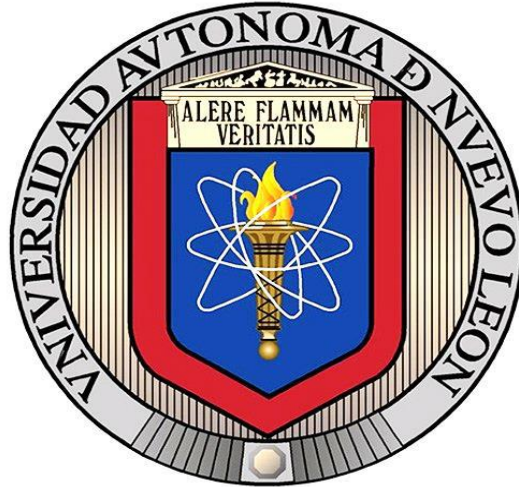


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



TESIS

**DISEÑO DE ALGORITMOS DE TIPO SUPER-TWISTING
CONVERGENTES POR TIEMPO FIJO PARA SISTEMAS DINÁMICOS
SUJETO A INCERTIDUMBRES CON COTAS DESCONOCIDAS**

POR

LIC. ALISON GARZA ALONSO

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAestrÍA EN
CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

JULIO, 2019

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS

**DISEÑO DE ALGORITMOS DE TIPO SUPER-TWISTING
CONVERGENTES POR TIEMPO FIJO PARA SISTEMAS DINÁMICOS
SUJETO A INCERTIDUMBRES CON COTAS DESCONOCIDAS**

POR

LIC. ALISON GARZA ALONSO

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

JULIO 2019

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Coordinador en PCOM

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Diseño de algoritmos de tipo Super-Twisting convergentes por tiempo fijo para sistemas dinámicos sujeto a incertidumbres con cotas desconocidas.», realizada por la alumna Lic. Alison Garza Alonso, con número de matrícula 1550905, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. Mikhail Valentinovich Basin

Asesor

Dr. Pablo César Rodríguez Ramirez

Co-Asesor

Dr. Miguel Hernández González

Revisor

Vo. Bo.

Dr. José Fernando Camacho Vallejo

Coordinador en PCOM

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, julio 2019

*A Dios, mi familia, maestros
y amigos por su gran apoyo.*

AGRADECIMIENTOS

A mi madre y padre que estuvieron en todo momento de mis estudios dando todo su apoyo incondicional, en general a toda mi familia que siempre estuvo al pendiente de mi.

Agradezco al Dr. Mikhail Basin y al Dr. Pablo Rodriguez, por transmitirme sus conocimientos, por ayudarme a crecer profesionalmente, por cada consejo y paso que di con ellos.

Sin duda alguna mis amigos y amiguis han sido una pieza importante para lograr mis metas.

Por último agradeciendo a CONACyT por el apoyo económico brindado.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|--|------------|
| Agradecimientos | v |
| Resumen | xiv |
| Abstract | xv |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación | 1 |
| 1.2. Antecedentes | 2 |
| 1.3. Aportaciones | 4 |
| 1.4. Organización de tesis | 5 |
| 2. Marco Teórico | 7 |
| 2.1. Sistemas no lineales | 7 |
| 2.1.1. Ejemplo de sistemas no lineales | 9 |
| 2.2. Punto de equilibrio | 10 |
| 2.3. Estabilidad | 10 |
| 2.3.1. Criterio de estabilidad | 12 |

| | |
|--|-----------|
| 2.4. Convergencia | 12 |
| 2.5. Modos Deslizantes | 13 |
| 2.6. Control Twisting | 15 |
| 2.7. Control Super-twisting | 16 |
| 2.8. Controladores para el caso vectorial | 17 |
| 2.9. Observadores convergentes en tiempo finito | 19 |
| 2.10. Observador convergente en tiempo fijo | 20 |
| 3. Diseño de algoritmos continuos convergentes en tiempo fijo. | 23 |
| 3.1. Planteamiento del problema | 23 |
| 3.2. Diseño de control: Cota conocida para el valor inicial del disturbio. Caso escalar. | 24 |
| 3.2.1. Ejemplo: Caso escalar | 28 |
| 3.3. Diseño de Control: Cota conocida para valor inicial de disturbio. Caso Multivariable | 32 |
| 3.3.1. Ejemplo: Caso Multivariable. | 35 |
| 3.4. Diseño de control: Cota desconocida para el valor inicial del distur- bio.Caso escalar | 46 |
| 3.4.1. Ejemplo: Caso escalar. | 48 |
| 3.5. Diseño de control: Cota desconocida para el valor inicial del distur- bio.Caso multivariable | 53 |
| 3.5.1. Ejemplo: Caso multivariable. | 54 |
| 3.6. Conclusiones | 63 |

Bibliografía

64

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 2.1. Péndulo simple. | 10 |
| 3.1. Retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$ | 29 |
| 3.2. Zoom del retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$ | 30 |
| 3.3. Retrato fase detallado para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$ | 30 |
| 3.4. Retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$ | 31 |
| 3.5. Zoom del retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$ | 31 |
| 3.6. Retrato fase detallado para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$ | 32 |
| 3.7. Retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100,$ $y_{10} = -50$ | 37 |
| 3.8. Zoom del retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$ | 38 |
| 3.9. Retrato fase detallado de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$ | 38 |
| 3.10. Retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100,$ $y_{20} = -50$ | 39 |
| 3.11. Zoom del retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$ | 39 |

| | |
|---|----|
| 3.12. Retrato fase detallado de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$ | 40 |
| 3.13. Retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100,$ $y_{30} = -50$ | 40 |
| 3.14. Zoom del retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$ | 41 |
| 3.15. Retrato fase detallado de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$ | 41 |
| 3.16. Retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100,$ $y_{10} = 50$ | 42 |
| 3.17. Zoom del retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$ | 42 |
| 3.18. Retrato fase detallado de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$ | 43 |
| 3.19. Retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100,$ $y_{20} = -50$ | 43 |
| 3.20. Zoom del retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$ | 44 |
| 3.21. Retrato fase detallado de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$ | 44 |
| 3.22. Retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100,$ $y_{30} = 50$ | 45 |
| 3.23. Zoom del retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$ | 45 |

| | |
|--|----|
| 3.24. Retrato fase detallado de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$ | 46 |
| 3.25. Historias de tiempo de $x(t)$ y su estimado $z_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$ | 51 |
| 3.26. Historias de tiempo de $y(t)$ y su estimado $\hat{y}(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$ | 51 |
| 3.27. Historias de tiempo de $x(t)$ y su estimado $z_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$ | 52 |
| 3.28. Historias de tiempo de $y(t)$ y su estimado $\hat{y}(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$ | 52 |
| 3.29. Historias de tiempo de $x_1(t)$ y su estimado $z_{11}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$ | 57 |
| 3.30. Historias de tiempo de $y_1(t)$ y su estimado $\hat{y}_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$ | 57 |
| 3.31. Historias de tiempo de $x_2(t)$ y su estimado $z_{12}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$ | 58 |
| 3.32. Historias de tiempo de $y_2(t)$ y su estimado $\hat{y}_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$ | 58 |
| 3.33. Historias de tiempo de $x_3(t)$ y su estimado $z_{13}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$ | 59 |
| 3.34. Historias de tiempo de $y_3(t)$ y su estimado $\hat{y}_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$ | 59 |
| 3.35. Historias de tiempo de $x_1(t)$ y su estimado $z_{11}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$ | 60 |

| | |
|---|----|
| 3.36. Historias de tiempo de $y_1(t)$ y su estimado $\hat{y}_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$ | 60 |
| 3.37. Historias de tiempo de $x_2(t)$ y su estimado $z_{12}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$ | 61 |
| 3.38. Historias de tiempo de $y_2(t)$ y su estimado $\hat{y}_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$ | 61 |
| 3.39. Historias de tiempo de $x_3(t)$ y su estimado $z_{13}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$ | 62 |
| 3.40. Historias de tiempo de $y_3(t)$ y su estimado $\hat{y}_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$ | 62 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| 3.1. Tiempos obtenidos en las simulaciones para el caso escalar. | 29 |
| 3.2. Tiempos obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales para el caso multivariable. | 36 |
| 3.3. Tiempos obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales para el caso escalar con observador. | 49 |
| 3.4. Tiempos obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales para el caso multivariable con observador. | 56 |

RESUMEN

Este trabajo presenta el diseño de un algoritmo de tipo *Super-Twisting* convergente en tiempo fijo, el cual es una extensión directa del sistema de control *Super-Twisting* convencional, donde la condición inicial del estado es desconocida y la condición inicial del disturbio es acotada por una constante o incluso desconocida. El algoritmo de tipo *Super-Twisting* convergente en tiempo fijo es primero diseñado para sistemas dinámicos escalares y luego se generaliza para el caso multivariable. Se calcula una estimación de la cota superior de la convergencia de tiempo en cada caso. Para ilustrar los resultados obtenidos teóricamente se proporcionan ejemplos de simulaciones en Matlab.

ABSTRACT

This thesis presents a fixed-time convergent Super-Twisting-like algorithm designed to provide a direct extension, without any additional terms, of the conventional super-twisting control system, whose state initial condition is unknown and the disturbance initial condition is bounded by a known constant or even completely unknown. The fixed-time convergent super-twisting-like algorithm is first designed for a scalar system and then generalized to a multivariable one. An upper estimate of its convergence (settling) time is calculated in each case. Several examples are provided to illustrate the obtained theoretical results.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

En la literatura se puede encontrar una variedad de controladores robustos discontinuos y continuos de primer y segundo orden convergentes por tiempo finito. Los más conocidos son propuestos por Levant como el controlador twisting [14] y el algoritmo super-twisting [15].

Los algoritmos convergentes en tiempo finito han tenido una aplicación importante en algunos sistemas dinámicos como: sistemas de estado acotado en tiempo finito [32], sistemas de suspensión automotriz [30], naves espaciales rígidas en presencia de incertidumbres de inercia y perturbaciones externas [21], convertidores de potencia [20] donde el objetivo es generar corrientes de red con la menor distorsión armónica, Takagi-Sugeno [19], sistemas con saltos Markovianos [39], [17], [18], sistemas de control activados por eventos [38], subactuados [34], polinomiales que comprenden términos inciertos y no linealidades de entrada, [23], sistemas de control de rechazo de perturbaciones [35], entre otros. Debido a que tienen muchas aplicaciones en la vida real, se tienen que hacer mejorías en los algoritmos para que funcionen de manera eficiente. Por lo que se derivaron otros reguladores de orden dos convergentes en tiempo fijo, el cual tuvo un beneficio en los casos prácticos dado que es importante asegurar que la función de tiempo de convergencia sea acotada uniformemente independientemente de la condición inicial.

Por otro lado haciendo una revisión más profunda, se pueden encontrar algoritmos convergentes en tiempo finito/fijo para sistemas no lineales lipschitzianos de orden arbitrario n . Sin embargo en el más reciente resultado que se encontró en la literatura de una ley de control multivariable convergente en tiempo fijo se restringía a que el valor inicial del disturbio fuera igual a cero, lo cual es poco práctico para sistemas de ingeniería reales.

En este documento, se presenta una investigación que tiene como objetivo evitar este inconveniente y admite una perturbación, cuyo valor inicial es desconocido pero acotado por una constante conocida. Esto en la práctica es convencionalmente aceptable para sistema dinámicos reales, dado que el limite superior de perturbaciones, que el sistema puede mantenerse sin romperse, generalmente se conoce por sentido común o técnicas específicas. Por último nuestra investigación se enfoca en el caso donde el valor inicial del disturbio es completamente desconocido, esto es no hay información disponible de su cota superior.

1.2 Antecedentes

El estudio detallado de la convergencia y la estabilidad de puntos de equilibrio en tiempo finito para puntos de equilibrio de sistemas autónomos continuos pero no lipschitzianos así como las propiedades de la función de tiempo de convergencia debidos a su robustez a las perturbaciones fue iniciado en [7] y [6].

El primer resultado respecto a reguladores en tiempo finito fue obtenido en [8], el cual consiste en establecer la existencia de un regulador continuo llevando todos los estados en una cadena de integradores al origen en un tiempo finito. Para ello los autores demostraron que todos los estados de un sistema lineal controlable pueden ser llevados al origen en un tiempo finito mediante retroalimentación de estados continua.

Un algoritmo convergente en tiempo finito para un sistema de segundo orden

fue diseñado en [15]. Este diferenciador es llamado super-twisting, el cual se encarga de llevar el estado del sistema y su primer derivada al cero en tiempo finito.

La primer estimación de cota superior de convergencia de tiempo para los algoritmos twisting y super-twisting, basado en la función de Lyapunov, fue propuesto en [28] y [29]

Un estudio de las propiedades de la convergencia del sistema super-twisting, así como la estimación de la tasa de convergencia, fue presentado en [33].

Varios enfoques para estimar el tiempo de convergencia finita para diferentes algoritmos de control pueden ser encontrados en [14] y [31].

El control super-twisting multivariable fue desarrollado en [24], además de que los autores dieron su correspondiente estimación de convergencia de tiempo.

En la mayoría de los casos prácticos, también es deseable garantizar que la función del tiempo de convergencia esté acotada uniformemente y que sea independiente de la condición inicial del estado. El problema de diseñar leyes de control continuos convergente por tiempo fijo fue considerado en [1] y [26].

En [27] los autores presentan un estudio exhaustivo de estabilidad de tiempo fijo y diseño de un control para sistemas no autónomos, incluyendo discontinuos.

Por otro lado el primer diferenciador conocido en la literatura fue dado en [22], [2]. Este es el observador de Luenberger, aquí la diferencia entre la salida de la planta y el observador es realimentada linealmente en el observador.

En [25] se propone un observador por tiempo finito continuo para sistemas de dimensión arbitraria con reatrolimentación no lineal. Aquí demuestran la estabilidad en tiempo finito del sistema de estimación del error asociado al observador, este diferenciador se habla mas a detalle en el capítulo 2.

Los autores en [5], proponen diferenciadores convergentes en tiempo fijo recursivos y no recursivos, lo cual hace mejoría en la práctica ya que el tiempo de

convergencia es independiente de la condición inicial. Además de que en este trabajo se da la estimación del tiempo de convergencia de las variables del observador al vector de las derivadas de salida, de las cuales no se tiene información.

Dentro de la literatura también se encontraron algunos resultados recientes donde se presentan problemas de diseño en observadores para sistemas con perturbaciones desconocidas tales como [40], [37], [36], [42], [41], [13].

Todos estos trabajos han sido una gran aportación a los temas de controlabilidad y observabilidad, sin embargo ninguno de estos trata el problema de sistemas de estado con condiciones iniciales en el disturbio distintas de cero. En la siguiente sección se plantean las aportaciones y objetivos de este trabajo.

1.3 Aportaciones

Las contribuciones de esta tesis son:

- Un algoritmo convergente de tiempo fijo diseñado para proporcionar una extensión directa, sin ningún término adicional, del sistema de control super-twisting convencional, cuya condición inicial de estado esta acotada por una constante conocida.
- Un regulador convergente de tiempo fijo es también diseñado para un sistema de control tipo super-twisting, cuyas condiciones iniciales de estado y de incertidumbres son completamente desconocidas.
- Los controladores convergentes de tiempo fijo son primero diseñados para sistemas escalares tipo super-twisting y después se generaliza para sistemas multivariables.
- En cada caso se calcula una cota superior del tiempo de convergencia del algoritmo de tipo super-twisting.

- El resultado de esta investigación fue publicado en Asian Journal of Control en el 2019 [4].

1.4 Organización de tesis

Este trabajo esta organizado en tres capítulos. En el Capítulo 1 esta formado de 4 secciones, en la primer sección se habla de la motivación, donde se da la argumentación para estudiar el tema propuesto. Luego en la siguiente sección se habla sobre los antecedentes de los cuales nos basamos para el diseño del algoritmo propuesto en nuestra investigación. También en este capítulo se dan las contribuciones o beneficios que se obtuvieron al realizar este trabajo. Por último se presenta la organización de la tesis.

El Capítulo 2 proporciona definiciones, teoremas, de estabilidad, puntos de equilibrio, convergencia en tiempo finito y fijo, estabilidad, y otros más que son necesarias para el mejor entendimiento de la investigación realizada. A continuación se presenta una descripción de las ideas y definiciones matemáticas básicas de los modos deslizantes de primer orden, para sistemas no lineales . A partir de los conceptos introducidos, se definen y caracterizan los modos deslizantes de mayor orden en forma general, y por último, se presenta una sección que se centra en los modos deslizantes de segundo orden, además de los observadores propuestos en algunos artículos, de los cuáles se basó nuestra investigación para lograr nuestro objetivo.

En el último capítulo consta del planteamiento del problema, luego sigue con el diseño del algoritmo de control de tipo super-twisting para sistemas dinámicos con condiciones iniciales de estado desconocidas y el valor inicial del disturbio es acotado por una constante conocida, este regulador es propuesto para el caso de sistemas escalares y multivariables. Se demuestran los teoremas relativos a la convergencia de tiempo del algoritmo y enseguida se dan ejemplos para ilustrar los teoremas, además de retratos fase comprobando lo dicho por esos teoremas. De igual forma se propuso un algoritmo para sistemas dinámicos donde las condiciones iniciales tanto del estado

como del disturbio son desconocidas, se presentaron sus teoremas correspondientes, se realizan simulaciones y se expusieron los resultados para comprobar la teoría propuesta. Al final se dieron conclusiones del funcionamiento y contribución de los algoritmos propuestos.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Sistemas no lineales

El análisis de un sistema de control implica el uso de un modelo matemático para su representación, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema o como un conjunto de ecuaciones diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales ya que son mucho más manejables que los no lineales. Pese a esto, los modelos matemáticos no lineales son más precisos a la hora de representar los sistemas reales, por ejemplo fenómenos no lineales tales como; equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos. Estos fenómenos se presentan en aplicaciones modernas importantes de ingeniería como sistemas de comando de vuelo, manipuladores de robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento. En general, los sistemas dinámicos modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí, se representan así:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

donde \dot{x}_i denota la derivada de x_i con respecto a la variable del tiempo t y u_1, u_2, \dots, u_p son variables de entrada.

Frecuentemente se usa la notación vectorial para escribir esas ecuaciones en una forma compacta. Se define

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

y reescribimos las n ecuaciones diferenciales de primer orden como una ecuación diferencial de primer orden vectorial de dimensión n

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.1)$$

la ecuación (2.1) se conoce como la ecuación de estado, y en ocasiones, se considera una ecuación de salida

$$y = h(t, x, u) \quad (2.2)$$

la cual es asociada con (2.1), definiendo así un vector de salida y de dimensión q que comprende variables de interés particular en el análisis del sistema dinámico, como por ejemplo variable físicamente medibles o variables que deseamos se comporten de alguna forma especial. En algunas ocasiones la ecuación de estado está sin la presencia explícita de la entrada u , que es la llamada ecuación de estado *no forzada*.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.3)$$

Pero no precisamente la entrada para el sistema es cero, puede ser que sea una función de tiempo dada $u = \gamma(t)$, una función de retroalimentación del estado, $u = \gamma(x)$, o ambos $u = \gamma(t, x)$. sustituyendo $u = \gamma$ en (2.1) elimina u y produce una ecuación de estado *no forzada*. Un caso especial de (2.3) sucede cuando la función f no depende explícitamente de t , eso es,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.4)$$

por lo que a este sistema se le llama autónomo o invariante en el tiempo, es decir su comportamiento es invariante al corrimiento del origen temporal, en otras palabras al cambia la variable de tiempo t a $\tau = t - a$, no cambia el lado derecho de la ecuación de estado. De lo contrario, el sistema se dice ser no autónomo o variante en el tiempo.

2.1.1 Ejemplo de sistemas no lineales

En esta sección se mostrará un ejemplo simple de lo que es un sistema no lineal, tomado del libro [12]. Consideremos el péndulo simple (ver figura 2.1), donde l denota la longitud de la cuerda y m la masa de la bola. Para este caso se asume que la cuerda es rígida y tiene masa cero. Denotamos θ como el ángulo de la cuerda al pivote en el eje vertical. El péndulo oscila libremente en el plano vertical. La bola del péndulo se mueve en un círculo de radio l .

