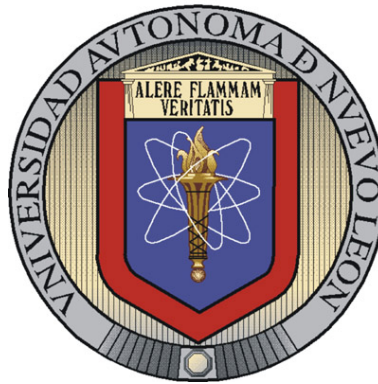


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL EN SISTEMAS  
CON OBSERVACIONES INCOMPLETAS MEDIANTE LAS  
TÉCNICAS ÓPTIMAS DE PROMEDIO CUADRÁTICO,  $H_\infty$  Y  
MODOS DESLIZANTES

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

PRESENTA  
DARÍO CALDERÓN ALVAREZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL EN SISTEMAS  
CON OBSERVACIONES INCOMPLETAS MEDIANTE LAS  
TÉCNICAS ÓPTIMAS DE PROMEDIO CUADRÁTICO,  $H_\infty$  Y  
MODOS DESLIZANTES

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

PRESENTA  
DARÍO CALDERÓN ALVAREZ

**ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL EN SISTEMAS  
CON OBSERVACIONES INCOMPLETAS MEDIANTE LAS  
TÉCNICAS ÓPTIMAS EN PROMEDIO CUADRÁTICO,  $H_\infty$  Y  
MODOS DESLIZANTES.**

**LOS MIEMBROS DEL COMITÉ APRUEBAN LA TESIS DE  
DOCTORADO DE DARÍO CALDERÓN ALVAREZ**

Dr. Mikhail V. Basin  
Asesor



---

Dr. Leonid Fridman Goldreich



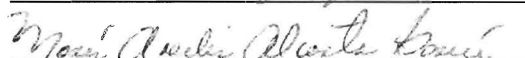
---

Dra. Nataliya I. Kalashnykova



---

Dra. María Aracelia Alcorta García



---

Dr. Rodolfo Martínez Zúñiga



---

Algoritmos de Filtrado y Control en Sistemas con  
Observaciones Incompletas mediante las Técnicas  
Óptimas de Promedio Cuadrático,  $\mathcal{H}_\infty$  y Modos  
Deslizantes

Darío Calderón Alvarez

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
División de Estudios de Postgrado

2 de octubre de 2009

# Dedicatoria

A la memoria de mi madre, la señora Elvira Alvarez Rivera, por haberme dado la vida y todo su amor en mi niñez.

A mi padre, el Licenciado Enrique Elisín Calderón Armijo, por haberme dado educación, consejos, soporte económico y todo su amor y ayuda.

# Agradecimientos

A mi esposa: Noemí Sevilla Rosas, por todo su amor, apoyo y comprensión en las buenas y en las malas.

A mis hijos: Montserrat Helena Calderón Sevilla y Alberto Elisín Calderón Sevilla, por haberle dado alegría e ilusión a mi vida.

A mis hermanos: Herlinda, Mauricio, Norberto, Gloria Elena y Carlos Emanuel por su amor, y apoyo en todos mis estudios.

A mi asesor, el Doctor Mikhail Valentinovich Basin, por haberme compartido sus conocimientos y por su guía y ayuda en la realización de esta tesis y en mis estudios e investigación del doctorado.

A la Doctora María Aracelia Alcorta García, porque sin obligación alguna me dió valiosos consejos en mis exposiciones.

A todos mis profesores de la FCFM de la UANL y de la División de Estudios de Posgrado e Investigación Científica de la FCFM de la UANL por compartirme sus conocimientos, consejos y ayuda.

Al CONACyT, por su valioso financiamiento.

Al Lic. Aarón Arévalo Franco, el Ing. Jorge González Guevara y la Ing. Claramaría Rodríguez González por su apoyo, compañerismo y valiosa e incondicional ayuda.

A mis compañeros del doctorado.

A toda mi familia en general y a mis amigos Toño, Gustavo, Angélica y Rubén.

A la señora Lucina Rosas González, a la señora María del pilar Espina García y Joaquín Espina García, por todo su amor y apoyo.

QUE DIOS LOS BENDIGA A TODOS

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Introducción . . . . .	8
1.2. Antecedentes . . . . .	9
1.3. Aportaciones . . . . .	12
1.3.1. Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales Medidos Incompletamente sobre Observaciones Lineales. . . . .	12
1.3.2. Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Incompletamente con Ruidos Multiplicativos. . . . .	13
1.3.3. Controlador LQG Óptimo para Sistemas Estocásticos Lineales con Parámetros Desconocidos. . . . .	14
1.3.4. Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales sobre Observaciones Polinomiales . . . . .	14
1.3.5. Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Subóptimo Central para Sistemas Lineales Variables en el Tiempo con Retardo en el Estado o en la Medición .	15
1.3.6. Regulador en Modo Deslizante como Solución al Problema de Con- trol Óptimo con un Criterio no Cuadrático . . . . .	16
1.4. Organización de la Tesis . . . . .	17
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>18</b>
2.1. Sistemas Estocásticos . . . . .	18
2.1.1. Ecuación General de Filtrado Óptimo . . . . .	18
2.1.2. Filtro de Kalman-Bucy (caso continuo) . . . . .	25
2.1.3. Filtro de Kalman-Bucy Extendido. . . . .	26
2.2. Teoría Lineal de Control Óptimo . . . . .	28
2.2.1. Conceptos básicos . . . . .	28
2.2.2. El Problema de Control Óptimo en Sistemas Lineales . . . . .	28
2.2.3. Solución del Problema de Control Óptimo en Sistemas Lineales . .	29
2.3. Sistemas Continuos con Retardo . . . . .	29

2.3.1.	Definiciones y conceptos básicos de los Sistemas con Retardo . . . . .	29
2.4.	Control $\mathcal{H}_\infty$ y Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	34
2.4.1.	Introducción . . . . .	34
2.4.2.	Existencia de un Controlador $\mathcal{H}_\infty$ admisible en el Espacio de Estados	35
2.4.3.	Filtrado en un escenario $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	38
2.4.4.	Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Lineales Continuos en el Tiempo con Retardo . . . . .	41
2.5.	Teoría de Modos Deslizantes. . . . .	44
2.5.1.	Conceptos básicos. . . . .	44
2.5.2.	Control por Modos Deslizantes. . . . .	45
2.5.3.	Modos Deslizantes Integrales. . . . .	47
<b>3.</b>	<b>Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales Medidos Incompletamente sobre Observaciones Lineales</b>	<b>51</b>
3.1.	Planteamiento del Problema . . . . .	51
3.2.	Solución del Problema . . . . .	53
3.3.	Ejemplo . . . . .	58
3.4.	Conclusiones . . . . .	61
<b>4.</b>	<b>Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Incompletamente con Ruidos Multiplicativos</b>	<b>65</b>
4.1.	Planteamiento del Problema . . . . .	65
4.2.	Filtro Óptimo para un Estado Polinomial sobre Observaciones Lineales . .	67
4.2.1.	Filtro Óptimo para un Estado Lineal con Ruido Multiplicativo Lineal	71
4.2.2.	Filtro Óptimo para un Estado Bilineal con Ruido Multiplicativo Bilineal . . . . .	72
4.3.	Ejemplo . . . . .	73
4.4.	Conclusiones . . . . .	77
<b>5.</b>	<b>Controlador LQG Óptimo para Sistemas Estocásticos Lineales con Parámetros Desconocidos</b>	<b>84</b>
5.1.	Problema del Controlador Óptimo . . . . .	84
5.1.1.	Planteamiento del problema . . . . .	84
5.1.2.	Reducción del problema . . . . .	85
5.1.3.	Principio de Separación . . . . .	86
5.1.4.	Solución del Problema de Control Óptimo . . . . .	88
5.2.	Ejemplo . . . . .	89



5.3. Conclusiones . . . . .	91
<b>6. Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales sobre Observaciones Polinomiales</b>	<b>95</b>
6.1. Planteamiento del Problema . . . . .	95
6.2. Diseño del Filtro . . . . .	97
6.3. Ejemplo: Problema de Filtrado del Sensor de Tercer Grado para un Sistema Cuadrático . . . . .	102
6.4. Conclusiones . . . . .	105
<b>7. Diseño del Filtro <math>\mathcal{H}_\infty</math> Subóptimo Central para Sistemas Lineales Variables en el Tiempo con Retardo en el Estado o en la Medición</b>	<b>108</b>
7.1. Planteamiento del Problema del Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LTV con Retardo en el Estado . . . . .	108
7.2. Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas LTV con Retardo en el Estado	110
7.3. Filtro Alternativo $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas LTV con Retardo en el Estado	113
7.4. Ejemplo: Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas con Retardo en el Estado . . . . .	115
7.5. Planteamiento del Problema de Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LTV con retardo en la Medición . . . . .	118
7.6. Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas LTV con Retardo en la Medición	119
7.7. Ejemplo: Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas con Retardo en la Medición . . . . .	121
7.8. Generalizaciones . . . . .	124
7.9. Conclusiones . . . . .	126
<b>8. Regulador en Modo Deslizante como Solución del Problema de Control Óptimo con un Criterio no Cuadrático</b>	<b>132</b>
8.1. Planteamiento del Problema . . . . .	132
8.2. Solución del Problema de Control Óptimo . . . . .	133
8.3. Ejemplo . . . . .	135
8.4. Apéndice . . . . .	137
8.5. Conclusiones . . . . .	140
<b>9. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>145</b>
9.1. Conclusiones . . . . .	145
9.2. Trabajo Futuro . . . . .	145

# Resumen

En esta tesis se presentan los siguientes resultados:

Se consideraron sistemas con estados polinomiales afectados por ruidos blancos gaussianos sobre observaciones lineales con una matriz de observación arbitraria y no necesariamente invertible y sobre observaciones polinomiales, también afectadas por ruidos blancos gaussianos. Entre estos sistemas se diseñaron: un filtro óptimo para sistemas de estados polinomiales sobre observaciones lineales, un filtro óptimo para sistemas con estados polinomiales con ruido multiplicativo polinomial sobre observaciones lineales, un filtro óptimo para sistemas con estados polinomiales sobre observaciones polinomiales. También se trabajó con un controlador óptimo para sistemas lineales con parámetros desconocidos sobre observaciones lineales. Se diseñó un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  subóptimo central para sistemas lineales con retardo en el estado o en la medición, ambos afectados con perturbaciones acotadas integro-cuadráticamente. Y por último se diseñó un regulador en modo deslizante como solución del problema de control óptimo para un sistema lineal con respecto a un criterio de Bolza-Meyer con un término no cuadrático y no integral. Los filtros y controladores diseñados mostraron un buen desempeño en las simulaciones y en las comparaciones con sistemas adecuados.

# Abstract

In this thesis the following results are presented:

They were considered systems with polynomial states affected by white Gaussian noises over linear observations with an arbitrary and no-necessarily invertible observation matrix over polynomial observations affected by white Gaussian noises too. Among these systems they were designed: an optimal filter for polynomial systems states over linear observations, an optimal filter for systems with polynomial states and multiplicative polynomial noise over linear observations, an optimal filter for systems with polynomial states over polynomial observations. It has been designed an optimal controller for linear systems with unknown parameters over linear observations. An central suboptimal  $\mathcal{H}_\infty$  filter was also designed for linear systems with state or measurement delay, both affected with integral-quadratically bounded disturbances. And lastly, it has been designed an sliding mode regulator as solution of the optimal control problem for linear systems with respect to a modified Bolza-Meyer criterion with non-quadratic non-integral terminal term. The designed filters and controllers showed a good performance in simulations and comparisons with appropriate systems.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

En el procesamiento de señales, un filtro es una función o procedimiento que remueve las partes no deseadas de una señal, tales partes indeseadas son los ruidos o perturbaciones que afectan al proceso. Los sistemas de control se diseñan para que ciertas señales designadas, tales como errores de medición y entradas, no excedan niveles específicos. Las incertidumbres sobre la planta a ser controlada y los errores en la medición de señales (los sensores pueden medir señales sólo con cierta exactitud) son los que impiden el logro de este objetivo. Con el advenimiento de la carrera espacial, la disponibilidad de computadoras digitales prácticas, la teoría moderna del control óptimo y el enfoque de variables de estado a principio de la década de 1960, se dió un giro hacia los métodos en el dominio del tiempo. En las décadas de 1960 y 1970 se dieron una gran cantidad de aplicaciones de las técnicas de control moderno, en especial el control óptimo, lo cual dió origen a técnicas de diseño sistemáticas como LQR, LQG y LTR, conocidas como las técnicas postmodernas. A principios de la década de 1980, emergió una nueva técnica conocida como Teoría de Control  $\mathcal{H}_\infty$ , la cual combina ambos enfoques, en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia con el fin de proveer una solución unificada. El crédito se le otorga a George Zames por su introducción en el artículo [117]. El enfoque de  $\mathcal{H}_\infty$  tuvo un impacto significativo en el desarrollo de sistemas de control durante las décadas de 1980 y 1990, en la actualidad la técnica ha madurado y sus aplicaciones en problemas industriales son cada vez mayores. El método de modos deslizantes tradicional puede ser presentado como la aplicación de una señal de control conmutando a alta frecuencia que consigue llevar el estado del sistema a una superficie  $\sigma = 0$  denominada superficie de deslizamiento y una vez en ella mantenerlo ante posibles perturbaciones externas. Dicha superficie de

deslizamiento será definida con el propósito de que el estado cumpla las especificaciones deseadas. La principal ventaja del control por modos deslizantes es que aporta robustez ante perturbaciones, tanto internas como externas, cuando estas tienen cotas conocidas. Esta tesis presenta los algoritmos de filtrado y control haciendo uso de las técnicas  $H_2$ , (en promedio cuadrático óptimo) para resolver los problemas estocásticos de sistemas lineales y no lineales, las de  $\mathcal{H}_\infty$  para diseñar un filtro subóptimo central para sistemas lineales variables en el tiempo con retardo en el estado o en la medición y las de control por modos deslizantes para el diseño de un regulador con un criterio no cuadrático en un problema de control óptimo. La importancia de estos diseños se debe a que existen muchos procesos en la ciencia y la ingeniería que se describen con este tipo de sistemas y no existían los algoritmos correspondientes para su solución.

## 1.2. Antecedentes

1) Aunque la solución óptima general del problema de filtrado para ecuaciones de estado y observación no lineales confundidas con ruidos blancos gaussianos está dada por la ecuación de Kushner para la densidad condicional de un estado no observado con respecto a las observaciones [63], hay muy pocos ejemplos conocidos de sistemas no lineales donde la ecuación de Kushner puede ser reducida a un sistema cerrado de dimensión finita de ecuaciones de filtrado para un cierto número de momentos condicionales bajos. El resultado más famoso, el filtro de Kalman-Bucy [58], es descrito para el caso de ecuaciones de estado lineal y observación lineal, donde sólo dos momentos, el estimado mismo y su varianza, forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado. Sin embargo, el filtro óptimo no lineal de dimensión finita puede ser obtenido en algunos otros casos, si, por ejemplo, el vector de estado puede tomar sólo un número finito de estados admisibles [103] o si la ecuación de observación es lineal y el drift en la ecuación de estado satisface la ecuación de Riccati  $df/dx + f^2 = x^2$  (ver [26]). La clasificación completa de los casos de "situación general" (esto significa que no hay suposiciones especiales en la estructura de las ecuaciones del estado y la observación y de las condiciones iniciales), donde existe el filtro óptimo no lineal de dimensión finita, está dada en [115]. Los libros [3, 4, 7, 10, 14, 16, 17, 23, 26, 48, 50, 51, 53, 58, 63, 71, 73] se pueden mencionar como textos detallados de referencia. También existe una bibliografía considerable en filtrado robusto para los sistemas de "situación general" (ver, por ejemplo, [39, 45, 48, 71, 76, 88, 89, 90, 96, 105, 109, 112, 113, 116, 118, 119]). Además de la "situación general", se han diseñado recientemente los filtros óptimos de dimensión finita [7, 10, 14, 16] para ciertas clases de sistemas de estados polinomiales con condiciones iniciales gaussianas sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible.

2) Aunque el problema del controlador LQG óptimo para sistemas de estados lineales fué resuelto en los 60s, basado en las soluciones para los problemas de filtrado óptimo [58] y regulador óptimo [41, 66] el problema del controlador LQG óptimo para sistemas lineales con parámetros desconocidos no ha sido tratado continuamente. De hecho, queremos saber qué solución óptima podría existir para ese problema si algunos parámetros son indeterminados. Sin embargo, el problema planteado empieza a tener sentido si se modelan los parámetros desconocidos. Tomando en cuenta las especificaciones gaussianas del problema LQG óptimo, se puede representar a los parámetros desconocidos como procesos estocásticos de Wiener. El vector de estado extendido consiste de los estados reales no medibles y parámetros desconocidos, y las ecuaciones de estado extendido obtenidas son bilineales con respecto al vector de estado extendido. De este modo, el problema original se reduce al problema del controlador óptimo para estado bilineal sobre observaciones lineales y un criterio cuadrático, el cual asume una solución extensa de dos problemas pertinentes: el problema de filtrado óptimo para estados bilineales sobre observaciones lineales y el problema del control óptimo para el estimado del filtro diseñado.

La teoría de filtrado óptimo para sistemas no lineales se basa en la ecuación para la densidad condicional de un estado no observado con respecto a las observaciones (ver [57, 63, 68]). Hay muy pocos ejemplos conocidos de sistemas no lineales, donde esta ecuación puede ser reducida a un sistema cerrado de dimensión finita de ecuaciones de filtrado para un cierto número de momentos condicionales bajos (ver [26, 58, 103, 115] para más detalles). También existe una considerable bibliografía sobre filtrado robusto para los sistemas de "situación general" (ver, por ejemplo, [48, 71, 88, 89, 90, 113]). Aparte de la "situación general", fueron diseñados los filtros óptimos de dimensión finita ([7, 10, 14, 16]) para ciertas clases de estados polinomiales con condiciones iniciales gaussianas sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible. El filtro óptimo para estados polinomiales medidos incompletamente sobre observaciones lineales con una arbitraria y no necesariamente invertible matriz de observación, obtenida recientemente en [24], juega un papel decisivo para resolver el problema establecido del controlador para sistemas lineales con parámetros desconocidos.

3) En las dos últimas décadas, se ha prestado una considerable atención a los problemas de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineales y no lineales con y sin retardos en el tiempo. Los artículos seminales en control  $\mathcal{H}_\infty$  [35] y estimación [75, 87, 114] establecieron un fondo para el tratamiento coherente de problemas de filtrado/controlador en el marco  $\mathcal{H}_\infty$ . El filtro  $\mathcal{H}_\infty$  diseñado implica que el sistema de filtrado en lazo cerrado resultante es robustamente estable y alcanza un nivel prescrito de atenuación desde la perturbación de entrada hasta el error de la estimación de salida en una norma  $L_2/l_2$ . Un gran número de resultados en este tema han sido reportados para sistemas en la situación general,

lineal o no lineal (ver, por ejemplo [45, 48, 49, 74, 76, 109, 112, 113, 119]). Para el área específica de sistemas lineales con retardo en el tiempo, el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  ha sido extensamente estudiado también (ver [29, 43, 44, 46, 48, 50, 51, 56, 59, 67, 72, 93, 96, 102, 106, 110, 111, 112, 113, 120, 122, 123]). Las condiciones suficientes para la existencia de un filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , donde las matrices de ganancia del filtro satisfacen ecuaciones de Riccati, fueron obtenidas para sistemas lineales con retardo en el estado en [38] y con retardo en la medición en [80]. Sin embargo, los criterios de existencia y suboptimalidad de la solución de los problemas de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  centrales basados en la reducción del problema  $\mathcal{H}_\infty$  original al  $H_2$  inducido, similares a los obtenidos en [35, 75] para sistemas lineales sin retardo, siguen siendo desconocidos todavía para sistemas lineales con retardos en el tiempo.

El problema de filtrado óptimo para sistemas lineales con estados y observaciones sin retardos fué resuelto en la década de 1960 [58], y su solución en forma cerrada es conocida como el filtro de Kalman-Bucy. Sin embargo, el problema de filtrado óptimo descrito relacionado para sistemas lineales con retardos no ha sido resuelto en una forma cerrada, refiriéndonos a una solución en forma cerrada como un sistema cerrado de un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias para cualquier horizonte de filtrado. Unos pocos casos particulares, los problemas de filtrado óptimo para sistemas lineales con retardo en el estado y/o retardos en las observaciones, están resueltos en [11, 13, 22, 60, 65]. Se ha diseñado en [121] un estimador tipo Kalman para sistemas lineales con retardo en la observación. La aproximación en la estimación óptima de Itô-Volterra en particular, aplicable a sistemas con retardo en el tiempo, ha sido desarrollada recientemente en [118]. Por otro lado, la dualidad de los problemas de filtrado y de control para sistemas lineales implican que la estimación óptima del estado para los sistemas con retardos en el estado está relacionada con el problema del LQR óptimo para sistemas con retardos en el estado, el cual fué extensamente estudiado usando varias aproximaciones (ver [2, 12, 18, 21, 33, 37, 98] y las referencias en este libro). También existe una considerable bibliografía relacionada con los problemas de filtrado robusto para sistemas con retardo en el tiempo ([36, 39, 47, 54, 70, 71, 89, 90, 91, 105, 116]). En [28, 34, 52, 61, 62, 69, 77, 85] se dan revisiones comprensivas de la teoría y algoritmos para sistemas con retardo en el tiempo.

4) Desde que el control en modo deslizante fué inventado al principio de los '70s (ver una reseña histórica en [99]), ha sido aplicado para resolver varias clases de problemas. Por ejemplo, la metodología del control en modo deslizante ha sido usada en estabilización [92, 95], seguimiento [30], diseño de observadores [5], identificación [32], análisis en el dominio de la frecuencia [27], y otros problemas de control. Prometiéndole modificaciones del concepto de modo deslizante original, se han desarrollado algunas tales como integral en modo deslizante [101] y modos deslizantes de orden superior [6, 42]. La aplicación del método en modo deslizante se extiende incluso a sistemas estocásticos [90, 104] y

problemas estocásticos de filtrado [8, 9]. Sin embargo, aunque es posible diseñar una superficie deslizante para que se minimice una funcional cuadrática de costo en horizonte infinito que incluya únicamente el estado del sistema [99], parece que, para el mejor conocimiento de los autores, no se ha diseñado ningún algoritmo en modo deslizante óptimo, que resuelva el problema de control óptimo para un criterio de Bolza-Meyer con el término cuadrático de control [40, 41]. Mientras tanto, el simple hecho de que el control en modo deslizante tiene un sentido físico transparente [99] y es exitosamente aplicado a muchos problemas técnicos [100] conduce a la conjetura de que deben existir los problemas de control óptimo cuya solución está dada por un control en modo deslizante. En este capítulo se considera uno de estos problemas de control óptimo.

## 1.3. Aportaciones

### 1.3.1. Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales Medidos Incompletamente sobre Observaciones Lineales.

Este capítulo presenta el filtro óptimo de dimensión finita para sistemas de estados polinomiales sobre observaciones lineales con una matriz de observación arbitraria y no necesariamente invertible, generalizando de este modo los resultados de [7]-[16]. El diseño del filtro óptimo para sistemas polinomiales con una matriz de observación no invertible presenta una ventaja significativa en la teoría y práctica del filtrado, puesto que nos permite hacer frente a los problemas de identificación óptima del conjunto de estado y parámetro para sistemas polinomiales. El problema de filtrado óptimo es tratado procediendo de la expresión general para la diferencial estocástica de  $\hat{I}t\hat{o}$  del estimado óptimo y la varianza del error [84]. Como primer resultado, se derivan las diferenciales de  $\hat{I}t\hat{o}$  para el estimado óptimo y la varianza del error correspondientes al problema de filtrado del estado. Después, se introduce una transformación de la ecuación de observación para reducir el problema original al resuelto anteriormente con una matriz de observación invertible [16]. Entonces se prueba, usando la técnica de representar los momentos superiores de variables aleatorias gaussianas como funciones de su esperanza y varianza, que se puede obtener un sistema cerrado de dimensión finita de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a un número finito de variables de filtrado para una ecuación de estado polinomial y observaciones lineales con una matriz arbitraria de observación. En este caso, se establece el procedimiento correspondiente para diseñar las ecuaciones de filtrado óptimo. Finalmente, se deriva el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a dos variables, el estimado óptimo y la varianza del error, en forma explícita, en el caso particular de una ecuación de estado de tercer orden.



Los resultados de este capítulo se publicaron en:

a) International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 22, no. 5, pp. 482-494.

b) Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Innovative Computing, Information and Control (Kumamoto, Japan, September 5-7, 2007), no. 355, DOI: 10.1109/ICI-CIC.2007.425

### **1.3.2. Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Incompletamente con Ruidos Multiplicativos.**

Este capítulo presenta el filtro óptimo de dimensión finita para sistemas de estados polinomiales medidos incompletamente con ruido multiplicativo polinomial sobre observaciones lineales con una matriz de observación arbitraria, no necesariamente invertible, generalizando de este modo los resultados de ([7, 10, 16]). El diseño del filtro óptimo para sistemas polinomiales con ruido multiplicativo polinomial sobre observaciones con una matriz de observación no invertible presenta una ventaja significativa en la teoría y práctica del filtrado, puesto que nos permite abordar los problemas de filtrado óptimo para estados polinomiales medidos incompletamente con polinomios de observación sin linealidades, tales como el problema del sensor cúbico óptimo (ver [53]) en presencia de estados no medibles. El problema de filtrado óptimo es tratado procediendo de la expresión general de la diferencial estocástica de  $\hat{I}t$  del estimado óptimo y de la varianza del error [84]. Como primer resultado, se derivan las diferenciales de  $\hat{I}t$  para el estimado óptimo y la variación del error correspondientes al problema de filtrado establecido. Siguiente, se introduce una transformación de la ecuación de la observación para reducir el problema original al previamente resuelto con una matriz de observación invertible [16]. Entonces se prueba, usando la técnica de representar los momentos superiores de variables aleatorias gaussianas como funciones de su esperanza y varianza, que se puede obtener un sistema cerrado de dimensión finita de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a un número finito de variables de filtrado para una ecuación de estado polinomial con ruido multiplicativo polinomial y observaciones lineales con una matriz de observación arbitraria. En este caso, se establece el procedimiento correspondiente para diseñar las ecuaciones de filtrado óptimo. Finalmente, se deriva en la forma explícita en los casos particulares de ecuaciones lineales y bilineales, el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a dos variables, el estimado óptimo y la varianza del error.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

a) Circuits, Systems and Signal Processing (2009), Vol. 28, no. 2, pp. 223-239.

b) Proceedings of the 2008 American Control Conference (Seattle, WA, June 11-13,

2008), pp. 4244-4249.

### **1.3.3. Controlador LQG Óptimo para Sistemas Estocásticos Lineales con Parámetros Desconocidos.**

Este capítulo presenta la solución para el problema del controlador LQG para sistemas lineales con parámetros desconocidos. Primero se reduce este problema al problema del controlador óptimo para un estado bilineal sobre observaciones lineales y un criterio cuadrático. Debido al principio de separación para sistemas lineales con parámetros desconocidos y un criterio cuadrático, el cual es expuesto y demostrado en la tesis análogo al de los sistemas lineales sin incertidumbres (ver [66]), el problema original del controlador está dividido en el problema de filtrado óptimo de estados bilineales medidos incompletamente sobre observaciones lineales y el problema del control óptimo (regulador) para el estimado del filtro diseñado. Las soluciones de ambos problemas están dados en esta tesis, basado en los algoritmos de filtrado óptimo ([24]) y control ([41, 66]). La solución al problema del controlador óptimo original se compone finalmente de estos dos resultados y está directamente indicada.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Journal of The Franklin Institute, Vol. 345, no. 3, pp. 293-302.
- b) Proceedings of the 46th Conference on Decision and Control (New Orleans, LA, December 12-14, 2007), pp. 3673-3678.

### **1.3.4. Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales sobre Observaciones Polinomiales**

Este capítulo presenta el filtro óptimo de dimensión finita para sistemas de estados polinomiales sobre observaciones polinomiales, continuando la investigación en el área del filtrado óptimo para sistemas polinomiales, la cual ha sido iniciada en ([7]–[16]). En contraste a los resultados obtenidos previamente, el capítulo trata con el caso general de estados y observaciones polinomiales no lineales. El diseño del filtro óptimo sobre observaciones polinomiales presenta una ventaja significativa en la teoría y práctica del filtrado, puesto que permite abordar algunos problemas de filtrado con no linealidades en el estado y la observación, tales como el problema del sensor cúbico [53], para varios sistemas polinomiales. El problema de filtrado óptimo es tratado procediendo de la expresión general para las diferenciales estocásticas de  $It\hat{\theta}$  del estimado óptimo y la variación del error [84]. Como un primer resultado, se derivan las diferenciales de  $It\hat{\theta}$  para el estimado óptimo y la variación del error correspondientes al problema de filtrado establecido.

