dA)_{I,j} \quad (\text{Ecuación 123})$$

$$b'_{I,J} = (\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1} \quad (\text{Ecuación 124})$$

### 4.7.2. Algoritmo tiempo-avance

Dentro del método de solucionador basado en presión, también se debe tener en cuenta cuando la solución se calcula se encuentra en estado transitorio, por lo cual, la convergencia de cada cálculo de las ecuaciones gobernantes itera hasta que converge dentro de cada paso de tiempo ( $\Delta t$ ) para posteriormente avanzar al siguiente [88].

La selección del tamaño de paso de tiempo debe ser lo suficientemente pequeño para poder resolver las características de la dependencia del tiempo en las ecuaciones y así asegurar alcanzar la convergencia en las máximas iteraciones por cada paso de tiempo.

El orden de la magnitud apropiada para el tamaño de paso de tiempo es estimado de acuerdo a [88]:

$$\Delta t \approx \frac{\textit{Longitud de la Celda mas pequeña}}{\textit{Velocidad Máxima esperada}} \quad (\text{Ecuación 125})$$

Por lo cual el tamaño de paso de tiempo dependerá de las características del flujo, como también en el caso de este trabajo, del tamaño del mallado usado, como de la velocidad de los límites de la malla, debido al uso de una malla deslizante y una malla dinámica.

En el esquema cíclico, todas las ecuaciones se resuelven de manera iterativa, durante un tiempo determinado, hasta que se cumplen los criterios de convergencia. Por lo tanto, el avance de las soluciones en un paso de tiempo normalmente requiere una serie de iteraciones externas como se ilustró anteriormente (figura 4.15), teniendo en cuenta los pasos de tiempo (figura 4.17). Con este esquema iterativo, la no linealidad de las ecuaciones individuales y los acoplamientos entre ecuaciones se tienen en cuenta completamente, eliminando el error de división [18].

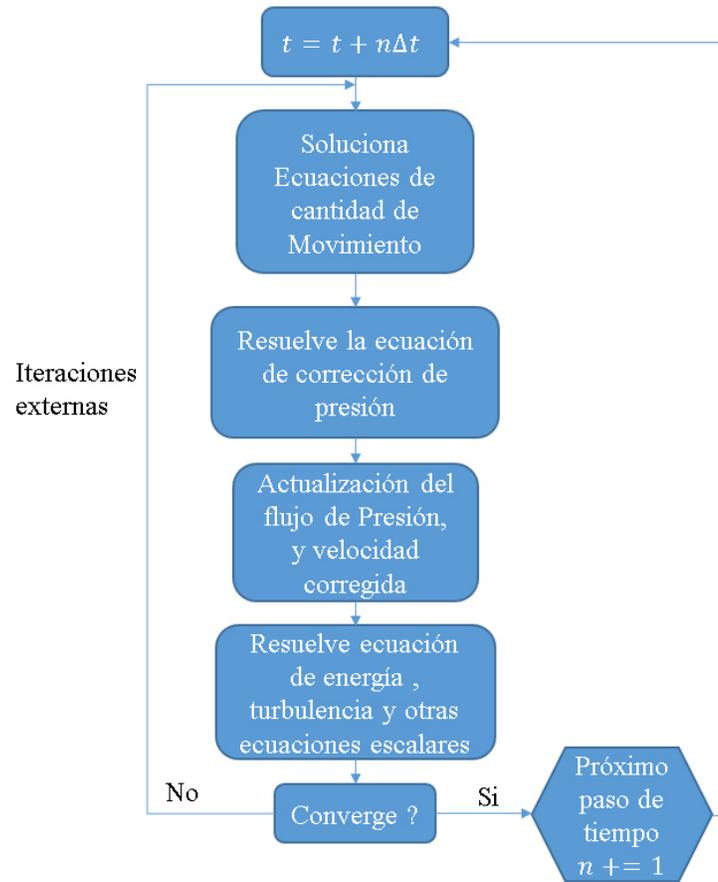


Figura 4. 17: Esquema iterativo del avance de tiempo para el solucionador [18].

# CAPÍTULO V.

## METODOLOGÍA

### 5.1. Introducción

En este capítulo se presenta la metodología a seguir para obtener los resultados de las simulaciones realizadas en este trabajo, el cual se muestra en forma de diagrama de flujo, como se puede ver en la figura 5.1.

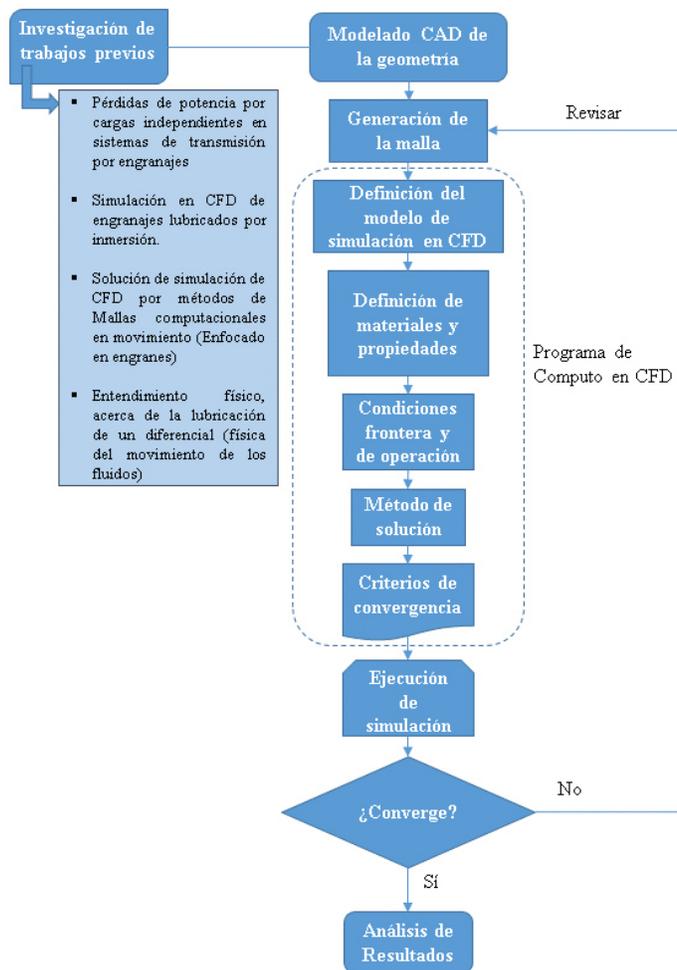


Figura 5. 1: Diagrama de la metodología a seguir en el trabajo.

De acuerdo con el diagrama descrito en la figura 5.1 los procesos que están involucrados inician con una investigación previa alrededor de la simulación a través de CFD de los sistemas de transmisión por engranajes, cuyo mecanismo de lubricación sea por inmersión. Así mismo se realiza la recopilación de información de investigaciones de las pérdidas de potencia por cargas independientes en estos sistemas de engranes desarrollados experimentalmente y a través de la simulación en CFD, y con énfasis en sistema de transmisión con engranes cónicos en espiral e hipoides.

Por otro lado, se desarrolla en base a los trabajos previos cada uno de los pasos descritos en la metodología general. Que va desde la configuración y modelado de la geometría CAD, tipo de discretización de la malla computacional, enfocados en los movimientos de las mallas dinámicas y como gran bloque la selección de los diferentes modelos adecuados e indicados para describir el fenómeno de lubricación en el diferencial.

Esta identificación y selección de los modelos adecuados los maneja el programa de cómputo en CFD, permiten el desarrollo y la solución de las ecuaciones gobernantes de conservación de masa y cantidad de movimiento que rigen el comportamiento de fluido líquido alojado en el diferencial de transmisión y el cual es movido por la acción de la rotación del par de engranes.

A continuación, se describirá cada una de las etapas que se desarrollan en la metodología.

## 5.2. Modelado CAD de la geometría

El Modelo CAD que se utiliza en este trabajo es un diferencial fabricado por una compañía manufacturera local de referencia RS-23-160 usado en transmisiones traseras de camiones pesados similar al que se muestra en la figura 5.2.

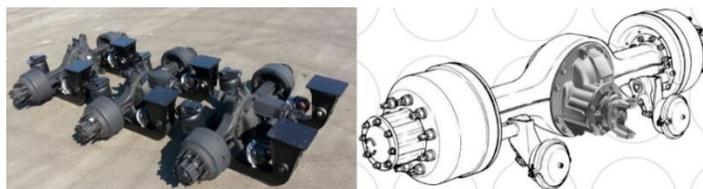


Figura 5. 2: Diferencial de camión pesado [89, 90].

El programa de computo que se utiliza para el modelado CAD es SpaceClaim 19.1 © ANSYS Inc. Y la geometría CAD del sistema diferencial que se simula se muestra en la figura 5.3.

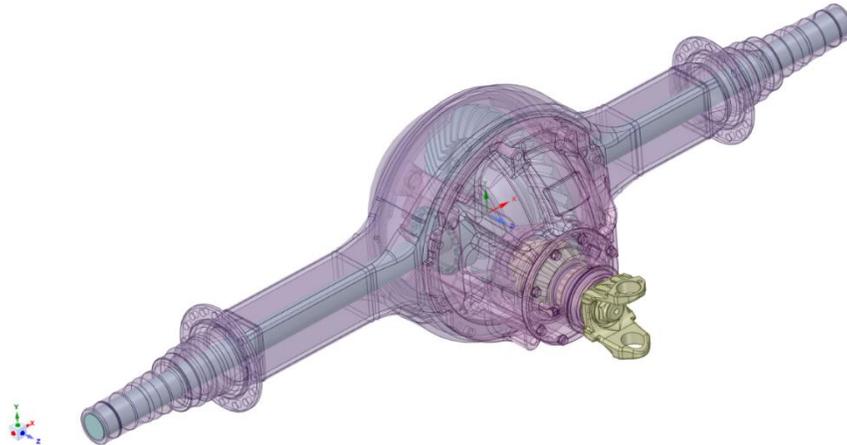


Figura 5. 3: Modelo CAD del diferencial de un eje trasero para camión pesado.

Los componentes principales del sistema son dos engranes hipoidales con ejes situados a  $90^\circ$  (figura 5.4), es decir no son paralelos ni se interceptan, simplemente se cruzan y que se encuentran en el interior de una cavidad cuasi-esférica que se extiende hacia los lados para acomodar las flechas de transmisión. El engrane pequeño conocido como piñón, transmite la fuerza motriz al engrane de mayor tamaño, conocido como corona. De igual manera se tiene unos rodamientos colocados en el soporte tanto del eje del piñón como de la corona.

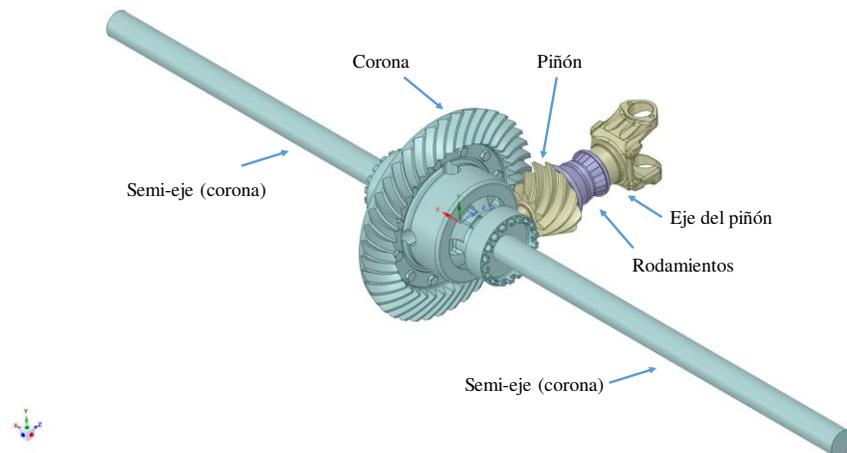


Figura 5. 4: Ejes y engranes hipoides (Piñón-Corona).

Las Dimensiones y especificaciones de fabricación de estos engranes están resumidas en la tabla 1, siguiendo la nomenclatura ya descrita en las figuras 2.9 y 2.10.

Tabla 1: Especificaciones generales del engrane piñón y corona (diferencial).

Parámetro	Símbolo	Piñón	Corona	Unidades
Ángulo del eje	J	90		Grados
Desplazamiento hipóide del piñón	R	44.45		mm
Número de dientes	N	10	41	-
Relación de transmisión	Rt	4.1		-
Diámetro de paso	H/E	138.71	457.17	mm
Ancho de la cara del diente	I	74.96	69.09	mm
Ángulo de paso del engrane	F	19.41	70.15	Grados
Espiral de giro	-	Mano izquierda	Mano derecha	-
Diámetro externo del engrane	Q/A	159.97	460.54	mm
Distancia del cono medio	K	171.19	208.49	mm
Distancia de montaje	M/S	235	102	
Vértice primitivo mas alla del punto de cruce	O	30.46	14.06	mm
Cara vértice mas alla del punto de cruce	U	3.45	19.33	mm
Vértice de la raíz mas alla del punto de cruce	V	51.53	0.102	mm
Profundidad total	h	18.27	18.27	mm

De acuerdo con la relación de transmisión a la que trabaja el diferencial, se asigna como condición inicial una velocidad de rotación constante para el piñón (velocidad de entrada) y una velocidad de rotación constante para la corona (velocidad de salida). En la cavidad contiene aceite para su lubricación por inmersión hasta cierto nivel sin llegar a cubrir todo el piñón y se especificará otras condiciones de operación posteriormente.

En el centro de la corona existe una serie de diferentes engranes, llamados planetarios, que sirven para crear un diferencial del torque transmitido a las flechas laterales, los cuales no se incluyen, al igual que los rodamientos para la simplificación del modelo CAD y su posterior simulación.

### 5.2.1. Desarrollo de la geometría CAD

De acuerdo al objetivo planteado en este trabajo que es el análisis del comportamiento del lubricante dentro del diferencial y poder determinar las pérdidas de potencia por la energía adicional que tiene que imprimir los engranes principales (piñón y corona) para mover el fluido, se debe llegar a tener una simulación eficiente en tiempo y que converja a una solución, para esto, se desarrollan algunas simplificaciones, las cuales

son: sustraer los rodamientos de los ejes, ya que no es el objeto de estudio, remover los planetarios y tomar esta zona como parte de un solo conjunto ligado al eje de la corona como se observa en la figura 5.4.

Parte de las simplificaciones para generar un mallado mejor estructurado es la eliminación de algunos detalles poco relevantes de piezas que no son determinantes en los resultados, tales como: detalles de tuercas y pernos, múltiples caras y/o superficies, ejes muy pequeños, que pueden resultar del cambio de un formato CAD a otro y superficies de redondeo de filos o soldaduras. Por otra parte, como se mencionó anteriormente se elimina toda la parte central correspondiente a los engranes satelitales ya que se ignorará toda esa sección, y se separan las flechas ya que el movimiento de las flechas puede ser ignorado para este caso o bien se puede usar una condición de frontera específica para la superficie de las flechas.

En la figura 5.5 se muestra un ejemplo de algunas de estas simplificaciones geométricas.

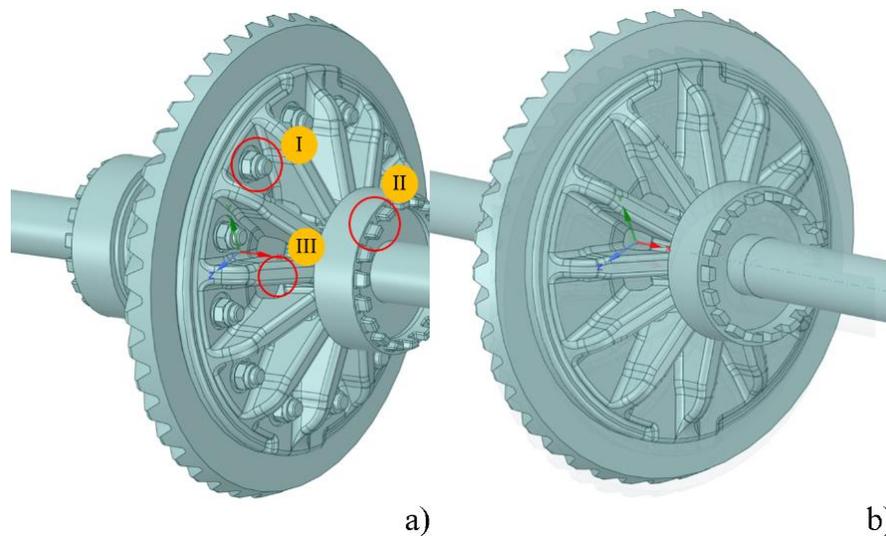


Figura 5. 5: Simplificación de la geometría a) Detalles; b) Sin detalles.

En la figura 5.5-a se muestran algunas simplificaciones geométricas como (I) eliminación de los pernos y tuercas que están entre los soportes de la corona; (II) se eliminan redondeos; (III), se taparon los orificios de la corona que conducen al engrane de satélites y ya en la figura 5.5-b se puede ver la geometría más simplificada.

En la Figura 5.6. se muestra otras de las simplificaciones de los soportes internos donde se aloja el eje de la corona con la carcasa del diferencial. Aquí se elimina la superficie muy pequeña que se genera por una ligera separación entre la tuerca y la base, ya que el flujo en esa separación es irrelevante.

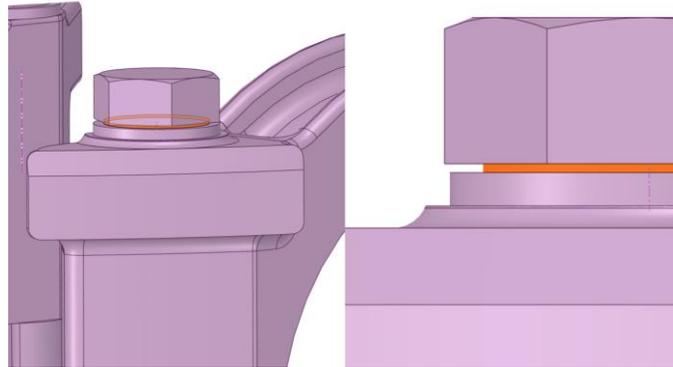


Figura 5. 6: Soporte o camisa del eje de la corona dentro del diferencial.

Otro aspecto importante para la verificación de la geometría CAD, es que se considera el montaje de los engranes fijos. Esto permite que el dominio del fluido siempre sea continuo y las superficies entre los dientes del piñón y la corona nunca se toquen. En consecuencia, se hizo girar cada engrane 10 grados sobre su eje hasta completar una revolución completa de la corona y verificar que en cada posición no existiera contacto entre superficies como se muestra en la figura 5.7.

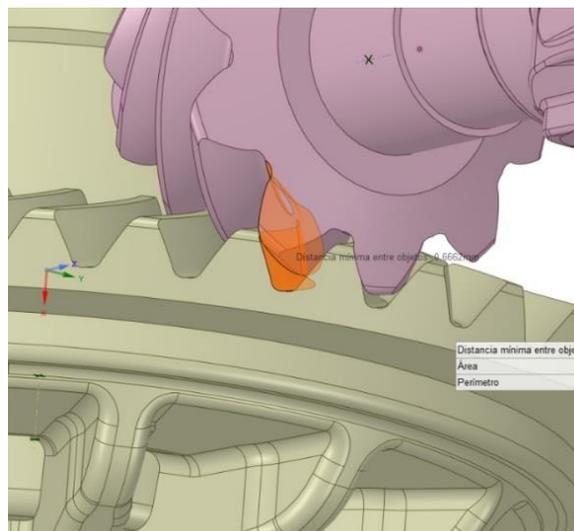


Figura 5. 7: Rotación de los engranes y verificación de no contacto.

### 5.2.2. Delimitación del dominio

Como el objetivo de estudio es el comportamiento de los fluidos que hay dentro del diferencial (aceite-aire), el dominio a trabajar es el volumen contenido dentro del diferencial, es decir el contra volumen de la parte solida del diferencial (engranes, ejes y carcaza). Se desarrollaron algunas modificaciones geométricas para los dos enfoques de trabajo hechos en el movimiento de las mallas, los cuales son los siguientes:

- Modelo CAD para malla dinámica
- Modelo CAD para malla deslizante:
  - Posición horizontal
  - Posición inclinada

La extracción del dominio originalmente quedaría como se muestra en la figura 5.8

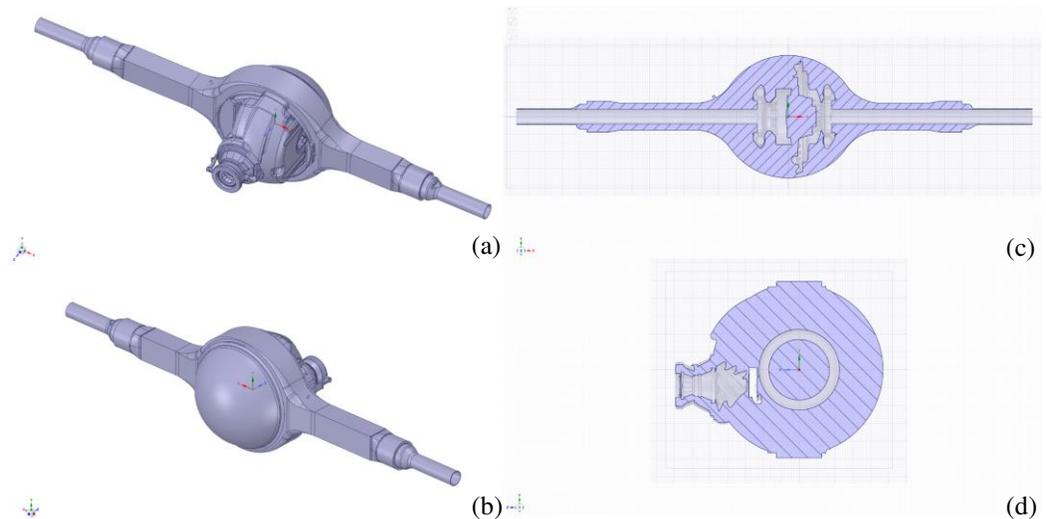


Figura 5. 8: Dominio del volumen de fluido dentro del diferencial, c) Corte plano x-y, d) Corte plano y-z.

En la figura 5.8 se puede ver las diferentes vistas, parte posterior (figura 5.8-a), frontal (figura 5.8-b), corte de sección transversal sobre los semi-ejes de la corona (figura 5.8-c) y corte de sección transversal sobre el eje del piñón (figura 5.8-d). Este dominio

será designado como fluido multifase ya que hasta cierto nivel de llenado el dominio de manera estática es aceite y la otra parte es aire.

La parte del acoplamiento entre el piñón y la corona es decir la zona de engranaje se puede observar en la figura 5.9, para este modelo CAD, la distancia más corta entre superficies es de 0.567 mm.

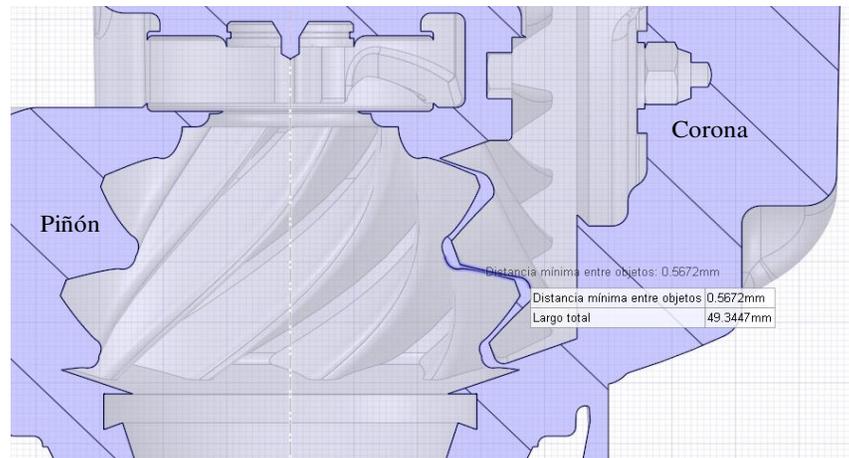


Figura 5. 9: Zona de engranaje entre el piñón y la corona.

#### *Modelo CAD para Malla Dinámica*

El problema con la simulación del engarce entre el piñón y la corona es el espacio extremadamente estrecho entre los dientes de los engranes en esa zona. Como el programa de computo en CFD no permite el contacto entre superficies (ya que el dominio discretizado debe ser continuo), sería necesario mallar la zona de contacto con celdas extremadamente pequeñas, lo cual es impráctico. Una forma de evitar este problema y al mismo tiempo reducir el número total de celdas es modificar el perfil de los dientes. Este método, conocido como “movimiento de flancos” (flank-moving en inglés) [91] y más desarrollado para un diferencial de engranes hipoides [92], consiste en “girar” las superficies laterales de los dientes hacia el centro de estos, como se ilustra en la figura 5.10.

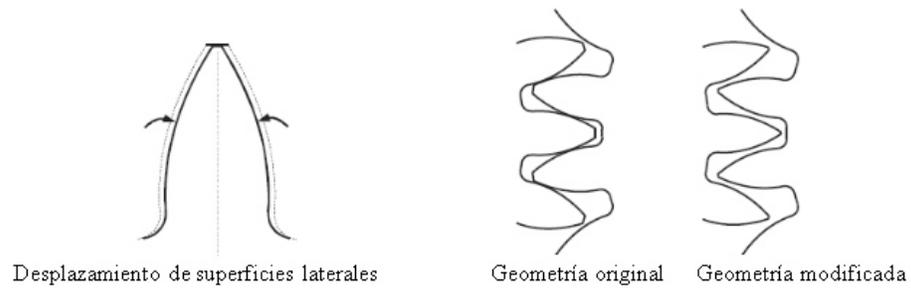


Figura 5. 10: Método de modelado de engranes, movimiento de flancos [91].

Este tipo de modificaciones geométricas se realiza para la corona reduciendo el perfil del diente en los flancos 0.5 mm quedando como se puede observar en la figura 5.11.

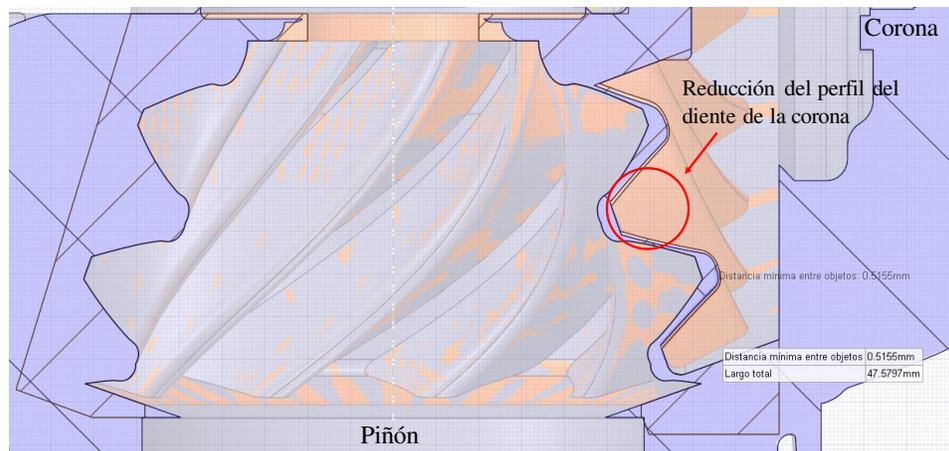


Figura 5. 11: Reducción del perfil del diente de la corona.

Al reducir sustancialmente los flancos de los dientes de la corona, permite un mayor espacio entre los flancos de dientes del piñón de tal manera que al momento del mallado computacional se puedan acomodar elementos de celdas de mayor tamaño y así reducir el esfuerzo de cálculo computacional en el programa.

El espacio (gap en inglés) entre dientes del piñón y la corona después de reducir los flancos de la corona quedo de 1.293 mm como se puede observar en la figura 5.12.

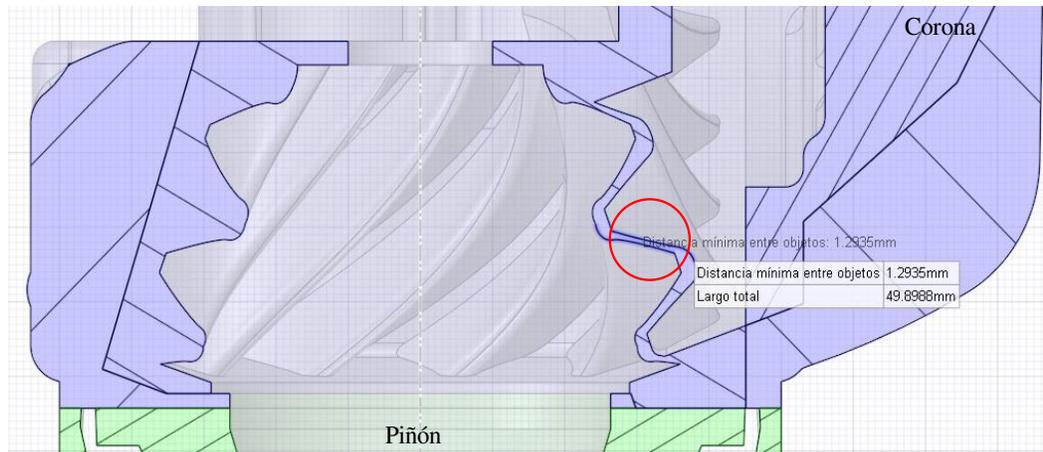


Figura 5. 12: Espacio entre el piñón y la corona en la zona de acoplamiento.

En la Figura 5.13 se muestra el detalle del volumen de la caja del diferencial. La zona verde que incluye al piñón es la que tendrá el mallado dinámico. La zona verde que forma la parte posterior de la corona se definirá como malla deslizante. El resto de los volúmenes serán fijos. Con esto se logra que solo haya remallado en la zona donde se requiere. De igual manera se han hecho algunas simplificaciones de eliminación de redondeos y uniones de superficies para facilitar su posterior mallado.

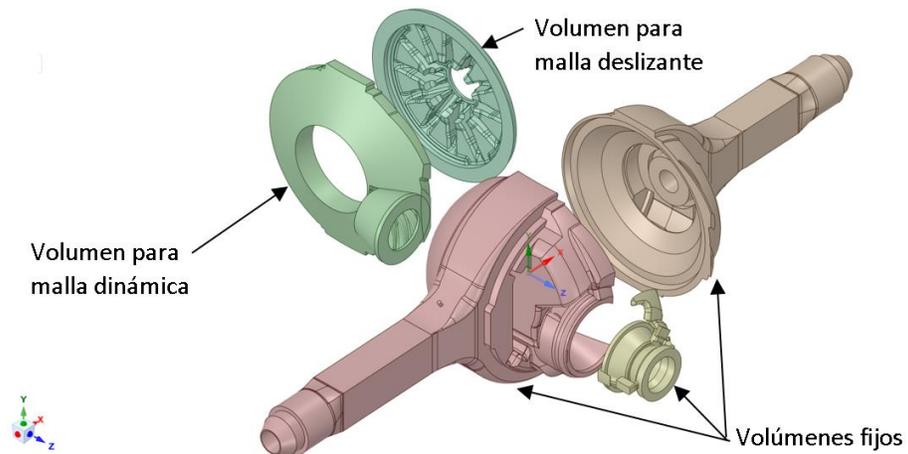


Figura 5. 13: Geometría final para la simulación con mallado dinámico.

### *Modelo CAD para Malla Deslizante*

Otro tipo de modificación considerado en este trabajo para estudiar el fenómeno de agitación o batido del lubricante dentro del diferencial fue desarrollar una geometría

menos compleja que no requiera de un mallado dinámico, en donde la malla computacional en ciertas zonas del dominio deba cambiar o deformarse en el tiempo. Esto se logra a través de tener ciertas divisiones en el modelo CAD que permitan al momento de asignar una malla computacional que estas se muevan con respecto a otras, pero sin necesidad de cambiar o modificarse en el tiempo como se explica en el capítulo 4 (mallas deslizantes)

Por otra parte, se consideró investigar otra condición de operación, la cual consiste en inclinar a cierto ángulo de pendiente todo el sistema diferencial (con respecto al eje del piñón), condición en la que pudiera encontrarse el vehículo cuando está subiendo o bajando una pendiente, y simular el comportamiento del flujo del aceite y pérdidas de potencia que se generan. De esta manera compararlo con la posición estándar horizontal o de ángulo de cero grados.

Entonces se requiere a partir del modelo CAD, modificar el sistema de Coordenados global e inclinar el sistema manteniendo dimensiones y geometría del diferencial.

#### *CAD para malla deslizante posición horizontal*

Para poder hacer una simulación con mallado deslizante, se realiza una separación entre la corona y el piñón, de modo que se puedan generar sólidos de revolución. En la figura 5.14 se muestra la nueva posición del piñón (color amarillo), trasladado su eje de rotación 17.55 mm en “x” negativo respecto a la original. Esto debido a que las dos superficies de revolución que se deben generar (una para el piñón y una para la corona) deben tener al menos entre ellas una separación mínima la cual permita que el dominio que va a estar estático sea continuo y al momento de mallar, no se te tenga que introducir elementos de malla muy pequeños (menores a 0.5 mm de longitud). que pueden ocasionar mayor tiempo de cálculo, diferencias de densidad de malla grandes que afectar la convergencia en la solución.

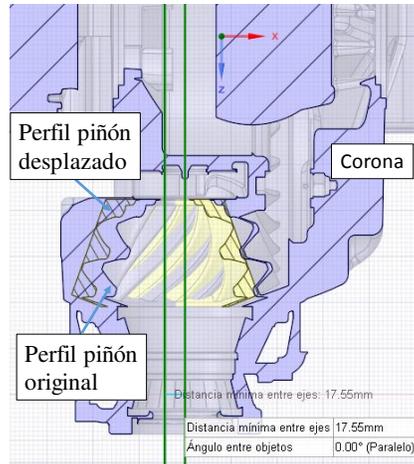


Figura 5. 14: Traslado del piñón para el desacoplamiento con la corona.

Con los engranes desengarzados, se pueden generar: a) el volumen principal que quedará estático; b) el , volumen para la zona móvil de la corona; y c) el volumen para la zona móvil del piñón, como se muestra en la figura 5.15. Los volúmenes deberán estar desconectados ya sea que se tengan en componentes separados o bien que se tenga la opción de no compartir topología.

