El orden medible como herramienta de simulación

CÉSAR E. VILLARREAL*

Cuando se realiza un experimento aleatorio cuyo espacio de probabilidad asociado es (Ω,Σ,μ), no siempre se puede observar el resultado del experimento con precisión, sino que en realidad se advierte un evento en el cual está el resultado del experimento. Por ejemplo, al medir la estatura de una persona, si el resultado de la medición se redondea a centímetros, entonces el reportar que una persona tiene estatura de 171 centímetros se puede interpretar como que la persona tiene en realidad una estatura que está entre 170.5 y 171.5 centímetros. Entre mayor precisión de medición se desee, será necesario un mayor esfuerzo que proceda de la capacidad física para hacer observaciones, o de la calidad y precisión de los aparatos de medición.

Existe una metodología general para la simulación de números aleatorios con distribución arbitraria, siempre y cuando dicha distribución sea conocida. Un ejemplo de tal metodología es el de la transformada inversa, la cual se basa en generar un número aleatorio con distribución uniforme[1] en el intervalo [0,1] y evaluar la inversa de la distribución en el punto generado, cuando sea posible. Cuando no sea posible invertir la función de distribución, se define otra función que generaliza el concepto de función inversa. Tal metodología general funciona cuando el resultado del experimento representa el valor de una variable aleatoria.[2]

En este trabajo se estudiará una metodología para simular eventos en los que se encuentra el resultado de un experimento aleatorio, en el cual se puede mejorar la precisión de la observación, es decir, ir ganando información sobre el resultado simulado al disminuir el "tamaño" del evento observado. En algunos casos el proceso de mejora de información sobre el resultado del experimento puede seguir indefinidamente, pero en otros, después de un número finito de pasos, se puede llegar a observar el resultado preciso del experimento.

La contribución principal de este trabajo consiste en que la metodología funciona aun cuando los elementos del espacio muestral no son números, sino objetos de diversa naturaleza como sucesiones aleatorias, movimientos brownianos, cadenas de Markov y procesos estocásticos en general. El generar tales objetos aleatorios se puede utilizar, por ejemplo, en la simulación de sistemas de inventarios y en la toma de decisiones en problemas de control estocástico donde la política óptima sea una política aleatorizada generada con este método.

* Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, UANL.
E-mail: cesar@yalma.fime.uanl.mx

Preliminares

A lo largo del artículo se utilizará alguna terminología estándar de topología,[4,5] teoría de la medida[1,4] y de probabilidad.

Se entenderá que una relación binaria $\preceq$, definida en un conjunto A, es un *orden total* cuando es reflexiva, simétrica, transitiva y además para cualquiera dos elementos a, $b \in$ A se tiene que $a \preceq b$ o bien $b \preceq a$.[4]

Definición. Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de probabilidad. Si $\preceq$ es un orden total en Ω tal que para todo $\omega_0 \in \Omega$ se tiene que $(-\infty;\omega_0] := \{\omega \in \Omega : \omega \preceq \omega_0\} \in \Sigma$, se dice que $\preceq$ es un *orden medible* (con respecto a la σ-álgebra Σ). El símbolo $\prec$ denotará al orden estricto tal que $a \prec$, si y sólo si $a \preceq b$ pero $a \neq b$. b

Notación. A la topología definida en Ω tal que tiene como base a la familia de conjuntos de la forma $(a;b) := \{\omega : a \prec \omega \prec b\}$, $(-\infty;b) := \{\omega : \omega \prec b\}$ ó $(a;+\infty) := \{\omega : a \prec \omega\}$, para algún $a \in \Omega$ y algún $b \in \Omega$, se denotará por $\tau_{\prec}$. A la σ-álgebra generada por la topología $\tau_{\prec}$ se denotará por $B(\tau_{\prec})$.

Definición. Si $\preceq$ es un orden medible con respecto a la σ-álgebra Σ, la expresión $(\Omega,\Sigma,\mu,\preceq)$ se llamará *espacio de probabilidad ordenado*.

Definición. Se establece que la variable aleatoria $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $F(\omega_0) = \mu(\{\omega \in \Omega : \omega \preceq \omega_0\})$, para todo $\omega_0 \in \Omega$, es la *distribución de probabilidad* del espacio de probabilidad ordenado $(\Omega,\Sigma,\mu,\preceq)$.

Obsérvese que F es en efecto una variable aleatoria.

Definición. Si para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $\inf\{\omega \in \Omega : F(\omega) \geq x\} \in \Omega$, es decir, el ínfimo existe, si se dice que la distribución de probabilidad F es *reversible*. En tal caso se escribirá:

$$\tilde{F}^{-1}(x) := \inf\{\omega \in \Omega : F(\omega) \geq x\}$$

y se establece que $\tilde{F}^{-1}$ es la *pseudoinversa* de F.