Entonces se prueba que puede ser obtenido un sistema cerrado de dimensión finita de las ecuaciones de filtrado óptimas con respecto a un número finito de variables de filtrado para una ecuación polinomial de observación, asumiendo adicionalmente una condición inicial condicionalmente gaussiana para los estados de mayor grado. Esta suposición es totalmente admisible en el marco del filtrado, puesto que la distribución real de todo el vector de estado es desconocida actualmente. En este caso, es sugerido el procedimiento correspondiente para el diseño de las ecuaciones de filtrado óptimo.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

a) Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control (Cancún, QRoo, México, December 9-11, 2008), pp. 5128-5133.

b) International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol. 4, no. 2, pp. 313-320.

### **1.3.5. Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Subóptimo Central para Sistemas Lineales Variables en el Tiempo con Retardo en el Estado o en la Medición**

Este capítulo presenta los filtros óptimos centrales  $\mathcal{H}_\infty$  de dimensión finita (ver [35] para la definición) para sistemas lineales con retardo en el estado o en la medición, que son subóptimos para un umbral  $\gamma$  dado con respecto a un criterio cuadrático de Bolza-Meyer modificado incluyendo el término de atenuación de control con el signo opuesto. En contraste a los resultados obtenidos previamente para sistemas lineales con retardo en el estado [38] o en la medición [80], el capítulo reduce los problemas de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  originales a problemas de filtrado  $H_2$  (promedio cuadrático), usando la técnica propuesta en [35]. Éste es el primer trabajo que aplica la técnica de reducción de [35], para clases de sistemas distintos de las plantas LTI convencionales. De hecho, la aplicación de la técnica de reducción tiene sentido, puesto que las ecuaciones de filtrado óptimo que resuelven los problemas de filtrado  $H_2$  (en promedio cuadrático) han sido obtenidas para sistemas lineales con retardos en el estado [22, 15] o en la medición [13]. El diseño del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  subóptimo central para sistemas lineales con retardo en el estado o en la medición presenta una ventaja significativa en la teoría y práctica de filtrado, puesto que (1) permite hacer frente a problemas de filtrado para sistemas LTV con retardo en el tiempo, donde la técnica LMI es difícilmente aplicable, (2) el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  obtenido es subóptimo, o sea, óptimo para cualquier  $\gamma$  fijo con respecto al criterio de atenuación del ruido  $\mathcal{H}_\infty$ , y (3) el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  obtenido es de dimensión finita y tiene la misma estructura de las ecuaciones del estimado y de la matriz de ganancia que el filtro óptimo  $\mathcal{H}_2$  correspondiente. Además, los algoritmos de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  propuestos nos proveen de métodos directos para calcular los

valores mínimos alcanzables del umbral  $\gamma$ , basado en las propiedades de existencia para una solución acotada de la ecuación matricial de la ganancia.

Debe comentarse que el diseño de los filtros  $\mathcal{H}_\infty$  subóptimos centrales para sistemas lineales con retardo en el tiempo con perturbaciones integradas cuadráticamente lleva en forma más natural al diseño de los filtros  $\mathcal{H}_2$  óptimos para sistemas lineales con retardo en el tiempo con perturbaciones acotadas (ruidos blancos). La aproximación del diseño completo crea un algoritmo de filtrado completo para manejar los sistemas lineales con retardo en el tiempo con perturbaciones acotadas o perturbaciones cuadrática y óptimamente integradas para todos los umbrales  $\gamma$  uniformemente o para cualquier  $\gamma$  fijo separadamente.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Circuits, Systems and SignalProcessing (2009), Vol. 28, no. 2, pp. 305-330.
- b) Proceedings of the 2008 American Control Conference (Seattle, WA, June 11-13, 2008), pp. 1-6.
- c) Proceedings of the 17th World IFAC Congress (Seoul, Korea, July 6-11, 2008), pp. 10246-10251.
- d) Proceedings of the 17th World IFAC Congress (Seoul, Korea, July 6-11, 2008), pp. 12365-12370.
- e) Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control (Cancún, QRoo, México, December 9-11, 2008), pp. 672-677.

### **1.3.6. Regulador en Modo Deslizante como Solución al Problema de Control Óptimo con un Criterio no Cuadrático**

Este capítulo presenta la solución del problema de control óptimo para un sistema lineal con un criterio de Bolza-Meyer, donde los términos del control integral y de energía del estado son cuadráticos y el término no integral es de primer grado. Esto demuestra que la solución óptima es dada por un control causal en modo deslizante, mientras que el control en retroalimentación lineal convencional no da lugar a una solución causal y, por tanto, falla.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control (Cancún, QRoo, México, December 9-11, 2008), pp. 2184-2189.

## 1.4. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se presenta una síntesis de la teoría de sistemas estocásticos, teoría lineal de control óptimo, sistemas continuos con retardo, control  $\mathcal{H}_\infty$  y filtrado  $\mathcal{H}_\infty$ , y teoría de modos deslizantes. En el Capítulo 3 se plantea y se resuelve el problema del filtro óptimo para estados polinomiales medidos incompletamente sobre observaciones lineales. En el Capítulo 4 se considera el problema del filtro óptimo para sistemas polinomiales medidos incompletamente con ruidos multiplicativos. En el Capítulo 5 se aborda el problema del controlador óptimo para sistemas estocásticos lineales con parámetros desconocidos. En el Capítulo 6 se tiene el problema del filtro óptimo para estados polinomiales sobre observaciones polinomiales. En el Capítulo 7 se diseña el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineales variables en el tiempo con retardo en el estado y también el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineales variables en el tiempo con retardo en la medición. En el Capítulo 8 se presenta y se resuelve el problema de la obtención de un regulador en modo deslizante como la solución a un problema de control óptimo con un criterio no cuadrático. En el Capítulo 9 son presentadas las conclusiones y los trabajos futuros a desarrollar.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para el estudio y análisis de los temas expuestos en los capítulos siguientes. Las fuentes consultadas principales son: para Sistemas Estocásticos [55, 58, 70, 79, 83, 84]; Teoría Lineal de Control Óptimo [25, 40, 64, 81]; Sistemas Continuos con Retardo [28, 34, 69]; Control  $\mathcal{H}_\infty$  y Filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  [35, 75, 80] y Teoría de Modos Deslizantes [1, 20, 99, 100].

### 2.1. Sistemas Estocásticos

#### 2.1.1. Ecuación General de Filtrado Óptimo

Consideremos el proceso continuo estocástico descrito por la ecuación

$$\dot{X} = \varphi(X, t) + \psi(X, t)V, \quad (2.1)$$

donde  $X$  es el vector de estado  $n$ -dimensional del sistema,  $V$  es un vector  $r$ -dimensional que representa el ruido blanco Gaussiano, y  $\varphi(X, t), \psi(X, t)$  son funciones conocidas del estado del sistema y del tiempo. Los valores de la función  $\varphi(X, t)$  son vectores  $n$ -dimensionales y los valores de la función  $\psi(X, t)$  son matrices  $n \times r$ . Si el vector estado del sistema  $X$  es medido continuamente, entonces el proceso aleatorio  $n$ -dimensional  $Y(t) = X(t) + U(t)$  sería el resultado de las mediciones, donde  $U(t)$  es el error de la medición, el cual representa usualmente una función aleatoria del tiempo. Por otro lado, si esto no se cumple con el vector de estado, pero si algunas funciones del vector de estado son medidas por alguno de los componentes del vector de observación, el resultado de las mediciones es determinado en forma general por la fórmula

$$Y = Y(t) = \varphi_0(X, U, t), \quad (2.2)$$

donde  $Y$  es un vector  $n_1$ -dimensional,  $U$  es el error de la medición, representando una función vectorial aleatoria de tiempo de dimension  $r \geq n_1$  y  $\varphi_0(x, u, t)$  es una función conocida del estado del sistema, medición del error y del tiempo. El modelo general de mediciones las cuales son llevadas a cabo en un sistema puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{Y} = \varphi_1(Y, X, U, t). \quad (2.3)$$

El resultado de las mediciones representa el proceso aleatorio  $Y$ . El problema de filtrado es planteado para el vector de estado del sistema  $X$  en cada instante  $t > t_0$ , usando los resultados de mediciones continuas del proceso  $Y$  determinado por la ecuación (2.3) en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ .

Sea un vector aleatorio de un proceso  $[Y^T X^T]^T$  determinado por las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y, X, t)dt + \psi_1(Y, X, t)dW, \\ dX &= \varphi(Y, X, t)dt + \psi(Y, X, t)dW, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $Y$  es un proceso aleatorio  $n_1$ -dimensional,  $X$  es un proceso  $n$ -dimensional,  $W$  es un proceso  $n$ -dimensional,  $\varphi_1(y, x, t)$  y  $\varphi(y, x, t)$  son funciones vectoriales que mapean el espacio  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  en los espacios  $\mathbb{R}^{n_1}$  y  $\mathbb{R}^n$  respectivamente y  $\psi_1(y, x, t)$  y  $\psi(y, x, t)$  son matrices de funciones conocidas que mapean  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^{n_1 r}$  y  $\mathbb{R}^{nr}$  respectivamente. Esto constituye el planteamiento del problema de filtrado para el vector estado del sistema en algún instante  $t > t_0$  usando los resultados de mediciones continuas del proceso  $Y$  en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ .

La solución general al problema de filtrado óptimo se obtiene de la siguiente propiedad para los momentos de segundo orden: el menor de todos los momentos de segundo orden de una variable aleatoria escalar es su varianza. De aquí se sigue que la mejor aproximación de una variable aleatoria por una variable no aleatoria mediante el criterio de media cuadrada es dada por su esperanza condicional respecto a las observaciones. Sea  $Y_{t_0}^t$  el conjunto de valores del proceso medido en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ ,  $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : \tau \in [t_0, t]\}$ . Entonces el estimado óptimo del vector  $X_u = X(u)$ , el cual da la solución del problema para  $u = t$  es determinado por la fórmula

$$\hat{X}_u = E[X_u / Y_{t_0}^t] \quad (2.5)$$

Esta fórmula determina el estimado óptimo del valor  $X_u$  para alguna función aleatoria  $X(u)$  usando los resultados de las mediciones de otra función aleatoria  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . También es válida para el caso de un vector con argumento  $t$  y la medición de la

función  $Y(t)$  en algún conjunto  $T$  de valores de  $t$ . La aplicación de la fórmula (2.5) es necesaria para encontrar la distribución condicional de  $X_u$ . Este puede ser un problema que en ocasiones no se pueda resolver. En el caso particular en el que  $Y(t)$  y  $X(t)$  son determinados por las ecuaciones (2.4), este puede ser resuelto bajo algunas restricciones adicionales. La fórmula general para el diferencial estocástico del estimado óptimo de una función del vector de estado dado es la base de la teoría de filtrado óptimo. Sea  $f(X_t, t)$  alguna función escalar del vector de estado  $n$ -dimensional de un sistema y de tiempo. Su estimado óptimo, usando los resultados de observación  $Y_{t_0}^t$  de acuerdo con (2.5), es determinado por la fórmula

$$\hat{f}(t) = E[f(X_t, t)/Y_{t_0}^t]. \quad (2.6)$$

Este estimado representa un funcional del proceso aleatorio  $Y(t)$  en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ , y consecuentemente, es por sí mismo una función de  $t$ . Un problema matemático que sirve de ayuda es encontrar la diferencial estocástica de  $It\hat{\sigma}$  de este proceso aleatorio. Este problema puede ser resuelto bajo la condición que  $W(t)$  en las ecuaciones (2.4) representa el proceso de Wiener cuya dimensión  $r$  es no menor que  $n_1$ , que es la dimensión del proceso de medición  $Y(t)$ , y que la función  $\varphi_1$  en las ecuaciones (2.4) no depende de  $X$ . Las ecuaciones (2.4) toman la forma

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y, X, t)dt + \psi_1(Y, t)dW, \\ dX &= \varphi(Y, X, t)dt + \psi(Y, X, t)dW, \end{aligned} \quad (2.7)$$

### Diferencial de $It\hat{\sigma}$ para una Función del Estimado Óptimo

La ecuación diferencial estocástica del estimado óptimo de la variable aleatoria  $f(X_t, t)$  para las ecuaciones (2.4) es dada por la fórmula

$$\begin{aligned} d\hat{f} &= E[f_t(X, t) + f_x(X, t)^T \varphi(Y, X, t) \\ &+ \frac{1}{2}tr\{f_{xx}(X, t)(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)\}/Y_{t_0}^t]dt + E[f(X, t)\{\varphi_1(Y, X, t)^T - \hat{\varphi}_1^T\} \\ &+ f_x(X, t)^T(\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \hat{\varphi}_1 dt), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} (\psi\nu\psi^T)(x, y, t) &= \psi(y, x, t)\nu(t)\psi(y, x, t)^T, \\ (\psi\nu\psi_1^T)(y, x, t) &= \psi(y, x, t)\nu(t)\psi_1(y, t)^T, \\ (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(y, t) &= [\psi_1(y, t)\nu(t)\psi_1(y, t)^T]^{-1}, \\ \hat{\varphi}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 p_t(x) dx = E[\varphi_1(X_t, Y_t, t/Y_{t_0}^t), \end{aligned} \quad (2.9)$$



y  $p_t(x)$  es la densidad condicional de  $X_t$  relativa a  $Y_{t_0}^t$ ; las derivadas  $f_t, f_x, f_{xx}$  y todas las esperanzas condicionales del lado derecho existen.

### Ecuación para la Función Característica

Sustituyendo en la ecuación (2.8)  $f(x, t) = e^{i\lambda^T X_t}$  se obtendrá la ecuación estocástica para la función condicional característica del vector aleatorio  $X_t$  :

$$g_t(\lambda) = E[e^{i\lambda^T X_t} / Y_{t_0}^t]. \quad (2.10)$$

Haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned} f_t &= 0, f_x = i\lambda e^{i\lambda^T x}, f_{xx} = -\lambda\lambda^T e^{i\lambda^T x}, \\ \text{tr}\{\lambda\lambda^T (\psi\nu\psi^T)(y, x, t)\} &= \lambda^T (\psi\nu\psi^T)(y, x, t)\lambda, \end{aligned} \quad (2.11)$$

de la ecuación (2.8) se obtiene

$$\begin{aligned} dg_t(\lambda) &= E[i\lambda^T \varphi(Y, X, t) - \frac{1}{2}(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)\lambda\lambda^T e^{i\lambda^T X} / Y_{t_0}^t] dt \\ &+ E[\{\varphi_1(Y, X, t)^T - \widehat{\varphi}_1^T + i\lambda^T (\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)\} \\ &\times e^{i\lambda^T X} / Y_{t_0}^t] (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt). \end{aligned} \quad (2.12)$$

El lado derecho representa una función de  $\lambda$ . La distribución condicional del vector aleatorio  $X$  es completa y únicamente determinada por su función característica. Resolviendo la ecuación (2.12) es posible evaluar el estimado óptimo  $\widehat{X}_t$  del vector de estado  $X_t$  determinado por la fórmula (2.5). Mediante estas fórmulas es posible obtener la expresión para la esperanza en términos de la función característica.

$$\widehat{X}_t = E[X_t / Y_{t_0}^t] = \left[ \frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \quad (2.13)$$

### Ecuación para la Densidad Condicional

La ecuación estocástica para la densidad condicional  $p_t(x)$  del vector aleatorio  $X_t$  es derivada a continuación

$$\begin{aligned} dp_t(x) &= -\frac{\partial^T}{\partial x} [\varphi(Y, x, t)p_t(x)] dt \\ &+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x} [(\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)p_t(x)] \right\} (\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)(dY - \widehat{\varphi}_1 dt) \end{aligned} \quad (2.14)$$

o

$$dp_t(x) = L^* p_t(x) dt + \{[\psi_1(Y, x, t)^T - \varphi_1^T] p_t(x) - \frac{\partial^T}{\partial x} [(\psi \nu \psi^T)(Y, x, t) p_t(x)]\} (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}(Y, t) (dY - \widehat{\varphi}_1 dt), \quad (2.15)$$

donde  $L^*$  es el operador adjunto del operador

$$L = \varphi(Y, x, t)^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} [(\psi \nu \psi^T)(Y, x, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x}]. \quad (2.16)$$

Observando la última ecuación de (2.9), se concluye que la ecuación (2.14) representa una ecuación integro-diferencial relativa a la densidad condicional  $p_t(x)$ . Como el momento inicial  $t_o$  la función  $p_{t_o}(x)$  sirve como la condición inicial para la ecuación (2.14). Después de resolver la ecuación (2.14), se puede encontrar de acuerdo con la fórmula (2.5) el estimado óptimo  $\widehat{X}_t$  del vector de estado  $X_t$  del sistema

$$\widehat{X}_t = E[X_t / Y_{t_o}^t] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_t(x) dx. \quad (2.17)$$

Como la fórmula (2.4) determina la diferencial estocástica de  $\text{It}\widehat{o}$  del proceso aleatorio  $\widehat{f}(t)$ , las ecuaciones (2.12) y (2.14) representan ecuaciones estocásticas de  $\text{It}\widehat{o}$ . La ecuación (2.14) fué originalmente obtenida en otra forma y bajo restricciones más rígidas en [94] referida como la ecuación estocástica de Stratonovich. Al mismo tiempo, la ecuación para  $p_t$  en la forma de  $\text{It}\widehat{o}$  fué obtenida en [63] también bajo restricciones más rígidas. Por lo tanto es usualmente llamada la ecuación de Stratonovich-Kushner.

## Diferencial Estocástica de la Esperanza Matemática

La fórmula (2.5) determinó el estimado óptimo como la esperanza condicional de  $\widehat{X}$  de la variable aleatoria correspondiente  $X$ . El estimado óptimo obtenido como resultado de mediciones es caracterizado por la matriz de covarianza condicional  $R$ . Estas fórmulas se pueden obtener de la fórmula general (2.8). Como la fórmula (2.8) determina la diferencial estocástica de una función escalar del estado del sistema, es necesario aplicarla para cada elemento de las matrices  $\widehat{X}$  y  $R$  por separado. Sustituyendo en (2.8)  $f(X, t) = X_l$ ,  $f_t = 0$ ,  $f_x = [0, \dots, 1, \dots]^T$ ,  $f_{xx} = 0$ , y la fórmula (2.8) toma la forma

$$d\widehat{X}_l = \widehat{\varphi}_l dt + E[X_l(\varphi_l^T - \widehat{\varphi}_l^T) + (\psi \nu \psi_l^T)_l / Y_{t_o}^t] (\psi_l \nu \psi_l^T)^{-1} (dY - \widehat{\varphi}_l dt) \quad (l = 1, \dots, n) \quad (2.18)$$

donde de acuerdo con la última ecuación de (2.8)  $\hat{\varphi}_l = E[\varphi_l(Y, X, t)/Y_{t_0}^t]$ ,  $(\psi\nu\psi_l^T)_l$ , siendo la  $l^{era}$  columna de la matriz  $\psi\nu\psi_l^T$  y los argumentos de las funciones  $\varphi_l$ ,  $\psi\nu\psi_l^T$  y  $(\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1}$  son omitidos por brevedad. Entonces la matriz para el diferencial estocástico del estimado óptimo  $\hat{X}$  del vector de estado del sistema  $X$  está dada por

$$d\hat{X} = \hat{\varphi}dt + E[X\{(\varphi_l(Y, X, t))^T - \hat{\varphi}_l^T\}] + (\psi\nu\psi_l^T)(Y, X, t)/Y_{t_0}^t(\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1}(Y, t)(dY - \hat{\varphi}_l dt) \quad (2.19)$$

### Diferencial Estocástica del Momento Condicional de Segundo Orden

Sustituyendo en (2.8)  $f(X, t) = X_k X_l$  con  $k < l$ ,  $f_t = 0$ ,  $f_x = [0, \dots, X_l \dots X_k \dots, 0]^T$ ,

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo las dos columnas y renglones centrales conteniendo unos, los correspondientes a  $k$ , y  $l$  respectivamente, de la fórmula (2.8) se tiene

$$d\Gamma_{kl} = E[X_k \varphi_l + X_l \varphi_k + (\psi\nu\psi^T)_{kl}/Y_{t_0}^t]dt + E[X_k X_l (\varphi_l^T - \hat{\varphi}_l^T) + X_k (\psi\nu\psi_l^T)_l + X_l (\psi\nu\psi_l^T)_k / Y_{t_0}^t] (\psi_l\nu\psi_l^T)^{-1} (dY - \hat{\varphi}_1 dt) (k, l = 1, \dots, n), \quad (2.20)$$

donde  $d\Gamma_{kl} = E[X_k X_l \varphi_k / Y_{t_0}^t]$ , y  $(\psi\nu\psi^T)_{kl}$  es el elemento correspondiente de la matriz  $(\psi\nu\psi^T)$ . Re-escribiendo la fórmula (2.20) como

$$d\Gamma_{kl} = E[X_k \varphi_l + X_l \varphi_k + (\psi\nu\psi^T)_{kl}/Y_{t_0}^t]dt + \sum_{\rho=1}^r E[X_k X_l a_{\rho} + X_k b_{lk} + X_l b_{k\rho}/Y_{t_0}^t] (dY_{\rho} - \hat{\varphi}_{1\rho} dt), \quad (2.21)$$

donde  $a_{\rho}$  es el  $\rho$ -ésimo elemento de la matriz  $(\varphi_1^T - \hat{\varphi}_1^T)(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$  y  $b_{k\rho}$  es el elemento del  $k$ -ésimo renglón y de la  $\rho$ -ésima columna de la matriz  $\psi\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$ . Denotando por  $b_{\rho}$  la  $\rho$ -ésima columna de la matriz  $\psi\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}$ ,  $b_{\rho} = [b_{1\rho}, \dots, b_{r\rho}]^T$  ( $\rho = 1, \dots, r$ ), se

obtiene la siguiente fórmula diferencial estocástica del momento condicional de segundo orden  $\Gamma$  del vector estado del sistema:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= E[X\varphi(Y, X, t)^T + \varphi(Y, X, t)X^T \\ &+ (\psi\nu\psi^T)(Y, X, t)/Y_{t_0}^t]dt + \sum_{\rho=1}^r E[XX^T a_\rho(Y, X, t) \\ &+ Xb_\rho(Y, X, t)^T + b_\rho X^T/Y_{t_0}^t](dY_\rho - \widehat{\varphi}_{1\rho}dt), \end{aligned} \quad (2.22)$$

### Diferencial Estocástica de la Matriz de Covarianza

Para encontrar la diferencial estocástica de la matriz de covarianza condicional  $R$  del vector estado del sistema se usará la fórmula conocida que relaciona la esperanza, el momento de segundo orden, y la matriz de covarianza del vector aleatorio  $R = \Gamma - \widehat{X}\widehat{X}^T$ , o en la forma escalar  $R_{kl} = \Gamma_{kl} - \widehat{X}_k\widehat{X}_l$ . Derivando en ambos lados de la última fórmula, se obtiene la expresión  $dR_{kl} = d\Gamma_{kl} - d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l)$ . Para encontrar  $d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l)$  se utiliza la fórmula

$$d(Z_1Z_2) = Z_1dZ_2 + Z_2dZ_1 + Y_1\nu Y_2^T dt, \quad (2.23)$$

$Z(t) = [Z_1, Z_2]$  es un proceso de Itô, el cual está dado por

$$dZ(t) = x(t)dt + Y(t)dW(t). \quad (2.24)$$

Aquí  $t_0 > 0$ ,  $W(t)$  es un proceso de Wiener, donde  $Y_1$  y  $Y_2$  representan la primera y segunda columnas de la matriz  $Y = [Y_1, Y_2]$  respectivamente.  $X(t), Y_1(t), Y_2(t)$  son funciones aleatorias que satisfacen las condiciones de existencia.  $Z_1, Z_2$  son los componentes del vector aleatorio  $Z(t)$ . De acuerdo con (2.19)

$$\begin{aligned} E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}\psi_1, \\ E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_l/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}\psi_1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

juegan el rol de los renglones  $Y_1, Y_2$  de la matriz, en este caso se llega a

$$\begin{aligned} d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l) &= \widehat{X}_k d\widehat{X}_l + \widehat{X}_l d\widehat{X}_k \\ &E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}\psi_1\nu\psi_1^T(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \\ &\times E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi_1\nu\psi_1^T)_l/Y_{t_0}^t]dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sustituyendo aquí las expresiones para  $d\widehat{X}_k$  y  $d\widehat{X}_l$  de la ecuación (2.18), se tiene

$$\begin{aligned} d(\widehat{X}_k\widehat{X}_l) &= \{\widehat{X}_k\widehat{\varphi}_l + \widehat{X}_l\widehat{\varphi}_k \\ &+ E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}E[X_l(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_l^T/Y_{t_0}^t]\}dt \\ &+ E[(\widehat{X}_kX_l + \widehat{X}_lX_k)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + \widehat{X}_k(\psi\nu\psi_1^T)_l \\ &+ \widehat{X}_l(\psi\nu\psi_1^T)_k/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(dY - \widehat{\varphi}_l dt). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substrayendo esta fórmula de (2.21) y adicionando el término

$$E[(\widehat{X}_k \widehat{X}_l)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T)/Y_{t_0}^t] = \widehat{X}_k \widehat{X}_l (\widehat{\varphi}_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) = 0, \quad (2.28)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} dR_{kl} = & \{E[(X_k - \widehat{X}_k)\varphi_l + (X_l - \widehat{X}_l)\varphi_k + (\psi\nu\psi_1^T)_{kl}/Y_{t_0}^t] \\ & - E[X_k(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) + (\psi\nu\psi_1^T)_k/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}E[X_l(\varphi_1 - \widehat{\varphi}_1) \\ & + (\psi\nu\psi_1^T)_l^T/Y_{t_0}^t]\}dt + E[(X_k - \widehat{X}_k)(X_l - \widehat{X}_l)(\varphi_1^T - \widehat{\varphi}_1^T) \\ & + (X_k - \widehat{X}_k)(\psi\nu\psi_1^T)_l + (X_l - \widehat{X}_l)(\psi\nu\psi_1^T)_k/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1} \\ & \times (dY - \widehat{\varphi}_1 dt)(k, l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Haciendo algunas transformaciones en la fórmula anterior(2.29), obtenemos la fórmula de la matriz diferencial estocástica para la matriz de covarianza como la solución de

$$\begin{aligned} dR = & \{E[(X - \widehat{X})\varphi(Y, X, t)^T + \varphi(Y, X, t)(X^T - \widehat{X}^T) - E[X\{(\varphi_1(Y, X, t)^T - \widehat{\varphi}_1^T)\} + \\ & (\psi\nu\psi_1^T)(Y, X, t)/Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(Y, t)E[\{(\varphi_1(Y, X, t) - \widehat{\varphi}_1)\}X^T \\ & + (\psi_1\nu\psi^T)(Y, X, t)/Y_{t_0}^t]\}dt \\ & + \sum_{\rho=1}^r E[(X - \widehat{X})(X^T - \widehat{X}^T)a_\rho(Y, X, t) + (X - \widehat{X})b_\rho(Y, X, t)^T \\ & + (X - \widehat{X})^T/Y_{t_0}^t](dY_\rho - \widehat{\varphi}_{l_\rho} dt). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Hasta aquí se ha establecido el planteamiento del problema y solución para el caso de un sistema representado por ecuaciones de estado lineales, y de observaciones lineales, ambas con la presencia de disturbios los cuales se comportan como ruidos blancos gaussianos, lo cual fué desarrollado por Kalman-Bucy. En esta tesis se presenta el caso del problema del filtro y control para ecuaciones de estado integro-diferenciales (del tipo de Itô-Volterra) y ecuaciones polinomiales (de grados 3 y 4) con observaciones lineales y con la presencia de ruidos blancos gaussianos y su solución.