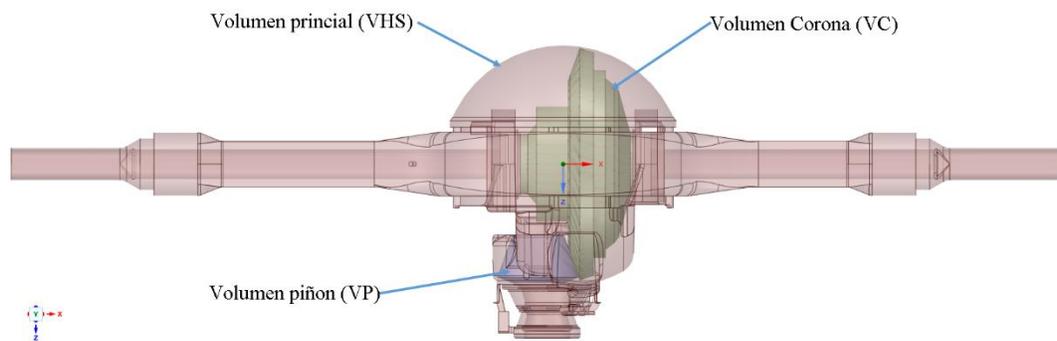


Figura 5. 15: Definición de volúmenes para simulación con malla deslizando.

Al poder generarse volúmenes de revolución para piñón y la corona respectivamente, permite poder aplicar el método de malla deslizando. La separación mínima entre ambos volúmenes de revolución queda de 0.4685 mm como se puede ilustrar en la figura 5.16.



Figura 5. 16: Distancia mínima entre los volúmenes de revolución.

### *CAD para malla deslizante posición inclinado*

Como se mencionó previamente otra condición de operación del vehículo el cual se trabaja el diferencial, es cuando este no se encuentra en posición horizontal si no en una posición inclinada, se trabaja para esta simulación con el mismo modelo CAD y con malla deslizante, la diferencia radica en que se inclina 15 grados con respecto al eje de rotación del piñón y manteniendo fijo el sistema de coordenadas cartesianas globales.

Este valor de inclinación de considero debido a que estos diferenciales están acoplados a caminos pesados de transportes cuyos vehículos transitan por carreteras que encontraran pendientes de hasta 15 grados de inclinación por ende se desea investigar su repercusión en el flujo del aceite y en las pérdidas de potencia. En la figura 5.17 se puede observar la rotación que se hizo el modelo CAD para su inclinación.

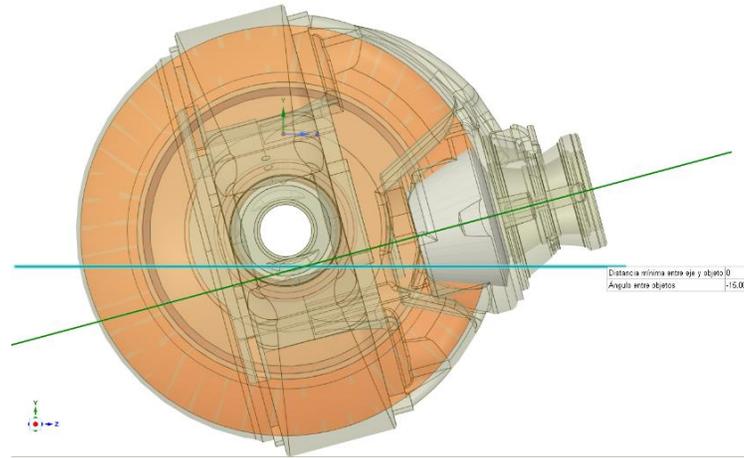


Figura 5. 17: Geometría final para simulación, condición inclinada 15°.

### 5.3. Generación de la malla

La malla computacional es la descripción del dominio espacial en cual se realiza la simulación numérica, en donde en algunos contornos dentro del dominio de flujo y regiones de interés se emplea una resolución mayor. Para este mallado el programa computacional que se utiliza es Meshing 19.1 © ANSYS Inc. En el cual se produce una malla tetraédrica que permite resolver el campo de flujo.

Cada uno de los modelos CAD descrito en la sección anterior fueron importados en el formato propio del programa de computo SpaceClaim (“.scdoc”) y abiertos en el programa de Meshing, el cual importa la todas superficies, bordes y volúmenes para la creación de la malla que llena el dominio.

En general las mallas para una simulación de dinámica de fluidos deben cumplir con ciertos criterios de calidad, entre los cuales, el más importante para una malla de celdas tetraédricas, es la *oblicuidad o Skewness* en inglés y nos determina que tan cerca del ideal (es decir equilátero o equiangular), esta una cara o una celda como se muestra en la figura 5.18 [93].

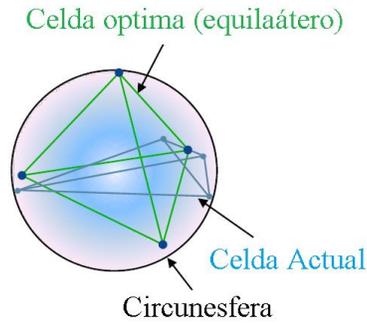


Figura 5. 18: Calidad de una esfera, oblicuidad [93].

La oblicuidad se puede determinar de dos maneras [93]:

1. Desviación de volumen equilátero.

$$Oblicuidad = \frac{\text{Tamaño de celda optima} - \text{Tamaño de celda}}{\text{Tamaño de celda optima}} \quad (\text{Ecuación 126})$$

2. Desviación del ángulo normalizado

$$Oblicuidad = \max \left[ \frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{min}}{\theta_e} \right] \quad (\text{Ecuación 127})$$

Donde  $\theta_e$  es la equiangular cara/celda. ( $60^\circ$  para un triángulo y  $90^\circ$  para un cuadrado).

Para la calidad de malla el programa de computo en CFD recomienda que la máxima oblicuidad para todas las celdas del dominio sea menor a 0.95. ya que el mallado está íntimamente relacionado con los modelos de solución que serán utilizados. El espectro de la calidad de la malla en su oblicuidad se puede ver en la figura 5.19.

Excelente	Muy bueno	Bueno	Aceptable	Malo	No Aceptable
0-0.25	0.25-0.50	0.50-0.80	0.80-0.94	0.95-0.97	0.98-1.00

Figura 5. 19: Espectro de oblicuidad para la calidad de la malla [93].

Por otra parte, también existe la limitante en el número de celdas (o volúmenes de control) ya que un número muy grande de celdas hace impráctica la simulación por el tiempo de ejecución.

### 5.3.1. Mallado para simulación con malla dinámica

Los elementos que se utiliza en el modelo son una malla no estructurada con tetraedros del tipo tet4, como se observa en la figura 5.20

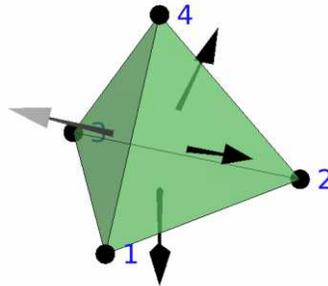


Figura 5. 20: Tetraedro lineal de 4 nodos [94].

Este tipo es el recomendado para el tipo de simulaciones de engranes hipoides [92], y en la caso de simulación de cajas de engranes paralelos [51, 95] ,donde hay una zona de acoplamiento muy estrecho y los tetraedros se acomodan mejor en estas zonas en comparación a los elementos hexaédricos, es decir mayor facilidad de mallado en geometrías completas.

Usando un refinamiento local cerca de las paredes de los engranes se logra discretizar el modelo numérico del dominio del fluido y logrando un equilibrio entre la calidad de la malla, los resultados numéricos y el tiempo de simulación.

Se malla el dominio con un total de 2,127,590 elementos tetraédricos y 424,751 nodos, con una oblicuidad de menor a 0.94, y en todo el dominio en general un tamaño de elemento de 7.5 mm de orden lineal, como se ilustra en la figura 5.21.



Figura 5. 21: Mallado para simulación con malla dinámica.

Adicionalmente, se malla la zona de los dientes de la corona y del piñón con el mismo tamaño de celdas que se usan para el engraxe, para lo cual resulta conveniente asignar un tamaño de celda específico al volumen circundando los engranes, como se muestra en la figura 5.22 con un tamaño de celda de 3.0 mm, que es un poco mayor a la distancia entre los dientes en el engraxe que resultó de haber aplicado el método de movimiento de flancos.

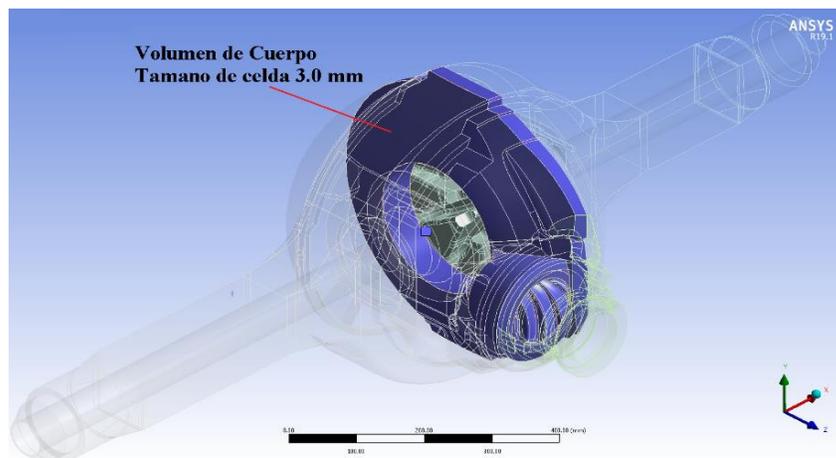


Figura 5. 22: Tamaño de elemento usado para la zona de malla dinámica.

### 5.3.2. Mallado para simulación con malla deslizante

Similar a lo que se desarrolla para el mallado del modelo con malla dinámica, en el modelo para malla deslizante se utiliza una malla no estructurada con tetraedros del tipo

tet4 con un total de 4,042,128 elementos y 846,732 nodos, con una oblicuidad menor a 0.94, y en todo el dominio en general un tamaño de elemento global de 12 mm de orden lineal, como se ilustra en la figura 5.23.

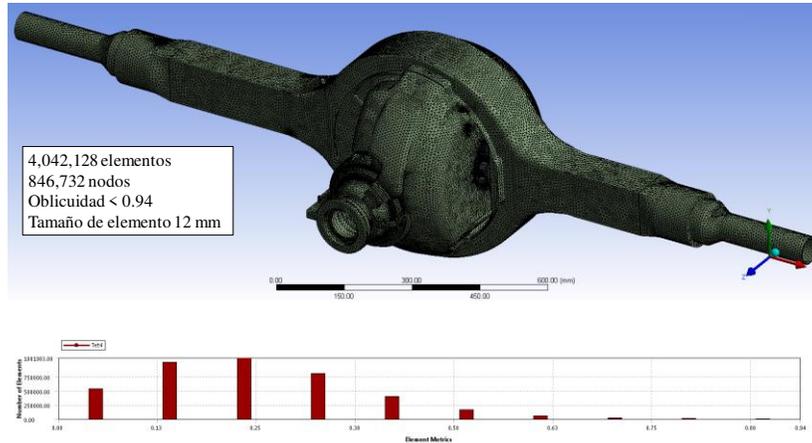


Figura 5. 23: Mallado para simulación con malla deslizante.

Adicionalmente, los volúmenes de revolución de la corona y del piñón se les asigna el mismo tamaño de celdas de 5.0 mm, de igual manera se les aplica en cada superficie de manera independiente un control de tamaño de caras de 2.0 mm, para hacer un tamaño más pequeño y disminuir el número de celdas con oblicuidad cercana de 0.94.

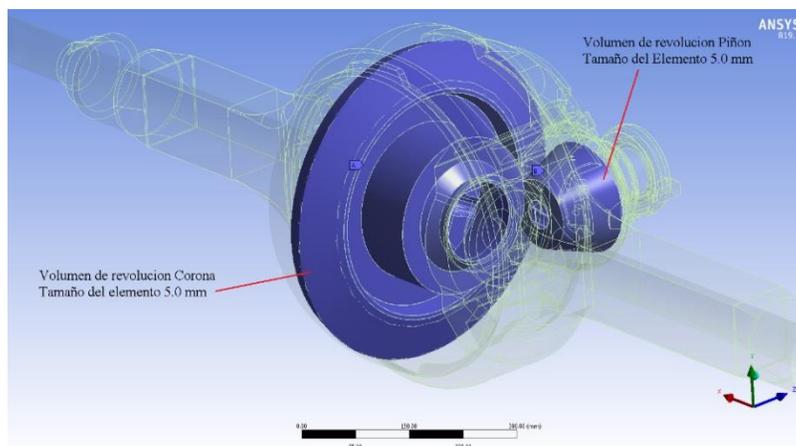


Figura 5. 24: Tamaño de elemento usado para la zona de malla deslizante.

Igual que en la construcción del modelo de malla dinámica, se revisa en cada iteración de malla el valor de oblicuidad, donde para ambos casos (deslizante y dinámico),

se le asigna un coeficiente de deformación máximo de 0.94, esto debido a que algunas zonas como la zona de acoplamiento, superficies, caras y redondeos pequeños, dificultan la acomodación de tamaños de celdas globales, haciendo la necesidad de asignar algunos parámetros de control en ciertas zonas específicas, como tamaño de caras y esferas de influencia con tamaños que van desde 1 mm hasta 5 mm.

Debido a que el tamaño de la celda y la calidad de las celdas están muy relacionados a las condiciones de operación a simular, se observó que, a un valor alto de giro de revoluciones por minutos del piñón, 2000 rpm, no convergía la solución. Por lo que se refino la malla para disminuir el porcentaje de no convergencia, incrementando el tiempo de análisis, también conocido como costo computacional.

El número de elemento tetraédricos fue de 6,390,092 con 1,347,739 nodos con un máximo de oblicuidad de 0.91, como se puede ver en la figura 5.25.

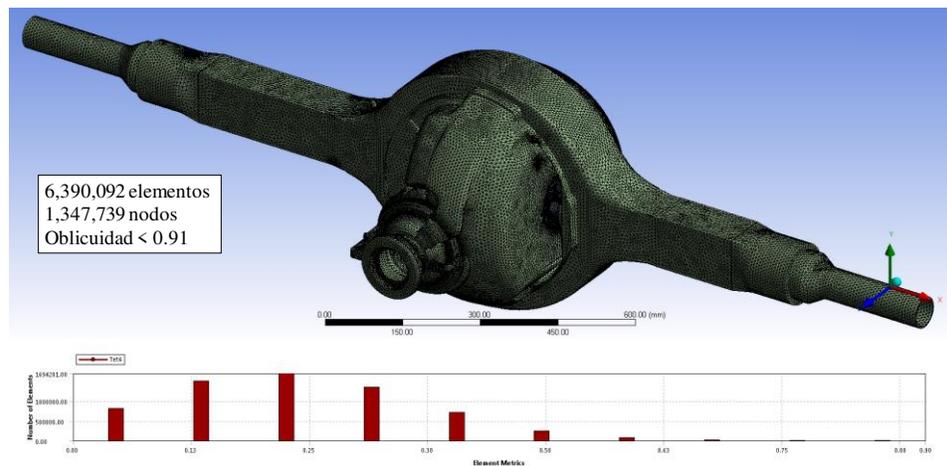


Figura 5. 25: Malla para simulación con velocidad de 2000 rpm del piñón.

Controladores y parámetros de control que fueron asignados al modelo anterior se aplica para este modelo con la diferencia que en algunos se les disminuyo el tamaño de elemento (en esfera de influencia) o cara según aplique.

En el caso del modelo CAD del diferencial inclinado, al cambiar su orientación el modelo con respecto al sistema de coordenada cartesiana global, la secuencia de como el programa de Meshing malla y asigna cada una de las celdas con diferentes tamaños varía,

por lo cual se revisa y se controlan los parámetros bajo el criterio de máxima oblicuidad ( $<0.94$ ), como se puede ver en la figura 5.26.

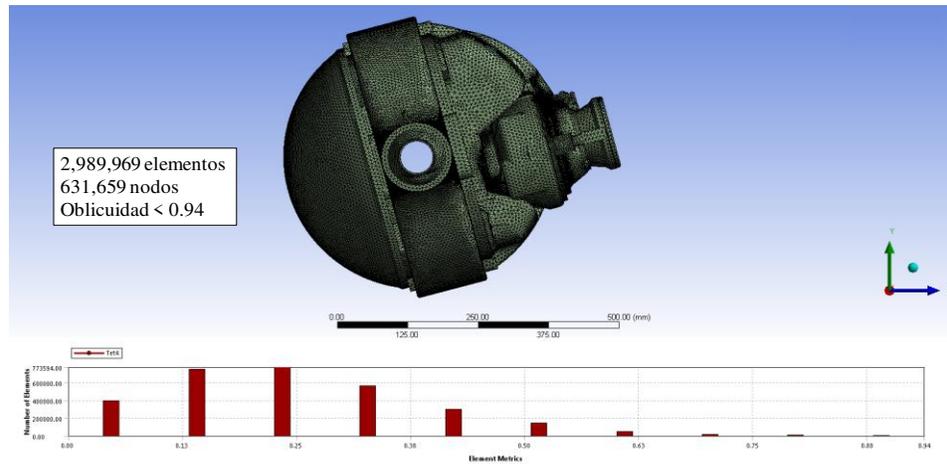


Figura 5. 26: Malla para diferencial inclinado.

Como los demás casos de los modelos anteriores se utiliza una malla no estructurada con tetraedros del tipo tet4 con un total de 2,989,969 elementos y 631,659 nodos, con una oblicuidad de menor a 0.94, y en todo el dominio en general, un tamaño de elemento global de 12 mm de orden lineal, como se ilustra en la figura 5.26.

Para finalizar esta sección se debe tener en cuenta que como cualquier modelo CAD que se proceda a mallar, para posteriormente ser programado y ejecutado en un programa de computo en CFD, se debe tener en cuenta que es un proceso iterativo, de limpieza de la geometría en el programa CAD, configuración de parámetros y control para mallar, verificación del tipo de elemento adecuado y calidad de celdas en el dominio, y ejecución en el programa en CFD, si no converge dentro de las múltiples causas estaría la revisión nuevamente de la geometría y luego el requerimiento de ser necesario de una malla más fina o dicho de otro modo de elementos menos deformado y de menor tamaño para capturar en mayor detalle el fenómeno a simular.

Este esquema se puede observar en la figura 5.27 donde se indica los pasos y acciones básicas a tener en cuenta en el proceso para simular el dominio del fluido extraído del diferencial CAD en un programa de computo de dinámica de fluidos computacional o CFD.

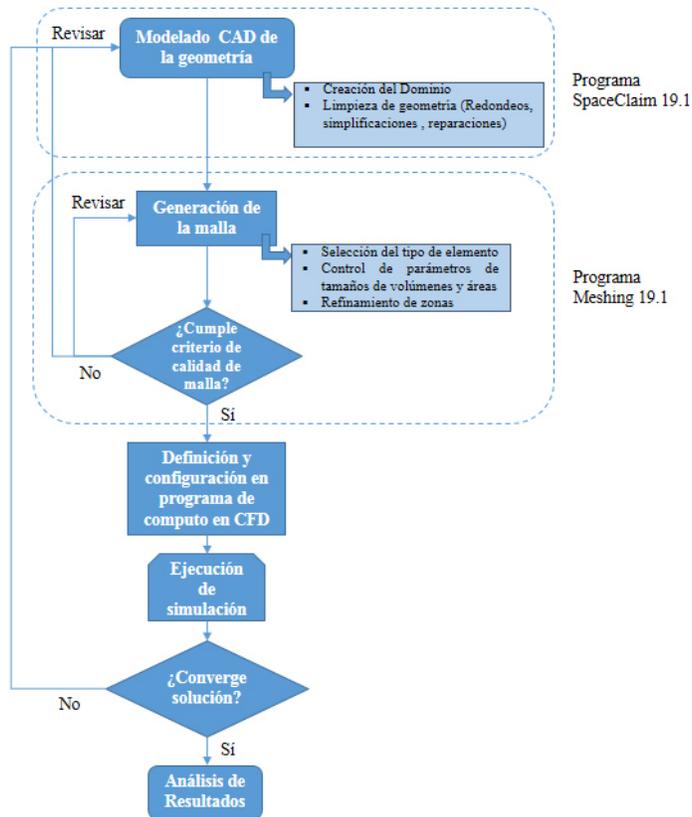


Figura 5. 27: Metodología iterativa de geometría y mallado.

## 5.4. Definición del modelo de simulación en CFD

El campo de flujo de cada uno de los modelos de simulación se resuelve utilizando Fluent 19.1 © ANSYS Inc. Esta sección se utilizarán los valores numéricos de la solución y se justificarán los modelos elegidos. También se proporcionará la estrategia de solución formulada a lo largo de este trabajo.

El requisito de una simulación de CFD es poder extraer información significativa y precisa de un problema de flujo de fluido. La información toma dos formas: datos numéricos y representación gráfica de flujo. La obtención de esta información requiere mucho tiempo y es computacionalmente costosa debido a la complejidad numérica del análisis del movimiento del fluido. En este trabajo, se emplea un método de volumen finito, mediante el cual un dominio de flujo completo se divide en una serie de volúmenes finitos en los que las ecuaciones que gobiernan se integran por separado.

#### **5.4.1. Generalidades del diferencial mecánico a simular y las ecuaciones a resolver**

El diferencial mecánico como ya se ha mencionado anteriormente está compuesto por dos engranes principales llamados piñón (diámetro menor) y corona (diámetro mayor), los cuales están alojados en una carcasa o recinto de forma semiesférica. Los engranes son de configuración hipoides y esta montados de tal manera que se tiene un espacio entre los engranes en todo el giro de 360 grados de la corona, como del piñón. De esta manera se garantiza el flujo continuo del lubricante y la habilitación del cálculo de las ecuaciones que caracterizan el movimiento del fluido por parte del programa de computo.

El dominio de flujo se simula bajo diferentes velocidades constantes del piñón y la corona, con su respectiva relación de transmisión de 4.1, simulando en estado transitorio es decir durante un tiempo determinado y que se ilustrara posteriormente.

Dentro del recinto se tiene un lubricante el cual es aceite, con densidad y viscosidad constante y que se tiene hasta cierto nivel sin alcanzar a cubrir todo el piñón. Por ende, el otro fluido presente es el aire de igual manera con viscosidad y densidad constante. El cual se detalla más adelante.

Se considera un flujo isotérmico (una sola temperatura), con dos fluidos (aceite y aire), por lo que, se habla de una simulación con modelo multifase. Son fluidos Newtonianos y el aceite es incompresible. También debido a la naturaleza del fenómeno rotativo que sufre el aceite a la acción de los engranes se considera turbulento.

Dicho esto, los principios que se trabaja para la solución y caracterización del movimiento de fluido son la conservación de masa con la ecuación de continuidad (ecuación 47) y conservación de cantidad de movimiento o momento con las ecuaciones por componentes de Navier-Stokes (ecuaciones 44, 45 y 46). No se calcula la ecuación de la energía debido a que el objetivo de este trabajo es saber las fuerzas y momentos-fuerzas que hay sobre superficie inmediatamente adherida a los engranes y así calcular la potencia perdida a causa de tener que mover un fluido.

### 5.4.2. Modelo multifase VOF.

Para este tipo de flujo, donde la separación entre las fases está bien delimitada se utiliza el modelo Euleriano-Euleriano VOF. El cual se ha sido usado en diferentes investigaciones de pérdidas de potencia como: simulación de engranajes paralelos de dientes rectos [49, 96–98], en reductores de velocidad planetarios [84, 99], pérdidas por agitación del lubricante en cajas de transmisiones manuales [100] y estimación de la salpicadura en un diferencial de engranes hipoides [92].

La detección de la barrera de fase y el flujo sobre la cara de una celda se realiza mediante el método de reconstrucción geométrica. Y se selecciona como fase primaria al aire y como fase secundaria el aceite. El rastreo de la barrera de fase entre el aceite y el aire se resuelve con la ecuación de transporte de relación de volumen de fase que se muestra a continuación. El enfoque de reconstrucción geométrica se aplica para la detección de la barrera de fase y el cálculo de los flujos a través de las caras de control de volumen.

$$\varphi_{aceite} + \varphi_{aire} = 1 \quad (\text{Ecuación 128})$$

Modificando la ecuación 75 para la fase del aceite se tiene:

$$\nabla \cdot (\varphi_{aceite} \rho_{aceite} \vec{V}_f) + \frac{\partial(\varphi_{aceite} \rho_{aceite})}{\partial t} = S_{\varphi_{aceite}} \quad (\text{Ecuación 129})$$

Y las propiedades de la mezcla en cada celda de volumen son calculadas para la densidad, como se muestra en la ecuación 77 y análogamente para la viscosidad quedaría:

$$\mu = \mu_{aceite} \varphi_{aceite} - \mu_{aire} (1 - \varphi_{aceite}) \quad (\text{Ecuación 130})$$

El modelo VOF es compatible con los modelos de movimiento de malla (deslizante y dinámico), y se utiliza la formulación implícita, principalmente por la intención de buscar resolver el caso a menores tiempos de cálculo, permitiendo usar pasos de tiempo mayores a diferencia del explícito y no es tan restrictivo en cuanto a calidad de malla [101,102], además, es interesante en mayor medida obtener resultados al estabilizarse la solución sacrificando algún grado de exactitud al arranque de operación del diferencial.

Respecto a la modelación de la interfase, se utiliza la opción de afilado/Disperso (Sharp/Disperse en inglés), por la naturaleza de la simulación, es decir, regiones con acumulación de una fase y dispersión de esta, en otras regiones del dominio.

### 5.4.3. Modelo de turbulencia.

Los flujos modelados dentro de este trabajo son todos flujos de alta velocidad, energéticos y caóticos con altos números de Reynolds. El resultado del cálculo del número de Reynolds a partir de la ecuación 10, nos basamos de los datos de densidad y viscosidad del aceite a 100°C [103, 104], dimensiones como el diámetro del engrane mayor (corona) y velocidad más baja de operación asignada (120 rpm) usado en los diferentes casos de simulación.

Los datos usados y el resultado del número de Reynolds encontrado se pueden observar en la tabla 2.

Tabla 2: Datos usados para el cálculo del número de Reynolds

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Densidad del aceite	$\rho$	792.8	Kg/m <sup>3</sup>
viscosidad del aceite	$\mu$	0.0206128	Kg/m-s
Radio externo de la corona	r	0.2303	m
Longitud característica (Radio corona)	L	0.2303	m
Velocidad angular mínima	$\omega$	12.77	rad/s
Velocidad tangencial ( $\omega*r$ )	V	2.9405	m/s
Numero de Reynolds	Re	26043.08	-

Debido a la naturaleza del sistema (movimiento rotacional), y el número de Reynolds calculado, el cual está muy por encima del Reynolds crítico para flujos internos ( $Re_{cr} \geq 2300$ ), el flujo se considera turbulento y se puede utilizar el modelo  $k - \varepsilon$ , modelo Realizable [105] o modelo RNG. En este caso se utilizó el modelo RNG porque se afirma que este ofrece una precisión mejorada en los flujos rotativos [47, 92, 95, 97, 106]. Por tal motivo, este modelo de turbulencia se selecciona para realizar las simulaciones mostrando un buen compromiso entre el tiempo de cálculo, la calidad del resultado y la estabilidad. También la resolución de la interfase entre el aceite y el aire, y las pérdidas de potencia se pueden capturar bien con este modelo de turbulencia.

En cuanto a las condiciones de frontera con los sólidos, el tratamiento de pared que se utiliza es el de funciones de pared estándar, ya que en las superficies del fluido cercanas a los engranes, no se usó ningún mallado de tipo hexaedros o prismas cerca de las fronteras solidas del modelo (inflación o inflation en inglés), ya que nuestro objetivo no es saber a detalle el comportamiento de la capa limite en las superficies de los dientes.

## 5.5. Definicion de materiales y propiedades

Como se menciona previamente a partir del modelo CAD de las partes solidas del diferencial, se extrajo el volumen, de tal forma que se trabaja con el dominio del fluido, en consecuencia, no se incluyen partes solidas dentro del programa computacional de Fluent, ni materiales de los engranes o de la carcasa del diferencial, ya que no se necesitan para el objetivo de este trabajo.

Por otra parte, el lubricante usado para esta simulación es de acuerdo al recomendado por el fabricante, aceite para engranes hipoides multigrado GL-5 85W-140 [90, 107] y sus propiedades se encuentran en la tabla 3.

Tabla 3: Propiedades de lubricante [103, 104].

Parámetro	Valor	Unidades
Densidad @15°C (ASTM D1298)	905	kg/m <sup>3</sup>
Densidad @20°C (ASTM D1298)	898.4	kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad @100°C (ASTM-D-445)	26	mm <sup>2</sup> /s
Viscosidad @40°C (ASTM-D-445)	365	mm <sup>2</sup> /s
Índice de viscosidad (ASTM D2270)	95	-
Temperatura de escurrimiento (ASTM D97)	-12	°C
Punto de inflamación (ASTM D92)	215	°C

De acuerdo con la norma ASTM D341-03 [108] se sabe que para lubricantes derivados del petróleo la densidad varía en forma lineal con el cambio de temperatura y que la viscosidad lo hace en forma logarítmica también con respecto al cambio de la temperatura. Por lo anterior, se sustituyen los respetivos valores de extrapolación como indica la norma y se obtienen las siguientes graficas de viscosidad dinámica (figura 5.28) y densidad (figura 5.29) como se muestran a continuación:

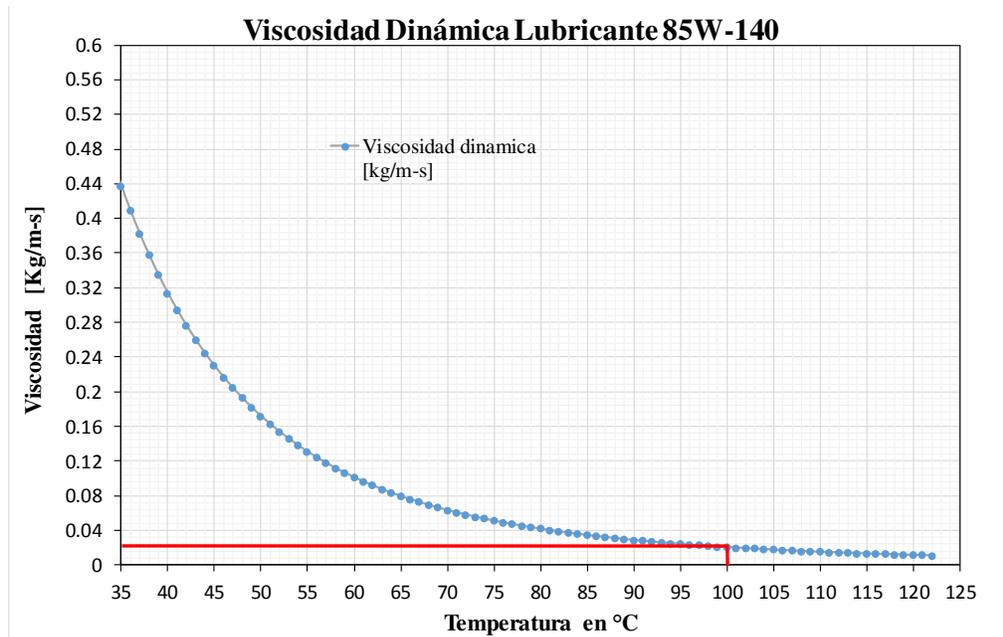


Figura 5. 28: Comportamiento de la viscosidad con respecto a la temperatura

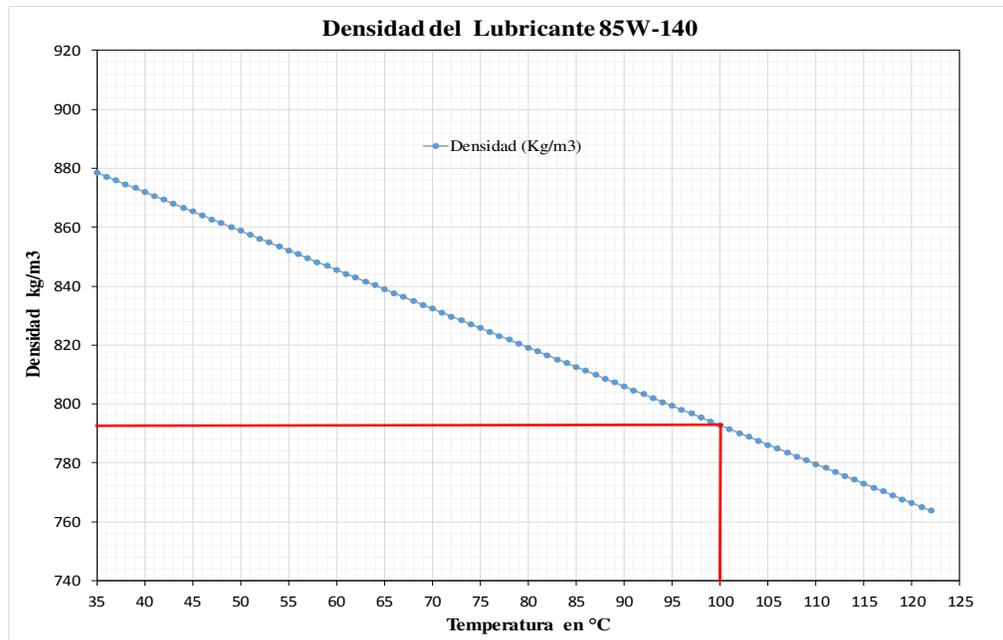


Figura 5. 29: Comportamiento de la densidad con respecto a la temperatura.

Para el caso de las simulaciones, se utiliza una temperatura promedio de trabajo de del lubricante (100°C) con el que operan los diferenciales con engranes hipoides. Puesto que se asume la viscosidad y densidad constante, los valores del lubricante se pueden ver en la tabla 4.

Tabla 4: Propiedades del lubricante 85W-140 usados en la simulación [103, 104] .