Para escribir la ecuación de movimiento del péndulo, vamos a identificar las fuerzas que actúan en la bola. Existe una fuerza gravitatoria igual a mg , donde g es la aceleración debido a la gravedad. También existe una fuerza de fricción, asumimos que es proporcional a la velocidad de la bola con un coeficiente de fricción k . Usando la segunda ley de movimiento de Newton, podemos escribir la ecuación de movimiento en dirección tangencial como:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) - kl\dot{\theta}$$

De aquí se obtiene el modelo de estado tomando las variables de estado como $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$. Por lo que las ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

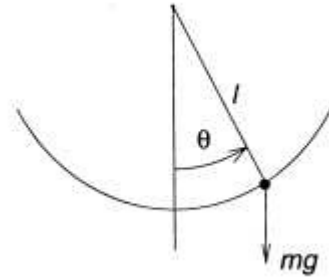


Figura 2.1: Péndulo simple.

2.2 Punto de equilibrio

Un concepto importante con relación a la ecuación de estado es el término de un punto de equilibrio.

Definición 2.1. Sea un punto $x = x^*$ en el espacio de estado se dice ser un punto de equilibrio de (2.3) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x^* , el estado permanece en x^* en todo tiempo futuro. Para un sistema autónomo (2.4), los puntos son las raíces de la ecuación, esto es, $f(x) = 0$

2.3 Estabilidad

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, quién fue un matemático ruso que estableció las bases de la teoría de estabilidad. Por lo que se sigue con la siguiente definición.

Consideremos el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.5}$$

donde $f : [0, \infty] \times D \rightarrow R^n$ es continua por partes en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty] \times D$ y $D \subset R^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. El origen es

un punto de equilibrio para (2.5) en el $t = 0$ si $f(t, 0) = 0 \forall t \geq 0$.

Definición 2.2. [12]. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.5) es*

- *Estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta, \forall t \geq t_0$.*
- *Uniformemente estable, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, independiente de t_0 , tal que la ecuación anterior se satisface.*
- *Asintóticamente estable, si es estable y existe $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $\|x(t_0)\| < c$*
- *Globalmente uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y para cada par de números positivos ϵ y c , existe $T = T(\epsilon, c)$ tal que $\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 + T(\epsilon, c), \forall \|x(t_0)\| < c$*
- *Inestable, si no es estable.*

Una forma eficiente de asegurar los criterios de estabilidad de la definición anterior se dan en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea el origen $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.5) y sea $D \subset R^n$ una función continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2.6)$$

$$\dot{V} \leq 0 \text{ en } D \quad (2.7)$$

entonces $x = 0$ es estable, más aún si $\dot{V} < 0$ en $D - \{0\}$, $x = 0$ es asintóticamente estable.

Una función continuamente diferenciable que satisface (2.6) se dice definida positiva. Si satisface la condición más débil $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$, se dice semidefinida positiva. Una función se dice definida negativa o semidefinida negativa si $-V(x)$ es definida positiva o semidefinida positiva respectivamente. Si $V(x)$ no tiene signo definido con respecto a alguno de estos 4 casos se dice indefinida.

2.3.1 Criterio de estabilidad

Dado el sistema lineal invariante (autónomo)

$$\dot{x} = Ax \quad (2.8)$$

y sea el punto de equilibrio $x = 0$ de (2.8) es estable si y solo si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva y cada autovalor con parte real nula tiene un bloque de Jordan asociado de orden 1. El punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.

Cuando todos los autovalores de A tienen parte real negativa, se dice que A es una matriz de estabilidad o matriz Hurwitz. La estabilidad del origen puede también investigarse usando el método de Lyapunov. Se considera la candidata a función de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x, \quad (2.9)$$

donde P es una matriz real simétrica definida positiva. La derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x,$$

Q es una matriz simétrica definida por

$$PA + A^T P = -Q, \quad (2.10)$$

esta expresión (2.10) es llamada ecuación de Lyapunov, y si su derivada es definida negativa podemos concluir que el origen es asintóticamente estable.

2.4 Convergencia

Consideramos el sistema dinámico de la forma

$$\dot{x}(t) = u(t) + \zeta(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.11)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el sistema de estado, $u(t) \in R^n$ es la entrada del control, $\zeta(t) \in R^n$ es un disturbio que satisface la condición de Lipschitz con una constante L conocida

$$\|\zeta(t)\| \leq L(t - t_0)$$

Uno de los objetivos de esta tesis es lograr la convergencia en tiempo fijo, para eso introducimos las siguientes dos definiciones:

Definición 2.3. El sistema de control vectorial (2.11) es llamado convergente al origen en tiempo finito si para una condición inicial $x_0 \in R^n$, existe un momento de tiempo $T(x_0)$ tal que el estado del sistema $x(t) \in R^n$ es igual a cero, $x(t) = 0$, para todo $t \geq T$.

Definición 2.4. El sistema de control vectorial (2.11) es llamado convergente al origen en tiempo fijo, si existe un momento de tiempo T tal que el estado del sistema $x(t) \in R^n$ es igual a cero, esto es; $x(t) = 0$, para todo $t \geq T$, empezando de cualquier condición inicial $x_0 \in R^n$.

2.5 Modos Deslizantes

Existen sistemas físicos que son modelados por ecuaciones diferenciales que dependen en forma discontinua del estado actual del sistema, es decir ecuaciones con lado derecho discontinuo. A estos sistemas se les denomina sistemas de estructura variable (SEV). Un sistema de estructura variable puede pensarse como un conjunto de estructuras o subsistemas continuos y alguna lógica asociada que, dependiendo de los estados del sistema, realiza la conmutación entre ambos.

Modos deslizantes (MD) fué descubierto como un modo especial en sistemas de estructura variable. El objetivo de un control por modos deslizantes consiste en llevar la dinámica del sistema sobre la superficie deslizante. Luego, mediante conmutaciones a frecuencia muy elevada, idealmente infinita, se fuerza a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre la variedad determinada por la restricción planteada, en el espacio

de estados. Además sus características son que es altamente robusto o invariante ante cierto tipo de perturbaciones externas y variaciones en los parámetros del sistema. Sin embargo los modos deslizantes presentan un fenómeno llamado *chattering*. Este efecto se presenta porque la operación en modo deslizante es de orden reducido, quedando fijada tal dinámica por la función de restricción diseñada cuando la frecuencia de conmutación no es infinita, como sucede en cualquier implementación práctica, o en el caso de que existan dinámicas no modeladas, las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la variedad de deslizamiento.

La idea del control por modos deslizantes consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una variedad o superficie de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ella. Así el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. De este modo, es posible lograr la estabilización del sistema, el seguimiento de referencias y la regulación de variables.

Consideremos el sistema no lineal dado por

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x)u(t) \quad (2.12)$$

donde $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $f(t, x) \in R^n$ y $g(t, x) \in R^{n \times m}$. La componente de retroalimentación discontinua esta dada por

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $\sigma_i(x) = 0$ es la i -ésima superficie deslizante, y

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0 \quad (2.14)$$

es la superficie deslizante $(n - m)$ dimensional.

Para atacar el problema de reducir o eliminar el *chattering*, se han introducido varias propuestas, entre ellas la de Modos Deslizantes de Orden Superior (MDOS). Un algoritmo de Modos Deslizantes de orden r (r-MD) en teoría, es capaz de eliminar el *chattering* en un sistema cuando el grado relativo del modelo de la planta,

incluyendo actuadores y sensores es r . Aunque en la práctica no se puede eliminar el *chattering*, pero se han obtenido muy buenos resultados teóricos con estos métodos. Cabe aclarar que, r -MD hace referencia al orden del modo deslizante, donde las primeras r derivadas de σ , $r = 0, 1, \dots, (r - 1)$ son continuas y la r -ésima es discontinua, y se verifica :

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$$

ecuación que resulta una condición de dimensión r en el estado del sistema dinámico. así el modo deslizante original es 1-MD, ya que su primera derivada resulta discontinua.

La características de robustez de los MDOS, en particular de los 2-MD, en aplicaciones no lineales con salidas de grado relativo 1 y 2, la simplicidad de convergencia en tiempo finito de muchos de los algoritmos, y la posibilidad de explorar nuevos algoritmos o variaciones de los que ya existen, han motivado su estudio, análisis y aplicación en las propuestas de control de esta tesis.

2.6 Control Twisting

Este algoritmo fue propuesto por Levant (1993),[14], de la siguiente manera Consideremos un sistema dinámico

$$\ddot{x} = a(t) + b(t)u \quad (2.15)$$

donde $|a(t, x)| < C, 0 \leq K_m \leq b(t, x) \leq K_M$

$$u = -r_1 \text{sgn}(x) - r_2 \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.16)$$

donde $r_1, r_2 > 0$

por lo que sigue con el siguiente lema:

Lema 1 [31] Sea r_1 y r_2 satisfaciendo las condiciones

$$K_m(r_1 + r_2) - C > K_M(r_1 - r_2) + C, K_m(r_1 - r_2) > C$$

entonces, el controlador (2.16) prevee convergencia de las trayectorias $x = \dot{x} = 0$ en tiempo finito por el control de 2-MD.

Como bien se dijo en el lema este algoritmo se caracteriza por la forma en que las trayectorias del sistema convergen al origen del plano de desplazamiento, $x = \dot{x} = 0$, luego de infinitos giros a su alrededor.

El algoritmo (2.16) es muy sencillo, pero tiene la desventaja de requerir información sobre la derivada de la variable de desplazamiento, es decir, requiere al menos conocer el signo de $\dot{\sigma}$, además es una ley de control discontinua y esto es poco práctico para la vida real.

2.7 Control Super-twisting

Como se mostró en la sección anterior para remover el *chattering*, el controlador *twisting* requiere mediciones en tiempo real de \dot{x} o solo el signo de \dot{x} . En otras palabras para llegar a $x = \dot{x} = 0$ las medidas de x y \dot{x} son necesarias.

Levant en 1998 [15] propone una modificación de algoritmo de segundo orden dado en la sección anterior [14]. Consideremos el sistema dinámico

$$\dot{x} = u \tag{2.17}$$

Donde la variable de control toma la forma:

$$\begin{aligned} u &= u_1 - \lambda |x - f(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(x - f(t)) \\ \dot{u}_1 &= -\alpha \operatorname{sgn}(x - f(t)) \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ y $u(t)$ es la salida del controlador, $f(t)$ es una función acotada y medible en $[0, \infty)$ con derivada acotada por una constante de Lipschitz C , y el controlador se caracteriza porque proporciona que el error derivado máximo sea proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud del ruido después de un proceso transitorio de tiempo finito.

La forma en que las trayectorias del sistema controlado convergen al origen en el plano de deslizamiento $\dot{x} - x$ es realizando rodeos característicos alrededor del

mismo. La potencia del término en valor absoluto en (2.18) igual a $1/2$ se ha probado que se tiene una mejor convergencia [11], ya que si es menor o igual que $1/2$ se tiene una convergencia en tiempo finito, de lo contrario, si se fijase en 1 la potencia, la convergencia sería exponencial, no en tiempo finito.

Después en [9] hacen una extensión del algoritmo *super-twisting* a un regulador continuo convergente por tiempo fijo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u &= u_1 - k_1 |x - f(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(x - f(t)) + \mu |x - f(t)|^{3/2} \operatorname{sgn}(x - f(t)) \\ \dot{u}_1 &= -\frac{k_2}{2} \operatorname{sgn}(x - f(t)) + 2\mu |x - f(t)| + \frac{3}{2}\mu^2 |x - f(t)|^2 \operatorname{sgn}(x - f(t))^2 \operatorname{sgn}(x - f(t)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dada la presencia del término $2\mu |x - f(t)| + \frac{3}{2}\mu^2 |x - f(t)|^2 \operatorname{sgn}(x - f(t))^2 \operatorname{sgn}(x - f(t))$ en el controlador, el sistema dinámico converge en tiempo fijo. Sin embargo en este trabajo la cota estimada de la convergencia de tiempo fijo es poco práctica además de que su resultado excede hasta 100 veces la convergencia real, esto es una desventaja para los procesos que se realizan en la industria.

2.8 Controladores para el caso vectorial

Como se ha visto en la literatura se han propuesto controladores por modos deslizantes escalares convergentes en tiempo finito/fijo, por lo que en [24] presentan un controlador para el caso multivariable donde el objetivo es llevar al cero en tiempo finito una función de conmutación dada por $\sigma(x)$, donde $x \in R^n$ es el estado del sistema y $\sigma : R^n \mapsto R^m$.

Se considera el sistema

$$\dot{\sigma}(t) = a(t, x) + b(t, x)u + \gamma(t, \sigma), \quad \sigma = \sigma(t, x) \quad (2.20)$$

donde $x \in R^n$ es el estado del sistema, $a(t, x) \in R^m$ y $b(t, x) \in R^{m \times m}$ son conocidas y $\gamma(\cdot)$ representa una perturbación desconocida pero acotada, tal que satisface que

$$\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\| \quad (2.21)$$

δ_1 es un escalar conocido positivo y la tarea es llevar la función restricción $\sigma(t, x)$ al cero. Proponen el controlador de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u &= -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{1/2}} + z - k_2 \sigma \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma eculidiana.

El principal resultado en este trabajo fue que para el controlador (2.22) acoplado en el sistema dinámico (2.20) existe un rango de valores para las ganancias k_1, k_2, \dots, k_4 tal que las variables σ y $\dot{\sigma}$ son llevadas al cero en tiempo finito y permanecerá en cero en todo tiempo subsecuente.

El regulador anterior es continuo convergente en tiempo finito, esto quiere decir que el tiempo de convergencia depende de la condición inicial, además de que no se dio una estimación del tiempo de convergencia para el caso del algoritmo super twisting para el caso multivariable.

Por tanto en [3] se propone un control de tipo super-twisting convergente en tiempo-fijo para el caso escalar. La ley de control continua propuesta es:

$$u(t) = -\lambda_1 |x(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(x(t)) - \lambda_2 |x(t)|^p \operatorname{sgn}(x(t)) - \alpha \int_{t_0}^t \operatorname{sgn}(x(s)) ds, \quad (2.23)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \alpha > 0$ y $p > 1$

Este algoritmo es más simple el que se presentó en el caso anterior [9], la desventaja en este caso los autores solo consideran la condición inicial del disturbio sea cero, y eso es algo que en la vida real no pasa, por lo tanto es poco práctico.

Para el caso vectorial se propuso en este mismo artículo el siguiente controlador continuo convergente en tiempo fijo:

$$u(t) = -\lambda_1 \frac{x(t)}{\|x(t)\|^{1/2}} - \lambda_2 x(t) \|x(t)\|^{p-1} - \int_{t_0}^t \alpha \frac{x(s)}{\|x(s)\|} ds. \quad (2.24)$$

donde $p > 1, \lambda_1, \lambda_2, \alpha > 0$

Al igual que en el caso escalar, en el caso multivariable donde el valor inicial de la perturbación es igual a cero. Por lo que en nuestra tesis se habla sobre el tema donde la condición inicial del disturbio es desconocida.

2.9 Observadores convergentes en tiempo finito

Cuando se tiene que el sistema (2.20) es conocido y el estado completo es disponible, sus derivadas pueden ser directamente calculadas. En el caso contrario donde hay incertidumbre, no se necesita un modelo del proceso en forma detallada y las derivadas se pueden obtener por medio de la propuesta de Levant(2002)[16], de un observador (diferenciador) con convergencia en tiempo finito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= -\lambda_{0,0}L^{1/r} |z_0 - \sigma|^{(r-1)/r} \operatorname{sgn}(z_0 - \sigma) + z_1, \\
 \dot{z}_1 &= v_1, & v_1 &= -\lambda_{0,1}L^{1/(r-1)} |z_1 - v_0|^{(r-2)/(r-1)} \operatorname{sgn}(z_1 - v_0) + z_2, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-2} &= v_{r-2}, & v_{r-2} &= -\lambda_{0,r-2}L^{(1/2)} |z_{r-2} - v_{r-3}|^{(1/2)} \operatorname{sgn}(z_{r-2} - v_{r-3}) + z_{r-1}, \\
 \dot{z}_{r-1} &= -\lambda_{0,r-1}L \operatorname{sgn}(z_{r-1} - v_{r-2})
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde los parámetros $\lambda_i = \lambda_{0,i}L^{1/(r-i)}$ del diferenciador son seleccionados de acuerdo a la condición $|\sigma^{(r)}| \leq L$, donde L es la constante de Lipschitz conocida. Los autores demuestran que para cualquier $\lambda_0 > 1$ existe una secuencia positiva infinita $\{\lambda_n\}$, tal que para cada natural k , donde $k = r - 1$ los parámetros $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ prueba la convergencia finita de el diferenciador de orden k (2.25). Una posible elección que se da en [31] para estos parámetros de un diferenciador de orden 5 son: $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 8$, $\lambda_5 = 12$, otra opción es $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 5$, $\lambda_5 = 8$.

Perruquetti et al. [25] por su parte proponen un observador en tiempo finito continuo para sistemas de cualquier dimensión con retroalimentación no lineal. Entonces consideremos el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x(t)) + g(x(t))\phi(t), & x(t_0) &= x_0 \\
 y(t) &= Cx(t)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $y(t) \in R$ es la variable medible (salida),

$\phi(t) \in R$ es un disturbio externo, $f(x) \in R^n$ y $g(x) \in R^n$ son funciones conocidas. Como solamente la salida escalar $y(t) = Cx(t)$ puede ser medida, se diseñó el siguiente observador no recursivo que reconstruye las derivadas de las salidas $y^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, (n - 1)$,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1 |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) - k_2 |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= -k_n |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_n} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde $\alpha_i \in (1 - \epsilon, 1)$ y $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$.

Aquí los autores demuestran la estabilidad del sistema de estimación de error asociado al observador. Sin embargo este observador es convergente solo en tiempo finito, es decir depende de la condición inicial.

2.10 Observador convergente en tiempo fijo

En [5] se diseña un observador convergente en tiempo finito y fijo con términos menos rigurosos.

Consideremos el siguiente sistema dinámico (2.26), considerando otra vez que la salida escalar $y(t) = Cx(t)$ puede ser medida, se diseñó el siguiente observador no recursivo que reconstruye las derivadas de las salidas $y^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, (n - 1)$, para un tiempo fijo.

$$\begin{aligned}
z_1 \dot{(t)} &= z_2(t) - k_1 |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) - \kappa_1 |z_1(t) - y(t)|^{\beta_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
&\vdots \\
z_i \dot{(t)} &= z_{i+1}(t) - k_i |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_i} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) - \kappa_i |z_1(t) - y(t)|^{\beta_i} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
&\vdots \\
z_n \dot{(t)} &= -k_n |z_1(t) - y(t)|^{\alpha_n} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) - \kappa_n |z_1(t) - y(t)|^{\beta_n} \operatorname{sgn}(z_1(t) - y(t)) \\
&\quad i = 1, \dots, (n-1) \\
&\quad k_1, \dots, k_n > 0, \\
&\quad \kappa_1, \dots, \kappa_n > 0,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Los exponentes α_i , $i = 1, \dots, n$ son seleccionados como sigue: $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, n$ satisfaciendo la relación recurrente $\alpha_i = i\alpha - (i-1)$, $i = 2, \dots, n$ y $\alpha_1 = \alpha$ donde α pertenece al intervalo $(1 - \epsilon, 1)$ para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Los valores de $\beta_i = 1, \dots, n$ son seleccionados de manera que $\beta_i > 1$ $i = 1, \dots, n$ satisfaciendo la relación recurrente $\beta_i = i\beta - (i-1)$, $i = 2, \dots, n$ y $\beta_1 = \beta$ donde β pertenece al intervalo $(1, 1 + \epsilon_1)$ para un $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeño. Las ganancias del observador k_i y κ_i , $i = 1, \dots, n$ son asignadas tal que las matrices A y A_1

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -\kappa_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\kappa_n & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

sean Hurwitz.

La función signo de un escalar x es definida como, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 0$ si $x = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. La variable del observador $z_i(t)$ es el estimado de $y^{i-1}(t)$, $i = 1, \dots, (n-1)$. La estimación del observador esta dado de la siguiente manera $e(t) = e_1(t) = y(t) - z_1(t)$ y sus derivadas $e_i(t) = e^{(i-1)}(t) =$

$y^{(i-1)}(t) - z_i(t)$ $i = 2, \dots, n$ toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2(t) - k_1 |e(t)|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(e(t)) - \kappa_1 |e(t)|^{\beta_1} \operatorname{sgn}(e(t)), \\ &\vdots \\ \dot{e}_i(t) &= e_{i+1}(t) - k_i |e(t)|^{\alpha_i} \operatorname{sgn}(e(t)) - \kappa_i |e(t)|^{\beta_i} \operatorname{sgn}(e(t)), \\ &i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{e}_n(t) &= -k_n |e(t)|^{\alpha_n} \operatorname{sgn}(e(t)) - \kappa_n |e(t)|^{\beta_n} \operatorname{sgn}(e(t)), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$k_1, \dots, k_n, \kappa_1, \dots, \kappa_n > 0$.