## 2.1.2. Filtro de Kalman-Bucy (caso continuo)

### Planteamiento del Problema

La representación del modelo está dada por

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (2.31)$$

$$z(t) = H^T(t)x(t) + v(t) \quad (2.32)$$

en el cual  $F, G, H$  son matrices  $n \times n, n \times m,$  y  $n \times p$  respectivamente. Los procesos  $w(\cdot)$  y  $v(\cdot)$  son ruidos blancos Gaussianos con media cero tales que

$$E \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(s) & v^T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \delta(t-s)$$

con  $R(t) = R'(t) > 0$  para toda  $t$ . Muy frecuentemente,  $S(t) \equiv 0$ , i.e.  $w(\cdot)$  y  $v(\cdot)$  son independientes, lo cual es supuesto. Entonces  $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$ . Se asume un tiempo inicial finito  $t_0$ . Por otro lado  $x(t_0)$  será asumida como variable aleatoria Gaussiana con media  $x_0$  y varianza  $p_0$ . La tarea de la estimación es usar mediciones de  $z(s)$  para  $s < t$  para estimar  $x(t)$ , este estimado es llamado  $\hat{x}(t)$ , el cual minimiza  $E[\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2]$ . Esto significa que  $\hat{x}(t)$  es necesariamente una estimación de la media condicional, con respecto a las observaciones.

### Solución

La solución es obtenida de la siguiente manera. Definamos  $P(t) = P^T(t) \geq 0$  como la solución de

$$\dot{P} = PF^T + FP - PHR^{-1}H^TP + GQG^T, P(t_0) = P_0 \quad (2.33)$$

Y  $\hat{x}(t)$  es la solución de

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + P(t)H(t)R^{-1}(t)[z(t) - H^T(t)\hat{x}(t)] \quad (2.34)$$

Donde  $P(t)H(t)R^{-1}(t)$  denota la ganancia de Kalman.  $E[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T = P(t)$ . La efectividad del estimador óptimo es medida por la covarianza del error, la cual es dada por la solución de la ecuación (2.33), y la existencia de la solución a esta ecuación en  $(t_0, \infty)$  está garantizada.

### 2.1.3. Filtro de Kalman-Bucy Extendido.

Ahora extenderemos la estimación óptima de sistemas lineales a través del filtro de Kalman, al caso más general cuando el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + w(t) \quad (2.35)$$

El vector  $f$  es una función no lineal del estado y  $w(t)$  es un ruido gaussiano de media cero y tiene una matriz de densidad espectral  $Q(t)$ . La observación está dada por

$$z(t) = h(x(t), t) + v(t) \quad (2.36)$$

Presentaremos una de varias técnicas prácticas para estimar el estado del sistema no lineal. La técnica consiste en aplicar el método de aproximación por series de Taylor para obtener un sistema "lineal" y calcular su estimado. Debemos expandir  $f$  en su serie de Taylor alrededor de un vector conocido  $\bar{x}(t)$  cercano a  $x(t)$ . En particular si  $f$  se expande alrededor del estimado del vector de estado  $\bar{x}(t) = \hat{x}(t)$ . El algoritmo conocido como filtro de Kalman extendido es:

Sea el modelo del sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + w(t); \quad w(t) \sim N(0, Q(t)) \quad (2.37)$$

Con las observaciones

$$z(t) = h(x(t), t) + v(t); \quad v(t) \sim N(0, R(t)) \quad (2.38)$$

y las condiciones iniciales

$$x(0) \sim N(\hat{x}_0, P_0). \quad (2.39)$$

Además supondremos

$$E[w(t)v^T(\tau)] = 0 \quad \text{para toda } t \text{ y toda } \tau \quad (2.40)$$

La ecuación del estimado del estado, esta dada por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), t) + K(t)[z(t) - h(\hat{x}(t), t)] \quad (2.41)$$

La ecuación de la covarianza del error es:

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), t)P(t) + P(t)F^T(\hat{x}(t), t) + Q(t) - P(t)H^T(\hat{x}(t), t)R^{-1}(t)H(\hat{x}(t), t)P(t) \quad (2.42)$$

Además la ecuación de la ganancia está dada por:

$$K(t) = P(t)H^T(\hat{x}(t), t)R^{-1}(t) \quad (2.43)$$

Para la linealización :

$$F(\hat{x}(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x(t)} \quad \text{evaluada en } x(t) = \hat{x}(t) \quad (2.44)$$

y

$$H(\hat{x}(t), t) = \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x(t)} \quad \text{evaluada en } x(t) = \hat{x}(t) \quad (2.45)$$

## 2.2. Teoría Lineal de Control Óptimo

### 2.2.1. Conceptos básicos

La teoría moderna de control óptimo tiene sus raíces en el cálculo de variaciones [81]. El problema de control óptimo para sistemas en tiempo continuo se caracteriza por determinar un objetivo, el cual consiste en encontrar la ley de control  $u(t)$  que actúe sobre el sistema en cierto intervalo  $t \in [t_0, t_f]$  y que optimice (minimice o maximice) un criterio de desempeño considerado. La trayectoria de estado que satisface las limitaciones de la variable de estado en el intervalo de control es llamada *trayectoria admisible* [81].

**Principio de Separación:** En sistemas de control lineales afectados por perturbaciones estocásticas y con índice de desempeño cuadrático, el principio de separación puede emplearse para desacoplar en dos secciones el sistema de control estocástico completo. Una sección es el controlador óptimo determinista en el que se tiene el conocimiento exacto y completo de todos los estados del sistema y la sección restante es el filtro óptimo que procesa las mediciones incompletas y con ruido de los estados para obtener los estimados del estado del sistema. Estos estimados son utilizados por el controlador óptimo en lugar de los estados [64].

**Teorema 2-10:** La solución óptima del problema del controlador con retroalimentación de salida estocástica es la misma que la solución del problema del controlador con retroalimentación de estado óptimo estocástico, excepto que en la ley de control  $u(t)$ , el estado  $x(t)$  del sistema es reemplazado por su estimado óptimo  $m(t)$ . La entrada de control se selecciona como  $u(t) = -F^0(t)m(t)$ , donde  $F^0(t)$  es la matriz de ganancia del regulador óptimo y  $m(t)$  es la salida del filtro óptimo.

### 2.2.2. El Problema de Control Óptimo en Sistemas Lineales

En muchos sistemas de control se presentan problemas de optimización, por ejemplo si se requiere llevar a cero el estado tan rápido como sea posible y a la vez acotar la magnitud de las entradas. Sea un sistema lineal descrito por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.46)$$

donde  $x(t) \in R^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in R^m$  es la entrada de control,  $A(t) \in R^{n \times n}$  y  $B \in R^{n \times m}$ .

La función de costo a minimizar se define por

$$J = \frac{1}{2}x^T(T_1)\psi x(T_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T_1} u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T_1} x^T(s)L(s)x(s)ds \quad (2.47)$$



donde  $R^{m \times m}$  es una matriz simétrica definida positiva,  $\psi^{n \times n}$  y  $L^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas no negativas. Se considera también que  $T_1 > t_0$ .

En la resolución del problema de control óptimo, es necesario encontrar la entrada de control  $u^*(t)$  en  $t \in [t_0, T_1]$  que minimice la función de costo  $J$  a través de la trayectoria  $x^*(t)$ , generada en  $t \in [t_0, T_1]$  al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado.

### 2.2.3. Solución del Problema de Control Óptimo en Sistemas Lineales

El problema de control óptimo descrito por (2.46) y (2.47) se resuelve de manera similar como aparece en [30]. Luego, la matriz de ganancia para el control óptimo es

$$K_c = (R(t))^{-1} B^T(t) Q(t)$$

y la ley de control óptimo se determina por

$$u^*(t) = K_c x = (R(t))^{-1} B^T(t) Q(t) x(t) \quad (2.48)$$

La función matricial  $Q(t)$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t) \quad (2.49)$$

Al sustituir la ley de control óptimo (2.48) en (2.46), se obtiene la ecuación de estado óptimamente controlado

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)(R(t))^{-1} B^T(t) Q(t)] x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.50)$$

De esta forma, se resuelve el problema de control óptimo para el sistema lineal descrito por (2.46), sujeto al criterio de minimización (2.47) y gobernado por el control (2.48).

## 2.3. Sistemas Continuos con Retardo

### 2.3.1. Definiciones y conceptos básicos de los Sistemas con Retardo

Una clase de sistemas con retardo se describe por la ecuación

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t-h)) \quad (2.51)$$

donde  $x(t) \in R^n$  es el vector de estados del sistema,  $h \in R$  tal que  $h > 0$  es el retardo y  $F$  es una función continua que satisface la condición de Lipschitz con respecto a sus argumentos.

**Definición 1:** Una función  $f$  definida en  $[a, b]$ , satisface la condición de Lipschitz en ese intervalo si existe una constante  $K$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (2.52)$$

donde  $K$  es la constante de Lipschitz. Se dice entonces que  $f$  es Lipschitz en la variable  $x$ .

Si  $D_x f(t, x)$  denota la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  y  $|D_x f(t, x)y| \leq K \quad \forall y \in R^n$ , entonces  $f$  es Lipschitz con constante de Lipschitz  $K$ .

**Definición 2:** El espacio de estados de un sistema de control continuo con retardo es un espacio vectorial de dimensión infinita. Así, un conjunto de funciones vectoriales de dimensión  $n$  en este espacio se define mediante

$$\Sigma = \mathbf{x}(\Theta), \quad t - \Delta \leq \Theta \leq t \quad (2.53)$$

donde  $\Delta$  es el retardo más grande del sistema.

En el caso general, la ecuación de estado para un sistema de control con retardo se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-h_{x1}), \mathbf{x}(t-h_{x2}), \dots, \mathbf{x}(t-h_{xN}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t-h_{u1}), \mathbf{u}(t-h_{u2}), \dots, \mathbf{u}(t-h_{uR}), t) \quad (2.54)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función no lineal,  $\mathbf{x}(t) \in R^n$  es el vector de estados,  $h_{xi} \in R$  son los retardos en el estado tal que  $h_{xi} > 0$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mathbf{x}(t-h_{xN}) \in R^n$  es el vector de estados con retardo,  $\mathbf{u}(t) \in R^p$  es el vector de entradas de control,  $h_{ui} \in R$  son los retardos en las entradas de control tal que  $h_{ui} > 0$  con  $i = 1, 2, \dots, R$  y  $\mathbf{u}(t-h_{uR}) \in R^p$  es el vector de entradas de control con retardo.

Además, si el vector de salida  $\mathbf{y}(t)$  está en función de los vectores de estado y de las entradas de control, se describe por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-h_{x1}), \mathbf{x}(t-h_{x2}) \dots \mathbf{x}(t-h_{xN}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t-h_{u1}), \mathbf{u}(t-h_{u2}) \dots \mathbf{u}(t-h_{uR}), t) \quad (2.55)$$

en donde  $\mathbf{g}$  en general es una función no lineal [69].

En sistemas de control lineales con retardo, la ecuación de estado se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t-h_{xi}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^R \mathbf{B}_i(t)\mathbf{u}(t-h_{ui}) \quad (2.56)$$

donde  $\mathbf{A}(t) \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}_i(t) \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(t) \in R^{n \times p}$  y  $\mathbf{B}_i(t) \in R^{n \times p}$ .

La ecuación de salida se describe por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i(t)\mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^R \mathbf{D}_i(t)\mathbf{u}(t - h_{ui}) \quad (2.57)$$

donde  $\mathbf{C}(t) \in R^{q \times n}$ ,  $\mathbf{C}_i(t) \in R^{q \times n}$ ,  $\mathbf{D}(t) \in R^{q \times p}$  y  $\mathbf{D}_i(t) \in R^{q \times p}$ .

En (2.56) si las entradas son idénticamente cero, la ecuación de estado se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t - h_{xi}), \quad t \geq t_0 \quad (2.58)$$

que se conoce como la ecuación de estado homogénea en sistemas lineales con retardo [69].

El estado inicial es

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - \Delta_x, t_0] \quad (2.59)$$

donde  $\phi(t)$  es el estado inicial del sistema y  $\Delta_x$  denota al retardo de mayor tamaño [69].

Se puede demostrar que si  $\mathbf{A}(\cdot)$  y  $\mathbf{A}_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  son matrices reales y continuas, y además las constantes  $h_{xi}$  son positivas, una solución  $\mathbf{x}(t, t_0, \phi, \mathbf{0})$  de (2.58) existe y depende únicamente del estado inicial  $\phi(\cdot)$  dada por  $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$  [28]. Se supone que todas las funciones son reales, continuas y definidas en  $t \in [t_0 - \Delta_x, t_0]$ .

**Teorema 2-1:** Sean  $\mathbf{A}(\cdot)$  y  $\mathbf{A}_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  matrices continuas en  $t \geq t_0 - \Delta_x$ , donde  $\Delta_x$  es el retardo de mayor tamaño entonces la solución de (2.58) es lineal con respecto a la función inicial  $\phi(t)$ .

**Prueba:** Sean  $\mathbf{x}(t, t_0, \phi_1, \mathbf{0})$  y  $\mathbf{x}(t, t_0, \phi_2, \mathbf{0})$  soluciones de (2.58) correspondientes a las funciones iniciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respectivamente. Considerando la función

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}(t, t_0, \phi_1, \mathbf{0}) + c_2\mathbf{x}(t, t_0, \phi_2, \mathbf{0}) \quad (2.60)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes escalares arbitrarias, se verifica que la función  $\mathbf{x}(t)$  en (2.60) satisface (2.58). Además,  $\mathbf{x}(t)$  en (2.60) satisface la condición inicial

$$\mathbf{x}(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t), \quad t \in [t_0 - \Delta_x, t_0] \quad (2.61)$$

luego

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \mathbf{0}) = c_1\mathbf{x}(t, t_0, \phi_1, \mathbf{0}) + c_2\mathbf{x}(t, t_0, \phi_2, \mathbf{0}) \quad (2.62)$$

que establece la linealidad de la solución respecto a la función inicial.

Si se considera retardo único, por ejemplo

$$h_{x1} = h, \quad \mathbf{A}_i(t) = \mathbf{0}, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (2.63)$$

(2.58) se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}(t-h), \quad t \geq t_0 \quad (2.64)$$

donde se supone que la matriz  $\mathbf{A}(t) \in R^{n \times n}$  y la matriz  $\mathbf{A}_1(t) \in R^{n \times n}$ . Además, el estado inicial de (2.64) se describe mediante

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0 \quad (2.65)$$

Así, el teorema ha sido probado.

**Definición 3:** La matriz  $\Phi(t, \tau) \in R^{n \times n}$  es llamada *matriz fundamental* de (2.64) si satisface las condiciones siguientes

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau) + \mathbf{A}_1(t)\Phi(t-h, \tau), \quad t \geq t_0 \quad (2.66)$$

y

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I}\delta(t - \tau), \quad t, \tau \in [t_0 - h, t_0] \quad (2.67)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y  $\delta(\cdot)$  es la función delta de Dirac.

La solución de (2.64) puede expresarse en términos de la matriz fundamental  $\Phi(t, \tau)$ .

**Teorema 2-2:** La solución de (2.64) con la condición inicial (2.65) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \phi, \mathbf{0}) = \int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(t, \tau)\phi(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.68)$$

**Prueba:** De (2.68) y (2.66) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \int_{t_0-h}^{t_0} \frac{d}{dt}(\Phi(t, \tau))\phi(\tau)d\tau = \int_{t_0-h}^{t_0} [\mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau) + \mathbf{A}_1(t)\Phi(t-h, \tau)]\phi(\tau)d\tau \\ &= \mathbf{A}(t)\left[\int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(t, \tau)\phi(\tau)d\tau\right] + \mathbf{A}_1(t)\left[\int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(t-h, \tau)\phi(\tau)d\tau\right] \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}(t-h) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Así, (2.68) satisface a (2.64). También para  $t \in [t_0 - h, t_0]$  por (2.67) y (2.68) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \int_{t_0-h}^{t_0} \mathbf{I}\delta(t - \tau)\phi(\tau)d\tau = \phi(t) \quad (2.70)$$

En el caso de retardo múltiple en la ecuación de estado, por extensión del teorema 2-2 se obtiene el teorema siguiente:

**Teorema 2-3:** La solución del sistema (2.58) y (2.59) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \phi, \mathbf{0}) = \int_{t_0 - \Delta_x}^{t_0} \Phi(t, \tau) \phi(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.71)$$

donde la matriz fundamental  $\Phi(t, \tau)$  es la solución de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(t) \Phi(t - h_{xi}, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (2.72)$$

con la condición inicial

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I} \delta(t - \tau), \quad t, \tau \in [t_0 - \Delta_x, t_0] \quad (2.73)$$

la prueba se realiza de manera análoga a la demostración del teorema 2-2. Por otra parte, para los sistemas de control lineales con retardo cuya ecuación de estado se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(t) \mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (2.74)$$

y la ecuación de salida descrita por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i(t) \mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \quad (2.75)$$

son importantes los teoremas siguientes:

**Teorema 2-4:** El sistema (2.74) es controlable al origen si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  y la matriz

$$\mathbf{Q}_c(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau) \Psi^T(t_1, \tau) d\tau \quad (2.76)$$

es de rango completo, donde  $\Psi(t, \tau) \in R^{n \times n}$  es la matriz fundamental de (2.74) con  $\mathbf{u} = 0$ .

Para el caso de sistemas de control lineales invariantes en el tiempo con retardo único y constante [69], se considera la matriz

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1^1 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_1^2 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_2^2 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_1^3 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_2^3 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_3^3 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Q}_1^n \mathbf{B}, \mathbf{Q}_2^n \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Q}_n^n \mathbf{B}] \quad (2.77)$$

donde

$$\mathbf{Q}_1^1 = \mathbf{I}, \mathbf{Q}_j^k = 0$$

para  $j = 0$  o  $j > k$ . Y

$$\mathbf{Q}_j^{r+1} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_j^r + \mathbf{A}_1\mathbf{Q}_{j-1}^r$$

**Teorema 2-5:** Los sistemas de control lineales con retardo, cuya ecuación de estado se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.78)$$

son controlables al origen si la matriz  $Q$  en (2.77) tiene rango  $n$ .

También, para los sistemas de control lineales con ecuación de estado (2.58), condición inicial (2.59) y ecuación de salida descrita por  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$  para  $t \geq t_0$ , se tiene el teorema siguiente:

**Teorema 2-6:** Un sistema de control lineal con retardo es observable en  $[t_0, t_1]$  si la matriz

$$\mathbf{Q}_o(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(t, t_0) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{C}(t) \Psi(t, t_0) dt \quad (2.79)$$

es de rango completo, donde  $\Psi(t, t_0) \in R^{n \times n}$  es la matriz fundamental de soluciones del sistema. La matriz fundamental de soluciones debe satisfacer las condiciones siguientes:

- $\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) = -\Psi(t, \tau) \mathbf{A}(\tau) - \Psi(t, \tau + h) \mathbf{A}_1(\tau + h), \quad t_0 \leq \tau < t - h$
- $\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) = -\Psi(t, \tau) \mathbf{A}(\tau), \quad t - h \leq \tau \leq t$
- $\Psi(t, t) = I$
- $\Psi(t, \tau) = 0, \quad \tau > t$

donde  $I \in R^{n \times n}$  es la matriz identidad.

## 2.4. Control $\mathcal{H}_\infty$ y Filtrado $\mathcal{H}_\infty$

### 2.4.1. Introducción

Uno de los mayores retos en control ha sido el análisis y diseño de sistemas de control multivariable (MIMO). Éste es un problema difícil debido a que la función de transferencia de un sistema MIMO es una matriz de funciones de transferencia. En este tipo de sistemas aún los conceptos básicos como orden, polos o ceros crean dificultad en este caso. Por ejemplo, existen entre cinco y diez definiciones diferentes para los ceros de un sistema multivariable. Antes de la década de 1960, predominaban los métodos de diseño de sistemas de control en el dominio de la frecuencia, como el arreglo de Nyquist (traza polar

de Nyquist), las trazas de valores singulares (trazas de Bode) y el lugar geométrico característico (lugar geométrico de las raíces), desarrolladas principalmente por los profesores H. H. Rosebrock y A. G. J. McFarlane, como una extensión de las técnicas de control clásicas para sistemas multivariables. La técnica de control  $\mathcal{H}_\infty$  nació a principios de la década de 1980, ésta es aplicable a sistemas en el dominio del tiempo y de la frecuencia y pretende como objetivo proveer una solución unificada, en la actualidad dicha técnica tiene una gran aplicación en problemas prácticos.

### 2.4.2. Existencia de un Controlador $\mathcal{H}_\infty$ admisible en el Espacio de Estados

Una matriz de transferencia en términos del espacio de estados es denotada como:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Para calcular la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de esta matriz de transferencia se usa la siguiente fórmula:  $\|G\|_\infty := \sup_\omega \sigma_{max}[G(j\omega)]$  donde  $M^*$  es la matriz conjugada traspuesta de  $M$  y  $\sigma_{max}(M) = \rho(M^*M)^{1/2}$ , denota su máximo valor singular.

Sean  $A$ ,  $Q$  y  $R$  matrices reales de dimensiones  $n \times n$ , con  $Q$  y  $R$  simétricas. Se define la matriz hamiltoniana  $2n \times 2n$  como

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A' \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

donde  $A'$  es la traspuesta de la matriz  $A$

**Lema 1:** Suponer que  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$  y  $X = \text{Ric}(H)$ , donde  $\text{Ric}(H)$  es el operador de Riccati aplicado al hamiltoniano y  $\text{dom}(\text{Ric})$  es el dominio del operador de Riccati, entonces:

- a)  $X$  es simétrica;
- b)  $X$  satisface la ecuación algebraica de Riccati  $A'X + XA + XRX - Q = O$ ;
- c)  $A + RX$  es estable.

**Lema 2:** Suponer que  $H$  no tiene eigenvalores imaginarios,  $R$  es semidefinida positiva o semidefinida negativa y el par  $(A, R)$  es estabilizable. Entonces  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ .

**Lema 3:** Suponer que  $H$  tiene la forma

$$H := \begin{bmatrix} A & -BB' \\ -CC' & -A' \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

con  $(A, B)$  estabilizable y  $(C, A)$  detectable (denotemos el subespacio no observable por  $\mathcal{X}$ ). Entonces  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ .  $X = \text{Ric}(H) \geq 0$  y  $\ker(X) \subset \mathcal{X}$ .

### Cálculo de la Norma $\mathcal{H}_\infty$

Para la matriz de transferencia

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

con  $A$  estable y  $\gamma > 0$ , definimos la matriz hamiltoniana

$$H := \begin{bmatrix} A & -\gamma^{-2}BB' \\ -CC' & -A' \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

y establecemos el siguiente lema:

**Lema 4:** Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $\|G\| < \gamma$ .
- b)  $H$  no tiene eigenvalores en el eje imaginario.
- c)  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ .
- d)  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$  y  $\text{Ric}(H) \geq 0$ , ( $\text{Ric}(H) > 0$  si  $(C, A)$  es observable).

Supongamos que la realización de la matriz de transferencia  $G$  es de la forma

$$G = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Establecemos las siguientes suposiciones:

- i)  $(A, B_1)$  es estabilizable y  $(C_1, A)$  es detectable.
- ii)  $(A, B_2)$  es estabilizable y  $(C_2, A)$  es detectable.



$$\text{iii) } D'_{12} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}.$$

$$\text{iv) } \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D'_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

**Lema 5:** Supongamos que ocurren las suposiciones i), iii) y iv). Entonces es admisible un controlador  $K$  sí y sólo si  $T_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$ , donde  $T_{zw}$  es la función de transferencia en lazo cerrado desde las entradas externas  $w$  hasta la salida de la señal de error  $z$ .

**Teorema:** Existe un controlador admisible tal que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  sí y sólo si ocurren las siguientes tres condiciones:

- i)  $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  y  $X_\infty := \text{Ric}(\infty) \geq 0$ .
- ii)  $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  y  $Y_\infty := \text{Ric}(\infty) \geq 0$ .
- iii)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ .

donde  $H_\infty$  y  $J_\infty$  son matrices hamiltonianas dadas por las siguientes expresiones:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B'_1 - B_2 B'_2 \\ -C'_1 C_1 & -A' \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A' & \gamma^{-2} C'_1 C_1 - C'_2 C_2 \\ -B_1 B'_1 & -A \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Además, cuando ocurren estas condiciones, uno de tales controladores es

$$K_{sub}(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

donde

$$\hat{A}_\infty := A + \gamma^{-2} B_1 B'_1 X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2.$$

$$F_\infty := -B'_2 X_\infty, \quad L_\infty := -Y_\infty C'_2, \quad Z_\infty := (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

**Teorema:** Si se satisfacen las condiciones i)-iii) del teorema anterior, entonces el conjunto de todos los controladores admisibles tal que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  es igual al conjunto de todas las matrices de transferencia desde  $y$  hasta  $u$  en

$$M_\infty(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

### 2.4.3. Filtrado en un escenario $\mathcal{H}_\infty$

Consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)W(t) \quad (2.90)$$

$$Y(t) = C(t)x(t) + D(t)W(t) \quad (2.91)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  es la medición,  $W(t) \in \mathbb{R}^p$  denota el ruido cuadrático integrable, i. e.  $W(t) \in \mathcal{L}_2^p[0, \infty)$ . Damos por hecho que las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ , y  $D(t)$  son funciones de  $t$  acotadas continuas por partes.

**Definición 1:** El sistema dado por las ecuaciones (2.90) y (2.91) se dice que es *estabilizable* si existe una función acotada  $K(t)$  tal que el sistema  $\dot{x}(t) = (A - BK)(t)x(t)$  es exponencialmente estable.

**Definición 2:** El sistema dado por las ecuaciones (2.90) y (2.91) se dice que es *detectable* si existe una función acotada  $L(t)$  tal que el sistema  $\dot{x}(t) = (A - LC)(t)x(t)$  es exponencialmente estable.

También usamos la terminología  $(A, B)$  estabilizable y  $(C, A)$  detectable, respectivamente para referirnos a estas propiedades.

Hay que notar también que si el horizonte del tiempo es finito en el sistema dado por las ecuaciones (2.90) y (2.91) entonces hay que agregar la siguiente condición de ortonormalidad del ruido

$$D(t) \begin{bmatrix} B'(t) \\ D'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

A continuación, vamos a definir las siguientes medidas del rendimiento (en el peor de los casos):

$$J_1 := \sup_{(0 \neq w \in L_2)} \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2}, \quad \text{con } x(0) = 0 \quad (2.93)$$

$$J_2 := \sup_{(0 \neq (x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times L_2)} \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2 + x_0' R x_0}, \quad \text{con } x(0) = 0, \quad R = R' > 0 \quad (2.94)$$

**Teorema** (Filtrado con Condición Inicial Conocida sobre un Horizonte Finito): Sea la condición inicial conocida ( $x(0) = 0$ ) y  $T < \infty$ .

1) Existe un filtro tal que  $J_1 < \gamma^2$  sí y sólo si existe una función matricial simétrica  $P(t)$  para  $t \in [0, T]$  la cual es absolutamente continua, a. e. y satisface

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)C(t)P(t) \\ & + \frac{1}{\gamma^2}P(t)L^T(t)L(t)P(t) + B(t)B^T(t), a.e. \end{aligned} \quad (2.95)$$

con la condición inicial  $P(0) = 0$

2) Además, si se satisface (2.95), un filtro para el cual  $J_1 < \gamma^2$  está dado como sigue:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + P(t)C^T[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (2.96a)$$

$$\hat{z}(t) = L(t)\hat{x}(t). \quad (2.96b)$$

**Teorema** (Filtrado con Condición Inicial Conocida para Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo sobre un Horizonte Infinito): Sea la condición inicial conocida ( $x(0) = 0$ ), que el sistema sea invariante en el tiempo y  $T = \infty$ .

1) Los siguientes postulados son equivalentes:

- a) Existe un filtro tal que  $J_1 < \gamma^2$ .
- b) Existe una matriz simétrica  $P$  que satisface

$$AP + PA^T - P \left[ C^T C - \frac{1}{\gamma^2} L^T L \right] P + BB^T = 0 \quad (2.97)$$

$$P \geq 0, \quad (2.98)$$

y

$$A - P \left[ C^T C - \frac{1}{\gamma^2} L^T L \right] \quad (2.99)$$

es estable (todos los eigenvalores están en el semiplano izquierdo).

c) Existe una matriz simétrica acotada  $P(t)$  para  $t \in [0, \infty)$  que satisface la ecuación (2.95), y  $A - P(t)C^T C + \frac{1}{\gamma^2}P(t)L^T L$  es tal que el siguiente sistema variante en el tiempo lineal no forzado

$$\dot{p}(t) = \left[ A - P(t) \left( C^T C - \frac{1}{\gamma^2} L^T L \right) \right] p(t) \quad (2.100)$$

es exponencialmente estable. Además, si  $P(t)$  con las propiedades mencionadas existe para todo  $t \in [0, \infty)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  existe y es igual a  $P$  que satisface desde la ecuación (2.97) hasta la (2.99).

2) Además, si ocurren b) o c), entonces el filtro dado por (2.96) logra  $J_1 < \gamma^2$  donde cada  $P(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  es la única solución para la ecuación diferencial de Riccati (2.95) con  $P(0) = 0$ , o  $P(t)$  es reemplazada por la  $P$  que satisface desde la ecuación (2.97) hasta la (2.99).