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
Temperatura	100	°C
Densidad	792.8	Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad Dinamica	0.0206128	Kg/m-s

El otro fluido de la multifase que es el aire se considera de igual manera a densidad y viscosidad constante durante la simulación, tomando los datos a temperatura de 15°C como se observa en la tabla 5.

Tabla 5: Propiedades del aire usados en la simulación [60].

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
Temperatura	15	°C
Densidad	1.225	Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad Dinamica	1.7894E-05	Kg/m-s

## **5.6. Condiciones de frontera y de operación**

A continuación, se presenta los parámetros, condiciones asumidas y consideradas para cada caso desarrollado como: la asignación de las velocidades angulares, volumen de aceite dentro del diferencial, interfaces designadas para lograr la simulación bajo las técnicas de mallado dinámico y deslizante.

### **5.6.1. Condiciones de operación del diferencial**

Para reproducir las condiciones de operación, se ha aplicado un movimiento rígido de los límites de frontera correspondientes al piñón y el engranaje por medio de funciones definidas por el usuario (UDF en sus siglas en inglés) escritas en el lenguaje c++ [78]. Con este movimiento de límites es posible reproducir las condiciones reales de operación en las que los engranajes se acoplan. Estas funciones definidas se aplican para el método de malla deslizante, como para el método de malla dinámica. Un ejemplo del código definido para dar velocidad del piñón y la corona se muestra en la figura 5.30.

```

#include "udf.h"

DEFINE_CG_MOTION(pinion3, dt, vel, omega, time, dtime)
{
Domain *domain;
domain = Get_Domain(1);
omega[2]=-209.44;
}
DEFINE_CG_MOTION(gear3, dt, vel, omega, time, dtime)
{
Domain *domain;
domain = Get_Domain(1);
omega[0]=51.08;
}

```

Figura 5. 30: Archivo UDF en código C++ usado en la simulación.

### *Sentido de giro y cantidad de aceite*

Como se explica en el capítulo II, de acuerdo a la disposición del Modelo CAD que se utiliza, los engranes hipoides tiene un desplazamiento positivo (figura 2.23), con sentido de giro de mano izquierdo del piñón, es decir el lado cóncavo del diente del piñón es el que conduce la fuerza y empujara el fluido contra el lado convexo del diente de la corona, el cual es de giro de mano derecha. La velocidad de giro se asigna como entrada el piñón rpm o rad/seg y de acuerdo a su relación de transmisión de 4.1 se asigna a la corona. Estas velocidades dependerán de cada caso simulado y que se detallará posteriormente. Estas especificaciones se pueden observar en la tabla 5.

Tabla 6: Velocidad y sentido de giro del diferencial.

Parámetro	Símbolo	Piñon	Corona	Unidades
Relación de transmisión	Rt	4.1		-
Espiral de giro	-	Mano izquierda	Mano derecha	-
Velocidad del elemento conductor	-	Velocidad asignada de acuerdo a cada caso de simulación (Piñon)		RPM
Flanco de conducción	-	Cóncavo	Convexo	-
Volumen de llenado de aceite	$\forall$	De acuerdo a cada caso a simular		Litros

Por otro lado, el volumen de aceite en el diferencial se asigna de acuerdo a lo recomendado por el manual de 18.7 Litros [90, 105], el cual es uno de los primeros casos a simular, su fracción de volumen se puede observar en la figura 5.31. Los demás niveles o volúmenes asignados se explicarán posteriormente.

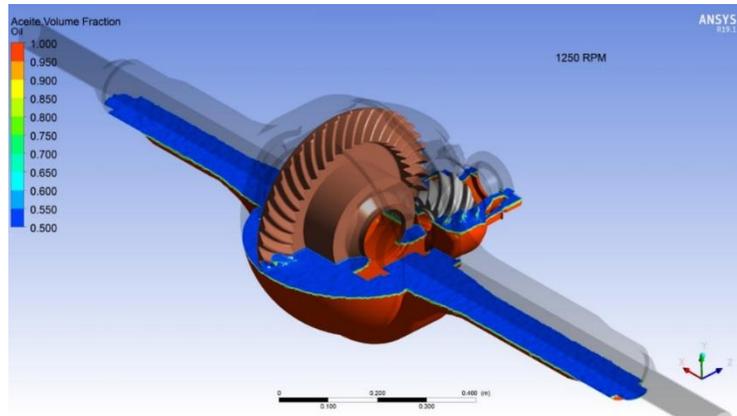


Figura 5. 31: Fracción de volumen inicial en el diferencial (18.7 litros).

Por otro lado, cabe resaltar como parte de esta metodología, que el nivel de aceite o nivel de inmersión de los engranes usado para comparar cada caso, se estable como lo indica Seetharaman [109] para las pérdidas de potencia de un par de engranes a diferentes niveles de inmersión de aceite, la relación adimensional ( $\bar{h}$ ) es :

$$\bar{h} = \frac{h}{r_{ex}} \quad (\text{Ecuación 131})$$

Donde:

$h$ : Profundidad de inmersión estática del aceite.

$r_{ex}$  : Radio exterior del engranaje.

La relación de nivel de aceite como se indica en la ecuación va determinada por el radio exterior del engrane y puede ir con un valor de  $\bar{h} = 1$ , que indica que el nivel de aceite está a la mitad de los engranes como se muestra en la figura 5.32

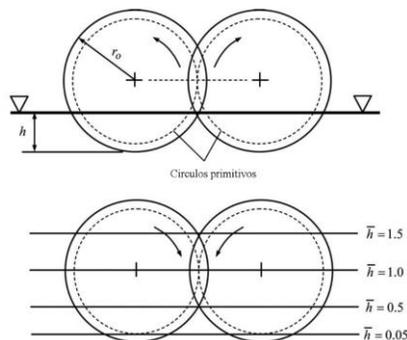


Figura 5. 32: Ilustración del parámetro del nivel de aceite [109].

Para el caso de los diferentes casos de simulación, el parámetro  $\bar{h}$  se determina a partir del diámetro exterior del engrane mayor (corona), el cual es que determina y conduce mayor parte el movimiento rotacional del fluido, sus valores para cada caso se indicaran posteriormente.

### 5.6.2. Condiciones de frontera para el método con malla deslizante

Se considera un dominio cerrado en la simulación, no hay entradas de aire o lubricante, por lo que solo se requiere asignar condiciones para el movimiento de las paredes (Asignado por medio del archivo UDF). El movimiento de los engranes se realiza girando los volúmenes de revolución que los contienen, por lo tanto, el movimiento de las paredes de los engranes relativo a dichos volúmenes es nulo. Con esta configuración, las paredes de los engranes en realidad estarían girando a sus respectivos datos de velocidad y dirección del eje de rotación. Para la simulación cada engrane (piñón o corona) está compuesto de varios grupos de superficies, esto principalmente para tener la posibilidad de analizar por separado el aporte al torque o pérdidas de potencia de la parte delantera de la corona y la parte posterior.

Las condiciones de frontera de estos grupos se fijan tanto a los volúmenes de cada solido de revolución (figura 5.33 lado izquierdo) como de las paredes del perfil del diente de la corona y el piñón, ver figura 5.33, lado derecho.

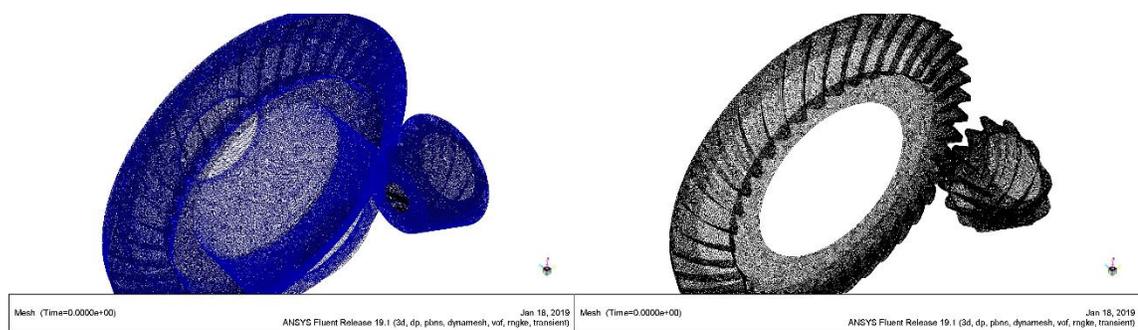


Figura 5. 33: Solidos de revolución y paredes de los engranes.

### *Interfaces*

Uno de los pasos clave en el modelo de mallas deslizantes radica en la definición de las interfaces entre las diferentes zonas de celdas. En este modelo se utiliza el mallado no-

conforme entre las diferentes zonas o volúmenes del dominio a simular, lo que significa que las superficies de contacto entre dos zonas tienen caras y nodos que no coinciden. Por eso, se requiere conectar las caras y los nodos de cada zona a través de interfaces. En este caso se requieren dos interfaces: corona/diferencial y piñón/diferencial.

En la Figura 5.34 se muestran ambas interfaces (volumen móvil con respecto al volumen estático), y su definición en el panel correspondiente.

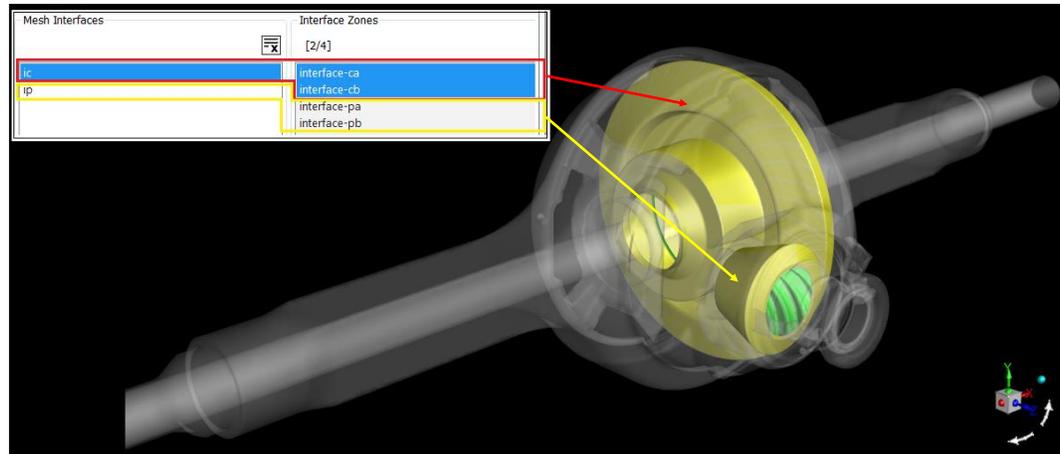


Figura 5. 34: Definición de interfaces para malla deslizante.

### 5.6.3. Condiciones de frontera para el método con malla dinámica

Al igual que con el método de malla deslizante se considera un dominio cerrado en la simulación. Para la zona que usa el método de malla dinámica, por el movimiento de las fronteras implicará una deformación en el dominio del fluido. Por ello, se ha adoptado los dos modelos de malla dinámica: suavizado (Smoothing en inglés) y por remallado (Remeshing en inglés), esta combinación de los dos métodos se selecciona de acuerdo a trabajo previo en simulación en engranes paralelos de dientes rectos [49] y en dominios cerrados con engranes hipoides [92] que han producido un óptimo equilibrio para las actualizaciones de la malla en cada paso de tiempo indicado, al momento que la misma se deforme, degrade la calidad de malla y aumente el riesgo de divergencia.

Dentro del método de suavizado se seleccionó el método de suavizado basado en resortes. En este método, los bordes entre dos nodos de malla cualquiera se idealizan como una red de resortes interconectados. El espaciado inicial de los bordes antes de cualquier

movimiento de límite constituye el estado de equilibrio de la malla. Un desplazamiento en un nodo límite dado generará una fuerza proporcional al desplazamiento a lo largo de todos los resortes conectados al nodo. Los parámetros y valores usados fueron los interpuestos por defecto, sin modificación alguna.

En el método de remallado se realiza un método de remallado local de celdas el cual solo afecta a los tipos de celdas triangulares y tetraédricas en la malla, que no cumplen con los criterios de deformación (oblicuidad) y tamaño: escalas de longitud mínima y máxima. Los parámetros que se fijaron son 0.92 mm, 2.5 mm y 4 mm, respectivamente.

Las celdas con escalas de longitud por debajo de la escala de longitud mínima y por encima de la escala de longitud máxima son marcados para remallar. El valor de oblicuidad de celdas máximo establece la deformación máxima deseada de la malla. Las celdas con deformación por encima de dicho valor también se marcan para remallado.

La marcación de celdas en función de la deformación se realiza en cada paso de tiempo cuando se habilita el método de remallado local. Sin embargo, la marcación basada en el tamaño se realiza de acuerdo al parámetro “intervalo de remallado por tamaño” (Size Remeshing Interval en inglés) especificado, ya que el cambio en la distribución del tamaño de celda es generalmente pequeño en un solo paso de tiempo. Este parámetro por defecto es de 5, pero debido a que se tiene una zona de acoplamiento, su malla se va a deformar rápidamente por el movimiento de las paredes en una zona de espacio muy pequeño (menor a 1 mm), se toma un valor conservador de 2 pasos de tiempo para la marcación de las celdas por oblicuidad y así evitar la no detección del cambio de distribución de tamaño de celdas en mayores pasos de tiempo.

El método de remallado local de caras está disponible solo en 3D y aplica tanto para celdas de cuña en mallas de capa límite como para celdas tetraédricas en mallas mixtas (caras triangulares). El programa de computo de Fluent marca para remallado las caras (y las celdas adyacentes a dichas caras) cuyo valor de deformación excede el valor especificado como “máxima deformación de caras” (Maximum Face Skewness en inglés), que para este caso se fijó en 0.8, debido a que en la inspección de escala de malla inicial su máxima oblicuidad de caras detectada fue de 0.88, se le asigna un valor por debajo al

límite encontrado para evitar grandes deformaciones que puedan afectar desde la superficies de las cara al volumen de cada celda.

El método de remallado de región de caras se aplica a las celdas triangulares en 2D y las celdas tetraédricas en 3D. En los dominios 3D, el método de remallado de región de caras también puede remallar y producir celdas de cuña en las mallas de la capa límite 3D. Las caras deben estar en una zona deformable de caras y ser adyacentes a una zona móvil de caras. El programa de computo Fluent marca las caras basándose en las escalas de longitud mínima y máxima, y luego remalla las caras y las celdas asociadas para producir una malla muy regular en la zona deformable.

### *Interfaces*

Similar a lo que se desarrolla para mallas deslizantes, en el momento que se defina en al CAD que zonas serán las de movimiento y posteriormente que zonas de la malla serán dinámicas, se necesita la definición de las interfaces entre las diferentes zonas de celdas. En este modelo se utiliza el mallado no-conforme entre las diferentes zonas o volúmenes del dominio a simular, por consecuencia se requiere conectar las caras y los nodos de cada zona a través de interfaces. En la Figura 5.35 se muestran ambas interfaces (volumen móvil con respecto al volumen estático), y su definición en el panel correspondiente.

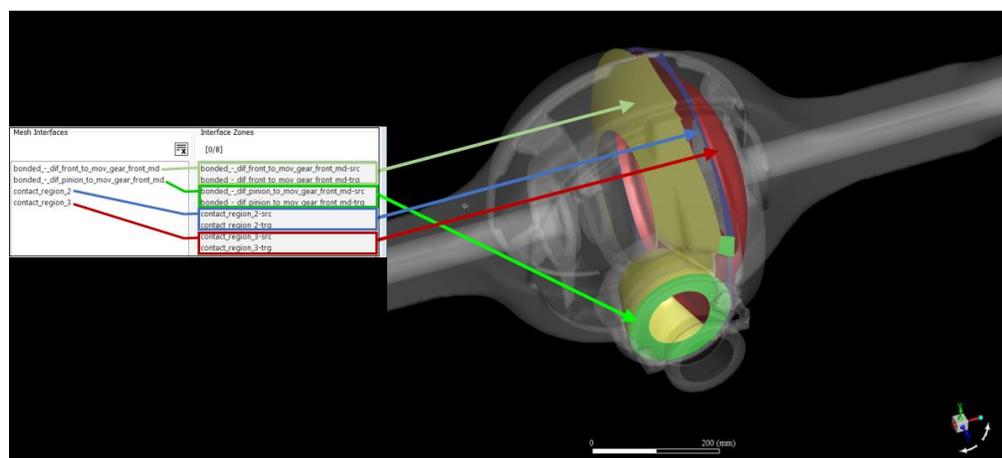


Figura 5. 35: Definición de interfaces en cada malla dinámica.

### *Definición de zonas para mallado dinámico*

Una vez que se han ajustado los parámetros generales del modelo de mallado dinámico, se procede a definir las zonas que efectivamente serán malladas dinámicamente.

Para cada zona que se defina, se tienen que especificar el tipo de movimiento, los atributos del movimiento, de la geometría, las opciones de mallado y las del algoritmo de solución.

Para este caso se utilizaron dos tipos de movimiento:

- cuerpo rígido
- deformante.

Las superficies de los engranes que quedan dentro de la zona de mallado dinámico se designan como movimiento de cuerpo rígido pues son en efecto cuerpos que no se deforman (significativamente para los fines del modelo). En cambio, las superficies que son adyacentes y comparten un eje con las superficies de los engranes o que están cerca de dichos ejes se designan como superficies deformantes.

Las condiciones iniciales de los objetos que se mueven como cuerpos rígidos se especifican en la sección de atributos del movimiento, en particular las coordenadas del centro de gravedad y se selecciona similar al de mallas deslizantes. Las paredes móviles se asignan a través del archivo UDF del movimiento.

## **5.7. Método de solución**

Históricamente hablando, el enfoque basado en la presión se desarrolló para flujos incompresibles de baja velocidad, mientras que el enfoque basado en la densidad se utilizó principalmente para los flujos compresibles de alta velocidad. En este trabajo desarrollado se utiliza el solucionador basado en presión, debido a que los fluidos con los que se trabajan se consideran a densidad y viscosidad constantes para el tiempo alcanzado.

Una limitación de la aproximación de los campos compartidos es que en los casos en que existen grandes diferencias de velocidad entre las fases, la precisión de las velocidades calculadas cerca de la interfaz puede verse afectada negativamente. Este no

es el caso: en el diferencial, el lubricante y el aire tienen el mismo comportamiento global y aproximadamente las mismas velocidades.

La solución del sistema de ecuaciones para flujos incompresibles se logra por el hecho de que no hay ecuaciones donde la presión se define explícitamente. Para calcularlo, la ecuación de continuidad se sustituye por una ecuación para la presión; con alguna manipulación la presión aparece como término desconocido en la ecuación de momento. Por estas razones, se ha adoptado un esquema de Método semi-implícito para ecuaciones ligadas a presión (SIMPLE) como se sugiere para los flujos en dominios cerrados para resolver el acoplamiento de presión-velocidad [70, 84, 96, 110].

Como se mencionó en el capítulo IV, este algoritmo utiliza una relación entre las correcciones de velocidad y presión para imponer la conservación de la masa y obtener el campo de presión. La idea es que el campo de presión debe garantizar, en todo momento, las ecuaciones de continuidad. Por lo tanto, es necesario obtener una ecuación diferencial para la presión desconocida derivada de las ecuaciones de continuidad y de momento.

En la discretización espacial, de forma predeterminada, el solucionador almacena valores discretos del escalar  $\phi$  en los centros de las celdas. Sin embargo, los valores de las caras ( $\phi_e$ ) son requeridos para los términos de convección y deben interpolarse a partir de los valores del centro de la celda. Esto se logra utilizando el Esquema de diferenciación contra el viento (UDS). Hacia arriba significa que el valor facial ( $\phi_e$ ) se deriva de las cantidades en la celda en sentido ascendente, o "en contra del viento", en relación con la dirección de la velocidad normal. Para la determinación del gradiente, se utilizó una evaluación basada en celdas de mínimos cuadrados. En este método, se supone que la solución varía linealmente entre dos centroides de celdas [47, 104].

### **5.7.1. Consideraciones y parámetros adicionales en el modelo**

Dentro del método SIMPLE, el cual es un algoritmo acoplado se trabajó, para la resolución de las ecuaciones gobernantes, como también la presión y ecuaciones de turbulencia adicional por el fenómeno a trabajar, algunos parámetros adicionales están contenidos en la tabla 7. Con su descripción y condición considerada.

Tabla 7: Parámetros generales usado en el programa de cómputo en CFD.

Parámetro	Condición	Descripción
<b>General</b>		
Solucionador (Solver)	Tipo: Basado en presión	Usado para fluidos incompresibles y velocidades de flujo por debajo de la velocidad del sonido
Gravedad	y=-9.81 m/s	Condición de gravedad en la dirección del modelo, activada por que se consideran las fuerzas de cuerpo
Tiempo	Transitorio-implícito	Una condición de todos los modelos a simular es alcanzar al menos 1s de tiempo.
<b>Modelos</b>		
Modelo Multifase	VOF-implícito	De acuerdo a lo anteriormente descrito para interfaces inmisibles y disminuir riesgo de divergencia por calidad de mallas pobres, permitiendo usar una tamaño de tiempo mas grande
Modelo viscoso	Turbulento K-e RNG	De acuerdo al número de Reynolds calculado y trabajos previos que encuentran equilibrio, convergencia y costo computacional
Materiales	Aceite/aire	Son los dos fluidos que se trabaja
Malla Dinámica	Activada	Para los modelos de suavizado más remallado y malla deslizante , se requiera la activacion general
<b>Métodos de solución</b>		
Esquema	Algoritmo Acoplado de presión-velocidad (SIMPLE)	Resuelve la presión y momento simultaneamente dentro del metodo basado en presion
Discretización espacial	Gradiente: evaluación basada en celdas de mínimos cuadrados	Para la determinación del gradiente, supone que la solución varía linealmente entre dos centroides de celdas
	Presión: PRESTO	De acuerdo al usar el Modelo VOF, este tipo de interpolacion de presion es el mas adecuado, la discretización proporciona resultados más precisos, ya que se evitan los errores de interpolación y los supuestos de gradiente de presión en los límites. Este esquema funciona mejor para problemas con fuertes fuerzas corporales (remolinos).
	Momento: primer orden UDS	Para evitar divergencia en valores de la ecuaciones de momento y continuidad se utiliza el esquema UDS de primer orden
	Fracción de volumen:(compresivo)compressive	captura la interfaz basado en la información algebraica , independiente de la información geométrica y mantiene un equilibrio entre el costo computacional y una aceptable precisión de la interfaz
	Energía cinética turbulenta: primer orden UDS Razón de disipación turbulenta: primer orden UDS	Como el fenómeno turbulento a medida que avanza en el tiempo de simulacion se hace mas energético y caótico se prefiere usar un esquema para estas dos ecuaciones en primer orden y se mesurado para evitar la no-convergencia.
<b>Factores de baja relajación</b>		
	Presión:0.3 Densidad:1 Fuerzas de cuerpo:1 Momento:0.5 Fracción de volumen:0.5 Energía cinetica turbulenta: 0.8 Razon de disipacion turbulenta: 0.8 Viscosidad turbulenta:0.8	Factor encontrados para evitar la no-convergencia y el uso de un tamaño de tiempo pequeños
<b>Corrida de Calculo (Run calculacion)</b>		
Método de paso de tiempo	fijo	Se asignó fijo para evitar , tamaño de tiempo variable o cada vez mas pequeños , alargo el tiempo
Tamaño de paso de tiempo	Depende de cada caso	Se asignó un valor estimado de acuerdo a la ecuacion 125
Numero de pasos de tiempo	100000	El valor asignado para llegar alcanzar un 60 seg de simulación (malla deslizante) y 0.33 seg (malla dinámica)
Máximas iteraciones/paso de tiempo	25-40	Este valor se mantuvo modificando de acuerdo al comportamiento de la simulacion de los valores de residuales

Por otro lado, al ser un fenómeno donde se tiene como objetivo saber el comportamiento del lubricante durante un tiempo determinado, se encontró el equilibrio en ambos métodos usados (mallas dinámicas y mallas deslizante), la selección del tamaño de paso de tiempo, el número de iteración por paso de tiempo a usar y tiempo de trabajo de la máquina.

Las especificaciones de la máquina de trabajo donde se corrió el programa de computo Fluent 19.1 son: Intel(R) Xeon (R) CPU E5-2667 V3 @3.20GHz -16 CPU y memoria RAM 64.0 Gb y tarjeta gráfica Nvidia Quadro K5200 8Gb.

## 5.8. Criterios de convergencia

La convergencia de las simulaciones se monitorea de dos maneras: la cantidad de masa de aceite en el tiempo (que siempre se conserve la misma cantidad de masa) y los residuos a escala de Fluent. No es posible detener automáticamente FLUENT cuando se cumple un criterio basado en cantidad de masa, por lo tanto, debe hacerse después de que se complete una simulación analizando el archivo de salida del momento y masa.

La convergencia de la masa se identifica cuando el momento promedio en el diferencial no cambia en más del 1% por cada revolución subsiguiente de datos. Las primeras cinco revoluciones de datos transitorios se descartan independientemente, ya que existen grandes inestabilidades en el momento en que se produce el cambio del estado estacionario al cálculo transitorio.

Los residuos escalados se utilizan para normalizar la suma de los residuos de las variables conservadas en todas las celdas del dominio. Esto permite utilizar los mismos criterios de convergencia para cualquier simulación, independientemente de la magnitud de una variable o del número de celdas. La solución se considera convergente para un solo paso de tiempo cuando se alcanzan los siguientes residuales escalados: mínimo de  $1e-03$  para todos los residuales de continuidad, velocidad, energía cinética turbulenta ( $k$ ), razón de disipación ( $\epsilon$ ) y la fracción volumétrica del aceite. Como se puede ver un ejemplo del caso de simulación en la figura 5.36.

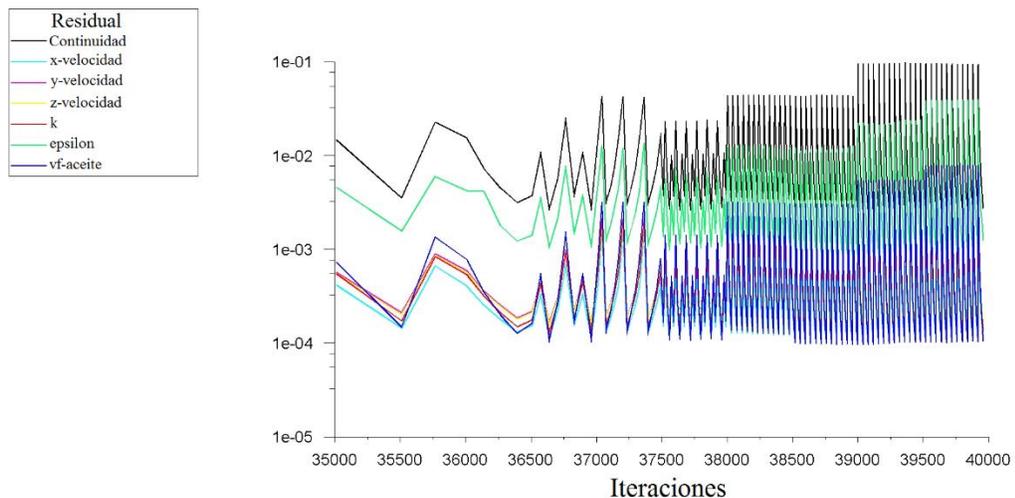


Figura 5. 36: Ejemplo de residuales en uno de los casos de simulación.

De acuerdo a la formulación implícita de solución de las ecuaciones y los diferentes tamaños de tiempos usados para cada simulación, significa que para la simulación alcance cada paso de tiempo la convergencia de los residuales de mínimo de 1e-03, toma para los primeros pasos de tiempo corridos hasta 40 iteraciones, para luego disminuir entre 20-30 iteraciones por tamaño de tiempo.

## 5.9. Reporte de momentos y cálculo de las pérdidas de potencia

Al empezar a rotar los engranes e interactuar con la multifase aceite-aire se generan fuerzas de presión y viscosas, que con respecto a un vector de distancia crean un torque. El cálculo se deriva desglosando la ecuación 36, vista en el capítulo III, como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_p + \vec{r} \times \vec{F}_v \quad (\text{Ecuación 132})$$

Donde  $\vec{M}$  es vector de torque,  $\vec{F}_p$  la fuerza de presión,  $\vec{F}_v$  son las fuerzas viscosas y  $\vec{r}$  es la distancia del centro del vector, que pasa por el centro de gravedad definido para la corona y el otro para el piñón. El programa de computo en CFD, el momento-fuerza lo calcula de acuerdo con la ecuación para un volumen de control fijo (ecuación 39).

En el programa de CFD, el momento-fuerza calculado en la simulación, lo define un reporte registrando para cada paso de tiempo y flujo de tiempo, el valor promedio de momento-fuerza (o momento de la cantidad de movimiento) que tiene las paredes del fluido que hacen contacto con los dientes del engrane y se almacena en un archivo con extensión .out que se puede abrir en cualquier editor de texto.

A partir de los resultados de momento se calcula la potencia obtenida como:

$$\mathcal{P} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{Ecuación 133})$$

Donde  $\mathcal{P}$  es la potencia de pérdida de los engranajes y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular.

## **5.10. Análisis de datos**

El análisis de los datos se desarrolla a partir de los reportes de momentos -fuerzas generados para la simulación de las paredes del piñón, las paredes la corona, y el comportamiento de la cantidad de masa registrada dentro del diferencial para cada paso de tiempo durante todo el flujo de tiempo simulado.

Después de revisarlos previamente en un editor de texto, se pasa a una hoja de cálculo de Microsoft Excel para generar la organización de los datos, extraer los resultados significativos y generar las respectivas gráficas.

De igual Manera para la visualización del comportamiento del lubricante por medio de la fracción volumétrica del aceite, y perfil de velocidades generadas, se desarrolló a través del programa de post procesamiento CFD-POST 19.1 © ANSYS Inc, el cual, de acuerdo con los datos guardados de diferentes variables, en cada cierto tiempo indicado, permite la visualización calculo y análisis de este.

## **5.11. Simulación y parámetros de estudio**

El propósito de estas simulaciones es calcular las pérdidas de potencia debido al aceite sobre diferentes condiciones de operación, por consiguiente, en este capítulo se muestran los resultados para diferentes proyectos simulados, su comparativa con simulaciones similares, y discusión de los resultados y datos encontrados.

El total de proyectos simulados fueron 9, donde los 6 primeros fueron simulados con un alcance de flujo de tiempo de 1 segundo y se desarrollaron con malla deslizante. Por otro lado, los tres últimos (7,8,9) fueron desarrollados con malla dinámica. El resumen de los datos y consideraciones tomadas en la simulación se puede apreciar en la matriz de experimentos de la tabla 8.

Tabla 8: Matriz de experimentos, proyectos simulados.

Matriz de experimentos																		
# Proyecto	Piñón			Corona			Relación de Transmisión	Propiedades del Aceite @ 100°C		Cantidad de Aceite		Propiedad del Aire @ 15°C		Malla	Condición para corrida de Calculo		Método de movimiento de malla	Posición del diferencial
	Revoluciones		Tiempo 1 Rev.	Revoluciones		Tiempo 1 Rev.		Densidad	Viscosidad dinámica	Volumen	Profundidad de inmersión de la corona $\bar{h}$	Densidad	Viscosidad dinámica	Número de elementos	Tamaño de paso de tiempo [seg]	Máxima iteraciones paso de tiempo		
	[RPM]	[Rad/S]	[seg]	[RPM]	[Rad/S]	[seg]		[Kg/m³]	[Kg/m-s]	[Litros]		[Kg/m³]	[Kg/m-s]					
1	500	52.36	0.12	121.95	12.77	0.49	4.100234926	792.8	0.0206128	18.7	0.83	1.225	1.79E-05	4'042128	0.001	30	Malla deslizante	Horizontal
2	1250	130.9	0.05	304.88	31.92	0.20	4.100877193	792.8	0.0206128	18.7	0.83	1.225	1.79E-05	4'042128	0.001	35	Malla deslizante	Horizontal
3	2000	209.44	0.03	487.8	51.08	0.12	4.100234926	792.8	0.0206128	18.7	0.83	1.225	1.79E-05	6'390092	0.001	40	Malla deslizante	Horizontal
4	1250	130.9	0.05	304.88	31.92	0.20	4.100877193	792.8	0.0206128	15.11	0.74	1.225	1.79E-05	4'042128	0.001	40	Malla deslizante	Horizontal
5	1250	130.9	0.05	304.88	31.92	0.20	4.100877193	792.8	0.0206128	22	0.90	1.225	1.79E-05	4'042128	0.001	40	Malla deslizante	Horizontal
6	1250	130.9	0.05	304.88	31.92	0.20	4.100877193	792.8	0.0206128	18.7	-	1.225	1.79E-05	2'989969	0.001	40	Malla deslizante	Inclinado
7	500	52.36	0.12	121.95	12.77	0.49	4.100234926	792.8	0.0206128	18.7	0.83	1.225	1.79E-05	2'127590	0.0001	25	Malla dinámica	Horizontal
8	1250	130.9	0.05	304.88	31.92	0.20	4.100877193	792.8	0.0206128	18.7	0.83	1.225	1.79E-05	2'127590	0.00005	25	Malla dinámica	Horizontal
9	2000	209.44	0.03	487.8	51.08	0.12	4.100234926	792.8	0.0206128	18.7	0.83	1.225	1.79E-05	2'127590	0.0000375	20	Malla dinámica	Horizontal

A partir de las condiciones hechas y simulaciones de cada proyecto, se procedió a agruparlas en diferentes casos, para su análisis y comparación, como se puede observar en la tabla 9.

Tabla 9: Matriz de experimentos-Agrupados por Casos.