El principal resultado que presentaron los autores con este observador en tiempo fijo no recursivo es el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Considera el observador (2.28) y el correspondiente sistema de estimación del error (2.29). El error $e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)] \in R^n$ converge al origen y el estado del observador $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)] \in R^n$ converge al vector de derivadas de la salida $y(t)$, $[y_1(t), \dot{y}(t), \dots, \dot{y}^{(n-1)}(t)]$, para un tiempo fijo.*

$$T_{BBF} \leq \frac{\lambda_{max}^p(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^\sigma} \quad (2.30)$$

donde $p = 1 - \alpha$, $\sigma = \beta - 1$, $r = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}$, $r_1 = \frac{\lambda_{min}(Q_1)}{\lambda_{max}(P_1)}$, $\Upsilon \leq \lambda_{min}(P_1)$ es un número positivo, $Q_1 \in R^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva, y la matriz simétrica positiva P_1 satisface la ecuación de Lyapunov

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$$

Como ya se dijo este observador converge en tiempo finito y tiene la ventaja de usarse para un orden arbitrario, además de que los autores dan una estimación del tiempo en que el estado del observador converge al vector de las derivadas, por lo que este observador se eligió para nuestra meta de tesis, que se verá en el capítulo 3.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE ALGORITMOS CONTINUOS

CONVERGENTES EN TIEMPO FIJO.

3.1 Planteamiento del problema

Considere un sistema vectorial de control

$$\dot{x}(t) = u(t) + \zeta(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

donde $x(t) \in R^n$ es un sistema de estado, $u(t) \in R^n$ es una entrada de control, $\zeta(t) \in R^n$ es un disturbio que satisface las condiciones de Lipschitz

$$\|\zeta(t_1) - \zeta(t_2)\| \leq L |t_1 - t_2|$$

para cualquier $t_1, t_2 \leq t_0$, con una cierta constante L .

Se consideran dos casos de condiciones iniciales del disturbio:

- a. La condición inicial del disturbio, $\zeta(t_0)$, es acotado por una constante conocida K tal que $|\zeta(t_0)| \leq K$
- b. No hay información de la condición inicial del disturbio $\zeta(t_0)$.

El problema a tratar es diseñar una ley de control continua llevando los estados del sistema de lazo-cerrado al origen por un tiempo fijo en el sentido de la definición previa y estimando la correspondiente convergencia de tiempo. La ley de control

generaliza el control tipo super-twisting propuesto en [3] para los casos cuando la condición inicial de disturbio es desconocida pero acotada por un constante conocida o completamente desconocida. En [3], la condición inicial del disturbio se asume que es cero, $\zeta(t_0) = 0$.

3.2 Diseño de control: Cota conocida para el valor inicial del disturbio. Caso escalar.

Considerando primero un sistema escalar (3.1), $n = 1$. Se introduce una ley de control continuo:

$$u(t) = -\lambda_1 |x(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(x(t)) - \lambda_2 |x(t)|^p \operatorname{sgn}(x(t)) - \alpha \int_{t_0}^t \operatorname{sgn}(x(s)) ds, \quad (3.2)$$

el cual prueba convergencia en tiempo fijo al origen para el control escalar (3.1). Donde $\lambda_1, \lambda_2, \alpha > 0$ y $p > 1$. Entonces el resultado del sistema de control de tipo super-twisting en lazo-cerrado es representado en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\lambda_1 |x(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(x(t)) - \lambda_2 |x(t)|^p \operatorname{sgn}(x(t)) + y(t), & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= -\alpha \operatorname{sgn}(x(t)) + \xi(t), & y(t_0) &= \zeta(t_0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\xi(t) = \frac{d\zeta(t)}{dt}$ es acotada por una constante L . Si $\lambda_2 = 0$, resulta el algoritmo convencional de super-twisting dado en [15].

El resultado principal para la ley control convergente de tiempo-fijo esta dado con el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Se considera un sistema dinámico (3.3) en la presencia de un disturbio $\zeta(t)$ satisfaciendo la condición de Lipschitz con una constante L y una condición inicial $y(t_0) = \zeta(t_0)$ acotado por una constante K . Entonces, ambos estados $x(t)$ y $y(t)$ convergen uniformemente al origen en tiempo fijo*

$$T_f \leq \left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{K}{M} \right) \left(1 + \frac{1}{m \left(\frac{1}{M} - \frac{h(\lambda_1)}{\lambda_1} \right)} \right) + \frac{K}{m}, \quad (3.4)$$

donde $\varepsilon > 0$, $M = \alpha + L$, $m = \alpha - L$, $h(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{2e}{m\lambda_1}\right)^{1/3}$, donde e es la base de los logaritmos naturales, siempre y cuando se cumplan las siguientes ganancias del control: $\alpha > L$, $\lambda_1 h^{-1}(\lambda_1) > M$. El valor mínimo de $T_f(\varepsilon)$ es alcanzado por $\varepsilon = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p+\frac{1}{2}}}$

Demostración. **A.** Consideremos primero que $\text{sgn}(y_0)$ es opuesto a $\text{sgn}(x_0)$ o $y_0 = 0$. Sea $|x_0| > \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es una constante dada. De la primera ecuación en (3.3) se obtiene

$$\frac{d|x(t)|}{dt} \leq -\lambda_2 |x(t)|^p, \quad (3.5)$$

tomando en cuenta que $\text{sgn}(y(t))$ permanece opuesto a $\text{sgn}(x(t))$ para $t > t_0$, mientras $x(t)$ no cruza el eje $x = 0$ y $\alpha > L$. Reescribiendo (3.5) como

$$\frac{d|x(t)|}{|x(t)|^p} = |x(t)|^{-p} d|x(t)| \leq -\lambda_2 dt$$

e integrando esta expresión con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ resulta

$$\frac{|x(t)|^{1-p}}{1-p} - \frac{|x_0|^{1-p}}{1-p} \leq -\lambda_2(t - t_0),$$

de la cual sigue que

$$\frac{|x(t)|^{1-p}}{1-p} \leq -\lambda_2(t - t_0) + \frac{|x_0|^{1-p}}{1-p} \leq -\lambda_2(t - t_0),$$

tomando en cuenta que $1 - p < 0$, se multiplica ambas partes por $p - 1 > 0$ resulta

$$-|x(t)|^{1-p} \leq -\lambda_2(t - t_0)(p - 1).$$

se sabe que si $-x \leq -y$ implica $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ para $x > 0$ y $y > 0$ y aplicando esta deducción en la última expresión resulta

$$|x(t)|^{p-1} \leq \frac{1}{\lambda_2(p-1)(t-t_0)}.$$

Por lo tanto, $|x(t)|$ decrece y alcanza el valor $|x(t)| = \varepsilon$ para un tiempo

$T_1 \leq \frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}}$, la cual corresponde al primer término en (3.4). Note que este

término de la expresión es independiente de la condición inicial desconocida x_0 .

El paso **A** termina con $|x(T_1)| = \varepsilon > 0$. Si $|x_0| \leq \varepsilon$, el paso **A** no es ejecutado; por lo tanto, el término $\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}}$ estaría ausente en (3.4).

- B.** Para $t > T_1$, $|x(t)|$ continua decreciendo a cero, alcanzando en un cierto tiempo T_2 . De la primera ecuación en (3.3) resulta

$$\frac{d|x(t)|}{dt} \leq -\lambda_1 |x(t)|^{1/2}, \quad (3.6)$$

tomando en cuenta que el $\text{sgn}(y(t))$ sigue siendo opuesto a $\text{sgn}(x(t))$ para $t \in [T_1, T_2]$ hasta $x(t)$ empieza a ser igual a cero. Resolviendo (3.6) implica que

$$2|x(t)|^{1/2} \leq -\lambda_1(t - T_1) + 2|x(T_1)|^{1/2} = -\lambda_1(t - T_1) + 2\varepsilon^{1/2}.$$

Por lo tanto, $|x(t)|$ decrece y alcanza el cero en un tiempo $T_2 \leq \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1}$ el cual corresponde al segundo término en (3.4). El paso **B** termina con $|x(T_2)| = 0$.

Dado que $\text{sgn}(y(t))$ es opuesto a $\text{sgn}(x(t))$ para $t \in [t_0, T_2]$ y $\alpha > L$, $|y(t)|$ incrementa para $t \in [t_0, T_2]$. El valor $|y(T_2)|$ es acotado por $|y(T_2)| < K + M(T_2 - t_0) = K + M\left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1}\right)$ en vista de la segunda ecuación en (3.3)

- C.** Consideremos ahora que $\text{sgn}(y(t_0))$ es igual a $\text{sgn}(x(t_0))$. Entonces, $x(t)$ no puede alcanzar el cero hasta que $\text{sgn}(y(t))$ se vuelve opuesto a $\text{sgn}(x(t))$, esto es, $y(t)$ tiene que llegar al cero primero. En vista de la segunda ecuación en (3.3), la convergencia de tiempo de $y(t)$ a cero se puede estimar como $T_3 = \frac{K}{m}$, el cual puede ser agregado al tiempo T_2 que fue calculado en el paso **B**.

- D.** La trayectoria del sistema (3.3) que comienza en el $(0, y(T_2))$ está dominado por la trayectoria del sistema (3.3) que comienza en $(0, y_2 = K + M\left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1}\right))$ y converge al origen más rápido. Siguiendo la demostración del teorema 4.5 en [31] la convergencia en tiempo finito para la ultima trayectoria puede ser estimada por la fórmula $T_{STW} \leq \sum_i \frac{\dot{x}(t_i)}{m}$, donde $\dot{x}(t_i) \cdot i = 1, 2, \dots$ son derivadas de $x(t)$ en los momentos de tiempo subsecuentes t_i , tal que $x(t_i) = 0$ y $\dot{x}(t_i) = y(t_i)$, si $q_c = \frac{|\dot{x}(t_2)|}{|\dot{x}(t_1)|} < 1$. Cabe notar que el paso D comienza en alguno

de los momentos de tiempo, $T_2 + T_3$. Por lo tanto T_{STW} es calculado como $T_{STW} = \frac{y_2}{(1-q_c)m}$, donde el valor de q_c puede ser estimado usando la fórmula $q_c \leq \frac{Mh(\lambda_1)}{\lambda_1}$ derivado en [33]. La condición necesaria $q_c = \frac{Mh(\lambda_1)}{\lambda_1} < 1$ corresponde a la segunda condición para obtener las ganancias del control en este teorema. En [33], la primera condición obligatoria $\alpha > L$ es una condición para la convergencia del algoritmo super-twisting. Sustituyendo los estimados obtenidos para $y_2 = |y(T_2)|$ y q_c resulta $T_{STW} < M \frac{\left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{K}{M}\right)}{\left(1 - \frac{Mh(\lambda_1)}{\lambda_1}\right)m}$, y dividiendo ambas partes de la fracción por M , corresponde a los términos anteriores en (3.4). El óptimo valor de ε es determinado [3] minimizando los primeros dos términos en (3.4) con respecto a ε .

□

Tomando en cuenta que el valor K afecta la cota superior para la convergencia de tiempo del algoritmo dado por (3.4): si K es menor, menor es la convergencia de tiempo.

Observación 1 Del lado derecho de la ecuación (3.4) presenta una estimación de cota superior de la convergencia en tiempo fijo para el sistema de tipo super-twisting, la cual es independiente de cualquier condición inicial x_0 y y_0 . Esto quiere decir que para cualquier condición inicial x_0 y y_0 ambos estados $x(t)$ y $y(t)$, del sistema de tipo super-twisting (3.3) converge al origen por un tiempo finito T_f no mayor al de la cota estimada. El resultado del Teorema (3.1) generaliza el resultado obtenido en [3], donde la condición inicial y_0 se asume que es cero, esto es $y_0 = 0$.

Observación 2 El término $\left(\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{K}{M}\right) \left(1 + \frac{1}{m\left(\frac{1}{M} - \frac{h(\lambda_1)}{\lambda_1}\right)}\right) + \frac{K}{m}$ en (3.4) puede ser usado para estimar la convergencia de tiempo en el algoritmo convencional super twisting [15], ajustando $\varepsilon = |x_0|$ y $K = |y_0|$. La fórmula resultante toma la forma

$$T_{nf}(x_0) \leq \left(\frac{2|x_0|^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{|y_0|}{M}\right) \left(1 + \frac{1}{m\left(\frac{1}{M} - \frac{h(\lambda_1)}{\lambda_1}\right)}\right) + \frac{|y_0|}{m}.$$

El estimado obtenido de la convergencia en tiempo finito depende de la condición inicial x_0 y y_0 , las cuales son conocidos en [15].

3.2.1 Ejemplo: Caso escalar

Considere un sistema de tipo super twisting dado por la ecuación (3.3), el cual es similar al mostrado en [3]. La fórmula (3.4) se aplica para calcular la cota superior de convergencia en tiempo fijo estimada usando los siguientes valores de parámetros: con esos datos de α y L se obtuvieron $M = 9.5$ y $m = 4.5$. Las ganancias del control

| Parámetros | Valor |
|-------------|---------------|
| p | $\frac{3}{2}$ |
| λ_1 | 20 |
| λ_2 | 1 |
| L | 2.5 |
| α | 7 |

son seleccionadas satisfaciendo las condiciones del Teorema 1. El disturbio es asignado como $\xi(t) = -\sin(t) - \cos(10t)$. La cota de K se estableció como $K = 100$. La tabla 3.1 muestra los resultados de tiempo obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales de y_0 y x_0 .

La convergencia en tiempo fijo estimada por (3.4) es $T_f = 65.13$, mientras que la convergencia real de tiempos del sistema (3.3) varían de $T = 0.88$ para las pequeñas condiciones a $T = 15.4$ para las más grandes condiciones y siempre se aproxima a un cierto límite ya que x_0 tiende a infinito. Por lo tanto el estimado que fue dado en (3.4) aproxima bien la convergencia real de tiempo y puede ser útil para la práctica estableciendo el tiempo de evaluación.

Las siguientes figuras muestran los retrato fase (plano fase) de las trayectorias del sistema de tipo super-twisting (3.3) en coordenadas x, y . Las primeras tres figuras se refieren al caso donde las condiciones iniciales son $x_0 = 100, y_0 = -50$, y las ultimas tres corresponden a las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$ donde se muestra el caso con signo igual.

| $y_0 \backslash x_0$ | 10 | 100 | 1000 | 10^4 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | Cota teórica |
|----------------------|------|------|------|--------|--------|--------|--------|--------------|
| 100 | 14.8 | 15.3 | 15.4 | 15.4 | 15.4 | 15.4 | 15.4 | 65.13 |
| -50 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 65.13 |
| -10 | 2.2 | 2.71 | 2.98 | 2.98 | 2.98 | 2.98 | 2.98 | 65.13 |
| -5 | 2.17 | 2.17 | 2.17 | 2.17 | 2.17 | 2.17 | 2.17 | 65.13 |
| -1 | 0.88 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 65.13 |
| 1 | 0.4 | 0.95 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 65.13 |
| 5 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 65.13 |
| 10 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 65.13 |
| 50 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 65.13 |
| 100 | 14.8 | 14.8 | 14.8 | 14.8 | 14.8 | 14.8 | 14.8 | 65.13 |

Tabla 3.1: Tiempos obtenidos en las simulaciones para el caso escalar.

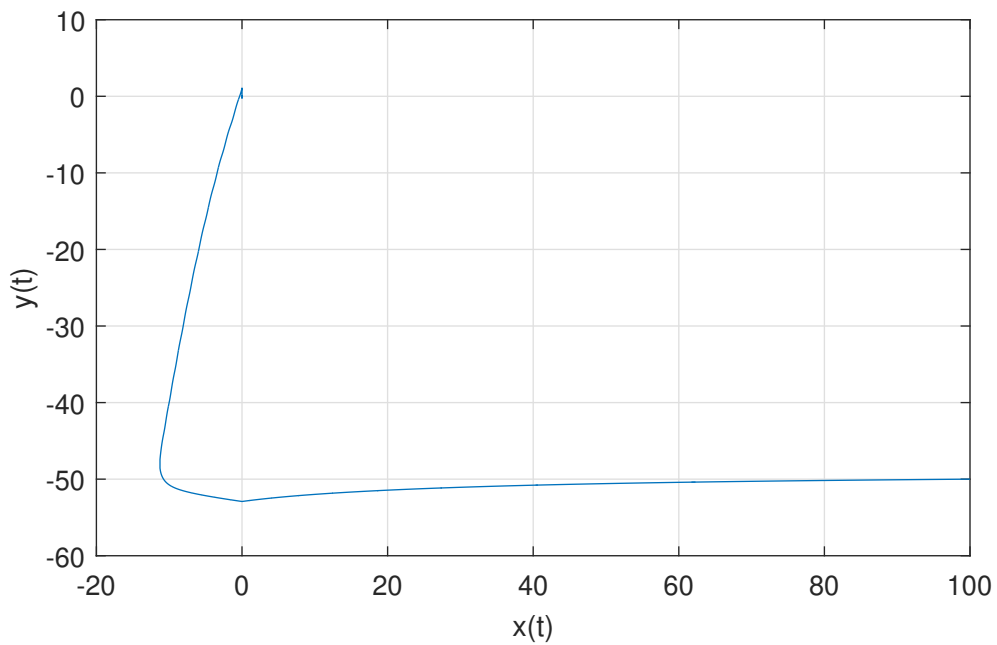


Figura 3.1: Retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100$, $y_0 = -50$

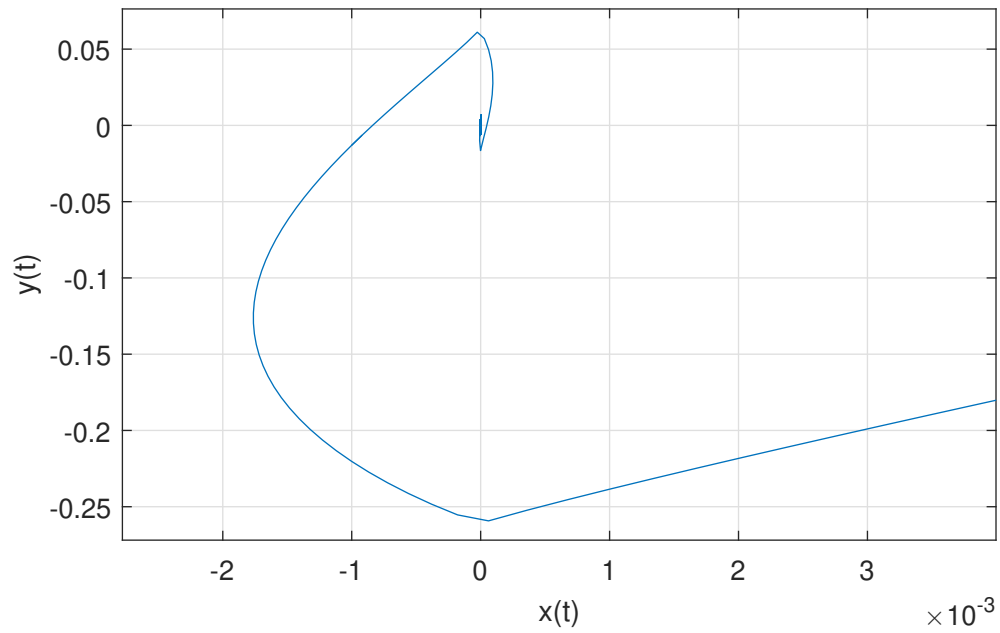


Figura 3.2: Zoom del retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100$, $y_0 = -50$