**Teorema** (Filtrado con Condición Inicial Conocida para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo sobre un Horizonte Infinito): Sea la condición inicial conocida  $x(0) = 0$  y  $T = \infty$ .

1) Existe un filtro tal que  $J_1 < \gamma^2$  sí y sólo si existe una función matricial simétrica acotada  $P(t)$  para  $t \in [0, \infty)$  que es absolutamente continua y diferenciable a. e. y satisface (2.95), y  $A(t) - P(t)C^T(t)C(t) + \frac{1}{\gamma^2}P(t)L^T(t)L(t)$  es tal que el siguiente sistema variante en el tiempo lineal no forzado

$$\dot{p}(t) = \left[ A(t) - P(t) \left( C^T(t)C(t) - \frac{1}{\gamma^2}L^T(t)L(t) \right) \right] p(t) \quad (2.101)$$

es exponencialmente estable.

2) Además, el filtro dado por la ecuación (2.96) logra  $J_1 < \gamma^2$ , donde  $P(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  es la única solución para la ecuación diferencial de Riccati (2.95) con  $P(0) = 0$

Notar que para el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo con horizonte infinito, los filtros en estado estacionario y variables en el tiempo (correspondientes a  $P(t)$  que satisface (2.95) y  $P$  que satisface desde la ecuación (2.97) hasta la (2.99), respectivamente) son igualmente adecuados para alcanzar el funcionamiento deseado puesto que estamos tratando únicamente con filtros subóptimos.

**Teorema** (Filtrado con Condición Inicial Desconocida sobre un Horizonte Finito): Sea la condición inicial no conocida y  $T < \infty$ .

1) Existe un filtro tal que  $J_2 < \gamma^2$  sí y sólo si existe una matriz simétrica  $P(t) > 0$  para  $t \in [0, T)$  la cual es absolutamente continua, diferenciable a. e. y satisface

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)C(t)P(t) \\ & + \frac{1}{\gamma^2}P(t)L^T(t)L(t)P(t) + B(t)B^T(t), a.e. P(0) = R^{-1} \end{aligned} \quad (2.102)$$

La matriz  $R$  se elige para reflejar la confianza en el conocimiento *a priori* del estado inicial. Si la condición inicial es muy cercana a cero entonces se escoge un valor grande para  $R$  y viceversa.

2) Además, el mismo filtro tal como (2.96), con  $P(t)$  dado ahora por (2.102), logra  $J_2 < \gamma^2$ .

**Teorema** (Filtrado con Condición Inicial Desconocida sobre un Horizonte Infinito): Sea la condición inicial desconocida y  $T = \infty$ .

1) Existe un filtro tal que  $J_2 < \gamma^2$  sí y sólo si existe una función matricial simétrica acotada  $P(t) > 0$  para  $t \in [0, \infty)$  que satisface (2.102), y tal que el siguiente sistema variante en el tiempo lineal no forzado

$$\dot{p}(t) = \left[ A(t) - P(t) \left( C^T(t)C(t) - \frac{1}{\gamma^2}L^T(t)L(t) \right) \right] p(t) \quad (2.103)$$

es exponencialmente estable.

2) El mismo filtro tal como (2.96), con  $P(t)$  dado por (2.102), logra  $J_2 < \gamma^2$ .

3) Además, si el sistema es invariante en el tiempo, y si  $P(t)$  con las propiedades descritas en 1) existe para todo  $t \in [0, \infty)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  existe y es igual a la  $P$  que satisface desde la ecuación (2.97) hasta la (2.99).

**Corolario** (Filtrado con Condición Inicial Desconocida para Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo sobre un Horizonte Infinito para  $R$  Suficientemente Grande): Si el sistema es invariante en el tiempo y existe una matriz simétrica  $P$  que satisface desde la ecuación (2.97) hasta la (2.99) con  $R^{-1} < P$ , entonces el filtro lineal invariante en el tiempo dado por la ecuación (2.96) con esta  $P$  logra  $J_2 < \gamma^2$ .

#### 2.4.4. Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Lineales Continuos en el Tiempo con Retardo

##### 1) Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ en Horizonte Finito

Considerar el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.104)$$

$$z(t) = L(t)x(t) \quad (2.105)$$

con una medición que es retardada por  $d$  segundos, a saber

$$y(t) = C(t-d)x(t-d) + D(t)w(t) \quad (2.106)$$

donde  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  es el estado del sistema,  $x_0$  es un estado inicial desconocido,  $u(t) \in \mathcal{R}^p$  es una señal de entrada desconocida,  $w(t) \in \mathcal{R}^q$  es una señal de perturbación, la cual se asume como una señal arbitraria en  $\mathcal{L}_2[0, T]$ ,  $z(t) \in \mathcal{R}^r$  es una combinación lineal de las variables de estado que serán estimadas,  $y(t) \in \mathcal{R}^m$  es la observación y  $A(t), B_1(t), B_2(t), C(t), D(t)$ , y  $L(t)$  son matrices variables en el tiempo, acotadas, reales y conocidas con dimensiones apropiadas.

Consideremos el siguiente peor caso en el funcionamiento de la medición

$$\mathcal{J}(R_0, T) = \sup \left\{ \left[ \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{x_0^T R_0 x_0 + \|w\|_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.107)$$

donde  $R_0 = R_0^T > 0$  es una matriz de peso dada para el estado inicial y el supremo se toma sobre toda  $w \in \mathcal{L}_2[0, T]$  y  $x_0$  es tal que  $\|w\|_2^2 + x_0^T R_0 x_0 \neq 0$ . La matriz de peso  $R_0$  es una medición en la incertidumbre en  $x_0$  relativa a la incertidumbre en  $w$ .

En conexión con el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$ , vamos a introducir la siguiente ecuación diferencial de Riccati para algunas matrices definidas positivas  $\delta_1(t)$  y  $\delta_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= AP + PA^T + \gamma^{-2} PL^T LP - [B_1 \delta_1^{-1} D^T + P \bar{C}^T] R^{-1} \\ &\quad \times [D \delta_1^{-1} B_1^T + \bar{C} P] + B_1 \delta_1^{-1} B_1^T, \quad P(0) = R_0^{-1} \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde el argumento del tiempo ha sido omitido y

$$\bar{C}(t) = C(t-d)\Phi(t-d, t) \quad (2.109)$$

$$R(t) = D(t)\delta_1^{-1}(t)D^T(t) + \bar{C}(t)G(t)\bar{C}^T(t) \quad (2.110)$$

$$G(t) = \int_{t-d}^t \Phi(t, \tau) B_1(\tau) \delta_2^{-1} B_1^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau. \quad (2.111)$$

El siguiente teorema nos da una solución para el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  en horizonte finito:

**Teorema:** Considerar el sistema (2.104)-(2.106) y sea  $R_0 = R_0^T > 0$  una matriz de peso del estado inicial dada. Entonces, dado un escalar  $\gamma > 0$ , existe un filtro causal tal que  $\mathcal{J}(R_0, T) < \gamma$  si para algunas matrices definidas positivas  $\delta_1(t)$  y  $\delta_2(t)$  que satisfacen

$$\delta_1(t) + d\delta_2 \leq I, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.112)$$

La ecuación diferencial de Riccati (2.108) tiene una solución acotada sobre  $[0, T]$ . Además, un filtro apropiado está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B_2(t)u(t) + K(t)\{y(t) - \bar{C}(t) \\ &\quad \times [\hat{x}(t) - \int_{t-d}^t \Phi(t, \tau) B_2(\tau) u(\tau) d\tau]\}, \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\hat{z}(t) = L(t)\hat{x}(t) \quad (2.114)$$

donde

$$K(t) = [P(t)\bar{C}^T(t) + B_1(t)\delta_1^{-1}(t)D^T(t)]R^{-1}(t). \quad (2.115)$$

## 2) Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ en Horizonte Infinito

Aquí abordaremos el diseño de un filtro estacionario que resuelve el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  sobre un horizonte infinito. En este caso, asumiremos que el sistema (2.104)-(2.106) es invariante en el tiempo y que las señales de ruido  $w$  y  $v$  son señales arbitrarias en  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ . Además, el índice de funcionamiento  $\mathcal{J}(R_0, T)$  de (2.107) es reemplazado por

$$\mathcal{J}_0(R, T) = \sup \left\{ \left[ \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.116)$$

donde ahora las normas son  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  y el supremo es tomado sobre toda  $w \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$

Ahora, las matrices  $\bar{C}(t)$  y  $G(t)$  de (2.109) y (2.111) se vuelven constantes y son dadas por

$$\bar{C} = C \exp(-Ad), \quad G = \int_0^d \exp(A\tau) B_1 \delta_2^{-1} B_1^T \exp(A^T \tau) d\tau$$

Ahora, si para algunas matrices definidas positivas constantes  $\delta_1$  y  $\delta_2$  que satisfacen (2.112), existe una solución acotada  $P(t)$  para (2.108) sobre  $[0, \infty)$ , esta solución convergerá, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a la estabilización de la solución de la ecuación algebraica asociada de Riccati, que es, a saber

$$\begin{aligned} & AX + XA^T + \gamma^{-2} X L^T L X - [B_1 \delta_1^{-1} D^T + X \bar{C}^T] \\ & \times R^{-1} [D \delta_1^{-1} B_1^T + \bar{C} X] + B_1 \delta_1^{-1} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

**Teorema:** Considerar el sistema (2.104), (2.105) bajo la suposición de que todas las matrices son constantes. Entonces, dado un escalar  $\gamma > 0$ , existe un filtro causal invariante en el tiempo, asintóticamente estable tal que  $\mathcal{J}_0 < \gamma$  si para algunas matrices definidas positivas constantes  $\delta_1$  y  $\delta_2$  que satisfacen (2.112) la ecuación algebraica asociada de Riccati tiene una solución estabilizadora  $X = X^T \geq 0$ . Además, un filtro apropiado está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2 u(t) + K \{y(t) - \bar{C} \\ & \times [\hat{x}(t) - \int_{t-d}^t \exp(A(t-\tau)) B_2 u(\tau) d\tau]\}, \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\hat{z}(t) = L\hat{x}(t) \quad (2.119)$$

donde

$$K = [X \bar{C}^T + B_1 \delta_1^{-1} D^T] R^{-1} \quad (2.120)$$

## 2.5. Teoría de Modos Deslizantes.

### 2.5.1. Conceptos básicos.

#### Sistemas de estructura variable.

En sistemas de estructura variable permitimos que el control cambie la estructura del sistema, es decir, a través del control el sistema conmuta, en cualquier instante, de un conjunto de funciones continuas de estado a otro.

#### Modos Deslizantes.

Los modos deslizantes se conciben para sistemas dinámicos cuyo desempeño esencial en lazo abierto es modelado con ecuaciones diferenciales ordinarias, al realimentar el sistema y aplicar una acción de control discontinua, obtenemos un sistema de estructura variable definido en el dominio del tiempo y es gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias con el lado derecho discontinuo. Si tenemos un control como una función de conmutación de los estados del sistema, conmutando a alta frecuencia, ese movimiento es llamado modo deslizante.

#### Superficie de conmutación.

La superficie de conmutación  $s_i(x) = 0$ , línea de conmutación en el caso escalar, es una superficie  $(n - m)$  dimensional en  $R^n$  determinada por la intersección de  $m$  superficies de conmutación  $s_i(x) = 0$ . Las superficies de conmutación son diseñadas tal que la respuesta del sistema restringida a  $s(x) = 0$  tenga el desempeño deseado, así como características de estabilidad y seguimiento. Una técnica para diseñar estas superficies de conmutación es el método de control equivalente.

#### Método de control equivalente.

Es un procedimiento para deducir las ecuaciones de modos deslizantes y satisfacen la metodología de Filippov. Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (2.121)$$

donde

$$x, f(x) \in \mathbf{R}^n, B(x) \in \mathbf{R}^{n \times m}, u(x) \in \mathbf{R}^m$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{bmatrix}$$

$$s(x)^T = [ s_1(x) \quad \dots \quad s_m(x) ]$$

donde cada superficie  $s_i(x) = 0$  es el conjunto de puntos de discontinuidad para la componente del control correspondiente  $u_i$ . Dado que el movimiento en el modo deslizante



implica que  $s(x) = 0$  para  $t > 0$  podemos asumir que  $\dot{s} = 0$  también. Las ecuaciones de la superficie de conmutación para el sistema (2.121) tienen la forma:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \quad \text{donde } G = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.122)$$

Asumimos que la matriz  $GB$  es no singular para cualquier  $x$ , encontrar el control equivalente es la solución a (2.122):

$$u_{eq}(x) = -(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x) \quad (2.123)$$

y substituyendo  $u_{eq}(x)$  en (2.121), obtenemos la ecuación del modo deslizante :

$$\dot{x} = f(x) - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x) \quad (2.124)$$

La ecuación (2.124) representa el modo deslizante en la superficie  $s(x) = 0$ .

Desde un punto de vista geométrico, el método de control equivalente, significa reemplazar el control discontinuo en la intersección de superficies de conmutación por un control continuo tal que el vector de velocidad de estado permanezca en la superficie tangencial.

#### Condiciones de estabilidad

La existencia del modo deslizante requiere estabilidad de la trayectoria de estado hacia la superficie deslizante  $s(x) = 0$ , al menos asintóticamente en la vecindad de la superficie, en la región llamada de atracción. Geométricamente, el vector tangente, o la derivada en el tiempo del vector de estado debe apuntar hacia la superficie deslizante en la región de atracción.

## 2.5.2. Control por Modos Deslizantes.

### Control unitario.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t) \quad (2.125)$$

con vectores de estado y control  $x \in R^n$   $u \in R^m$  y las funciones dependientes del estado  $f(x, t)$   $h(x, t)$  y la matriz de control de entrada  $B(x, t) \in R^{n \times m}$ . El vector  $h(x, t)$  representa las perturbaciones del sistema y su influencia en el proceso de control debe ser rechazada. La ecuación

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.126)$$

representa un sistema nominal en lazo abierto el cual asumimos que es asintóticamente estable con una función candidata de Lyapunov conocida,

$$V(x) > 0 \quad (2.127)$$

$$W_o = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=0, u=0} = \text{grad}(V)^T f < 0 \quad \text{grad}(V)^T = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} \right], \quad (2.128)$$

asumimos que el vector de perturbación  $h(h, t)$  satisface las condiciones de acoplamiento  $h(x, t) \in \text{rango} B(x, t)$ , por lo tanto existe un vector  $\gamma(x, t) \in R^m$  tal que:

$$h(x, t) = B(x, t)\gamma(x, t) \quad (2.129)$$

donde  $\gamma(x, t)$  puede ser un vector desconocido con una cota superior conocida  $\gamma_0(x, t)$ , tal que

$$\|\gamma(x, t)\| < \gamma_0(x, t) \quad (2.130)$$

calculemos la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov  $V(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (2.126) en (2.130)

$$W = \frac{dV}{dt} = W_o + \text{grad}(V)^T B(u + \gamma) \quad (2.131)$$

para el control  $u$  que depende del estimado de la cota superior de la perturbación desconocida, seleccionada como:

$$u = -\rho(x, t) \frac{B^T \text{grad}(V)}{\|B^T \text{grad}(V)\|} \quad (2.132)$$

sujeto a la función escalar  $\rho(x, t) > \gamma_0(x, t)$  y  $\|B^T \text{grad}(V)\|^2 = (\text{grad}(V)^T B)(B^T \text{grad}(V))$ , la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov toma la forma

$$W = W_o - \rho(x, t) \|B^T \text{grad}(V)\| + \text{grad}(V)^T B\gamma(x, t) \quad (2.133)$$

$$W < W_o - \|B^T \text{grad}(V)\| [\rho(x, t) - \gamma_0(x, t)]$$

$$W < 0$$

y es negativa. Esto implica que el sistema perturbado con el control (2.132) es asintóticamente estable también. Dos características importantes deben ser subrayadas para el sistema con el control (2.132) :

1.- El control (2.132) es sometido a discontinuidades en una superficie de dimensión  $(n - m)$   $s(x) = B^T \text{grad}(V) = 0$ , y es una función de estado continua fuera de esa superficie. Ésta es su principal diferencia respecto a las otras técnicas de diseño.

2.-La perturbación  $h(x, t)$  es rechazada debido al reforzamiento del modo deslizante en la superficie  $s(x) = 0$ . Si la perturbación (2.129) es rechazada, entonces el control  $u$  debe ser igual a  $-\gamma(x, t)$  lo cual no es generalmente el caso para el control (2.132) fuera de la superficie de discontinuidad  $s(x) = B^T \text{grad}(V) \neq 0$ . Esto significa que el modo deslizante ocurre en la superficie  $s(x) = 0$  y el valor del control equivalente es igual a  $u_{eq} = -\gamma(x, t)$ .

Note de la norma del control (2.132) con la ganancia unitaria  $\rho(x, t) = 1$ ,

$$\left\| \frac{B^T \text{grad}(V)}{\|B^T \text{grad}(V)\|} \right\| \quad (2.134)$$

es igual a 1 para cualquier valor del vector de estado. esto explica el término control unitario para (2.129).

Adicionalmente, podemos utilizar el control unitario directamente con la función de Lyapunov como una segunda etapa en el procedimiento de diseño para el control por modos deslizantes: selección de una superficie deslizante  $s(x) = 0$  y forzar el modo deslizante en esa superficie de acuerdo a algún criterio de desempeño y el control toma la forma:

$$u = -\rho(x, t) \frac{D^T s(x)}{\|D^T s(x)\|} \quad (2.135)$$

con  $D = GB$ ,  $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\}$  y asumimos que  $D$  es no singular.

La ecuación de la proyección del movimiento del sistema (2.125) en el subespacio  $s$  tiene la forma

$$\dot{s} = G(f + h) + Du \quad (2.136)$$

### 2.5.3. Modos Deslizantes Integrales.

#### Planteamiento del problema.

Para un sistema dinámico dado representado por la ecuación estado-espacio

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (2.137)$$

con  $x \in R^n$  siendo el vector de estado y  $u \in R^m$  siendo el vector de control de entrada (rango  $B(x) = m$ ), suponer que existe una ley de control de retroalimentación  $u = u_0(x)$ , la cual puede ser continua o discontinua, tal que el sistema (2.137) puede ser estabilizado de una manera deseada (ejem. su trayectoria de estado sigue una trayectoria de referencia con una exactitud dada). Denotamos este sistema de lazo cerrado ideal como:

$$\dot{x}_0 = f(x_0) + B(x_0)u_0 \quad (2.138)$$

donde  $x_0$  representa la trayectoria de estado del sistema ideal bajo control  $u_0$ . Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el sistema (2.137) opera bajo condiciones de incertidumbre que pueden ser generadas por variación de parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas. Bajo esta consideración, la trayectoria real del sistema de control de lazo cerrado puede ser resumida por

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + h(x, t), \quad (2.139)$$

en la cual el vector  $h(x, t)$  comprende la perturbación debida a la variación de parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas y es asumido para cumplir las siguientes condiciones semejantes:

$$h(x, t) \in \text{span} [B(x)], \quad (2.140)$$

o equivalentemente,

$$h(x, t) = B(x) u_h \text{ con } u_h \in R^m. \quad (2.141)$$

En otras palabras, el control  $u$  es asumido para ser apto para influir en todas las componentes del vector  $h(x, t)$  a través de la matriz de control  $B(x)$ .

Asumiendo que  $h(x, t)$  es limitada y que un límite superior puede ser encontrado como

$$|h_i(x, t)| \leq h_i^+(x, t) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.142)$$

con  $h_i^+(x, t)$  siendo funciones escalares positivas conocidas. El reto de diseño de control así será: Encontrar un control bajo  $u(x, t)$  tal que las trayectorias del sistema (2.139) satisfacen  $x(t) = x_0(t)$  empezando del instante de tiempo inicial.

### Principios de diseño

Para el sistema (2.139), primero establecemos la ley de control como

$$u = u_0 + u_1 \quad (2.143)$$

Donde  $u_0 \in R^m$  es el control ideal definido en (2.128) y  $u_1 \in R^m$  es diseñado para rechazar el término de perturbación  $h(x, t)$ . La sustitución de la ley de control (2.143) en (2.139) da

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0 + B(x)u_1 + h(x, t) \quad (2.144)$$

Ahora definimos una variable deslizante como

$$s = s_0(x) + z \quad (2.145)$$

donde

$$s, s_0, z \in R^m \quad (2.146)$$

la cual consiste de dos partes: la primera parte  $s_0(x)$  puede ser diseñada como una combinación lineal de los estados del sistema similar al diseño convencional de modo deslizante; la segunda parte introduce el término integral y será determinado abajo.

La filosofía del modo deslizante integral es: En orden para lograr  $x(t) = x_0(t)$  para todo  $t > 0$ , el control equivalente de  $u_1$ , denotado por  $u_{1eq}$ , debería satisfacer

$$B(x) = u_{1eq} = -h(x, t) \quad (2.147)$$

o, en términos de (2.131)

$$u_{1eq} = -u_h \quad (2.148)$$

El control equivalente  $u_{1eq}$  describe exactamente las trayectorias del sistema cuando "se desliza" a lo largo de la variable  $s_0(x) = 0$  en (2.146).

Para definir adecuadamente la variable auxiliar  $z(x,t)$  en (2.146) para lograr (2.148), hay que igualar la derivada con respecto al tiempo de  $s$  igual a cero,

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{z} = \frac{\partial s_0}{\partial x} \{f(x) + B(x)u_0(x) + B(x)u_{1eq}(x) + B(x)u_h\} + \dot{z}. \quad (2.149)$$

Asegurando el requerimiento (2.148), se define

$$\dot{z} = -\frac{\partial s_0}{\partial x} \{f(x) + B(x)u_0(x)\}, \quad (2.150)$$

donde

$$z(0) = -s_0(x(0)), \quad (2.151)$$

y la condición inicial  $z(0)$  es determinada basada en el requerimiento  $s(0) = 0$ . En otras palabras, el modo deslizante ocurre empezando del tiempo inicial. Puesto que la ecuación (2.148) es satisfecha, la ecuación de movimiento del sistema en modo deslizante será:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0(x). \quad (2.152)$$

Correspondiente a las trayectorias del sistema ideal (2.138).

**Definición : Modo deslizante integral.**

Un modo deslizante es un modo deslizante integral si su ecuación de movimiento es del mismo orden que el sistema original, (ejem. el orden del movimiento deslizante es igual a  $n$ ). El control  $u_1$  en (2.143) es definido para aplicar el modo deslizante a lo largo de la variable (2.146) a través de la función discontinua

$$u_1 = -M(x) \text{sign}(s) \quad (2.153)$$

donde  $M(x)$  es una función escalar positiva para la ganancia de control. Sustituyendo de (2.153) y (2.151) en (2.149) se obtiene:

$$\dot{s} = \frac{\partial s_0}{\partial x} B(x) u_h - \frac{\partial s_0}{\partial x} B(x) M(x) \text{sign}(s) \quad (2.154)$$

En la ecuación (2.154)  $s_0$  debe ser seleccionada tal que la matriz  $\frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)$  sea no singular durante todo el movimiento del sistema. Entonces la función escalar  $M(x)$  puede ser seleccionada dependiendo de esta propiedad de  $\frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)$  tal que el modo deslizante es aplicado en la variable  $s = 0$ .

En las aplicaciones de robustificación de esta tesis, seleccionamos la superficie tal que:

$$s(x) = B^+ x,$$

para que

$$\frac{\partial s}{\partial x} B = B^+ B = I.$$

Esto nos asegura que:

- 1.- No se amplifican las perturbaciones desacopladas; si las hay no rompen el sistema.
- 2.- Minimiza la influencia de las perturbaciones desacopladas.

## Capítulo 3

# Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales Medidos Incompletamente sobre Observaciones Lineales

### 3.1. Planteamiento del Problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio completo de probabilidad con una familia creciente y continua por la derecha de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sean  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  y  $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$  procesos independientes de Wiener. El  $F_t$ -medible proceso aleatorio  $(x(t), y(t))$  es descrito por una ecuación diferencial no lineal con un término de drift polinomial para el estado del sistema

$$dx(t) = f(x, t)dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

y una ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (3.2)$$

Aquí,  $x(t) \in R^n$  es el vector de estado y  $y(t) \in R^m$  es el vector de observación lineal,  $m \leq n$ . La condición inicial  $x_0 \in R^n$  es un vector gaussiano tal que  $x_0, W_1(t) \in R^p$ , y  $W_2(t) \in R^q$  son independientes. En contraste a los resultados obtenidos previamente (ver [7]-[16]), la matriz de observación  $A(t) \in R^{m \times n}$  no se supone invertible o incluso cuadrada. se asume que  $B(t)B^T(t)$  es una matriz definida positiva, por lo tanto,  $m \leq q$ . Todos los coeficientes en (3.1)-(3.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

La función no lineal  $f(x, t)$  es considerada polinomial de  $n$  variables, componentes del vector de estado  $x(t) \in R^n$ , con coeficientes dependientes del tiempo. Puesto que  $x(t) \in R^n$  es un vector, se requiere una definición especial de los polinomios para  $n > 1$ . De acuerdo con [16], un polinomio de grado  $p$  de un vector  $x(t) \in R^n$  es considerado como una forma  $p$ -lineal de  $n$  componentes de  $x(t)$

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + \dots + a_p(t)x \dots_p \text{ times} \dots x, \quad (3.3)$$

donde  $a_0(t)$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $a_1$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ ,  $a_2$  es un tensor tridimensional de dimensión  $n \times n \times n$ ,  $a_p$  es un tensor  $(p + 1)$ -dimensional de dimensión  $n \times \dots_{(p+1) \text{ times}} \dots \times n$ , y  $x \times \dots_p \text{ times} \dots \times x$  es un tensor  $p$ -dimensional de dimensión  $n \times \dots_p \text{ times} \dots \times n$  obtenido al multiplicar espacialmente  $p$  veces el vector  $x(t)$  por sí mismo. Tal polinomio puede ser también expresado en la forma de sumatoria

$$f_k(x, t) = a_0_k(t) + \sum_i a_{1_{ki}}(t)x_i(t) + \sum_{ij} a_{2_{kij}}(t)x_i(t)x_j(t) + \dots \\ + \sum_{i_1 \dots i_p} a_{p_{ki_1 \dots i_p}}(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t), \quad k, i, j, i_1 \dots i_p = 1, \dots, n.$$

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo  $\hat{x}(t)$  del estado  $x(t)$  del sistema, basado en el proceso de observación  $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$ , que minimiza la norma 2 euclídeana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) | F_t^Y]$$

en cada momento  $t$  del tiempo. Aquí,  $E[z(t) | F_t^Y]$  es la esperanza condicional de un proceso estocástico,  $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$  con respecto a la  $\sigma$  - álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como se sabe de [84], este estimado óptimo está dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$$

del estado  $x(t)$  del sistema con respecto a la  $\sigma$  - álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como se sabe, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es la varianza del error de estimación.

La solución propuesta a este problema de filtrado óptimo está basada en las fórmulas de la diferencial de Itô de la esperanza condicional  $E(x(t) | F_t^Y)$  y su varianza  $P(t)$  (citado después de [84]) y dada en la siguiente sección.



## 3.2. Solución del Problema

Las ecuaciones de filtrado óptimo pueden ser obtenidas usando la fórmula para la diferencial de Itô de la esperanza condicional  $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$  (ver [84])

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde  $f(x, t)$  es el término del drift polinomial en la ecuación de estado, y  $\varphi_1(x)$  es el término lineal del drift en la ecuación de observación y es igual a  $\varphi_1(x, t) = A_0(t) + A(t)x(t)$ . Al realizar la sustitución, la ecuación del estimado toma la forma

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)[A(t)(x(t) - m(t))]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t)) = \\ E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\ E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) debe ser complementada con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ .

Para intentar componer un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado, la ecuación (3.4) debe ser complementada con la ecuación para la varianza del error  $P(t)$ . Para este propósito, la fórmula para la diferencial de Itô de la varianza  $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$  puede ser usada (citado de nuevo después de [84]):

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\ b(t)b^T(t) - E(x(t)[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}E([\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]x^T(t) | F_t^Y))dt + \\ E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde el último término debe ser entendido como un tensor tridimensional (bajo el signo de la esperanza) intrincado con un vector, lo cual da una matriz. Al sustituir las expresiones para  $\varphi_1$ , la última fórmula se transforma en

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\
& + b(t)b^T(t) - (E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1}A(t)E((x(t) - m(t))x^T(t) | F_t^Y))dt + \\
& E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(A(t)(x(t) - m(t)))^T | F_t^Y) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt).
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de varianza  $P(t) = E((x(t) - m(t))x^T(t) | F_t^Y)$ , la última ecuación puede ser representada como

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\
& + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt + \\
& E(((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \\
& A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

La ecuación (3.5) debe ser complementada con la condición inicial  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) para el estimado óptimo  $m(t)$  y la varianza del error  $P(t)$  forman un sistema no cerrado de las ecuaciones de filtrado para el estado no lineal (3.1) sobre observaciones lineales (3.2). La no cerradura indica que el sistema (3.4) y (3.5) incluye términos que dependen de  $x$ , así como  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ , y  $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$ , los cuales no están expresados aún como funciones de las variables del sistema,  $m(t)$  y  $P(t)$ .