Matriz de experimentos- Agrupados por Casos												
# Proyecto	Piñón		Corona		Relación de Transmisión	Cantidad de Aceite		Malla	Condición para corrida de Calculo	Método de movimiento de malla	Posición del diferencial	
	Revoluciones [RPM]	Tiempo l Rev. [seg]	Revoluciones [RPM]	Tiempo l Rev. [seg]		Volumen [Litros]	Profundidad de inmersión de la corona $\bar{h}$	Número de elementos	Tamaño de paso de tiempo [seg]			
Caso 1	1	500	0.12	121.95	0.49	4.100234926	18.7	0.83	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	2	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	18.7	0.83	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	3	2000	0.03	487.804878	0.12	4.100234926	18.7	0.83	6'390092	0.001	Malla deslizante	Horizontal
Caso 2	4	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	15.11	0.74	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	2	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	18.7	0.83	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	5	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	22	0.90	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
Caso 3	2	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	18.7	0.83	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	6	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	18.7	-	2'989969	0.001	Malla deslizante	Inclinado
Caso 4	1	500	0.12	121.95	0.49	4.100234926	18.7	0.83	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	7	500	0.12	121.95	0.49	4.100234926	18.7	0.83	2'127590	0.0001	Malla dinámica	Horizontal
	2	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100234926	18.7	0.83	4'042128	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	8	1250	0.05	304.8780488	0.20	4.100877193	18.7	0.83	2'127590	0.00005	Malla dinámica	Horizontal
	3	2000	0.03	487.804878	0.12	4.100234926	18.7	0.83	6'390092	0.001	Malla deslizante	Horizontal
	9	2000	0.03	487.804878	0.12	4.100234926	18.7	0.83	2'127590	0.0000375	Malla dinámica	Horizontal

En la anterior tabla, se tiene 4 casos desarrollados para su análisis y comparación.

En el caso 1 se realiza tres simulaciones, para tres diferentes velocidades de entrada del piñón de 500, 1250 Y 2000 rpm, aplicando el método de malla deslizante. En el cual se podrá observar y evaluar el comportamiento de las pérdidas de potencia a medida que aumenta la velocidad de rotación.

En el caso 2, a partir de una misma velocidad de rotación del piñón (1250 rpm), se simulo tres diferentes niveles de inmersión de aceite  $\bar{h}$ , de 0.74, 0.83 y 0.9 con respecto

a la corona, que se traducen en tres niveles de cantidad de aceite en el diferencial de 15.11 litros, 18.7 litros y 22 litros respectivamente.

Estos niveles de llenado del diferencial mecánico corresponden a un valor nominal de llenado recomendado por el fabricante de 18.7 litros [107], que en la corona corresponde a un 41.35 % de inmersión y un 52.89 % de inmersión en el piñón, por ende se evalúa el efecto de las pérdidas de potencia al aumentar la cantidad de aceite, sin llegar al 50 % de inmersión de la corona y sin llegar a una inmersión mayor del 60 % en el piñón, traduciéndose a un llenado de 22 litros. Por otro lado, de igual manera se evalúa el efecto de las pérdidas de potencia al tener menor cantidad de aceite (15.11 litros) que corresponde a un 36.75 % de inmersión de la corona y 39.65 % de inmersión del piñón sin llegar a un valor menor del 30 % de inmersión en los engranes. Al igual que el caso 1 estas simulaciones fueron realizados con técnica de malla deslizante.

En el caso 3, se muestra una comparativa de dos condiciones de operación que se puede presentar: una en su posición horizontal y la otra si el contenido de aceite se inclina 15 grados con respecto al eje del piñón. Y a partir de allí, poder observar las pérdidas de potencia, como se ve afectado cuando la posición de inclinación del diferencial cambia.

Y el último caso, de mayor comparativa (caso 4), el cual está a su vez agrupado en tres segmentos, se muestra a nivel de costo computacional, el uso de dos técnicas de mallado (malla dinámica y malla deslizante), en el momento de simular la rotación de engranes, en un medio multifase (aceite-aire).

En el caso 4, se tomaron los resultados del caso 1 y se compararon con los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas con malla dinámica, de igual manera para las diferentes velocidades de rotación del piñón (500, 1250 y 2000 rpm), y finalizando comparativas de las diferentes pérdidas de potencia obtenidas, con respecto a la precisión de los resultados con ambas técnicas de simulación de mallado y el tiempo de costo computacional desarrollado.

# CAPÍTULO VI.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

---

### 6.1. Resultados de la modelación numérica

A continuación, se mostrará cada uno de los resultados de las pérdidas de potencia en los engranes bajo las diferentes condiciones realizadas y su comparativa para cada caso.

De igual manera para cada proyecto de simulación se mostrará el comportamiento que se obtuvo de la agitación y salpicadura, indicando la tendencia y dirección de flujo del aceite al momento de ser accionado por la rotación de los engranes durante el flujo de tiempo (estado transitorio) por medio de la fracción volumétrica del aceite.

Por otro lado, se mostrará los resultados del momento (Nm) y potencia (Watt) calculado por engrane, es decir del piñón y la corona, como su total (la sumatoria).

También se presentará los resultados obtenidos al realizar el reporte de la conservación de masa del aceite, al cual su porcentaje de error es menor al 1%.

#### 6.1.1. Caso 1, velocidades de rotación del piñón (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm)

##### *Paredes de la corona*

En la figura 6.1 se muestran los resultados de la fuerza-momento generados en las paredes de la corona, en un tiempo de 1 segundo.

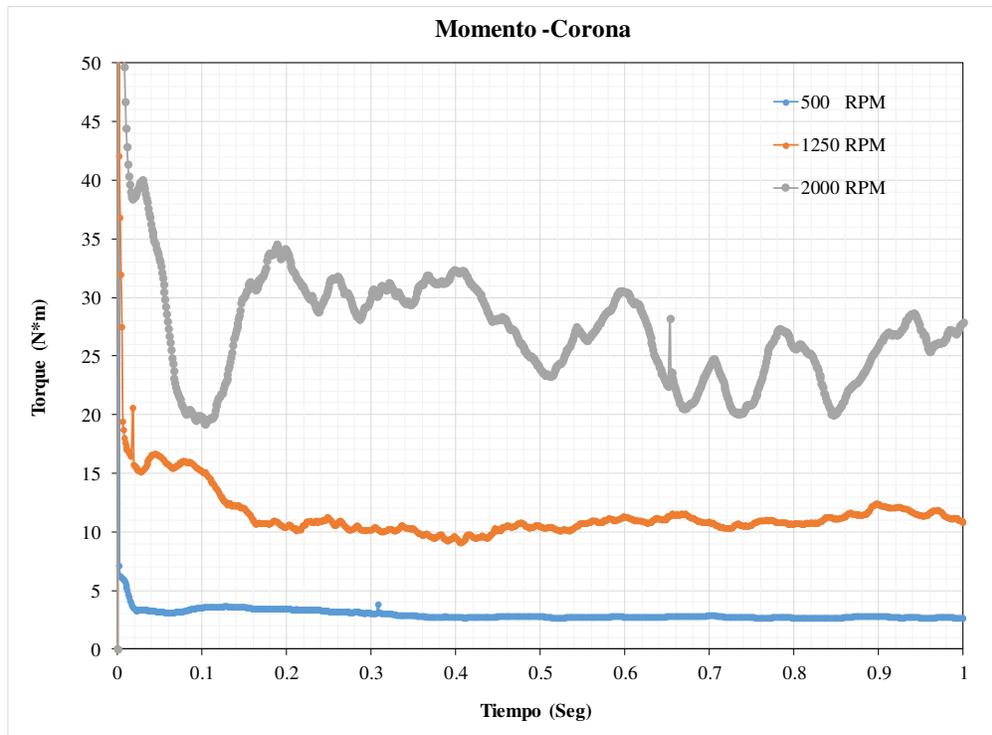


Figura 6. 1: Momentos generados en la corona a 121.95 rpm, 304.88 rpm y 487.8 rpm.

En la figura 6.1 se observa un comportamiento con un valor estable para las condiciones de 500 rpm y 1250 rpm del piñón o 121.95 rpm y 304.88 rpm de la corona respectivamente, pero para el caso de 2000 rpm (487.8 rpm de la corona) se muestra un poco aleatorio, rondando entre 10 unidades de torque. El promedio de torque obtenido en la corona para cada proyecto fue de: 2.75 Nm para 500 rpm, 10.83 Nm para 1250 rpm y 27.17 Nm para 2000 rpm.

En la figura 6.2 se grafican los resultados, de potencia para la corona donde se muestra que para 500 rpm y 1250 rpm los valores rondan entre 20 Watts y 350 Watts, pero cuando llega a 2000 rpm su pérdida de potencia sube hasta aproximadamente 1400 Watts, teniendo una tendencia exponencial para este engrane, el cual es de diámetro mayor y por ende de mayor área de contacto tiene el lubricante con las paredes de este.

Los valores de promedio de las pérdidas de potencia son: 35.16 Watts para 500 rpm, 345.73 Watts para 1250 rpm y 1388.32 Watts para 2000 rpm.

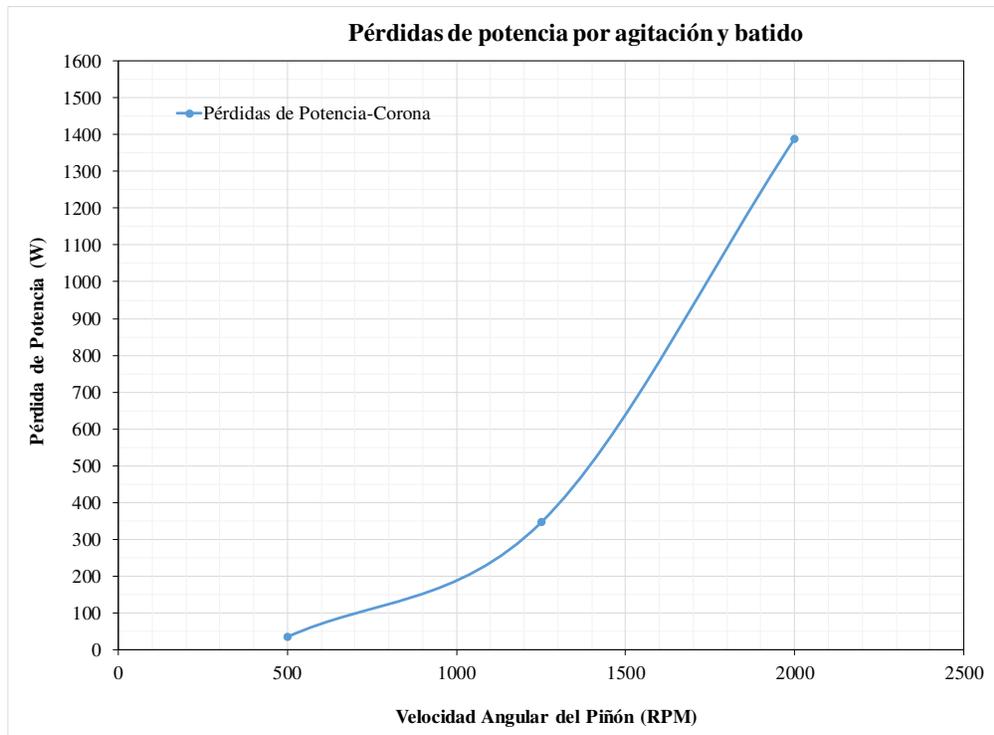


Figura 6. 2: Pérdida de potencia (corona) a 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm del piñón.

### *Paredes del piñón*

En la figura 6.3 se presenta los momentos generados por el piñón para las tres velocidades de rotación (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm). En el caso de la velocidad de 500 rpm el aporte de torque es bajo (con un valor promedio de 0.27 Nm), para los casos de 1250 rpm y 2000 rpm en cambio muestra un aporte parejo con un valor promedio de 0.86 Nm y 0.91 Nm respectivamente.

Por otro lado, en la figura 6.4 se grafican los resultados del promedio de la potencia perdida por parte del piñón, observándose un comportamiento cuasi lineal, con una pendiente mayor de 45 °. De aquí se observa unos valores proporcionales de diferencia. (14.41 Watts, 113.08 Watts y 190.9 Watts) a medida que aumenta la velocidad de rotación (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm respectivamente).

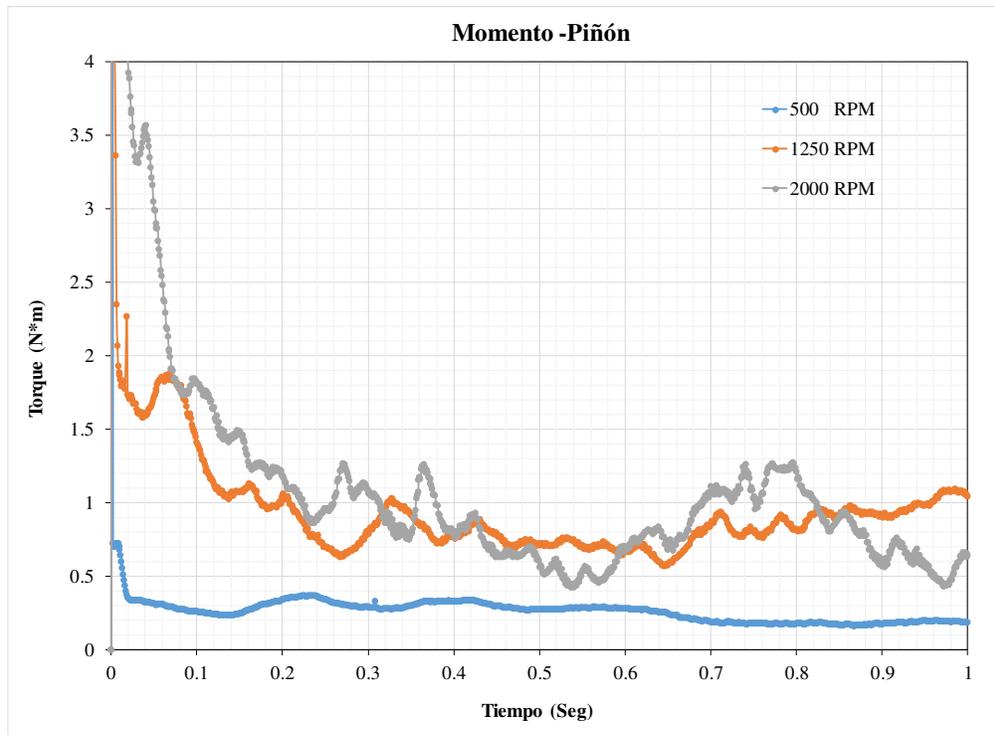


Figura 6. 3: Momentos generados en el piñón a 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm.

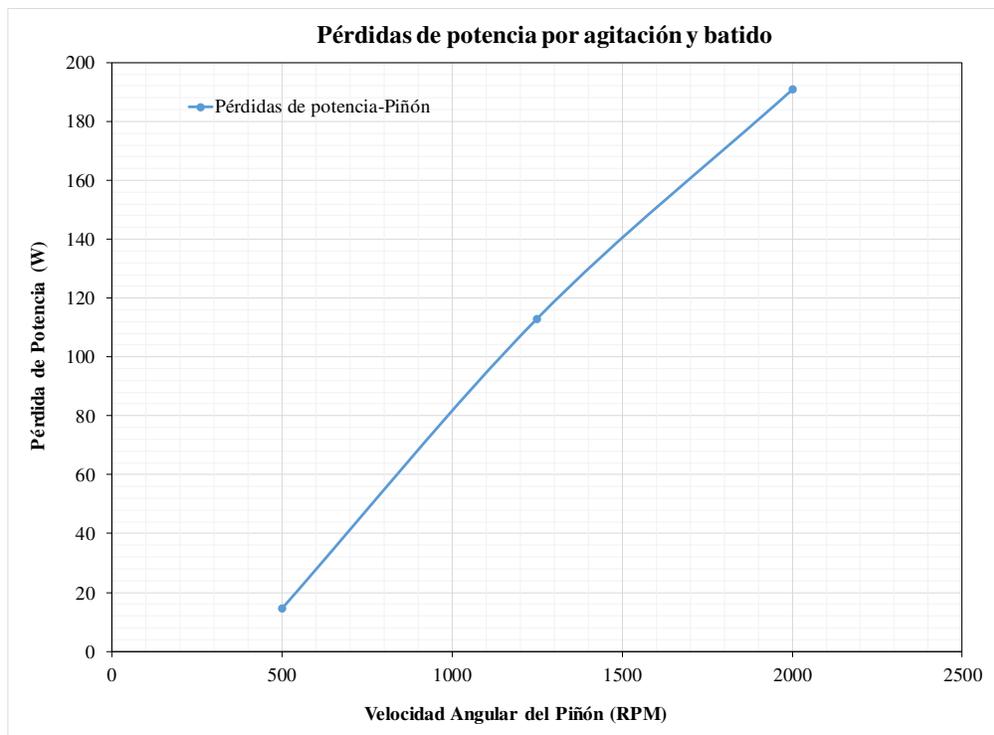


Figura 6. 4: Pérdida de potencia del piñón a 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm.

### *Resultados del total de pérdidas de potencia (piñón + corona)*

En la figura 6.5 se muestra el torque total dentro del diferencial aportado por los engranes aquí se observa que a medida que aumenta la velocidad de rotación en el flujo de tiempo los resultados son más aleatorios, pero sin tener una diferencia mayor a 15 unidades (para el caso de 2000 rpm).

El promedio de torque total para cada proyecto es: 2.77 Nm para 500 rpm, 11.82 Nm para 1250 rpm y 28.53 Nm para el de 2000 rpm.

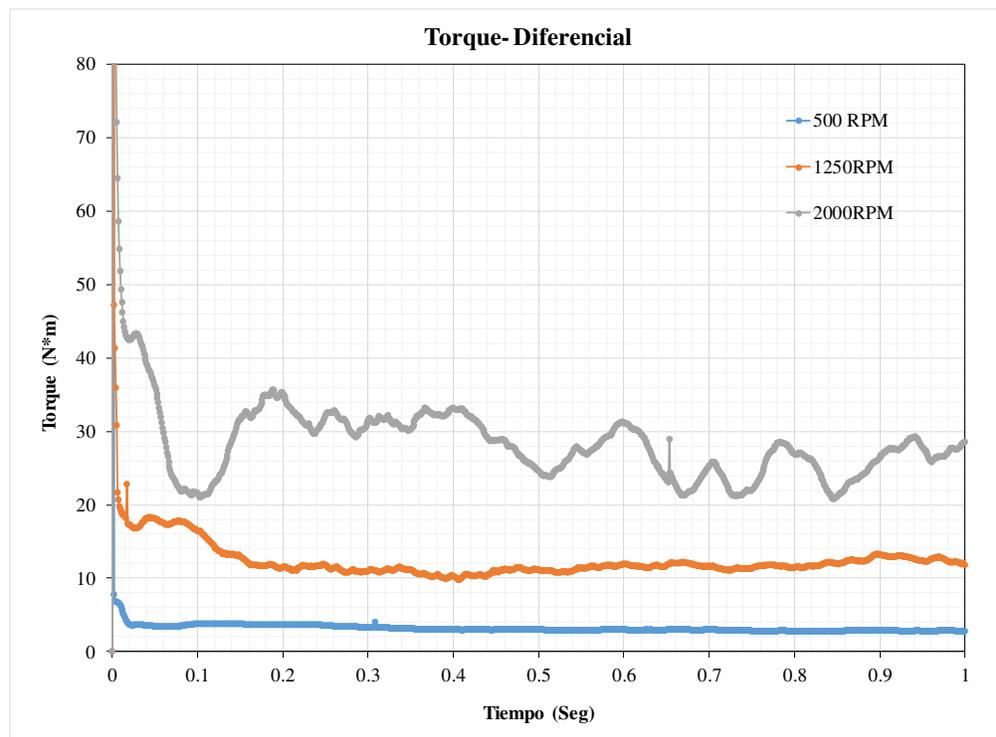


Figura 6. 5: Momento total generado para diferentes velocidades.

En la figura 6.6 se resume la potencia total perdida dentro del diferencial por los engranes, así mismo se puede ver que el mayor aporte de pérdidas de potencia lo aporta la corona y que el total de potencia perdida sigue un crecimiento exponencial. Su valor total promedio para 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm, son 49.5 Watts, 458.75 Watts y 1579.2 Watts respectivamente.

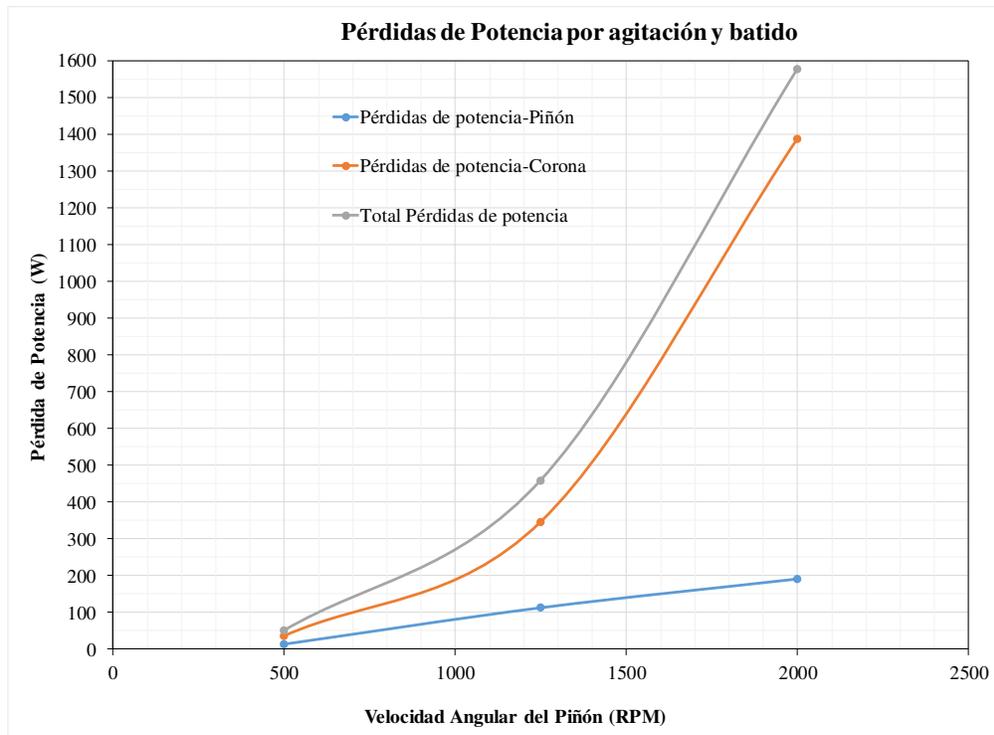


Figura 6. 6: Perdidas de potencia del diferencial a diferentes velocidades.

#### *Fracción volumétrica del diferencial para las diferentes velocidades de rotación*

En la figura 6.7, se presenta la fracción volumétrica del aceite, para cada velocidad de rotación del piñón y manteniendo la relación de transmisión de 4.1 para su respectiva velocidad de rotación en la corona. En las imágenes se muestra la distribución del aceite en tres instantes de tiempo (0.1 segundos, 0.5 segundos y 1.0 segundo).

La escala de colores de la fracción volumétrica va desde 0.5 a 1, siendo 0.5 las zonas de celdas del dominio donde hay mitad aceite y mitad aire y 1 donde la zona es 100 % aceite.

De igual manera en la figura 6.8, se muestra las líneas de corriente alrededor de los engranes hipoides observándose su tendencia de flujo para los instantes de 0.5 segundos y 1 segundo de tiempo para los tres casos de rotación de los engranes (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm del piñón).

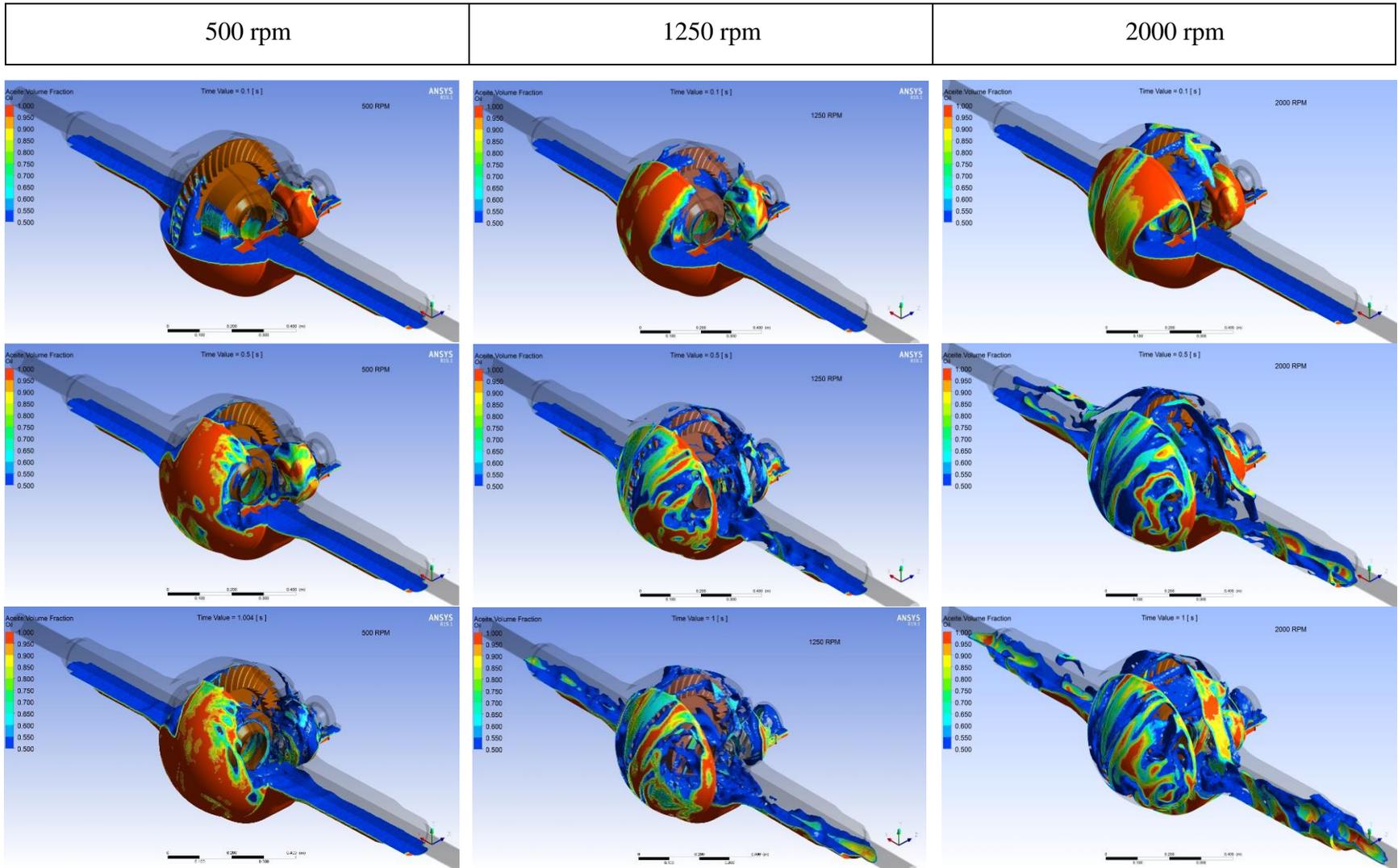


Figura 6. 7: Fracción volumétrica del aceite a diferentes velocidades.

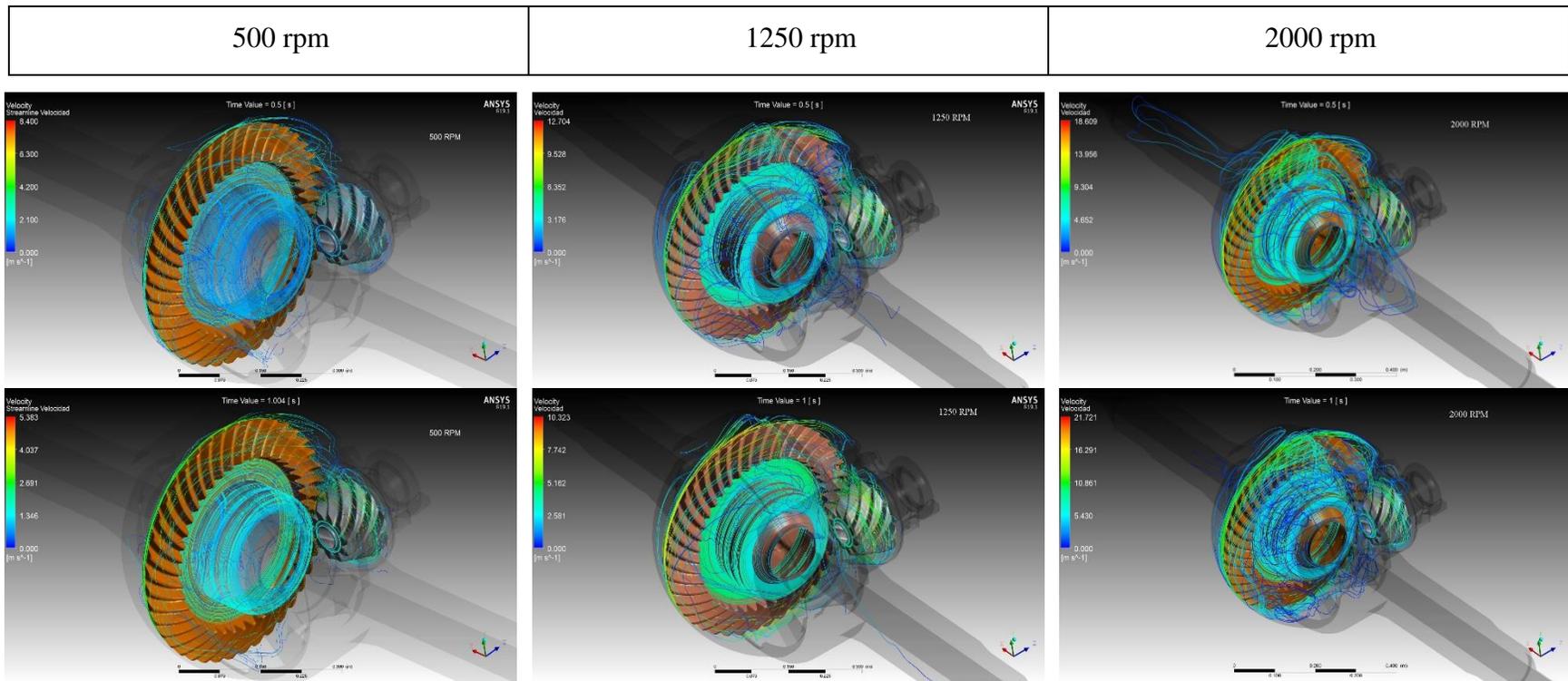


Figura 6. 8: Líneas de corriente alrededor de los engranes

En las figuras 6.7 y 6.8 se observa el rol que juega la corona en la distribución del aceite debido a su mayor inmersión que el piñón. Y cubriéndose de lubricante la corona a mayor velocidad de rotación. Además, los resultados muestran que el aceite en la parte inferior del colector sube al espacio superior bajo la acción de los engranajes giratorios. Desde la dirección de la vista hacia la izquierda, había más aceite distribuido en el lado derecho que en el lado izquierdo porque los dientes de la rueda estaban dispuestos en el lado derecho y recogían más aceite. Desde la dirección de la vista hacia la derecha, confirmamos que el aceite llega a la zona de engrane. Además, el nivel de aceite en el colector de aceite inferior disminuye a medida que aumentaba el aceite distribuido en el espacio superior. Poco a poco, el aceite circuló dentro de la caja del eje, se ve más turbio y caótico a mayor velocidad (2000 rpm).

*Conservación de masa en el diferencial mecánico*

En la figura 6.9 se muestran los valores obtenidos de masa del aceite en el tiempo de 1 segundo para cada proyecto simulado (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm del piñón) y el valor de la masa calculada que hay en el diferencial mecánico.

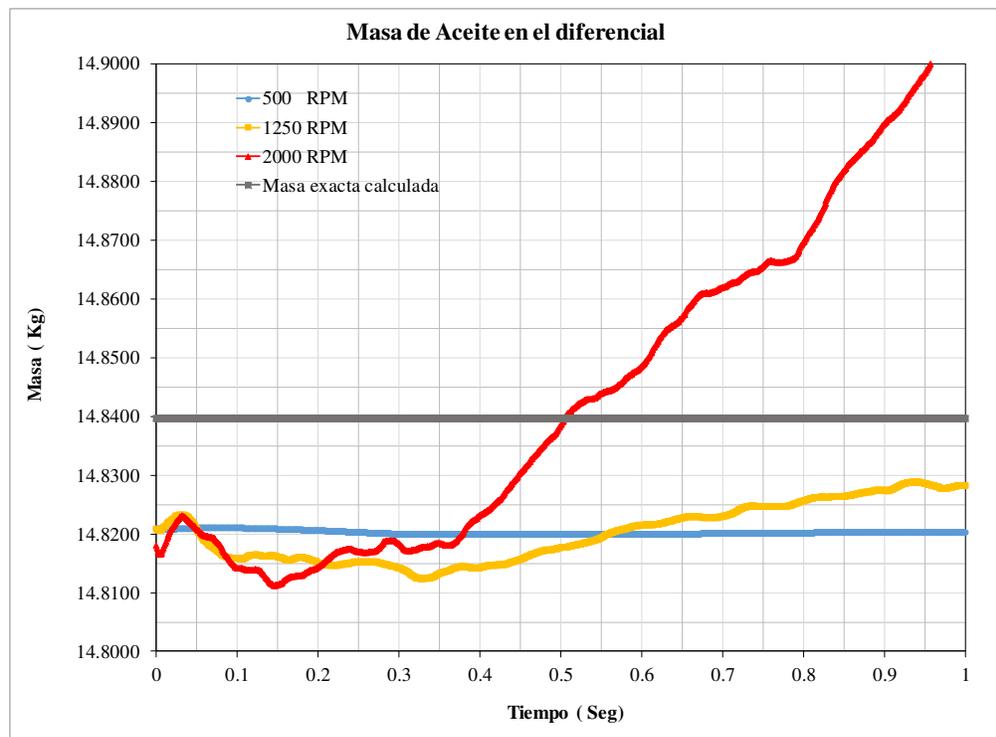


Figura 6. 9: Resultados de la masa del aceite para cada velocidad de rotación en rpm del piñón.

Al describir un análisis numérico, cuando se combinan las leyes de conservación de masa y momentum, resultan ecuaciones diferenciales que en su integración subsecuente originan funciones matemáticas que describen el estado espacial y temporal, ocasionando que para cada paso de tiempo se tenga variación en los valores de la masa como se puede ver en la figura 6.9 por ende se monitorea durante todo el tiempo de simulación que la variación de masa que toma no sea mayor al 1% de su valor exacto o real.

