

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

**EMPAQUETAMIENTO ANIDADO DE OBJETOS
CIRCULARES**

POR
JOSÉ DANIEL MOSQUERA ARTAMONOV

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

MAYO, 2019

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TESIS

**EMPAQUETAMIENTO ANIDADO DE OBJETOS
CIRCULARES**

POR
JOSÉ DANIEL MOSQUERA ARTAMONOV

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

MAYO 2019

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Empaquetamiento anidado de objetos circulares», realizada por el alumno José Daniel Mosquera Artamonov, con número de matrícula 1707089, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis



Dr. Igor S. Litvinchev

Asesor



Dr. José Antonio Marmolejo

Co-asesor



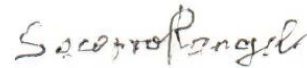
Dr. Fernando Lopez Irarragorri

Revisor



Dra. Lucero Ozuna Espinosa

Revisor



Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Mayo 2019

La Bendición y la Gloria y la Sabiduría y la Acción de Gracias y la Honra y el Poder y la Fuerza, sean a nuestro Dios por los siglos de los siglos. AMEN

Apocalipsis 7:12

A mi amada esposa Joselyn

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	XIII
1. Resumen	1
2. Introducción	6
2.1. Introducción	6
2.2. Objetivo	8
3. Marco Teórico	9
3.1. Problemas de empaquetamiento	9
3.1.1. ¿Como se puede clasificar los problemas de empaquetamiento?	11
3.2. Trabajos realizados en empaquetamiento de objetos	22
3.2.1. Empaquetamiento de objetos regulares	23
3.2.2. Empaquetamiento de objetos irregulares	33
3.3. Algunas aplicaciones de empaquetamiento	36
4. Formulación Matemática	42

4.1. Modelo matemático	43
4.1.1. Función Objetivo	44
4.1.2. Restricciones	44
5. Metodología	47
5.1. Equipo computacional	48
5.2. Implementación computacional	48
5.3. Supuestos considerados	48
5.4. Diseño de experimentos	49
5.4.1. Telescopia	49
5.5. Generación de diferentes objetos	49
5.6. Algoritmo de solución	50
6. Mallas y Contenedores	51
6.0.1. Contenedores	51
6.0.2. Mallas	52
7. Experimentación con círculos	58
7.1. Experimentación	59
7.2. Equipo computacional	60
7.3. Resultados	60
7.3.1. Distribución de objetos	61

7.3.2. Diferentes mallas	62
8. Experimentación con Rombos	67
8.1. Experimentación	68
8.2. Equipo computacional	69
8.3. Resultados	69
8.3.1. Distribución de objetos	70
8.3.2. Diferentes mallas	70
9. Experimentación con Octágonos	74
9.1. Experimentación	74
9.2. Equipo computacional	75
9.3. Resultados	76
9.3.1. Distribución de objetos	77
9.3.2. Diferentes mallas	77
10. Experimentación con Cuadrados	82
10.1. Experimentación	82
10.2. Equipo computacional	83
10.3. Resultados	84
10.3.1. Distribución de objetos	85
10.3.2. Diferentes mallas	85

11. Conclusiones	88
11.1. Conclusiones	88

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Empaquetamiento de figuras regulares e irregulares	12
3.2. Empaquetamiento unitario, tomado de [1]	14
3.3. Empaquetamiento unitario, tomado de [2]	14
3.4. Strip packing	18
3.5. Embalaje en bin	20
3.6. Mochila bidimensional	21
3.7. Empaquetamiento de palet	22
3.8. Anidamiento de círculos	28
3.9. Empaquetamiento irregular	34
3.10. Embalaje de inones	37
3.11. Electronica	38
3.12. Modelando el efecto de la densidad	39
3.13. Corte de bloques de madera	39
3.14. Arquitectura	40
3.15. Arquitectura	41

6.1. Diferentes contenedores sobre una malla cuadrada	54
6.2. Diferentes contenedores sobre una malla romboide	55
6.3. Diferentes contenedores sobre una malla hexágono sobre el eje y . . .	56
6.4. Diferentes contenedores sobre una malla hexágono sobre el eje x . . .	57
7.1. Comparación entre soluciones para la instancia 2 y desempeño de la heurística	63
7.2. Comparación entre los diferentes acomodados variando la cantidad de puntos sobre la malla	64
7.3. Distribución de acomodado dependiendo de la cantidad de puntos en la malla	65
7.4. Diferentes mallas en un contenedor rectangular	66
8.1. Comparación entre soluciones para la instancia 2	72
8.2. Distribución de acomodado de los rombos	73
8.3. Desempeño de diferentes mallas para el rombo	73
9.1. Comparación entre soluciones para la instancia 1 y Exacto vs heurístico	79
9.2. Comparación entre los diferentes acomodados variando la cantidad de puntos sobre la malla	80
9.3. Distribución de acomodado de los octágonos	81
9.4. Desempeño de diferentes mallas para el octágono	81
10.1. Comparación entre soluciones para la instancia 3	86

10.2. Distribución de acomodo de los cuadrados	87
10.3. Desempeño de diferentes mallas para el octágono	87

ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Normas de diferentes figuras	45
7.1. Instancias de círculos	59
7.2. Resultados circulo	60
8.1. Instancias de rombos	68
8.2. Resultados rombos	69
9.1. Instancias de octágonos	75
9.2. Resultados octágonos	76
10.1. Instancias de cuadrados	83
10.2. Resultados cuadrados	84

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por su inmenso amor, por la obra redentora hecha en la cruz con la cual limpio mis pecados y me dio la condición de hijo del altísimo.

A mis padres y hermanos por alentarme a seguir a afrontar retos cada vez más grandes. Jossy la cual en poco tiempo se volvió la dueña de mi corazón y se transformo en mi compañera de vida. Al pueblo Mexicano por contribuir de forma directa e indirecta en mi formación profesional como personal, Permitiéndome a través del CONACYT tener una beca de postgrado. A la Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Posgrado en Ingeniería de Sistemas por ser mi casa durante estos cinco años en Monterrey permitiéndome desarrollar en el área de investigación de operaciones.

Al Dr. Igor Litvinchev por abrirme una puerta para trabajar en su grupo de investigación así como el tiempo dedicado y enseñanzas decantadas. A los sinodales Dra Lucero Ozuña y el Dr. José Marmolejo, Dr. Fernando Lopez y la Dra. Maria Socorro Rangel, por la guía realizada en la elaboración de este trabajo así como sus áreas de oportunidad mencionadas.

A los amigos y compañeros del postgrado que hicieron estos cinco años pasaran volando siendo dos de maestría y tres de doctorado, con sus diferentes ocurrencias matutinas. A Lalo con el cual convertimos las charlas de café e ideas plasmadas en un tablero en diferentes proyectos investigativos, aprendiendo con cada uno, como vemos la vida y la ciencia. A mis amigos de Yalma, por sus diferentes comentarios.

CAPÍTULO 1

RESUMEN

José Daniel Mosquera Artamonov

Candidato para el grado de Doctorado en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

EMPAQUETAMIENTO TELESCOPICO DE OBJETOS
CIRCULARES

Número de páginas: 99.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Durante el tiempo de estudios doctorales tuve la posibilidad de trabajar con diferentes equipos de investigadores, los cuales no solo centraban sus esfuerzos en optimizar una función sino también el entender la

inercia de modelos biológicos, sociales, empresariales o de los materiales. Permittiéndome contribuir con cada uno de ellos de diferente manera, dando como resultado variadas publicaciones, tesis, presentaciones de congresos entre otras.

Artículos publicados en revistas indexadas en el JCR:

1. **Mosquera, J. D.**, Vasco-Leal, J. F., Hernandez-Rios, I., de Jesus Mendez-Gallegos, S., de Jesus Perea-Flores, M., Peña-Aguilar, J. M., & Rodriguez-Garcia, M. E. (2018). *Physicochemical characteristics of seeds from wild and cultivated castor bean plants (*Ricinus communis L.*)*. Ingeniería e Investigación, 38(1), 24-30.
2. Cruz-González, C. E., **Mosquera-Artamonov, J. D.**, Santillán, S. D., & Gámez-Cuatzin, H. (2018). *Influencia del método de rugosidad, configuración de la junta y espesor del adhesivo sobre la resistencia al corte de superficies de acero inoxidable ferrítico unidas por metacrilato de metilo*. Revista de Metalurgia, 54(2), 120.
3. Isaza, C., Anaya, K., De Paz, J. Z., Vasco-Leal, J. F., Hernandez-Rios, I., & **Mosquera-Artamonov, J. D.** (2018). *Image analysis and data mining techniques for classification of morphological and color features for seeds of the wild castor oil plant (*Ricinus communis L.*)*. Multimedia Tools and Applications, 77(2), 2593-2610.
4. Vasco-Leal, J. F., Hernández-Rios, I., Méndez-Gallegos, S. D. J., Ventura-Ramos Jr, E., Cuellar-Núñez, M. L., & **Mosquera-Artamonov, J. D.** (2017). *Relación entre la composición química de la semilla y la calidad de aceite de doce accesiones de *Ricinus communis L.** Revista mexicana de ciencias agrícolas, 8(6), 1343-1356.
5. **Mosquera-Artamonov, J. D.**, Vasco-Leal, J. F., Acosta-Osorio, A. A., Hernandez-Rios, I., Ventura-Ramos, E., Gutiérrez-Cortez, E., & Rodríguez-García, M. E.

(2016). *Optimization of castor seed oil extraction process using response surface methodology*. Ingeniería e Investigación, 36(3), 82-88.

6. **Mosquera Artamonov, J. D.**, Cruz González, C. E., Gala Barrón, H. I., & Gámez Cuatzin, H. (2016). *Efecto de la corriente pulsada en el proceso de soldadura GTAW en titanio 6Al4V con y sin metal de aporte*. Revista de Metalurgia, 52(3), e071.

Artículos publicados en revistas contenidas en el Science Citation Index (SCI):

1. **Mosquera, J. D.**, López, P. M., Jaimes, R. C., Rodríguez, M., Lanuza, R. V., & Mendoza, L. A. L. (2016). *Validación de un sistema de medición diseñado para evaluar la fuerza de apertura de secadoras*. Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia, 38(2).
2. Lucas Aguirre, J. C., Vasco Leal, J. F., **Mosquera-Artamonov, J. D.**, Cuellar-Nuñez, L., & Quintero Castaño, V. D. (2016). *Modelamiento de la operación unitaria de transferencia de masa durante los procesos de freído por inmersión de la papa criolla (*Solanum phureja* Juz. & Bukasov)*. Acta Agronómica , 65(4).

Artículos publicados en revistas arbitradas en otros índices bibliográficos.

1. Saldaña, R. P., **Artamonov, J. D. M.**, & García, E. V. (2016). *New models of power distribution systems: smart grids and distributed generation*. In III Jornadas de Doctorandos de la Universidad de Burgos: Universidad de Burgos, 15 y 16 de diciembre de 2016 (pp. 193-201). Servicio de Publicaciones e Imagen Institucional.
2. **Mosquera-Artamonov, JD**, Mosquera, JC, y Artamonova, I. (2016). *Financial analysis of ethanol las primarias de combustible en dos sucursales en Colombia*. Producción + limpia, 11 (1), 32-41.

Libros

1. Eduardo Valdés Garcia, Rodrigo Palacios saldaña, **José Daniel Mosquera Artamonov** & Joaquin Antonio Pacheco Bonrostro. *Un enfoque multidisciplinar de la optimización*. Universidad de Burgos. Servicio de Publicaciones e Imagen Institucional.

Supervisión de estudiantes de Maestría

1. Alexander Parra Arenas. Posgrado en Logística y Cadena de suministro. Universidad Autónoma de Nuevo León. *Propuesta de mejora del sistema de distribución de aguacate hass para las exportaciones colombianas mediante simulación*. Mayo 2018.

Comité: Francisco Edmundo Treviño Treviño, Tomás Eloy Salais Fierro, y **José D Mosquea Artamonov**.

2. Yareth Gutierrez Molina. Posgrado en Logística y Cadena de suministro. Universidad Autónoma de Nuevo León. *Logística inversa: oportunidad de negocio para las industrias en México*. Febrero 2015.

Comité: Edith L. Ozuna Espinosa, **José D Mosquea Artamonov** y Manuel Farias Martinez.

Memorias en Congresos nacionales e internacionales

1. Igor Litvinchev, **Daniel Mosquera** & Lucero Ozuna. *Heurística para el empaquetamiento de objetos circulares*, IV Congreso Internacional de Logística y Cadena de Suministro. Octubre 2017. Ciudad Obregón, México.
2. Eduardo Valdés Garcia, Rodrigo Palacios saldaña, **José Daniel Mosquera Artamonov**. *La optimización. Un enfoque multidisciplinar*, XXVI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico. Julio 2017. Tabasco, México.

3. Rafael Torres, Antonio Marmolejo, Igor Litvinchev, **Daniel Mosquera** & Edith Lucero Ozuna Espinosa. *Approximate packing of circular-like objects in a rectangular container*, 21st Conference of the International Federation of Operational Research Societies IFORS 2017. Julio 2017. Quebec, Canada.
4. Igor Litvinchev, **Jose Daniel Mosquera-Artamonov**, Lucero Ozuna & Antonio Marmolejo. *Empaquetamiento de objetos circulares en un contenedor rectangular*, XVIII LatinIberoamerican Conference on Operations Research. CLAIO 2016. Octubre 2016. Santiago de Chile, Chile.
5. Igor Litvinchev, **Daniel Mosquera** & Lucero Ozuna. *Packing unequal circular objects in a rectangular container*, V Congreso Nacional de la sociedad Mexicana de Investigación de Operaciones. Octubre 2016. Ciudad Madero, México.
6. Igor Litvinchev, **Daniel Mosquera** & Lucero Ozuna. *Packing unequal circular objects in a rectangular container*, IV Congreso Internacional de Logística y Cadena de Suministro. Octubre 2016. Mérida, México.

Firma del asesor: _____

Dr. Igor S. Litvinchev

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN

*El genio es un uno por ciento de inspiración y un noventa y nueve por ciento de
sudor*

Thomas A. Edison

Bosquejo

2.1. Introducción	6
2.2. Objetivo	8

2.1 INTRODUCCIÓN

Se ha percibido en las ultimas dos décadas un alto crecimiento demográficos en las ciudades, ahora transformadas en megaurbes. En dichas megaurbes con el aumento de la densidad poblacional, se requieren con mayor frecuencia un volumen alto de insumos básicos (alimentos, agua, energía, gas) para vivir moderadamente. Por lo cual se ha visto la necesidad de eficientizar los recursos que se tienen con la mira de obtener el mayor rendimiento posible de los mismos. Una de las necesidades básicas en las metrópolis es el trasladar el mayor número posible de productos en un contenedor (regular o irregular), abarcar con el menor numero de torres de comunicación un sector de la ciudad, establecer el numero idóneo de plantas distribuidoras

que abastezcan cierta zona o simplemente obtener el mayor número de piezas al momento de dividir un recurso (telas, metales, maderas), entre otros problemas. Dichas necesidades parecieran ser diferentes sin algún aspectos en común. [3].

Los mencionados problemas se pueden considerar pertenecientes a la misma familia, conocidos como problemas de empaquetamiento de objetos (regulares o irregulares) en contenedores (regulares o irregulares). Teniendo como objetivo disminuir el espacio desperdiciado en la mayoría de los casos, en otros casos anudan un objetivo de seleccionar los objetos con mayor contribución para el tomador de decisión, Convirtiéndose en un problema hiperativo para las necesidades actuales de la humanidad.

El desarrollo de algoritmos exactos y/o heurísticos que permitieran añadir objetos regulares en un contenedor era una temática con mayor atención para los matemáticos puros, pero en los últimos años ha recibido una considerable contribución por investigadores enfocados al área de investigación de operaciones motivados por las diferentes aplicaciones existentes del mismo problema [4].

El problema de empaquetamiento se ha catalogado como un problema de optimización combinatorial, los cuales además son considerados pertenecientes a la familia NP-Hard, puesto que no existe hasta el momento un algoritmo que pueda solucionarlo en tiempo polinomial. Muchos de los esfuerzos se han centrado en desarrollar métodos heurísticos que permitan encontrar una buena solución de este problema en un considerable tiempo corto (de acuerdo a la aplicación), brindándoles algunas directrices a las heurísticas con la finalidad de disminuir el espacio de búsqueda y así obtener una solución factible en un tiempo considerablemente corto.

Este trabajo consta de cinco partes. Una introducción, tres capítulos que desarrollan los objetivos propuestos, resultados y las conclusiones. En la introducción se exhibe una corta motivación del trabajo y los principales objetivos de la investigación. En el segundo capítulo se presenta el fundamento teórico del trabajo. Una breve reseña histórica, que le permite al lector conocer los detalles más relevantes

de la formulación matemática sobre problemas de empaquetamiento, así como algunas generalidades técnicas que permitan sin ser especialista en el ramo, comprender la terminología usada y las diferentes vertientes que serán estudiadas. También se presenta una corta sinopsis de las principales metodologías de optimización u y de análisis que son usadas para el estudio realizado. En el tercer capítulo se despliega la metodología de investigación realizada durante los meses de enero y diciembre del 2015 en el laboratorio de alto rendimiento del Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico perteneciente a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León . En el capítulo cuarto contiene el análisis de los modelos matemáticos usados en la investigación. Finalmente en el capítulo quinto se exterioriza las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

2.2 OBJETIVO

Determinar el efecto en el empaquetamiento rectangular teniendo como parámetros de control diferentes objetos variando la estructura de la malla así como la cantidad de puntos sobre la misma.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

"Luchar hasta el último aliento"

William Shakespeare

Bosquejo

3.1. Problemas de empaquetamiento	9
3.1.1. ¿Como se puede clasificar los problemas de empaquetamiento?	11
3.2. Trabajos realizados en empaquetamiento de objetos . .	22
3.2.1. Empaquetamiento de objetos regulares	23
3.2.2. Empaquetamiento de objetos irregulares	33
3.3. Algunas aplicaciones de empaquetamiento	36

3.1 PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

Se considera como problema de empaqueta la necesidad que tiene las personas de colocar determinado numero de objetos en un recipiente o contenedor [3]. Los objetos que se intentarán poner en el contenedor pueden ser similares en forma geométrica (amplificados o reducidos) o no (ej: cuadrados, círculos, octágonos), el

contenedor puede ser cuadrado, rectangular, triangular entre otros figuras regulares así como irregulares [5].

Un objeto circular se define como $S = \{x : \|x - x_0\| \leq R\}$, donde la norma utilizada puede ser o no euclidiana. Se aproxima la forma del contenedor por una malla, de tal modo que los centros de objetos se ubiquen en los puntos de la malla. Convirtiendo el problema en un problema de decisión en donde la hipótesis a evaluar es: ¿Se debe colocar el objeto R_i en el punto de malla N ? Es de notar que este problema de optimización por el hecho de considerar puntos de malla N , se a convertido en un problema entero.

No se permite intersección entre los objetos empaquetados $x_j^i = 0$ para $j \in I, l \in K$ por ejemplo $d_{ij} \leq R_k + R_l$. Además se asume que la cantidad de artículos con tamaño desigual es limitada o ilimitada. Un modelo para empaquetamiento de objetos circulares fue formulado en [6]:

$$\min \quad r_0 \tag{3.1}$$

sujeto a:

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r \leq r_0 \quad i=1, \dots, N \tag{3.2}$$

$$2r \leq d_{ij} \quad j=1, \dots, N \quad i < j \tag{3.3}$$

Este modelo impide el traslape entre círculos y como lo nota el lector una de las restricciones es no lineal generando que la región de búsqueda sea no convexa. Al ser un modelo no lineal (NLP), se espera que genere soluciones aproximadas de alta calidad. Contrario a lo esperado la mayoría de los solver (NLP) no encuentran óptimos globales [7]. Se ha recomendado usar algoritmos que usen estrategias de búsqueda local con procedimientos heurísticos sobre el espacio de búsqueda para aumentar la eficiencia de los mismos [8, 9].

3.1.1 ¿COMO SE PUEDE CLASIFICAR LOS PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO?

La facilidad de poder clasificar un trabajo de empaquetamiento permite determinar, el grado de aportación de dicha labor investigativa. Algunas ideas iniciales sobre como discriminar las diferentes investigaciones, fue propuesto en [10], luego mejorado por [11]. En [10] se propone cuatro categorías específicas para la clasificación. Gran parte de esta sección se basa en las ideas publicadas en los dos anteriores trabajos, tomados como parte del conocimiento básico para desarrollar y clasificar los problemas de embalaje.

1. Dimensión

- Una dimensión
- Dos dimensión
- Tres dimensión
- Más de tres dimensiones

2. Tipo de asignación

- Se asignan todos los objetos
- No se asignan todos los objetos

3. Variedad de objetos

- Objetos similares
- Objetos de diferentes formas

4. Variedad de elementos Esta división hace referencia a la forma y cantidad de los elementos

- Pocos elementos

- Elementos similares
- Muchos elementos de muchas formas diferentes
- Muchos elementos de pocas formas diferentes

Se ha podido notar en párrafos anteriores que el objetivo de los trabajos en empaquetamiento es la eficiente colocación de objetos en una sección del contenedor sin presentar superposición entre los objetos, cumpliendo con una determinada función de ganancia. Dado este objetivo la mayor complejidad radica en la geometría de las figuras que se deben embalar en el contenedor. En donde hay figuras regulares (círculos, cuadrados, etc) o figuras irregulares o asimétricas.