Como se muestra en [7]-[16], se puede obtener un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para un estado del sistema (3.1) con drift polinomial y difusión independiente del estado sobre observaciones lineales, si la matriz de observación  $A(t)$  es invertible para cualquier  $t \geq t_0$ . Puesto que la matriz de observación en (2) no es necesariamente invertible, se introducen las siguientes transformaciones.

Primero, note que la matriz  $A$  siempre puede ser asumida como una matriz de rango completo,  $m$ , el cual es igual a la dimensión de las observaciones linealmente independientes  $y(t) \in R^m$ ; si no es así, las observaciones linealmente dependientes, correspondientes a renglones linealmente dependientes de la matriz  $A$ , deben ser removidas. Al hacer esto, el número de procesos de Wiener en las ecuaciones de observación puede también ser reducido a  $m$ , la dimensión de las observaciones independientes, resumiendo y renumerando los procesos de Wiener en cada ecuación de observación (3.2). Por lo tanto, la matriz  $B$  puede siempre ser asumida como una matriz cuadrada de dimensión  $m \times m$ , tal

que  $B(t)B^T(t)$  es una matriz definida positiva (ver la sección 3.0.1 para esta condición). Luego, las nuevas matrices  $\bar{A}(t)$  y  $\bar{B}(t)$  son definidas como sigue: La matriz  $\bar{A}(t) \in R^{n \times n}$  es obtenida de  $A(t) \in R^{m \times n}$  agregando  $n - m$  renglones linealmente independientes tal que la matriz resultante  $\bar{A}(t)$  es invertible. La matriz  $\bar{B}(t) \in R^{n \times n}$  es construida partiendo de la matriz  $B(t) \in R^{m \times m}$  colocando  $B(t)$  en la esquina superior izquierda de  $\bar{B}(t)$ , definiendo las otras  $n - m$  entradas diagonales de  $\bar{B}(t)$  igual a infinito, y dejando como cero todas las otras entradas de  $\bar{B}(t)$  fuera de la diagonal principal o fuera de la submatriz  $B(t)$ . En otras palabras,  $\bar{B}(t) = \text{diag}[B(t), \beta I_{(n-m) \times (n-m)}]$ , donde  $\beta = \infty$ , e  $I_{(n-m) \times (n-m)}$  es la matriz identidad de dimensión  $(n - m) \times (n - m)$ . De este modo la nueva ecuación de observación está dada por

$$\bar{y}(t) = (\bar{A}_0(t) + \bar{A}(t)x(t))dt + \bar{B}(t)dW_2(t). \quad (3.6)$$

Donde  $\bar{y}(t) \in R^n$ ,  $\bar{A}_0(t) = [A_0^T(t), 0_{n-m}]^T \in R^n$ , y  $0_{n-m}$  es un vector de  $n - m$  ceros.

El objetivo principal de la transformación introducida es que el nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$  es físicamente equivalente al anterior  $y(t)$ , puesto que los últimos  $n - m$  componentes ficticios de  $\bar{y}(t)$  consisten de puro ruido en vista de las intensidades infinitas de los ruidos blancos gaussianos en las correspondientes  $n - m$  ecuaciones, y los primeros  $m$  componentes de  $\bar{y}(t)$  coinciden con  $y(t)$ . En suma, la matriz completa de observación  $\bar{A}(t)$  es invertible, y la matriz  $(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1} \in R^{n \times n}$  existe y es igual a la matriz cuadrada de dimensión  $n \times n$ , cuya esquina superior izquierda está ocupada por la submatriz  $(B(t)B^T(t))^{-1} \in R^{m \times m}$  y todas las demás entradas son cero.

En términos de la nueva ecuación de observación (3.6), las ecuaciones de filtrado (3.4) y (3.5) toman la forma

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1} \times (d\bar{y}(t) - (\bar{A}_0(t) + \bar{A}(t)m(t))dt), \quad (3.7)$$

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + b(t)b^T(t) - P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}\bar{A}(t)P(t))dt + E(((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}(d\bar{y}(t) - (\bar{A}_0(t) + \bar{A}(t)m(t))dt), \quad (3.8)$$

con las condiciones iniciales  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

Puesto que la nueva matriz de observación  $\bar{A}(t)$  es invertible para todo  $t \geq t_0$ , la variable aleatoria  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiana con respecto al nuevo proceso

de observación  $\bar{y}(t)$ , y por lo tanto con respecto al proceso de observación original  $y(t)$ , para todo  $t \geq t_0$  (ver [7]-[16]). Por lo tanto, las siguientes consideraciones, descritas en [7]-[16], son aplicables a las ecuaciones de filtrado (3.4) y (3.5).

Primero, puesto que la variable aleatoria  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiana, el tercer momento condicional  $E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$  de  $x(t) - m(t)$  con respecto a las observaciones, el cual está presente en el último término de la ecuación (3.8), es igual a cero, porque el proceso  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiano. De este modo, desaparece completamente el último término en (3.8) y se obtiene la siguiente ecuación de varianza

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + b(t)b^T(t) - P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}\bar{A}(t)P(t))dt, \quad (3.9)$$

con la condición inicial  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

Segundo, si la función  $f(x, t)$  es función polinomial del estado  $x$  con coeficientes dependientes del tiempo, la expresión de los términos  $E(f(x, t) | F_t^Y)$  en (3.7) y  $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$  en (3.9) también incluyen sólo términos polinomiales de  $x$ . Entonces, esos términos polinomiales pueden ser representados como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$  usando la siguiente propiedad de la variable aleatoria gaussiana  $x(t) - m(t)$ : todos sus momentos condicionales impares,  $m_1 = E[(x(t) - m(t)) | Y(t)]$ ,  $m_3 = E[(x(t) - m(t))^3 | Y(t)]$ ,  $m_5 = E[(x(t) - m(t))^5 | Y(t)]$ , ... son igual a 0, y todos sus momentos condicionales pares  $m_2 = E[(x(t) - m(t))^2 | Y(t)]$ ,  $m_4 = E[(x(t) - m(t))^4 | Y(t)]$ , ... pueden ser representados como funciones de la varianza  $P(t)$ . Por ejemplo,  $m_2 = P$ ,  $m_4 = 3P^2$ ,  $m_6 = 15P^3$ , ... etc. Después de representar todos los términos polinomiales en (3.7) y (3.9), que son generados al expresar  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ , y  $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$  como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$ , se obtendrá una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado. Las correspondientes representaciones de  $E(f(x, t) | F_t^Y)$  y  $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$  han sido derivadas en [7]-[16] para ciertas funciones polinomiales  $f(x, t)$ .

Finalmente, en vista de la definición de las matrices  $\bar{A}(t)$  y  $\bar{B}(t)$  y el nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$ , las ecuaciones de filtrado (3.7),(3.9) pueden ser escritas de nuevo en términos de la ecuación de observación original (3.2) usando  $y(t)$ ,  $A(t)$ , y  $B(t)$

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \quad (3.10)$$

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt, \quad (3.11)$$

con las condiciones iniciales  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

Además, un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado es obtenido de (3.10) y (3.11) para una función de tercer orden  $f(x, t)$  en la ecuación (3.1), como sigue. Debe notarse, sin embargo, que la aplicación del mismo procedimiento resultaría en el diseño de un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para toda función polinomial  $f(x, t)$  en (3.1).

Sea la función

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + a_3(t)xxx^T \quad (3.12)$$

un polinomio de tercer orden, donde  $x$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $a_0(t)$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $a_1(t)$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ ,  $a_2(t)$  es un tensor en 3D de dimensión  $n \times n \times n$ ,  $a_3(t)$  es un tensor en 4D de dimensión  $n \times n \times n \times n$ . En este caso, las representaciones para  $E(f(x, t) | F_t^Y)$  y  $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$  como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$  son derivadas como sigue (ver también los resultados en [7]-[16]):

$$E(f(x, t) | F_t^Y) = a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t) + 3a_3(t)m(t)P(t) + a_3(t)m(t)m(t)m^T(t), \quad (3.13)$$

$$E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) = a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + 3(a_3[P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)]) + 3(a_3[P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)])^T. \quad (3.14)$$

Sustituyendo la expresión (3.13) en (3.10) y la expresión (3.14) en (3.11), se obtienen las ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo  $m(t)$  y la varianza del error  $P(t)$

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + 3a_3(t)m(t)P(t) + a_3(t)m(t)m(t)m^T(t) + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \quad (3.15)$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y),$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + 3(a_3[P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)]) + 3(a_3[P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)])^T + b(t)b^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \quad (3.16)$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y).$$

Por medio de la anterior derivación, se demuestra el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.** El filtro óptimo de dimensión finita para el estado de tercer orden (3.1), donde el polinomio de tercer orden  $f(x, t)$  está definido por (3.12), sobre las observaciones lineales incompletas (3.2), está dada por la ecuación (3.15) para el estimado óptimo  $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$  y la ecuación (3.16) para la estimación de la varianza del error  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$ .

De este modo, basado en el sistema general no cerrado de las ecuaciones de filtrado (3.7),(3.9), está demostrado que el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado pueden ser obtenidas para cualquier estado polinomial (3.1) sobre observaciones lineales incompletas (3.2). Además, se derivó la forma específica (3.15),(3.16) del sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado correspondientes a un estado de tercer orden. En la siguiente sección, se verifica el rendimiento del filtro óptimo diseñado para un estado de tercer orden sobre observaciones lineales incompletas contra un filtro de Kalman-Bucy extendido convencional.

### 3.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del filtro óptimo para un estado bidimensional de tercer orden sobre observaciones lineales escalares y se compara con un filtro convencional de Kalman-Bucy extendido.

Sea el estado real bidimensional  $x(t)$  que satisface al sistema de tercer orden

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.1x_2^3(t) + \psi_1(t), \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (3.17)$$

y sea el proceso de observación escalar la siguiente ecuación lineal

$$y(t) = x_1(t) + \psi_2(t), \quad (3.18)$$

donde  $\psi_1(t)$  y  $\psi_2(t)$  son ruidos blancos gaussianos, los cuales son las derivadas en promedio cuadrático débil de los procesos estándar de Wiener (ver [84]). Las ecuaciones (3.17),(3.18) presentan la forma convencional de las ecuaciones (3.1),(3.2), lo cual es actualmente usado en la práctica [4].

El sistema de filtrado (3.17),(3.18) incluye dos componentes del estado  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T \in R^2$  y sólo un canal de observación  $y(t) \in R$ , que mide la componente del estado  $x_1(t)$ . por lo tanto, la matriz de observación  $A = [1 \ 0] \in R^{(1 \times 2)}$  no es cuadrada ni

invertible. Además, la componente no lineal del estado  $x_2(t)$  no es medible. De este modo, el sistema (3.17),(3.18) es apropiado para ilustrar los avances del filtro óptimo (3.15),(3.16) con respecto a los resultados obtenidos previamente ([7]-[16]). Notar que las ecuaciones de filtrado óptimo, tomando en cuenta componentes del estado no lineales y no medibles y una matriz de observación no invertible, están teóricamente derivadas en la forma (3.10),(3.11); por lo tanto, no se necesita ninguna justificación adicional, específicamente dirigida al sistema (3.17), (3.18). Las ecuaciones de filtrado óptimo (3.15),(3.16), usadas aquí, presentan el caso particular de (3.10),(3.11) para sistemas polinomiales de tercer orden.

El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado de tercer orden (3.17), utilizando observaciones lineales incompletas (3.18) confundidas con perturbaciones independientes e idénticamente distribuidas modeladas como ruidos blancos gaussianos. Puesto que la solución de (3.17) se va al infinito en  $T = 3.3509$ , el horizonte tiempo del filtrado se establece en  $T = 3.345$ .

Mostraremos cómo calcular los coeficientes del vector polinomial (3.3) para el sistema (3.17). En efecto, la matriz de coeficientes  $a_1$  es una matriz de dimensión  $2 \times 2$ , igual a  $a_1 = [0 \ 1 \ | \ 0 \ 0]$ , el tensor 3D de coeficientes  $a_2$  consiste únicamente de ceros, puesto que los términos bilineales o cuadráticos están ausentes en (3.17), y el tensor 4D de coeficientes  $a_3$  tiene una sola entrada diferente de cero,  $a_3 \ 2222 = 0.1$ , mientras que sus otras entradas son cero. Por lo tanto, de acuerdo a (3.15),(3.16), su único término diferente de cero debe entrar en la ecuación para  $m_2$ , multiplicado por  $3m_2P_{22} + m_2^3$ , la ecuación para  $P_{21} = P_{12}$ , multiplicado por  $3m_2^2P_{21} + 3P_{22}P_{21} = 3m_2^2P_{12} + 3P_{22}P_{12}$ , en vista de la simetría de la matriz de la varianza  $P$ , y la ecuación para  $P_{22}$ , multiplicado por  $6m_2^2P_{22} + 6P_{22}^2$ .

Como resultado, las ecuaciones de filtrado (3.15),(3.16) toman la siguiente forma particular para el sistema (3.17),(3.18)

$$\dot{m}_1(t) = m_2(t) + P_{11}(t)[y(t) - m_1(t)],$$

$$\dot{m}_2(t) = 0.1m_2^3(t) + 0.3P_{22}(t)m_2(t) + P_{12}(t)[y(t) - m_1(t)], \quad (3.19)$$

con la condición inicial  $m(0) = E(x(0) \mid y(0)) = m_0$ ,

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}(t) - P_{11}^2(t),$$

$$\dot{P}_{12}(t) = P_{22}(t) + 0.3m_2^2(t)P_{12}(t) + 0.3P_{22}(t)P_{12}(t) - P_{11}(t)P_{12}(t),$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 + 0.6m_2^2(t)P_{22}(t) + 0.6P_{22}^2(t) - P_{12}^2(t), \quad (3.20)$$

con la condición inicial  $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_0$ .

Los estimados obtenidos al resolver las ecuaciones (3.19)–(3.20) también son comparados a los estimados que satisfacen las siguientes ecuaciones de filtrado extendido de Kalman-Bucy para el estado de tercer orden (3.17) sobre las observaciones lineales incompletas (3.18), las cuales son obtenidas usando el Teorema 8.1 de [55]:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{K1}(t) &= m_{K2}(t) + P_{K11}(t)[y(t) - m_{K1}(t)], \\ \dot{m}_{K2}(t) &= 0.1m_{K2}^3(t) + P_{K12}(t)[y(t) - m_{K1}(t)],\end{aligned}\tag{3.21}$$

con la condición inicial  $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_{10}$ ,

$$\begin{aligned}\dot{P}_{K11}(t) &= 2P_{K12}(t) - P_{K11}^2(t), \\ \dot{P}_{K12}(t) &= P_{K22}(t) + 0.3m_{K2}^2(t)P_{K12}(t) - P_{K11}(t)P_{K12}(t), \\ \dot{P}_{K22}(t) &= 1 + 0.6m_{K2}^2(t)P_{K22}(t) - P_{K12}^2(t),\end{aligned}\tag{3.22}$$

con la condición inicial  $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_0$ .

Los resultados de la simulación numérica son obtenidos resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (3.19)–(3.20), y (3.21)–(3.22). Los valores obtenidos de los estimados  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ ,  $m_{K1}(t)$ , y  $m_{K2}(t)$  que satisfacen las ecuaciones (3.19), y (3.21), respectivamente, son comparados con los valores reales de las variables de estado  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  en (3.17).

Para cada uno de los dos filtros (3.19)–(3.20) y (3.21)–(3.22), y el sistema de referencia (3.17)–(3.18), involucrado en la simulación, se asignan los siguientes valores iniciales:  $x_{10} = 1.1$ ,  $x_{20} = 1.1$ ,  $m_{10} = 10.1$ ,  $m_{20} = 10.1$ ,  $P_{110} = 10$ ,  $P_{120} = 1$ ,  $P_{220} = 10$ . Las perturbaciones gaussianas  $\psi_1(t)$  y  $\psi_2(t)$  en (3.21) son realizadas usando la función de ruido blanco construida en matlab.

Se obtuvieron las siguientes gráficas: las gráficas de los errores entre las componentes del estado de referencia  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , que satisfacen las ecuaciones (3.17), y las componentes del estimado del filtro óptimo  $m_1(t)$  y  $m_2(t)$ , que satisfacen las ecuaciones (3.19), se muestran en la figura 3.1; las gráficas de los errores entre las componentes del estado de referencia  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , que satisfacen las ecuaciones (3.17), y las componentes del estimado del filtro de Kalman-Bucy extendido  $m_{K1}(t)$  y  $m_{K2}(t)$ , que satisfacen las ecuaciones (3.21), están mostradas en la figura 3.2; las gráficas de las componentes del estado de referencia  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  están mostradas en la figura 3.3. Se puede observar que el error dado por el estimado del filtro óptimo (3.19) alcanza rápidamente el valor promedio cero



y entonces lo mantiene incluso en una vecindad cerrada del punto de tiempo asintótico  $T = 3.3509$ , donde el estado de referencia (3.17) va al infinito. Esto representa una ventaja definitiva del filtro óptimo diseñado. Por el contrario, los errores de estimación dados por el filtro de Kalman-Bucy extendido se comportan inestablemente y divergen al infinito en  $T = 2.962$ , antes del tiempo asintótico del estado de referencia (3.17).

Los grandes errores de oscilación, observados en la figura 3.1, son consecuencias naturales de la no linealidad de las ecuaciones de filtrado y la inestabilidad del sistema de referencia. Sin embargo, un filtro análogo pasa bajos puede ser usado para producir una salida promedio monótona apropiada para propósitos del diseño del control. Notar que la varianza del error del filtro óptimo  $P(t)$  no converge a cero cuando el tiempo tiende al punto del tiempo asintótico, puesto que las dinámicas polinomiales de tercer orden son más fuertes que los términos cuadráticos de Riccati en el lado derecho de las ecuaciones (3.22).

De este modo, se puede concluir que el filtro óptimo obtenido (3.19)–(3.20) para un estado bidimensional de tercer orden sobre observaciones lineales incompletas da definitivamente mejores estimados que un filtro extendido de Kalman-Bucy convencional. La subsecuente discusión de los resultados obtenidos de la simulación se encuentra en las conclusiones.

### 3.4. Conclusiones

Los resultados de la simulación muestran que los estimados calculados mediante el uso del filtro óptimo obtenido para un estado de tercer orden sobre observaciones lineales incompletas tiene propiedades de convergencia definitivamente mejores que los estimados dados por un filtro extendido de Kalman-Bucy convencional. De hecho, se puede observar que el error de estimación producido por el filtro óptimo alcanza rápidamente el valor promedio cero y se mantiene en ese valor incluso en una vecindad cercana al punto del tiempo asintótico, donde el estado de referencia (3.17) va al infinito para un tiempo finito. Por el contrario, el error de estimación dado por el filtro extendido de Kalman-Bucy se comporta inestablemente y diverge al infinito antes del tiempo asintótico del estado de referencia. Esta mejora significativa en el comportamiento del estimado se obtiene debido a la selección más cuidadosa de la matriz de ganancia del filtro en las ecuaciones (3.19)–(3.20), como debe ser en el filtro óptimo. Aunque esta conclusión se deduce de la teoría desarrollada, la simulación numérica sirve como una ilustración convincente.

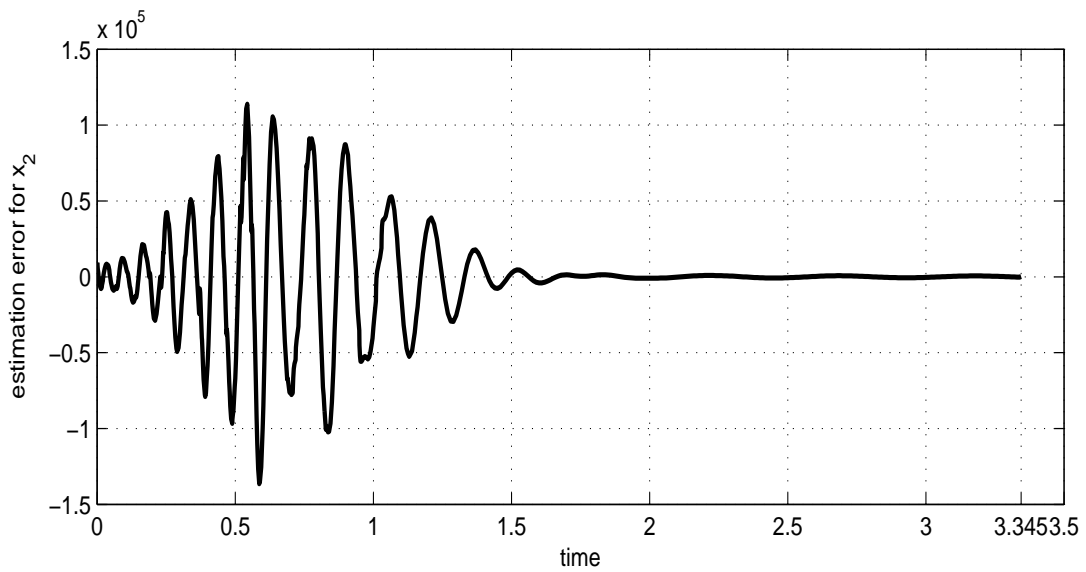
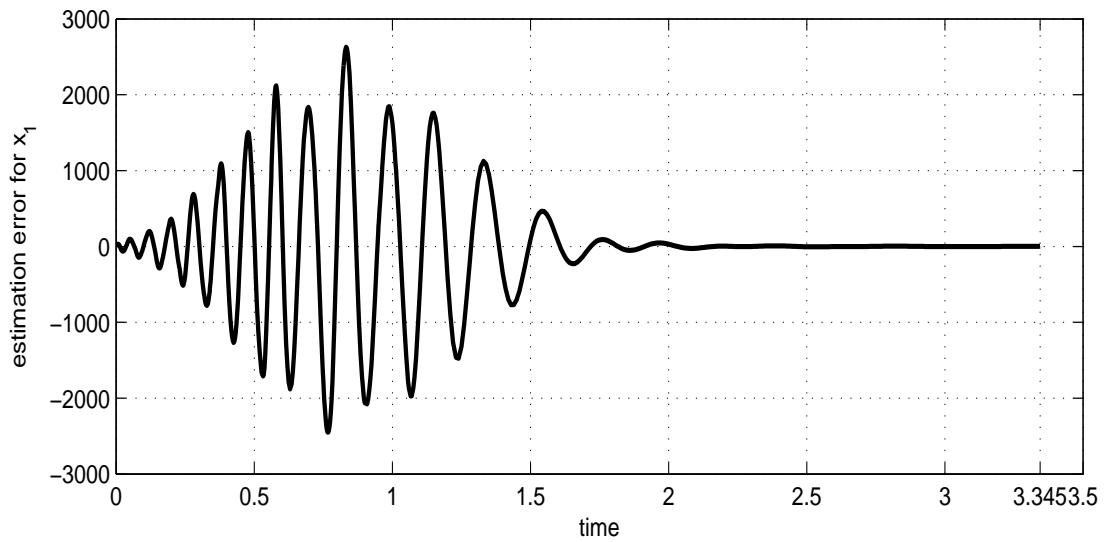


Figura 3.1: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$ , que satisface (3.17), y el estimado del filtro óptimo  $m_1(t)$ , que satisface (3.19), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$ , que satisface (3.17), y el estimado del filtro óptimo  $m_2(t)$ , que satisface (3.19), en el intervalo completo de simulación  $[0, 3.345]$ .

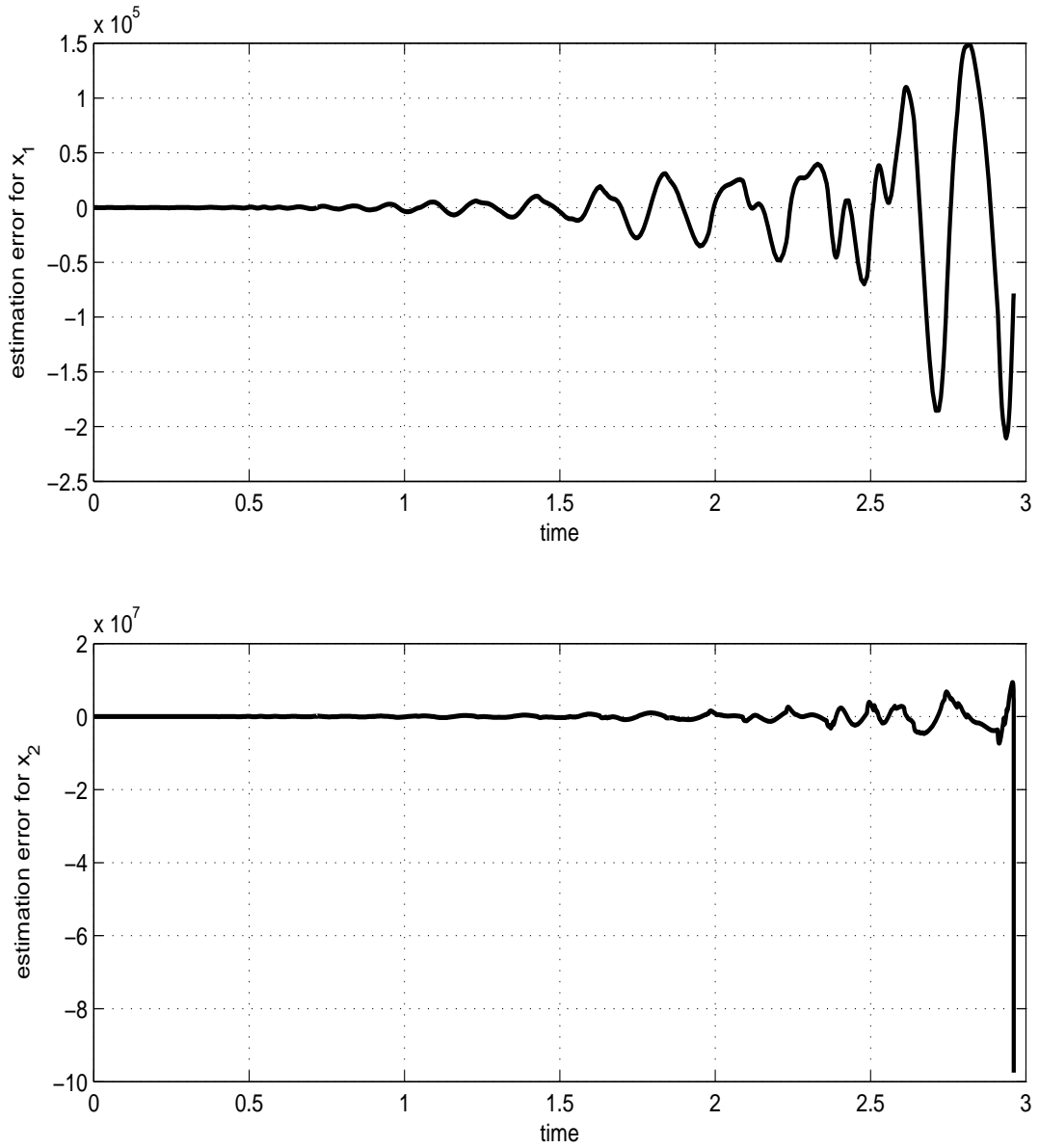


Figura 3.2: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$ , que satisface (3.17), y el estimado  $m_{K1}(t)$ , que satisface (3.21), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$ , que satisface (3.17), y el estimado  $m_{K2}(t)$ , que satisface (3.21), en el intervalo de simulación  $[0, 2.962]$ .