De la figura 6.9 se puede observar que los datos son más estables para la velocidad de rotación de 500 rpm y menos estables para la velocidad de rotación de 2000 rpm. Los resultados de los valores promedio de la cantidad de masa que calcula y el porcentaje de error para cada velocidad se encuentran en la tabla 10. Donde se demuestra que el porcentaje de error máximo alcanzado aproximadamente es de 0.13 %. quedando así comprobado el criterio de convergencia en cada caso.

Tabla 10: Resultados (promedio) de error masa de aceite, velocidades rotación.

Velocidad de rotacion piñon [RPM]	Volumen exacto [Litros]	Masa exacta [Kg]	Promedio valor masa calculada [Kg]	% De Error absoluto
500	18.71807271	14.83968805	14.82013675	0.131750043
1250	18.71807271	14.83968805	14.81968244	0.134811509
2000	18.71807271	14.83968805	14.8383878	0.008761973

### 6.1.2. Caso 2, nivel de inmersión del aceite (15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros)

#### *Paredes de la corona*

El eje diferencial se ajustó a tres niveles de aceite estático en los modelos numéricos ( $\bar{h} = 0.74, 0.83, 0.9$ ), correspondiente de su valor de llenado nominal (18.7 litros), lo que sucedió al llenarse por debajo de lo recomendado (15.1 litros) y otro caso en donde se llena más de lo recomendado 22 litros. Los tres casos fueron analizados a 1250 rpm del piñón y 304.88 rpm de la corona.

En la figura 6.10 se muestran los datos de torque en la corona para los tres casos los cuales corresponden a niveles de inmersión por debajo de llenado de la mitad de la corona.

En este grafica se puede ver la tendencia del aumento de torque en la corona a medida que aumenta el nivel de llenado.

Se obtienen valores promedio del torque para los casos de 22 litros (13.42 Nm), 18.7 (10.83 Nm) litros y 15.1 litros (9.13 Nm).

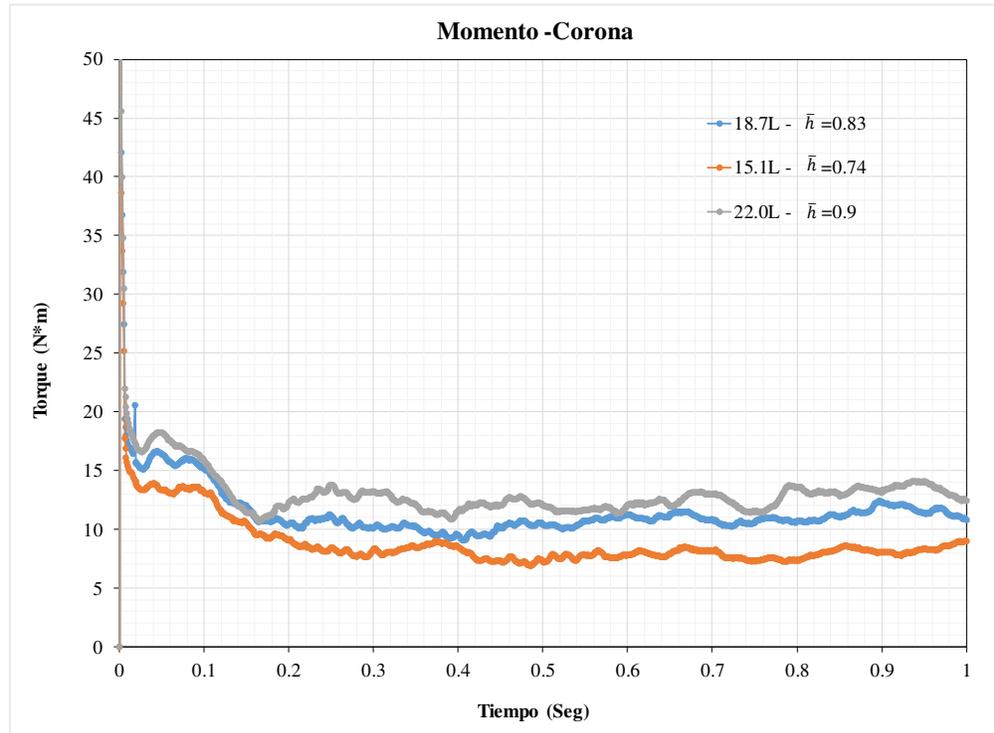


Figura 6. 10: Momentos generados en la corona a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros.

En términos calculados de potencia en la figura 6.11, se ilustran los resultados de promedio de las pérdidas de potencia que aporta la corona, y se muestra el porcentaje de inmersión del engrane, su tendencia es lineal, con valores promedio para 36.75 % de inmersión de la corona: 259.54 Watts, 41.33 % de inmersión: 345.71 Watts y de 45.11 % de inmersión: 402.60 Watts.

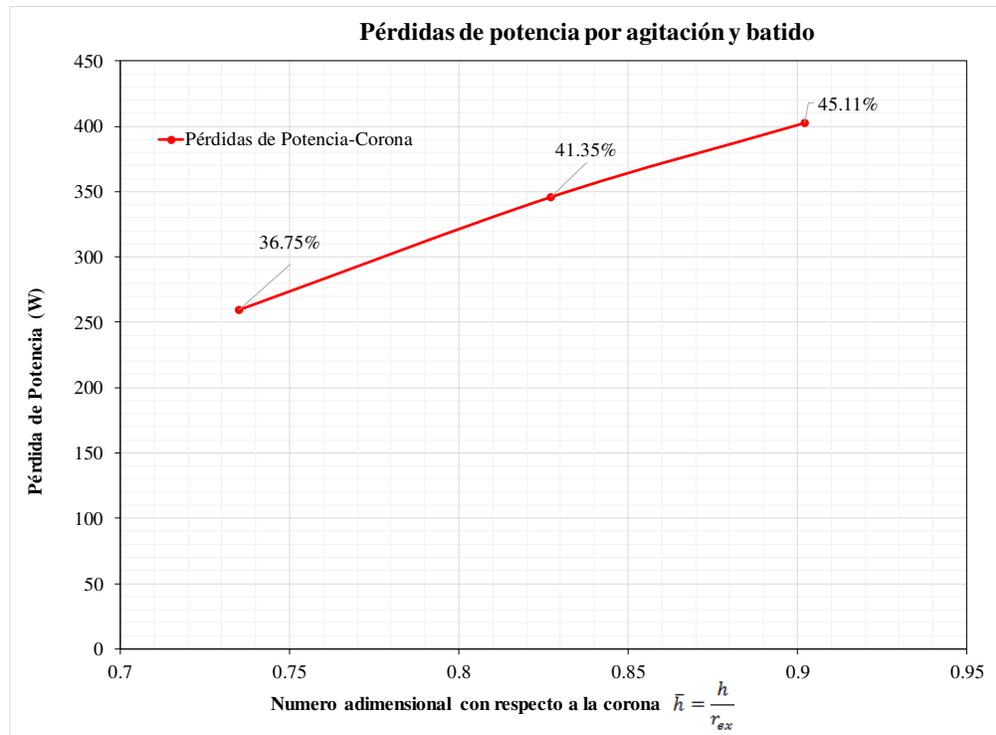


Figura 6. 11: Perdida de potencia (corona) a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado.

### *Paredes del piñón*

En la figura 6.12 se observa los resultados del torque generado en el fluido por el engrane piñón, de aquí se ilustra que su valor de inmersión va desde por debajo de la mitad ( $\bar{h} = 0.79$ ), uno en la mitad de inmersión del engrane ( $\bar{h} = 1.057$ ) y otro por encima de la mitad de inmersion ( $\bar{h} = 1.14$ ), con valores de 0.69 Nm, 0.96 Nm y 1.21 Nm respectivamente. Así mismo se puede ver en la figura 6.13, las pérdidas de potencia generadas, con su respectivo porcentaje de inmersión.

La tendencia de pérdidas que aporta el piñón se puede observar en la figura 6.13 es de tipo lineal con una tendencia de crecimiento exponencial luego que hay una inmersión de más de la mitad de engrane.

Los valores promedio de las pérdidas de potencia son para 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado en el diferencial de 76.93 Watts, 113.08 Watts y 146.85 Watts respectivamente.

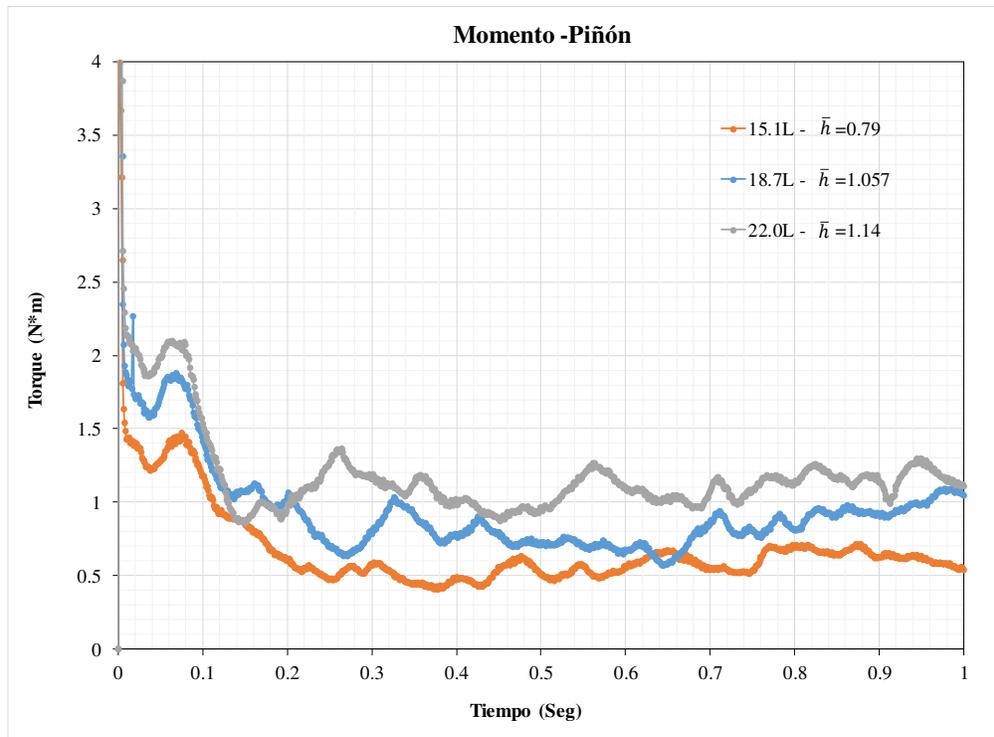


Figura 6. 12: Momentos generados en el piñón a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros.

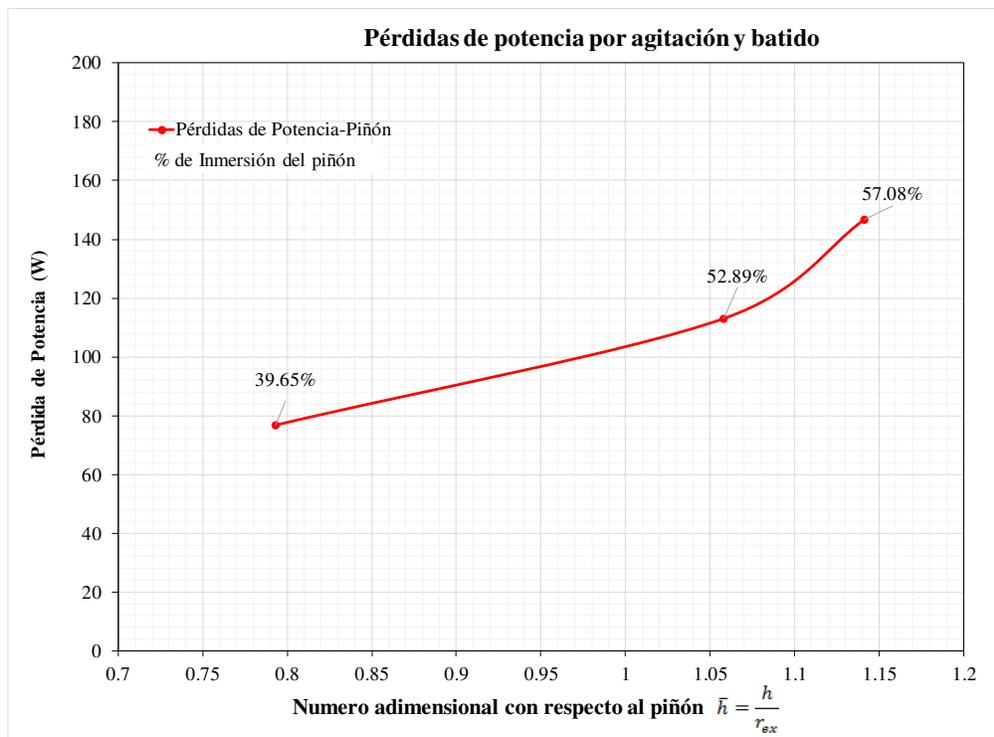


Figura 6. 13: Pérdida de potencia (piñón) a 15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros de llenado.

### *Resultados del total de pérdidas de potencia (piñón+corona)*

En términos generales el total de torque generado se puede observar en la figura 6.14, donde se muestra cómo se incrementa de manera gradual el torque a medida que aumenta la cantidad de llenado del diferencial, de igual manera se muestra el comportamiento estable de los valores obtenidos en el tiempo de flujo de 1 segundo para cada proyecto.

El promedio de los datos obtenidos para el torque es: 8.72 Nm, 11.65 Nm y 13.6 Nm para 15.1 litros, 18.7 litros y 22.0 litros respectivamente.

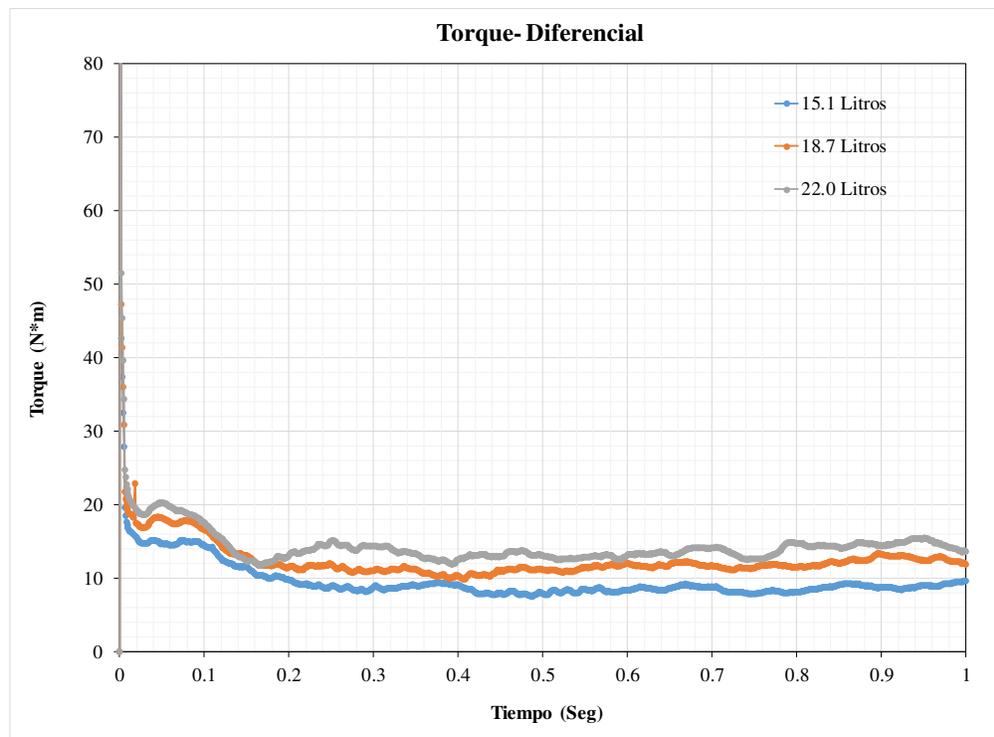


Figura 6. 14: Momento total generado para diferentes niveles de inmersión.

En la figura 6.15 se ilustra el valor del promedio de los datos obtenidos del total de pérdidas de potencia dentro del diferencial en los tres niveles de llenado trabajado. En esta grafica se puede observar el aporte significativo que tiene la corona en comparación del piñón y como se ve su incremento de manera lineal a medida que aumenta el nivel de aceite dentro del diferencial.

El promedio de las pérdidas de potencia es: 336.48 Watts para el de 15.1 litros, 458.8 Watts para el de 18.7 litros y 549.45 Watts para el de 22 litros.

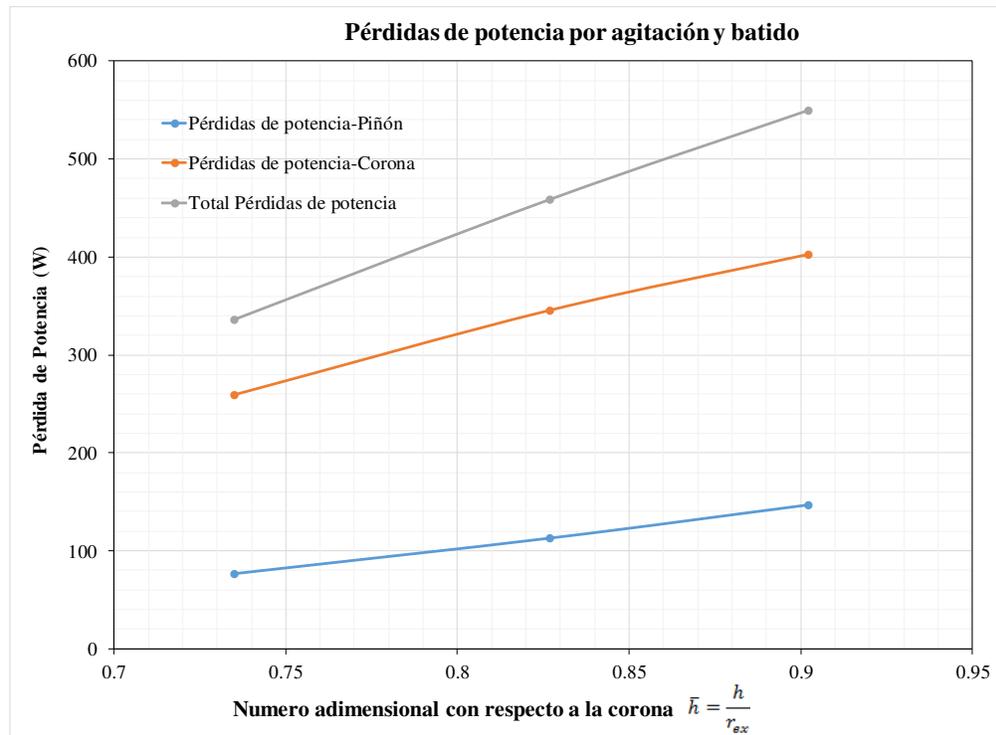


Figura 6. 15: Perdidas de potencia para diferentes niveles de inmersión.

#### *Fracción volumétrica del diferencial para los diferentes niveles de inmersión*

En la figura 6.16, se presenta la fracción volumétrica del aceite, para cada nivel de aceite en el diferencial. En las imágenes se muestra la distribución del aceite en tres instantes de tiempo (0.1 segundos, 0.5 segundos y 1.0 segundo). De igual manera en la figura 6.17, se muestra las líneas de corriente alrededor de los engranes hipoides observándose su tendencia de flujo para los instantes de 0.5 y 1 segundo de tiempo en los tres casos de nivel de llenado (15.1 litros, 18.7 litros y 22 litros), estos desarrollados a 1250 rpm del piñón y con viscosidad y densidad del aceite a 100°C.

En las imágenes de la figura 6.16 se puede observar la fracción volumétrica para los tres casos a partir de 0.5 de aceite en volumen en el espacio, mostrando la predicción del comportamiento y la dirección por donde está fluyendo el aceite.

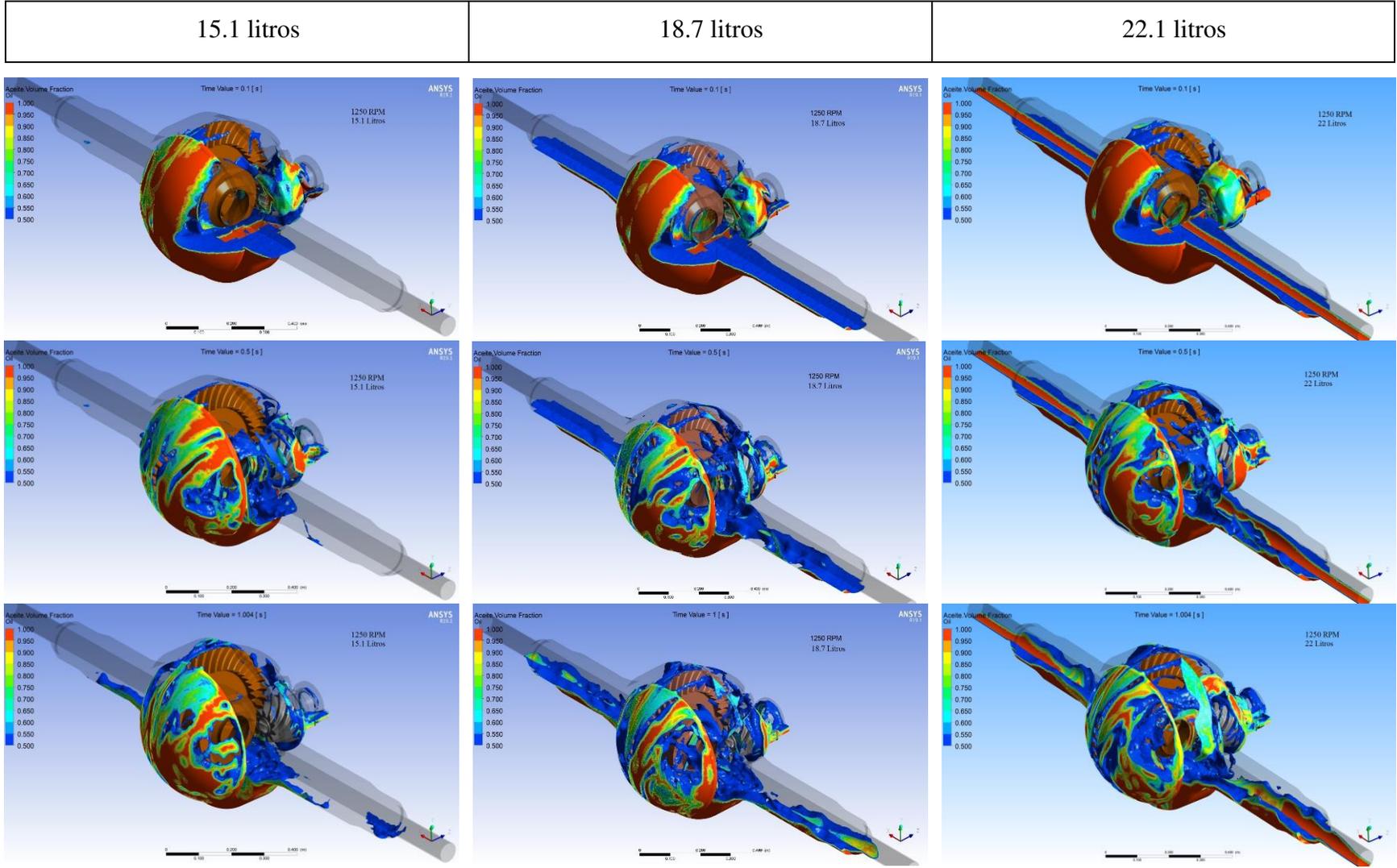


Figura 6. 16: Fracción volumétrica del aceite a diferentes niveles de inmersión.

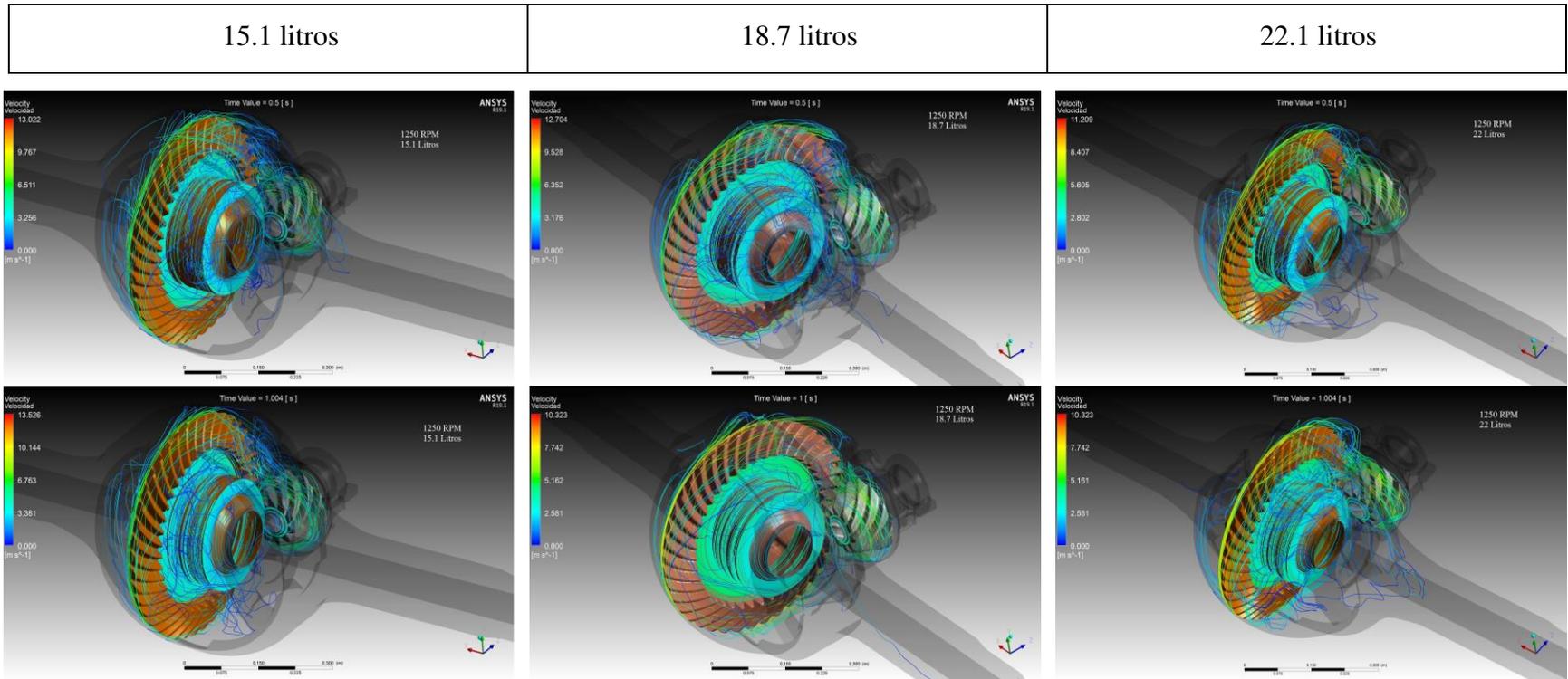


Figura 6. 17: Líneas de corriente alrededor de los engranes, nivel de llenado.

En el caso de 15.1 litros de la figura 6.16 la fracción volumétrica muestra poco flujo de aceite hacia los ejes de la corona, de igual manera se observa poca dirección de flujo hacia la parte superior de la semiesfera del diferencial. También se observa que llega poco aceite en la zona de contacto entre los engranes.

Por otro lado, las imágenes del caso de 22 litros, el flujo es más movido y caótico a los lados del eje de la corona, mostrando mayor presencia en la parte superior de la semiesfera del diferencial.

### *Conservación de masa en el diferencial mecánico*

En la figura 6.18 y 6.19 se muestran los valores obtenidos de masa del aceite, en un tiempo de 1 segundo para cada proyecto simulado (15.1 litros y 22 litros respectivamente). Estos se comparan con el valor de masa exacta calculada para cada caso.

El caso de 18.7 litros es el mismo presentado en la sección anterior para la velocidad de 1250 rpm del piñón razón por la cual, no se presenta.

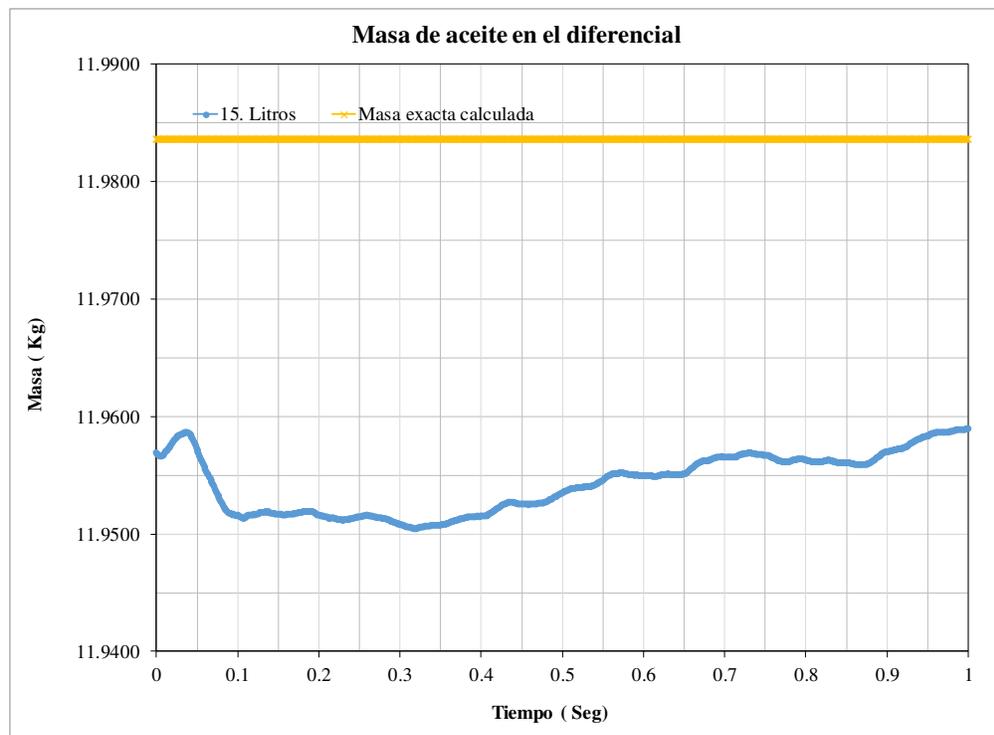


Figura 6. 18: Resultado de conservación de masa para el llenado de 15.1 litros

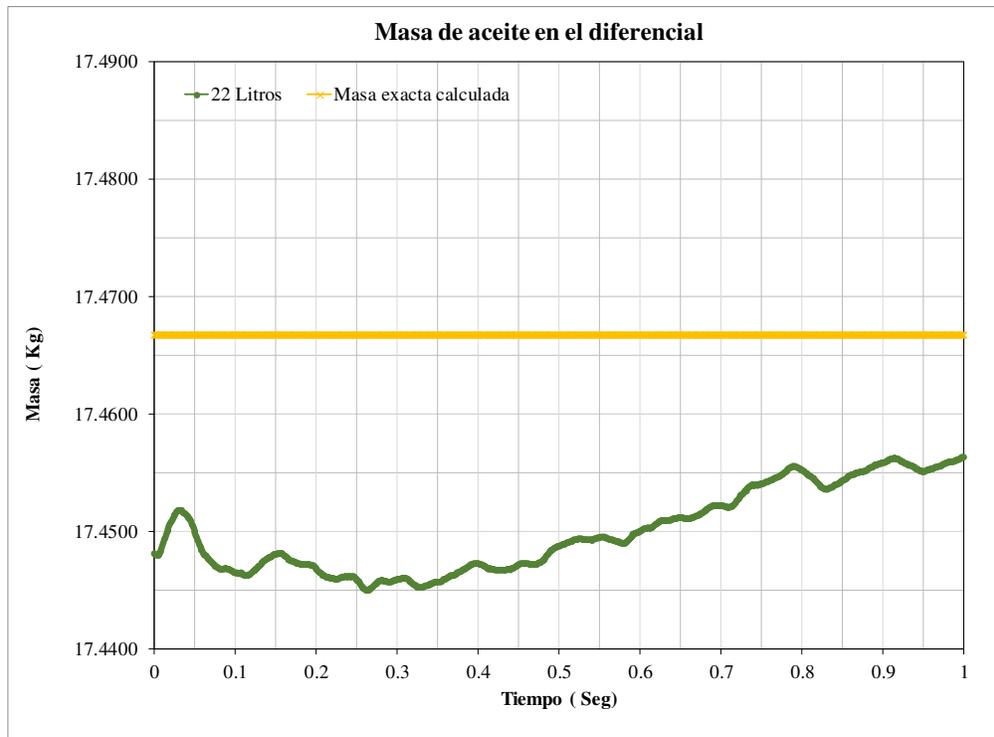


Figura 6. 19: Resultado de conservación de masa para el llenado de 22 litros.

Ahora bien, en la tabla 11 se muestran los resultados del error absoluto calculado a partir del valor del promedio de los datos obtenido en cada caso, y como se muestra el porcentaje de error con respecto a cada caso, este es menor de 0.23 %, lo cual queda sustentado para el criterio de convergencia.

Tabla 11: Resultados (promedio) de error masa de aceite, nivel de llenado.

Nivel de Inmersión (Corona) $\bar{h}$	Volumen exacto [Litros]	Masa exacta [Kg]	Promedio valor masa calculada [Kg]	% De Error Absoluto
0.74	15.11554907	11.98360730	11.95495057	0.239132784
0.83	18.71807271	14.83968805	14.81968244	0.134811509
0.9	22.03170302	17.46673415	17.44924744	0.10011442

### 6.1.3. Caso 3, inclinación del diferencial a 15 grados

#### *Paredes de la corona*

El tercer caso presentado en esta sección es la condición de trabajo del diferencial mecánico cuando se encuentre el vehículo en una pendiente, en este caso se compara la condición del diferencial de manera horizontal (el cual ya se presentó resultados) y uno con una pendiente de 15 grados de inclinación, en ambos casos se tiene el aceite con viscosidad y densidad a 100 °C y una velocidad del piñón a 1250 rpm y 304. 88 rpm de la corona y un volumen de 18.7 Litros.