La figura 3.1, presenta un ejemplo de empaquetamiento en un contenedor rectangular en donde el caso A) tiene el embajala de figuras regulares, mientras que B) muestra el empaquetamiento de figuras irregulares.

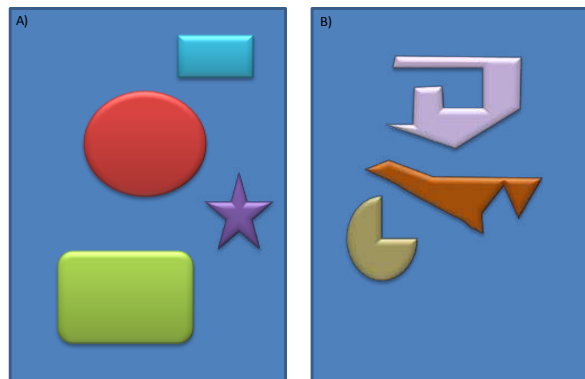


Figura 3.1: Empaquetamiento de figuras regulares e irregulares

3.1.1.1 EMPAQUETAMIENTO DE CÍRCULOS IDÉNTICOS

Uno de los problemas más atacados en el área de empaquetamiento considera empaquetar el mayor número posible de objetos con tamaño similar (unitario), en el contenedor circular más pequeño [12]. Cuando se está embalando círculos dentro de círculos se conoce como (circle packing problem CPP). Plantear estrategias

exactas como heurísticas muchas de ellas inspiradas en métodos físicos, que computacionalmente se conocen como cuasi-físicos [13], es la principal labor para muchos investigadores en esta área. El modelo de optimización en coordenadas cartesianas en este caso es expresado de la siguiente forma:

$$\text{Max} \tag{3.4}$$

Sujeto a:

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (1 - r)^2 \quad i \in I \tag{3.5}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4r^2 \quad (i, j) \in I \times I, i < j \tag{3.6}$$

$$-r + r_i \leq y_i \leq r - r_i \quad i \in I \tag{3.7}$$

$$-r + r_i \leq x_i \leq r - r_i \quad i \in I \tag{3.8}$$

$$r \geq 0 \tag{3.9}$$

En [14] usan una estrategia de optimización global para encontrar configuraciones para una cantidad de círculos de $66 \leq N \leq 100$. Mientras que [15] usan un algoritmo goloso para probar las estrategias propuestas con 20 conjuntos de instancias clásicas. En donde uno de los aporte realizados es diseñar un criterio de evaluación híbrido local que beneficia el empaquetamiento. Otros investigadores emplearon principios de simulación para obtener muy buenos incumbentes usando algoritmos cuasi-físicos [16, 17] o simulación de billar [1]. En la figura 3.2 se presenta algunos de los casos con mejores resultados publicados hasta el momento en el embalaje unitario de círculos.

En la figura 3.3 se muestran otras configuraciones de empaquetamiento para el mismo problema, dichas configuraciones fueron desarrolladas usando un método de optimización global que usa conceptos de energía para mejorar la configuración. En todos los casos el círculo principal (contenedor) tiene el mismo tamaño, pero los tamaños de los círculos embalados se cambia buscando maximizar el número de objetos introducidos en el contenedor.

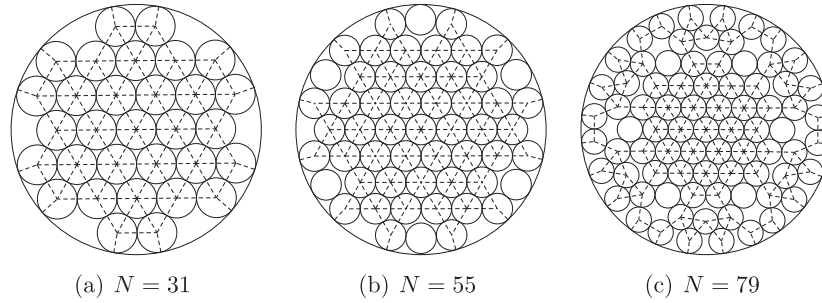


Figura 3.2: Empaquetamiento unitario, tomado de [1]

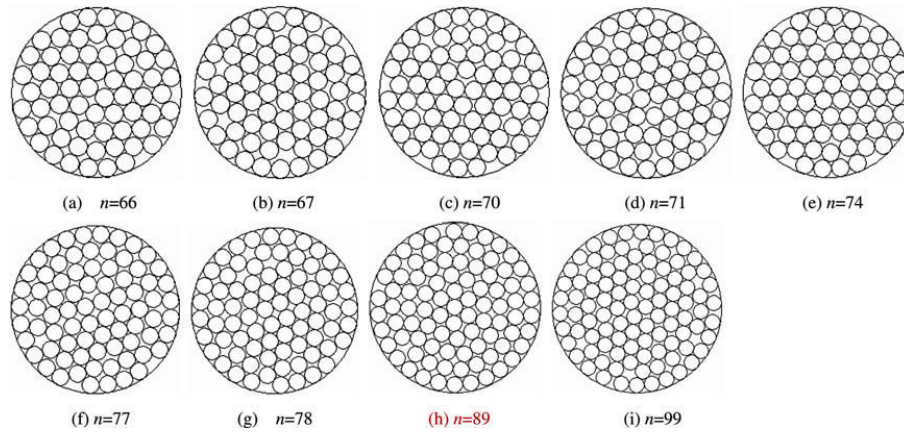


Figura 3.3: Empaquetamiento unitario, tomado de [2]

3.1.1.2 EMPACAR CÍRCULOS NO IDÉNTICOS

Una vertiente del CPP es considerar un conjunto finito de círculos no idénticos que se quiere empaquetar en el menor contenedor circular posible. En donde el problema de optimización es semejante a determinar las coordenadas de cada objeto, el radio, impidiendo el traslape de los objetos que minimice el desperdicio del contenedor. El problema sería encontrar los niveles óptimos para las variables de decisión r , (x, y) y (x_i, y_i) , $i \in I$ siendo:

$$\text{Min} \quad (3.10)$$

Sujeto a:

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \leq (r - r_i)^2 \quad i \in I \quad (3.11)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2 \quad (i, j) \in I \times I, \quad j < i \quad (3.12)$$

$$r \geq LB_r \quad (3.13)$$

donde $LB_r = \sqrt{\sum_{i \in I} r_i^2}$, en donde la primera familia de restricciones obliga la contención plena de cada círculo. La segunda familia de restricciones protege la superposición de cualquier par de círculos. Finalmente la tercera restricción proporciona un límite inferior positivo sobre el radio del contenedor. Esta modelación posee restricciones no lineales y una función objetivo lineal.

El CPP no se puede atacar eficazmente con enfoques puramente analíticos [4], dado que contiene varios problemas difíciles: Un problema de optimización continua y uno combinatorio[18], sin olvidar que tiene un número infinito de óptimos alternativos[19]. Al aumentar el número de elementos, mayor será el número de puntos mínimos y fijos locales. Por lo cual las estrategias de optimización global requieren estrategias de búsqueda local con la finalidad de alcanzar los mínimo/máximo global [20].

Este problema ha tenido tres principales vertientes de estudio, donde en el primer caso se conoce el radio del contenedor. Si se obtiene una configuración que respete todas las restricciones, se procede a disminuir el radio del contenedor. La disminución del radio se hace gradual y en caso de no encontrar una configuración que no tenga superposición de los objetos empacados se deja el radio anterior [21, 22]. Como segunda estrategia se usa una metodología constructiva que va empacando objetos y busca el menor radio que los contenga. Por lo general se utilizan algoritmos con varias fases en donde en una se introducen un objeto, posteriormente se procede a encontrar el radio de menor tamaño para el contenedor, encontrado dicho radio se finaliza con un re-acomodo de los objetos introducidos e iterando nuevamente[19]. La última estrategia considera estrategias multiarranque usando diversos optimizadores, algunos trabajos con este enfoque se encuentran en [19, 23, 24].

3.1.1.3 PROBLEMAS DE EMBALAJE RECTANGULAR

En este problema se tiene n elementos $I = \{1, 2, \dots, n\}$, en donde se conoce para cada elemento su respectivo ancho w_i , así como el alto h_i del elemento I_n . Los elementos deben ser ingresados en el contenedor rectangular, sin presentar traslape entre ellos de modo que maximicen/ minimicen una función de utilidad específica. En la literatura existen muchas variantes de este problema, pero se usan tres criterios para clasificarlos.

- Tipo de asignación
- Ordenamiento de los objetos
- Ordenamiento de los elementos

Algunos de los problemas más estudiados en la literatura son presentados a continuación.

3.1.1.4 PROBLEMA DE STRIP PACKING

Dado n elementos (rectángulos pequeños), con su respectivo ancho w_i , así como el alto h_i , en donde hay un objeto grande (conocido como tira o strip), donde su ancho W es fijo, pero su altura H es variable. Se tiene como meta reducir al mínimo la altura H usada de la tira, obligando que todos los elementos deban ser embalados. En [25], se presenta el problema strip packing en dos y tres dimensiones para figuras regulares bajo un algoritmo shaking. Mientras que en [26], se muestra el embalaje de objetos irregulares. La estructura formal de este problema está dada:

$$\text{Min}H \tag{3.14}$$

Sujeto a:

$$0 \leq x_i \leq w_i \quad \forall i \in N \quad (3.15)$$

$$0 \leq y_i \leq h_i \quad \forall i \in N \quad (3.16)$$

$$(3.17)$$

Se presentan cuatro restricciones más posibles para cada i y j .

$$x_i + y_i \leq x_j \quad (3.18)$$

$$x_j + y_j \leq x_i \quad (3.19)$$

$$x_i + y_i \leq x_j \quad (3.20)$$

$$y_i + h_i \leq y_j \quad (3.21)$$

$$y_j + h_j \leq y_j \quad (3.22)$$

Siendo (x_i, y_i) las coordenadas del borde inferior izquierdo del elemento i . Las dos primeras restricciones implican que todos los elementos, se deben colocar en el objeto grande. Las siguientes cuatro ecuaciones protegen que los elementos colocados en la tira no se traslapen. En la figura 3.4, se presenta en A) una tira sin límite superior en la cual se le debe introducir diferentes objetos rectangulares. B) presenta el empaquetamiento de los mismos objetos de A, pero en dos contenedores finitos.

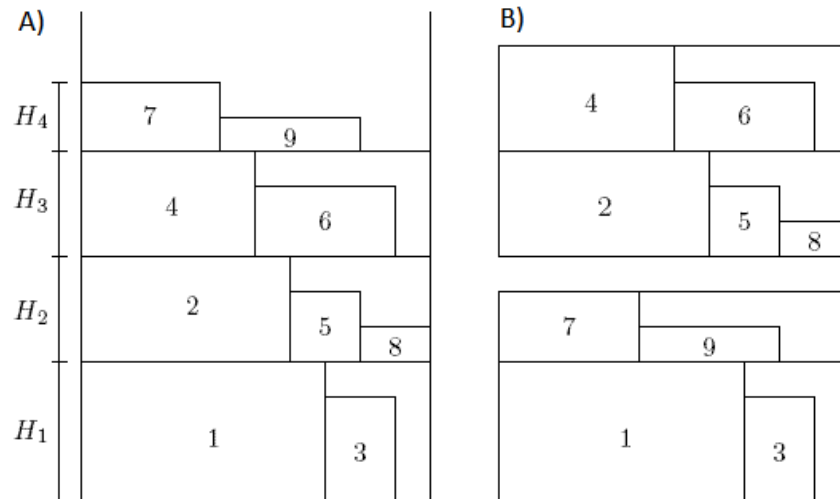


Figura 3.4: Strip packing

3.1.1.5 PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE ÁREA

Se tiene n elementos, cada uno definido por su ancho w_i , así como el alto h_i , además se tiene un gran objeto cuyo ancho W y altura H son variables. La finalidad de este modelo es minimizar el área total usada WXH considerando que todos los elementos deben ser colocados dentro del gran objeto o tira. Dicho modelo es muy usado en el transporte de carga, en donde se quiere disminuir el espacio usado del contenedor. Puesto que una ineficiente utilización del mismo implicaría mayores costos en el traslado. En [27], Se presentan dos algoritmos (Búsqueda de árbol, genético) para la solución de quince casos reportados en la literatura. En donde diez de ellos mejoran las soluciones encontradas e introduce nuevas instancias para trabajos futuros. El modelo para este problema es muy similar al mostrado en la subsección anterior, en donde el principal cambio es la función objetivo.

3.1.1.6 PROBLEMA DE BIN PACKING EN DOS DIMENSIONES

Se tiene n elementos, cada uno definido por su tamaño a_i , en donde se tiene N contenedores disponibles de peso V . El objetivo es utilizar la menor cantidad posible de contenedores que permitan embalar todos los elementos. Un modelo típico para este problema es presentado en [28], dicho modelo se ilustra a continuación.

$$\text{Min } \sum_{i \in I} y_i \quad (3.23)$$

Sujeto a:

$$N_i \geq 1 \quad (3.24)$$

$$\sum_{j \in n} a_j x_{ij} \leq V y_i \quad i \in n \quad (3.25)$$

$$\sum_{i \in n} x_{ij} = 1 \quad j \in n \quad (3.26)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in n \quad (3.27)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in n \quad j \in n \quad (3.28)$$

Donde $y_i = 1$ si el contenedor (bin) es usado y x_{ij} es el elemento j , en el contenedor llamado como bin i . La restricción 2.15 hace que al menos un contenedor se deba abrir para guardar los objetos. La ecuación 2.16, no permite que se pongan mayor capacidad V en el contenedor N_i , considerando los objetos puestos a_i . La siguiente restricción hace que si, se abre un contenedor este tenga un objeto. Finalmente las ecuaciones 3.27-3.28 son la naturaleza de las variables.

La figura 3.5, muestra el acomodo de diferentes objetos rectangulares en tres o cuatro contenedores de igual características (bin), siendo A) una buena solución al problema pero B) es la optima pues disminuye el uso de un bin en el embalaje.

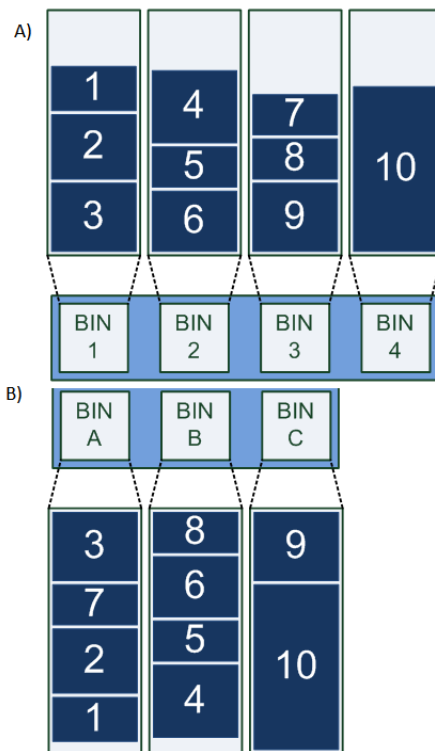


Figura 3.5: Embalaje en bin

3.1.1.7 PROBLEMA DE LA MOCHILA EN DOS DIMENSIONES

Se tiene un conjunto I de elementos, para cada elemento $i \in I$ se le conoce su ancho w_i , así como el alto h_i y un valor c_i . Además se cuenta con una mochila rectangular con ancho W y largo H . Se pretende determinar un subconjunto $\hat{I} \subseteq I$ con un valor máximo total $\sum_{i \in \hat{I}} c_i$, tal que todos los elementos $I \in \hat{I}$ pueden ser empacados en la mochila. Uno modelo para el problema de la mochila en dos dimensiones es presentado en [29].

$$\text{Max } \sum_{i \in m} c_i x_i \tag{3.29}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in m} w_i h_i x_i \leq W \times H \tag{3.30}$$

$$x_i \in \{0, 1, \dots, u_i\} \tag{3.31}$$

$$x_i \text{ copias de tipo rectangular} \tag{3.32}$$

Adicionalmente en la anterior investigación, se presentan dos métodos bien conocidos en este problema, el de arriba hacia abajo y los enfoques de abajo hacia arriba. Son mezclados en un algoritmo para resolver este problema. En donde encuentran la solución óptima en muchos de los casos en tamaños moderados, dejando atrás a los demás métodos en situaciones de gran tamaño.

La figura 3.6 ilustra uno de los casos más conocidos del problema de la mochila bidimensional, en donde se tiene como objetivo llevar el mayor peso posible al menor costo.



Figura 3.6: Mochila bidimensional

3.1.1.8 CARGA DE PALETS (PALLET LOADING)

Se tiene una gran cantidad de elementos de idéntica configuración (w, h) y un objeto rectangular de capacidad grande (W, H) , el objetivo es poner el mayor número de elementos en el objeto rectangular, en este caso se permite que los objetos giren 90° .

En [30], representan el problema de carga de palets como un conjunto de problemas de independencia máxima para dividirlo por grupos. En donde los bordes

de agrupación inter se relajan con técnicas lagrangianas. Después con estos resultados implementan un enfoque de generación de columnas para el modelo obtenido en el paso anterior. Finalmente proponer extender la investigación implementando un Branch-Cut. En la figura 3.7 presenta una configuración confiable de palet, para movilizar mercancía en un vehículo además de una estructura no segura para el mencionado objetivo.

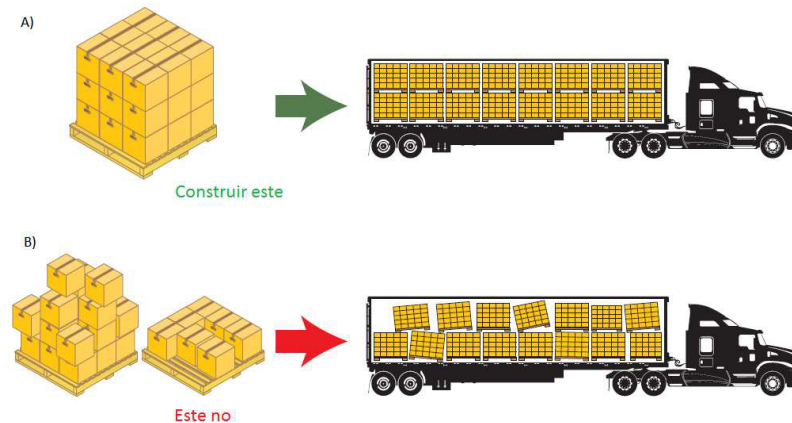


Figura 3.7: Empaquetamiento de palet

3.2 TRABAJOS REALIZADOS EN EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS

En esta sección se hará una revisión de los diferentes trabajos realizados en empaquetamiento de objetos, sin discriminar el método de solución (exacto o heurístico), estructura del modelo (lineal o no lineal), Pero si hará una separación si las figuras son regulares o irregulares.

3.2.1 EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS REGULARES

En 1995 [31], estudian el problema de empaquetar círculos con dimensiones diferentes, dentro del mismo contenedor rectangular. Formulando un modelo de optimización entera mixta no lineal, dicho problema es atacado con diferentes heurísticas incluyendo un algoritmo genético. Probando las heurísticas con 66 problemas generados aleatoriamente. Presentando mejores resultados las heurísticas semialeatorias y el algoritmo genético.

En 1998 [1], presentan el empaquetamiento denso de círculos dentro de un contenedor circular, disertando con dos algoritmos de empaquetamiento, usando formulaciones no lineales y biojetivos. Teniendo un total de 65 círculos ingresados dentro del contenedor circular.

Para el 2002 [21], usando una formulación matemática no lineal proponen un algoritmo bio-inspirado llamado "Quasi-human algorithm", dicho método busca el lugar con mayor área para colocar el siguiente objeto y así maximizar el área ocupada del contenedor. Siendo está una estrategia adaptativos similar a la búsqueda Tabú.

En el 2005 [17], Combinan la metodología de la búsqueda tabú con el algoritmo de recocido simulado con la finalidad de evitar ciclismos, mejorar la diversificación y obtener una búsqueda estocástica de gran alcance. Está estrategia se prueba con algunos casos reportados en la literatura, obteniendo buenos resultados en el empaquetamiento de círculos en un contenedor circular.

En [32], Para el problema de embalaje de círculos desiguales en un contenedor rectangular de dos dimensiones desarrollan dos algoritmos golosos. En donde el primer algoritmo escoja el siguiente círculo considerando el grado máximo de capacidad del recipiente, imitando las estrategias humanas para este problema. El siguiente método, mejora el anterior en la estrategia de búsqueda. Se realiza una comparación con los métodos publicados en la literatura para este problema. Finalizan el trabajo proponiendo ingresarle a los algoritmos para embalaje la experiencia humana, en

está labor.

En el 2007 [33], realizan un trabajo en el empaquetamiento de frutas similares de diferentes tamaños. Planteando un modelo de mezcla, el cual permite asignar la probabilidad de origen del bin a las frutas, en los lugares de empaque preestablecidos. Dándole una alta importancia a la trazabilidad del producto, puesto que unido a una correcta agrupación de las frutas con tamaños similares en el mismo contenedor, permite un mayor precio de venta del insumo y por consiguiente mayor rentabilidad para la firma. Los análisis de la información los realizan usando estrategias estadísticas y plantean un modelo bayesiano para determinar la inercia del fenómeno.