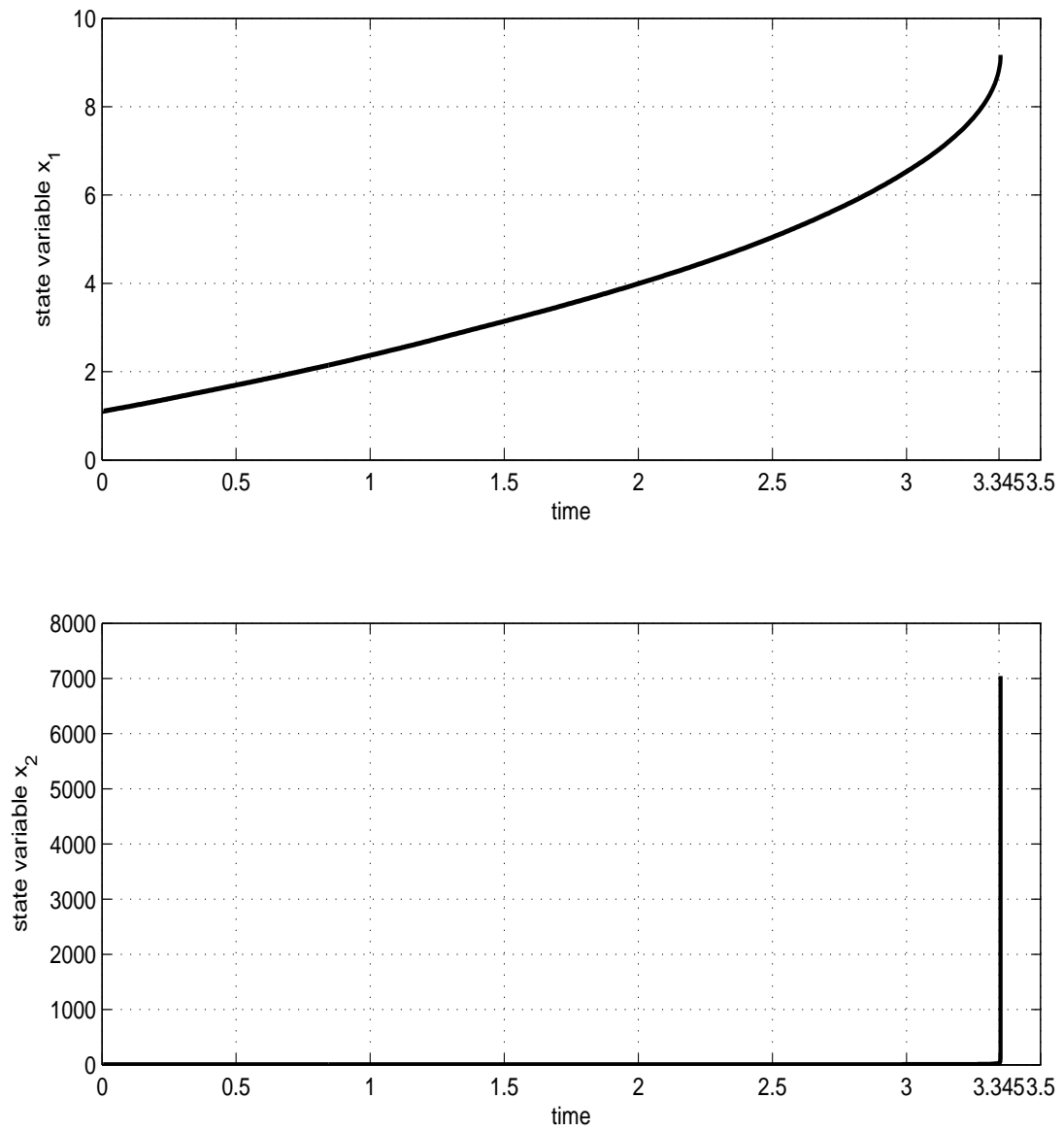


Figura 3.3: Gráficas de los componentes del estado real  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , que satisface (3.17), en el intervalo completo de simulación  $[0, 3.345]$ .

## Capítulo 4

# Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Incompletamente con Ruidos Multiplicativos

### 4.1. Planteamiento del Problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio completo de probabilidad con una familia creciente y continua por la derecha de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sean  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  y  $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$  procesos independientes de Wiener. El  $F_t$ -medible proceso aleatorio  $(x(t), y(t))$  es descrito por una ecuación diferencial no lineal con un término de drift y una difusión polinomiales para el estado del sistema

$$dx(t) = f(x, t)dt + g(x, t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

y una ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (4.2)$$

Aquí,  $x(t) \in R^n$  es el vector de estado y  $y(t) \in R^m$  es el vector de observación lineal. La condición inicial  $x_0 \in R^n$  es un vector gaussiano tal que  $x_0, W_1(t) \in R^p$ , y  $W_2(t) \in R^q$  son independientes. En contraste a los resultados obtenidos previamente (ver [7, 10, 16]), la matriz de observación  $A(t) \in R^{m \times n}$  no se supone que sea invertible o incluso cuadrada. Asumimos que  $B(t)B^T(t)$  es una matriz definida positiva, por lo tanto,  $m \leq q$ . Todos los coeficientes en (4.1)–(4.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

Las funciones no lineales  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  son consideradas polinomios de  $n$  variables, componentes del vector de estado  $x(t) \in R^n$ , con coeficientes dependientes del tiempo. Puesto que  $x(t) \in R^n$  es un vector, se requiere una definición especial de los polinomios para  $n > 1$ . De acuerdo con [16], un polinomio de  $p$ -grado de un vector  $x(t) \in R^n$  es formulado como una forma  $p$ -lineal de  $n$  componentes de  $x(t)$

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + \dots + a_p(t)x \dots_p \text{ times} \dots x, \quad (4.3)$$

donde  $a_0(t)$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $a_1$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ ,  $a_2$  es un tensor tridimensional de dimensión  $n \times n \times n$ ,  $a_p$  es un tensor  $(p + 1)$ D-dimensional de dimensión  $n \times \dots_{(p+1) \text{ times}} \dots \times n$ , y  $x \times \dots_p \text{ times} \dots \times x$  es un tensor  $p$ D-dimensional de dimensión  $n \times \dots_p \text{ times} \dots \times n$  obtenido por  $p$  veces la multiplicación espacial del vector  $x(t)$  por sí mismo. Tal polinomio puede también ser expresado en la forma de suma

$$\begin{aligned} f_k(x, t) = & a_{0k}(t) + \sum_i a_{1ki}(t)x_i(t) + \sum_{ij} a_{2kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \dots \\ & + \sum_{i_1 \dots i_p} a_{pki_1 \dots i_p}(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t), \quad k, i, j, i_1 \dots i_p = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo  $\hat{x}(t)$  del estado del sistema  $x(t)$ , basado en el proceso de observación  $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$ , que minimiza la norma 2 euclídeana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) \mid F_t^Y]$$

en todo momento  $t$ . Aquí,  $E[z(t) \mid F_t^Y]$  indica la esperanza condicional de un proceso estocástico  $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$  con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como se sabe [84], este estimado óptimo está dado por la esperanza condicional  $\hat{x}(t) = m(t) = E(x(t) \mid F_t^Y)$  del estado del sistema  $x(t)$  con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como es sabido, la función matricial  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y]$  es la varianza del error de estimación.

La solución propuesta para este problema de filtrado óptimo está basada en las fórmulas para la diferencial de Itô de la esperanza condicional  $E(x(t) \mid F_t^Y)$  y su varianza  $P(t)$  (citado después [84]) y dada en la siguiente sección.

## 4.2. Filtro Óptimo para un Estado Polinomial sobre Observaciones Lineales

Las ecuaciones de filtrado óptimo pueden ser obtenidas usando la fórmula para la diferencial de Itô de la esperanza condicional  $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$  (ver [84])

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde  $f(x, t)$  es el término del drift polinomial en la ecuación de estado, y  $\varphi_1(x)$  es el término del drift lineal en la ecuación de la observación y es igual a  $\varphi_1(x, t) = A_0(t) + A(t)x(t)$ . Al realizar la sustitución, la ecuación del estimado toma la forma

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)[A(t)(x(t) - m(t))]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\ E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\ E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) debe ser complementada con la condición inicial  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$ .

Intentando componer un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado, la ecuación (4.4) debe ser complementada con la ecuación para la varianza del error  $P(t)$ . Para este propósito, la fórmula para la diferencial de Itô de la varianza  $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$  puede ser usada (citado de nuevo después [84]):

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\ E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - E(x(t)[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}E([\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]x^T(t) | F_t^Y))dt + \\ E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde  $g(x, t)$  es el término de difusión polinomial en la ecuación de estado, y el último término debe ser entendido como un tensor tridimensional (bajo el signo de la esperanza) intrincado con un vector, lo cual da una matriz. Al sustituir las expresiones para  $\varphi_1$ , la

última expresión toma la forma

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\
& + E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - (E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1}A(t)E((x(t) - m(t))x^T(t) | F_t^Y))dt + \\
& E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(A(t)(x(t) - m(t)))^T | F_t^Y) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt).
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de la varianza  $P(t) = E((x(t) - m(t))x^T(t) | F_t^Y)$ , la última ecuación puede ser representada como

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\
& + E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt + \\
& E(((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \\
& A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

La ecuación (4.5) debe ser complementada con la condición inicial

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y].$$

Las ecuaciones (4.4) y (4.5) para el estimado óptimo  $m(t)$  y la varianza del error  $P(t)$  forman un sistema no cerrado de las ecuaciones de filtrado para el estado no lineal (4.1) sobre observaciones lineales (4.2). La no cerradura indica que el sistema (4.4),(4.5) incluye términos dependientes de  $x$ , tales como  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$ , y  $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$ , los cuales no están aún expresados como funciones de las variables del sistema,  $m(t)$  and  $P(t)$ .

Como se muestra en [7, 10, 16], un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado para un estado del sistema (4.1) con un término de drift polinomial y difusión independiente del estado sobre observaciones lineales puede ser obtenido, si la matriz de observación  $A(t)$  es invertible para cualquier  $t \geq t_0$ . Puesto que la matriz de observación  $A(t)$  en (4.2) no es necesariamente invertible, se introducen las siguientes transformaciones.

Primero, note que la matriz  $A$  siempre puede ser asumida como una matriz de rango completo,  $m$ , el cual es igual a la dimensión de las observaciones linealmente independientes  $y(t) \in R^m$ ; si no es así, las observaciones linealmente dependientes, correspondientes a renglones linealmente dependientes de la matriz  $A$ , deben ser removidas. Para hacer eso, el número de procesos de Wiener en las ecuaciones de observación puede también ser reducido a  $m$ , la dimensión de las observaciones independientes, resumiendo y renumerando los procesos de Wiener en cada ecuación de observación (4.2). Por lo tanto, la matriz  $B$  puede siempre ser asumida como una matriz cuadrada de dimensión  $m \times m$ ,



tal que  $B(t)B^T(t)$  es una matriz definida positiva (ver la sección 4.1 para esta condición). Siguiendo, las nuevas matrices  $B(t)B^T(t)$  son definidas como sigue. La matriz  $\bar{A}(t) \in R^{n \times n}$  es obtenida de  $A(t) \in R^{m \times n}$  agregando  $n - m$  renglones linealmente independientes tal que la matriz resultante  $\bar{A}(t)$  es invertible. La matriz  $\bar{B}(t) \in R^{n \times n}$  es construida partiendo de la matriz  $B(t) \in R^{m \times m}$  colocando  $B(t)$  en la esquina superior izquierda de  $\bar{B}(t)$ , definiendo las otras  $n - m$  entradas diagonales de  $\bar{B}(t)$  igual a infinito, y dejando como cero todas las otras entradas de  $\bar{B}(t)$  fuera de la diagonal principal o fuera de la submatriz  $B(t)$ . En otras palabras,  $\bar{B}(t) = \text{diag}[B(t), \beta I_{(n-m) \times (n-m)}]$ , donde  $\beta = \infty$ , e  $I_{(n-m) \times (n-m)}$  es la matriz identidad de dimensión  $(n - m) \times (n - m)$ . De este modo la nueva ecuación de observación está dada por

$$\bar{y}(t) = (\bar{A}_0(t) + \bar{A}(t)x(t))dt + \bar{B}(t)dW_2(t). \quad (4.6)$$

donde  $\bar{y}(t) \in R^n$ ,  $\bar{A}_0(t) = [A_0^T(t), 0_{n-m}]^T \in R^n$ , y  $0_{n-m}$  es un vector de  $n - m$  ceros.

El objetivo principal de la transformación introducida es que el nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$  es físicamente equivalente al anterior  $y(t)$ , puesto que los últimos  $n - m$  componentes ficticios de  $\bar{y}(t)$  consisten de puro ruido en vista de las intensidades infinitas de los ruidos blancos gaussianos en las correspondientes  $n - m$  ecuaciones, y los primeros  $m$  componentes de  $\bar{y}(t)$  coinciden con  $y(t)$ . En suma, la matriz completa de observación  $\bar{A}(t)$  es invertible, y la matriz  $(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1} \in R^{n \times n}$  existe y es igual a la matriz cuadrada de dimensión  $n \times n$ , cuya esquina superior izquierda está ocupada por la submatriz  $(B(t)B^T(t))^{-1} \in R^{m \times m}$  y todas las otras entradas son cero.

En términos de la nueva ecuación de observación (4.6), las ecuaciones de filtrado (4.4) y (4.5) toman la forma

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1} \times (d\bar{y}(t) - (\bar{A}_0(t) + \bar{A}(t)m(t))dt), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\ & E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}\bar{A}(t)P(t))dt + \\ & E(((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \\ & \bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}(d\bar{y}(t) - (\bar{A}_0(t) + \bar{A}(t)m(t))dt), \end{aligned} \quad (4.8)$$

con las condiciones iniciales  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

Puesto que la nueva matriz de observación  $\bar{A}(t)$  es invertible para cualquier  $t \geq t_0$ , la variable aleatoria  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiana con respecto al nuevo proceso

de observación  $\bar{y}(t)$ , y por tanto con respecto al proceso de observación original  $y(t)$ , para cualquier  $t \geq t_0$  (ver [7, 10, 16]). Por tanto, las siguientes consideraciones esbozadas en [7, 10, 16] son aplicables a las ecuaciones de filtrado (4.4),(4.5).

Primero, puesto que la variable aleatoria  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiana, el tercer momento condicional  $E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$  de  $x(t) - m(t)$  con respecto a las observaciones, el cual está en el último término de la ecuación (4.8), es igual a cero, porque el proceso  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiano. De este modo, desaparece completamente el último término en (4.8) y se obtiene la siguiente ecuación de varianza

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}\bar{A}(t)P(t))dt, \quad (4.9)$$

con la condición inicial  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

Segundo, si las funciones  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  son funciones polinomiales del estado  $x$  con coeficientes dependientes del tiempo, la expresión de los términos  $E(f(x, t) | F_t^Y)$  en (4.7) y  $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$  en (4.9) también incluyen sólo términos polinomiales de  $x$ . Entonces, el siguiente paso es considerar los momentos condicionales similarmente al penúltimo párrafo de la página 53. Después de representar todos los términos polinomiales en (4.7) y (4.9), que son generadas al expresar  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$  y  $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$  como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$ , se obtendría una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado. Las correspondientes representaciones de  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$  y  $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$  han sido derivadas en [7, 10, 16] para ciertas funciones polinomiales  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$ .

Finalmente, en vista de la definición de las matrices  $\bar{A}(t)$  y  $\bar{B}(t)$  y el nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$ , las ecuaciones de filtrado (4.7),(4.9) pueden ser escritas de nuevo en términos de la ecuación de observación original (4.2) usando  $y(t)$ ,  $A(t)$ , y  $B(t)$

$$dm(t) = E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt), \quad (4.10)$$

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt, \quad (4.11)$$

con las condiciones iniciales  $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$  and  $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$ .

En las siguientes subsecciones, se obtendrá una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado de (4.10) y (4.11) para funciones lineales y bilineales  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  en la ecuación (4.1). Debe notarse, sin embargo, que la aplicación del mismo procedimiento resultaría en el diseño de un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para toda función polinomial  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  en (4.1).

### 4.2.1. Filtro Óptimo para un Estado Lineal con Ruido Multiplicativo Lineal

En un caso particular, si las funciones  $f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x(t)$  y  $g(x, t) = b_0(t) + b_1(t)x(t)$  son lineales, donde  $b_1$  es un tensor tridimensional de dimensión  $n \times n \times n$ , las representaciones para  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$ , y  $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$  como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$  son derivadas como sigue

$$E(f(x, t) | F_t^Y) = a_0(t) + a_1(t)m(t) \quad (4.12)$$

$$E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) = a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t). \quad (4.13)$$

$$E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) = b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t), \quad (4.14)$$

donde  $b_1^T(t)$  denota el tensor obtenido de  $b_1(t)$  trasponiendo sus dos índices situados más a la derecha. Sustituyendo la expresión (4.12) en (4.10) y las expresiones (4.13), (4.14) en (4.11), se obtienen las siguientes ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo  $m(t)$  y la varianza del error  $P(t)$

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times [dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \quad m(t_0) = E(x(t_0) | F_t^Y), \quad (4.15)$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \quad (4.16)$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y).$$

Notar que la matriz de observación  $A(t)$  no debe ser ni siquiera invertible para obtener las ecuaciones de filtrado (4.15)–(4.16). De hecho, la única igualdad polinomial usada,  $E(x(t)x^T(t) | F_t^Y) = P(t) + m(t)m^T(t)$ , es válida para cualquier variable aleatoria con segundos momentos finitos, no solo gaussianos.

## 4.2.2. Filtro Óptimo para un Estado Bilineal con Ruido Multiplicativo Bilineal

Sean las funciones

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T \quad (4.17)$$

y

$$g(x, t) = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)xx^T \quad (4.18)$$

polinomios bilineales, donde  $x$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $a_0(t)$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $a_1(t)$  y  $b_0(t)$  son matrices de dimensión  $n \times n$ ,  $a_2(t)$  y  $b_1(t)$  son tensores tridimensionales de dimensión  $n \times n \times n$ , y  $b_2(t)$  es un tensor tetradimensional de dimensión  $n \times n \times n \times n$ . En este caso, las representaciones para  $E(f(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$ , y  $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$  como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$  son derivadas como sigue (ver [7, 10])

$$E(f(x, t) | F_t^Y) = a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t), \quad (4.19)$$

$$E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) = a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T. \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} E(g(x, t)g^T(x, t)) = & b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + \\ & b_1(t)P(t)b_1^T(t) + b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t) + \\ & b_0(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_2^T(t) + \\ & b_2(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_0^T(t) + \\ & b_1(t)(3m(t)P(t) + m(t)(m(t)m^T(t)))b_2^T(t) + \\ & b_2(t)(3P(t)m^T(t) + (m(t)m^T(t))m^T(t))b_1^T(t) + \\ & 3b_2(t)P^2(t)b_2^T(t) + b_2(t)(m(t)m^T(t))^2b_2^T(t) + \\ & 3b_2(t)(P(t)m(t)m^T(t) + m(t)m^T(t)P(t))b_2^T(t). \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $b_2^T(t)$  denota el tensor obtenido de  $b_2(t)$  trasponiendo sus dos índices situados más a la derecha. Sustituyendo la expresión (4.19) en (4.10) y las expresiones (4.20),(4.21) en (4.11), se obtienen las ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo  $m(t)$  y la varianza del error  $P(t)$

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + P(t)A^T(t) \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | F_t^Y),$$

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + \\
& b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + \\
& b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t) + b_0(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_2^T(t) + \\
& b_2(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_0^T(t) + b_1(t)(3m(t)P(t) + m(t)(m(t)m^T(t)))b_2^T(t) + \\
& b_2(t)(3P(t)m^T(t) + (m(t)m^T(t))m^T(t))b_1^T(t) + 3b_2(t)P^2(t)b_2^T(t) + \\
& 3b_2(t)(P(t)m(t)m^T(t) + m(t)m^T(t)P(t))b_2^T(t) + \\
& b_2(t)(m(t)m^T(t))^2b_2^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y).$$

Mediante la derivación precedente, se comprueba el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** El filtro óptimo de dimensión finita para el estado bilineal con ruido multiplicativo bilineal (4.1), donde los polinomios bilineales  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  están definidos por (4.17),(4.18), sobre las observaciones lineales (4.2), está dado por la ecuación (4.22) para el estimado óptimo  $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$  y la ecuación (4.23) para la estimación de la varianza del error  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$ .

De este modo, basado en el sistema general no cerrado de las ecuaciones de filtrado (4.10),(4.11), está probado que el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado puede ser obtenido para cualquier estado polinomial (4.1) sobre observaciones lineales (4.2).

Además, se derivó la forma específica (4.22),(4.23) del sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado correspondientes a un estado bilineal. En la siguiente sección, se verifica el funcionamiento del filtro óptimo diseñado para un estado cuadrático sobre observaciones lineales contra el filtro óptimo para un estado cuadrático con un estado independiente del ruido y un filtro extendido de Kalman-Bucy convencional.

### 4.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del filtro óptimo para un estado cuadrático bidimensional con un ruido cuadrático multiplicativo sobre observaciones lineales y se compara al filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido independiente del estado y un filtro extendido de Kalman-Bucy convencional.

Sea el estado real bidimensional  $x(t)$  que satisface el sistema cuadrático

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + 0.1x_1^2(t)\psi_1(t), \quad x_1(0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.1x_2^2(t), \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.24)$$

y el proceso de observación sea dado por la ecuación lineal

$$y(t) = x_1(t) + \psi_2(t), \quad (4.25)$$

donde  $\psi_1(t)$  y  $\psi_2(t)$  son ruidos blancos gaussianos, los cuales son las derivadas en promedio cuadrático débil de procesos estándar de Wiener (ver [84]). Las ecuaciones (4.24),(4.25) presentan la forma convencional de las ecuaciones (4.1),(4.2), lo cual es usado en la práctica actualmente [4].

El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado bilineal cuadrático con ruido cuadrático (4.24), usando observaciones lineales (4.25) confundidas con perturbaciones independientes e idénticamente distribuidas modeladas como ruidos blancos gaussianos. Pongamos el horizonte de tiempo de filtrado en  $T = 0.92$ .

Las ecuaciones de filtrado (4.22),(4.23) toman la siguiente forma particular para el sistema (4.24),(4.25)

$$\dot{m}_1(t) = m_2(t) + P_{11}(t)[y(t) - m_1(t)],$$

$$\dot{m}_2(t) = 0.1m_2^2(t) + 0.1P_{22}(t) + P_{12}(t)[y(t) - m_1(t)], \quad (4.26)$$

con la condición inicial

$$m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0,$$

y

$$\begin{aligned} \dot{P}_{11}(t) = & 2P_{12}(t) - 0.97P_{11}^2(t) + 0.03P_{12}^2(t) + \\ & 0.06P_{12}(t)m_1(t)m_2(t) + 0.01m_1^4 + 0.01m_1^2m_2^2, \end{aligned}$$

$$\dot{P}_{12}(t) = P_{22}(t) + 0.2m_2(t)P_{12}(t) - P_{11}(t)P_{12}(t),$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 0.4m_2(t)P_{22}(t) - P_{12}^2(t), \quad (4.27)$$

con la condición inicial

$$P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_0.$$

Los estimados obtenidos al resolver las ecuaciones (4.26)–(4.27) se comparan primero a los estimados que satisfacen las ecuaciones de filtrado óptimo para un estado cuadrático

con un ruido independiente del estado (ver [7]), basado en el sistema (4.24) donde el ruido multiplicativo cuadrático  $x^2(t)\psi_1(t)$  es reemplazado por el ruido aditivo estándar  $\psi_1(t)$ . Las ecuaciones de filtrado correspondientes son dadas por

$$\begin{aligned}\dot{m}_{I1}(t) &= m_{I2}(t) + P_{I11}(t)[y(t) - m_{I1}(t)], \\ \dot{m}_{I2}(t) &= 0.1m_{I2}^2(t) + 0.1P_{I22}(t) + P_{I12}(t)[y(t) - m_{I1}(t)],\end{aligned}\quad (4.28)$$

con la condición inicial

$$m_I(0) = E(x(0) | y(0)) = m_{I0},$$

y

$$\begin{aligned}\dot{P}_{I11}(t) &= 2P_{I12}(t) + 0.01 - P_{I11}^2(t), \\ \dot{P}_{I12}(t) &= P_{I22}(t) + 0.2m_{I2}(t)P_{I12}(t) - P_{I11}(t)P_{I12}(t), \\ \dot{P}_{I22}(t) &= 0.4m_{I2}(t)P_{I22}(t) - P_{I12}^2(t),\end{aligned}\quad (4.29)$$

con la condición inicial

$$P_I(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_{I0}.$$

Los estimados obtenidos al resolver las ecuaciones (4.26)–(4.27) se comparan a los estimados que satisfacen las siguientes ecuaciones de filtrado extendidas de Kalman-Bucy para el estado cuadrático (4.24) sobre observaciones lineales (4.25), las cuales son obtenidas asumiendo el término de ruido aditivo estándar  $\psi_1(t)$  en el primer componente del estado, usando la copia directa de las dinámicas del estado (4.24) en la ecuación del estimado, y asignando la ganancia del filtro como la solución de la ecuación de Riccati:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{K1}(t) &= m_{K2}(t) + P_{K11}(t)[y(t) - m_{K1}(t)], \\ \dot{m}_{K2}(t) &= 0.1m_{K2}^2 + 0.1P_{K22}(t) + P_{K12}(t)[y(t) - m_{K1}(t)],\end{aligned}\quad (4.30)$$

con la condición inicial

$$m_K(0) = E(x(0) | y(0)) = m_{K0},$$

y

$$\dot{P}_{K11}(t) = 2P_{K12}(t) + 0.01 - P_{K11}^2(t),$$

$$\begin{aligned}\dot{P}_{K12}(t) &= P_{K22}(t) + 0.2P_{K12}(t) - P_{K11}(t)P_{K12}(t), \\ \dot{P}_{K22}(t) &= 0.4P_{K22}(t) - P_{K12}^2(t),\end{aligned}\tag{4.31}$$

con la condición inicial

$$P_K(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_{K0}.$$

Las simulaciones numéricas se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (4.26)–(4.27), (4.28)–(4.29), y (4.30)–(4.31). Los valores obtenidos de los estimados  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ ,  $m_{I1}(t)$ ,  $m_{I2}(t)$ ,  $m_{K1}(t)$  y  $m_{K2}(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.26), (4.28), y (4.30), respectivamente, se comparan con los valores reales de las variables de estado  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  en (4.24).

Para cada uno de los tres filtros (4.26)–(4.27), (4.28)–(4.29), y (4.30)–(4.31), y el sistema de referencia (4.24)–(4.25) involucrado en la simulación, se asignan los siguientes valores iniciales:  $x_{10} = 10.1$ ,  $x_{20} = 10.1$ ,  $m_{10} = 1.1$ ,  $m_{20} = 1.1$ ,  $P_{110} = 10$ ,  $P_{120} = 1$ ,  $P_{220} = 10$ . Las perturbaciones gaussianas  $\psi_1(t)$  en (4.24) y  $\psi_2(t)$  en (4.25) son realizadas usando la función de ruido blanco construida en Matlab.

Las siguientes gráficas son obtenidas: gráficas del error entre las variables del estado de referencia  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.24) y los estimados del filtro óptimo  $m_1(t)$  y  $m_2(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.26), se muestran en la figura 4.1; la gráfica del error entre las variables del estado de referencia  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.24) y los estimados  $m_{I1}(t)$  y  $m_{I2}(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.28), se muestran en la figura 4.3; la gráfica del error entre las variables del estado de referencia  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.24) y los estimados  $m_{K1}(t)$  y  $m_{K2}(t)$  que satisfacen las ecuaciones (4.30), se muestran en la figura 4.5. Las gráficas de todos los errores de estimación se muestran en el intervalo de simulación desde  $t_0 = 0$  hasta  $T = 0.92$ . Las gráficas de estos errores de estimación también se dan a conocer de cerca en el intervalo de simulación de  $t = 0,80$  a  $T = 0.92$  en las figuras 2, 4, y 6, respectivamente. Se puede observar que los errores de estimación dados por el filtro óptimo (4.26) rápidamente alcanzan y entonces mantienen el valor promedio cero incluso en una vecindad cercana al punto de tiempo asintótico  $T = 0.99$ , donde las variables de estado cuadráticas de referencia (4.24) divergen al infinito. Por lo contrario, los errores dados por los otros filtros considerados alcanzan el cero más lentamente o no lo alcanzan en absoluto, tienen desviaciones sistemáticas (sesgadas) desde el cero, y claramente divergen al infinito cerca del punto de tiempo asintótico. Notar que la varianza del error del filtrado óptimo  $P(t)$  no converge al cero cuando el tiempo tiende al punto del tiempo asintótico, puesto que las dinámicas polinomiales de cuarto orden son más fuertes que los términos de Riccati cuadráticos en el lado derecho de la ecuación (4.27).



De este modo, se puede concluir que el filtro óptimo obtenido (4.26)-(4.27) para un estado cuadrático con un ruido multiplicativo cuadrático sobre observaciones lineales incompletas da mejores estimados definitivamente que el filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido independiente del estado o un convencional filtro extendido de Kalman-Bucy convencional. La subsecuente discusión de los resultados de la simulación obtenidos pueden ser encontrados en las Conclusiones.