En la figura 6.20 se muestran los resultados del torque que genera la corona para los dos casos de trabajo (horizontal e inclinado). Se observa que, al estar inclinado, disminuye un poco el torque, con valores promedio para el horizontal de 10.83 Nm y para el inclinado de 8.99 Nm.

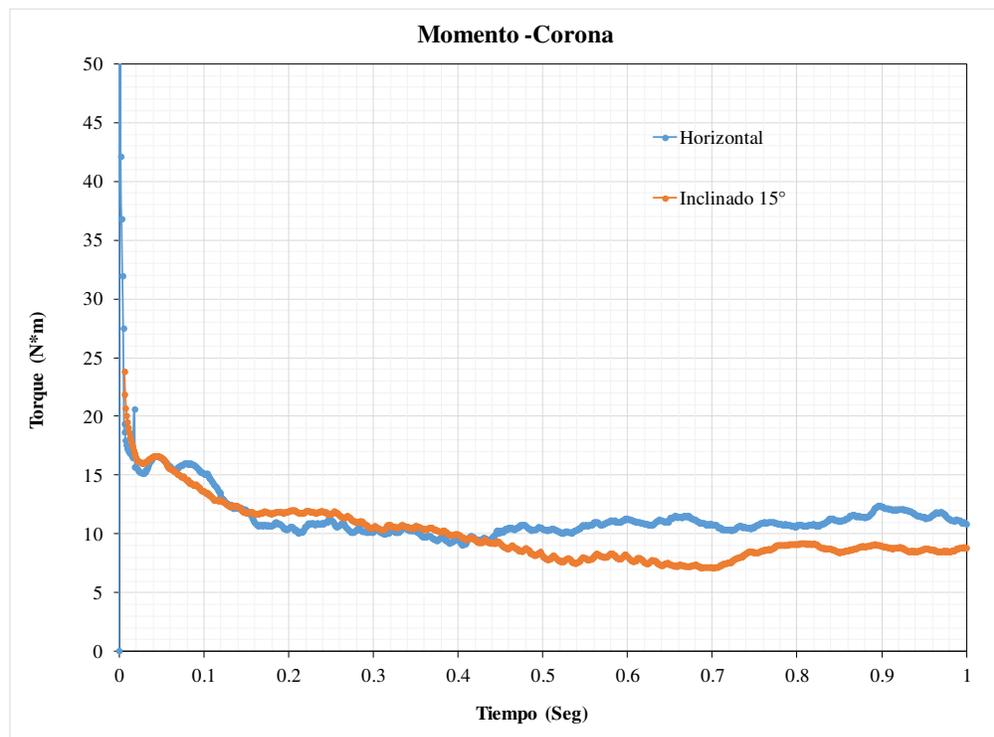


Figura 6. 20: Momentos generados (corona), para el diferencial inclinado.

En la figura 6.21, se muestra ya el resultado obtenido del valor promedio de las pérdidas de potencia para el proyecto del diferencial inclinado y comparándolo con el valor de la posición horizontal del diferencial.

Los resultados obtenidos son: 287.18 Watts para el inclinado 15 grados contra 345.71 Watts del horizontal.

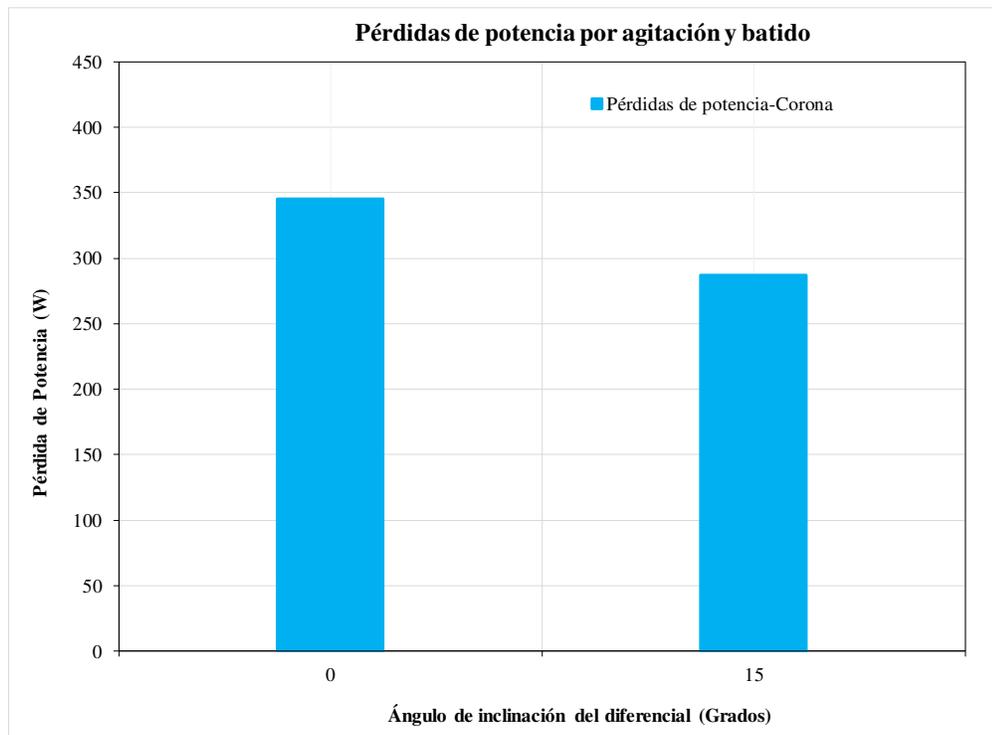


Figura 6. 21: Perdidas de potencia en la corona para el diferencial inclinado.

### *Paredes del piñón*

En la figura 6.22 se ilustran los valores de torque sufridos en el diferencial para el caso del diferencial inclinado contra los valores del diferencial horizontal, de aquí se observa que el torque disminuye al estar inclinado, los valores promedio son: para el inclinado de 0.43 Nm y 0.86 Nm para el horizontal.

En la figura 6.23 se observa las pérdidas de potencia de ambos casos sus valores promedio son: 57.25 Watts para el inclinado y 113.08 Watts para el horizontal.

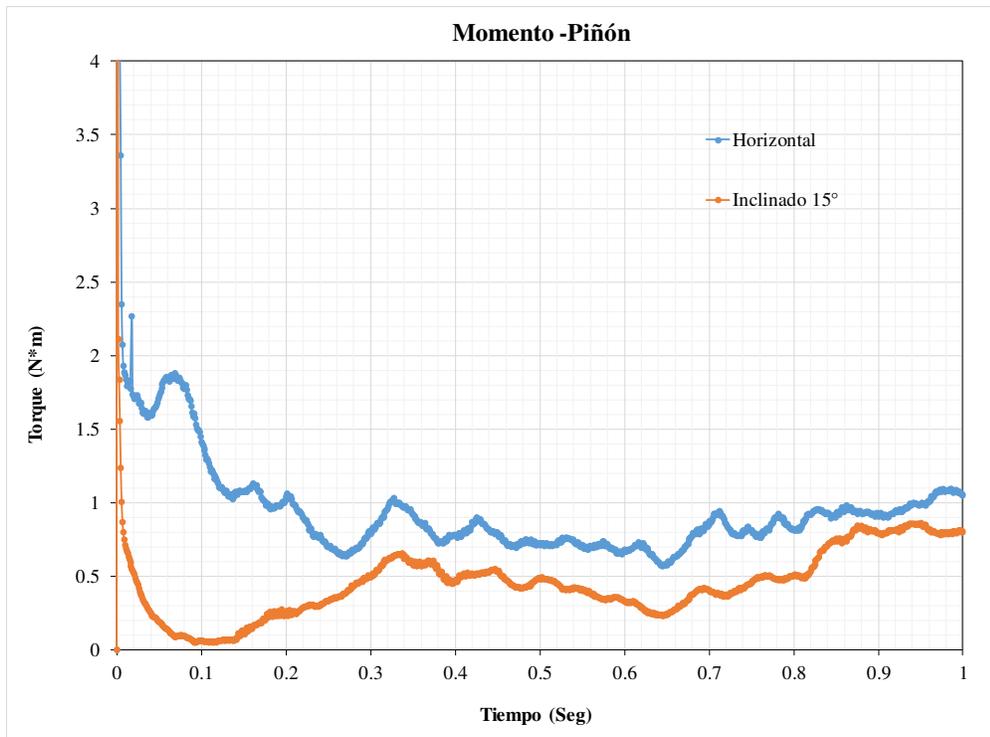


Figura 6. 22: Par momento generado (piñón) para el diferencial mecánico inclinado 15°.

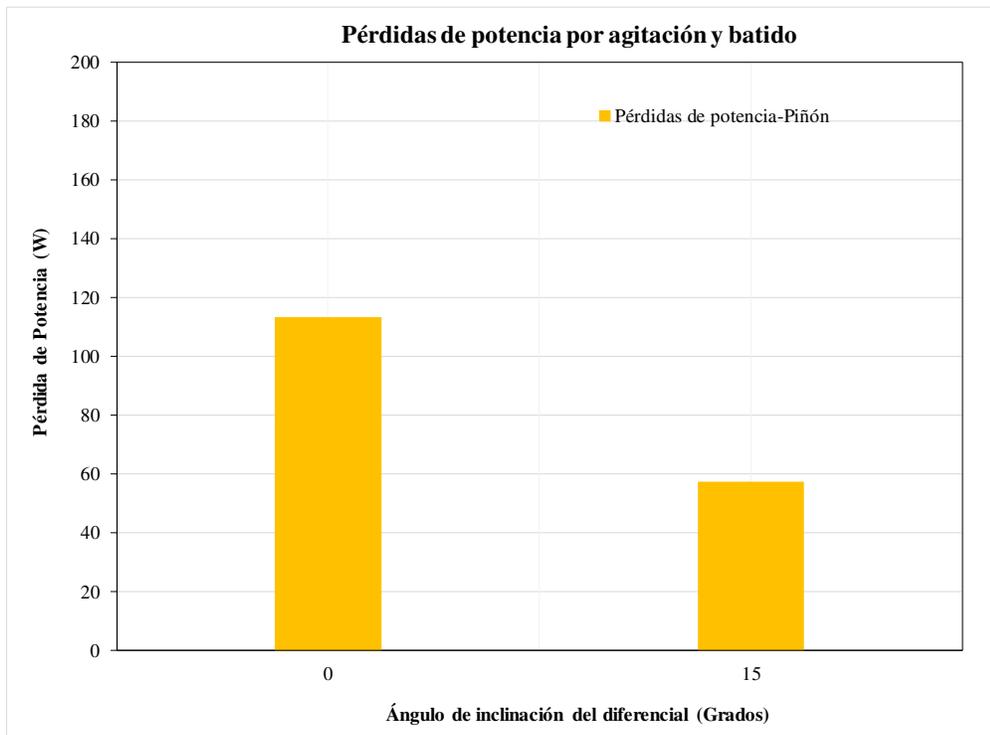


Figura 6. 23: Perdida de potencia en el piñón para el diferencial inclinado.

*Resultados del total de pérdidas de potencia (piñón+corona)*

En resumen, del total de torque generado en el diferencial se observa en la figura 6.24, en términos generales, existe una disminución del torque al momento de inclinar el diferencial a 15 grados, los promedios en los datos de torque son: 9.62 Nm para el inclinado contra 11.65 Nm para el horizontal.

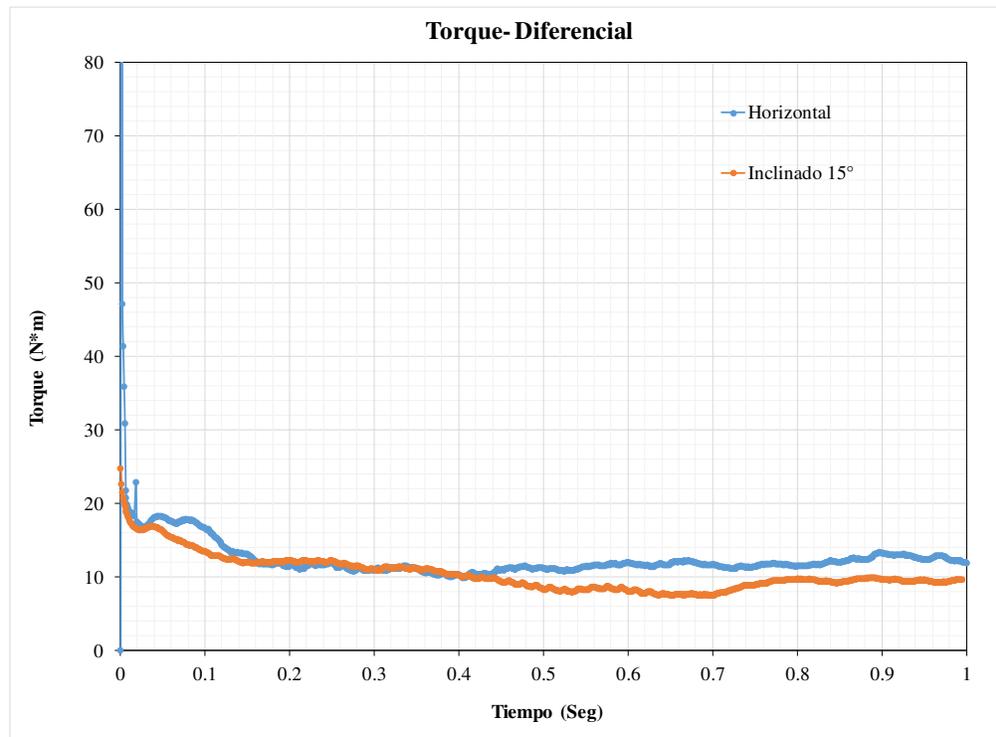


Figura 6. 24: Momento total generado en el diferencial para posición inclinado.

En la figura 6.25 se resume los valores promedios obtenidos de pérdidas de potencia para la posición inclinado y comparándolo con la posición horizontal, se demuestra nuevamente que el aporte para ambos casos lo da la corona y que al estar inclinado disminuye la perdida de esta potencia, y esto se puede deber al hecho de que hay menos lubricante que entra en contacto con las paredes de los engranes y que por la posición e inclinación es menor en el piñón

Los valores promedios reportados del total de pérdidas son: 344.43 Watts y 458.80 Watts para el inclinado y horizontal respectivamente.

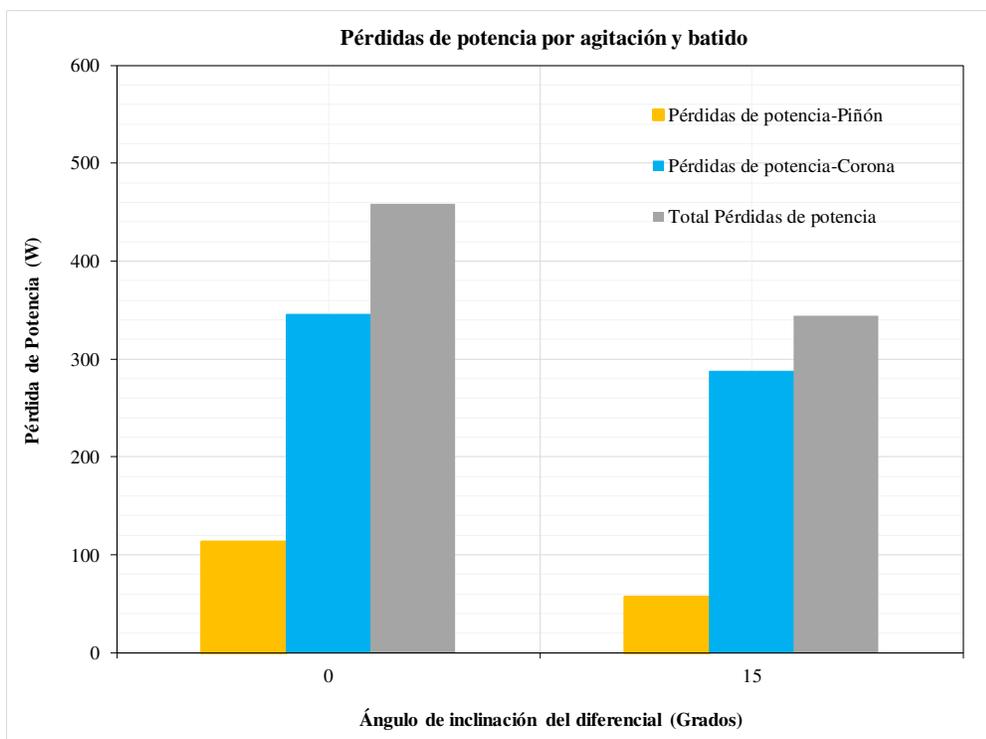


Figura 6. 25: Total pérdidas de potencia generado en el diferencial inclinado.

*Fracción volumétrica del diferencial inclinado*

En la figura 6.26 se muestra la fracción volumétrica del 0.5 en volumen de cantidad de aceite presentado en el diferencial inclinado a 15 ° y comparando con un diferencial en posición horizontal (0°), ambos fueron desarrollados para 18.7 litros, viscosidad y densidad del aceite a 100°C y uno velocidad de rotación del piñón de 1250 rpm. La figura muestra los instantes de 0.1 segundos, 0.5 segundos y 1 segundo de simulación en el flujo de tiempo.

Observando las dos columnas y sus imágenes de agitación y batido al estar más recostado el aceite hacia la semiesfera permite mayor levantamiento de aceite por parte de la corona, a diferencial de la posición a 0 grados. Por el contrario, se observa poca circulación de aceite del lado del piñón al estar inclinado y tener poca inmersión del aceite con el engrane piñón. Así mismo en la figura 6.27 se ilustra las líneas de corriente ocasionada por las paredes del diferencial en el caso inclinado y comparándolas con el de posición horizontal. En el caso de 15° se observa un flujo más turbulento y rotacional recargado en la parte inferior de la semiesfera.

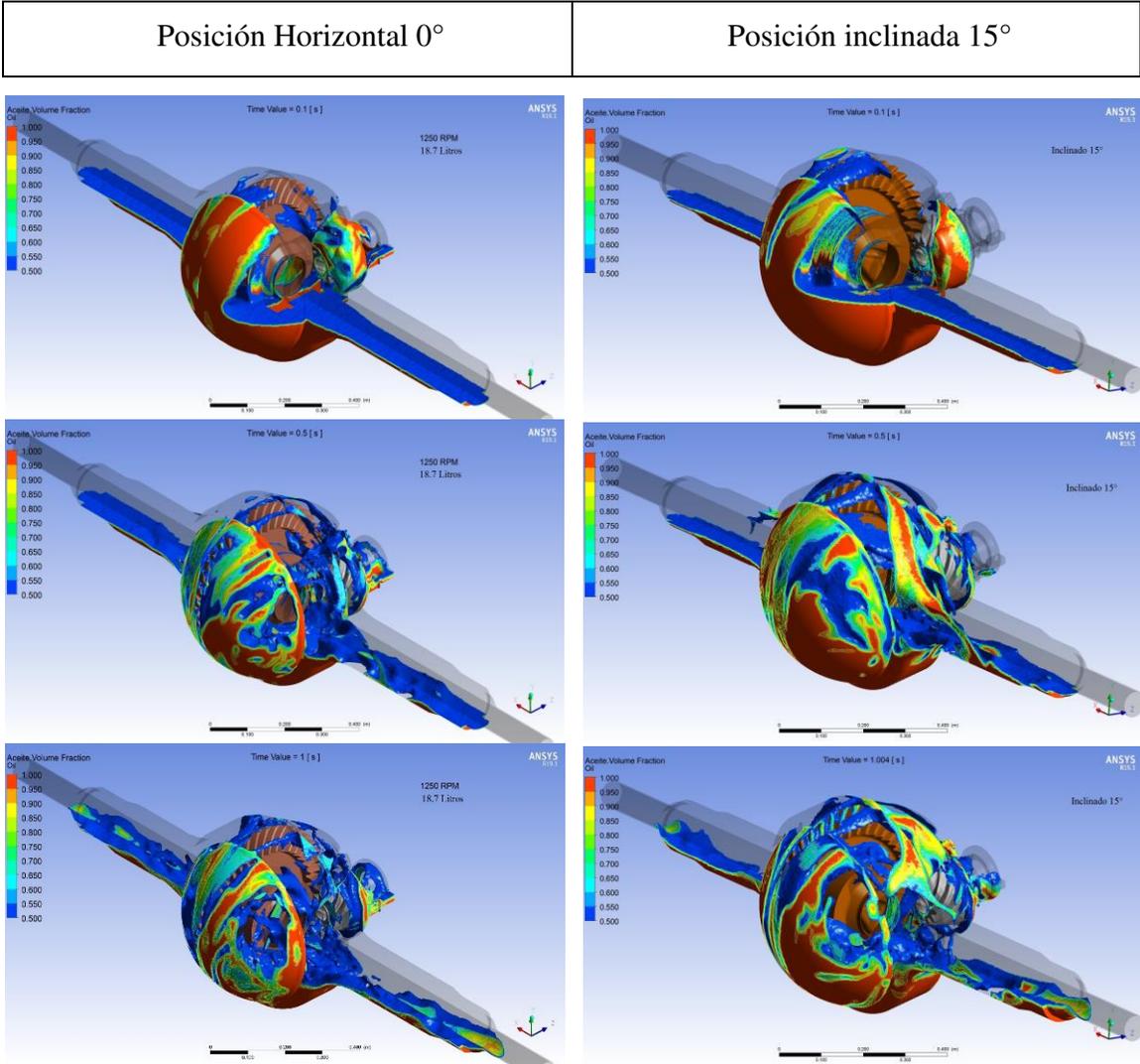


Figura 6. 26: Fracción volumétrica del aceite, posición inclinado.

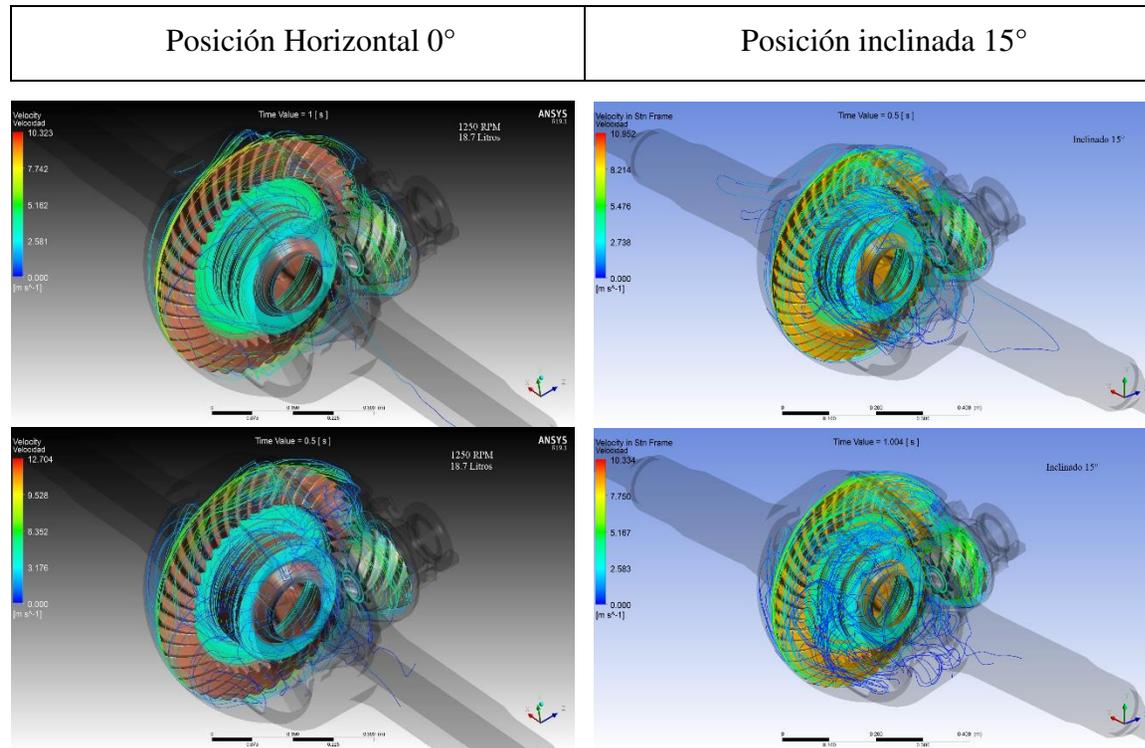


Figura 6. 27: Líneas de corriente alrededor de los engranes, posición inclinado.

### Conservación de masa en el diferencial mecánico

Demostrando el criterio de convergencia del caso simulado para el diferencial inclinado de  $15^\circ$ , se muestra en la figura 6.28 los resultados durante 1 segundo de flujo de tiempo del monitoreo de los valores obtenidos de manera transitoria de la masa calculada con el valor de masa exacta.

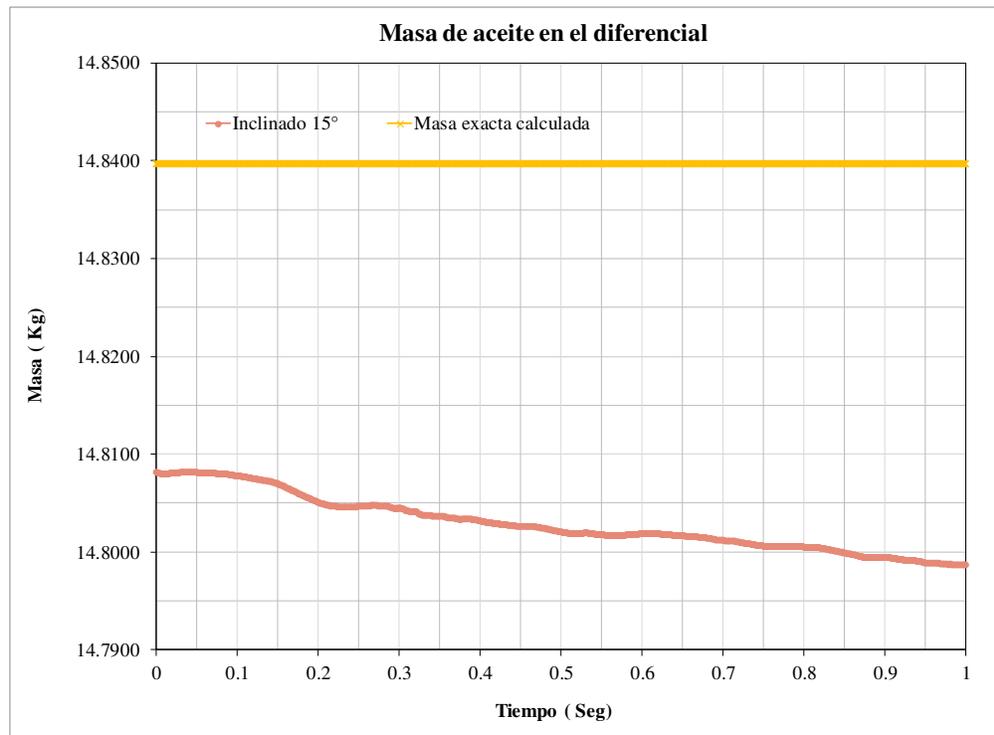


Figura 6. 28: Resultado de conservación de masa, posición inclinado.

A partir de la gráfica mostrada en la figura 6.28 se obtienen los resultados del error absoluto calculado y comparado con el valor en la posición de  $0^\circ$  del diferencial que se muestran en la tabla 12. Para el caso de  $15^\circ$  se obtuvo un error del valor promedio de  $0.23\%$ . Siendo este valor para el criterio de convergencia y equilibrio en el cálculo de las ecuaciones.

Tabla 12: Resultados (promedio) de error masa de aceite, posición inclinado.

Inclinación del diferencial [° grados]	Volumen exacto [Litros]	Masa exacta [Kg]	Promedio valor masa calculada [Kg]	% De Error absoluto
15	18.71807271	14.83968805	14.80200660	0.253923442
0	18.71807271	14.83968805	14.81968244	0.134811509

#### 6.1.4. Caso 4, velocidades de rotación del piñón con malla dinámica y deslizando

En el cuarto caso, se realiza la comparativa de dos técnicas de malla, malla deslizando y malla dinámica. Se obtienen los resultados de cada simulación desarrollada con malla dinámica a diferentes velocidades de rotación del piñón (500 rpm, 1250 rpm, 2000 rpm) y los obtenidos con malla deslizando bajo las mismas condiciones de operación.

##### *Paredes de la corona*

En la figura 6.29 se pueden ver los resultados de los momentos generados sobre la corona a 500 rpm del piñón con malla dinámica (color azul), los cuales son un poco fluctuantes debido a la actualización de la malla en cada paso de tiempo, estos valores oscilan aproximadamente entre 2 Nm y 6 Nm. Al mismo tiempo los comparamos para el mismo flujo de tiempo, con los valores obtenidos de la malla deslizando (color naranja) quedando representados dentro del rango de la malla dinámica.

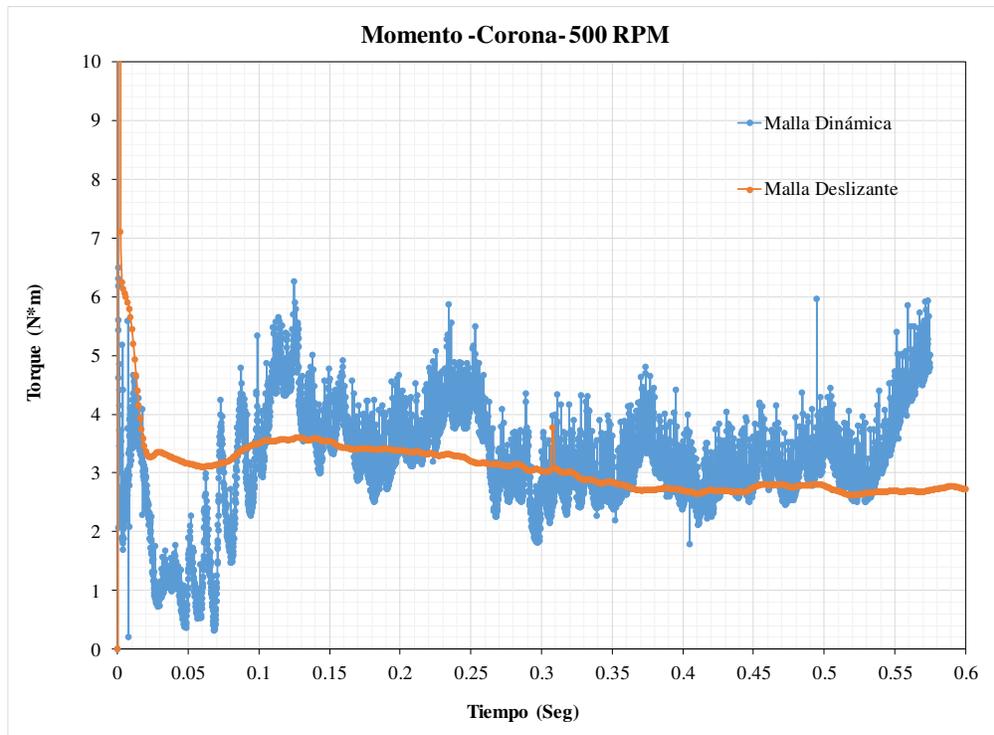


Figura 6. 29: Momentos generados (corona) con malla dinámica a 500 rpm.

Los valores promedio del torque de la figura 6.29 son de 3.152 Nm con malla dinámica contra 2.754 Nm obtenido con malla deslizante

De igual manera en las figuras 6.30 y 6.31 se muestran los momentos generados en la corona para la velocidad de 1250 rpm y 2000 rpm respectivamente.

Para el régimen de 1250 rpm, se obtuvo valor promedio de 11.26 Nm para malla dinámica contra 10.83 Nm para malla deslizante. Por otro lado, para la velocidad de rotación de 2000 rpm se obtuvo con malla dinámica un valor promedio de 23.76 Nm y 27.17 Nm con malla deslizante.

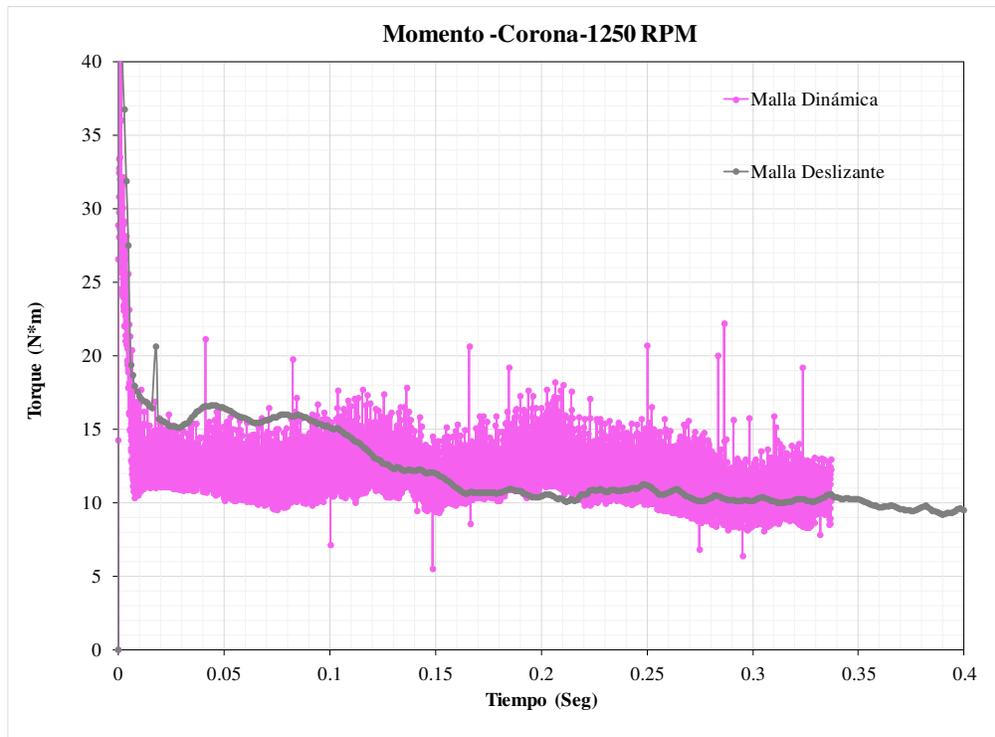


Figura 6. 30: Momentos generados (corona) con malla dinámica a 1250 rpm.