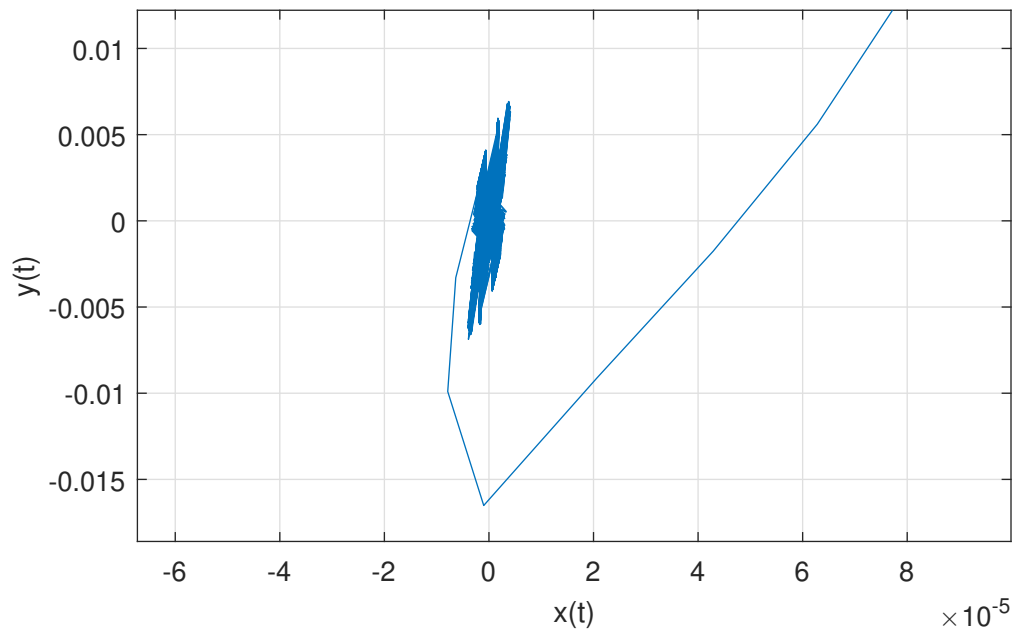


Figura 3.3: Retrato fase detallado para las condiciones iniciales $x_0 = 100$, $y_0 = -50$

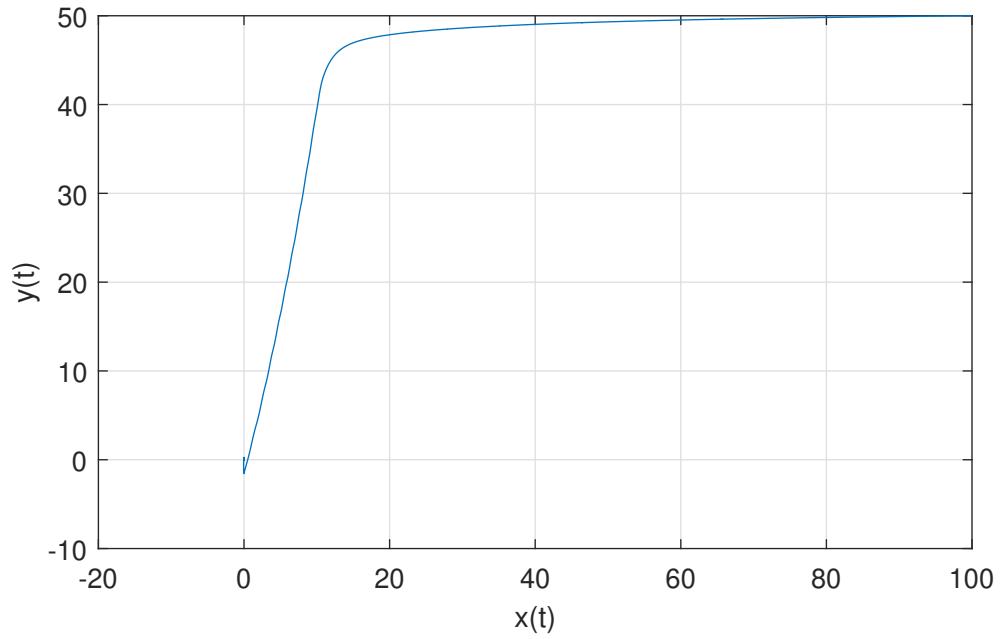


Figura 3.4: Retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$

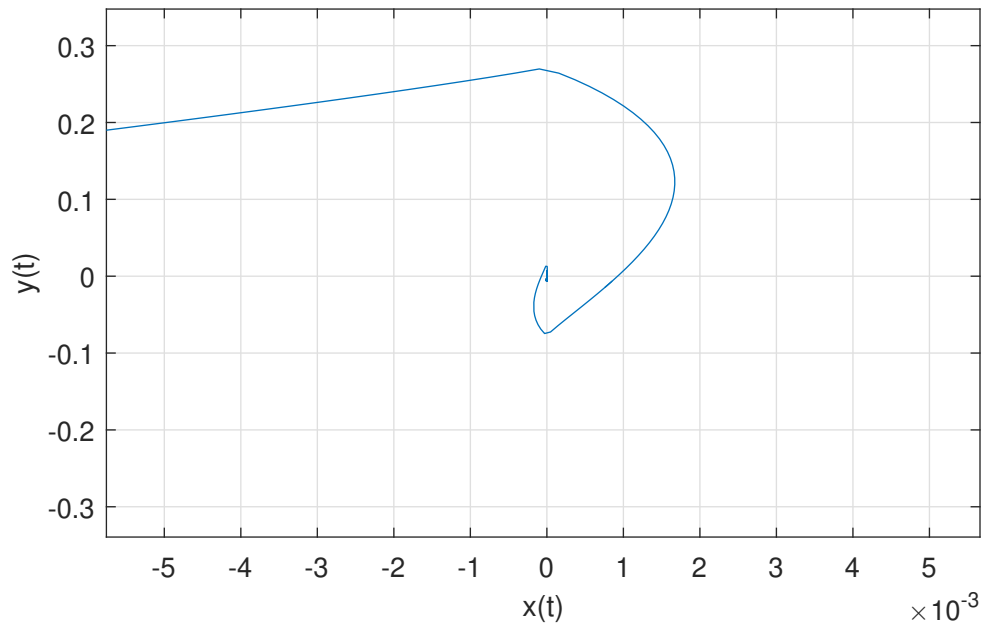


Figura 3.5: Zoom del retrato fase para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$

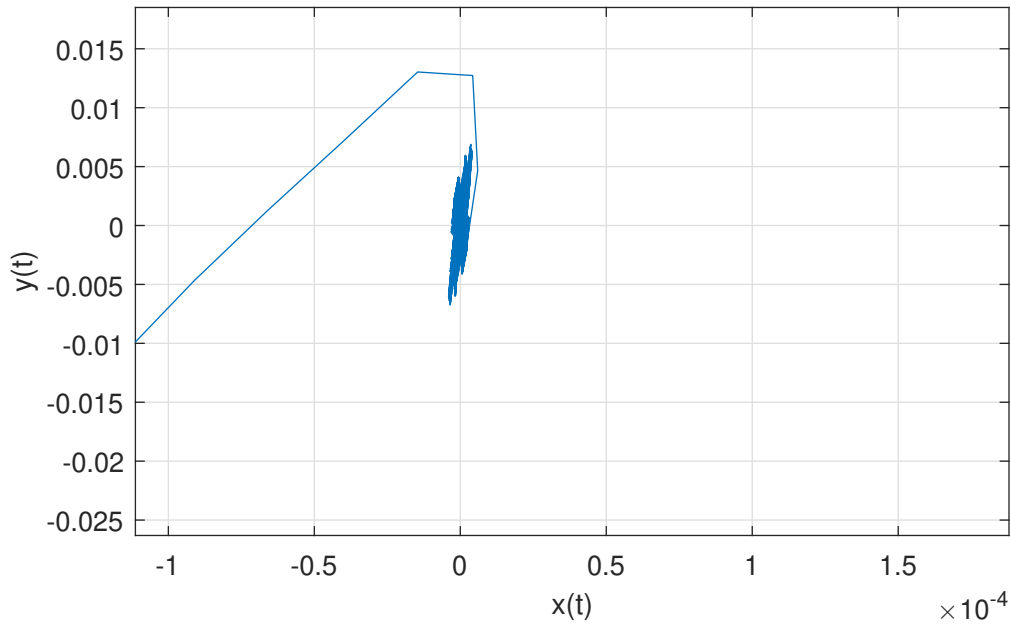


Figura 3.6: Retrato fase detallado para las condiciones iniciales $x_0 = 100$, $y_0 = 50$

Finalmente, se observa que el comportamiento de las trayectorias de estado correspondientes a las condiciones iniciales de los signos opuestos e iguales es bien consistente con los casos **A** y **C** en la demostración del Teorema (3.1).

3.3 Diseño de Control: Cota conocida para valor inicial de disturbio. Caso Multivariable

La propuesta ley de control escalar convergente en tiempo fijo continuo 3.2 es generalizada para el caso vectorial como:

$$u(t) = -\lambda_1 \frac{x(t)}{\|x(t)\|^{1/2}} - \lambda_2 x(t) \|x(t)\|^{p-1} - \int_{t_0}^t \alpha \frac{x(s)}{\|x(s)\|} ds, \quad (3.7)$$

donde $p > 1$. Entonces, el resultado del sistema en lazo-cerrado toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\lambda_1 \frac{x(t)}{\|x(t)\|^{1/2}} - \lambda_2 x(t) \|x(t)\|^{p-1} + y(t), & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= -\alpha \frac{x(t)}{\|x(t)\|} + \xi(t), & y(t_0) &= \zeta(t_0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

El problema de convergencia en tiempo fijo se considera para el sistema vectorial (3.8) y consiste en determinar condiciones para las ganancias del control $\lambda_1, \lambda_2, \alpha > 0$ tal que ambos estados del sistema convergen al origen para un tiempo finito menos que un cierto valor fijo $T_{mf} > 0$, el cual es pre-establecido independientemente de las condiciones iniciales. El principal resultado para la ley de control multivariable convergente en tiempo fijo (3.7) y el sistema multivariable (3.8) se da como sigue.

Teorema 3.2. *Consideremos un sistema dinámico (3.8) en presencia de un disturbio $\xi(t)$, cuya norma es acotada por una constante L , y una condición inicial $y(t_0) = \zeta(t_0)$, cuya norma es acotada por una constante K . Entonces, ambos estados vectoriales $x(t)$ y $y(t)$ convergen al origen uniformemente en un tiempo fijo*

$$T_{mf} \leq \left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2(\sqrt{n}\varepsilon)^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{K}{M} \right) \left(1 + \frac{M}{m \left(1 - \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1} \right)} \right) + \frac{\sqrt{n}K}{m}, \quad (3.9)$$

donde $\varepsilon > 0$, $M = \alpha + L$, y $m = \alpha - L$, siempre que las siguientes condiciones para las ganancias del control se cumplan: $\alpha > 4L, \lambda > \sqrt{2\alpha}$. El valor mínimo de $T_f(\varepsilon)$ es alcanzado por $\varepsilon = \left(\frac{n^{1/4}\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{p+1/2}}$

Demostración. **A.** Consideramos primero que $\text{sgn}(y_i(0))$ es opuesto a $\text{sgn}(x_i(0))$ o $y_i(0) = 0$ para cualquier $i = 1, \dots, n$. Sea $\|x_0\| > \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es una constante dada. De la primera ecuación en (3.8) resulta:

$$\frac{d\|x(t)\|}{dt} \leq -\lambda_2 \|x(t)\|^p, \quad (3.10)$$

tomando en cuenta que $\text{sgn}(y_i(t))$ permanece opuesto a $\text{sgn}(x_i(t))$ para $t > t_0$, mientras $x_i(t) > 0$, $i = 1, \dots, n$, y $\alpha > L$. Aplicando las transformaciones siguiendo la ecuación (3.5) con $\|x(t)\|$ en lugar de $|x(t)|$ y la condición inicial $\|x(t_0)\| = \|x_0\|$, se obtiene que

$$\frac{\|x(t)\|^{1-p}}{1-p} \leq -\lambda_2(t-t_0) + \frac{\|x_0\|^{1-p}}{1-p} \leq \lambda_2(t-t_0)$$

del cual resulta

$$\|x(t)\|^{p-1} \leq \frac{1}{\lambda_2(p-1)(t-t_0)}$$

Por lo tanto, cada $\|x(t)\|$ decrece y alcanza el valor $\|x_i(t)\| = \varepsilon$ para un tiempo $T_1 \leq \frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}}$, el cual corresponde al primer término en (3.9). Notemos que este término de la expresión es independiente de la condición inicial desconocida x_0 . El paso **A** termina cuando $\|x(T_1)\| = \varepsilon > 0$. Si $\|x_0\| \leq \varepsilon$, el paso **A** no es ejecutado; por lo tanto el término $\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}}$ estaría ausente en (3.9).

B. Para $t > T_1$, $|x_i(t)|$, $i = 1, \dots, n$ continúa decreciendo a cero, alcanzando a más tardar en un cierto tiempo T_2 . El último hecho se desprende fácilmente de la forma componente de (3.8)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\leq -\lambda_1 \frac{x_i(t)}{\|x(t)\|^{1/2}} + y_i(t), \\ \dot{y}_i(t) &= -\alpha \frac{x_i(t)}{\|x(t)\|} + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

tomando en cuenta que $\text{sgn}(y_i(t)) = -\text{sgn}(x_i(t))$, $i = 1, \dots, n$ para $t \in [T_1, T_2]$, hasta que $x_i(t)$ empieza a ser igual a cero.

Entonces, de la primera ecuación en (3.8) resulta

$$\frac{d\|x(t)\|}{dt} \leq -\lambda_1 \|x(t)\|^{1/2} \quad (3.11)$$

Resolviendo (3.11) implica que

$$2\|x(t)\|^{1/2} \leq -\lambda_1(t - T_1) + 2\|x(T_1)\|^{1/2} = -\lambda_1(t - T_1) + 2\varepsilon^{1/2}.$$

Por lo tanto, cada $|x_i(t)|$ alcanza el cero por un tiempo $T_2 \leq \frac{2(\sqrt{n\varepsilon})^{1/2}}{\lambda_1}$, el cual corresponde al peor de los caso de $|x_i(T_1)| = \varepsilon$ al comienzo del paso **B**. Esta expresión es igual al segundo término en (3.9).

El paso **B** termina cuando todas las componentes de $x(t)$ ya son iguales a cero o lo cruzaron. El valor $\|t(T_2)\|$ es acotado por $\|y(T_2)\| < K + M(T_2 - t_0) = K + M\left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{1/2}} + \frac{2(\sqrt{n\varepsilon})^{1/2}}{\lambda_1}\right)$ en vista de la segunda ecuación en (3.8).

C. Ahora se considera que $\text{sgn}(y_i(t_0))$ es igual a $\text{sgn}(x_i(t_0))$ al menos para un $i = 1, \dots, n$. Entonces, $x_i(t)$ no puede alcanzar el cero hasta que $\text{sgn}(y_i(t))$ se vuelva opuesto a $\text{sgn}(x_i(t))$, esto es $y_i(t)$ tiene que llegar al cero primero. En vista de la segunda ecuación en (3.8), la convergencia de tiempo de $y_i(t)$ a cero puede

ser estimada desde arriba como $T_3 = \frac{K}{m}$, el cual corresponde al peor de los casos de $|y_i(t_0)| = K$. El término para T_3 , puede ser agregado al tiempo T_2 calculado en el paso **B**.

- D.** La trayectoria del sistema (3.8) empezando en $(0, y(T_2))$ es dominada por la trayectoria del sistema (3.8) empezando en $\left(0, y_2 = K + M \left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2(\sqrt{n\varepsilon})^{1/2}}{\lambda_1} \right)\right)$ y converge mas rápido al origen. Siguiendo la demostración del Teorema 4.5 en [31], el tiempo de convergencia finita para la última trayectoria es calculada como $T_{MSTW} = \frac{\|y_2\|}{(1-q_c)m}$, donde el valor de q_c puede ser estimado usando la relación $q_c = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1}$ obtenida en el Lema 1 de [3]. Sustituyendo el estimado obtenido por $\|y_2\| = \|y(T_2)\|$ y q_c resulta
- $$T_{MSTW} < M \frac{\left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2(\sqrt{n\varepsilon})^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{K}{M} \right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1}\right)m},$$
- el cual corresponde a la forma de los términos anteriores en (3.9). El valor óptimo de ε es determinado de la misma manera que en el Teorema (3.1).

□

Observación 3. El último término en (3.9) puede ser usado para estimar la convergencia de tiempo para el algoritmo multivariable super-twisting (3.7), (3.8), estableciendo $\varepsilon = \|x_0\|$ y $K = \|y_0\|$. La fórmula resultante toma la forma

$$T_{mnf}(x_0) \leq \left(\frac{2(\sqrt{n}\|x_0\|)^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{\|y_0\|}{M} \right) \left(1 + \frac{M}{m(1 - \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1})} \right) + \frac{\sqrt{n}\|y_0\|}{m}, \quad (3.12)$$

A continuación las fórmulas (3.9) y (3.12) son ilustradas en los ejemplos siguientes.

3.3.1 Ejemplo: Caso Multivariable.

Considera un sistema de tipo super-twisting en 3D (3.8), el cual es similar al sistema mostrado en [3]. La fórmula (3.9) es aplicada para calcular la cota superior estimada de convergencia de tiempo fijo usando los siguientes valores de parámetros:

| Parámetros | Valor |
|-------------|---------------|
| p | $\frac{3}{2}$ |
| λ_1 | 5 |
| λ_2 | 5 |
| L | 1 |
| α | 4.5 |

por lo tanto, $M = 5.5$ y $m = 3.5$. Las ganancias del control son seleccionadas para satisfacer las condiciones del Teorema (3.2). El disturbio en 3D es asignado como $\xi(t) = [0.1 \cos(0.5t), -0.3 \sin(t), 0.1 \cos(2t)]$. La cota de K es establecida a $K = 100$. Las condiciones iniciales para cada componente de $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ y $y(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$ y los correspondientes tiempos obtenidos por la simulación son dados en la tabla 3.2. Los valores iniciales para todas las componentes del mismo vector son consideradas igual, esto es, $x_{10} = x_{20} = x_{30}$ y $y_{10} = y_{20} = y_{30}$.

| $y_0 \backslash x_0$ | 10 | 100 | 1000 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | Cota teórica |
|----------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------|
| -100 | 38.62 | 38.735 | 38.776 | 38.82 | 38.82 | 38.82 | 143.72 |
| -50 | 19.45 | 19.58 | 19.62 | 19.64 | 19.64 | 19.64 | 143.72 |
| -10 | 4.28 | 4.4 | 4.44 | 4.46 | 4.46 | 4.46 | 143.72 |
| -5 | 2.48 | 2.6 | 2.64 | 2.65 | 2.65 | 3.65 | 143.72 |
| -1 | 1.08 | 1.2 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 143.72 |
| 1 | 0.62 | 0.7 | 0.725 | 0.74 | 0.74 | 0.74 | 143.72 |
| 5 | 1.91 | 1.91 | 1.91 | 1.91 | 1.91 | 1.91 | 143.72 |
| 10 | 3.82 | 3.82 | 3.82 | 3.82 | 3.82 | 3.82 | 143.72 |
| 50 | 19.25 | 19.25 | 19.25 | 19.25 | 19.25 | 19.25 | 143.72 |
| 100 | 38.51 | 38.51 | 38.51 | 38.51 | 38.51 | 38.51 | 143.72 |

Tabla 3.2: Tiempos obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales para el caso multivariable.

La estimación de convergencia de tiempo fijo dada por (3.8) es $T_f = 143.72$,

mientras que los tiempos reales de convergencia para el sistema (3.8) varían desde $T = 0.74$ para las condiciones iniciales pequeñas hasta $T = 39$ para las condiciones iniciales grandes y siempre acercándose a cierto límite cuando x_0 tiende al infinito. Por lo tanto, similar al caso escalar, el estimado dado por (3.8) es no conservativo y puede ser usado para el tiempo de evaluación en la práctica.

Las siguientes figuras muestran los plano fase de las trayectorias de las componentes por separado del sistema de tipo super twisting (3.8). De la figura 3.7 a la 3.15 corresponden a las condiciones iniciales $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 100, y_{10} = y_{20} = y_{30} = -50$ y las figuras de la 3.16-3.21 corresponden a a las condiciones iniciales $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 100, y_{10} = y_{20} = y_{30} = 50$.

Si se observa detalladamente las gráficas dadas pueden confirmar la convergencia en tiempo finito de todas las variables de estado al origen.