## 4.4. Conclusiones

Los resultados de la simulación muestran que los valores de los estimados calculados usando el filtro óptimo obtenido para un estado cuadrático con un ruido multiplicativo cuadrático sobre observaciones lineales incompletas tiene definitivamente mejores propiedades de convergencia que los valores de los estimados dados por el filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido independiente del estado o un filtro extendido de Kalman-Bucy convencional. De hecho, se puede observar que el error de estimación producido por el filtro óptimo rápidamente alcanza y entonces mantiene el valor promedio cero incluso en una vecindad cercana al punto de tiempo asintótico, donde el estado de referencia (4.24) va al infinito para un tiempo finito. De lo contrario, los errores de estimación dados por los otros dos filtros aplicados divergen al infinito cerca del punto de tiempo asintótico. Esta mejora significativa en el comportamiento del estimado se obtiene debido a la selección más cuidadosa de la matriz de ganancia del filtro en las ecuaciones (4.26)–(4.27), como debe ser en el filtro óptimo. Aunque esta conclusión se sigue de la teoría desarrollada, la simulación numérica sirve como una ilustración convincente. Los resultados obtenidos podrían ser extendidos a sistemas con incertidumbres paramétricas que combinan el filtrado en promedio cuadrático medio con una de las técnicas de filtrado robusto, tal como LMI.

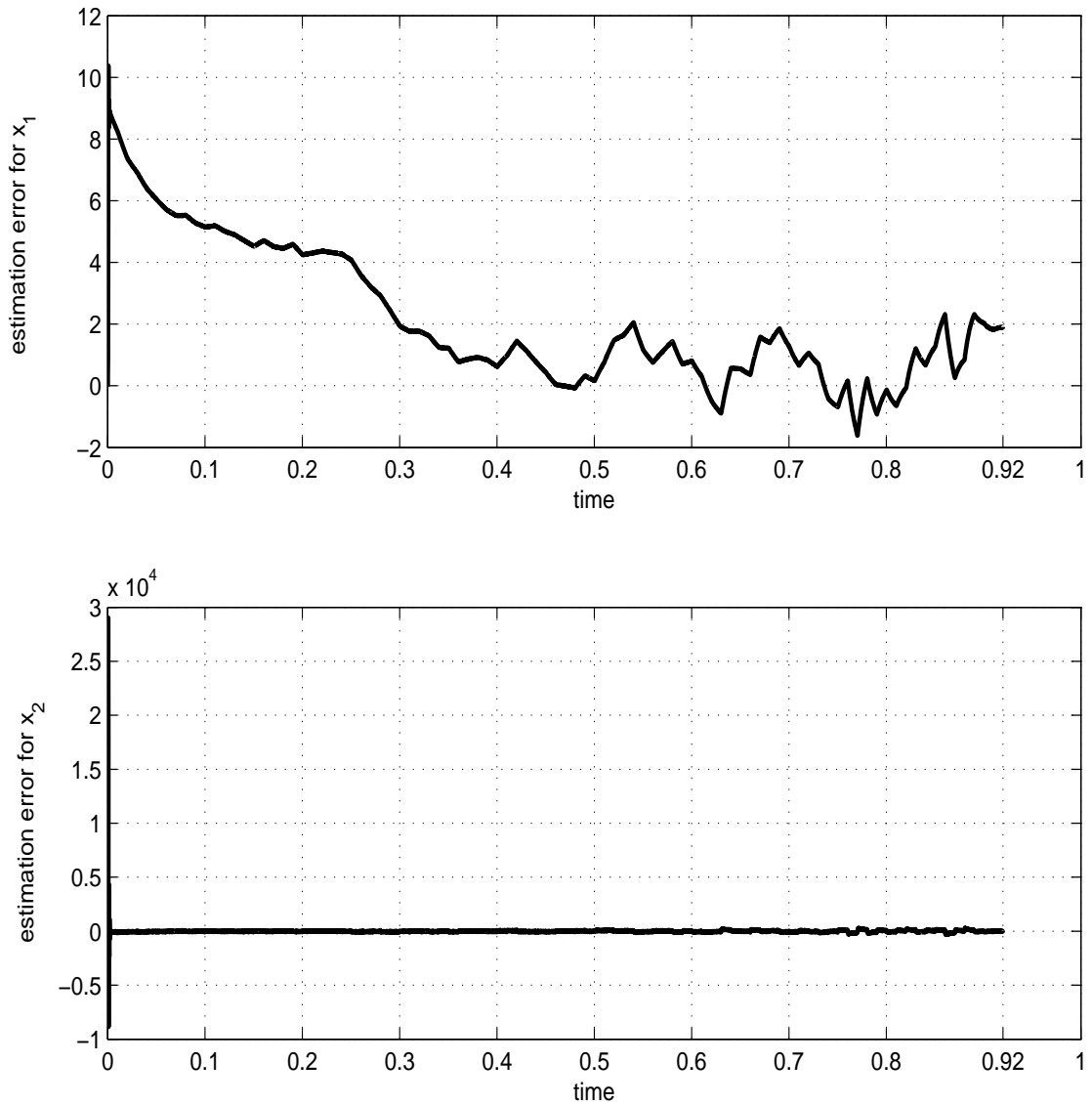


Figura 4.1: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.24) y el estimado del filtro óptimo  $m_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.26), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.24) y el estimado del filtro óptimo  $m_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.26), en el intervalo de simulación completo  $[0, 0.92]$ .

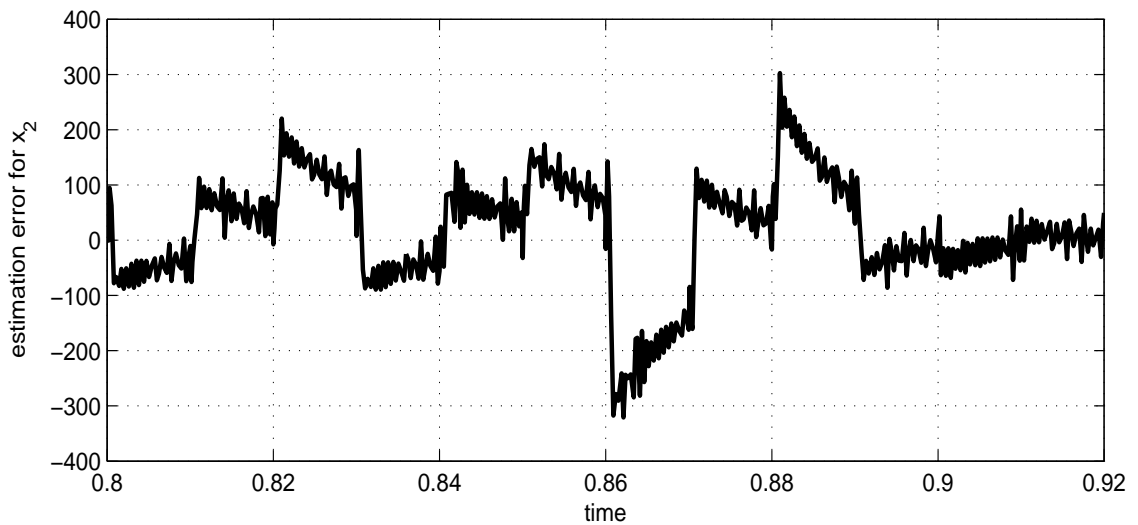
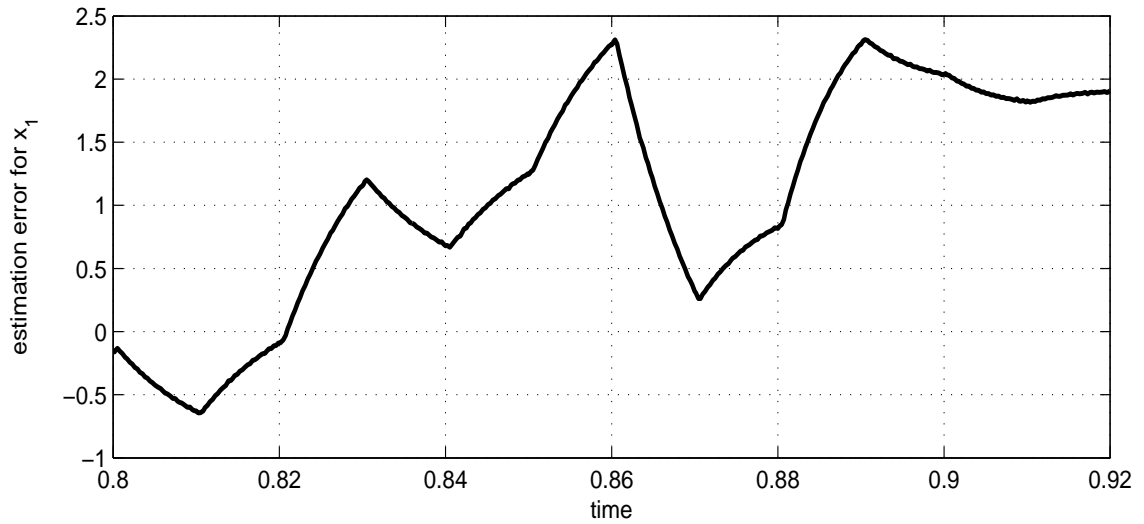


Figura 4.2: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.24) y el estimado del filtro óptimo  $m_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.26), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.24) y el estimado del filtro óptimo  $m_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.26), en el intervalo de simulación  $[0.80, 0.92]$ .

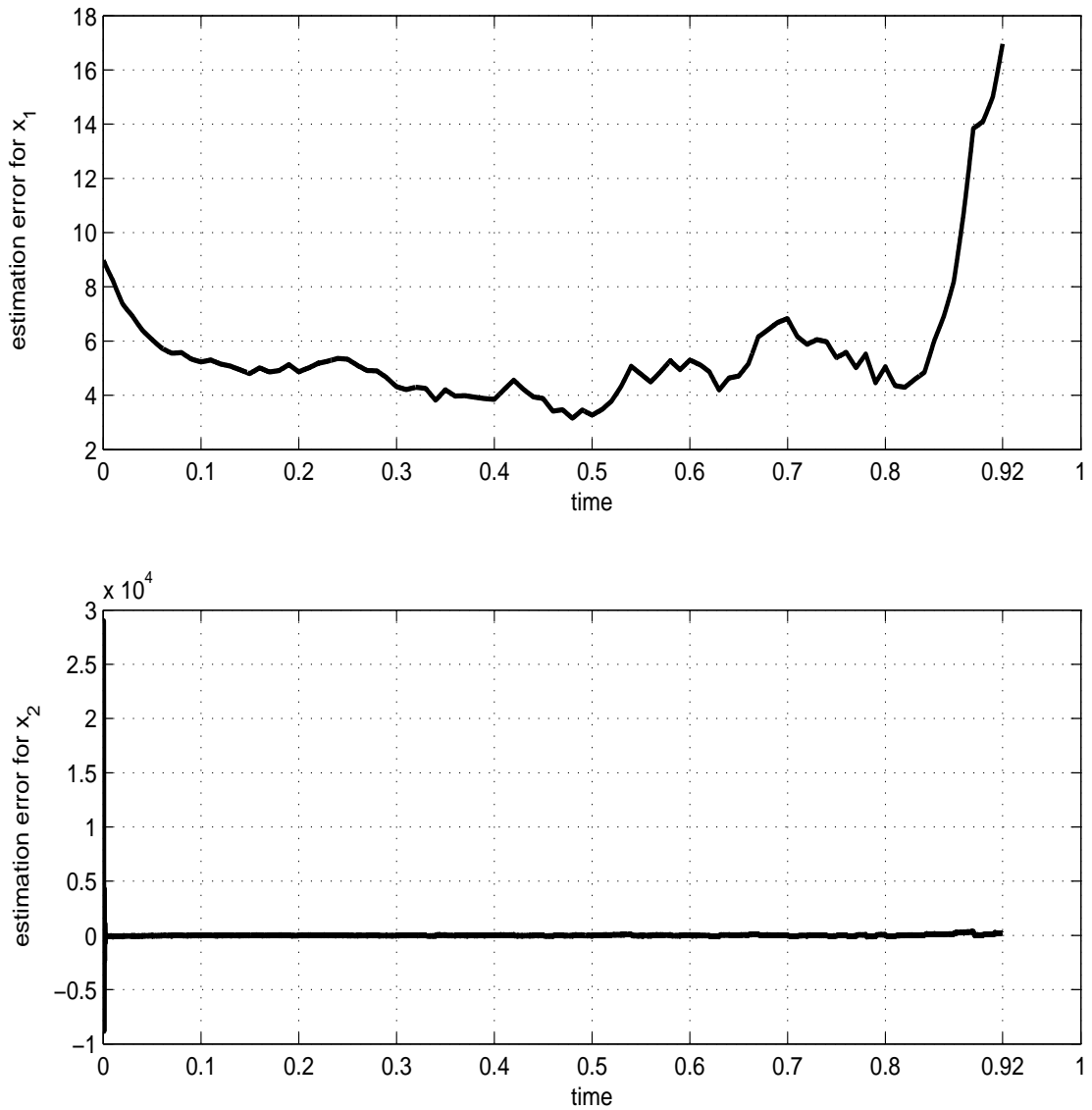


Figura 4.3: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{I1}(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.28), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{I2}(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.28), en el intervalo de simulación completo  $[0, 0.92]$ .

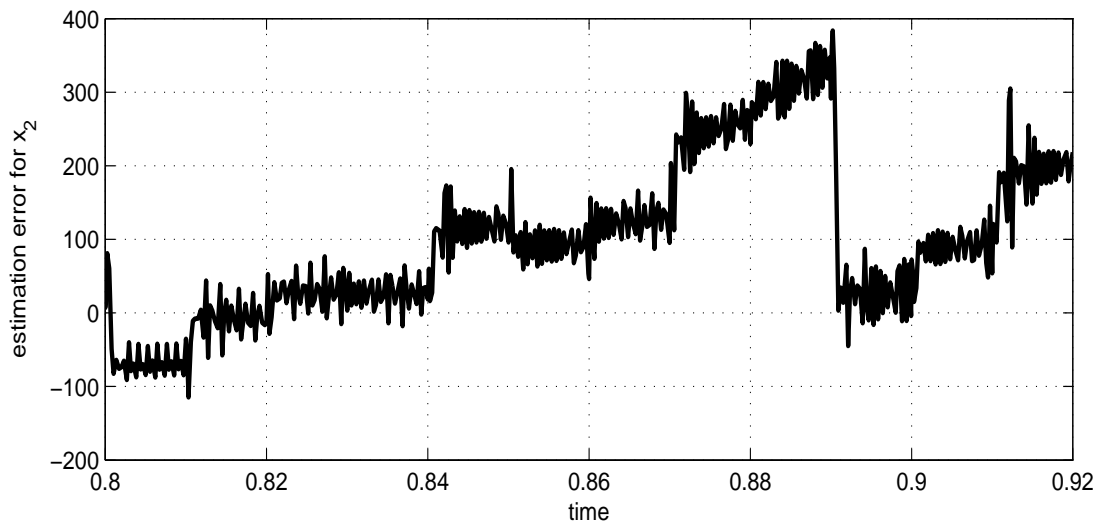
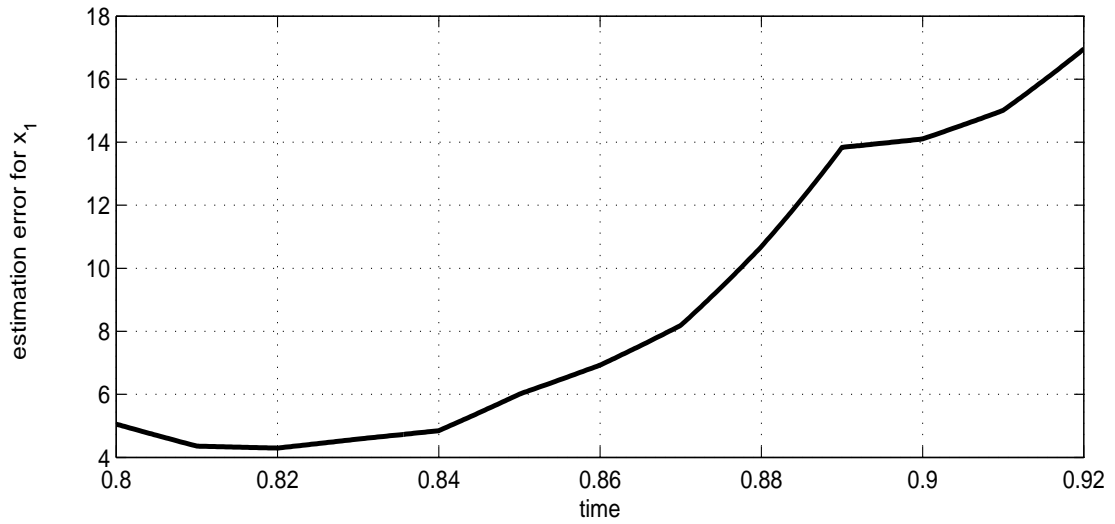


Figura 4.4: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{I1}(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.28), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{I2}(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.28), en el intervalo de simulación  $[0.80, 0.92]$ .

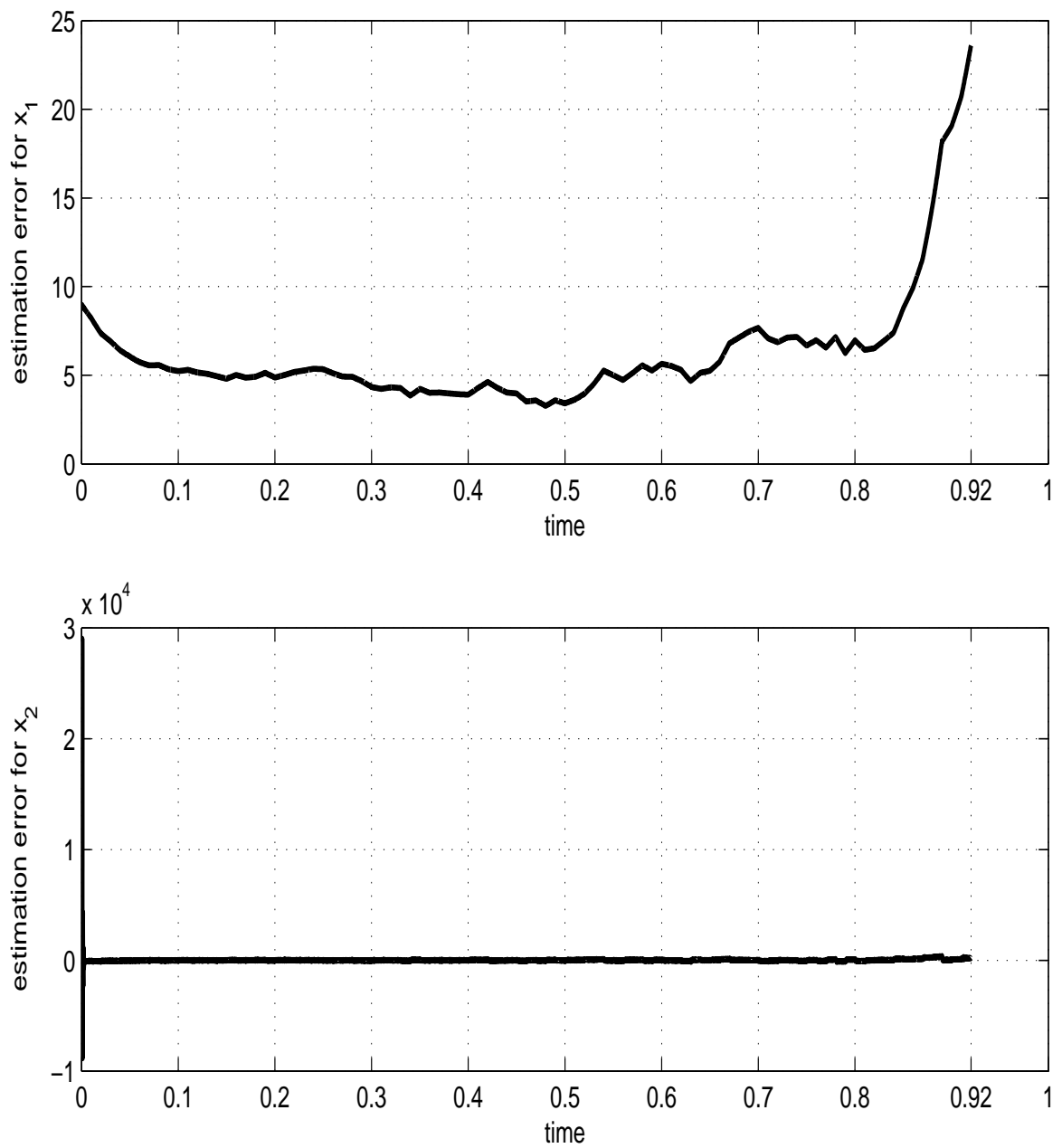


Figura 4.5: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{K1}(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.30), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{K2}(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.30), en el intervalo de simulación completo  $[0,0.92]$ .

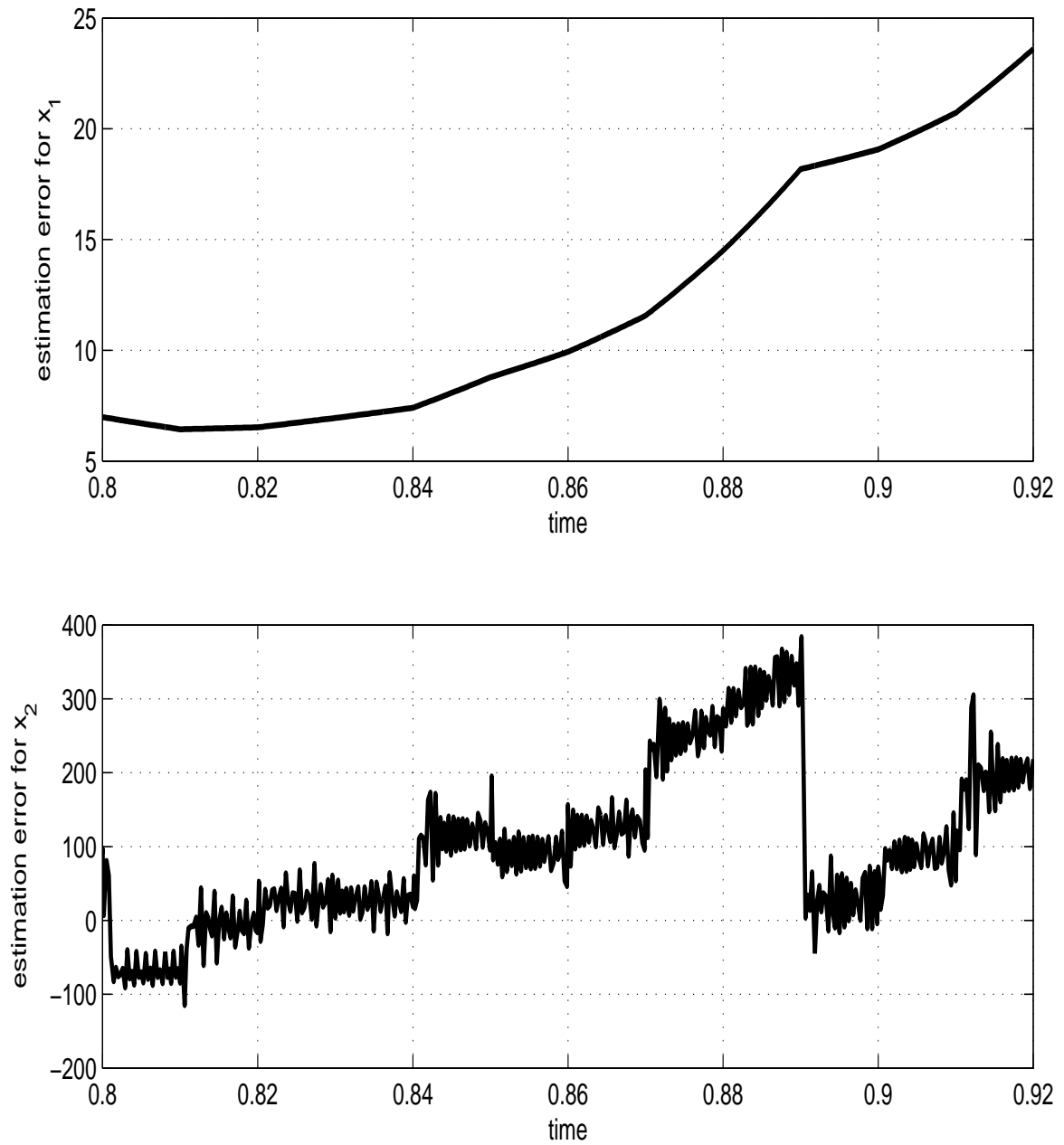


Figura 4.6: Gráfica del error entre el estado real  $x_1(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{K1}(t)$  que satisface la primera ecuación en (4.30), y gráfica del error entre el estado real  $x_2(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.24) y el estimado  $m_{K2}(t)$  que satisface la segunda ecuación en (4.30), en el intervalo de simulación  $[0.80, 0.92]$ .

# Capítulo 5

## Controlador LQG Óptimo para Sistemas Estocásticos Lineales con Parámetros Desconocidos

### 5.1. Problema del Controlador Óptimo

#### 5.1.1. Planteamiento del problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio completo de probabilidad con una familia creciente y continua por la derecha de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sean  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  y  $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$  procesos independientes de Wiener. El  $F_t$ -medible proceso aleatorio  $(x(t), y(t))$  es descrito por una ecuación diferencial lineal con vector de parámetros desconocidos  $\theta(t)$  para el estado del sistema

$$dx(t) = (a(\theta, t)x(t))dt + B(t)u(t)dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

y una ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + G(t)dW_2(t). \quad (5.2)$$

Aquí,  $x(t) \in R^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in R^l$  es el control,  $y(t) \in R^m$  es el proceso de observación, y  $\theta(t) \in R^p$ ,  $p \leq n \times n$ , es el vector de componentes desconocidos de la matriz  $a(\theta, t)$ . Lo último significa que  $a(\theta, t)$  contiene componentes desconocidos  $a_{ij}(t) = \theta_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, p \leq n \times n$ , así como componentes conocidos  $a_{ij}(t)$ , cuyos valores son funciones conocidas del tiempo. La condición inicial  $x_0 \in R^n$  es un vector gaussiano tal que  $x_0, W_1(t)$ , y  $W_2(t)$  son independientes. Se asume que  $G(t)G^T(t)$  es una matriz definida



positiva. Todos los coeficientes en (5.1)–(5.2) son funciones determinísticas del tiempo de dimensiones apropiadas.

Consideremos que no hay información útil en los valores de los parámetros desconocidos  $\theta_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, p$ . En otras palabras, los parámetros desconocidos pueden ser modelados como procesos de Wiener  $F_t$ -medibles

$$d\theta(t) = \beta(t)dW_3(t), \quad (5.3)$$

con condiciones iniciales desconocidas  $\theta(t_0) = \theta_0 \in R^p$ , donde  $(W_3(t), F_t, t \geq t_0)$  es un proceso de Wiener independiente de  $x_0$ ,  $W_1(t)$ , y  $W_2(t)$ , y  $\beta(t) \in R^{p \times p}$  es una función de intensidad.

La función de costo cuadrático  $J$  que será minimizada está definida como

$$J = \frac{1}{2}E[x^T(T)\Phi x(T) + \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds], \quad (5.4)$$

donde  $R$  es definida positiva y  $\Phi$ ,  $L$  son matrices simétricas definidas no negativas,  $T > t_0$  es un cierto instante de tiempo, el símbolo  $E[f(x)]$  significa la esperanza (media) de una función  $f$  de una variable aleatoria  $x$ , y  $a^T$  denota la traspuesta para un vector (matriz)  $a$ .

El problema del controlador óptimo es encontrar el control  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , que minimiza el criterio  $J$  junto con la trayectoria no observada  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (5.1).

### 5.1.2. Reducción del problema

Para tratar con el problema del controlador establecido, las ecuaciones (5.1) y (5.3) deben ser reorganizadas. Para este propósito, se introducen una matriz  $a_1(t) \in R^{(n+p) \times (n+p)}$  y un tensor cúbico  $a_2(t) \in R^{(n+p) \times (n+p) \times (n+p)}$  como sigue.