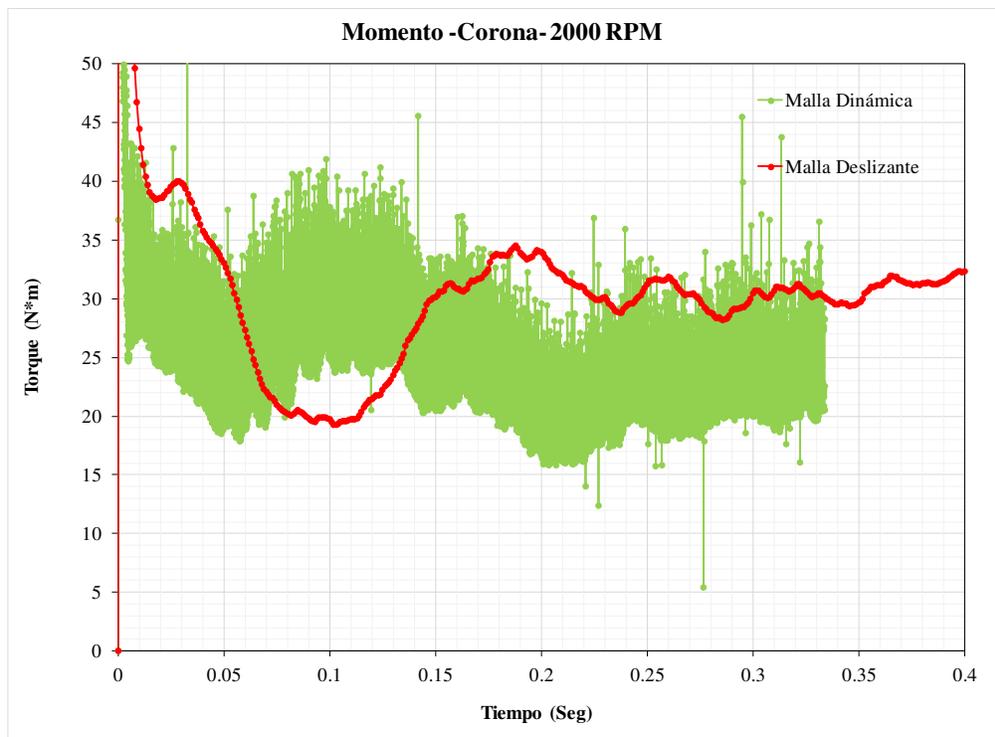


Figura 6. 31: Momentos generados (corona) con malla dinámica a 2000 rpm.

### *Paredes del piñón*

En las figuras 6.32, 6.33 y 6.34 se presentan los resultados de diferentes velocidades del piñón (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm), de los momentos generados en el engrane piñón, usando malla dinámica y comparándolo con los resultados obtenidos para las mismas condiciones con malla deslizante.

En cada figura se observan los resultados de torque más estable en comparación a los datos del momento de la corona, dándose puntos aleatorios o picos altos más notorios en las velocidades de 500 rpm y 1250 rpm (figura 6.32 y 6.33 respectivamente).

Los valores promedios para cada caso son:

- Régimen de 500 rpm: 0.274 Nm (malla dinámica) y 0.275 Nm (malla deslizante)
- Régimen de 1250 rpm: 0.998 Nm (malla dinámica) y 0.863 Nm (malla deslizante)
- Régimen de 2000 rpm: 1.091 Nm (malla dinámica) y 0.911 Nm (malla deslizante).

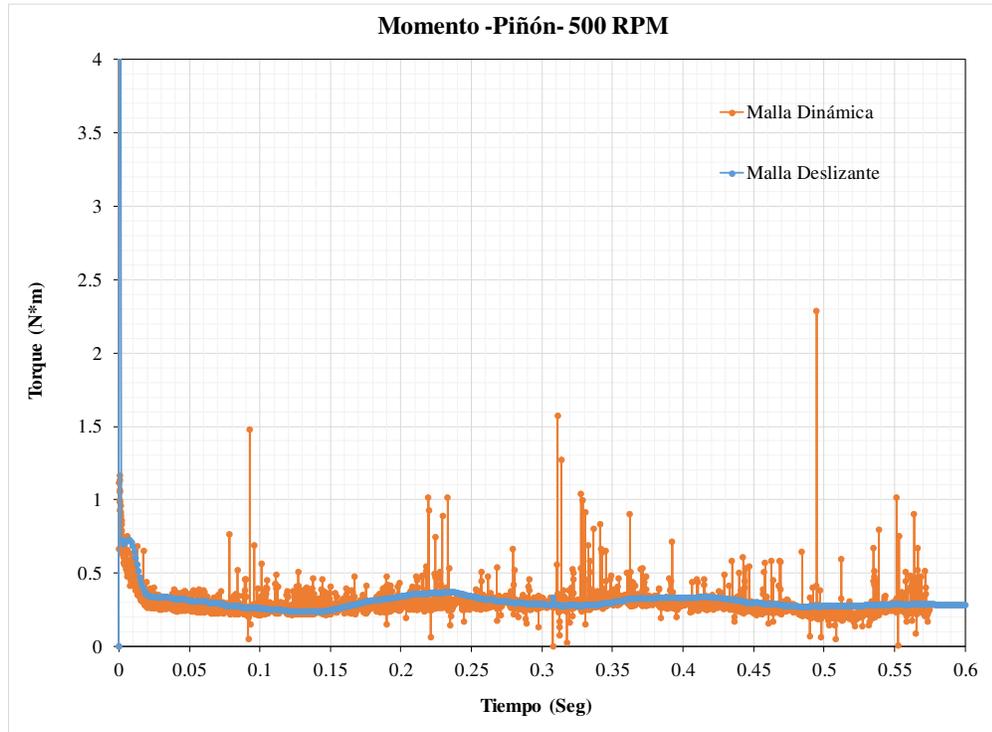


Figura 6. 32: Momentos generados (piñón) con malla dinámica a 500 rpm.

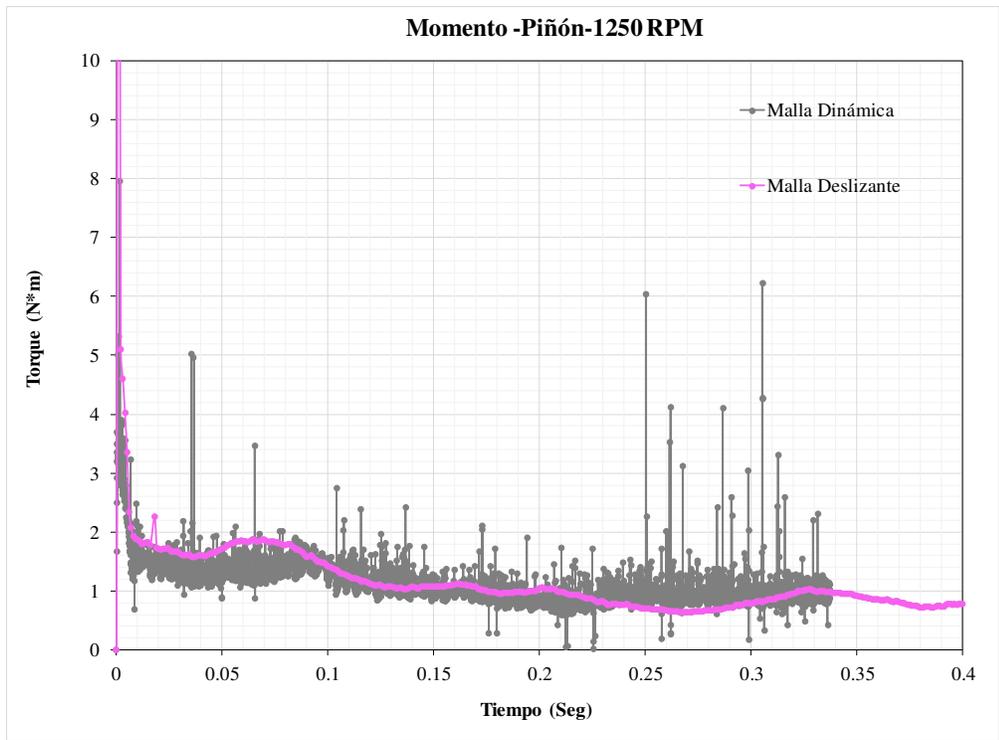


Figura 6. 33: Momentos generados (piñón) con malla dinámica a 1250 rpm.

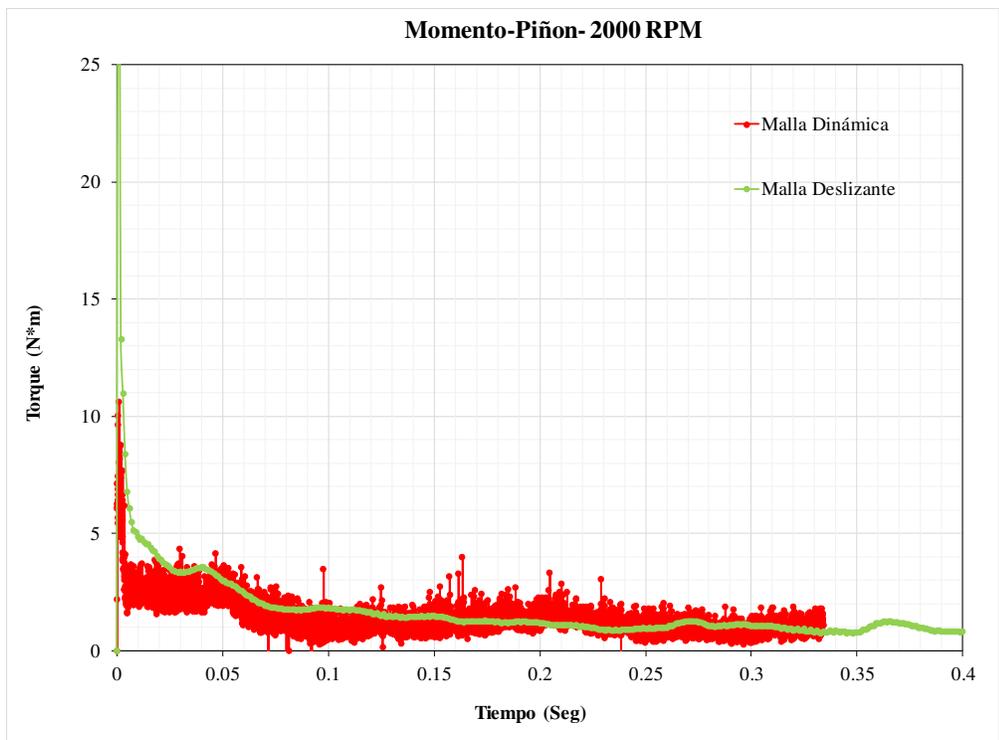


Figura 6. 34: Momentos generados (piñón) con malla dinámica a 2000 rpm.

### Resultados del total de pérdidas de potencia (piñón+corona)

En sumatoria se ilustra en la figura 6.35 los resultados del momento total generado en el diferencial usando con malla dinámica y comparándolo con los datos obtenidos con malla deslizante. En esta figura se muestra una buena aproximación para los tres regímenes de velocidad de rotación presentado. De igual forma se muestra el tiempo máximo simulado con malla dinámica (0.57 segundos para 500 rpm, 0.33 segundos para 1250 rpm y 2000 rpm) y estos se comparan con los datos obtenidos para el mismo flujo de tiempo simulado con malla deslizante.

En la figura 6.36 se presentan de forma cuantitativa los valores promedio de los resultados de las pérdidas de potencias obtenidas con su total (corona más piñón) y los valores aportados por cada engrane. En esta grafica se observa una tendencia similar para ambos casos (dinámica y deslizante) y muestra que la corona desarrolló mayor aporte para las pérdidas de potencia en el diferencial.

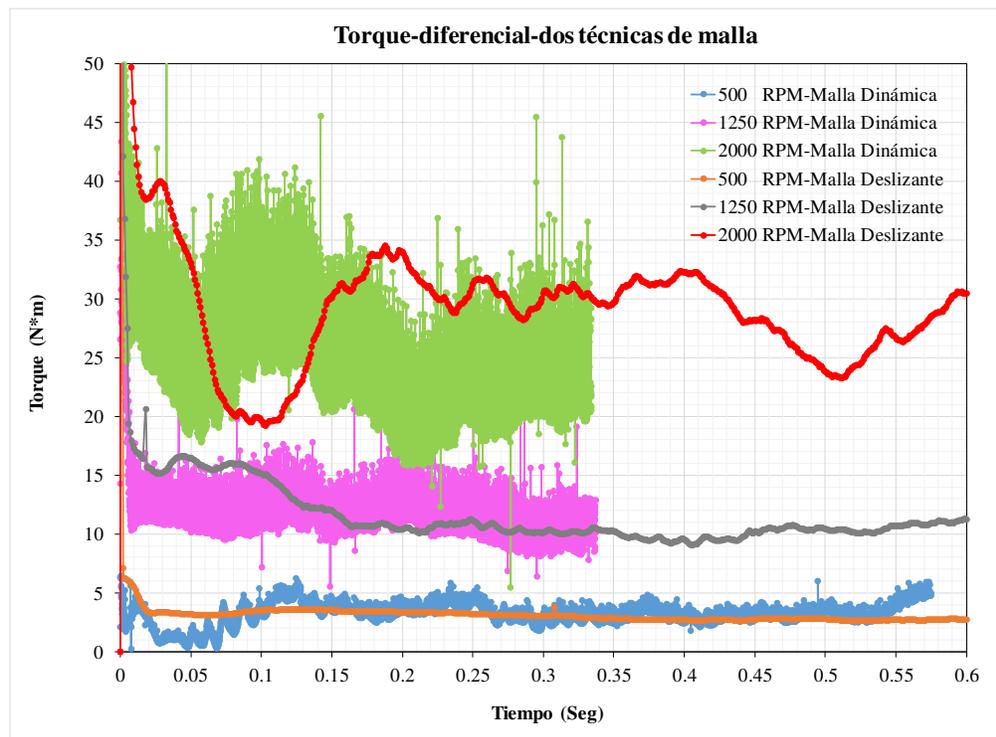


Figura 6. 35: Total torque generado con malla dinámica y malla deslizante.

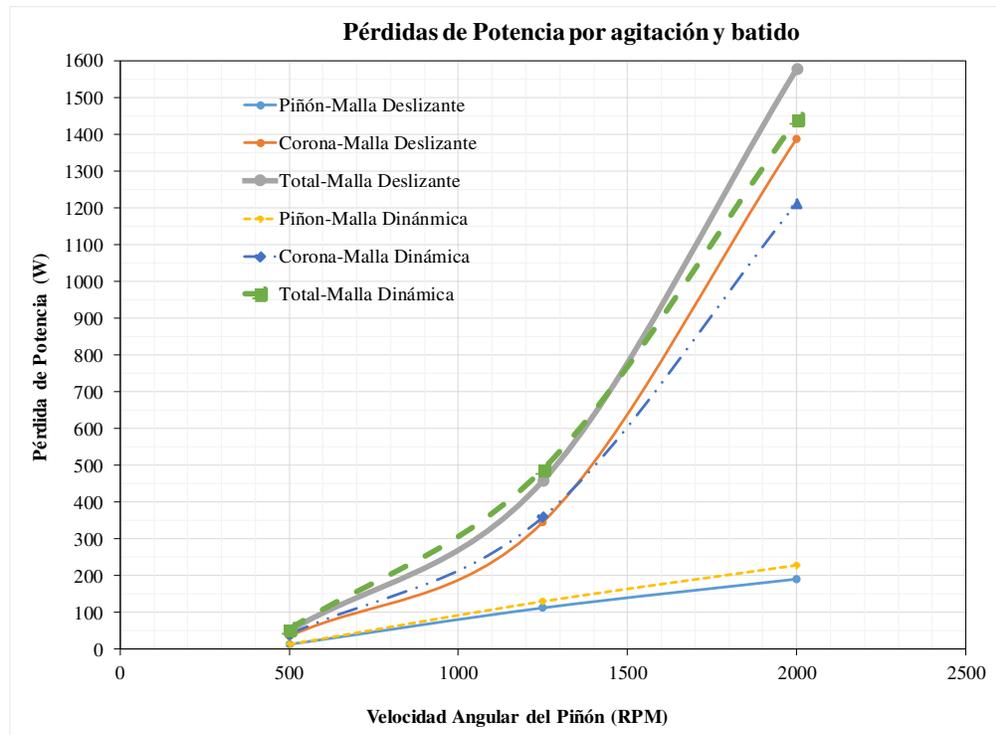


Figura 6. 36: Total perdidas de potencia, con malla dinámica y deslizante.

De la figura 6.36, se presenta en la tabla 13 los resultados de los promedios de las pérdidas de potencia en el diferencial mecánico para el diferencial usado con malla deslizante y comparándola con los valores promedios obtenidas con malla dinámica.

En la tabla 13 se observa que el error absoluto haciendo la prueba para las tres velocidades de rotación se obtuvo un error de aproximación de 9.47 % usando malla deslizante con contraste con la malla dinámica.

Tabla 13: Resultados (promedio) de las pérdidas de potencia.

Velocidad de Rotación Piñón [RPM]	Pérdida de potencia (Malla deslizante) [Watts]	Pérdida de potencia (Malla dinámica) [Watts]	% De Error Absoluto
500	49.58496295	54.63717356	9.246837425
1250	458.7514494	490.2672541	6.428290768
2000	1579.215721	1442.600573	9.470060516

### *Fracción volumétrica agitación y batido*

En las figuras 6.37, 6.38 y 6.39 se puede ver la fracción volumétrica del aceite en el diferencial mecánico para 500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm respectivamente. Se puede observar en cada figura los resultados de la agitación y batido realizada con malla dinámica y comparándolo con malla deslizante. En estas figuras se puede observar la cercana predicción de flujo del aceite que hay dentro del diferencial usando malla deslizante al compararla con la malla dinámica. En todos los casos se tiene que la salpicadura la dirige la corona y la envía hacia la parte frontal del diferencial (semiesfera de la carcasa), moviéndose de abajo hacia arriba. De igual manera que en la zona del engrane del piñón se levanta el aceite de abajo hacia arriba. La única diferencia que se observa con las simulaciones con malla dinámica es la naturaleza un poco turbulenta que muestra el aceite hacia los costados de los ejes de la corona, en comparación con la deslizante donde se observa un poco calmado para el tiempo comparado de la simulación (0.3 segundos mostrados).

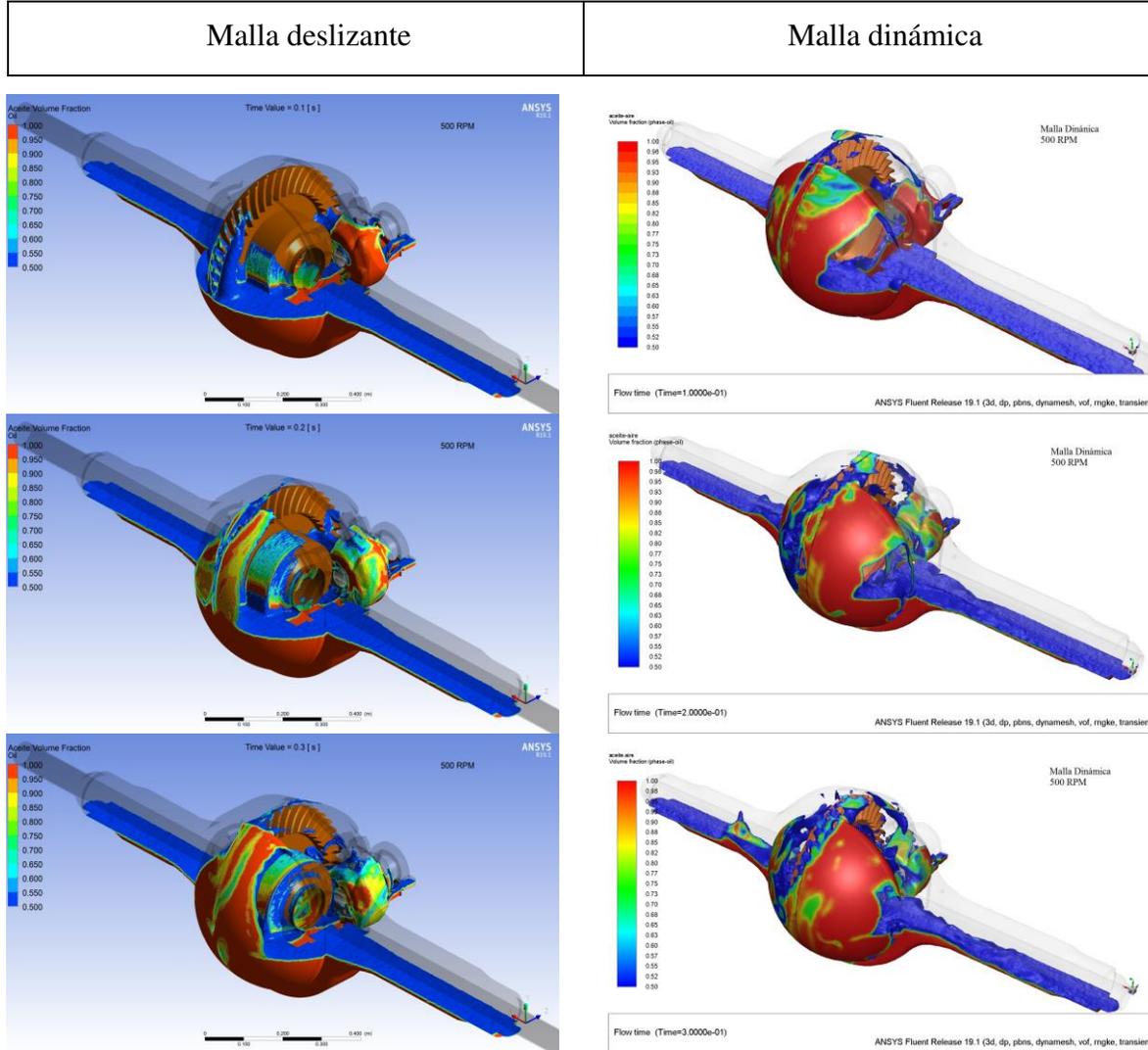


Figura 6. 37: Fracción volumétrica del aceite, malla dinámica a 500 RPM.

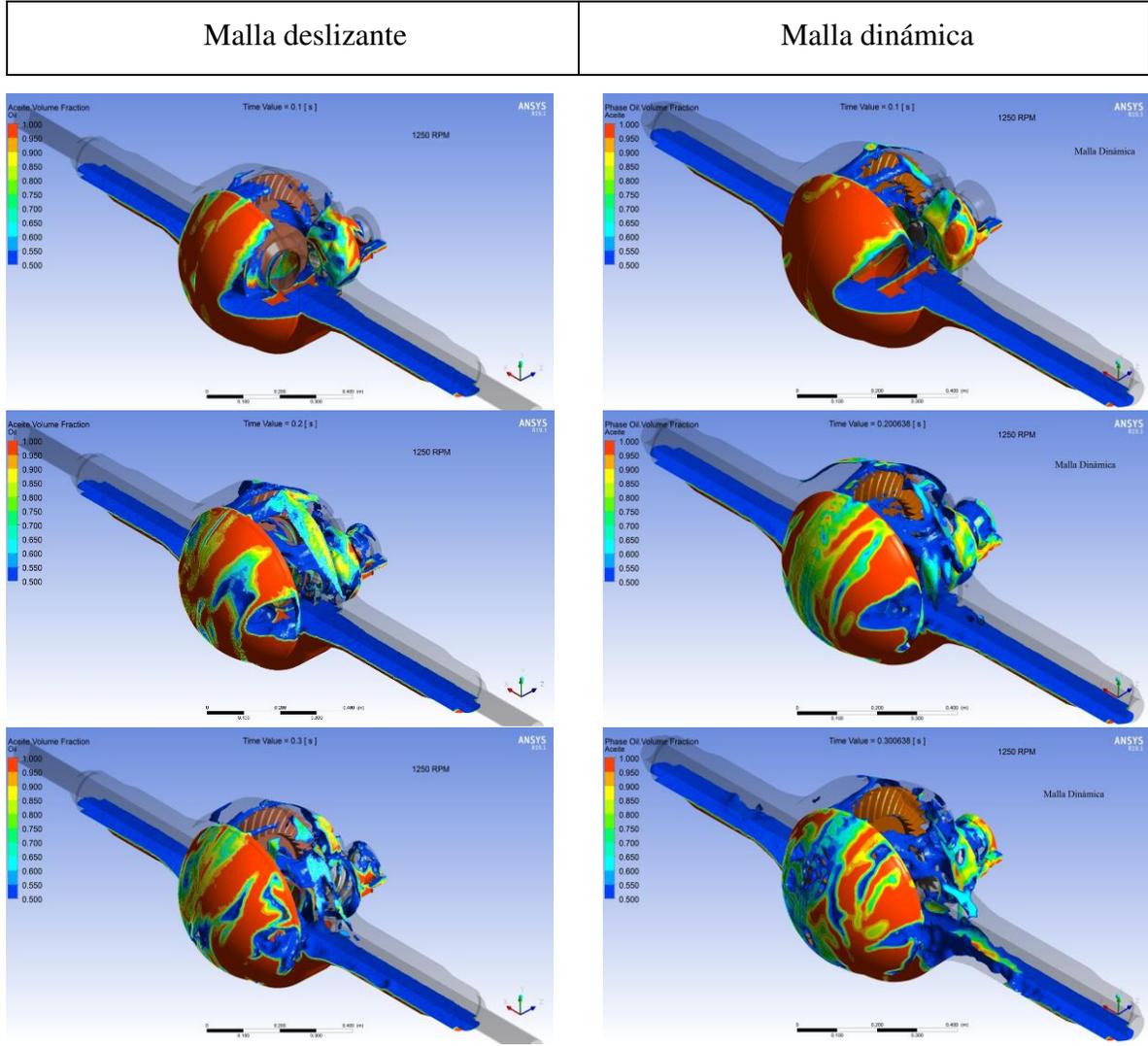


Figura 6. 38: Fracción volumétrica del aceite, malla dinámica a 1250 RPM.

Malla deslizante	Malla dinámica
------------------	----------------

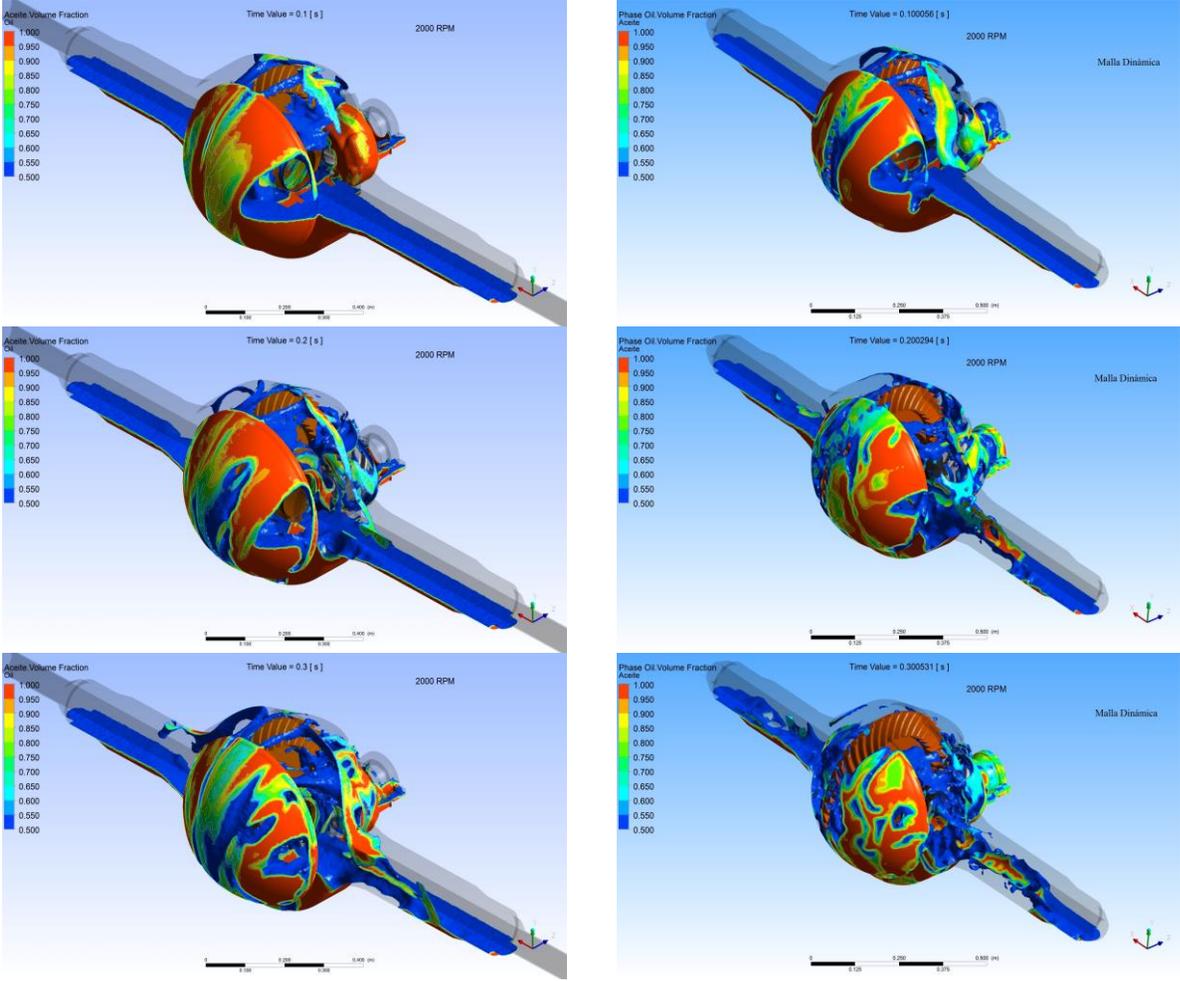


Figura 6. 39: Fracción volumétrica del aceite, malla dinámica a 2000 RPM.

### Conservación de masa en el diferencial mecánico

En la figura 6.40 se muestran los resultados para el flujo de tiempo simulado máximo, los valores de masa calculada, con las simulaciones realizadas con malla dinámica. En ella se muestra que sus valores no se alejan mucho del valor exacto calculado.

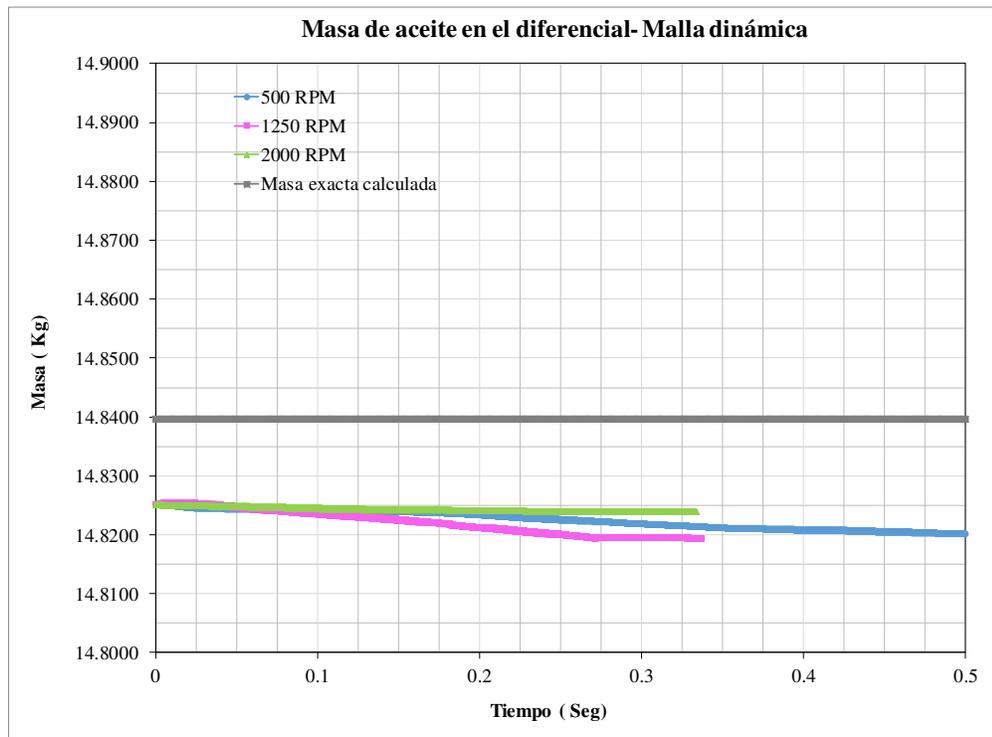


Figura 6. 40: Conservación de masa calculado con malla dinámica.

Los resultados del error absoluto de la masa calculada se presentan en la tabla 14, donde se tienen los valores promedios para los tres casos simulados (500 rpm, 1250 rpm y 2000 rpm) observando un error máximo de 0.11 %, el cual es un porcentaje aceptable para cumplir con el criterio de convergencia.

Tabla 14: Resultados (promedio) de error masa de aceite, malla dinámica.

<b>Velocidad de rotacion piñon [RPM]</b>	<b>Volumen exacto [Litros]</b>	<b>Masa exacta [Kg]</b>	<b>Promedio valor masa calculada [Kg]</b>	<b>% De Error absoluto</b>
500	18.71807271	14.83968805	14.82199869	0.119203042
1250	18.71807271	14.83968805	14.82155098	0.122220008
2000	18.71807271	14.83968805	14.82414998	0.104706166

*Desempeño del tiempo de simulación realizado*

En la tabla 15 se muestra los resultados del tiempo de pared obtenidos usando las dos técnicas de mallado. Comparándola cada uno con los tres regímenes de velocidad de rotación simulados.

Se puede observar la ventaja del uso de la técnica con malla deslizante al obtener mayores flujos de tiempo alcanzados en menor tiempo de pared. Siendo un aumento en eficiencia de hasta un 79 % más rápido usando la malla deslizante. Donde se usan las mismas prestaciones de hardware (un máximo de 16 unidades central de procesamiento o CPU en ingles usadas para la simulación).