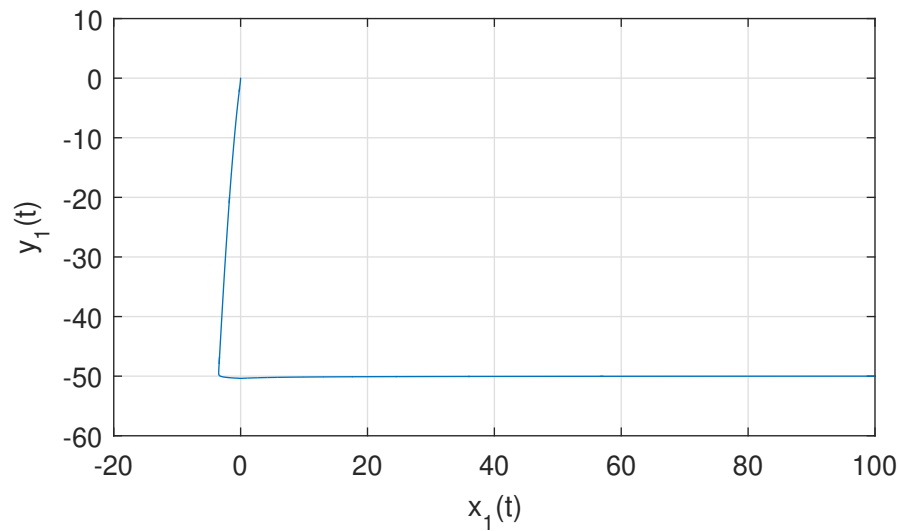


Figura 3.7: Retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$

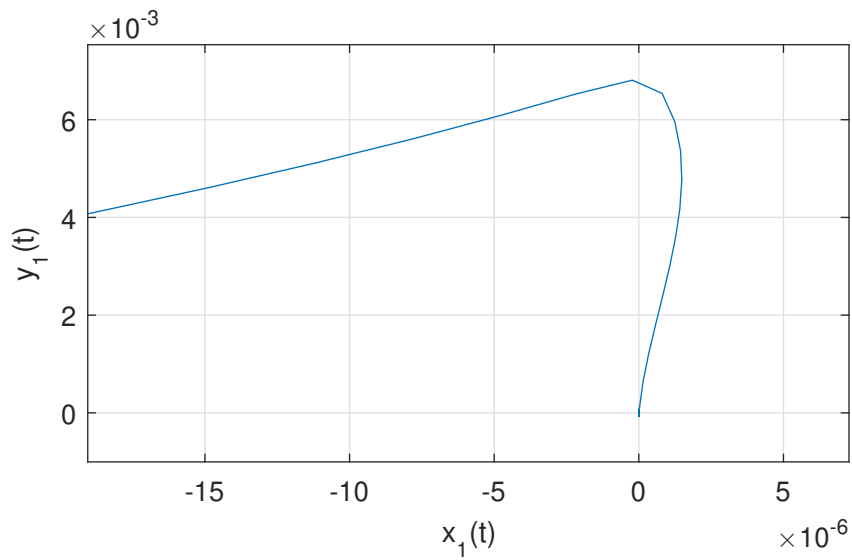


Figura 3.8: Zoom del retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$

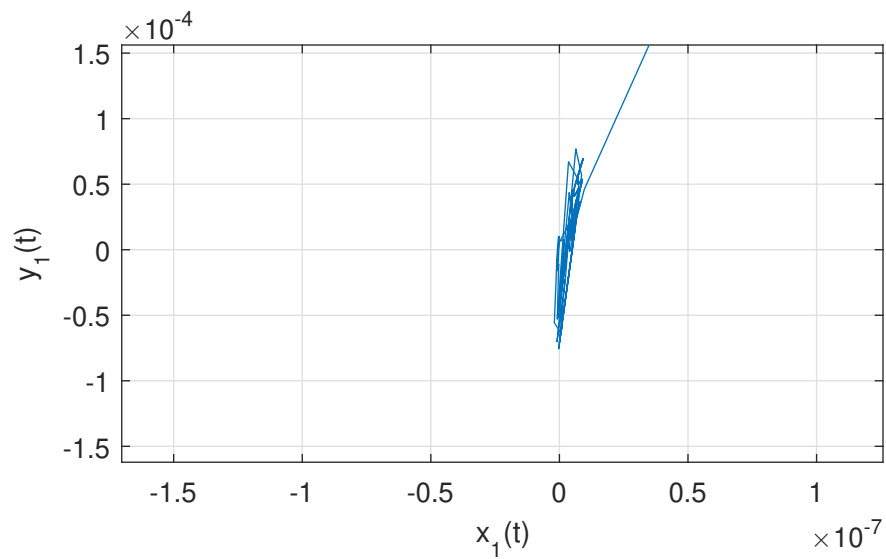


Figura 3.9: Retrato fase detallado de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$

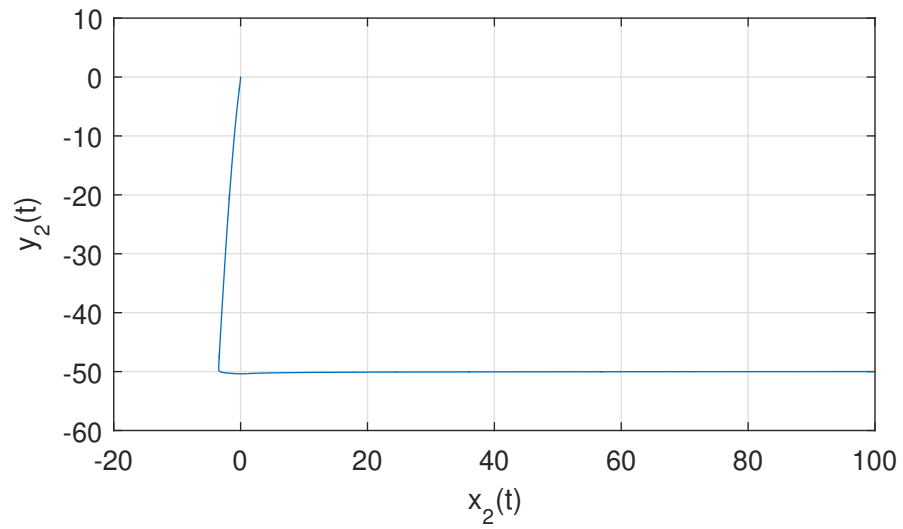


Figura 3.10: Retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100$, $y_{20} = -50$

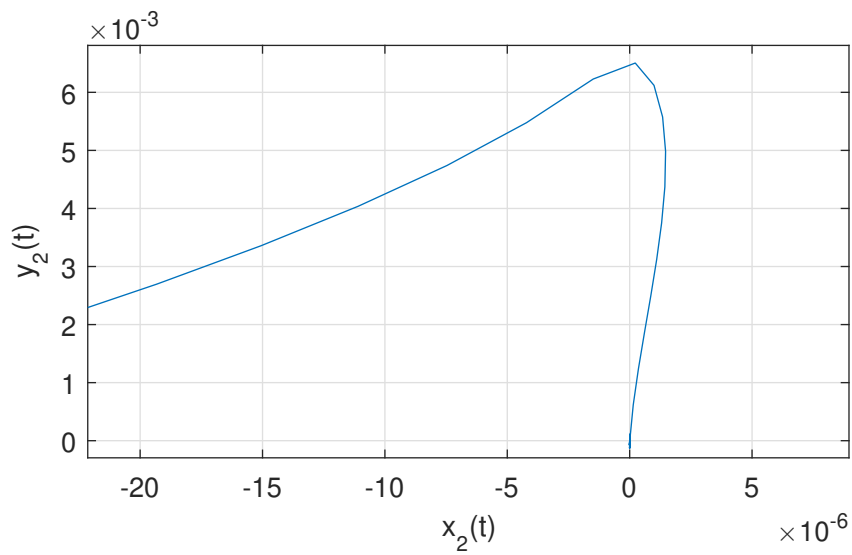


Figura 3.11: Zoom del retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100$, $y_{20} = -50$

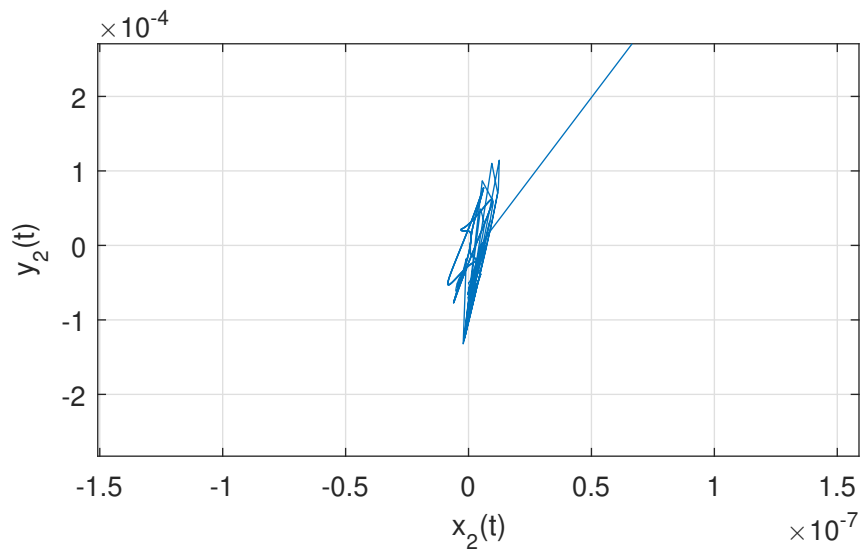


Figura 3.12: Retrato fase detallado de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$

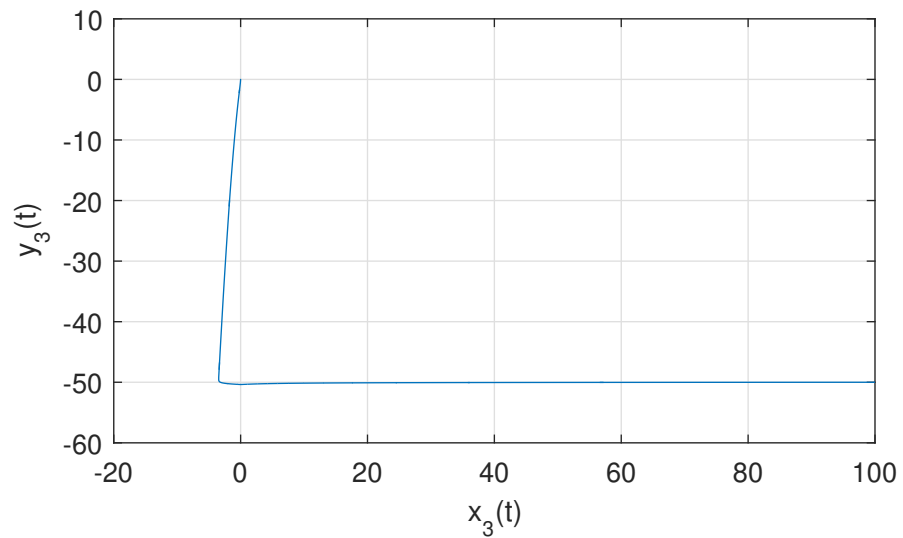


Figura 3.13: Retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$

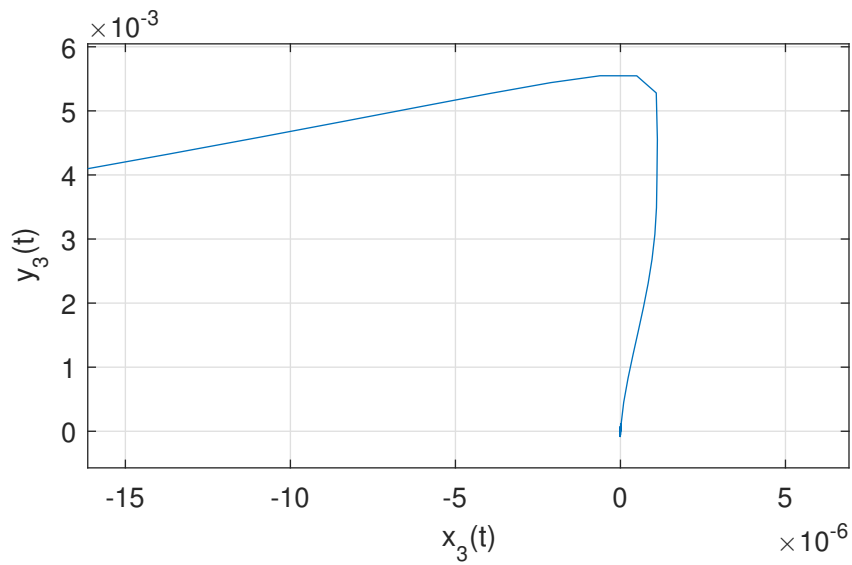


Figura 3.14: Zoom del retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$

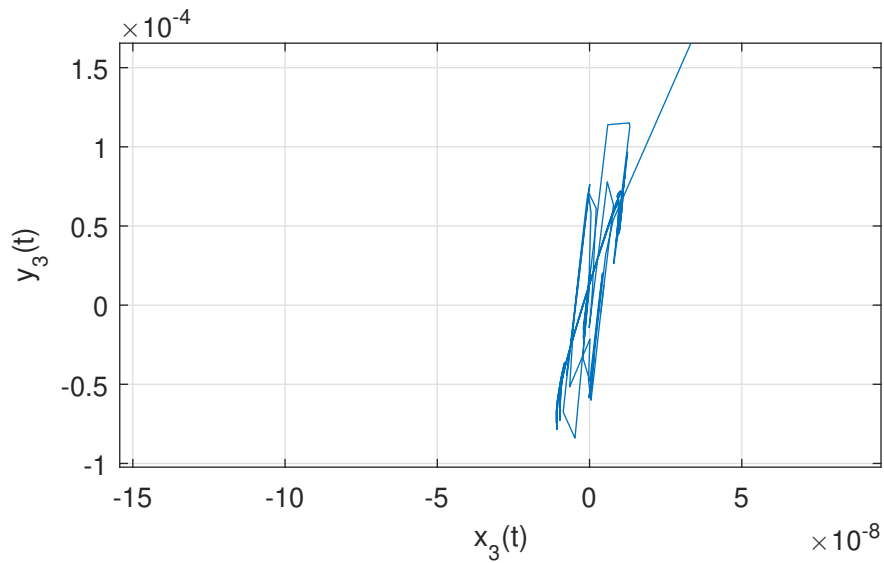


Figura 3.15: Retrato fase detallado de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$

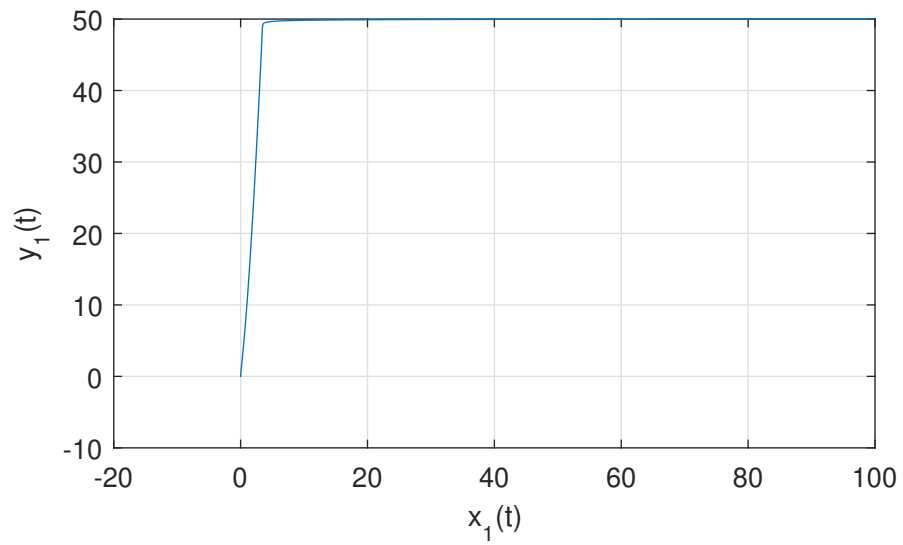


Figura 3.16: Retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100$, $y_{10} = 50$

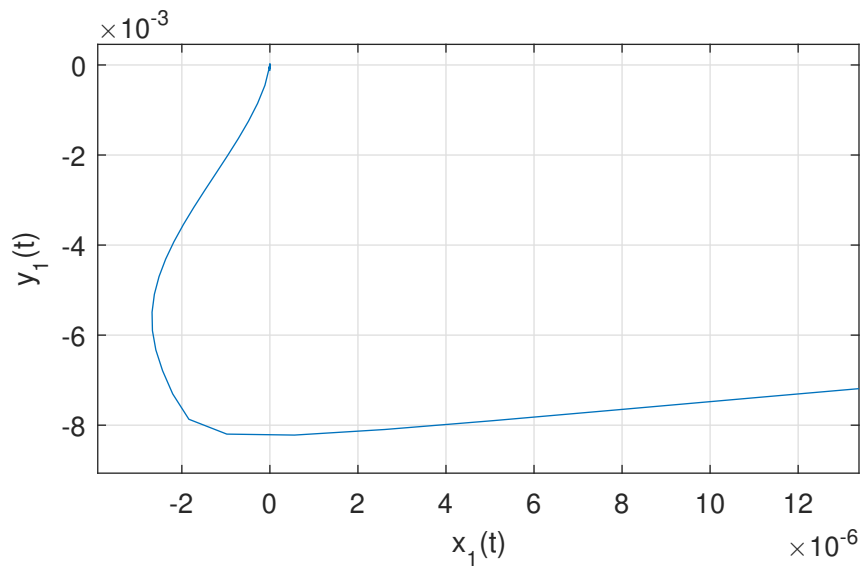


Figura 3.17: Zoom del retrato fase de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100$, $y_{10} = 50$

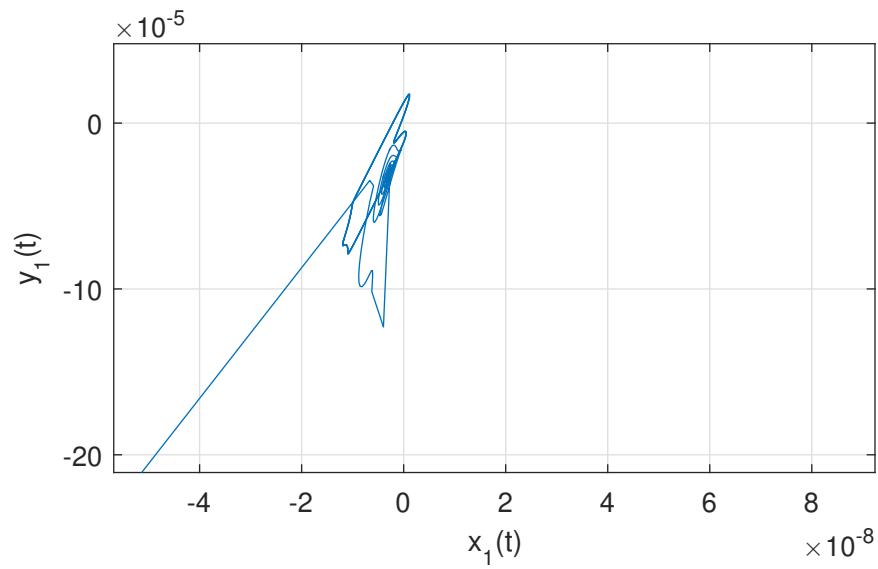


Figura 3.18: Retrato fase detallado de $x_1(t), y_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$

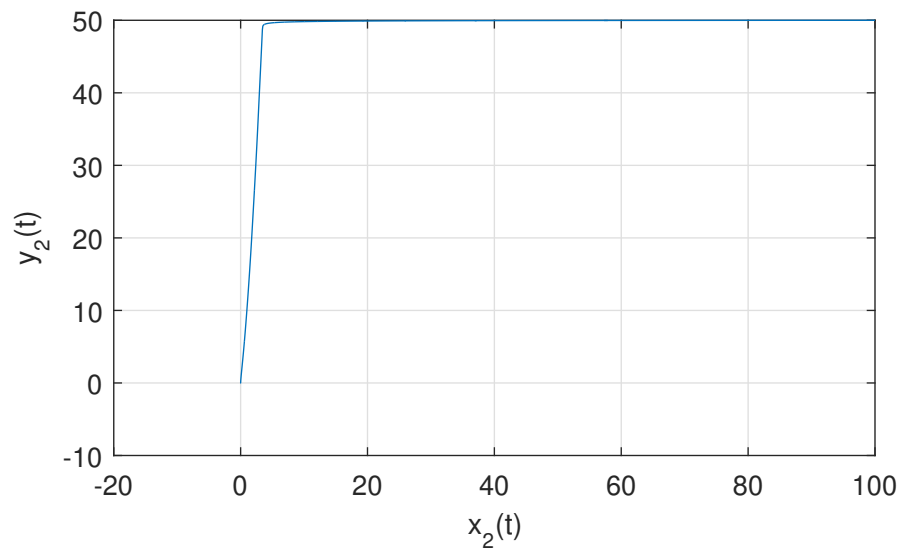


Figura 3.19: Retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$

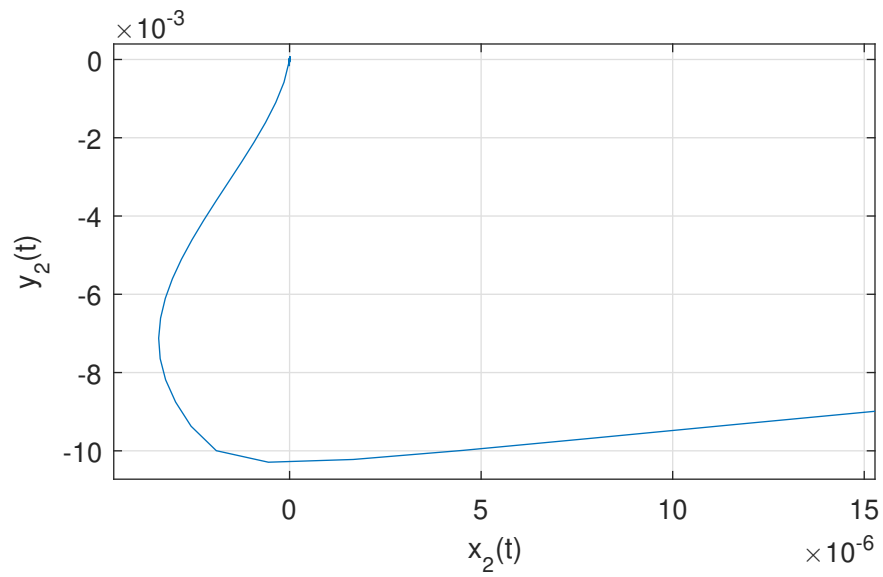


Figura 3.20: Zoom del retrato fase de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$