En [34], Presentan un caso particular de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular para la industria de las motocicletas con restricciones específicas acordes a la necesidad del cliente. Dichas restricciones son consideradas al momento de realizar los cambios de entornos en las búsquedas locales del algoritmo. Los resultados obtenidos por los investigadores permiten reducir el tiempo de ejecución del empaquetamiento de horas a segundos. Proponen para futuros trabajos introducirle inteligencia al método para que las decisiones realizadas en cada iteración dejen de ser aleatorias.

En el 2008 [35], desarrollan un algoritmo híbrido inspirado en técnicas de recocido simulado, búsqueda de vecindad variable y técnicas constructivas para el problema de empaquetamiento con restricciones tipo guillotina. Determinan que la metodología propuesta tiene una probabilidad del 86.43 % de encontrar soluciones iguales o mejores a las reportadas en la literatura.

En este mismo año [4], realizan una revisión extensa de los problemas de empaquetamiento, con un enfoque académico vinculándolo con el práctico. Los autores en listan a otros investigadores según el problema de empaquetamiento que haya trabajado (tipo de objetos), la estrategia de solución (exacta o heurística), la función objetivo (maximización o minimización. Para la sección de problemas de empaque-

tamiento en la industria presentan: el tipo de industria en donde lo aplicaron, el tipo de círculos (uniformes o no), la función objetivo (Aprovechamiento del espacio o economía) y finalmente la estrategia de solución (exacto o heurística). Además describen los modelos matemáticos típicos para cada tipo de problema.

También en el 2008[36], trabajan en un problema de empaque en tres dimensiones de un Bin-Packing. Usan para obtener una solución factible una estrategia constructiva golosa (GRASP). Dicho planteamiento tiene restricciones de estabilidad para los productos, es decir no se permite el conjunto de insumos empaquetados que presenten rotación. Establecieron condiciones suficientes de optimalidad anudado a una estrategia de mejora.

En [37], Usan una mezcla de búsquedas locales, estrategias de optimización global para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor circular. la fortaleza de su metodología se entra en:

1. Optimización local estándar. La cual permite rápidamente reducir espacios de búsqueda.
2. Movimientos locales. Con la finalidad de escapar de óptimos locales y seguir en la búsqueda del incumbente.
3. Diversificación de población. Evita quedar atrapado en una opción muy atractiva pero por debajo del optimo local.

En el 2011 [16], realizan trabajos para introducir objetos circulares de igual dimensión en un contenedor circular. Diseñan un método casi-físico para la optimización global de las instancias. Mencionan que este problema es una instancia clásica para discriminar los algoritmos bueno de los mediocres. Usan una función de energía para solucionar el problema, la cual emplean en diferentes simulaciones para demostrar la robustez de la metodología propuesta. Orientan futuras investigaciones a trabajar en el empaquetamiento de elipses y círculos no homogéneos en contene-

dores circulares o rectangulares con la metodología propuesta por ellos con algunas pequeñas modificaciones en la estrategia constructiva.

En [3], Desarrollan una heurística inspirada en la búsqueda de espacio para el problema de embañale de círculos para diferentes contenedores (círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo isósceles y semicírculo en ángulo recto), en donde la formulación que usan es un modelo de optimización no lineal. Los resultados obtenidos mejoran a los existentes en la literatura donde se bajan en la búsqueda de espacio. Presentando una gran diferencia con aportaciones previas en el uso de restricciones que limitan el rango de movimiento para colocar el centro de los círculos.

En el 2012 [38], Presenta el problema de empaquetamiento de una cantidad máxima de círculos idénticos en un dominio multiconexo. Plantean un modelo matemático para este problema, el cual es probado con la construcción de puntos de partida de forma aleatoria. Se emplean desigualdades activas para mejorar el rendimiento del modelo. Finalmente hacen énfasis que el enfoque propuesto puede ser extendido a una implementación de paralelización.

Para el 2013 [5], presentan el embalaje de círculos de diferentes radios en diferentes contenedores, siendo estos rectángulos y triángulos, con el fin de evitar el sobreposicionamiento de los objetos. Se apoyan de una formulación no lineal para solucionar el problema, usan una discretización del contenedor para colocar los objetos a dentro. Estos autores hicieron una metodología para determinar una solución factible, reemplazando las restricciones por desigualdades lineales aproximadas. Dicha estrategia no todas las veces da soluciones óptimas, presentando casos que la solución es infactible.

También [39], trabajan un problema de embalaje bi-dimensional óptimo de rectángulos en un contenedor circular. Desarrollan una formulación matemática no lineal entera mixta, con la finalidad de resolver rápidamente los problemas de pequeña embergadura. En los casos de mayor complejidad, se estructura dos métodos heurísticos: uno constructivo en donde se colocan rectángulos de mayor tamaño y

posteriormente los de menor tamaño. El segundo es la implementación del recocido simulado, en donde se considera una serie finita de rectángulos los cuales son incluidos en una función de construcción. El enfoque constructivo presenta una eficiencia del 91.3 %, aunque la estrategia de recocido simulado desarrolla patrones de embalaje, con una eficiencia del 93.6 % del contenedor. Para poder aumentar este rendimiento se tuvo que utilizar mayor tiempo de maquina en los peores casos ($>1h$). Brindando a la comunidad científica como industrial dos estrategias diferentes de acuerdo al tamaño del problema. Aunque los autores mencionan la aplicación de estas estrategias a empresas del ramo forestal, no usan restricciones tipo guillotina.

Galiev et al, presentan en [40] la discretización del contenedor en donde cada punto con coordenadas x,y son es un posible lugar en donde colocar un objeto, volviendo el problema en un problema de decisión (colocar o no un objeto en la posición x_i, y_i) Estructuran un algoritmo heurístico inspirado en el modelo lineal que proponen. La metodología que usan permite ser utilizada en cualquier contenedor, obteniendo muy buenos resultados. Aunque los resultados obtenidos presentan menor eficiencia que otros propuestos anteriormente, la metodología descrita no le afecta el tipo de contenedor convirtiendo este aspecto en una fortaleza del trabajo.

En [41], presentan una corta disertación para dos relaciones en un problema de empaquetamiento de esferas, así como partículas cubicas y discos circulares. Los resultados validan hallazgos prácticos así como simulados.

En [42], emplean tres algoritmos de enjambre inteligente (colonia de hormigas, Algoritmo de colonia de abeja artificial y optimización swarm) para resolver el problema de embalaje circular con restricciones de equilibrio. Para los tres algoritmos implementados el algoritmo que presenta mejores resultados es colonia de abeja artificial por su estabilidad y equilibrio.

En [43], trabajan en una formulación para el empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular teniendo en cuenta desigualdades validad y el anidamiento de los objetos embalados. Presentan los resultados computacionales para diferentes

configuraciones de los contenedores, así como teniendo relajado el modelo en las restricciones más exigentes.

La figura 3.8, muestra el empaquetamiento de círculos con diferentes radios, en la cual se le permite al objeto de mayor tamaño anidar otros objetos de menor dimensión a el, dicha figura fue obtenida después de diez minutos de ejecución del modelo utilizado en está investigación. La figura es colocada para ejemplificar el empaquetamiento de objetos regulares en un contenedor rectangular con telescopia.

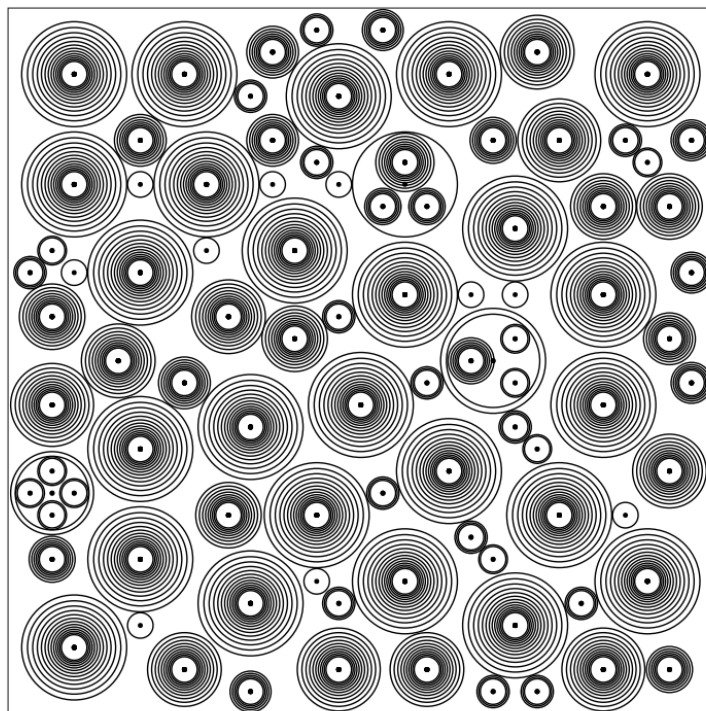


Figura 3.8: Anidamiento de círculos

En el 2014 [44], consideran el problema de empaquetamiento binario en dos dimensiones (2DVSBPP), usando restricciones de tipo guillotina. Parten de un algoritmo de embalaje bin mixto (MixPacking), para el caso del problema solo Bin, posteriormente desarrollan un algoritmo de retroceso que vincula el bin mixto para resolver el (2DVSBPP). Prosiguen mejorando las soluciones encontradas con una implementación de un algoritmo de recocido simulado y búsqueda binaria. Los resulta-

dos encontrados por los autores hasta el momento superar a los algoritmos conocidos. Siendo uno de los aportes de los autores la posibilidad de retroceso del algoritmo, así como la metodología de mejora de la puntuación.

En ese mismo año [45], presentan un problema de empaquetamiento multiobjetivo con dos dimensiones. En donde hay un número finito de contenedores, teniendo el peso y la longitud de los artículos a colocar en el embalaje, se busca la optimización de tres funciones de costo. Siendo el primer objetivo, utilizar el menor número de contenedores. El segundo es la minimización máxima de un bin. Finalmente el tercer objetivo pretende equilibrar la carga dentro del contenedor. Desarrollan dos diferentes metaheurísticas centradas en poblaciones, a los algoritmos estructurados se les brinda la habilidad de ser adaptativos a lo largo del tiempo con la finalidad de ajustar los parámetros durante el proceso de búsqueda.

En [46], formulan un modelo lineal entero para el problema de empaquetamiento de círculos de radios diferentes. Usan una cuadrícula rectangular para aproximar el contenedor de los objetos, en donde cada punto de la cuadrícula es un posible lugar en donde poner el círculo. El modelo binario planteado es solucionado con programas comerciales, pues proponen dos familias de desigualdades válidas que ayudan a la eficiencia del sistema operativo. Proponen para futuras investigaciones realizar trabajos implementando relajaciones Lagrangeanas, técnicas de descomposición o otras familias de desigualdades válidas.

En [47], desarrollaron diferentes formulaciones lineales enteras para el problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor rectangular. En donde el primer modelo que plantean tienen mejores resultados que los otros. El modelo usado es fácilmente escalable a problemas de más dimensiones y de diferentes formas del contenedor. Además desarrollan unas restricciones que permiten la anidación de círculos dentro de otros.

En el 2015 [48], trabajan en un problema de empaquetamiento con un contenedor rectangular fijo del mismo tamaño pero los objetos a empacar presentan diferentes

dimensiones. Usan una discretización del recipiente para determinar en que lugar colocar determinado objeto. Transformando el problema en un modelo de gran escala, para el cual emplean desigualdades validas para mejorar el tiempo de ejecución. Posteriormente cambiando la norma euclidiana usada almacenan elipses, rombos y octágonos demostrando la fortaleza que tiene el modelo matemático formulado. Proponen enfatizar esfuerzo en el desarrollo la generación de las desigualdades validas para el caso de anidación, así como la implementación de relajaciones Lagranjeanas y heurísticas correspondientes para esta técnica.

En [49], plantean un modelo entero para un problema de empaquetamiento vectorial bidimensional con función de costos lineal a trozos (2DVPP-PLC). Dicho problema surge de la necesidad que tiene la industria textil de enviar sus productos por el servicio de mensajería. Donde se considera el peso y el volumen del contenedor y se tiene como objetivo minimizar el costo del envío. Hacen un algoritmo de búsqueda local iterativa para poder solucionar instancias grandes y que permita mejorar la calidad de la solución cada vez más. Invitan a la comunidad científica que desarrolle métodos exactos de gran escala para este problema específico (branch-and-price).

En [50], Desarrollan un algoritmo genético de agrupación con control en el gen de transmisión(GGA-CGT), para el problema unidimensional Bin. Dicho método permite estimular la herencia de los mejores genes en los cromosomas, sin perder el balance entre la diversificación e intensificación. En donde los mejores genes son agrupados en un nuevo conjunto de operadores genéticos. La evolución es controlada con una técnica de reproducción que limita el espacio de exploración, impidiendo que el algoritmo converja precozmente. Dicha metodología presenta muy buenos resultados para diversos problemas de tamaño y estructura. Este método presenta gran numero de parámetros que deben ser calibrados. Dicho algoritmo presenta bajo rendimiento en ciertos problemas clásicos, que hasta el momento no es claro para la comunidad que los vuelve complejos.

En [51], usan la acción espacial (ASGO) para la optimización global de un

problema de empaquetamiento de círculos de radios diferentes en un contenedor cuadrado. Realizan el empaquetamiento de los círculos en el contenedor, considerándolo como rectángulo. Los elementos que presentan mayor deformación son movidos para corregir este problema. La aproximación del objeto circular a un rectángulo facilita la búsqueda de espacio factible para un objeto. En el proceso de búsqueda se usa la estrategia tabú con el fin de prevenir ciclos y mejorar la diversificación. Realizan una estrategia de intercambio de círculos de posición con la finalidad de aumentar la diversificación del sistema. Usan 68 instancias de prueba de la lectura (Packomania), en donde el 92 % de las instancias usadas presenta mejores resultados que los reportados actualmente. La metodología usada permite estimar con una baja complejidad computación las posiciones y tamaños de los espacios vacantes para una configuración específica. Proponen la extensión de este método a tres dimensiones, así como considerar contenedores acotados (circular o rectangular).

En [52], presentan un algoritmo de reducción dinámica el cual transforma una instancia inicial a una serie de instancias del problema de empaquetamiento rectangular (contenedor rectangular, objetos rectangulares de diferentes tamaños). incorporan una metodología de compactación para compartir el diseño resultante por medio de movimientos alternativamente de izquierda, hacia abajo o a la esquina inferior izquierda con la finalidad de obtener un rectángulo envolvente de menor tamaño. Usan 28 instancias reportadas en la literatura para demostrar la eficiencia y superioridad de la metodología propuesta a comparación de resultados existentes a la fecha. Esta estrategia tiene una complejidad computacional de $O(n^6)$.

En [53], consideran el problema de empaquetamiento de círculos de diferentes radios en un contenedor rectangular de tamaño constante. Con la finalidad de maximizar la cantidad de círculos colocados en el contenedor o minimizar el área residual del recipiente. Resuelven un modelo de gran escala, discretizando el área del contenedor en un cuadrículas. Se usa un programa comercial para resolver este modelo, apoyándolo con la implementación de desigualdades válidas. Según los resultados obtenidos las desigualdades válidas mejoran la eficiencia del modelo, dichas

desigualdades pueden ser usadas para cualquier tipo de objeto. Proponen implementar las desigualdades validas para los casos en que los objetos empaquetados están anidados.

3.2.2 EMPAQUETAMIENTO DE OBJETOS IRREGULARES

En el 2006 [54], Presentan un algoritmo heurístico para el problema de dos dimensiones de cortes irregulares. Dicho método permite el empaquetamiento de objetos representados bajo líneas y además facilita embalar objetos que tienen arcos. Los problemas fueron solucionados con un tiempo de ejecución de máquina de cinco minutos. En donde hacen hincapié de la poca insistencia de instancia reales (industriales) para este problema.

En [55], Implementan un algoritmo híbrido para resolver el problema de empaquetamiento irregular. Usan un algoritmo de simulación recocida para guiar la búsqueda, ayudados de modelos de programación lineal optimizan localmente cada diseño.

En el 2012 [56], Desarrollan un híbrido entre las metaheurísticas de GRASP y recocido simulado para el empaquetamiento de figuras convexas y no convexas. Como en otros artículos discretizan el espacio para determinar en qué lugar colocar el objeto y no tener problemas de traslape.

En el 2013 [57], Trabajan en el desarrollo de un algoritmo genético con procedimiento goloso (inferior izquierda) para solucionar la jerarquización de dos dimensiones. Resuelven algunos casos teóricos así como una consultoría para la industria textil.

Mientras que [58], Formulan un modelo entero mixto, en donde las variables binarias están asociadas con un punto discreto del tablero, y un tipo de pieza. Con este modelo se resuelve a optimalidad instancias más grandes de problemas de anidación. Hacen a lución que hasta el momento no hay soluciones óptimas para la anidación de más de siete piezas.

En el 2014 [59], abordan el embajalade de figuras poligonales (no convexas), por medio de un algoritmo genético unido a una regla de colocación (inferior izquierda).

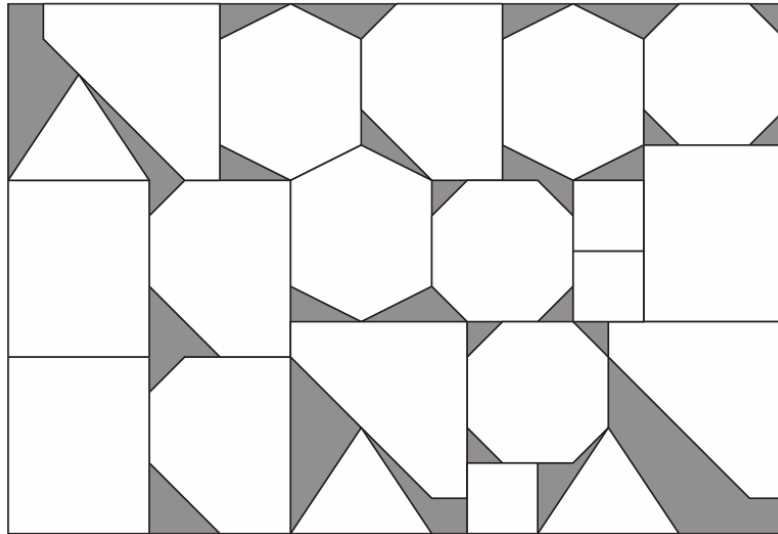


Figura 3.9: Empaquetamiento irregular

Hacen una estrategia de mejora en la cual cambian los polígonos más estrechos entre si. En donde prueban este enfoque con instancias reportadas en la literatura y un caso de estudio en la industria textil. Proponen trabajar en modelos de programación lineal para la compactación de este tipo de empaquetamiento.

En [60], Desarrollan un algoritmo que utiliza la idea de la diferencia entre el área de un colección de polígonos y el área del casco convexo. Trabajando el empaquetamiento de figuras irregulares en un contenedor irregular y regular. La asignación en el contenedor se realiza por medio de pruebas de factibilidad (la prueba de ángulo, prueba con destino, la inclusión y la prueba de punto de intersección de polígonos). Los casos conocidos de la literatura son probados, en donde se obtienen resultados competitivos. En figura 3.9, se muestra el empaquetamiento de figuras irregulares [61].

En el 2015 [62], Trabajan en crear una configuración compacta de elementos bidimensionales dentro de un recipiente rectangular sin solapamiento. En dicho caso la longitud del recipiente es variable y se permite cuatro diferentes orientaciones para los elementos. Protegen la infactibilidad en traslapes de los elementos con una heurística constructiva, la cual va colocando un elemento a la vez. Se usa un algoritmo

de recocido simulado para controlar la secuencia de introducción en el contenedor así como guiar la búsqueda sobre espacios de búsqueda. Proponen varias heurísticas para atacar este problema, los cuales son probados con instancias de la literatura. Encontraron que la densidad de disposición y el tiempo de ejecución están relacionados con la heurística de colocación adaptada.

En [63], Generan un procedimiento de búsqueda adaptativa aleatoria golosa (GRASP) para el problema de empaquetamiento de figuras irregulares. Dicha implementación no depende de la forma de la pieza, siendo capaz de embalar hasta 30 objetos de siete diferentes tipos a optimalidad. Igualmente como muchos autores comparan los resultados con los reportados en la literatura. Este enfoque mejoro 9 de 16 casos probados, para los demás casos se obtuvo una brecha (Gap) de 2.4%, además de las ideas usadas en el preprocesamiento permiten que el algoritmo sea más rápido y presente mejores resultados. Finalmente proponen mejorar el método de búsqueda local con una metodología de búsqueda tabú.

En [61], proponen un modelo semi-continuo entero mixto para el problema de empaquetamiento bidimensional de formar irregulares. En donde el eje Y es discretizando pero el eje X es continuo. Este enfoque permite encontrar soluciones optimas para problemas de pequeños y hacer frente a los de gran envergadura. Como es de esperarse la solución optima para modelos discretos depende de la etapa de discretización que se este utilizando.

En los anteriores párrafos se ha visto, las diferentes estrategias usadas para clasificar los problemas de empaquetamiento, Los problemas más estudias así como los trabajos relacionados en el empaquetamiento de objetos regulares e irregulares, En los siguientes párrafos se hará énfasis en las diferentes aplicaciones de está estructura matemática.