Notación. Si $A \subset [0,1]$ al conjunto $\{\omega \in \Omega : F(\omega) \in A\}$ se denotará por $F^{-1}[A]$, y si $B \subset \Omega$ al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : F(\omega) = x$ para algún $\omega \in B\}$ se denotará por $F[B]$.

Para cada sucesión $(x_0, x_1, \ldots)$ de números entre 0 y 1, sea $\mu_{x_0} := \mu(\cdot \mid F = x_0)$ y se denota por F_{x_0} a la distribución de probabilidad del espacio de probabilidad ordenado $(\Omega,\Sigma,\mu_{x_0},\preceq)$. Sea ahora $\mu_{x_0,x_1} := \mu(\cdot \mid F = x_0, F_{x_0} = x_1)$ y se denota por F_{x_0,x_1} a la distribución de probabilidad del espacio de probabilidad ordenado $(\Omega,\Sigma,\mu_{x_0,x_1},\preceq)$. Continuando este proceso de manera recursiva, se toma $\mu_{x_0,x_1,\ldots,x_k} := \mu(\cdot \mid F = x_0, F_{x_0} = x_1, \cdots, F_{x_0,\ldots,x_{k-1}} = x_k)$ y se denota por $F_{x_0,\ldots,x_k}$ a la distribución de probabilidad del espacio de probabilidad ordenado $(\Omega,\Sigma,\mu_{x_0,\ldots,x_k},\preceq)$.

Se denotará por λ a la medida de Lebesgue en $B([0,1])$, donde $B([0,1])$ es la σ-álgebra de Borel en $[0,1]$, y por $\lambda^{\infty} := \bigotimes_{k=1}^{\infty} \lambda$ a la medida producto definida en $B([0,1]^{\mathbb{N}})$, es decir, en la σ-álgebra producto $\bigotimes_{k=1}^{\infty} B([0,1])$.[1,3,4]

Metodología

Si se realiza un experimento aleatorio en el espacio de probabilidad $([0,1]^{\mathbb{N}}, B([0,1]^{\mathbb{N}}), \lambda^{\infty})$, el resultado del experimento es un elemento del *cubo de Hilbert* $[0,1]^{\mathbb{N}}$, es decir, es una sucesión infinita $(x_0, x_1, \ldots)$ con cada componente en el intervalo cerrado [0,1].[3]

Usando el concepto de orden medible, las probabilidades condicionales definidas anteriormente y el resultado del experimento aleatorio anterior, se pretende generar la observación de un experimento aleatorio, pero cuyo espacio de probabilidad sea (Ω,Σ,μ) . Cuando $F^{-1}[\{x_0\}]$ sea un conjunto con un solo elemento, es de esperarse que la observación generada sea precisamente el elemento de $F^{-1}[\{x_0\}]$, pero en el caso de que $F^{-1}[\{x_0\}]$ tenga más de un punto, la primera componente de la sucesión $(x_0, x_1, \ldots)$ solamente nos dará la información de que el resultado del experimento con espacio de probabilidad (Ω,Σ,μ) se encuentra en $F^{-1}[\{x_0\}]$. En general, si cada uno de los conjuntos de la forma $F^{-1}_{x_0,\cdots,x_{k-1}}[\{x_k\}]$ es no vacío, es de esperarse que el resultado $(x_0, x_1, \ldots)$ del experimento aleatorio con espacio muestral $[0,1]^{\mathbb{N}}$ nos provea de la información de que el resultado del experimento cuyo espacio muestral es Ω pertenezca al evento $\bigcap_{k=1}^{\infty} F^{-1}_{x_0,\cdots,x_{k-1}}[\{x_k\}]$, el cual pertenece a la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $F, F_{x_0}, F_{x_0,x_1}, \ldots, F_{x_0,\cdots,x_k}, \ldots$. Ahora, puede suceder que alguno de los conjuntos de la forma $F^{-1}_{x_0,\cdots,x_{k-1}}[\{x_k\}]$ sea vacío. Por ejemplo, puede suceder que $F^{-1}[\{x_0\}] = \varnothing$, en cuyo caso se esperaría que el resultado generado del experimento fuera $\underline{F}^{-1}(x_0)$. En general, si alguno de los términos de la sucesión $(F^{-1}[\{x_0\}], F^{-1}_{x_1}[\{x_0\}], F^{-1}_{x_0,x_1}[\{x_2\}], F^{-1}_{x_0,\dots,x_k}[\{x_{k+1}\}], \dots)$ es vacío, se tomará a k^* como el primer entero tal que $F^{-1}_{x_0,\dots,x_{k^*-1}}[\{x_{k^*}\}]$ es vacío. En ese caso se esperaría que el resultado generado del experimento fuera $\underline{F}^{-1}_{x_0,\dots,x_{k^*-1}}(x_{k^*})$.