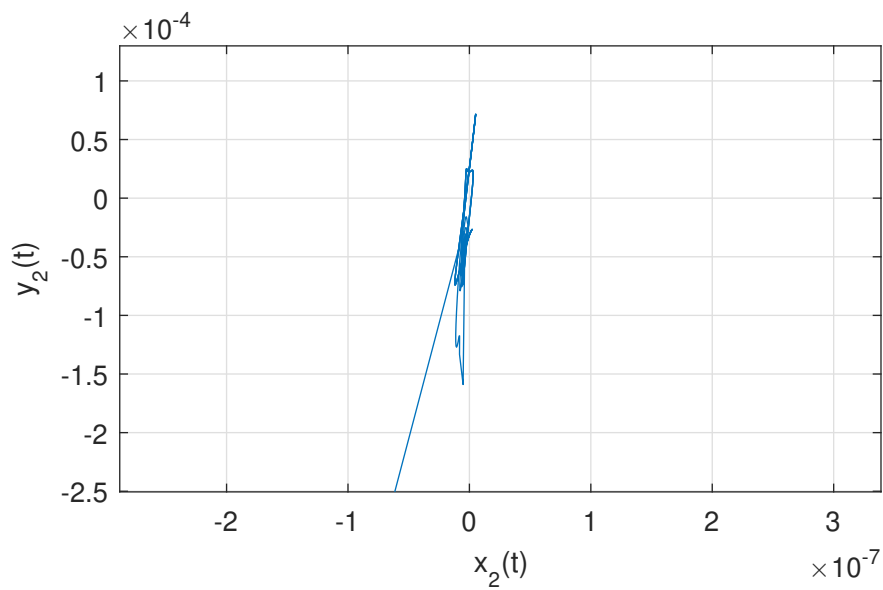


Figura 3.21: Retrato fase detallado de $x_2(t), y_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$

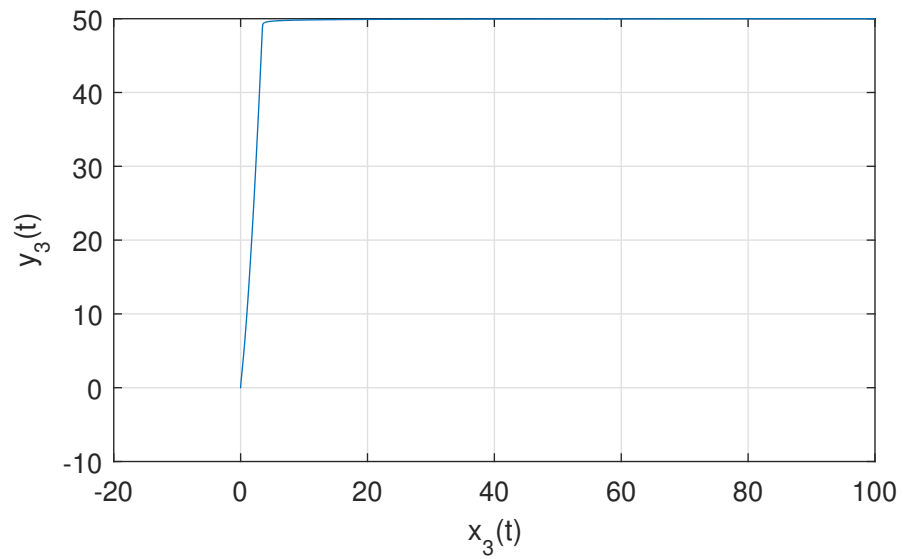


Figura 3.22: Retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100$, $y_{30} = 50$

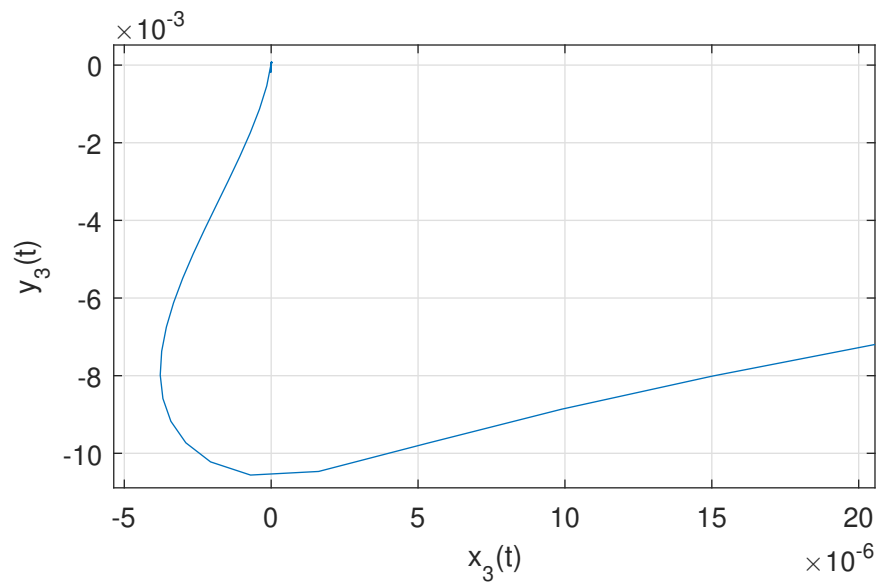


Figura 3.23: Zoom del retrato fase de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100$, $y_{30} = 50$

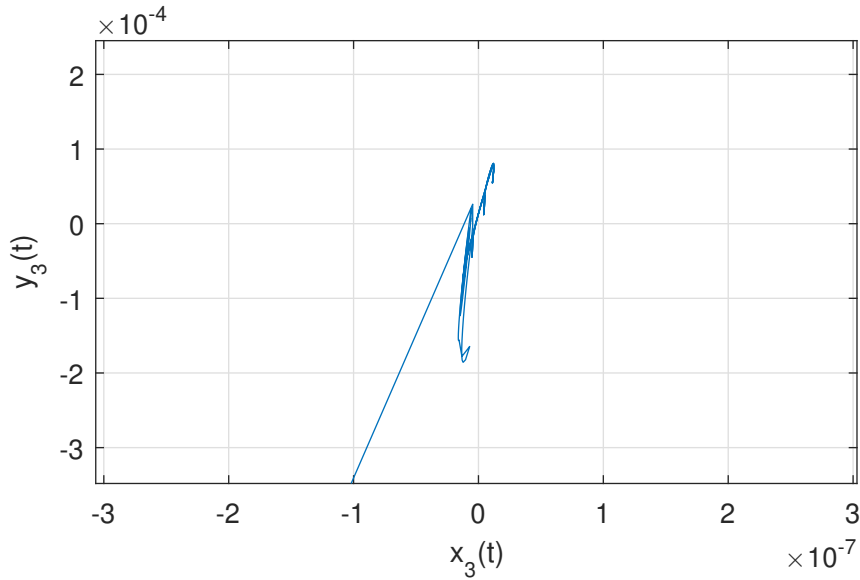


Figura 3.24: Retrato fase detallado de $x_3(t), y_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$

3.4 Diseño de control: Cota desconocida para el valor inicial del disturbio. Caso escalar

En esta sección se asume que no hay una cota disponible K para el valor inicial del disturbio. En este caso, la convergencia de tiempo fijo puede ser alcanzada usando un observador de tiempo fijo para la variable $y(t)$. Consideramos la ley de control (3.2) combinado con el observador de tiempo-fijo

$$\begin{aligned}
 \hat{y} &= z_2(t) + \lambda_1 |z_1(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(z_1(t)) + \lambda_2 |z_1(t)|^p \operatorname{sgn}(z_1(t)), \\
 \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1 |z_1(t) - x(t)|^{\alpha_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - x(t)) - \kappa_1 |z_1(t) - x(t)|^{\beta_1} \operatorname{sgn}(z_1(t) - x(t)) \\
 \dot{z}_2(t) &= -k_2 |z_1(t) - x(t)|^{\alpha_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - x(t)) - \kappa_2 |z_1(t) - x(t)|^{\beta_2} \operatorname{sgn}(z_1(t) - x(t)),
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

$k_1, k_2, \kappa_1, \kappa_2 > 0$.

Los exponentes $\alpha_i = i = 1, 2$, son seleccionadas como $\alpha_i \in (0, 1), i = 1, 2$ satisfaciendo la relación recurrente $\alpha_i = i\alpha - (i - 1), i = 2, \dots, 2$, y $\alpha_1 = \alpha$, donde α pertenece al intervalo $(1 - \varepsilon, 1)$ para un suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$. Los ex-

ponentes $\beta_i, i = 1, \dots, 2$ son seleccionados como $\beta_i > 1, i = 1, \dots, 2$ satisfaciendo la relación recurrente $\beta_i = i\beta - (i - 1), i = 2, \dots, 2$, y $\beta_1 = \beta$, donde β pertenece al intervalo $(1, 1 + \varepsilon_1)$ para un suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$. Las ganancias del control son positivos $k_i > 0, \kappa_i > 0, i = 1, \dots, 2$.

Teorema 3.3. *Considera un sistema dinámico (3.3) combinado con un observador de tiempo fijo (3.13) en presencia del disturbio $\zeta(t)$ satisfaciendo la condición de Lipschitz con la constante L y una condición inicial $y(t_0) = \zeta(t_0)$. Entonces, ambos estados $x(t)$ y $y(t)$ convergen al origen uniformemente en tiempo fijo*

$$T_f \leq \left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{|\hat{y}(T_{BBF})|}{M} \right) \left(1 + \frac{1}{m \left(\frac{1}{M} - \frac{h(\lambda_1)}{\lambda_1} \right)} \right) + \frac{|\hat{y}(T_{BBF})|}{m} + T_{BBF} \quad (3.14)$$

donde $\varepsilon > 0, M = \alpha + L, m = \alpha - L, h(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{2e}{m\lambda_1} \right)^{1/3}$, y e es la base del logaritmo natural, siempre que las condiciones siguientes se cumplan para las ganancias del control: $\alpha > L, \lambda_1 h^{-1}(\lambda_1) > M$. El valor mínimo de $T_f(\varepsilon)$ es alcanzado por $\varepsilon = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{p+1/2}}$.

El parámetro de tiempo T_{BBF} es definido por el observador (3.13) como

$$T_{BBF} = \frac{\lambda_{max}^p(P)}{r\rho} + \frac{1}{r_1\sigma\Upsilon^\sigma}, \quad (3.15)$$

donde $\rho = 1 - \alpha, \sigma = \beta - 1, r = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}, r_1 = \frac{\lambda_{min}(Q_1)}{\lambda_{max}(P_1)}, \Upsilon \leq \lambda_{min}(P_1)$ es un número positivo, la matriz simétrica definida positiva P satisface la ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

$\lambda_{min}(Q) > 0$ es el mínimo eigenvalor de la matriz Q , y $\lambda_{max}(P) > 0$ es el máximo eigenvalor de la matriz P . la matriz simétrica definida positiva P_1 satisface la ecuación de Lyapunov

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1,$$

donde $Q, Q_1 \in R^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas.

Demostración. En acuerdo con el Teorema (3.3) en [5], las variables del observador de tiempo fijo (3.13), $z_1(t)$ y $z_2(t)$ convergen a las variables de estado $x(t)$ y su

derivada $\dot{x}(t)$ para un tiempo fijo no mayor que T_{BBT} dado por (3.15). Por lo tanto $z_1(T_{BBF}) = x(T_{BBF})$ y $z_2(T_{BBF}) = \dot{x}(T_{BBF})$. También, en vista de las ecuaciones (3.3) y (3.13), $\hat{y}(T_{BBF}) = y(T_{BBF})$. Finalmente, la afirmación del teorema se deduce de la fórmula (3.4) en el Teorema (3.1), estableciendo $K = |\hat{y}(T_{BBT})|$. \square

3.4.1 Ejemplo: Caso escalar.

Considera un sistema tipo super twisting dirigido por la ecuación (3.3) con una condición inicial desconocida $y(t_0) = \zeta(t_0)$.

La fórmula (3.14) es aplicada para calcular la cota superior de convergencia de tiempo fijo estimada usando los siguientes valores de parámetros:

| Parámetros | Valor |
|-------------|----------------|
| p | $\frac{3}{2}$ |
| λ_1 | 20 |
| λ_2 | 1 |
| α_1 | $\frac{9}{10}$ |
| β_1 | $\frac{10}{9}$ |
| k_1 | 100 |
| κ_1 | 100 |
| k_2 | 80 |
| κ_2 | 80 |
| L | 2 |
| α | 2.1 |

por lo tanto $M = 4.1$ y $m = 0.1$. Las ganancias del control son seleccionadas para satisfacer las condiciones del Teorema (3.3). El disturbio es asignado como $\xi(t) = -\sin(t) - \cos(10t)$. Las condiciones iniciales tratadas para las variables de estado y los correspondientes tiempos se muestran en la Tabla 3.3. La condición inicial cero es asumida para el observador (3.13). En la tabla 3.3 el primer dato que se da

es el tiempo que se obtuvo en la simulación y el segundo es el tiempo de estimación con (3.14)

| $y_0 \backslash x_0$ | 10 | 100 | 1000 | 10^5 | 10^7 |
|----------------------|--------|--------|--------|---------|---------|
| -100 (Sim) | 49.6 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| -100 (Tf) | 489.91 | 496.38 | 501.53 | 487.65 | 492.275 |
| -50 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 |
| -50 | 28.54 | 28.54 | 28.562 | 28.591 | 28.562 |
| -10 | 7.8 | 7.8 | 10.5 | 15.4 | 17.8 |
| -10 | 28.562 | 28.562 | 28.562 | 28.562 | 28.562 |
| -5 | 4.8 | 7.2 | 10.3 | 15.5 | 17.75 |
| -5 | 28.665 | 28.665 | 28.665 | 28.681 | 28.681 |
| -1 | 6.5 | 7.2 | 10.4 | 16.5 | 18.2 |
| -1 | 28.565 | 28.565 | 28.565 | 28.565 | 28.565 |
| 1 | 5 | 6.3 | 10.3 | 15.6 | 18 |
| 1 | 28.674 | 27.674 | 27.674 | 27.674 | 27.674 |
| 5 | 5.5 | 9.2 | 10.3 | 15.35 | 18.6 |
| 5 | 28.645 | 28.645 | 28.645 | 28.645 | 28.645 |
| 10 | 5.6 | 6.8 | 10.3 | 16.2 | 18.55 |
| 10 | 28.542 | 28.542 | 28.655 | 28.655 | 28.665 |
| 50 | 25.5 | 25.8 | 24.5 | 26 | 31.5 |
| 50 | 28.7 | 28.7 | 28.7 | 28.7 | 78.993 |
| 100 | 49 | 49 | 49 | 49 | 49 |
| 100 | 459.36 | 459.36 | 459.36 | 477.875 | 52.67 |

Tabla 3.3: Tiempos obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales para el caso escalar con observador.

Con respecto a la tabla 3.3 se puede observar que la razón entre el tiempo de convergencia estimado dado por (3.14) y la convergencia de tiempo real para el sistema (3.3) varían desde 1.5 para las condiciones pequeñas hasta 10 para condiciones iniciales grandes. Por lo tanto, es estimado dado por (3.14) aproxima los tiempos reales

de convergencia mejor que el estimado dado por (3.4) y también puede ser usado para la evaluación práctica del tiempo.

Las figuras que se encuentran después de la tabla 3.3 muestran las historias de tiempo de las trayectorias del sistema tipo super-twisting (3.3) y sus estimaciones producidas por el observador de tiempo fijo (3.13). Las figuras 3.25-3.26 corresponden a las historias de tiempo con las condiciones iniciales $x_0 = 100$, $y_0 = 50$ y de las figuras 3.27-3.28 corresponden a las condiciones iniciales $x_0 = 100$, $y_0 = -50$. Las gráficas dadas visualmente confirman la convergencia en tiempo finito de las variables de estado y sus estimados al origen. Finalmente, notamos también que el comportamiento de las trayectorias de estado que corresponden a las condiciones iniciales opuestas e iguales, son muy consistentes con los casos **A** y **C** en la demostración del Teorema (3.1).

Observación 4. Note que la cota superior de tiempo de convergencia (3.14) y (3.17) no se pueden determinar en un momento de tiempo inicial t_0 : se basan en el valor de la estimación de $\hat{y}(T_{BBF})$ en el tiempo T_{BBF} . el cual no puede ser calculado a priori. Esto presenta una cierta desventaja del método propuesto, que sin embargo es consistente con el hecho de que el valor del disturbio $\zeta(t)$ es desconocido en el momento del tiempo inicial y no puede ser estimado hasta el tiempo T_{BBF} , cuando la estimación $\hat{y}(t)$ ciertamente converge a $y(t)$.