3.3 ALGUNAS APLICACIONES DE EMPAQUETAMIENTO

En esta sección se hará mención a la utilización de ideas o modelos matemáticos para resolver problemas de empaquetamiento usadas por profesionales ajenos a la ingeniería de sistemas o investigación de operaciones, ingeniería de producción o ingeniería industrial.

En [64], utilizan un modelo de empaquetamiento para la generación de supercapacitores dado a la necesidad de satisfacer la creciente demanda de contenedores de alta potencia en dispositivos renovables dado que tienen límite de uso extendido en comparación con las baterías tradicionales. Dicho modelo evidencia el impacto significativo de los factores geométricos, arraigados principalmente en tres parámetros:

- Distribución del tamaño del poro.
- Tamaño iónico.
- Volumen de poro.

Teniendo como variable de respuesta la capacitación gravimétrica del manomaterial. En la figura 3.10, se presenta el embalaje de iones para desarrollar un supercapacitor, en donde dependiendo del tamaño del poro se tiene diferentes respuestas siendo redistribuidas en cinco secciones [64].

En [65], presenta algunas de las limitaciones y consecuencias del cierre de embalaje en la geometría de los materiales filamentosos o columnares que tienen texturas poco comunes. Demostrando una fuerte conexión entre la geometría de interfilamento y la geometría de las superficies no euclidianas.

Mientras que [74], presenta una revisión bibliográfica de los métodos de solución para empaquetar esferas similares y de diferentes tamaño con la finalidad de crear

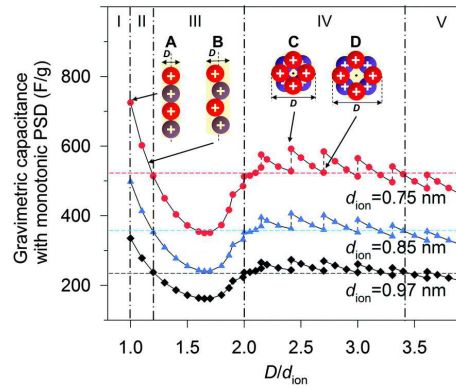


Figura 3.10: Embalaje de inones

materiales con diferentes propiedades estructurales al poder crearlos con determinada configuración microscópica. En la investigación [66], parte del mismo equipo de trabajo emplean un algoritmo que aleatoriza las posiciones de la esfera para un material poroso. En donde este poro o conducto se puede ver como un contenedor irregular y se quiere colocar el mayor número de esferas para cambiar las propiedades estructurales del material.

En [67], investigan el efecto de la densidad del empaquetamiento geométrico en la extracción de luz de nitruro III, en emisores de luz con matrices de microesferas y la relación de diámetro. Los resultados muestran la importancia de tener un hexágono así como un empaquetamiento compacto en la configuración de la matriz de microesferas monocapa para lograr la máxima eficacia de la extracción. En la figura 3.11, se muestra la radiación luminosa de campo lejano de los patrones en los LED con hexagonal a) y b), mientras que c), d) son arreglos de microesferas monocapa. Estos dos geometrías de embalaje tienen diferentes exposiciones en sus diagramas de radiación, lo que implica la mejora de la intensidad de la luz en la dirección normal y un ángulo más grande en la distribución en comparación con los LED planares.

En [68], Identifican algunos de los patrones que permiten a una célula mostrar morfologías diversas así como estructuras dinámicas durante el desarrollo. Siendo dichos patrones similares al empaquetamiento rectangular en epitelios revelando un procedimiento para la generación de estructuras altamente ordenadas durante el

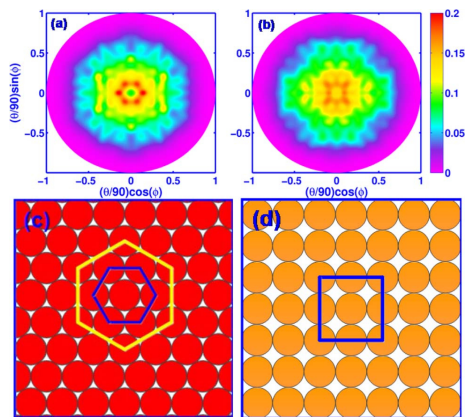


Figura 3.11: Electronica

desarrollo de la célula.

En [69], Se presenta un modelo para el cambio continuo en el dominio poroso geométrico así como la permeabilidad produciendo la filtración de una membrana, en donde la densidad del empaquetamiento se convierte en un factor significativo en la transferencia de masa.

En la Figura 3.12, se esquematiza las condiciones de contorno asociadas para la representación del trabajo, en donde se estudia la densidad del empaquetamiento y su significancia sobre el crecimiento de la torta espacial a lo largo de la fibra. Llamando el interés de los modelos que se describen en los flujos y el crecimiento de la torta, convirtiéndose en herramientas eficientes para analizar el efecto de la geometría del dispositivo de filtración, el rendimiento filtración entre otros.

Uno de los usos de los modelos de empaquetamiento, más conocidos están focalizadas en las labores que desarrollan en las industrias madereras como textiles. En donde se requiere cortar cierta producto por ejemplo madera con la finalidad de maximizar la utilización del recurso. Los problemas de corte tienen una pequeña diferencia a comparación de los problemas de empaquetamiento siendo está la división tipo guillotina en el recurso que se está seccionando [39].

En la figura 3.13, se presenta el corte de un material circular, en secciones

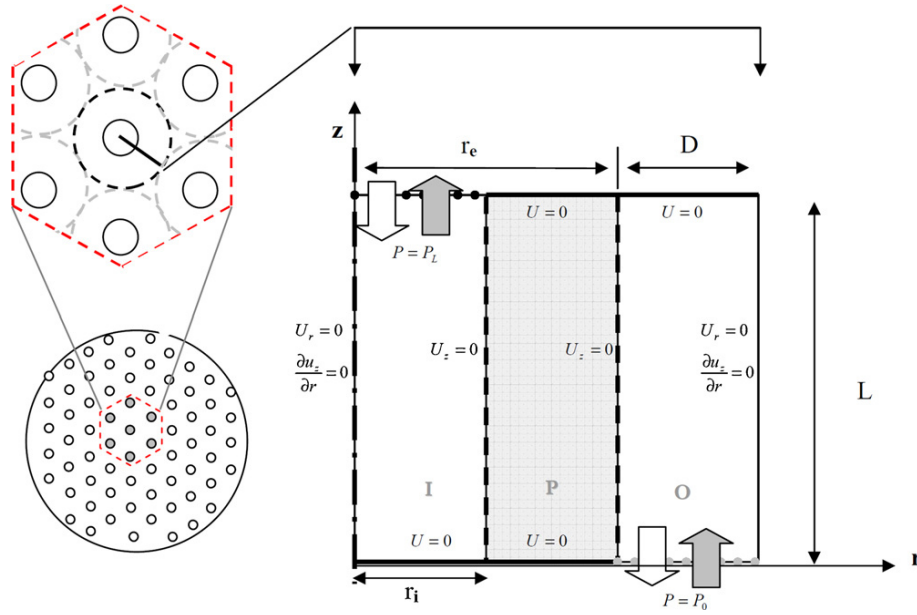


Figura 3.12: Modelando el efecto de la densidad

rectangulares. En donde a) es la solución obtenida bajo una heurística y b) es el incumbente encontrado por medio de una metheurística.

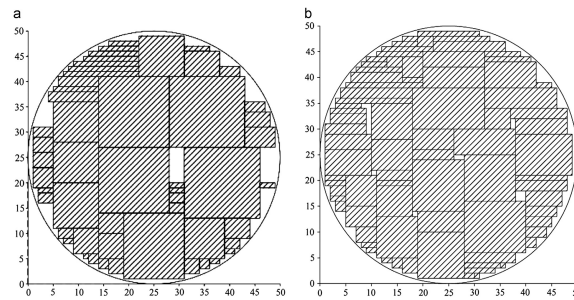


Figura 3.13: Corte de bloques de madera

Es claro que un modelo de empaquetamiento es posible usarlo en la construcción de edificaciones, por supuesto sería tridimensional. En [70], muestra un panorama general de las edificaciones arquitectónicas que están relacionadas con figuras poliédricas. La figura 3.14, presenta diferentes edificaciones actuales que son formadas bajo esquemas geométricos.

Otra de las aplicaciones es el cubrimiento de zonas terrestres por torres de telecomunicación. En donde se tiene el objetivo de con el menor numero de torres



Figura 3.14: Arquitectura

posible abastecer al mayor número posible de personas de una determinada localidad [71].

Una de las nuevas aplicaciones para los problemas de embalaje de objetos es la manufactura aditiva conocida comúnmente como impresión 3D, en donde se pretende fabricar componentes con alto grado de complejidad geométrica que para las técnicas convencionales era imposible obtener. Dicho problema puede ser atacado con algunos de los algoritmos propuestos para los problemas de empaquetamiento irregular tridimensional (3DIP). En [72], se presentan los trabajos académicos plenamente relacionados entre la manufactura aditiva y los problemas 3DIP

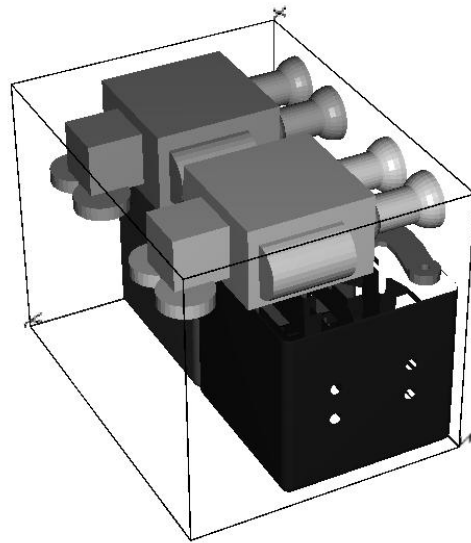


Figura 3.15: Manufactura aditiva

CAPÍTULO 4

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

*Solo triunfa en el mundo quien se levanta y busca
a las circunstancias y las crea si no las encuentra.*

Bernard Shaw

Bosquejo

4.1. Modelo matemático	43
4.1.1. Función Objetivo	44
4.1.2. Restricciones	44

Los parámetros del modelo son cantidad de objetos embalados en un contenedor rectangular, cantidad de objetos mínimos y máximos empaquetados, así una restricción que no permite que los círculos se salgan del contenedor y se intercepten entre ellos. Las cuales serán detalladas más adelante.

Indices de arreglos

- i. Número de puntos sobre el contenedor.
- k. Tipo de objetos iguales de escalas similares.

Parámetros

- m_k . Cantidad de objetos mínimos que se deben embalar.
- M_k . Cantidad de objetos máximos que se deben embalar.

R_k . Radio del objeto k .

N_{ik} . Cantidad de puntos totales en la malla siendo definidos

$j, l : i \neq j, d_{ij} \leq R_k + R_l$

Parámetros de preprocesamiento

d_{ij} . Distancia euclidiana entre el punto i y j .

α_{ij}^k , está definido según:

$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} d_{ij} < R_k & = 1 \\ d_{ij} \geq R_k & = 0 \end{cases}$$

Variables de decisión

x_i^k . Indica si en el punto x_i se coloca el objeto de dimensiones k .

x_j^l . Indica si en el punto x_j se coloca el objeto de dimensiones l .

La naturaleza de las variables

$x_i^k \in \{0, 1\}$, Siendo un modelo de programación entera

4.1 MODELO MATEMÁTICO

Maximizar

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} R_k^2 x_i^k \quad (4.1)$$

Sujeto a:

$$m_k \leq \sum_{i \in I} x_i^k \leq M_k \quad k \in K \quad (4.2)$$

$$\sum_{k \in K} x_i^k \leq 1 \quad i \in I \setminus F \quad (4.3)$$

$$R_k x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{i,j} \quad i \in I, k \in K \quad (4.4)$$

$$x_i^k + x_j^l \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K (j, l) \in N_{ik} \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \alpha_{ij}^k x_j^k \leq 1 \quad i \in I \quad (4.6)$$

$$x_i^k + \sum_{j: d_{ij} \leq R_k} x_j^k \leq 1 \quad i \in I, k \in K \quad (4.7)$$

$$x_i^k \in \{0, 1\} \quad i \in I, k \in K \quad (4.8)$$

4.1.1 FUNCIÓN OBJETIVO

La función objetivo consta de una parte, en la cual se va sumando el área del objeto k embalado, en el punto i .

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} R_k^2 x_i^k$$

4.1.2 RESTRICCIONES

La primera restricción del modelo hace referencia a la cantidad mínima y máxima de objetos tipo k , empaquetados en el contenedor rectangular.

$$m_k \leq \sum_{i \in I} x_i^k \leq M_k \quad k \in K$$

La segunda restricción protege que a lo máximo para cada punto de malla se coloque un objeto de tipo k , se excluye de esta posible asignación a los puntos ubicados en la frontera del contenedor.

$$\sum_{k \in K} x_i^k \leq 1 \quad i \in I \setminus F$$

La tercera restricción está vinculada al cuidado de que el objeto tipo k , no se salga por arriba, abajo, izquierda o derecha del contenedor. Esta es una restricción

de frontera que varia en consideración de la estructura del contenedor

$$R_k x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{i,j} \quad i \in I, k \in K$$

La cuarta restricción es la que determina que forma tendrá el objeto embalado, considerando la normas euclidianas mostradas en la tabla 4.1. Dichas normas son usadas como un preprocesamiento, para darle las bondades de los modelos lineales enteros al modelo usado en esta investigación además de impedir el traslape entre objetos.

$$x_i^k + x_j^l \leq 1 \quad \text{para } i \in I, k \in K (j, l) \in N_{ik}$$

Objeto	Norma
Cuadrado	Max $\{ x , y \}$
Rombo	$ x + y $
Círculo	$\sqrt{x^2 + y^2}$
Octágono	Max $\{ x , y , (1\sqrt{2})(z_1 + z_2) \}$

Tabla 4.1: Normas de diferentes figuras

La quinta restricción es una desigualdad validad que coincide

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \alpha_{ij}^k x_j^k \leq 1 \quad i \in I$$

Finalmente la sexta restricción es otra desigualdad validad; en [46], se realiza una detallada explicación de estas desigualdad.

$$x_i^k + \sum_{j: d_{ij} \leq R_k} x_j^k \leq 1 \quad i \in I, k \in K$$

4.1.2.1 ANIDACIÓN

Hasta donde se ha descrito el modelo no se permite que un objeto, que se está empaquetando este contenido en otro objeto de menor escala. Para lo cual es necesario cambiar el conjunto factibles de puntos candidatos N , Dado que la restricción

dos solo permite por cada punto de malla o lo más un objeto suscrito en el, para permitir que se genere la anidación de los objetos se requiere adicionar un caso al preprocesamiento que se hace para formar la cuarta restricción.

$$\Omega_{ik} = \{j, l : i \neq j, R_k - g_k - R_l < d_{ij} < R_k + R_l, R_k - g_k > R_l\} \quad (4.9)$$

CAPÍTULO 5

MÉTODOLOGIA

"Todos los días Dios nos da un momento en el que es posible cambiar todo lo que nos hace infelices. El instante mágico es el momento en que un 'sí' o un 'no' pueden cambiar toda nuestra existencia

Paulo Coelho

Bosquejo

5.1. Equipo computacional	48
5.2. Implementación computacional	48
5.3. Supuestos considerados	48
5.4. Diseño de experimentos	49
5.4.1. Telescopia	49
5.5. Generación de diferentes objetos	49
5.6. Algoritmo de solución	50

En el presente capítulo se describe los diferentes supuestos planteados para desarrollar el trabajo investigativo, así como las herramientas computacionales usadas para resolver el modelo de empaquetamiento.

5.1 EQUIPO COMPUTACIONAL

Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora con un procesador Intel (R) Xeon (R) CPU E3-1245 v3 @ 3.4GHz con 8 nucleos, con una memoria RAM de 16 GB en un sistema operativo Windows 7 de 64 bits.

5.2 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Para la implementación del modelo de empaquetamiento se uso el entorno de desarrollo integrador proporcionado por Microsoft Visual Studio 2012, en lenguaje de programación de C++, usando como optimizador la librería de CPLEX 12.61.

5.3 SUPUESTOS CONSIDERADOS

Para la generación de la estructura experimental de la investigación se asumió que los residuos generados por los factores:

1. Tamaño del contenedor entre 200 y 300 unidades métricas.
2. La cantidad de puntos en la malla entre 27 y 35.
3. La cantidad de objetos diferentes empaquetados entre 15.

5.4 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

5.4.1 TELESCOPIA

Para este caso solo se tuvo un factor con cuatro niveles siendo este el tipo de objeto empaquetado en el contenedor [73].

5.5 GENERACIÓN DE DIFERENTES OBJETOS

Para tener objetos de distintos tamaños se considero que el objeto de menor tamaño R_0 , estuviera proporcionado para el tratamiento de acuerdo a:

$$R_0 = \frac{Ta}{6K} \quad (5.1)$$

Siendo Ta el tamaño del contenedor rectangular y K el numero de objetos diferentes a embalar para el tratamiento, dichos factores son generadas aleatoriamente en los rangos especificados en la sección 4.3. Para los restantes objetos j , se uso una de las ideas expresadas en www.packomania.com .

$$T_j = (R_0)(j + 0.2) \quad (5.2)$$

Finalmente para asignar una cota a la cantidad existente de cada objeto, se tiene como mínimo para todos los casos de un objeto de tamaño j sea colocado en el contenedor, pero la cantidad máxima del objeto j está limitada entre 50 y 200. Dicho cota es asignada aleatoriamente.

5.6 ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Para la presente investigación se diseñó un algoritmo iterativo goloso con búsqueda local para empacar el mayor número de objetos en el contenedor permitiendo la anidación.

Algorithm 1: Heurística constructiva greedy

input : Malla I , contenedor $C = (\hat{l}, R, \eta)$. Radios R_k , cota inferior $b_k^{\text{mín}}$ y cota superior $b_k^{\text{máx}}$, $k \in K$

output: Lista de objetos empacados E

let $K' \leftarrow \text{sort}(K)$;

let $E \leftarrow \emptyset$;

for $k \in K'$ **do**

/* Índice factibles a asignar un círculo de radio k */

$P \leftarrow \{i \in I \mid d_{ij} > R_k + R_l; (j, R_l, \eta) \in E\} \cup \{i \in I \mid |R_k - R_l| < d_{ij} < R_k + R_l; (j, R_l, \eta) \in E\}$

while $P \neq \emptyset$ **do**

$p \leftarrow P[1]$ /* Primer elemento de P */

$E \leftarrow E \cup \{(p, R_k, \eta)\}$ /* Empaca un círculo centrado en p */

$P \leftarrow P \setminus \{i \in P \mid d_{ip} \leq 2R_k\}$ /* Actualizar P */

CAPÍTULO 6

MALLAS Y CONTENEDORES

"Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La forma más segura de tener éxito es siempre intentarlo una vez más"

Thomas A. Edison

Bosquejo

6.0.1. Contenedores	51
6.0.2. Mallas	52

En el presente capítulo se muestran la generación de diferentes mallas que son usadas en la experimentación y como sería posible el cambio de contenedor.

6.0.1 CONTENEDORES

En el presente trabajo se usa con mayor frecuencia el contenedor rectangular, en donde se ha discretizando el contenedor rectangular en puntos con coordenadas x y y , las cuales fungen como posibles centros de los objetos a empacar. Después de construir la malla se define el conjunto de puntos (usando la ecuación 4.9). Dicho conjunto permite identificar en donde se podrá o no colocar un objeto.

Para usar diferentes contenedores se puede usar la ecuación 4.6 para definir

el contenedor, claro dependiendo el objeto circular que se quiere empacar se deberá usar una norma en específico.

6.0.2 MALLAS

En este trabajo se prueban cuatro diferentes mallas para cada instancia, las cuales son cuadrangular (C), romboide (R) y para una configuración hexagonal se hará la distinción en la rotación de la figura formada por los puntos sobre el eje x (HH) o y (HV). Como primer paso se explicara como se hace la formación de cada malla y luego se mostrará gráficamente los resultados.

El algoritmo 2 muestra el procedimiento para generar una malla rectangular (C), en el caso que se quiera hacer una malla cuadrada los valores W y L deberán ser los mismos. El algoritmo permite variar la cantidad de puntos sobre el eje x y y .

Algorithm 2: Malla rectangular

Data:

Características contenedor W,L

Características de la malla M,N

Result: Coordenadas $(x, y) \in c_x \times c_y$ de la malla

begin

Calcular $d_x = \frac{W}{M-1}$ y $d_y = \frac{L}{N-1}$
$c_x = (i - 1)d_x \mid i \in \{1, 2, \dots, (M + 1)\}$
$c_y = (j - 1)d_y \mid j \in \{1, 2, \dots, (N + 1)\}$

Para generar otro tipo de malla se recomienda usar la salida del algoritmo 2 y realizar movimientos sobre el eje x y y según sea la preferencia. Se puede usar cualquier estructura matemática para implementar diferentes mallas, pero para que la experimentación pueda ser comparable la cantidad de puntos generados deben ser iguales.