Validación matemática

Definición. Si un espacio topológico posee la propiedad de que todo punto del espacio tiene una base local numerable, entonces se dice que es *primero numerable*.[4,5]

Como ejemplos de espacios topológicos primero numerables, se tienen a todos los espacios métricos, por lo que la condición de que el espacio topológico sea primero numerable es en cierto modo muy débil. Los resultados que se presentan a continuación tienen la hipótesis de que la topología es primero numerable, lo cual sucede prácticamente en todas las aplicaciones, y esto hace que los casos en que la metodología de simulación de objetos aleatorios no pueda ser implementada sean nulos o inmensamente escasos.

…,

Proposición 1. *Si* $(\Omega,\Sigma,\mu,\preceq)$ *es un espacio de probabilidad ordenado tal que* $(\Omega,\tau_\prec)$ *es un espacio topológico primero numerable, entonces* $B(\tau_\prec)\subset\Sigma$. *En particular, cualquier conjunto con un solo elemento pertenece a* Σ.

Demostración. Sea $b\in\Omega$. Si b es un punto de Ω con la propiedad de que existe un $b'\in\Omega$ tal que $(-\infty;b)=(-\infty;b']$, entonces los conjuntos $(-\infty;b)=(-\infty;b']$ y $\{b\}=(-\infty;b]$, $(-\infty;b']$ son medibles. Si b es el primer elemento de Ω, entonces $(-\infty;b)=\varnothing$ y $\{b\}=(-\infty;b]$ son medibles. Si b no es un primer elemento de Ω y para todo $a\prec b$ existe un $a'\in(a;b)$, entonces, por ser $(\Omega,\tau_\prec)$ un espacio topológico primero numerable, existe una sucesión estrictamente creciente $(a_k)_1^\infty$ que converge a b, teniéndose así que $(-\infty;b)=\bigcup_{k=1}^\infty(-\infty;a_k]$ y $\{b\}=(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$ son medibles. Se tiene así que, en cualquier caso, los conjuntos de la forma $(-\infty;b)$ y $\{b\}$ son medibles, por lo que también son medibles los conjuntos de la forma $(a;b)=(-\infty;b)$, $(-\infty;a]$ y $(a;+\infty)=\Omega$, $(-\infty;a]$, es decir, son medibles los conjuntos con un solo elemento y los generadores de $\tau_\prec$. ⊔

Proposición 2. *Sea* $(\Omega,\Sigma,\mu,\preceq)$ *un espacio de probabilidad ordenado tal que* $(\Omega,\tau_\prec)$ *es un espacio topológico primero numerable. Si la distribución de probabilidad F es reversible,* $x\in[0,1]$ *y* $F^{-1}[\{x\}]\neq\varnothing$, *entonces* $\underline{F}^{-1}(x)\in F^{-1}[\{x\}]$.

Demostración. De la definición de pseudoinversa se tiene que si $\omega\in F^{-1}[\{x\}]$, entonces $\underline{F}^{-1}(x)\preceq\omega$. Ahora, si se tuviera que $\underline{F}^{-1}(x)\notin F^{-1}[\{x\}]$, entonces $F(\underline{F}^{-1}(x))<x$, pero en tal caso los conjuntos $A_1:=\{\omega:\omega\preceq\underline{F}^{-1}(x)\}$ y $A_2:=\{\omega:F(\omega)=x\}$ serían disjuntos y su unión sería $\{\omega:F(\omega)\le x\}$, además, $\mu(A_1)<x$ y $\mu(A_1\cup A_2)=x$. Se afirma que si $\underline{F}^{-1}(x)\in B$ y B está en la base de la topología $\tau_\prec$, entonces $B\cap A_2\neq\varnothing$. En efecto, si $\underline{F}^{-1}(x)\in(a;b)$ para algún $b\in\Omega$ y $a\in\Omega$ (o posiblemente a denota el símbolo $-\infty$), con $(a;b)\cap A_2=\varnothing$, entonces se tendría que $F(b)\le x$, de tal manera que no existiría ningún $\zeta\in A_2$ tal que $\zeta\prec b$, por lo que b sería una cota inferior del conjunto $\{\omega\in\Omega:F(\omega)\ge x\}$ diferente de $\underline{F}^{-1}(x)$, contradiciendo el hecho de que $\underline{F}^{-1}(x)\in B$. Se tiene así que si $\underline{F}^{-1}(x)\in B$ y B está en la base de la topología $\tau_\prec$, entonces $B\cap A_2\neq\varnothing$. Continuando con la suposición de que $\underline{F}^{-1}(x)\notin F^{-1}[\{x\}]$, puesto que la topología $\tau_\prec$ es primero numerable, debería existir una sucesión $(\omega_k)_{k=1}^\infty$ de elementos de A_2, decreciente con respecto al orden $\preceq$ y que converia a $\underline{F}^{-1}(x)$. Sea $B_k=\{w : w \preceq w_k\}$ y se observa que $A_1=\bigcap_{k=1}^\infty B_k$. Como para todo entero positivo k tenemos que $B_{k+1}\subset B_k$ y, además, $\mu(B_k)=x$, entonces $\mu(A_1)=x$, con lo que se llega a una contradicción.