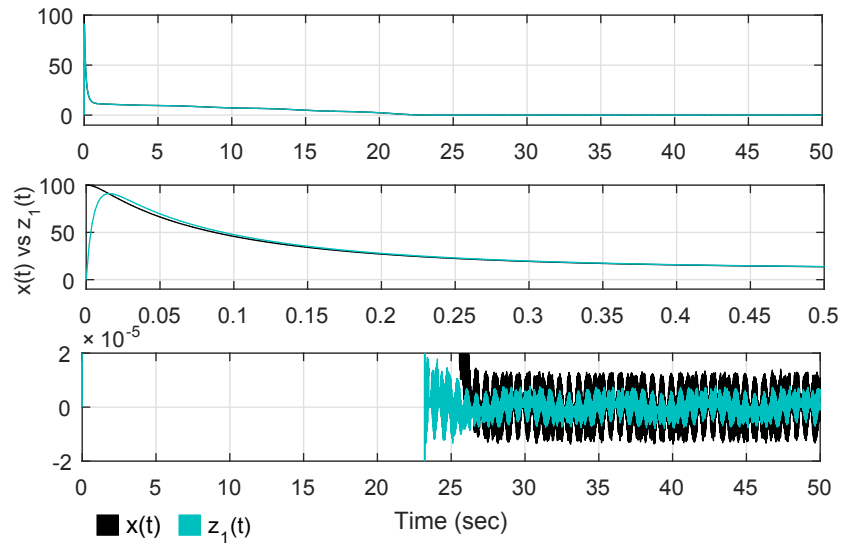


Figura 3.25: Historias de tiempo de $x(t)$ y su estimado $z_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$

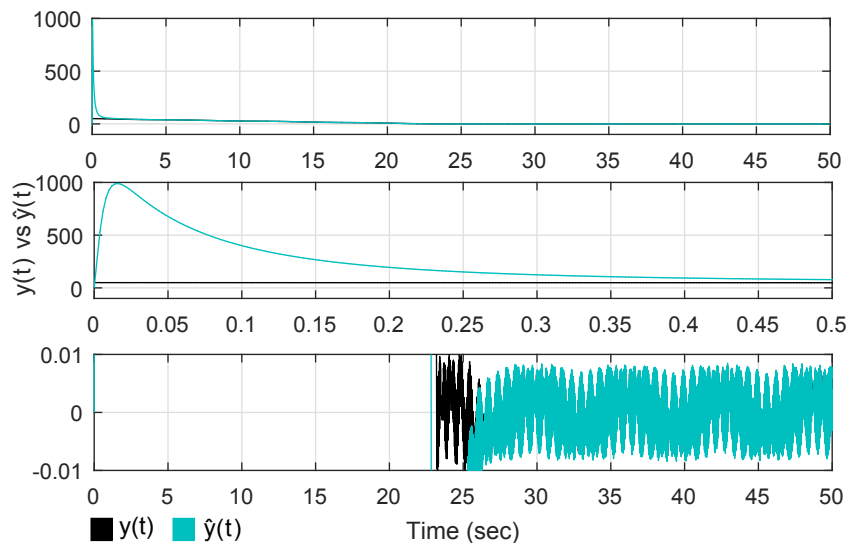


Figura 3.26: Historias de tiempo de $y(t)$ y su estimado $\hat{y}(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = 50$

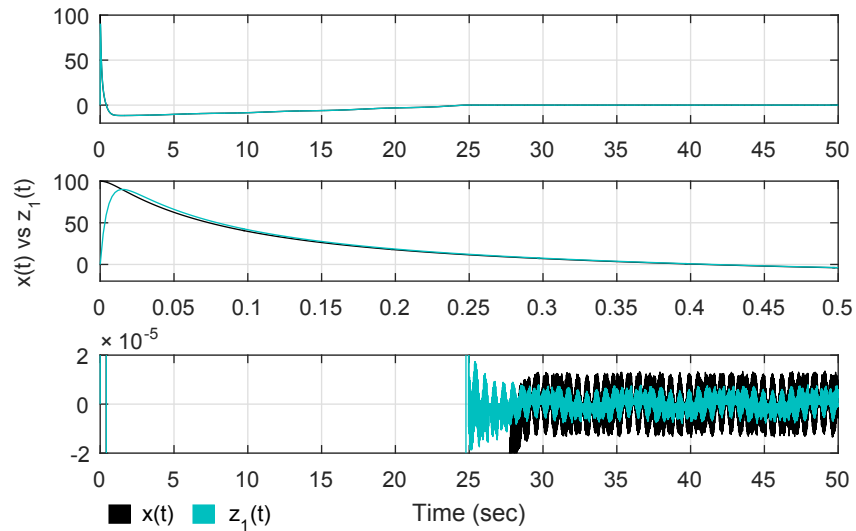


Figura 3.27: Historias de tiempo de $x(t)$ y su estimado $z_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$

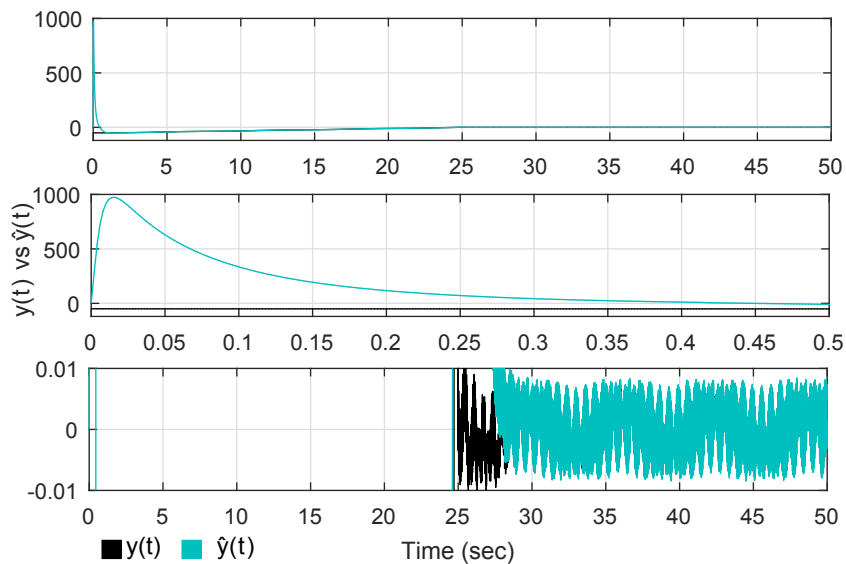


Figura 3.28: Historias de tiempo de $y(t)$ y su estimado $\hat{y}(t)$ para las condiciones iniciales $x_0 = 100, y_0 = -50$

3.5 Diseño de control: Cota desconocida para el valor inicial del disturbio. Caso multivariable

El resultado obtenido del caso anterior en escalar puede ser generalizado para el caso multivariable como sigue. Consideremos la ley de control (3.7) combinado con el observador de tiempo fijo.

$$\begin{aligned}\hat{y} &= z_2(t) + \lambda_1 \frac{z_1(t)}{\|z_1(t)\|^{1/2}} + \lambda_2 z_1(t) \|z_1(t)\|^{p-1}, \\ \dot{z}_1(t) &= z_2(t) - k_1 \frac{z_1(t) - x(t)}{\|z_1(t) - x(t)\|^{1-\alpha_1}} - \kappa_1 (z_1(t) - x(t)) \|z_1(t) - x(t)\|^{\beta_1-1}, \\ \dot{z}_2(t) &= -k_2 \frac{z_1(t) - x(t)}{\|z_1(t) - x(t)\|^{1-\alpha_2}} - \kappa_2 (z_1(t) - x(t)) \|z_1(t) - x(t)\|^{\beta_2-1},\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$k_1, k_2, \kappa_1, \kappa_2 > 0$$

Entonces, el siguiente teorema se cumple.

Teorema 3.4. *Consideremos un sistema dinámico (3.8) combinado con un observador de tiempo fijo (3.16) en la presencia de un disturbio $\xi(t)$ acotado por una constante L . Entonces, ambos estados $x(t)$ y $y(t)$ convergen al origen uniformemente en un tiempo fijo*

$$T_{mf} < \left(\frac{1}{\lambda_2(p-1)\varepsilon^{p-1}} + \frac{2(\sqrt{n}\varepsilon)^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{\|\hat{y}(T_{BBF})\|}{M} \right) \left(1 + \frac{M}{m(1 - \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1})} \right) + \frac{\sqrt{n}\|\hat{y}(T_{BBF})\|}{m} + T_{BBF}, \quad (3.17)$$

donde $\varepsilon > 0$, $M = \alpha + L$, $m = \alpha - L$, siempre que las siguientes condiciones para las ganancias del control se cumplan: $\alpha > 4L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$. El mínimo valor de $T_f(\varepsilon)$ es alcanzado por $\varepsilon = \left(\frac{n^{1/4}\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{p+1/2}}$. El parámetro de tiempo T_{BBF} es definido por (3.15).

Demostración. En acuerdo con el Teorema 3 en [5], las variables del observador de tiempo fijo (3.16), $z_1(t)$ y $z_2(t)$ convergen a la variable de estado $x(t)$ y su derivada $\dot{x}(t)$ para un tiempo fijo no mayor que T_{BBF} dado por (3.15). Por lo tanto $z_1(T_{BBF}) =$

$x(T_{BBF})$ y $z_2(T_{BBF}) = \dot{x}(T_{BBF})$. También, en vista de las ecuaciones (3.8) y (3.16) , $\hat{y}(T_{BBF}) = y(T_{BBF})$. Finalmente, la afirmación del teorema se deduce de la fórmula (3.12) en el Teorema 2, estableciendo $K = \|\hat{y}(T_{BBT})\|$. \square

Para este teorema se hace la misma observación 4.

3.5.1 Ejemplo: Caso multivariable.

Consideremos un sistema de tipo super twisting dirigido por las ecuaciones (3.8) con una condición inicial desconocida $y(t_0) = \zeta(t_0)$. La fórmula (3.17) es aplicada para calcular la estimación de la cota superior de convergencia de tiempo fijo usando los siguientes valores de parámetros:

| Parámetros | Valor |
|-------------|----------------|
| p | $\frac{3}{2}$ |
| λ_1 | 3 |
| λ_2 | 3 |
| α_1 | $\frac{9}{10}$ |
| β_1 | $\frac{10}{9}$ |
| k_1 | 100 |
| κ_1 | 100 |
| k_2 | 80 |
| κ_2 | 80 |
| L | 0.7 |
| α | 2.81 |

por lo tanto $M = 3.51$ y $m = 2.11$. Las ganancias del control son seleccionadas para satisfacer las condiciones del teorema (3.4). El disturbio en 3D es asignado como $\xi(t) = [0.1 \cos(0.5t), -0.3 \sin(t), 0.1 \cos(2t)]$. Las condiciones iniciales para cada

componente de $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ y $y(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$ y sus correspondientes tiempos obtenidos por la simulación están dados en la tabla 3.4. Los valores iniciales para todas las componentes del mismo vector son consideradas iguales, esto es: $x_{10} = x_{20} = x_{30}$ y $y_{10} = y_{20} = y_{30}$. La condición inicial cero es asumida para el observador (3.17).

En la tabla 3.4 el primer dato que se da es el tiempo que se obtuvo en la simulación y el segundo es el tiempo de estimación con la fórmula (3.17). Se puede observar que la razón entre la estimación de tiempo de convergencia dado por (3.17) y la convergencia real de tiempo para el sistema (3.8) varía de 1 a 1.8. Por lo tanto, la estimación dada en (3.17) proporciona una mejor aproximación de tiempo de convergencia que el que fue registrado en las simulaciones previas por medio de la asignación apropiada del observador y las ganancias del control.

Las siguientes figuras muestran las historias de tiempo de las trayectorias de las componentes por separado del vector $x(t)$ del sistema de tipo super-twisting (3.8) y su estimación producida por el observador de tiempo fijo (3.17). De la figura 3.29-3.34 se muestra la historias de tiempo para las condiciones iniciales $x_{i0} = 100, y_{i0} = 50$ para $i = 1, 2, 3$ y de la figura 3.34-3.40 se tratan las condiciones iniciales $x_{i0} = 100, y_{i0} = -50$ para $i = 1, 2, 3$.

| $y_0 \backslash x_0$ | 10 | 100 | 1000 | 10^5 | 10^7 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -100 (Sim) | 68 | 68 | 68 | 68 | 68 |
| -100 (Tf) | 370.09 | 370.57 | 369.21 | 370.22 | 370.10 |
| -50 | 38 | 38 | 38 | 38 | 38 |
| -50 | 79.56 | 80.97 | 81 | 77.86 | 77.9 |
| -10 | 14 | 14 | 14 | 17 | 20 |
| -10 | 40.99 | 40.99 | 41 | 41 | 41 |
| -5 | 14 | 11.5 | 12.5 | 17 | 23 |
| -5 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 |
| -1 | 5.5 | 8.5 | 14.6 | 17.5 | 20.5 |
| -1 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 |
| 1 | 7.4 | 17 | 13.4 | 16 | 20 |
| 1 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 |
| 5 | 14 | 8.4 | 14 | 16 | 21.5 |
| 5 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 |
| 10 | 11.8 | 11.8 | 14.8 | 17 | 19 |
| 10 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 |
| 50 | 37 | 37 | 37 | 37 | 40.5 |
| 50 | 76.35 | 76.35 | 76.35 | 81.12 | 114.89 |
| 100 | 68 | 68 | 68 | 68 | 71.5 |
| 100 | 367.72 | 368.36 | 368.33 | 371.25 | 395.15 |

Tabla 3.4: Tiempos obtenidos en las simulaciones con distintas condiciones iniciales para el caso multivariable con observador.

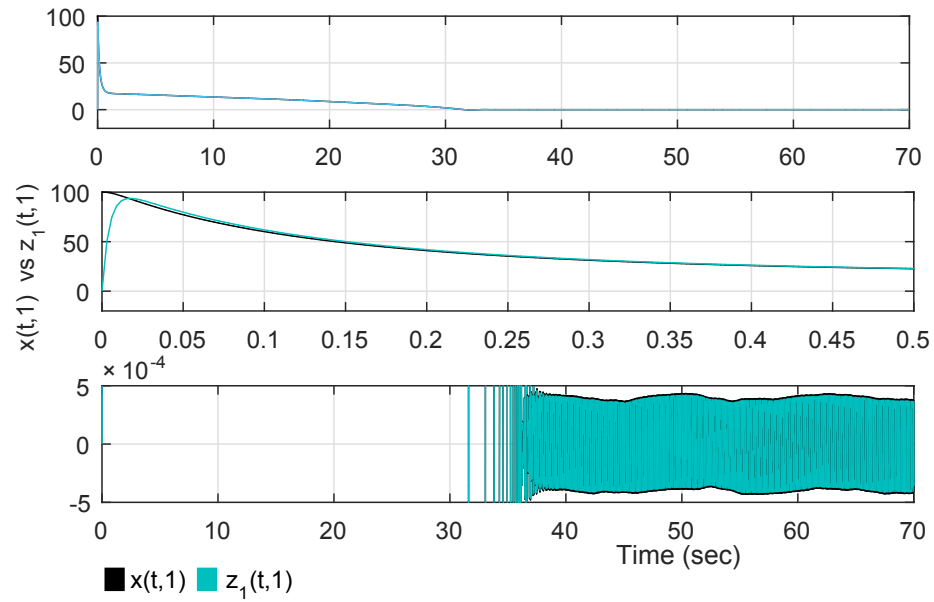


Figura 3.29: Historias de tiempo de $x_1(t)$ y su estimado $z_{11}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$

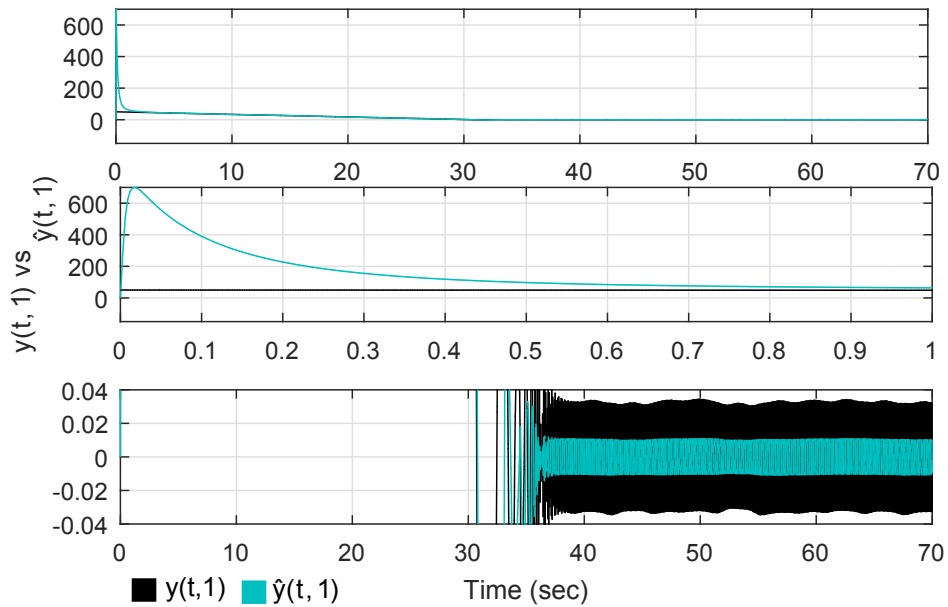


Figura 3.30: Historias de tiempo de $y_1(t)$ y su estimado $\hat{y}_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = 50$

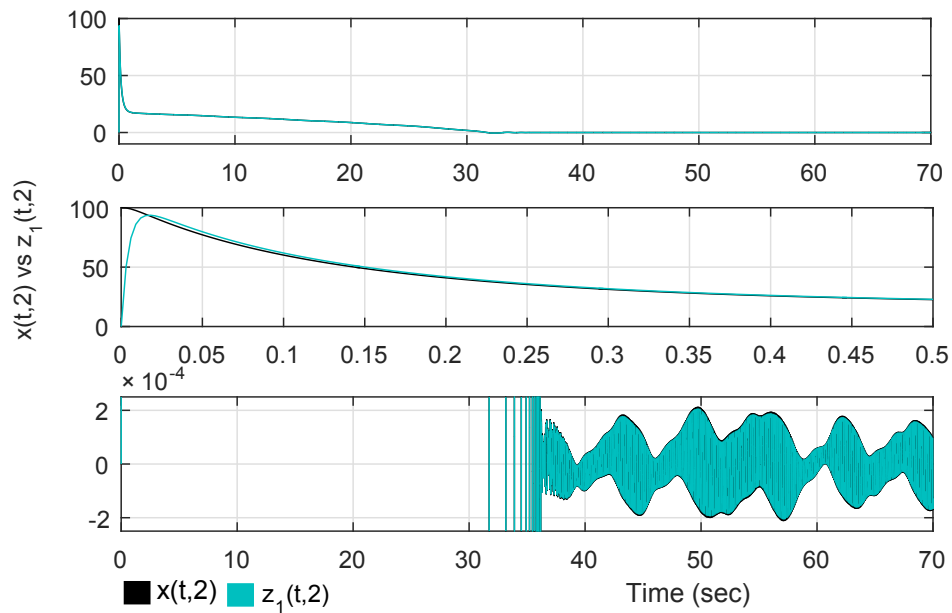


Figura 3.31: Historias de tiempo de $x_2(t)$ y su estimado $z_{12}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$

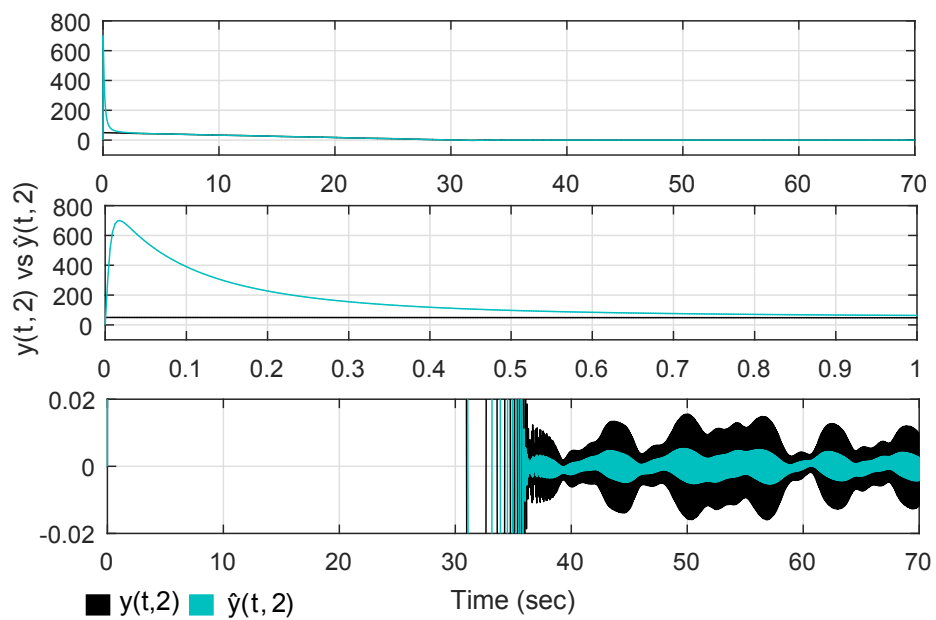


Figura 3.32: Historias de tiempo de $y_2(t)$ y su estimado $\hat{y}_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = 50$

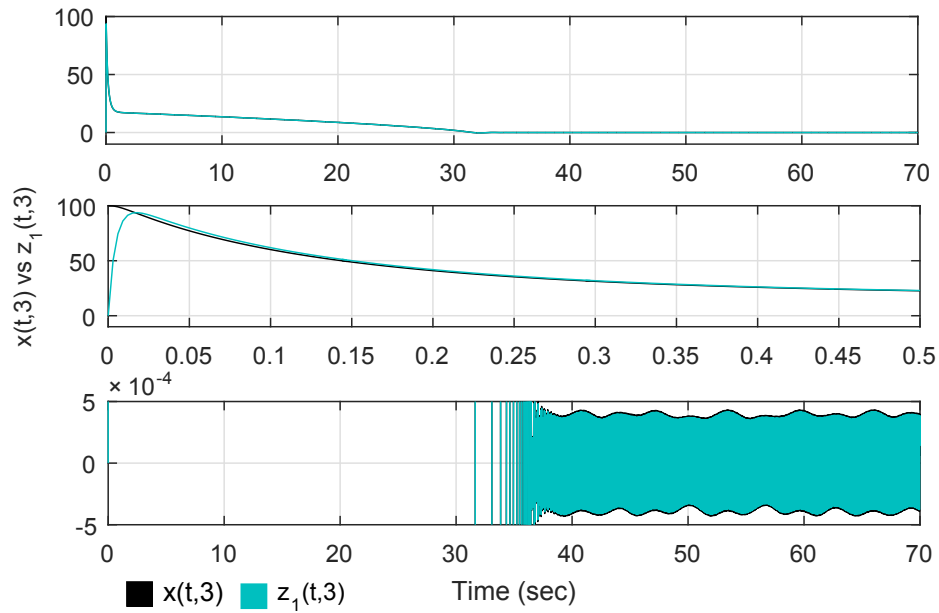


Figura 3.33: Historias de tiempo de $x_3(t)$ y su estimado $z_{13}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$