Cambiando la definición x del algoritmo 2 es posible de generar la malla rom-

boide (R), para lo cual se usa la ecuación 6.1.

Donde $d_x^2 = d_x + \frac{W}{2(M+1)}$.

$$x = \begin{cases} x, & \text{si } \frac{y}{d_y} \text{ son impar} \\ x + d_x^2, & \text{si } \frac{y}{d_y} \text{ son par} \end{cases} \quad (6.1)$$

En la ecuación 6.2, se presenta los cambios que se deben hacer para generar una malla hexagonal sobre el eje x (HH). El hexágono estará acostado, para hacer la malla hexagonal pero sobre el eje y (HV), se debe aplicar la misma lógica usada para construir la ecuación 6.2 pero sobre el eje y , la cual es descrita formalmente en 6.3.

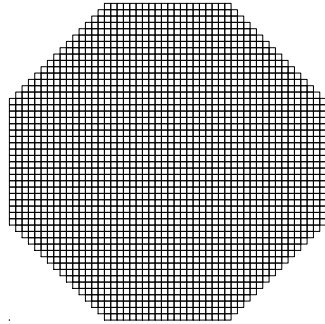
$$x = \begin{cases} x + d_x^2, & \text{si } \frac{x}{d_x} \text{ y } \frac{y}{d_y} \text{ son par} \\ x + d_x^2, & \text{si } \frac{x}{d_x} \text{ y } \frac{y}{d_y} \text{ son impar} \\ x \text{ de otra forma} \end{cases} \quad (6.2)$$

Donde $d_y^3 = d_y + \frac{L}{2(N+1)}$.

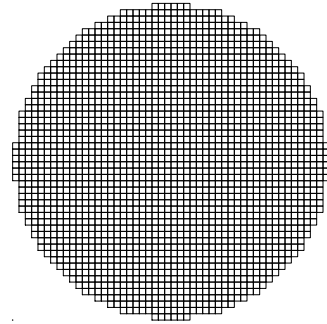
$$y = \begin{cases} y + d_y^3, & \text{si } \frac{x}{d_x} \text{ y } \frac{y}{d_y} \text{ son par} \\ y + d_y^3, & \text{si } \frac{x}{d_x} \text{ y } \frac{y}{d_y} \text{ son impar} \\ y \text{ de otra forma} \end{cases} \quad (6.3)$$

En las figuras 6.1, 6.2, 6.3 6.4, se muestran las diferentes mallas usadas para la experimentación. Para el diseño de las mismas se uso el algoritmo 2 como base y con algunas modificaciones (ecuaciones 6.1,6.2, 6.3) se obtuvieron las demás mallas. Si se pone cuidado a las figuras 6.1, 6.2, 6.3, fácilmente se podrá notar la estructura de la malla. Para la figura 6.1, no se delimito el área posible con el contenedor dado que está malla rectangular ajusta con mayor facilidad los contenedores, se usaron 2500 puntos para ajustar el contenedor. Mientras que para las demás mallas

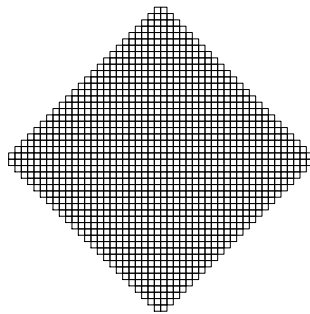
solo se usaron 900 puntos. Para las mallas romboide, hexagonal no es recomendable aumentar mucho el número de puntos sobre el contenedor dado que no se apreciara gráficamente la diferencia entre una y otra. Está recomendación solo es valida al momento de querer mostrar las diferentes mallas usadas (proceso exclusivamente gráfico).



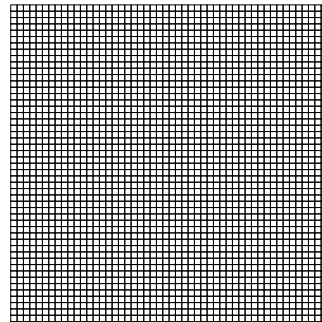
(a) Contenedor octogonal



(b) Contenedor circular

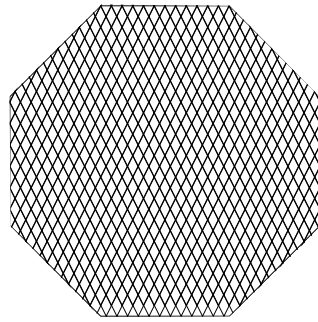


(c) Contenedor romboide

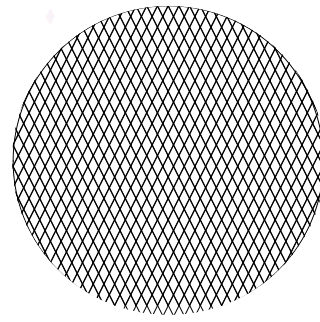


(d) Contenedor cuadrado

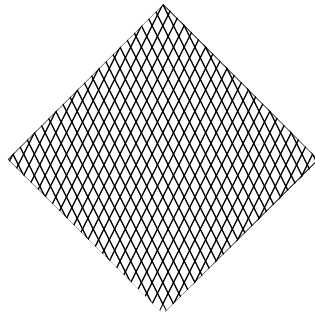
Figura 6.1: Diferentes contenedores sobre una malla cuadrada



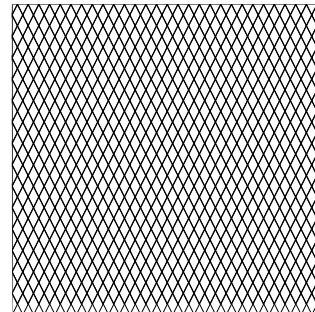
(a) Contenedor octagonal



(b) Contenedor circular

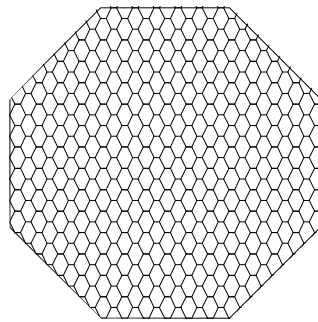


(c) Contenedor romboide

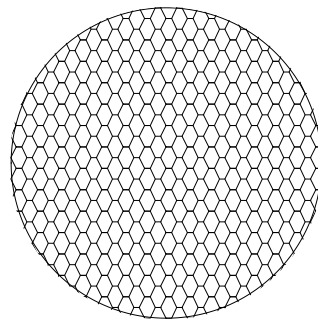


(d) Contenedor cuadrado

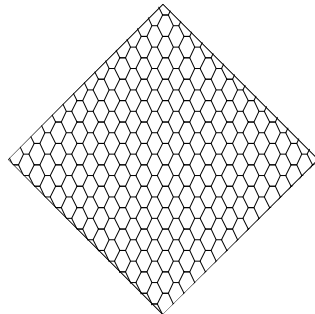
Figura 6.2: Diferentes contenedores sobre una malla romboide



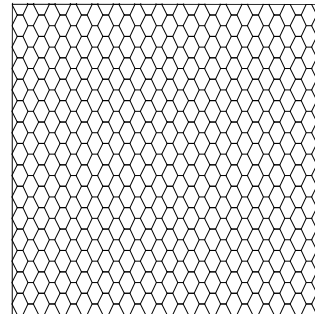
(a) Contenedor octagonal



(b) Contenedor circular

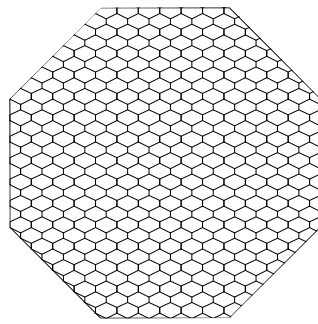


(c) Contenedor romboide

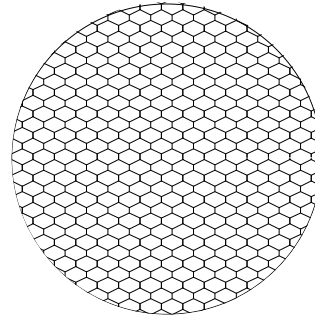


(d) Contenedor cuadrado

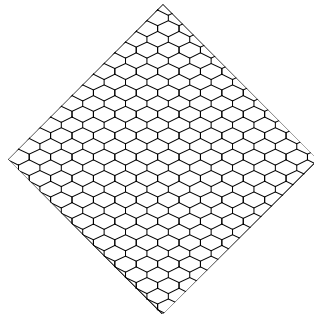
Figura 6.3: Diferentes contenedores sobre una malla hexágono sobre el eje y



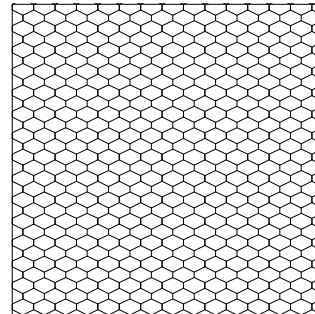
(a) Contenedor octagonal



(b) Contenedor circular



(c) Contenedor romboide



(d) Contenedor cuadrado

Figura 6.4: Diferentes contenedores sobre una malla hexágono sobre el eje x

CAPÍTULO 7

EXPERIMENTACIÓN CON CIRCULOS

"No todo lo que cuenta puede ser cuantificado y no todo lo que puede ser cuantificado cuenta"

Albert Einstein

Bosquejo

7.1. Experimentación	59
7.2. Equipo computacional	60
7.3. Resultados	60
7.3.1. Distribución de objetos	61
7.3.2. Diferentes mallas	62

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos al embalaje de objetos regulares de diferente tamaño sobre un contenedor rectangular. En donde se presentan los resultados del empaquetamiento con el modelo matemático y el uso de la heurística.

7.1 EXPERIMENTACIÓN

En este apartado se utilizan 15 tamaños de círculos diferentes en contenedores cuadrados de diferentes dimensiones además sobre el se varia la cantidad de puntos de malla, considerando en primera instancia la misma cantidad de la experimentación con el método de solución exacto y posteriormente a esta se incremento por dos, cuatro y ocho veces para determinar los cambios generados en la solución del heurístico y el tiempo de ejecución.

La tabla 7.1, presenta las instancia usadas en la experimentación, se especifica el tamaño de cada radio usado, la cantidad de puntos probados en el método exacto así como el largo/ancho del contenedor.

		Instancia					
Radio	1	2	3	4	5	6	
1	43.65	39	44.1	37.95	42.6	44.1	
2	40.74	36.4	41.16	35.42	39.76	41.16	
3	37.83	33.8	38.22	32.89	36.92	38.22	
4	34.92	31.2	35.28	30.36	34.08	35.28	
5	32.01	28.6	32.34	27.83	31.24	32.34	
6	29.1	26.0	29.4	25.3	28.4	29.4	
7	26.19	23.4	26.46	22.77	25.56	26.46	
8	23.28	20.8	23.52	20.24	22.72	23.52	
9	20.37	18.2	20.58	17.71	19.88	20.58	
10	17.46	15.6	17.64	15.18	17.04	17.64	
11	14.55	13.0	14.7	12.65	14.2	14.7	
12	11.64	10.4	11.76	10.12	11.36	11.76	
13	8.73	7.8	8.82	7.59	8.52	8.82	
14	5.82	5.2	5.88	5.06	5.68	5.88	
15	2.91	2.6	2.94	2.53	2.84	2.94	
Puntos	25	30	30	30	30	30	
Largo	291	260	294	253	284	294	

Tabla 7.1: Instancias de círculos

7.2 EQUIPO COMPUTACIONAL

Todas las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6 implementado en lenguaje C++ como lenguaje de modelado mientras que la heurística fue desarrollada usando R. Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora con un procesador Intel (R) Xeon (R) CPU E3-1245 v3 @ 3.4GHz con 8 núcleos, con una memoria RAM de 16 GB en un sistema operativo Windows 7 de 64 bits.

7.3 RESULTADOS

Después de 10 horas de ejecución del algoritmo exacto considerando la telecopia la mejor combinación del embalaje presenta un $gap=84\%$, la cual es descrita en la tabla 7.2, además de las restantes 5 instancias.

Instancia	Cuota	$F.O$	gap
1	538435	292690	0.839
2	473375	224965	1.104
3	605275	287649	1.104
4	448228	213015	1.104
5	564800	268414	1.104
6	605275	287649	1.104

Tabla 7.2: Resultados circulo

La figura 7.1(a,b), presentan el acomodo para el caso del algoritmo exacto y la heurística siendo el tiempo de ejecución de 35.4 segundos. La función objetivo es: 244715 presentando para este caso una mejora de 8.77%. En la figura 7.1(c), se muestra la diferencia obtenía del método heurístico con respecto a la solución obtenida por el método exacto, en donde se va incrementando exponencialmente en

base 2, la cantidad de puntos sobre la malla. Las letras presente en la figura 7.1(c) presenta el desempeño de la heurística contra el exacto, además se ha agregado letras en cada uno de los niveles de malla estudiados con los cuales se puede evidenciar la formación de grupos. Tanto el tercer y cuarto nivel presentan igual desempeño estadístico (son un grupo, misma letra), pero se diferencian del nivel dos y mucho más del nivel uno. Para llegar a esta afirmación se uso la prueba de *Kruskal- Wallis*, con un α de 0.05, posteriormente se corrió pruebas post hoc siendo esta la de *Dunn* con la cual se permitió generar los diferentes grupos en los niveles de puntos de malla estudiados.

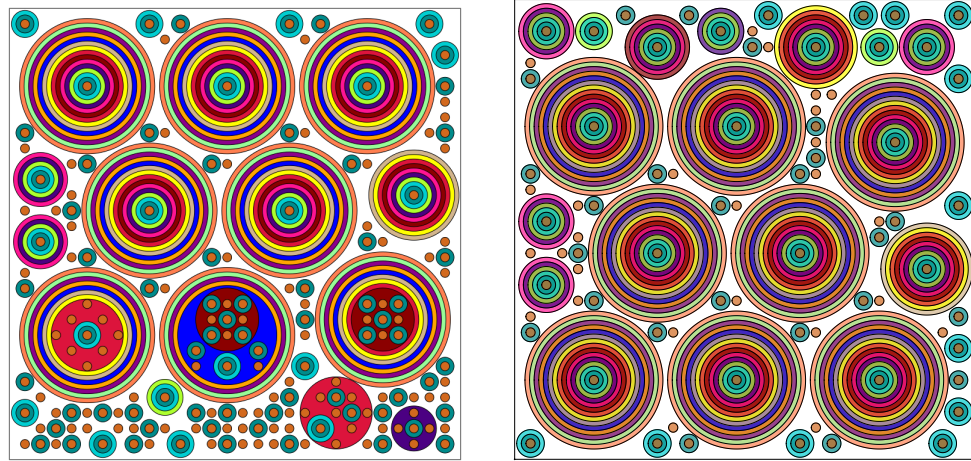
¿Que tanto cambia la solución al momento de correr el heurístico? seria una pregunta interesante que el lector se haría, la figura 7.2 muestra como va cambiando la configuración en cada caso, ademas muestra la función objetivo obtenido para cada caso. Al tener mayor número de puntos el algoritmo deja de centrar los objetos y los va inclinando. Dicha inclinación es producida por haber seleccionado el primer punto que permita contener otro objeto sobre el, sin sobrepasar el anterior. la figura 7.2(c) muestra la configuración en tres dimensiones para la solución obtenida con 30 puntos en el contenedor.

7.3.1 DISTRIBUCIÓN DE OBJETOS

En la figura 7.3, se presenta la distribución de los objetos colocadas variando la cantidad de puntos en la malla, donde p hace referencia a los puntos que presenta la instancia en el estado inicial, posteriormente se va incrementando como se muestra en la gráfica. Sobre el eje x se muestra los diferentes radios siendo el primero de menor tamaño y por consiguiente el ultimo, el radio mayor. Para todos los casos se cumple la cantidad mínima requerida de empaquetar de cada objeto.

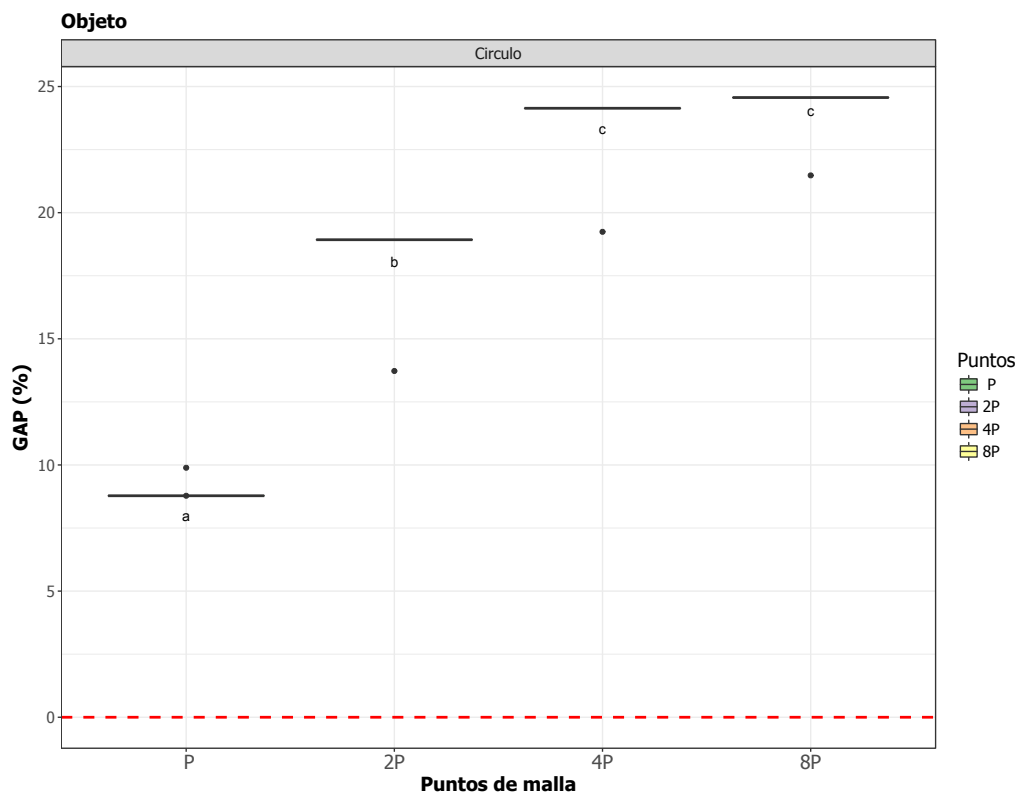
7.3.2 DIFERENTES MALLAS

La figura 7.4(a), presenta la variación de las funciones objetivos al momento de cambiar el tipo de malla estudiada (ver sección:6.0.2). Se colocó una línea sobre el eje x con $y = 0$, para apreciar fácilmente la cantidad de soluciones que son mejores al algoritmo exacto o por el contrario no lo son. Para este caso todas las soluciones, variando el tipo de mallas como la cantidad de puntos de mallas son superiores en la función objetivo. Opuesto a lo esperado para las mallas HV y HH se presenta una diferencia de 3 %, cuando se usa la misma cantidad de puntos que la del algoritmo exacto. La sección (b) de la figura muestra una prueba pos-hoc pareada de *Dunn*, para determinar si existe una diferencia significativa entre las diferentes mallas probadas en la experimentación. El color blanco indica que tiene una diferencia estadística ($\alpha = 0.05$) rechazando H_o , por consiguiente el tono gris denota que las medias sobre el *gap*, obtenidas para la malla a vs la malla b son estadísticamente similares aceptando H_o .