Proposición 3. *Sea* $(\Omega,\Sigma,\mu,\preceq)$ *un espacio de probabilidad ordenado tal que* $(\Omega,\tau_\prec)$ *es un espacio topológico primero numerable. Si la distribución de probabilidad F es reversible,* $x\in[0,1)$ *y* $F^{-1}[\{x\}]=\varnothing$, *entonces* $\underline{F}^{-1}(x)=\inf\{\underline{F}^{-1}(y): y>x,\ F^{-1}[\{y\}]\neq\varnothing\}$.

Demostración. Por definición $\underline{F}^{-1}(x)=\inf\{\omega\in\Omega: F(\omega)\ge x\}$, pero como $F^{-1}[\{x\}]=\varnothing$, entonces $\underline{F}^{-1}(x)=\inf\{\omega\in\Omega:F(\omega)>x\}=\inf\{\omega\in\Omega: \omega\in F^{-1}[\{y\}]$ para algún $y>x\}$. Pero si $\omega\in F^{-1}[\{y\}]$ para algún $y>x$, entonces $F^{-1}[\{y\}]\neq\varnothing$, $y>x$ y $F(\omega)=y$, pero además por la proposición 2, $\underline{F}^{-1}(y)\in F^{-1}[\{y\}]$ y $\underline{F}^{-1}(y)\preceq\omega$, de donde se concluye que $\underline{F}^{-1}(x)=\inf\{\underline{F}^{-1}(y): y>x,\ F^{-1}[\{y\}]\neq\varnothing\}$.

Conclusiones

A pesar de que existen métodos para simular objetos aleatorios, éstos dependen de la naturaleza especial de tales objetos y la metodología se aplica bajo condiciones muy restringidas. Con la metodología presentada en este trabajo las condiciones de aplicabilidad son muy débiles. Se sugiere como trabajo futuro la implementación computacional de dicho algoritmo, que si bien en algunos casos podría no ser eficiente, al hacerle modificaciones y combinarlo con otros métodos, de acuerdo a cada caso particular, podría mejorar sustancialmente la eficiencia, sobre todo en tiempo de cómputo.

Agradecimientos

El presente trabajo se realizó con el apoyo del programa Paycit de la Universidad Autónoma de Nuevo León, mediante el proyecto 2005 CA826-04, y del Concyt, mediante el proyecto SEP-2003-C02-45448/A-1.

Resumen

Se expone un método para simular la obtención de información sobre la generación de objetos aleatorios pertenecientes a cualquier espacio muestral Ω con una medida de probabilidad dada y dotado de un orden total $\circ$ tal que para todo $\omega_0 \in \Omega$ se tenga que $\{\omega \in \Omega : \omega \circ \omega_0\}$ sea un conjunto medible.

Palabras clave: Orden medible, Espacio de probabilidad ordenado, Simulación, Medida producto, Medida de Lebesgue.

Abstract

We give a method for simulating information about generating random objects in a sample space Ω with a probability measure and a total order $\circ$, such that for all $\omega_0 \in \Omega$, the set $\{\omega \in \Omega : \omega \circ \omega_0\}$ is measurable.

Keywords: Measurable order, Ordered probability space, Simulation, Product measure, Lebesgue measure.

2000 Mathematics Subject Classification: 60B05, 68U20.

Referencias

1. Ash, R.B. (1972). Real Analysis and Probability, Probability and Mathematical Statistics 11, Academic Press.
2. Castro Contreras, M.A. (2005). Algoritmo simulador de variables aleatorias con distribución arbitraria, (tesis de licenciatura en ciencias computacionales de la Universidad Autónoma de Nuevo León).
3. Davis, M.H.A. (1993). Markov Models and Optimization, Monographs on Statistics and Applied Probability 49, Chapman & Hall/CRC.
4. Kolmogórov, A.N. y Fomín S.V. (1975). Elementos de la Teoría de funciones y del análisis funcional, Editorial Mir.
5. Munkres, J.R. (2000). Topology (second edition), Prentice Hall.

Recibido: 27 de junio de 2006
Aceptado:15 de noviembre de 2006