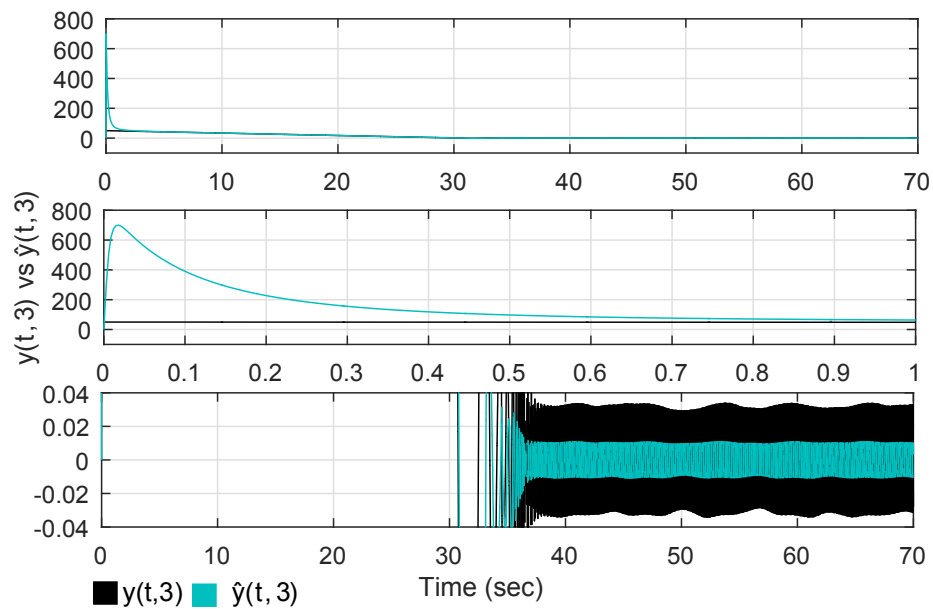


Figura 3.34: Historias de tiempo de $y_3(t)$ y su estimado $\hat{y}_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = 50$

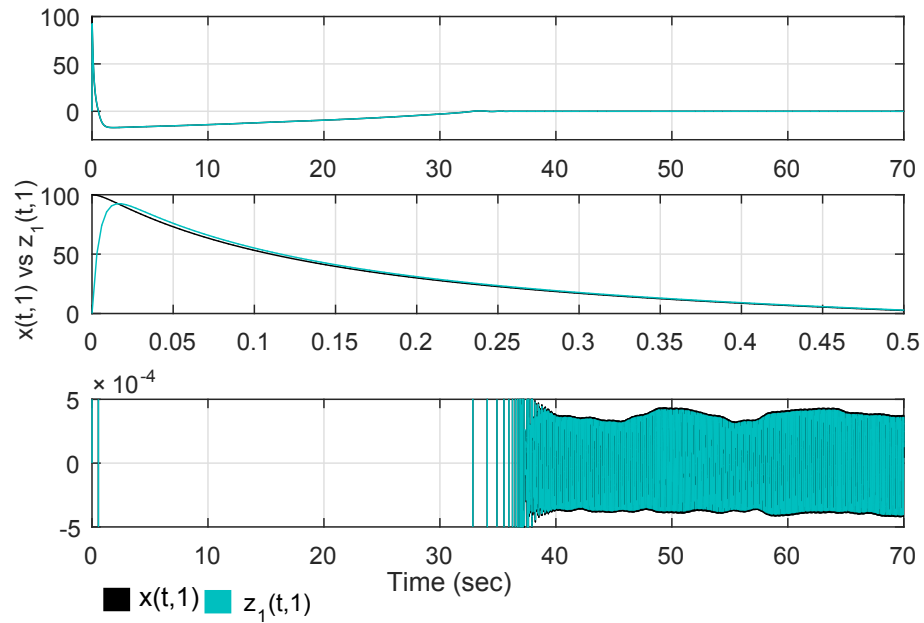


Figura 3.35: Historias de tiempo de $x_1(t)$ y su estimado $z_{11}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$

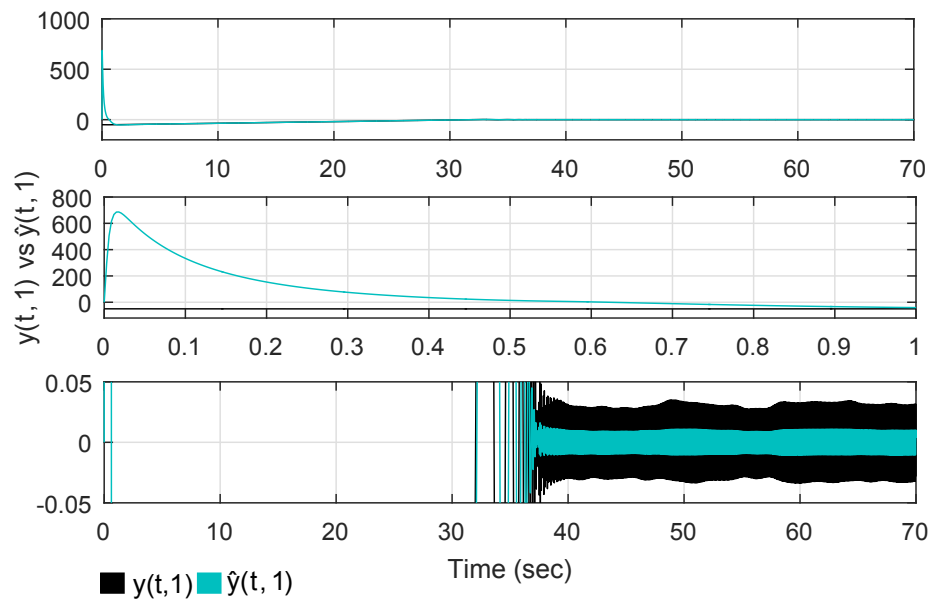


Figura 3.36: Historias de tiempo de $y_1(t)$ y su estimado $\hat{y}_1(t)$ para las condiciones iniciales $x_{10} = 100, y_{10} = -50$

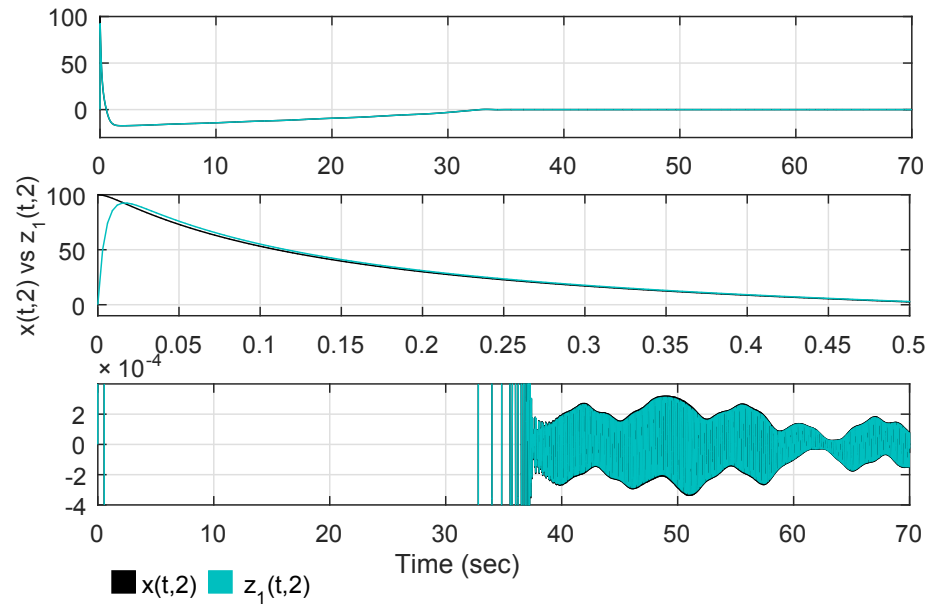


Figura 3.37: Historias de tiempo de $x_2(t)$ y su estimado $z_{12}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$

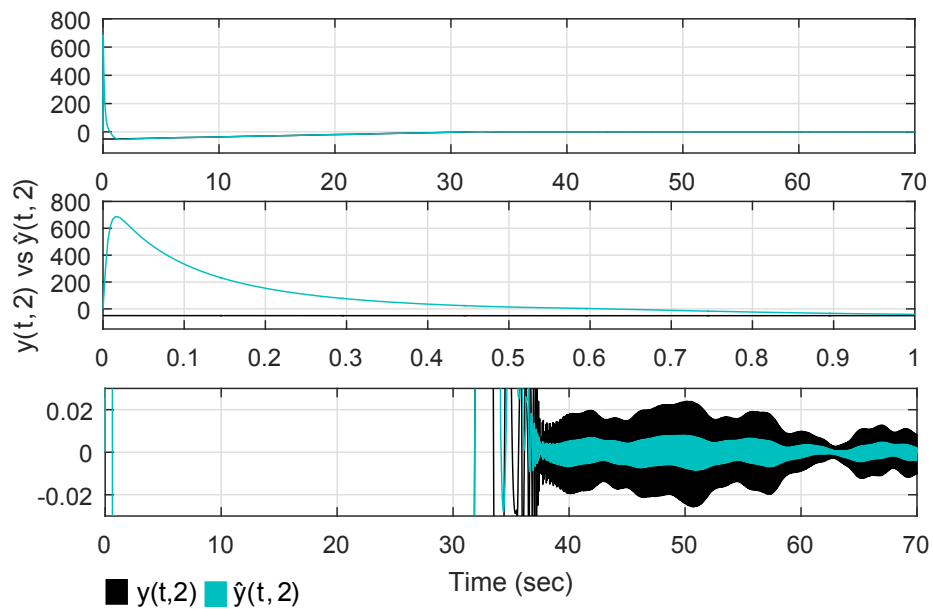


Figura 3.38: Historias de tiempo de $y_2(t)$ y su estimado $\hat{y}_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_{20} = 100, y_{20} = -50$

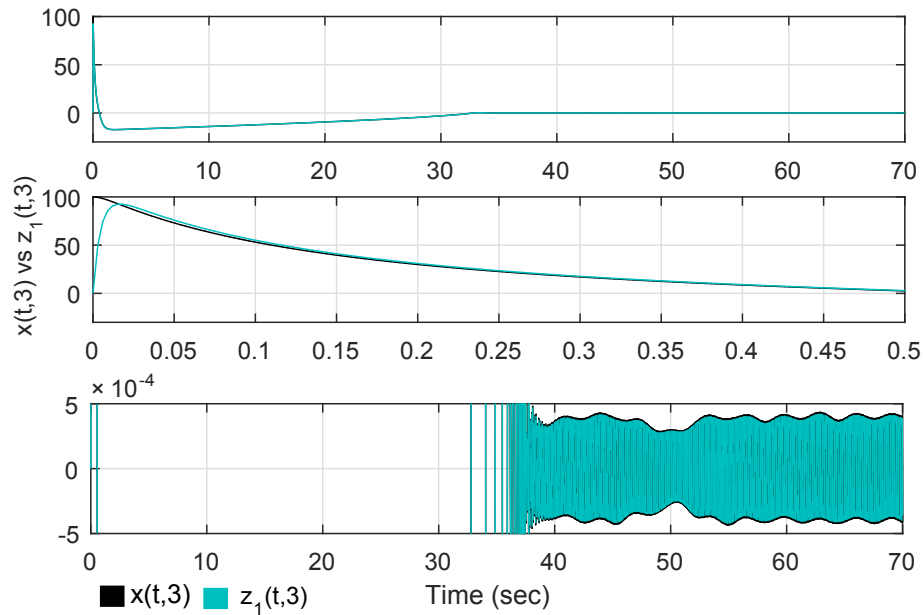


Figura 3.39: Historias de tiempo de $x_3(t)$ y su estimado $z_{13}(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$

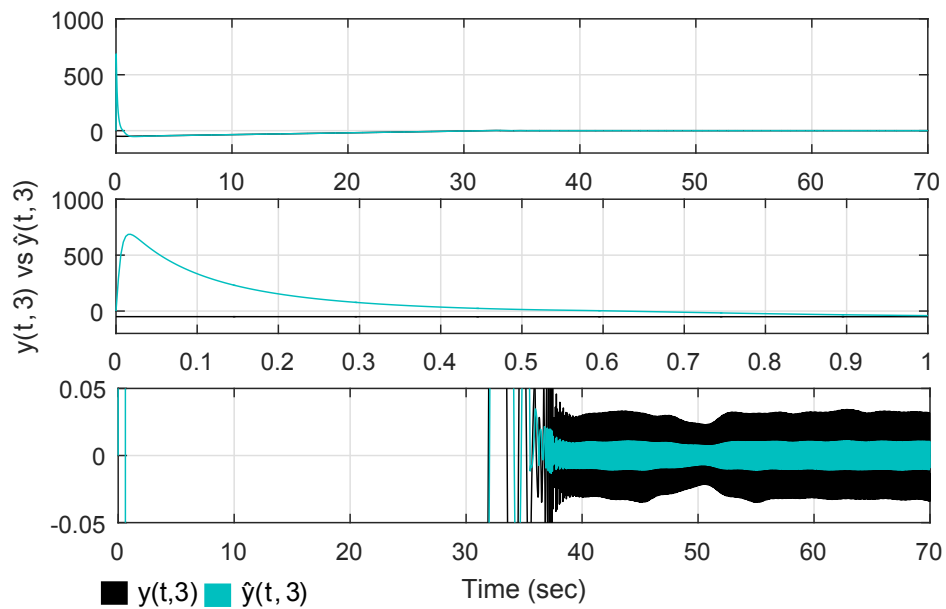


Figura 3.40: Historias de tiempo de $y_3(t)$ y su estimado $\hat{y}_3(t)$ para las condiciones iniciales $x_{30} = 100, y_{30} = -50$

Como se puede ver las gráficas dadas visualmente confirman la convergencia en tiempo fijo al origen para las variables de estado y sus estimados.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un algoritmo de control convergente en tiempo fijo para un sistema multivariable de tipo super-twisting, cuya condición inicial del estado es desconocida y la condición inicial del disturbio es acotada por una constante conocida o incluso desconocida. Se propuso una fórmula explícita para calcular una estimación de la cota superior del tiempo fijo de convergencia al origen de los estados del sistema en lazo cerrado en caso escalar y multivariable. Los resultados obtenidos en las simulaciones demuestran la aproximación cercana de la cota estimada a los tiempos reales de convergencia y su no conservatividad en ambos casos, escalar y multivariable.

Las historias de tiempo mostradas también confirman el comportamiento de las variables de estado del sistema de tipo super-twisting, el cuál es teóricamente predicho en las demostraciones de los teoremas. La investigación en curso se centra en el diseño de algoritmos de control adaptivo para sistemas super-twisting con condiciones iniciales de estado y de disturbio desconocidas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008.
- [2] K. J. Aström and R. M. Murray. *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press, 2010.
- [3] M. Basin, C. B. Panathula, and Y. Shtessel. Multivariable continuous fixed-time second-order sliding mode control: design and convergence time estimation. *IET Control Theory & Applications*, 11(8):1104–1111, 2016.
- [4] M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, and A. Garza-Alonso. Continuous fixed-time convergent super-twisting algorithm in case of unknown state and disturbance initial conditions. *Asian Journal of Control*, 21(1):323–338, 2019.
- [5] M. Basin, P. Yu, and Y. Shtessel. Finite-and fixed-time differentiators utilising HOSM techniques. *IET Control Theory & Applications*, 11(8):1144–1152, 2016.
- [6] S. P. Bhat and D. S Bernstein. Finite-time stability of homogeneous systems. In *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, vol.4, pp. 2513–2514. IEEE, 1997.
- [7] S. P Bhat and D. S Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000.

-
- [8] S. P. Bhat and D. S Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17(2):101–127, 2005.
- [9] E. Cruz-Zavala, J. A Moreno, and L. M Fridman. Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11):2727–2733, 2011.
- [10] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [11] L. Fridman, A. Levant, et al. Higher order sliding modes. In W. Perruquetti, J.P. Barbot. *Sliding Mode Control in Engineering*, pp. 53–102, 2002.
- [12] H. K. Khalil and J.W. Grizzle. *Nonlinear systems*. Prentice, Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [13] Liang W. Liaw H. C. Lau, J. Y. and K. K. Tan. Sliding mode disturbance observer based motion control for a piezoelectric actuator based surgical device. *Asian Journal of Control*, 20(3):1194–1203, 2018.
- [14] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [15] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [16] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):924–941, 2003.
- [17] H. Li, H. Gao, P. Shi, and X. Zhao. Fault-tolerant control of Markovian jump stochastic systems via the augmented sliding mode observer approach. *Automatica*, 50(7):1825–1834, 2014.
- [18] H. Li, P. Shi, D. Yao, and L. Wu. Observer-based adaptive sliding mode control for nonlinear Markovian jump systems. *Automatica*, 64:133–142, 2016.

-
- [19] H. Li, J. Wang, H. Du, and H. R. Karimi. Adaptive sliding mode control for Takagi–Sugeno fuzzy systems and its applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(2):531–542, 2018.
- [20] J. Liu, S. Vazquez, L. Wu, A. Marquez, H. Gao, and L. G. Franquelo. Extended state observer-based sliding-mode control for three-phase power converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(1):22–31, 2016.
- [21] K. Lu and Y. Xia. Finite-time attitude stabilization for rigid spacecraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(1):32–51, 2015.
- [22] D. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596–602, 1971.
- [23] M. M. Mardani, N. Vafamand, M. Shokrian Z., M. Shasadeghi, and A. Khayatian. Sum-of-squares-based finite-time adaptive sliding mode control of uncertain polynomial systems with input nonlinearities. *Asian Journal of Control*, 20(4):1658–1662, 2018.
- [24] I. Nagesh and C. Edwards. A multivariable super-twisting sliding mode approach. *Automatica*, 50(3):984–988, 2014.
- [25] W. Perruquetti, T. Floquet, and E. Moulay. Finite-time observers: Application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(1):356–360, 2008.
- [26] A. Polyakov. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8):2106–2110, 2012.
- [27] A. Polyakov and L. Fridman. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1831–1865, 2014.

-
- [28] A. Polyakov and A. Poznyak. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: Twisting controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45(2):444–448, 2009.
- [29] A. Polyakov and A. Poznyak. Reaching time estimation for super-twisting second order sliding mode controller via Lyapunov function designing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(8):1951–1955, 2009.
- [30] J. J. Rath, M. Defoort, H. R. Karimi, and K. C. Veluvolu. Output feedback active suspension control with higher order terminal sliding mode. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(2):1392–1403, 2016.
- [31] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, Basel, 2014.
- [32] J. Song, Y. Niu, and Y. Zou. Finite-time stabilization via sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3):1478–1483, 2017.
- [33] V. Utkin. On convergence time and disturbance rejection of super-twisting control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(8):2013–2017, 2013.
- [34] H. Wang, Z. Zhou, C. Hao, Z. Hu, and W. Zheng. Fteso-based finite time control for underactuated system within a bounded input. *Asian Journal of Control*, 20(4):1427–1439, 2018.
- [35] Q. Wang, M. Ran, and C. Dong. On finite-time stabilization of active disturbance rejection control for uncertain nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 20(1):415–424, 2018.
- [36] Qiu J. Wei, Y. and H.R. Karimi. Reliable output feedback control of discrete-time fuzzy affine systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 64(1):170–181, 2017.
- [37] Qiu J. Wei, Y. and H.K. Lam. A novel approach to reliable output feedback control of fuzzy-affine systems with time delays and sensor faults. *IEEE Transactions Fuzzy Systems*, 25(6):1808–1823, 2017.

-
- [38] L. Wu, Y. Gao, J. Liu, and H. Li. Event-triggered sliding mode control of stochastic systems via output feedback. *Automatica*, 82:79–92, 2017.
- [39] L. Wu, X. Su, and P. Shi. Sliding mode control with bounded L_2 gain performance of Markovian jump singular time-delay systems. *Automatica*, 48(8):1929–1933, 2012.
- [40] D. Zhang, Q. Wang, D. Srinivasan, H. Li, and L. Yu. Asynchronous state estimation for discrete-time switched complex networks with communication constraints. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29(5):1732–1746, 2018.
- [41] Xu Z. Karimi H. R. Wang Q. G. Zhang, D. and L. Yu. Distributed H_∞ output-feedback control for consensus of heterogeneous linear multiagent systems with aperiodic sampled-data communications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(5):4145–4155, 2018.
- [42] Xu Z. Karimi Z. Zhang, D. and Q. G. Wang. Distributed filtering for switched linear systems with sensor networks in presence of packet dropouts and quantization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 64(10):2783–2796, 2017.