(a) Exacto

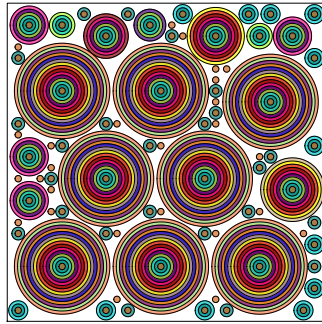
(b) Heurístico



(c) Exacto vs Heurístico

Figura 7.1: Comparación entre soluciones para la instancia 2 y desempeño de la heurística

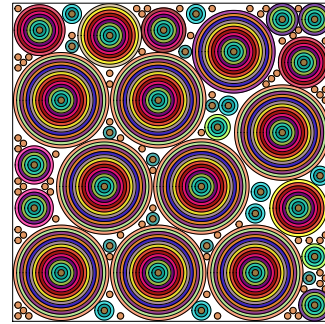
Circulo 6 puntos 30



FO: 312903.265time 34.1261808872223 Area/#objetos 1067.929

(a) 30 puntos

Circulo 6 puntos 60



FO: 342094.536time 127.006948947906 Area/#objetos 1039.801

(b) 60 puntos

Circulo 6 puntos 120



FO: 357083.914time 491.470936775208 Area/#objetos 1011.569

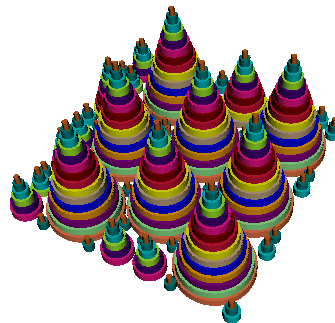
(c) 120 puntos

Circulo 6 puntos 240



FO: 358305.874time 1930.60907506943 Area/#objetos 878.201

(d) 240 puntos



(e) 3D para la configuración de 30 puntos

Figura 7.2: Comparación entre los diferentes acomodos variando la cantidad de puntos sobre la malla

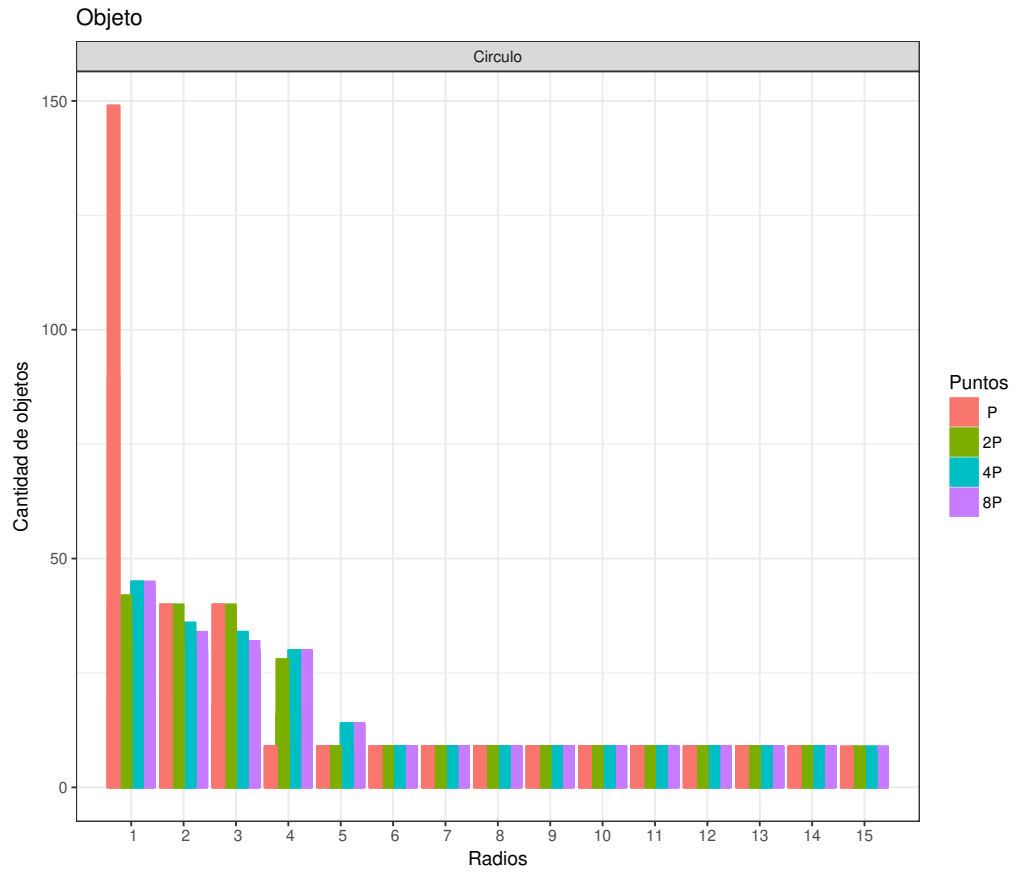
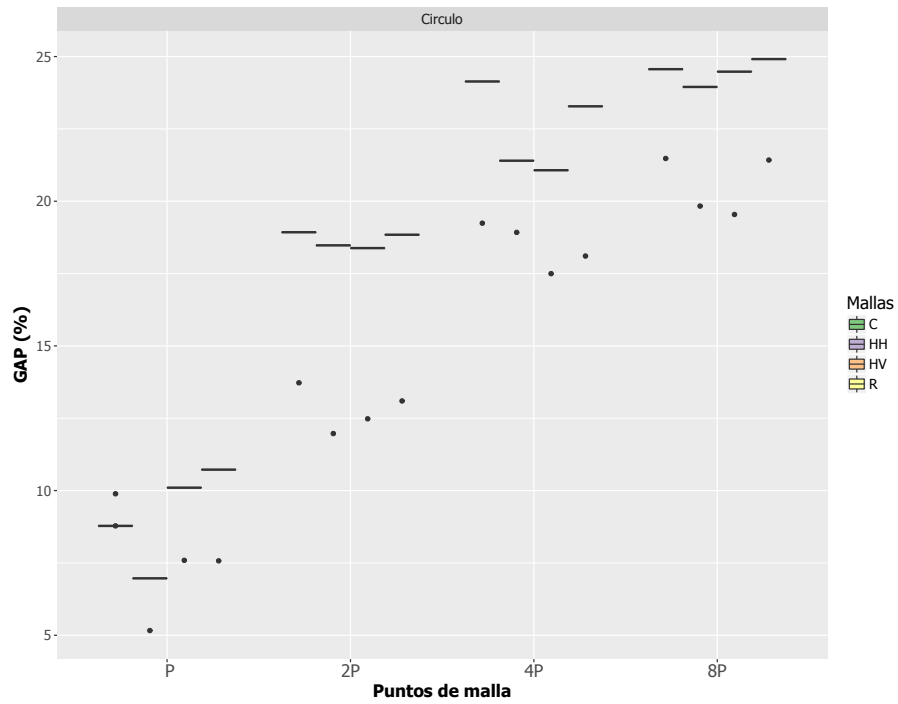
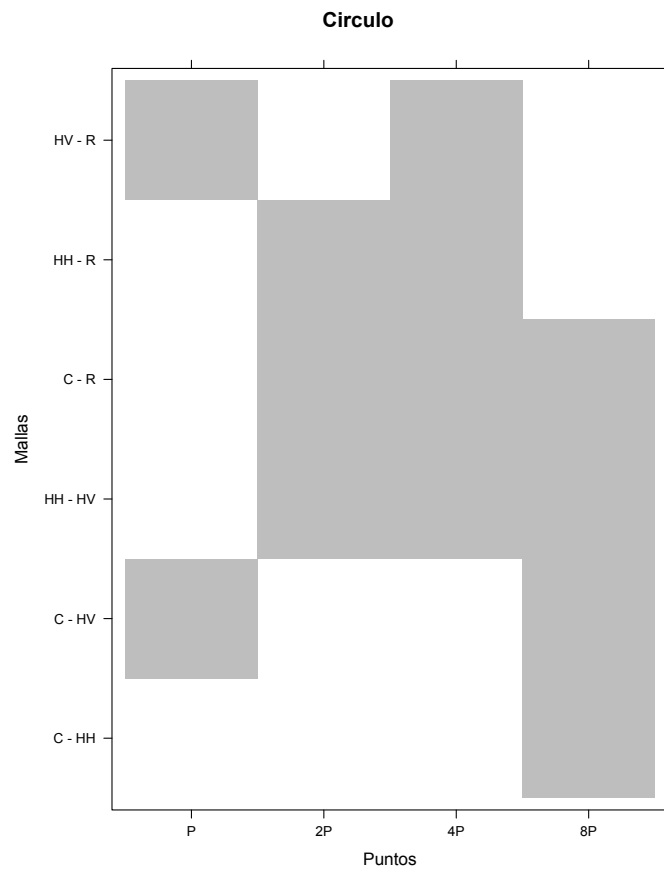


Figura 7.3: Distribución de acomodo dependiendo de la cantidad de puntos en la malla



(a) Distribución de acomodo dependiendo de la cantidad de puntos en la malla



(b) Pruebas pareadas pos hoc para la diferencia de medias

Figura 7.4: Diferentes mallas en un contenedor rectangular

CAPÍTULO 8

EXPERIMENTACIÓN CON ROMBOS

"Para llegar a ser CEO no hay que ser un experto en marketing y ventas; es necesario poseer profundos conocimientos de ingeniería"

Elon Musk

Bosquejo

8.1. Experimentación	68
8.2. Equipo computacional	69
8.3. Resultados	69
8.3.1. Distribución de objetos	70
8.3.2. Diferentes mallas	70

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos al embalaje de objetos regulares de diferente tamaño sobre un contenedor rectangular. En donde se presentan los resultados del empaquetamiento con el modelo matemático y el uso de la heurística.

8.1 EXPERIMENTACIÓN

En este apartado se utilizan 15 tamaños de rombos diferentes en contenedores cuadrados de diferentes dimensiones además sobre el se varia la cantidad de puntos de malla. Aunque el rombo.^{es} un cuadrado rotado su norma cambia y por consiguiente no es igual trabajar con el rombo como con los cuadrados.

La tabla 8.1, presenta las instancia usadas en la experimentación, se especifica el tamaño de cada radio usado, la cantidad de puntos probados en el método exacto así como el largo/ancho del contenedor.

		Instancia					
Radio	1	2	3	4	5	6	
1	41.25	39.90	43.05	42.45	38.40	41.40	
2	38.50	37.24	40.18	39.62	35.84	38.64	
3	35.75	34.58	37.31	36.79	33.28	35.88	
4	33.00	31.92	34.44	33.96	30.72	33.12	
5	30.25	29.26	31.57	31.13	28.16	30.36	
6	27.50	26.60	28.70	28.30	25.60	27.6	
7	24.75	23.94	25.83	25.47	23.04	24.84	
8	22.00	21.28	22.96	22.64	20.48	22.08	
9	19.25	18.62	20.09	19.81	17.92	19.32	
10	16.50	15.96	17.22	16.98	15.36	16.56	
11	13.75	13.30	14.35	14.15	12.8	13.80	
12	11.00	10.64	11.48	11.32	10.24	11.04	
13	8.25	7.98	8.61	8.49	7.68	8.28	
14	5.50	5.32	5.74	5.66	5.12	5.52	
15	2.75	2.66	2.87	2.83	2.56	2.76	
Puntos	30	35	34	32	33	34	
Largo	275	266	287	283	256	274	

Tabla 8.1: Instancias de rombos

8.2 EQUIPO COMPUTACIONAL

Todas las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6 implementado en lenguaje C++ como lenguaje de modelado mientras que la heurística fue desarrollada usando R. Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora con un procesador Intel (R) Xeon (R) CPU E3-1245 v3 @ 3.4GHz con 8 núcleos, con una memoria RAM de 16 GB en un sistema operativo Windows 7 de 64 bits.

8.3 RESULTADOS

Después de 10 horas de ejecución del algoritmo exacto considerando la telescopia, la mejor combinación del embalaje presenta un $gap=2.2\%$, la cual es descrita en la tabla 8.2 además dicha experimentación tiene un promedio de 6% en el gap , presentando muy buenos resultados para el caso exacto.

Instancia	Cuota	$F.O$	gap
1	67501.7	63116.6	0.069
2	59590.3	57751	0.032
3	73691.6	72204.7	0.020
4	74793.3	66810.2	0.119
5	60034.7	53765.7	0.116
6	68148.1	66623.5	0.022

Tabla 8.2: Resultados rombos

La figura 8.1(a,b), presentan el acomodo para el caso del algoritmo exacto y la heurística. En donde el algoritmo exacto presentó mejores resultados en este caso (instancia 2) y para la instancia 3 con la misma cantidad de puntos en la malla. Aunque se en este caso analizado la formulación y desarrollo por métodos exactos

presenta mejores resultados para dos instancias para las restantes cuatro (con la misma cantidad de puntos de malla) el heurístico obtiene mejoras significativas. El aumento de la cantidad de puntos en la malla sigue siendo exponencial con base dos. Si se quiere aumentar la misma cantidad de puntos al algoritmo exacto que los probados en la heurística se necesitaría un equipo computacional con mayor especificaciones en la memoria RAM, dado principalmente por la crecimiento en la complejidad del modelo. En el mejor de los casos la heurística tiene un 38.22% de *gap* con respecto al exacto.

En la figura 8.2, se presenta la distribución de los objetos colocadas variando la cantidad de puntos en la malla, donde p hace referencia a los puntos que presenta la instancia en el estado inicial, posteriormente se va incrementando como se muestra en la gráfica. Sobre el eje x se presenta los diferentes radios de los objetos utilizados siendo el número menor el menor tamaño. Mientras que el eje y se tiene la cantidad de objetos colocados en promedio en las seis instancia con forma romboide. Se presenta un comportamiento interesante entre los radios 6 al 15 en donde la cantidad de objetos colocados sin importar la cantidad de puntos de malla es la misma. Mientras que para el menor número de puntos de malla p es donde se colocan mayor cantidad de objetos de menor radio, dado principalmente por las pocas posibilidades de donde colocar el objeto aunado a la reducida área sin asignar a un objeto.

8.3.1 DISTRIBUCIÓN DE OBJETOS

8.3.2 DIFERENTES MALLAS

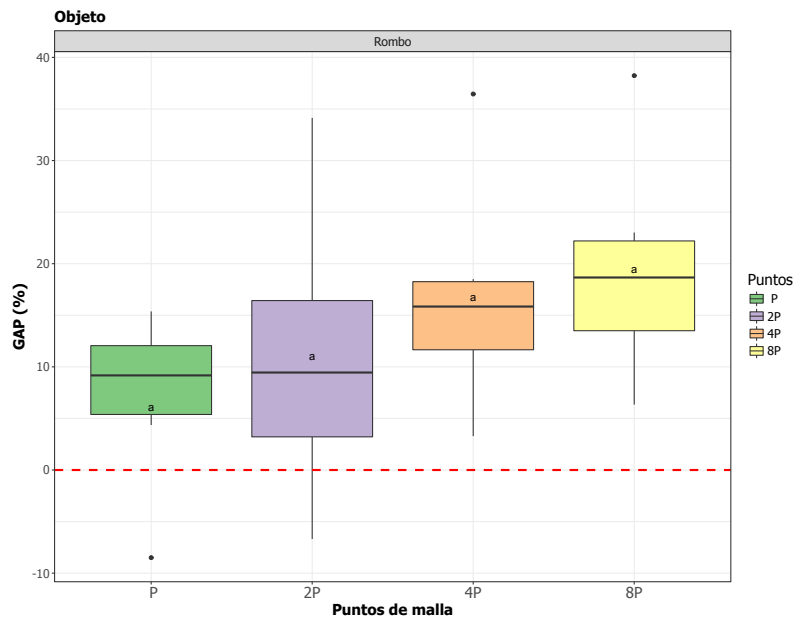
En la figura 8.3, se presenta el desempeño del heurístico cuando se le modifican las coordenadas x y y generando cuatro posibles mallas diferentes. Para el caso cuando se compara el heurístico en las mismas condiciones que el algoritmo exacto el usar las mallas HH, HV y R presentan peores desempeños en promedio a comparación

de la malla C (cuadrada), Siendo la peor la malla romboidal para objetos romboides. Para los siguientes niveles (2P, 4P y 8P), los *gap* promedio tienen un considerable aumento, lamentablemente por la variación en cada nivel de la malla no se encuentra diferencia estadística significativa como para recomendar una opción bajo un criterio técnico.



(a) Exacto

(b) Heurístico



(c) Exacto vs Heurístico

Figura 8.1: Comparación entre soluciones para la instancia 2

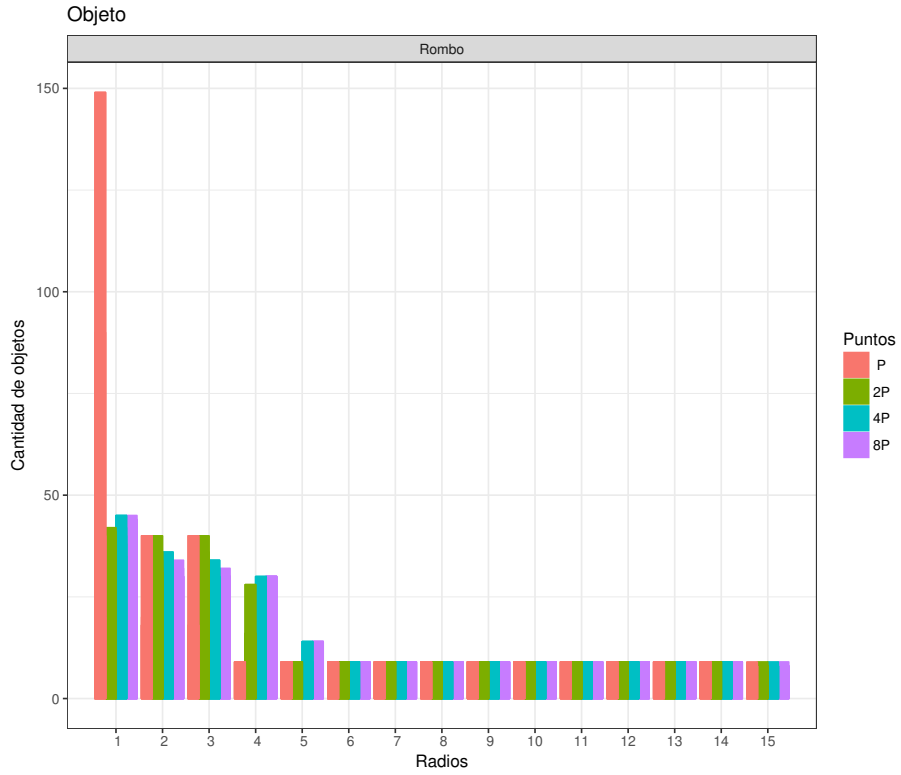


Figura 8.2: Distribución de acomodo de los rombos

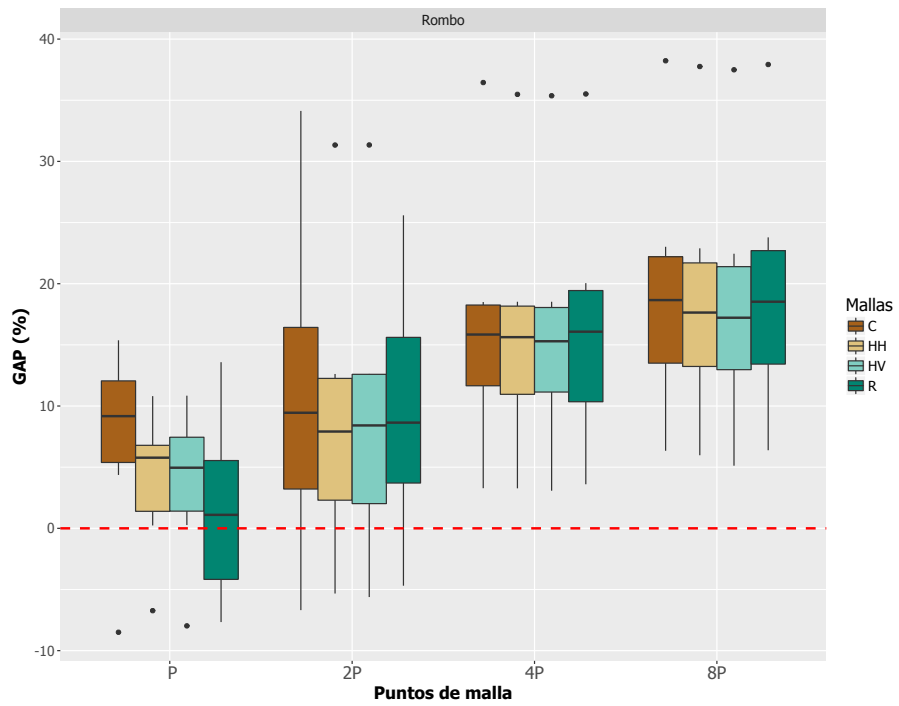


Figura 8.3: Desempeño de diferentes mallas para el rombo

CAPÍTULO 9

EXPERIMENTACIÓN CON OCTÁGONOS

"Siempre intenté convertir cada desastre en una oportunidad

John D. Rockefeller

Bosquejo

9.1. Experimentación	74
9.2. Equipo computacional	75
9.3. Resultados	76
9.3.1. Distribución de objetos	77
9.3.2. Diferentes mallas	77

Se presentan los resultados obtenidos al momento de empaçar octágonos

9.1 EXPERIMENTACIÓN

Similar que los dos casos anteriores en la experimentación que se permite telescopio se usan instancia que cuentan con 15 objetos de diferentes tamaños. La tabla 9.1, presenta las instancia usadas en la experimentación, se especifica el tamaño de cada radio usado, la cantidad de puntos probados en el método exacto así como el largo/ancho del contenedor. Recordemos que para el heurístico se ha incrementado

la cantidad de puntos sobre el eje x y y exponencialmente en base dos, multiplicado por la cantidad de puntos en el exacto empezando desde cero ($2^n P \in n\{0, 4\}$).

Radio	Instancia					
	1	2	3	4	5	6
1	39.6	37.65	43.65	38.70	41.55	44.25
2	36.96	35.14	40.74	36.12	38.78	41.30
3	34.32	32.63	37.83	33.54	36.01	38.35
4	31.68	30.12	34.92	30.96	33.24	35.4
5	29.04	27.61	32.01	28.38	30.47	32.45
6	26.40	25.10	29.10	25.80	27.70	29.5
7	23.76	22.59	26.19	23.22	24.93	26.55
8	21.12	20.08	23.28	20.64	22.16	23.6
9	18.48	17.57	20.37	18.06	19.39	20.65
10	15.84	15.06	17.46	15.48	16.62	17.70
11	13.2	12.55	14.55	12.90	13.85	14.75
12	10.56	10.04	11.64	10.32	11.08	11.80
13	7.92	7.53	8.73	7.74	8.31	8.85
14	5.28	5.02	5.82	5.16	5.54	5.90
15	2.64	2.51	2.91	2.58	2.77	2.95
Puntos	30	30	30	30	30	30
Largo	264	251	291	258	277	295

Tabla 9.1: Instancias de octágonos

9.2 EQUIPO COMPUTACIONAL

Todas las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6 implementado en lenguaje C++ como lenguaje de modelado mientras que la heurística fue desarrollada usando R. Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora con un procesador Intel (R) Xeon (R) CPU E3-1245 v3 @ 3.4GHz con 8 núcleos, con una memoria RAM de 16 GB en un sistema operativo Windows 7 de 64 bits.