Incluso se alcanzó un desarrollo de eficiencia de 42 % más rápido con el uso de malla deslizante comparado con el caso de velocidad del piñón de 2000 rpm, donde se usó malla dinámica y que se trabajó con mayor CPU de la computadora, (se usó el máximo de 32 CPU) a un modelo con menor número de elementos de malla.

Se analiza que, aunque al utilizar una malla dinámica, tengamos un menor número de elementos de malla se requiere un tamaño de paso de tiempo menor, comparándolo con el que se usa con malla deslizante, lo que se traduce en la necesidad de realizar mayor número de iteraciones totales y tener un mayor tiempo de pared o tiempo natural real para alcanzar un flujo de tiempo simulado deseado.

Tabla 15: Datos técnicos de simulación mediante el uso de malla deslizante y malla dinámica a tres diferentes velocidades de rotación del piñón.

Desempeño técnicas de mallado						
Velocidades de rotación del piñón [RPM]	500		1250		2000	
Parámetro/Técnica de Malla usada	Malla deslizante	Malla dinámica	Malla deslizante	Malla dinámica	Malla deslizante	Malla dinámica
Número de elementos	4,042,128	2,127,590	4,042,128	2,127,590	6,390,092	2,127,590
Tamaño de paso de tiempo [seg]	0.001	0.0001	0.001	0.00005	0.001	0.0000375
Máxima iteraciones por paso de tiempo	30	25	35	25	40	20
Numero de nodos usados (CPU)	16	16	16	16	16	32
Total de iteraciones hechas	30145	143,656	35138	166,961	40170	177,940
Tiempo promedio de reloj de pared por iteración [seg]	5.43	5.33	5.39	5.44	8.61	3.37
*Tiempo total de reloj de pared [seg]	163,672.28	765,542.82	189,499.23	908,768.72	345,823.53	598,768.10
*Tiempo total de reloj de pared [Hora]	45.465	212.651	52.639	252.436	96.062	166.324
*Tiempo total de reloj de pared [días]	1.894	8.860	2.193	10.518	4.003	6.930
Flujo de tiempo simulado [seg]	1.00	0.57	1.00	0.33	1.00	0.33

\* Tiempo total de reloj de pared : Tiempo total natural de la duración o separación de acontecimientos (tiempo real)

## 6.2. Discusión

A partir de los resultados descritos anteriormente en este trabajo para los 4 casos principales donde se muestra los valores del torque y potencia que se generan en el aceite al ser rotados por una configuración de engranes hipoides. Los cuales operan bajo las condiciones descritas en la tabla 8 se tiene los siguientes aspectos a tener en cuenta y considerar:

Todas las simulaciones se desarrollaron bajo el programa de computo Ansys-Fluent 19.1, y su convergencia en todos los residuales en cada simulación se mantuvieron estables, con un valor de escala menor a  $1e-03$  para la continuidad, campo de velocidades (x, y, z), ecuaciones de turbulencia (k y e) y fracción volumétrica como se muestra en la figura 6.41

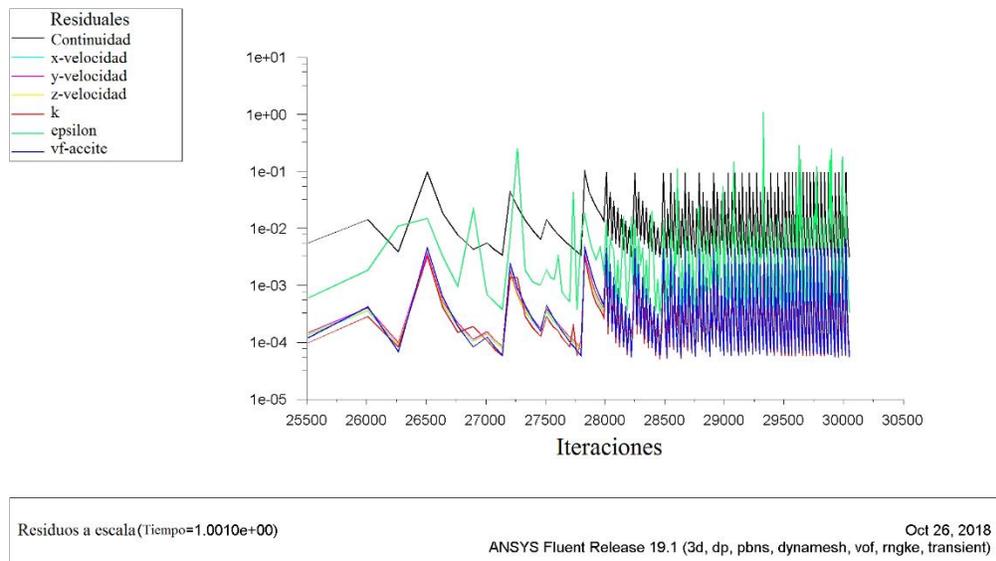


Figura 6. 41: Resultado de residuales para 1250 rpm del piñón y 18.7 litros.

Además, se monitoreo la propiedad de la cantidad de masa en la diferencial traducida en la densidad y volumen fijado en cada simulación para el tiempo de flujo corrido. En eso se muestra que el máximo error de diferencia con respecto a la masa exacta es de 0.11 %, siendo un valor aceptable para la convergencia y logrado para los diferentes números de elementos mallados en cada proyecto (6,390,0092, 4,042,128, 2,989,969 y 2,127,590 elementos tetraédricos)

Los resultados de torque y potencia, aunque no se pudieron corroborar con alguna prueba física experimental exacta, se investigó y compararon los resultados obtenidos en diferentes cajas de transmisión de engranes y específicamente en diferenciales operados por engranes cónicos en espiral e hipoides. Mostrando la misma tendencia similar de los resultados de torque y perdidas de potencia a las diferentes velocidades de rotación, y diferentes niveles de inmersión.

En el trabajo de Kakavas, Olver y Dini [111] desarrollaron un estudio a través de pruebas físicas y simulación de la eficiencia de un eje diferencial de un vehículo para tres diferentes velocidades (500 rpm , 1000 rpm y 2000 rpm) y dos diferentes lubricantes con a temperatura de 50°C y 30°C , con viscosidades de 22, 48, 67 y 160 cSt . Cada uno de los resultados obtenidos por los investigadores muestra que para el torque hay una tendencia lineal con valores entre un rango de 2 Nm y 13 Nm y para la potencia una

tendencia exponencial entre un rango de 0 y 2500 Watts, en el caso de 22 cst, el cual es el similar al a este trabajo con 26 cst de viscosidad, los rangos fueron entre 2 y 8 Nm de torque y 0 y 1300 Watts contra los obtenidos en este trabajo donde tenemos torques entre 2 y 28 Nm y perdidas de potencia entre 54 y 1579 Watts. Considerando que la geometría de los engranes y rodamientos de estos investigadores no está especificado, ni la relación de transmisión.

La investigación de Laurelle, Fossier, Changenet, et al [112] desarrollaron investigaciones experimentales de las pérdidas de potencia en engranes cónicos en espiral, estudiaron diferentes tamaños de engranes parcialmente inmerso en aceite, en el banco de pruebas probaron diferentes niveles de inmersión y dos tipos de viscosidad a 40 y 50 °C, donde por ejemplo para un engrane cónico en espiral con diámetro externo de 157 mm , 41 dientes , una inmersión de  $\bar{h} = 0.5$ , 50°C con 25.1 cSt de viscosidad obtuvieron valores de torque entre el rango de 0.15 y 0.35 Nm para un rango de 1000 a 2000 rpm de velocidad de rotación comparándolo con los datos obtenidos del piñón de 159.97 de diámetro externo con 10 dientes para  $\bar{h} = 0.96$  y rango de 500-2000 rpm valores de torque de entre 0.27 y 0.96 Nm , manteniéndose para proporción de crecimiento con respecto al trabajo investigado.

Y Finalmente un trabajo similar desarrollado por Peng, Gui, y Fan [92] muestran por medio de simulación y experimento la distribución de aceite 85W90 en el diferencial, el torque o momento y las pérdidas de potencia generados por el piñón y la corona con una relación de transmisión de 4.11, diámetro de paso de 425.13 y 117.65 mm para la corona y el piñón respectivamente con un total de pérdidas de potencia de tendencia exponencial en un rango entre 0 y 1250 Watts en un rango de 415 a 1867 rpm de rotación del piñón.

# CAPÍTULO VII.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

### 7.1. Conclusiones

Se realizó una investigación por medio de un análisis numérico computacional de un eje diferencial de un vehículo con engranes hipoides. A partir de la búsqueda de trabajos e investigaciones hechas anteriormente, se construye un modelo en CFD considerando el flujo multifase por el método VOF y seleccionando el modelo de turbulencia k-e RNG, el cual es el más adecuado entre el incremento del costo computacional y el nivel de aproximación.

Se utiliza y compara dos técnicas de mallado para la solución numérica de mallas en movimiento. La técnica de malla deslizante, que consistió en mover de posición el eje piñón una distancia mínima que permitiera revolucionar dos conos (una el piñón y el otro de la corona) sobre una zona de malla estática.

La técnica con malla dinámica consistió en modificar los flancos del perfil del diente del piñón, para poder generar un mayor, y que con trabajos anteriores ha demostrado una mejora en el remallado en la zona de acoplamiento, celdas muy deformadas y disminuir la no convergencia de la solución.

Los resultados numéricos proporcionaron una visualización directa del flujo de aceite dentro de la caja de engranajes hipoides, y la distribución del aceite y la pérdida de potencia por agitación a partir de los momentos generados en la capa de fluido conjunta a la pared de los engranes.

Como se predijo en resultados de trabajos anteriores, se muestra la influencia de las condiciones de trabajo como la velocidad, nivel de aceite de la inclinación del diferencial. Los valores obtenidos muestran que la corona contribuye más a la pérdida total por

agitación en el eje. Las predicciones para la distribución de aceite y las pérdidas de agitación fueron comparador conservando su tendencia como trabajos e investigaciones anteriores desarrollados.

De las tres diferentes variables en las condiciones de operación evaluadas (velocidad, nivel de inmersión e inclinación del diferencial), queda demostrado que a medida que se tenga mayor velocidad de rotación en los engranes aumentará el torque de resistencia y por ende se tendrá mayor pérdida de potencia por agitación, llegando ser hasta 20 unidades más que si se compara con el aumento de torque al tener mayor cantidad de aceite en el diferencial. En el caso de la inclinación del diferencial de  $15^\circ$  disminuye a causa de la disminución de lubricación de las paredes de los engranes al verse recargado el aceite hacia el costado de la semiesfera del diferencial.

Para las dos técnicas de malla usadas es importante tener una buena calidad de malla para la obtener una buena aproximación en la simulación. Con valores de oblicuidad por debajo de 0.9 en la posible o tener en la mayoría de los elementos celdas con oblicuidad que ronde por debajo de 0.5

Comparando las dos técnicas con respecto el método de movimiento de flancos y uso de la malla dinámica, la malla deslizante nos sirve como primera aproximación siempre y cuando nuestro objetivo es saber de entrada la distribución de flujo de aceite y las pérdidas de potencias en general en el diferencial.

La ventaja del método de malla deslizante es que no se tiene que realizar un remallado, lo cual, por una parte, evita posibles errores relacionados con el proceso de remallado, y por tanto la solución es muy estable. Por otro lado, aun cuando al hecho de que se puede generar una malla relativamente gruesa, y de que se pueden usar pasos de tiempo relativamente mayores, resulta en simulaciones más rápidas que con el método de mallado dinámico. La desventaja es evidentemente que se tiene que modificar la geometría, y por lo tanto se puede llegar a perder una parte donde ocurren importantes procesos (zona de acoplamiento).

Como se mostró en los resultados en la tabla 13, el promedio de los datos usando malla deslizante y comparándola con los realizados con malla dinámica nos dan un error

de aproximación de 9.47 %, lo cual es aceptable para los flujos de tiempo que se puede alcanzar (1 segundo) en tiempo de pared de 4 a 2 días en cálculo de la simulación.

Por otro lado, si se comparan los tiempos con los obtenidos por malla dinámica, estos son muchos mayores: flujos de tiempo de 0.33 segundos con tiempo de pared de entre 10 y 6 días en cálculo de la simulación.

## **7.2. Recomendaciones**

De acuerdo con las simulaciones realizadas en CFD de cada uno del proyecto y su comparación con trabajos previos realizados, se recomienda el desarrollo de una prueba física a través de un banco de prueba del prototipo para confirmar el comportamiento y distribución del flujo del aceite.

Debido a que los modelos de simulación solo se trabajaron con las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento, se recomienda hacer mayores análisis, activando la ecuación de la energía, para observar el comportamiento de la viscosidad y densidad en función de la temperatura Usando el método de malla deslizantes y con los mismos recursos de computo permite tener resultados con mayores tiempos análisis en menos días de duración de cálculo.

Otros factores que se pueden estudiar es la variación de presión que ocurren al interior del diferencial al trabajar a temperaturas mayores a 100 °C. De igual manera ver cómo influye la presión atmosférica en el comportamiento, sea una condición a nivel del mar o un diferencial trabajando a grandes alturas.

Se recomienda también desarrollar simulación variando diferentes lubricantes, para observar su comportamiento y flujo en el diferencial.

En el trabajo futuro, este método de modelado se aplicará a un eje motriz complejo, incluyendo los rodamientos y demás engranes (planetarios) en el diferencial los cuales pueden llegar a influir en los valores de pérdidas de potencia debido a la distribución y flujo del aceite, y se explorará una estrategia de optimización para la distribución de aceite y la pérdida de batido.

### **7.3. Aportación científica**

Una contribución importante de este trabajo es el desarrollo de un enfoque factible para predecir el flujo de aceite y las pérdidas de potencia por agitación a un eje complejo. En caso de no tener recursos de hardware avanzados, con el método de malla deslizante es posible alcanzar soluciones rápidas en menor tiempo posible. En el trabajo posterior, se planea aplicar los métodos de optimización para reducir la pérdida de batido del eje.

El uso de una metodología aplicada a una configuración compleja de engranes de transmisión sirve para estudiar casi la mayoría de los sistemas de transmisión de engranajes siguiendo los procedimientos y pasos descritos en el presente trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] H. Xu, A. Kahraman, N. E. Anderson, and D. G. Maddock, “Prediction of Mechanical Efficiency of Parallel-Axis Gear Pairs,” *J. Mech. Des.*, vol. 129, no. 1, p. 58, Jun. 2007.
- [2] R. G. Budynas and J. K. Nisbett, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*, Octava Edi. 2008.
- [3] Grimonprez Transmission Gears nv, “Grimonprez Transmission Gears S.A SPECIAL GEARBOXES & ALL TYPES OF GEARS SINCE 1950,” 1950. [Online]. Available: <http://www.grimonprez.com/en/products/spiral-bevel-gears>. [Accessed: 04-Jul-2018].
- [4] H. ENGINEERING, “HOLINGER ENGINEERING,” 2018. [Online]. Available: <https://holinger.com.au/showroom/spiral-bevel-and-hypoid-gears>. [Accessed: 04-Jul-2018].
- [5] M. Kolivand and A. Kahraman, “A load distribution model for hypoid gears using ease-off topography and shell theory,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 44, no. 10, pp. 1848–1865, 2009.
- [6] L. Wilcox and W. Coleman, “Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Stresses,” *J. Eng. Ind.*, vol. 95, no. 4, p. 1139, 1973.
- [7] R. F. Handschuh and F. L. Litvin, “How to Determine Spiral Bevel Gear Tooth Geometry for Finite Element Analysis,” in *NASA Technical Memorandum 105150*, 1991.
- [8] D. H. Myszka, *Máquinas y mecanismos*, Cuarta. 2012.
- [9] D. Brown, *DAVID BROWN GEAR TOOLS AND METROLOGY LTD- BASIC GEAR-BOOK*. 1995.
- [10] H. C. Chao, M. Baxter, and H. S. Cheng, “A Computer Solution for the Dynamic Load , Lubricant Film Thickness , and Surface Temperatures in Spiral-Bevel Gears,” no. April, 1986.
- [11] V. Simon, “Elastohydrodynamic Lubrication of Hypoid Gears,” *J. Mech. Des.*, vol. 103, no. 1, p. 195, 1981.
- [12] G. Niemann and H. Winter, *Maschinenelemente*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [13] J. M. Cimbala and Y. a. Cengel, “MECÁNICA DE FLUIDOS, Fundamentos y aplicaciones,” vol. Primera Ed, MCGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE MEXICO, Ed. Cambridge, 2003, p. 992.
- [14] M. Farrall, K. Simmons, S. Hibberd, and C. Young, “Computational Investigation of the Airflow Through a Shrouded Bevel Gear,” in *Volume 3: Turbo Expo 2005, Parts A and B*, 2005, vol. 2005, no. 47268, pp. 1259–1265.
- [15] S. Rapley, C. Eastwick, and K. Simmons, “The Application of CFD to Model Windage Power Loss From a Spiral Bevel Gear,” in *Volume 6: Turbo Expo 2007, Parts A and B*, 2007, vol. 2007, no. 47950, pp. 47–56.
- [16] S. Rapley, C. Eastwick, and K. Simmons, “Effect of Variations in Shroud Geometry on Single Phase Flow Over a Shrouded Single Spiral Gear,” in *Volume 4: Heat Transfer, Parts A and B*, 2008, pp. 1483–1492.
- [17] “ANSYS software,” 2018. [Online]. Available: <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>. [Accessed: 04-Jul-2018].

- [18] ANSYS Inc., “ANSYS Fluent Theory Guide Release 18.1,” 18.1, 2017.
- [19] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, vol. 11, no. 5. Elsevier, 2015.
- [20] M. Robert L., *Diseño de elementos de máquinas*, Cuarta. Mexico, Pearson Educacion, 2006.
- [21] A. Suhane, R. S. Rana, and R. Purohit, “Prospects of Torsen Differential in Four Wheel Drive Automobile Transmission System,” *Mater. Today Proc.*, vol. 5, no. 2, pp. 4036–4045, 2018.
- [22] K. Inderwisch, R. Mustafa, and F. Küçükay, “Efficiency Optimization of Transmissions,” in *Proceedings of the FISITA 2012 World Automotive Congress*, 2013, pp. 151–161.
- [23] C. Singh, L. Kumar, B. kumar Dewangan, Prakash kumar sen, and K. Shailendra Bohidar, “A Study on Vehicle Differential system,” *Int. J. Sci. Res. Manag.*, vol. 2, no. 11, pp. 1680–1683, 2014.
- [24] P. K. Sen, S. Kumar Bohidar, L. Kumar, B. Kumar Dewangan, and C. Singh, “Study on Classification of Differential System in Automobile,” *Int. J. Res. Appl. Sci. Eng. Technol.*, vol. 2, no. XI, pp. 191–194, 2014.
- [25] L. Kumar, C. Singh, B. Kumar, B. K. Dewangan, P. K. Sen, and S. K. Bohidar, “Study on the Front Axle and Rear Axle Attached to Differential System,” *IJIRST –International J. Innov. Res. Sci. Technol.*, vol. 1, no. 7, pp. 9–12, 2014.
- [26] P. K. Sen, S. K. Bohidar, and N. P. Sahu, “Study on Differential for Optimum Utilization in Automobile,” *Int. J. Res. Appl. Sci. Eng. Technol.*, vol. 3, no. V, pp. 353–357, 2015.
- [27] R. L. Norton, *Diseño De Máquinas-Un enfoque integrado*, Cuarta edi. Peason Educacacion, Mexico, 2011.
- [28] A. D. Deutschman, W. J. Michels, and C. E. Wilson, *Diseño de Maquinas- Teoria y Practica*, Segunda Ed. 1987.
- [29] M. F. Spotts, *Elementos de Máquinas*, Septima. 1999.
- [30] B. J. Hamrock, B. O. Jacobson, and S. R. Schmid, *Elementos de Máquinas*, 1 Edicion. 2000.
- [31] ANSI/AGMA, *Gear Nomenclature, Definitions of Terms with Symbols ANSI/AGMA 1012--G05*. the American Gear Manufacturers Association, 500 Montgomery Street, Suite 350, Alexandria, Virginia 22314, 2005.
- [32] ANSI/AGMA, *Design Manual for Bevel Gears ANSI/AGMA 2005--D03*. the American Gear Manufacturers Association, 500 Montgomery Street, Suite 350, Alexandria, Virginia 22314, 2005.
- [33] S. P. Radzevich, *Second Edition DUDLEY’S-Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*, Second Edi. 2012.
- [34] D. W. DUDLEY, *MANUAL DE ENGRANAJES-Diseño, Manufactura y Aplicacion de Engranajes*, Primera ed. Massachussets: McGraw-Hill Book Company, 1973.
- [35] K. Gupta, N. K. Jain, and R. Laubscher, “Introduction to Gear Engineering,” in *Advanced Gear Manufacturing and Finishing*, Elsevier, 2017, pp. 1–33.
- [36] A. Simón Mata *et al.*, *Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms*, vol. 40. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [37] J. R. Davis, *Gear Materials , Properties , and Manufacture*. ASM International®, 2005.
- [38] V. Moring Faires, *Diseño de Elementos de Maquinas*, Cuarta. 2011.

- [39] G. M. Maitra, *Handbook of Gear Design*, Second. McGraw-Hill Education - Europe, 1994.
- [40] J. Klingelberg, *Bevel Gear*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [41] K. G. I. Co., “KHK Stock Gear,” 1935. [Online]. Available: [https://khkgears.net/new/gear\\_knowledge/gear\\_technical\\_reference/gear\\_forces.html](https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/gear_forces.html). [Accessed: 25-Nov-2018].
- [42] “MASTERLINE LUBRICANTS PVT,” 1991. [Online]. Available: <http://www.masterlineworld.com/index.php/en/knowledge-center/automotive-lubrication/gear-lubrication>. [Accessed: 25-Nov-2018].
- [43] D. A. Lauer, “Gear Lubrication,” in *Encyclopedia of Tribology*, vol. 150, no. 1–2, Boston, MA: Springer US, 2013, pp. 1493–1501.
- [44] V. Stavitskiy, P. Nosko, P. Fil, A. Karpov, and N. Velychko, “Load-Independent Power Losses of Gear Systems: A Review,” *TEKA Kom. Mot. i Energ. Roln*, pp. 205–213, 2010.
- [45] A. A. Lord, “An Experimental Investigation of Geometric and Oil Flow Effects on Gear Windage and Meshing Losses,” 1998.
- [46] K. Michaelis, B. Höhn, and M. Hinterstoiber, “Influence factors on gearbox power loss,” *Ind. Lubr. Tribol.*, vol. 63, no. 1, pp. 46–55, Feb. 2011.
- [47] C. Gorla *et al.*, “CFD Simulations of Splash Losses of a Gearbox,” *Adv. Tribol.*, vol. 2012, no. 1, pp. 1–10, 2012.
- [48] S. Seetharaman, “An investigation of load-independent power losses of gear systems (Dissertation),” The Ohio State University, 2009.
- [49] C. Franco and G. Carlo, “Oil squeezing power losses in gears: a CFD analysis,” in *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2012, vol. 74, no. July 2012, pp. 37–48.
- [50] F. Concli and C. Gorla, “Windage, churning and pocketing power losses of gears: different modeling approaches for different goals,” *Forsch. im Ingenieurwes.*, vol. 80, no. 3–4, pp. 85–99, Dec. 2016.
- [51] H. Liu, T. Jurkschat, T. Lohner, and K. Stahl, “Detailed Investigations on the Oil Flow in Dip-Lubricated Gearboxes by the Finite Volume CFD Method,” *Lubricants*, vol. 6, no. 2, p. 47, May 2018.
- [52] S. Rapley, “Computational investigation of torque on spiral bevel gears,” University of Nottingham, 2009.
- [53] V. L. Streeter and E. B. Wylie, *Mecanica de los fluidos*, 8 edicion. 1995.
- [54] P. J. Pritchard and J. C. Leylegian, *Fox and McDonald’s INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS*, 8 Edition. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [55] S. Goldstein, *Modern Developments in fluid Dynamics*. London: Oxford University Press, 1938.
- [56] M. Robert L., *Mecanica de Fluidos*, 6 edicion. Peason Educacacion, Mexico, 2006.
- [57] G. S. University, “HyperPhysics-Department of Physics and Astronomy,” 2000. [Online]. Available: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/pfric.html>. [Accessed: 30-Nov-2018].
- [58] M. C. Potter and D. C. Wiggert, *Mecanica de Fluidos*, 3 edicion. Thomson, 2003.
- [59] N. committee from F. M. F. (U.S.), “Fundamentals of Boundary Layers.” United States : National Committee for Fluid Mechanics Films, 1968.
- [60] Y. A. Cengel, J. M. Cimbala, and R. H. Turner, *FUNDAMENTALS OF Thermal-Fluid Sciences*, 5 edition. McGraw-Hill Education, 2017.

- [61] C. E. Brennen, *Fundamentals of Multiphase Flows*. Oxford University Press, Inc, 2005.
- [62] Ove Bratland, “Dr. Ove Bratland Flow Assurance Consulting,” 2018. [Online]. Available: <http://www.drbratland.com/PipeFlow2/chapter1.html>. [Accessed: 30-Nov-2018].
- [63] R. V. Giles, *Mecánica de los Fluidos e Hidráulica. Teoría y 75 problemas resueltos*, 2 edición. McGraw-Hill, 1962.
- [64] A. J. Smits, *A Physical Introduction to Fluid Mechanics: Lecture Notes 2018*, Second Edi. Copyright A.J. Smits c 2018, 2018.
- [65] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish, *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*, vol. 113. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [66] Luigi Mihich, “Euler and Lagrange descriptions Euler vs Lagrange, Dipartimento di Fisica,” *Notes ,Università degli studi di Pavia*, 2017. [Online]. Available: [http://fisica.unipv.it/Mihich/FM/7-PDF\\_1\\_sect05.pdf](http://fisica.unipv.it/Mihich/FM/7-PDF_1_sect05.pdf). [Accessed: 30-Nov-2018].
- [67] A. Bakker, “Computational Fluid Dynamics (Course),” *Conservation equations*, 2008. [Online]. Available: <http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/03-cnsrv.pdf>. [Accessed: 03-Dec-2018].
- [68] J. D. Anderson, Jr., *COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS The Basics with Applications*. Cambridge: McGraw-Hill Inc., 1995.
- [69] J. F. Wendt (Editor) *et al.*, *Computational Fluid Dynamics An Introduction*, 3 edition. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [70] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method*, 1 edtion. Longman Scientific & Technical, 1995.
- [71] B. Andersson, R. Andersson, L. Hakansson, M. Mortensen, R. Sudiyo, and B. van Wachem, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Cambridge University Press, 2012.
- [72] M. Schäfer, *Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [73] J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methos for Fluid Dynamics*, 3 edition. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [74] A. Carrillo Ledesma, O. Mendoza Bernal, and K. I. González Rosas, *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*. 2018.
- [75] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3 edition. McGraw-Hill, 2006.
- [76] R. Bhaskaran and L. Collins, “Introduction to CFD Basics,” *Notes ,Cornell University-Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering*. p. 17, 2002.
- [77] J. Guerrero, *Introduction to Computational Fluid Dynamics: Governing Equations, Turbulence Modeling Introduction and Finite Volume Discretization Basics*. 2014.
- [78] ANSYS Inc., “ANSYS Fluent User’ s Guide Releasde 18.2,” 2017.
- [79] D. Engwirda and D. Ivers, “Off-centre Steiner points for Delaunay-refinement on curved surfaces,” *Comput. Des.*, vol. 72, pp. 157–171, Mar. 2016.
- [80] G. Bianchi, S. Rane, A. Kovacevic, and R. Cipollone, “Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines,” *Adv. Eng. Softw.*, vol. 112, pp. 180–191, Oct. 2017.
- [81] D. J. M. Luna, “Numerical solution of the governing Equations (The Finete Volume

- Method)-Modulo III (Curso).” Grupo SSC-Instituto Sanmiguelense, 2016.
- [82] Hirt.C.W and Nichols.B.D, “Volume of Fluid (VOF) Methods for the Dynamics of Free Boundaries,” *J. Comput. Phys.*, vol. 39, no. 1, pp. 201–225, 1981.
- [83] M. Francois, “A Study of the Volume of Fluid Method for Moving Boundary Problems,” Embry-Riddle Aeronautical University - Daytona Beach, 1998.
- [84] F. Concli and C. Gorla, “Influence of lubricant temperature, lubricant level and rotational speed on the churning power loss in an industrial planetary speed reducer: computational and experimental study,” *Int. J. Comput. Methods Exp. Meas.*, vol. 1, no. 4, pp. 353–366, Dec. 2013.
- [85] Y.-S. Kang, D. Sohn, J. H. Kim, H.-G. Kim, and S. Im, “A sliding mesh technique for the finite element simulation of fluid–solid interaction problems by using variable-node elements,” *Comput. Struct.*, vol. 130, pp. 91–104, Jan. 2014.
- [86] David C.Wilcox, *Turbulence Modelling CFD Wilcox*, Second. Griffin Printing, 1994.
- [87] V. Yakhot and S. A. Orszag, “Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory,” *J. Sci. Comput.*, vol. 1, no. 1, pp. 3–51, 1986.
- [88] ANSYS Inc., “Solver Setting-Introductory Fluent Training,” 2006.
- [89] TruckPartsInventory.com, “TruckPartsInventory.” [Online]. Available: <https://truckpartsinventory.com/parts/details/80748970>. [Accessed: 10-Jan-2019].
- [90] ArvinMeritor, *Maintenance Manual 5A Single-Reduction Differential Carriers Single Rear Drive Axles , Rear-Rear Tandem Drive Axles and Front Drive Steer Axles*. Heavy, Meritor Vehicle Systems, LLC, 2008.
- [91] P. Qianlei, G. Liangjin, and F. Zijie., “Gear splash lubrication numerical simulation and validation based on teeth-face-moving method,” *Chinese Soc. Agric. Eng.*, vol. 31, no. 10, pp. 51–56, 2015.
- [92] Q. Peng, L. Gui, and Z. Fan, “Numerical and experimental investigation of splashing oil flow in a hypoid gearbox,” *Eng. Appl. Comput. Fluid Mech.*, vol. 12, no. 1, pp. 324–333, Jan. 2018.
- [93] I. ANSYS, “Module 05 : Mesh Quality & Advanced Topics Introduction to ANSYS Meshing,” pp. 1–19, 2016.
- [94] K. M. Moerman, “GibbonCode-The Geometry and Image-Based Bioengineering add-On.” .
- [95] H. Liu, T. Jurkschat, T. Lohner, and K. Stahl, “Determination of oil distribution and churning power loss of gearboxes by finite volume CFD method,” *Tribol. Int.*, vol. 109, no. December 2016, pp. 346–354, May 2017.
- [96] F. Concli and C. Gorla, “A CFD analysis of the oil squeezing power losses of a gear pair,” *Int. J. Comput. Methods Exp. Meas.*, vol. 2, no. 2, pp. 157–167, Jun. 2014.
- [97] L. Li, H. K. Versteeg, G. K. Hargrave, T. Potter, and C. Halse, “Numerical Investigation on Fluid Flow of Gear Lubrication,” *SAE Int. J. Fuels Lubr.*, vol. 1, no. 1, pp. 2008-01–1650, Jun. 2008.
- [98] E. Korsukova and H. Morvan, “Preliminary CFD Simulations of Lubrication and Heat Transfer in a Gearbox,” in *Volume 5B: Heat Transfer*, 2017, p. V05BT22A014.
- [99] F. Concli, E. Conrado, and C. Gorla, “Analysis of power losses in an industrial planetary speed reducer: Measurements and computational fluid dynamics calculations,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part J J. Eng. Tribol.*, vol. 228, no. 1, pp. 11–

- 21, Jan. 2014.
- [100] C. Kodela, M. Kraetschmer, and S. Basa, “Churning Loss Estimation for Manual Transmission Gear Box Using CFD,” Jan. 2015.
  - [101] H. Metwally, “Multiphase Modeling in Automobile Industries,” 2012.
  - [102] R. Lubeena, “Tips & Tricks : Faster and Accurate Free Surface Flow Modeling Tips & Tricks : Mesh for VOF Simulation,” 2014.
  - [103] Castrol, “Axle GL-5 85W-140 Multigrade, API GI-5 Multigrade,” 2012.
  - [104] Eurol Lubricants, “Eurol HPG EP 85W-140 GL5-Data sheet,” 2016.
  - [105] S. Renjith, V. K. Srinivasa, and B. Shome, “CFD based Prediction of Spin Power Loss of Automotive Differential System,” *SAE Int. J. Commer. Veh.*, vol. 8, no. 2, pp. 2015-01–2783, Sep. 2015.
  - [106] C. Gorla *et al.*, “Hydraulic losses of a gearbox: CFD analysis and experiments,” *Tribol. Int.*, vol. 66, pp. 337–344, Oct. 2013.
  - [107] ArvinMeritor, *Preventive Maintenance and Lubrication Maintenance Manual 1. Heavy*, Meritor Vehicle Systems, LLC, 2014.
  - [108] A. Standards, “Standard Test Method for Viscosity-Temperature Charts for Liquid Petroleum Products ASTM D 341-03,” 1998.
  - [109] S. Seetharaman, A. Kahraman, M. D. Moorhead, and T. T. Petry-Johnson, “Oil Churning Power Losses of a Gear Pair: Experiments and Model Validation,” *J. Tribol.*, vol. 131, no. 2, p. 22202, 2009.
  - [110] L. Wangjia, F. Hongyong, and C. Yunxia, “A novel method for gear reducer ’ s transient temperature field analysis based on thermo-fluid interaction,” no. Icmmita, pp. 1702–1711, 2015.
  - [111] I. Kakavas, A. V. Olver, and D. Dini, “Hypoid gear vehicle axle efficiency,” *Tribol. Int.*, vol. 101, pp. 314–323, Sep. 2016.
  - [112] S. Laruelle, C. Fossier, C. Changenet, F. Ville, and S. Koechlin, “Experimental investigations and analysis on churning losses of splash lubricated spiral bevel gears,” *Mech. Ind.*, vol. 18, no. 4, p. 412, Aug. 2017.