9.3 RESULTADOS

Después de 10 horas de ejecución del algoritmo exacto considerando la telescopio, la mejor combinación del embalaje presenta un $gap=0.01\%$, el peor caso es de 104% y se tiene un promedio de 74% para el conjunto de instancias estudiadas. Aunque esta figura presenta una instancia en donde el modelo lineal tiene un gap muy cercano a cero, lastimosamente no se comporta el método de solución similar para las restantes cinco instancias (ver Tabla 9.2).

Instancia	Cuota	$F.O$	gap
1	276138	276122	0.0001
2	450340	230835	0.9509
3	605312	310270	0.9509
4	496160	242757	1.0439
5	558449	311481	0.7929
6	606968	345458	0.7570

Tabla 9.2: Resultados octágonos

La figura 9.1(a,b), presentan el acomodo para el caso del algoritmo exacto y la heurística para la instancia 1. Pareciera en los dos casos haber mucho espacio desperdiciado en el contenedor pero realmente no lo es así. La figura 9.1 (b), además contiene los puntos de malla graficados usados para solucionar dicha instancia, en donde el lector puede verificar por inspección visual que no es posible de poner otro objeto en los puntos no usados, aun así no es posible de colocar un objeto octagonal de mayor tamaño en la área por el rombo formada por la intersección de cuatro torres octagonales. Finalmente La figura 9.1 (c), presenta el gap para las cuatro cantidades de puntos exploradas en donde el método exacto es mejor que el heurístico solo en uno de los casos (instancia 5), para las demás obtiene muy buenos resultados el heurístico teniendo un promedio en general de 8.5% .

En el párrafo anterior se menciona que no era posible colocar otro objeto en el contenedor con los puntos de malla no usados, pero como entonces es posible aumentar el área usada en el contenedor si antes no era posible colocar otro objeto???. La limitante principal tanto del algoritmo de solución exacta como el heurístico para generar posibles soluciones es la discretización del contenedor en n puntos de malla. En la figura 9.2, presenta las diferentes configuraciones de las soluciones obtenidas al momento de variar la cantidad de puntos en la malla, en estos casos no se ha graficado sobre las secciones de la figura la malla que se requiere para obtener la solución obtenida. Al aumentar la cantidad de puntos la configuración final cambia de una distribución rectangular (figura 9.2(a)) a hexagonal (figura 9.2(b,c,d)).

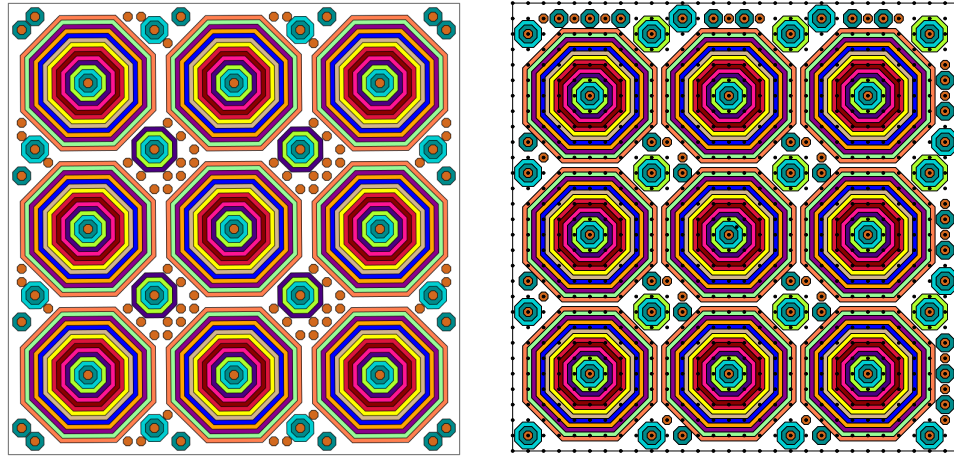
9.3.1 DISTRIBUCIÓN DE OBJETOS

En la figura 9.3, se presenta la distribución de los objetos colocadas variando la cantidad de puntos en la malla, donde p hace referencia a los puntos que presenta la instancia en el estado inicial. Los cuales se van incrementando de acuerdo a un factor polinomio 2^n multiplicado por p . El hecho que la distribución en el acomodo sea la misma en nueve radios diferentes, hace pensar que en estos casos se podría descomponer el problema en una malla no superior a p y posteriormente para los últimos cinco radios re-definir la malla a una más densa, aunque no es una estrategia que disminuye la complejidad computacional del problema reduciría el tiempo de computo tanto para una estrategia heurística o exacta.

9.3.2 DIFERENTES MALLAS

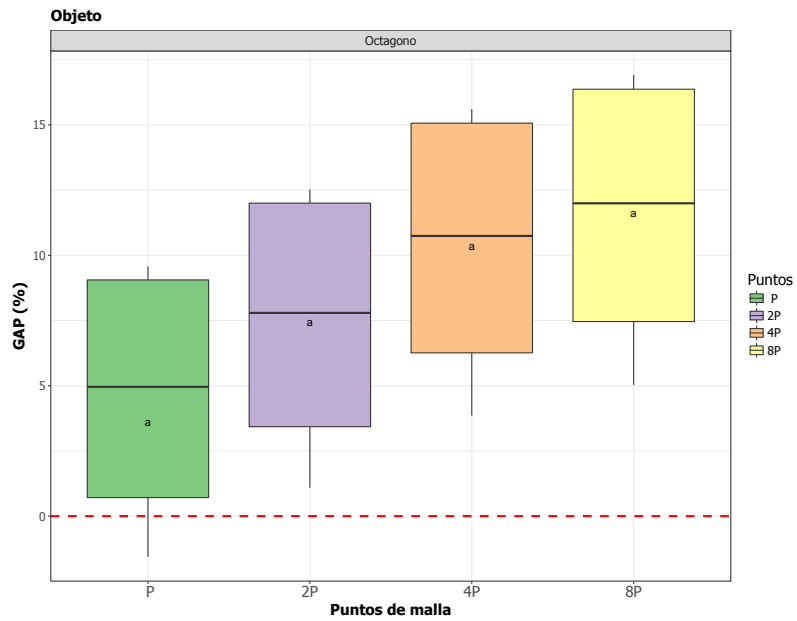
En la figura 9.4 muestra como va cambiando el *gap* al momento de ir variando las mallas (diferentes colores). Sobre el eje x se varia la cantidad de puntos en las mallas, para el primer nivel las dos mallas hexagonales presentan en algunos

casos resultados inferiores al algoritmo exacto. Al aumentar la cantidad de puntos el desempeño de las mallas hexagonales se asemejan a la malla C y malla R. Se realizaron pruebas de *Kruskal- Wallis* para determinar si existía una diferencia en cada uno de los niveles de los puntos en la malla, sin poder encontrar evidencia suficiente para rechazar H_o .



(a) Exacto

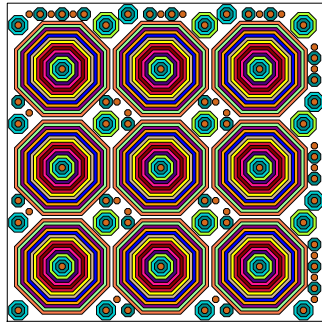
(b) Heurístico



(c) Exacto vs Heurístico

Figura 9.1: Comparación entre soluciones para la instancia 1 y Exacto vs heurístico

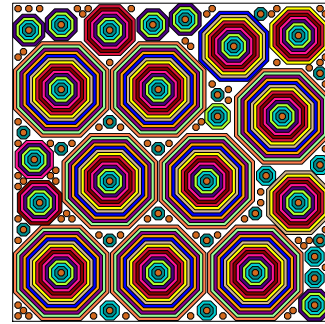
Octagono 4 puntos 30



FO: 66494.823

(a) 30 puntos

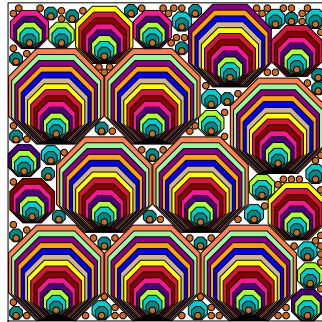
Octagono 4 puntos 60



FO: 68290.296

(b) 60 puntos

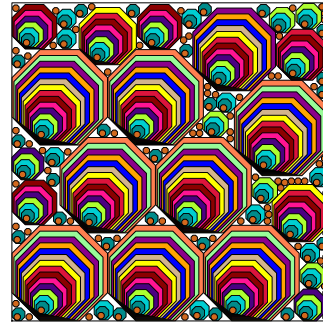
Octagono 4 puntos 120



FO: 70159.401

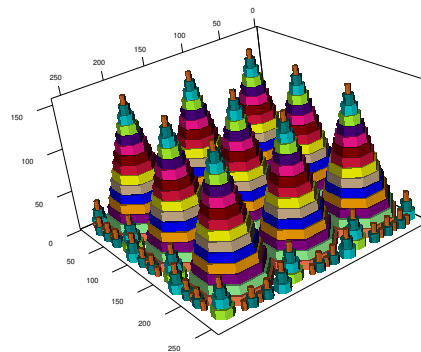
(c) 120 puntos

Octagono 4 puntos 240



FO: 70952.355

(d) 240 puntos



(e) 3D para la configuración de 30 puntos

Figura 9.2: Comparación entre los diferentes acomodos variando la cantidad de puntos sobre la malla

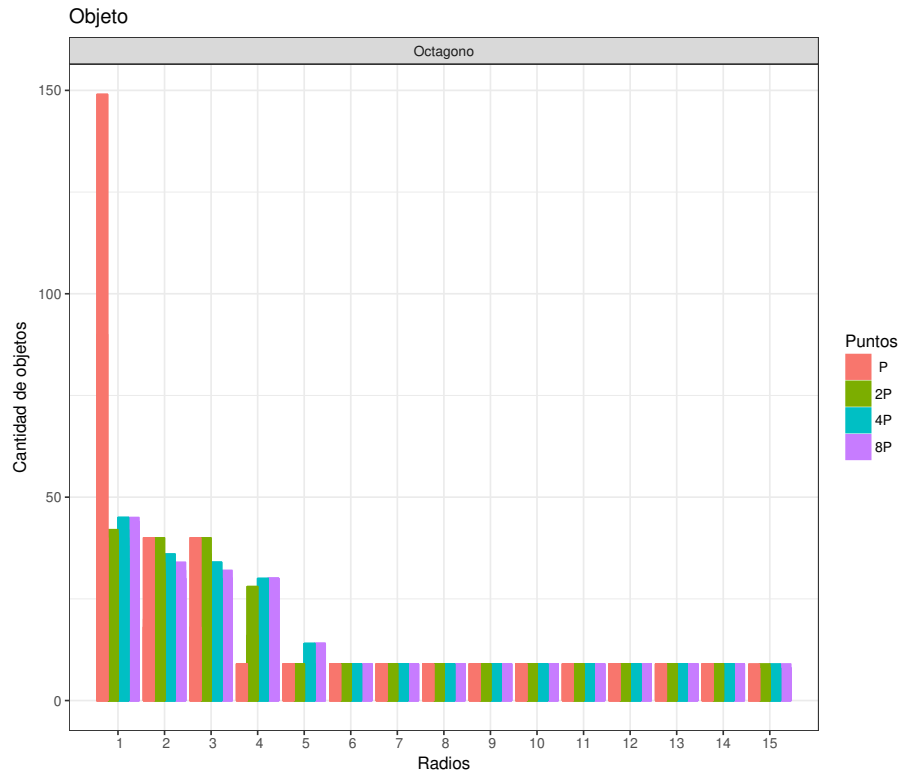


Figura 9.3: Distribución de acomodo de los octágonos

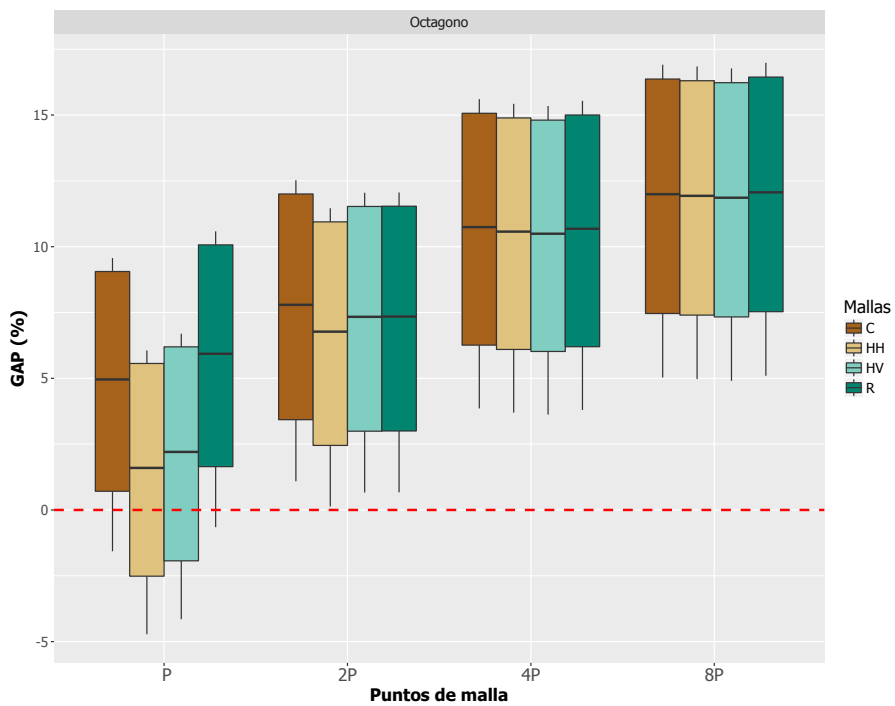


Figura 9.4: Desempeño de diferentes mallas para el octágono

CAPÍTULO 10

EXPERIMENTACIÓN CON CUADRADOS

"No tengas miedo de renunciar a lo bueno para ir por lo grande"

John D. Rockefeller

Bosquejo

10.1. Experimentación	82
10.2. Equipo computacional	83
10.3. Resultados	84
10.3.1. Distribución de objetos	85
10.3.2. Diferentes mallas	85

Se presentan los resultados obtenidos al momento de empacar cuadrados.

10.1 EXPERIMENTACIÓN

Similar que los casos anteriores en la experimentación que se permite telescopio se usan instancia que cuentan con 15 objetos de diferentes tamaños. La tabla 10.1, presenta las instancia usadas en la experimentación, se especifica el tamaño de cada radio usado, la cantidad de puntos probados en el método exacto así como el largo/ancho del contenedor.

		Instancia					
Radio	1	2	3	4	5	6	
1	43.050	42.000	42.300	43.650	42.300	42.450	
2	40.180	39.200	39.480	40.740	39.480	39.620	
3	37.310	36.400	36.660	37.830	36.660	36.790	
4	34.440	33.600	33.840	34.920	33.840	33.960	
5	31.570	30.800	31.020	32.010	31.020	31.130	
6	28.700	28.000	28.200	29.100	28.200	28.300	
7	25.830	25.200	25.380	26.190	25.380	25.470	
8	22.960	22.400	22.560	23.280	22.560	22.640	
9	20.090	19.600	19.740	20.370	19.740	19.810	
10	17.220	16.800	16.920	17.460	16.920	16.980	
11	14.350	14.000	14.100	14.550	14.100	14.150	
12	11.480	11.200	11.280	11.640	11.280	11.320	
13	8.610	8.400	8.460	8.730	8.460	8.490	
14	5.740	5.600	5.640	5.820	5.640	5.660	
15	2.870	2.800	2.820	2.910	2.820	2.830	
Puntos	32	31	33	33	32	35	
Largo	287	280	283	291	282	283	

Tabla 10.1: Instancias de cuadrados

10.2 EQUIPO COMPUTACIONAL

Todas las instancias fueron ejecutadas utilizando el solver CPLEX versión 12.6 implementado en lenguaje C++ como lenguaje de modelado mientras que la heurística fue desarrollada usando R. Los experimentos computacionales se realizaron en una computadora con un procesador Intel (R) Xeon (R) CPU E3-1245 v3 @ 3.4GHz con 8 núcleos, con una memoria RAM de 16 GB en un sistema operativo Windows 7 de 64 bits.

10.3 RESULTADOS

Después de 10 horas de ejecución del algoritmo exacto considerando la telescopio, la mejor combinación del embalaje presenta un $gap=62.15\%$, el peor caso es de 94.3% y se tiene un promedio de 88.17% (tabla 10.2).

Instancia	Cuota	$F.O$	gap
1	93802	307401	0.932
2	575053	299582	0.919
3	593127	305277	0.943
4	632541	390075	0.621
5	573331	296784	0.932
6	571579	294151	0.943

Tabla 10.2: Resultados cuadrados

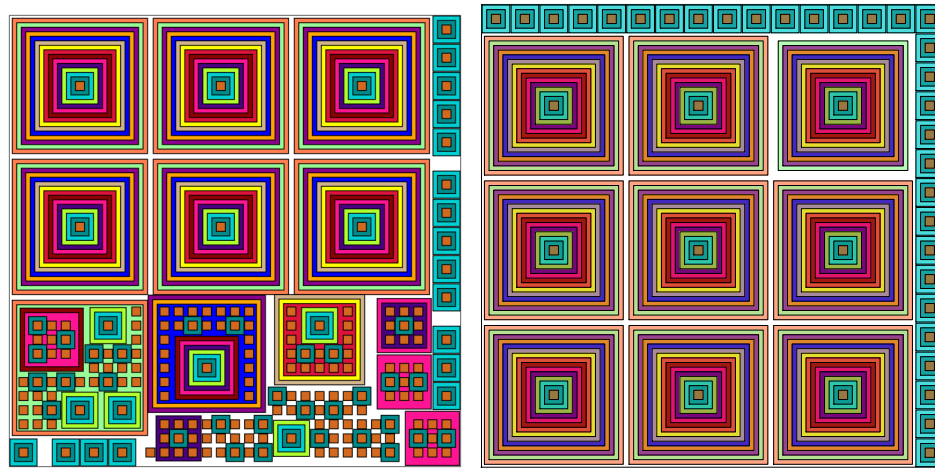
En la figura 10.1 se muestra la configuración para una de las instancias resultado por el algoritmo exacto y por el heurístico. En donde el algoritmo exacto no es capaz de encontrar la configuración que maximice la cantidad de área colocada en el contenedor (sección a figura 10.1), mientras que el método propuesto si es capaz. Además en este caso para todas las instancias estudiadas el heurístico tiene mejor desempeño que el algoritmo exacto, en el peor de los casos está 0.5% de cerca al exacto. La sección (c) de la figura muestra el gap obtenido a comparación con los resultados del método exacto, en donde en todos los casos el heurístico presenta mejor desempeño en la función objetivo. Para el caso inicial en donde tanto la heurística como el algoritmo exacto tienen la misma cantidad de puntos sobre la malla, la metodología propuesta supera en al menos 17% al algoritmo exacto. Para los demás casos también se presenta un incremento en la función objetivo.

10.3.1 DISTRIBUCIÓN DE OBJETOS

En la figura 10.2, se presenta la distribución de los objetos cuadrados empacados variando la cantidad de puntos en la malla, donde p hace referencia a los puntos que presenta la instancia en el estado inicial. Si los resultados son similares para nueve radios, el tener una malla adaptativa para los cinco radios menores hará que el tiempo de ejecución de la heurística sea menor.

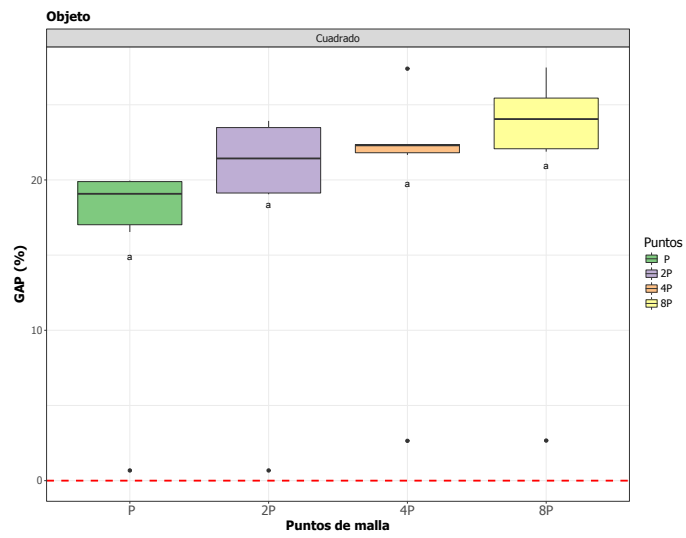
10.3.2 DIFERENTES MALLAS

En la figura 10.3, contiene el rendimiento del heurístico cuando el objeto empacado es cuadrado y se varían las estructuras de la malla según el acomodo de los puntos además de variar la cantidad de puntos en el contenedor. Para el primer nivel (P), la malla que presenta mejor desempeño es la cuadrado dado que en ningún caso el algoritmo exacto lo superar. Para las mallas HH, HV y R son superadas una vez en este nivel de puntos sobre el contenedor. El siguiente nivel presenta desempeños buenos aunque para un caso en cada tipo de malla el desempeño es muy cercano al del algoritmo exacto. El tercer nivel de puntos sobre el contenedor tiene menor variación aunque en este caso hay dos datos atípicos tanto interiormente como superiormente, la media en promedio incremento con el aumento de los puntos sobre el contenedor pero no por la uso de una configuración diferentes en la malla.



(a) Exacto

(b) Heurístico



(c) *gap* cuadrados

Figura 10.1: Comparación entre soluciones para la instancia 3

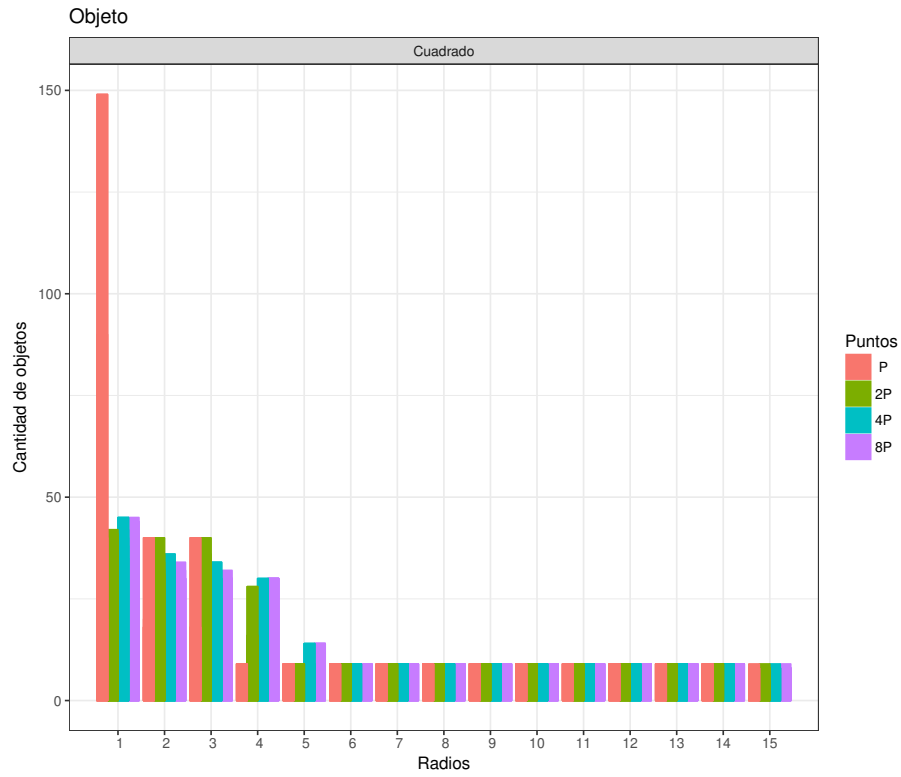


Figura 10.2: Distribución de acomodo de los cuadrados

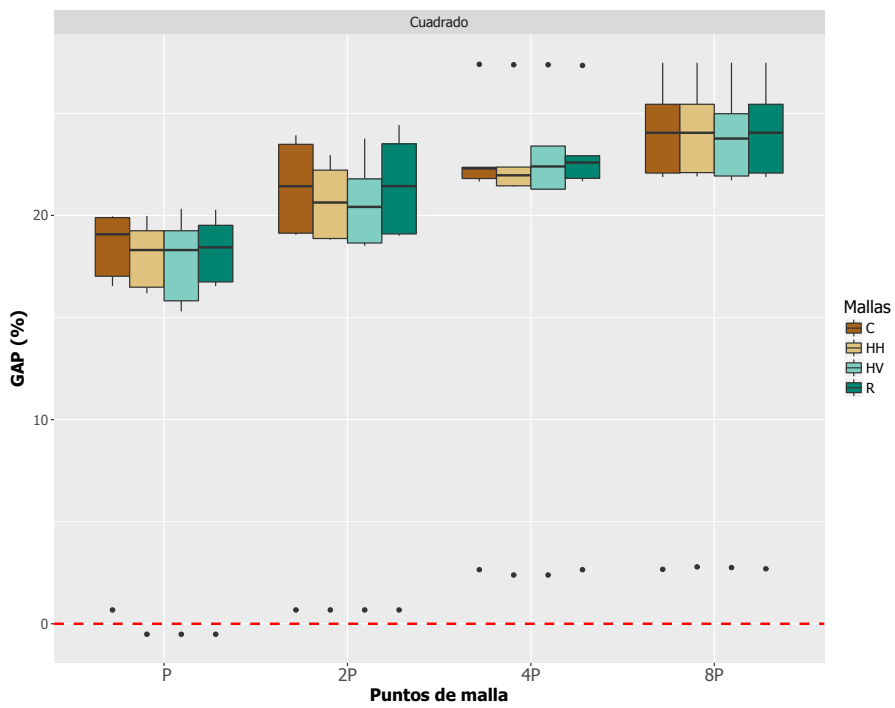


Figura 10.3: Desempeño de diferentes mallas para el octágono

CAPÍTULO 11

CONCLUSIONES

Para ser grande, a veces tienes que correr grandes riesgos

Bill Gates

Bosquejo

11.1. Conclusiones	88
------------------------------	----

11.1 CONCLUSIONES

En esta investigación se puede concluir que para el caso analizado de los diferentes objetos empaquetados (c̃Arculos, cuadrados, rombos y oct̃igonos), el variar la b̃squeda local en algunos casos presentan diferencias significativas en el aumento de objetos puestos en el contenedor. El algoritmo propuesto presenta mejor rendimiento que la resolución del modelo lineal por CPLEX, permitiendo explorar vecindarios con mayor densidad sin requerir mucho tiempo computacional a comparación de las 10 horas del CPLEX.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ronald L Graham, Boris D Lubachevsky, Kari J Nurmela, and Patric RJ Östergård. Dense packings of congruent circles in a circle. *Discrete Mathematics*, 181(1-3):139–154, 1998.
- [2] Jingfa Liu, Shengjun Xue, Zhaoxia Liu, and Danhua Xu. An improved energy landscape paving algorithm for the problem of packing circles into a larger containing circle. *Computers & Industrial Engineering*, 57(3):1144–1149, 2009.
- [3] CO López and John E Beasley. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers. *European Journal of Operational Research*, 214(3):512–525, 2011.
- [4] Ignacio Castillo, Frank J Kampas, and János D Pintér. Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications. *European Journal of Operational Research*, 191(3):786–802, 2008.
- [5] Shuhei Morinaga, Hidenori Ohta, and Mario Nakamori. An algorithm for the circle-packing problem via extended sequence-pair with nonlinear optimization. In *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, volume 2, 2013.
- [6] Péter Gábor Szabó, Mihály Csaba Markót, and Tibor Csendes. Global optimization in geometry circle packing into the square. In *Essays and Surveys in Global Optimization*, pages 233–265. Springer, 2005.

-
- [7] Nenad Mladenović, Frank Plastria, and Dragan Urošević. Reformulation descent applied to circle packing problems. *Computers & Operations Research*, 32(9):2419–2434, 2005.
- [8] Marco Locatelli and Fabio Schoen. Efficient algorithms for large scale global optimization: Lennard-jones clusters. *Computational Optimization and Applications*, 26(2):173–190, 2003.
- [9] Andrea Cassioli, Marco Locatelli, and Fabio Schoen. Dissimilarity measures for population-based global optimization algorithms. *Computational Optimization and Applications*, 45(2):257–281, 2010.
- [10] Harald Dyckhoff. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2):145–159, 1990.
- [11] Gerhard Wäscher, Heike Haufner, and Holger Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130, 2007.
- [12] Marco Locatelli and Ulrich Raber. Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach. *Discrete Applied Mathematics*, 122(1-3):139–166, 2002.
- [13] Jingfa Liu, Kewang Zhang, Yonglei Yao, Yu Xue, and Tinzhao Guan. A heuristic quasi-physical algorithm with coarse and fine adjustment for multi-objective weighted circles packing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 101:416–426, 2016.
- [14] Andrea Grosso, ARMJU Jamali, Marco Locatelli, and Fabio Schoen. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container. *Journal of Global Optimization*, 47(1):63–81, 2010.
- [15] Mao Chen, Xiangyang Tang, Ting Song, Zhizhong Zeng, Xicheng Peng, and Sanya Liu. Greedy heuristic algorithm for packing equal circles into a circular container. *Computers & Industrial Engineering*, 119:114–120, 2018.

-
- [16] Wenqi Huang and Tao Ye. Global optimization method for finding dense packings of equal circles in a circle. *European Journal of Operational Research*, 210(3):474–481, 2011.
- [17] De-fu Zhang and An-sheng Deng. An effective hybrid algorithm for the problem of packing circles into a larger containing circle. *Computers & Operations Research*, 32(8):1941–1951, 2005.
- [18] Mhand Hifi and Rym MHallah. Adaptive and restarting techniques-based algorithms for circular packing problems. *Computational Optimization and Applications*, 39(1):17, 2008.
- [19] Bernardetta Addis, Marco Locatelli, and Fabio Schoen. Efficiently packing unequal disks in a circle. *Operations Research Letters*, 36(1):37–42, 2008.
- [20] Ernesto G Birgin and FNC Sobral. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers & Operations Research*, 35(7):2357–2375, 2008.
- [21] Huaiqing Wang, Wenqi Huang, Quan Zhang, and Dongming Xu. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle. *European Journal of Operational Research*, 141(2):440–453, 2002.
- [22] Huang Wenqi and Kang Yan. A short note on a simple search heuristic for the diskspacking problem. *Annals of Operations Research*, 131(1-4):101–108, 2004.
- [23] Mhand Hifi and Rym M’Hallah. Beam search and non-linear programming tools for the circular packing problem. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 1(4):476–503, 2009.
- [24] Mhand Hifi and Rym MHallah. A dynamic adaptive local search algorithm for the circular packing problem. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1280–1294, 2007.

-
- [25] Tony Wauters, Jannes Verstichel, and Greet Vanden Berghe. An effective shaking procedure for 2d and 3d strip packing problems. *Computers & Operations Research*, 40(11):2662–2669, 2013.
- [26] Stephen CH Leung, Yangbin Lin, and Defu Zhang. Extended local search algorithm based on nonlinear programming for two-dimensional irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research*, 39(3):678–686, 2012.
- [27] Andreas Bortfeldt. A reduction approach for solving the rectangle packing area minimization problem. *European Journal of Operational Research*, 224(3):486–496, 2013.
- [28] Silvano Martello and Paolo Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [29] Lijun Wei and Andrew Lim. A bidirectional building approach for the 2d constrained guillotine knapsack packing problem. *European Journal of Operational Research*, 242(1):63–71, 2015.
- [30] Glaydston Mattos Ribeiro and Luiz Antonio Nogueira Lorena. Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacturer’s pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, 34(9):2695–2708, 2007.
- [31] John A George, Jennifer M George, and Bruce W Lamar. Packing different-sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*, 84(3):693–712, 1995.
- [32] Wenqi Huang, Yu Li, Hakim Akeb, and ChuMin Li. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container. *Journal of the Operational Research Society*, 56(5):539–548, 2005.
- [33] AF Bollen, CP Riden, and NR Cox. Agricultural supply system traceability, part i: Role of packing procedures and effects of fruit mixing. *Biosystems engineering*, 98(4):391–400, 2007.

-
- [34] Kathryn A Dowsland, Maxime Gilbert, and Graham Kendall. A local search approach to a circle cutting problem arising in the motor cycle industry. *Journal of the Operational Research Society*, 58(4):429–438, 2007.
- [35] Eliana Mirledy Toro, Alejandro Garcés, and Hugo Ruiz. Solución al problema de empaquetamiento bidimensional usando un algoritmo híbrido constructivo de búsqueda en vecindad variable y recocido simulado. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, (46):119–131, 2008.
- [36] David Mauricio Sánchez, Ana Rojas, and Gonzalo Calderón. Un algoritmo grasp con dos parámetros de relajación para el problema 3d-bin packing con restricciones de estabilidad. *Revista de investigación de Sistemas e Informática*, 5(1):75–85, 2014.
- [37] M LOCATELLI, A ADDIS, and F SCHOEN. Efficiently packing unequal disks in a circle: a computational approach which exploits the continuous and combinatorial structure of the problem. *OPERATIONS RESEARCH LETTERS*, 36:37–42, 2008.
- [38] Yuriy Stoyan and Georgiy Yaskov. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(10):1355–1369, 2012.
- [39] Ignacio Hinostroza, Lorena Pradenas, and Víctor Parada. Board cutting from logs: Optimal and heuristic approaches for the problem of packing rectangles in a circle. *International Journal of Production Economics*, 145(2):541–546, 2013.
- [40] Shamil I Galiev and Maria S Lisafina. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain. *European Journal of Operational Research*, 230(3):505–514, 2013.
- [41] Bai-Xiang Xu, Yang Gao, and Min-Zhong Wang. Particle packing and the mean theory. *Physics Letters A*, 377(3):145–147, 2013.

-
- [42] Peng Wang, Shuai Huang, and ZhouQuan Zhu. Swarm intelligence algorithms for circles packing problem with equilibrium constraints. In *Distributed Computing and Applications to Business, Engineering & Science (DCABES), 2013 12th International Symposium on*, pages 55–60. IEEE, 2013.
- [43] I Litvinchev and EL Ozuna. Approximate packing circles in a rectangular container: valid inequalities and nesting. *Journal of applied research and technology*, 12(4):716–723, 2014.
- [44] Shaohui Hong, Defu Zhang, Hoong Chuin Lau, XiangXiang Zeng, and Yain-Whar Si. A hybrid heuristic algorithm for the 2d variable-sized bin packing problem. *European Journal of Operational Research*, 238(1):95–103, 2014.
- [45] Nadia Dahmani, François Clautiaux, Saoussen Krichen, and El-Ghazali Talbi. Self-adaptive metaheuristics for solving a multi-objective 2-dimensional vector packing problem. *Applied Soft Computing*, 16:124–136, 2014.
- [46] Igor Litvinchev, Luis Infante, and Edith Lucero Ozuna Espinosa. Approximate circle packing in a rectangular container: Integer programming formulations and valid inequalities. In *Computational Logistics*, pages 47–60. Springer, 2014.
- [47] Igor Litvinchev and Edith Lucero Ozuna Espinosa. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014.
- [48] Igor Litvinchev, Luis Infante, and Lucero Ozuna. Using different norms in packing circular objects. In *Intelligent Information and Database Systems*, pages 540–548. Springer, 2015.
- [49] Qian Hu, Andrew Lim, and Wenbin Zhu. The two-dimensional vector packing problem with piecewise linear cost function. *Omega*, 50:43–53, 2015.
- [50] Marcela Quiroz-Castellanos, Laura Cruz-Reyes, Jose Torres-Jimenez, Claudia Gómez, Héctor J Fraire Huacuja, and Adriana CF Alvim. A grouping gene-

- tic algorithm with controlled gene transmission for the bin packing problem. *Computers & Operations Research*, 55:52–64, 2015.
- [51] Kun He, Menglong Huang, and Chenkai Yang. An action-space-based global optimization algorithm for packing circles into a square container. *Computers & Operations Research*, 58:67–74, 2015.
- [52] Kun He, Pengli Ji, and Chumin Li. Dynamic reduction heuristics for the rectangle packing area minimization problem. *European Journal of Operational Research*, 241(3):674–685, 2015.
- [53] I Litvinchev, L Infante, and L Ozuna. Packing circular-like objects in a rectangular container. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 54(2):259–267, 2015.
- [54] Edmund Burke, Robert Hellier, Graham Kendall, and Glenn Whitwell. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem. *Operations Research*, 54(3):587–601, 2006.
- [55] A Miguel Gomes and José F Oliveira. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171(3):811–829, 2006.
- [56] Leandro Resende Mundim and Thiago Alves de Queiroz. A hybrid heuristic for the 0–1 knapsack problem with items of irregular shape. In *Informativa (CLEI), 2012 XXXVIII Conferencia Latinoamericana En*, pages 1–6. IEEE, 2012.
- [57] B Junior, P Pinheiro, and R Saraiva. A hybrid methodology for nesting irregular shapes: Case study on a textile industry. In *6th IFAC Conference on Management and Control of Production and Logistics, Fortaleza*, 2013.
- [58] Franklina MB Toledo, Maria Antónia Carravilla, Cristina Ribeiro, José F Oliveira, and A Miguel Gomes. The dotted-board model: A new mip model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2):478–487, 2013.

-
- [59] Bonfim Amaro Júnior, Plácido Rogério Pinheiro, Rommel Dias Saraiva, and Pedro Gabriel Calíope Dantas Pinheiro. Dealing with nonregular shapes packing. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014.
- [60] Doraid Dalalah, Samir Khrais, and Khaled Bataineh. Waste minimization in irregular stock cutting. *Journal of Manufacturing Systems*, 33(1):27–40, 2014.
- [61] Aline AS Leao, Franklina MB Toledo, José Fernando Oliveira, and Maria Antónia Carravilla. A semi-continuous mip model for the irregular strip packing problem. *International Journal of Production Research*, (ahead-of-print):1–10, 2015.
- [62] Uğur Köklü. *International journal of computer integrated manufacturing*. 2013.
- [63] SA MirHassani and A Jalaiean Bashirzadeh. A grasp meta-heuristic for two-dimensional irregular cutting stock problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pages 1–10, 2015.
- [64] Xuehang Wang, Haitao Zhou, Edel Sheridan, John Charles Walmsley, Dingding Ren, and De Chen. Geometrically confined favourable ion packing for high gravimetric capacitance in carbon–ionic liquid supercapacitors. *Energy & Environmental Science*, 2016.
- [65] Gregory M Grason. Colloquium: Geometry and optimal packing of twisted columns and filaments. *Reviews of Modern Physics*, 87(2):401, 2015.
- [66] Yamel Ungson, Larysa Burtseva, Edwin Garcia-Curiel, Benjamin Valdez Salas, Brenda Flores-Rios, Frank Werner, and Vitalii Petranovskii. Filling of irregular channels with round cross-section: Modeling aspects to study the properties of porous materials. *Materials*, 11(10):1901, 2018.
- [67] Peifen Zhu and Nelson Tansu. Effect of packing density and packing geometry on light extraction of iii-nitride light-emitting diodes with microsphere arrays. *Photonics Research*, 3(4):184–191, 2015.

-
- [68] Masako Tamada and Jennifer A Zallen. Square cell packing in the drosophila embryo through spatiotemporally regulated egf receptor signaling. *Developmental cell*, 35(2):151–161, 2015.
- [69] Jan Günther, Daniel Hobbs, Claire Albasi, Christine Lafforgue, Arnaud Cockx, and Philippe Schmitz. Modeling the effect of packing density on filtration performances in hollow fiber microfiltration module: a spatial study of cake growth. *Journal of Membrane Science*, 389:126–136, 2012.
- [70] Helmut Pottmann, Caigui Jiang, Mathias Höbinger, Jun Wang, Philippe Bompas, and Johannes Wallner. Cell packing structures. *Computer-Aided Design*, 60:70–83, 2015.
- [71] Silvano Martello. Two-dimensional packing problems in telecommunications. *Pesquisa Operacional*, 34(1):31–38, 2014.
- [72] Luiz JP Araújo, Ender Özcan, Jason AD Atkin, and Martin Baumers. Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset. *International Journal of Production Research*, pages 1–15, 2018.
- [73] Douglas C Montgomery. *Diseño y análisis de experimentos*. 1991.
- [74] Larysa Burtseva, Benjamin Valdes Salas, Rainier Romero, and Frank Werner. *Multi-sized sphere packings: models and recent approaches*. Univ., Fak. für Mathematik, 2015.
- [75] CO Lopez and JE Beasley. Packing unequal circles using formulation space search. *Computers & Operations Research*, 40(5):1276–1288, 2013.

FICHA AUTOBIOGRÁFICA

José Daniel Mosquera Artamonov

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias en
Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

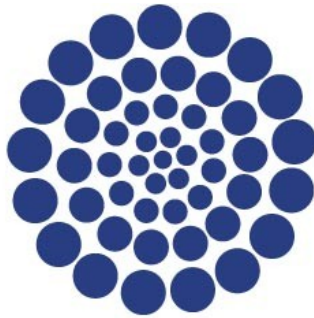
Tesis:

EMPAQUETAMIENTO TELESCOPICO DE OBJETOS
CIRCULARES

Nací el 16 de agosto de 1987 en la ciudad de Moscú, Rusia. En el año 2005 ingrese a la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira en donde realice mis estudios de pregrado obteniendo en el año 2010. De enero 2012 a Septiembre 2013 fui estudiante en la maestría Ingeniería de Calidad de la Universidad Autónoma de Querétaro. Posteriormente realice maestría en Ciencias Ingeniería de Sistemas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. A inicio del 2016 entre al doctorado en Ingeniería de Sistemas del mismo departamento de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL.

AUSPISIADORES

El presente trabajo investigativo "Empaquetamiento telescópico de objetos circulares", fue apoyado con la beca número 546036, del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología



CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología



Posgrado de Ingeniería de Sistemas