Notar que la ecuación para el  $i$ -ésimo componente del vector de estado (5.1) está dado por

$$dx_i(t) = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) \right) dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)dW_{1j}(t), \quad x_i(t_0) = x_{0i}.$$

Entonces: si la variable  $a_{ij}(t)$  es una función conocida, entonces el  $(i, j)$ -ésimo componente de la matriz  $a_1(t)$  es esta función,  $a_{1ij}(t) = a_{ij}(t)$ ; de otro modo, si la variable  $a_{ij}(t)$  es una función desconocida, entonces la  $(i, n+k, j)$ -ésima entrada del tensor cúbico  $a_2(t)$  es 1, donde  $k$  es el número de la entrada desconocida actual en la matriz  $a_{ij}(t)$ , contando

las entradas desconocidas subsecuentemente por renglones desde la primera hasta la  $n$ -ésima entrada en cada renglón. Todas las otras entradas no asignadas de la matriz  $a_1(t)$  y tensor cúbico  $a_2(t)$  se definen como 0.

Usando la notación introducida, las ecuaciones del estado (5.1),(5.3) para el vector  $z(t) = [x(t), \theta(t)] \in R^{n+p}$  pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} dz(t) &= (a_1(t)z(t) + a_2(t)z(t)z^T(t))dt + [B(t) \mid 0_{p \times l}]u(t)dt + \\ &\quad \text{diag}[b(t), \beta(t)]d[W_1^T(t), W_3^T(t)]^T, \\ z(t_0) &= [x_0, \theta_0], \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde la matriz  $a_1(t)$  y tensor cúbico  $a_2(t)$  ya han sido definidos. La ecuación (5.5) es bilineal con respecto al vector de estado extendido  $z(t) = [x(t), \theta(t)]$ .

### 5.1.3. Principio de Separación

Debe observarse que el principio de separación permanece válido para un sistema estocástico lineal con parámetros desconocidos. De hecho, reemplazemos el estado bilineal no medido  $z(t) = [x(t), \theta(t)]$ , que satisface (5.1),(5.3), con su estimado óptimo  $m(t)$  sobre observaciones lineales  $y(t)$  (2), el cual se obtiene usando el siguiente filtro óptimo para estados bilineales sobre observaciones lineales (ver [24] para el planteamiento y solución del problema de filtrado correspondiente)

$$\begin{aligned} dm(t) &= (a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \\ &\quad [B(t) \mid 0_{p \times l}]u(t)dt + P(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T(G(t)G^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \\ m(t_0) &= [E(x(t_0) \mid F_t^Y), E(\theta(t_0) \mid F_t^Y)], \\ dP(t) &= (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + \\ &\quad (\text{diag}[b(t), \beta(t)])(\text{diag}[b(t), \beta(t)]^T))dt - \\ &\quad P(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T(G(t)G^T(t))^{-1}[A(t), 0_{m \times p}]P(t)dt, \\ P(t_0) &= E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T \mid F_t^Y), \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde  $0_{m \times p}$  es la matriz cero de dimensión  $m \times p$ ;  $P(t)$  es la varianza condicional del error de estimación  $z(t) - m(t)$  con respecto a las observaciones  $Y(t)$ .

Recordemos que  $\hat{z}(t) = m(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)]$  es el estimado óptimo para el vector de estado  $z(t) = [x(t), \theta(t)]$ , basado en el proceso de observación  $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$ , que minimiza la norma 2 euclideana

$$H = E[(z(t) - \hat{z}(t))^T(z(t) - \hat{z}(t)) \mid F_t^Y] \tag{5.8}$$

en cualquier instante de tiempo  $t$ . Aquí,  $E[\xi(t) | F_t^Y]$  significa la esperanza condicional de un proceso estocástico  $\xi(t) = (z(t) - \hat{z}(t))^T(z(t) - \hat{z}(t))$  con respecto a la  $\sigma$  - álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como se sabe de [84], este estimado óptimo está dado por la esperanza condicional

$$\hat{z}(t) = m(t) = E(z(t) | F_t^Y)$$

del estado del sistema  $z(t)$  con respecto a la  $\sigma$  - álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(z(t) - m(t))(z(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es la varianza del error de estimación.

Se puede verificar rápidamente (ver [66]) que el problema de control óptimo para el estado del sistema (5.1) y la función de costo (5.4) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (5.6) y la función de costo  $J$  representada como

$$J = E\left\{\frac{1}{2}m^T(T)\Phi_1m(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T m^T(s)L_1(s)m(s)ds + \right. \quad (5.9)$$

$$\left. \frac{1}{2}\int_{t_0}^T \text{tr}[P(s)L_1(s)]ds + \frac{1}{2}\text{tr}[P(T)\Phi_1]\right\},$$

donde  $\Phi_1 = \text{diag}[\Phi, 0_{p \times p}]$ ,  $L_1 = \text{diag}[L, 0_{p \times p}]$ , y  $\text{tr}[A]$  denota la traza de una matriz  $A$ . Puesto que los tres primeros términos de  $J$  son independientes del vector del estimado de parámetros desconocidos  $\hat{\theta}(t)$ , la función de costo (5.9) puede ser minimizada mediante dos pasos consecutivos. Primero, los primeros tres términos de  $J$  se minimizan asumiendo que el parámetro  $\theta(t)$  es una función conocida dependiente del tiempo, esto es, la función de costo reducida efectiva

$$M = E\left\{\frac{1}{2}\hat{x}^T(T)\Phi\hat{x}(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T \hat{x}^T(s)L(s)\hat{x}(s)ds\right\} \quad (5.10)$$

se utiliza en el primer paso. Como un resultado, el control óptimo se obtiene minimizando la función de costo reducida  $M$  (5.10) para el estimado del estado  $m(t)$  (6) bajo la suposición de que el parámetro  $\theta(t)$  es conocido. Segundo, los últimos dos términos de  $J$  se minimizan decreciendo la norma de la varianza del error de estimación  $P(t)$  en cada momento  $t$ . Finalmente, el valor mínimo del criterio  $J$  debe determinarse utilizando (5.9). Esta conclusión presenta el principio de separación para sistemas lineales con parámetros desconocidos.

### 5.1.4. Solución del Problema de Control Óptimo

Como primer paso, se debe notar que la ecuación óptima del estimado del estado (5.6) se convierte en lineal en  $m$  bajo la suposición de que el parámetro  $\theta(t)$  es una función conocida dependiente del tiempo. De hecho, en este caso,  $a_2 = 0$  mediante construcción (ver Subsección 5.1.2), y las ecuaciones (5.6),(5.7) se convierten en las ecuaciones de filtrado lineales óptimas de Kalman-Bucy ([58]). Por lo tanto, la solución óptima está dada por el controlador óptimo LQG para sistemas lineales ([66]), el cual se aplica a la ecuación del estimado (5.6), asumiendo que el parámetro  $\theta(t)$  es conocido y  $a_2 = 0$ , y a la función reducida de costo (5.10). La correspondiente ley del control óptimo está dada por

$$u^*(t) = (R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)m(t), \quad (5.11)$$

donde la función matricial  $Q(t)$  es la solución de la siguiente ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -a^T(\theta, t)Q(t) - Q(t)a(\theta, t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t),$$

con la condición terminal  $Q(T) = \Phi$ .

En el segundo paso, recordando que el parámetro  $\theta(t)$  es actualmente desconocido, el estimado para  $\theta(t)$  debe ser asignado para minimizar la función de costo (5.9). Sin embargo, el mejor estimado, el cual minimiza la norma de la varianza del error de estimación  $P(t)$  y, consecuentemente, la función de costo (5.9) en todo momento  $t$ , está dada por  $\hat{\theta}(t)$ , el segundo componente de  $m(t) = \hat{z}(t)$ , en vista de (5.8). De este modo, la ecuación de Riccati matricial de ganancia finalmente toma la forma

$$\dot{Q}(t) = -a^T(\hat{\theta}(t), t)Q(t) - Q(t)a(\hat{\theta}(t), t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \quad (5.12)$$

con la condición terminal  $Q(T) = \Phi$ .

Al sustituir el control óptimo (5.11) en la ecuación (5.6), se obtiene la ecuación del estimado del estado óptimamente controlado siguiente

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \\ & [B(t) \mid 0_{p \times l}](R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)m(t)dt + \\ & P(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T(G(t)G^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \end{aligned} \quad (5.13)$$

con la condición inicial  $m(t_0) = [E(x(t_0) \mid F_t^Y), E(\theta(t_0) \mid F_t^Y)]$ .

De este modo, la ecuación del estimado del estado óptimamente controlado (5.13), la ecuación constitutiva matricial de ganancia (5.12), la ley de control óptimo (5.11), y la ecuación de varianza (5.7) dan la solución completa para el problema del controlador óptimo para sistemas lineales con parámetros desconocidos.

## 5.2. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del controlador óptimo para un sistema lineal (5.1) con un parámetro desconocido  $\theta$  (5.3) sobre observaciones lineales (5.2), usando el esquema (5.11)–(5.13), y comparándolo con el controlador óptimo para el sistema de referencia (5.1),(5.2) con exactamente un parámetro conocido  $\theta$ .

Consideremos un sistema lineal escalar con la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = \theta x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.14)$$

y el proceso de observación

$$y(t) = x(t) + \psi(t), \quad (5.15)$$

donde  $\psi(t)$  es un ruido blanco gaussiano, el cual es la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [84]), y  $x_0$  es una variable aleatoria gaussiana. Las ecuaciones (5.14) y (5.15) presentan la forma convencional para las ecuaciones (5.1) y (5.2), lo cual es usado actualmente en la práctica [4].

El problema del controlador óptimo es encontrar el control  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T = 5$ , que minimice el criterio

$$J = \frac{1}{2}E\left[\int_0^T u^2(t)dt + \int_0^T x^2(t)dt\right]. \quad (5.16)$$

En otras palabras, el problema de control es minimizar la energía total del estado  $x$  usando la energía mínima total del control  $u$ .

Construiremos primero el controlador donde la ley de control y las matrices  $P(t)$  y  $Q(t)$  se calculan de la misma forma que para el controlador lineal óptimo para un sistema lineal con exactamente un parámetro conocido  $\theta$ , que es  $u^*(t) = (R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)m(t)$  (ver [66] para referencia). Puesto que  $B(t) = 1$  en (12) y  $R(t) = 1$  en (16), la ley de control es igual a

$$u(t) = Q(t)m(t); \quad (5.17)$$

donde  $m(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$\dot{m}(t) = a(\theta, t)m(t) + B(t)u(t) + P(t)A^T(t)G(t)G^T(t))^{-1}(y(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))),$$

$$m(t_0) = m_0 = E(x_0 | F_{t_0}^Y);$$

$Q(t)$  satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -a^T(\theta, t)Q(t) - Q(t)a(\theta, t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t),$$

con la condición terminal  $Q(T) = \Phi$ ; y  $P(t)$  satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{P}(t) = P(t)a^T(\theta, t) + a(\theta, t)P(t) + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(G(t)G^T(t))^{-1}A(t)P(t),$$

con la condición inicial  $P(t_0) = E((x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^T | y(t_0))$ . Puesto que  $t_0 = 0$ ,  $a(t) = 1$ ,  $B(t) = 1$ ,  $b(t) = 0$  en (5.14),  $A_0(t) = 0$ ,  $A(t) = 1$ ,  $G(t) = 1$  en (5.15), y  $L = 1$  y  $\Phi = 0$  en (5.16), las últimas ecuaciones se convierten en

$$\dot{m}(t) = \theta m(t) + u(t) + P(t)(y(t) - m(t)), \quad m(0) = m_0, \quad (5.18)$$

$$\dot{Q}(t) = 1 - 2\theta Q(t) - (Q(t))^2, \quad Q(5) = 0, \quad (5.19)$$

$$\dot{P}(t) = 2\theta P(t) - (P(t))^2, \quad P(0) = P_0. \quad (5.20)$$

Al sustituir el control (5.17) en (5.18), la ecuación del estimado controlado toma la forma

$$\dot{m}(t) = m(t) + Q(t)m(t) + P(t)(y(t) - m(t)), \quad m(0) = m_0. \quad (5.21)$$

Para la simulación numérica del sistema (5.14),(5.15) y el controlador (5.17)–(5.21), se asignan los valores iniciales  $x(0) = 1$ ,  $m(0) = 2$ , y  $P(0) = 10$  y el valor del parámetro conocido  $\theta = 1$ . La perturbación  $\psi(t)$  en (5.15) se realiza usando la función de ruido blanco construida en MatLab. Se debe notar que el controlador (5.17)–(5.21) actualmente es no realizable, puesto que el valor del parámetro real  $\theta = 1$  es desconocido, y su simulación es conducida para propósitos de comparación solamente.

Los resultados de aplicar el controlador (5.17)–(5.21) al sistema (5.14),(5.15) se muestran en la Figura 5.1, la cual presenta la gráfica del error de estimación entre el estado (5.14)  $x(t)$ , controlado por (5.17), y el estimado controlado (5.21)  $m(t)$  y la gráfica del criterio (5.16)  $J(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ . Los valores del error de estimación  $x(t) - m(t)$  y el criterio (5.16) en el momento final  $T = 5$  son  $x(5) - m(5) = -0.02$  y  $J(5) = 3.89$ .

Apliquemos ahora el controlador óptimo (5.11)–(5.13), (5.7) para sistemas lineales con parámetros inciertos al sistema (5.14), (5.15), asumiendo  $\beta(t) = 1$  en (5.3). La ley de control (5.11) toma la forma

$$u^*(t) = Q(t)(t)\hat{x}(t), \quad (5.22)$$

donde

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{\theta}(t)\hat{x}(t) + P_{12}(t) + u^*(t) + P_{11}(t)(y(t) - \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (5.23)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = P_{12}(t)(y(t) - \hat{x}(t)), \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \quad (5.24)$$

y

$$\dot{Q}(t) = 1 - 2\hat{\theta}(t)Q(t) - (Q(t))^2, \quad Q(5) = 0, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{11}(t) &= 4P_{11}(t)\hat{\theta}(t) - P_{11}^2(t), \\
\dot{P}_{12}(t) &= 2P_{12}(t)\hat{\theta}(t) - P_{11}(t)P_{12}(t), \\
\dot{P}_{22}(t) &= 1 - P_{12}^2(t),
\end{aligned} \tag{5.26}$$

con la condición inicial  $P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y)$ , y  $z(t) = [x(t), \theta(t)]$ .

Al sustituir el control (5.22) en (5.23), la ecuación del estimado controlado toma la forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{\theta}(t)\hat{x}(t) + P_{12}(t) + Q(t)\hat{x}(t) + P_{11}(t)(y(t) - \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \tag{5.27}$$

Para la simulación numérica del sistema (5.14),(5.15) y el controlador (5.22)-(5.27), se asignan los valores iniciales  $x(0) = 1$ ,  $\hat{x}(0) = 2$ ,  $\hat{\theta}(0) = 1.3$ ,  $P_{12}(0) = 7$ , y  $P_{11}(0) = P_{22}(0) = 10$ . Se asume el parámetro real  $\theta = 1$ . La perturbación  $\psi(t)$  en (5.15) se realiza usando la función de ruido blanco construida en MatLab.

Los resultados de aplicar el controlador (5.11)–(5.13), (5.7) al sistema (5.14),(5.15) se muestran en la figura 5.2, la cual presenta la gráfica del error de estimación entre el estado (5.14)  $x(t)$ , controlado por (5.22), y el estimado controlado (5.27)  $\hat{x}(t)$ , la gráfica del estimado del parámetro  $\hat{\theta}(t)$  (5.24), y la gráfica del criterio (5.16)  $J(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ . Los valores del error de estimación  $x(t) - m(t)$ , el estimado del parámetro  $\hat{\theta}(5)$ , y el criterio (5.16) en el momento final  $T = 5$  son  $x(5) - m(5) = -0.14$ ,  $\hat{\theta}(5) = 1.01$ , y  $J(5) = 3.93$ .

Se puede observar que los valores finales del estado controlado y el estimado controlado y el parámetro controlado y sus valores reales, así como los valores del criterio en  $T = 5$ , son muy cercanos para el sistema con un parámetro de valor conocido y el sistema donde el valor de este parámetro es desconocido y reemplazado por el estimado óptimo diseñado. Esto verifica exitosamente el funcionamiento total y la exactitud computacional del controlador óptimo diseñado para sistemas lineales con parámetros desconocidos.

### 5.3. Conclusiones

Hemos diseñado el controlador LQG óptimo para sistemas lineales con parámetros desconocidos sobre observaciones lineales y un criterio cuadrático. La optimalidad del controlador obtenido ha sido demostrada usando los resultados previos en el filtrado óptimo para estados polinomiales, particularmente, bilineales, sobre observaciones lineales y la teoría LQR óptima para sistemas lineales. Se ha introducido el principio de separación para sistemas lineales con parámetros desconocidos. Se han verificado numéricamente los

resultados teóricos obtenidos en un ejemplo ilustrativo. Los resultados de la simulación muestran que los valores terminales óptimos de los estados y estimados controlados, así como la función de costo, están muy cercanos al sistema con un parámetro de valor conocido y el sistema donde este parámetro tiene valor desconocido y reemplazado por el estimado óptimo diseñado. Aunque estas conclusiones provienen de la teoría desarrollada, la simulación numérica sirve como una ilustración convincente.



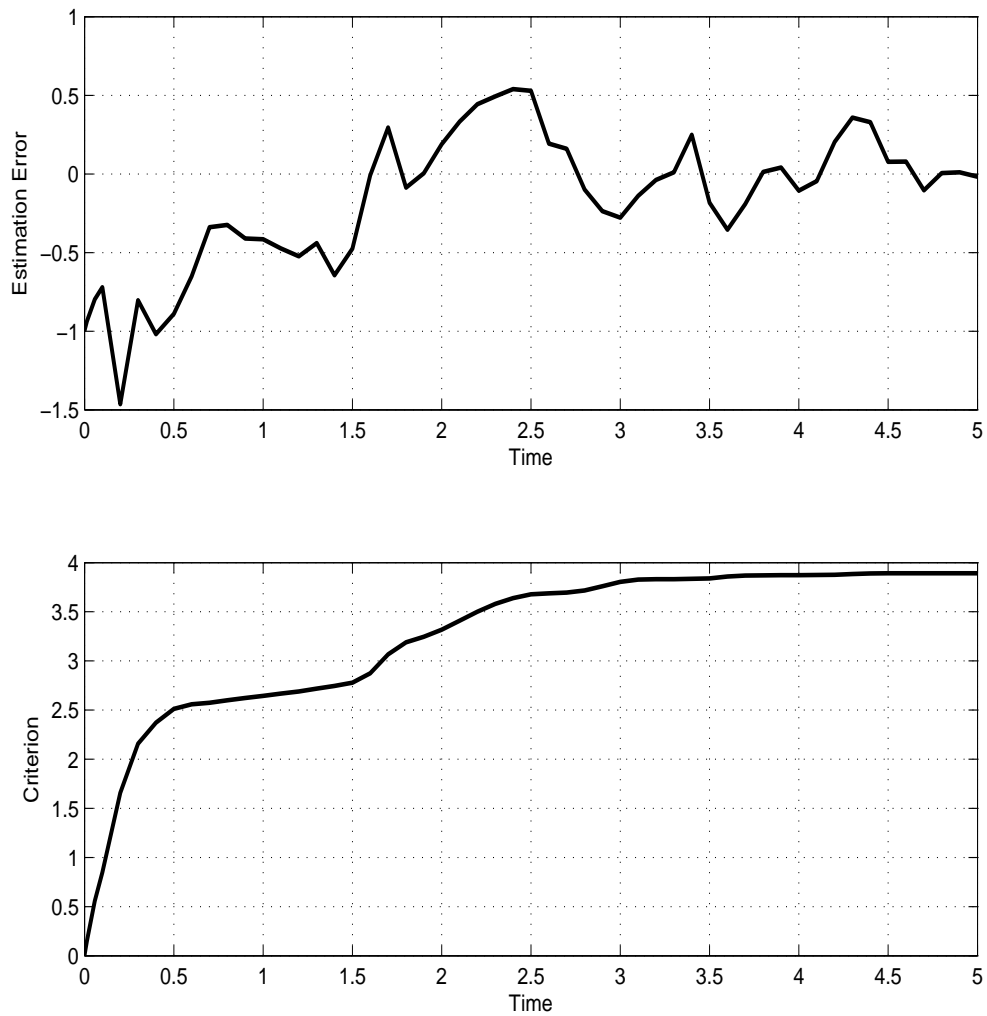


Figura 5.1: Gráfica del error de estimación entre el estado (5.14)  $x(t)$ , controlado por (5.17), y el estimado controlado (5.21)  $m(t)$  y gráfica del criterio (5.16)  $J(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

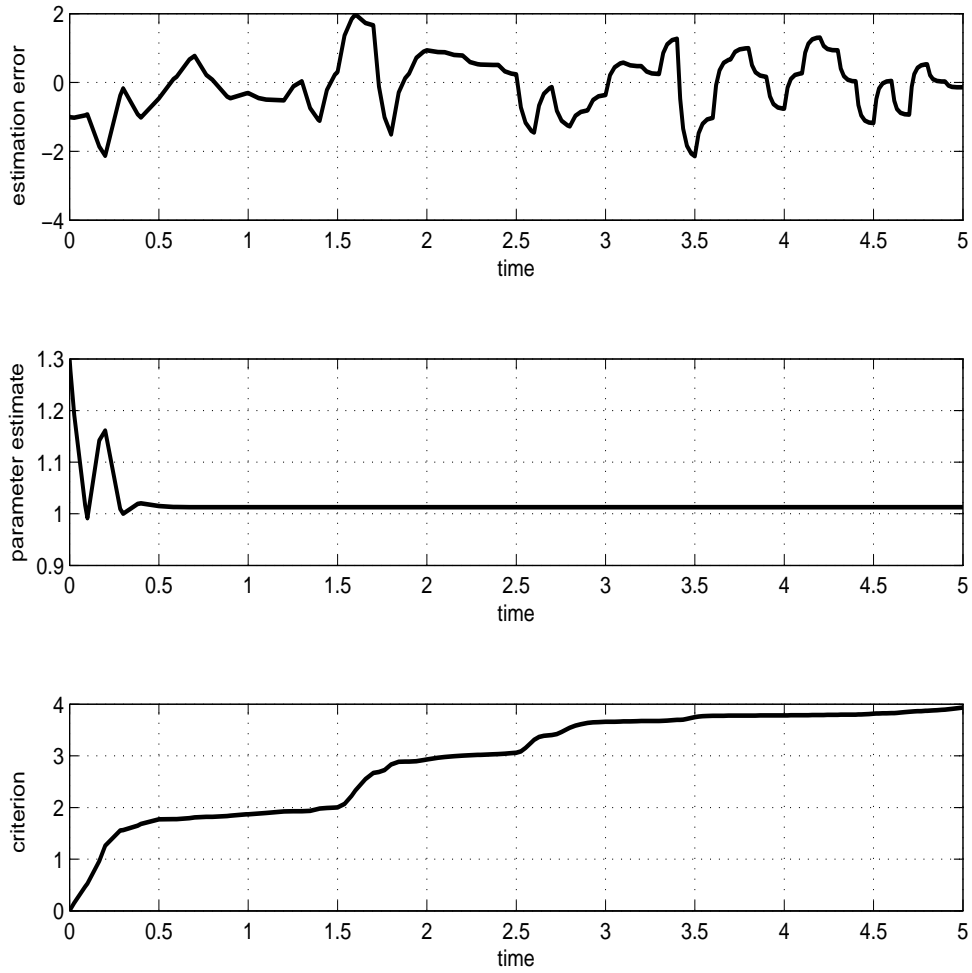


Figura 5.2: Gráfica del error de estimación entre el estado (5.14)  $x(t)$ , controlado por (5.22), y el estimado controlado (5.27)  $\hat{x}(t)$ , gráfica del estimado del parámetro  $\theta(t)$  (5.24), y gráfica del criterio (5.16)  $J(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

# Capítulo 6

## Filtrado Óptimo para Estados Polinomiales sobre Observaciones Polinomiales

### 6.1. Planteamiento del Problema

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio completo de probabilidad con una familia creciente y continua por la derecha de  $\sigma$ -álgebras  $F_t, t \geq 0$ , y sean  $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$  y  $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$  procesos independientes de Wiener. El  $F_t$ -medible proceso aleatorio  $(x(t), y(t))$  es descrito por ecuaciones diferenciales polinomiales no lineales para el estado del sistema

$$dx(t) = \rho(x, t)dt + \sigma(x, t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

y el proceso de observación

$$dy(t) = h(x, t)dt + B(t)dW_2(t). \quad (6.2)$$

Aquí,  $x(t) \in R^n$  es el vector de estado y  $y(t) \in R^m$  es el vector de observación. La condición inicial  $x_0 \in R^n$  es un vector gaussiano tal que  $x_0, W_1(t) \in R^p$ , y  $W_2(t) \in R^q$  son independientes. Se asume que  $B(t)B^T(t)$  es una matriz definida positiva, por lo tanto,  $m \leq q$ . Todos los coeficientes en (6.1)–(6.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô (6.1) y (6.2) son consideradas como soluciones débiles (ver, por ejemplo, [78] para la definición). La misma definición ocurre para soluciones de otras ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô a lo largo de la tesis.

Las funciones no lineales  $\rho(x, t) \in R^n$ ,  $\sigma(x, t) \in R^n$ , y  $h(x, t) \in R^m$  se consideran polinomios de  $n$  variables, componentes del vector de estado  $x(t) \in R^n$ , con coeficientes dependientes del tiempo. Puesto que  $x(t) \in R^n$  es un vector, se requiere una definición especial del polinomio para  $n > 1$ . De acuerdo con [16], un polinomio de grado  $p$  de un vector  $x(t) \in R^n$  se considera como una forma  $p$ -lineal de  $n$  componentes de  $x(t)$

$$\rho(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)xx^T + \dots + \alpha_p(t)x \dots \cdot_p \text{ times} \dots x, \quad (6.3)$$

donde  $\alpha_0(t)$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $\alpha_1$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ ,  $\alpha_2$  es un tensor tridimensional de dimensión  $n \times n \times n$ ,  $\alpha_p$  es un tensor  $(p + 1)$ -dimensional de dimensión  $n \times \dots \cdot_{(p+1)} \text{ times} \dots \times n$ , y  $x \times \dots \cdot_p \text{ times} \dots \times x$  es un tensor  $p$ -dimensional de dimensión  $n \times \dots \cdot_p \text{ times} \dots \times n$  obtenido mediante  $p$  veces la multiplicación espacial de un vector  $x(t)$  por sí mismo (ver [16] para una mayor definición). Tal polinomio puede ser expresado también en la forma de sumatoria

$$\begin{aligned} \rho_k(x, t) &= \alpha_{0k}(t) + \sum_i \alpha_{1ki}(t)x_i(t) + \sum_{ij} \alpha_{2kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \dots \\ &+ \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{pki_1 \dots i_p}(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t), \quad k, i, j, i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo  $\hat{x}(t)$  del estado del sistema  $x(t)$ , basado en el proceso de observación  $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$ , que minimiza la norma 2 euclídeana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) \mid F_t^Y]$$

en cualquier instante de tiempo  $t$ . Aquí,  $E[\xi(t) \mid F_t^Y]$  indica la esperanza condicional de un proceso estocástico  $\xi(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$  con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como se sabe [84], este estimado óptimo está dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = m_x(t) = E(x(t) \mid F_t^Y)$$

del estado del sistema  $x(t)$  con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m_x(t))(x(t) - m_x(t))^T \mid F_t^Y]$$

es la varianza del error de estimación.

La solución propuesta a este problema de filtrado óptimo se basa en las fórmulas para las diferenciales de  $It\hat{\sigma}$  del estimado óptimo y la varianza del error de estimación (citado después de [84]) y dado en la siguiente sección.

## 6.2. Diseño del Filtro

El problema de filtrado óptimo establecido se resuelve mediante el siguiente teorema.

**Teorema 6.1.** El filtro óptimo para el estado polinomial  $x(t)$  (6.1) sobre observaciones polinomiales  $y(t)$  (6.2) está dado por las siguientes ecuaciones para el estimado óptimo  $m(t) = [m_z(t), m_x(t)] = E([z(t), x(t)] | F_t^Y)$  y la varianza del error de estimación  $P(t) = E([(z(t), x(t)) - m(t)]([z(t), x(t)) - m(t)]^T | F_t^Y)$ :

$$dm(t) = E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)[I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - m_z(t)dt), \quad (6.4)$$

$$dP(t) = (E([(z(t), x(t)) - m(t)](\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y] + E(\bar{f}(x, t)([z(t), x(t)] - m(t))^T | F_t^Y) + E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)[I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}[I, 0]P(t)), \quad (6.5)$$

con las condiciones iniciales  $m(t_0) = [m_z(t_0), m_x(t_0)] = E([z_0, x_0] | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E([(z_0, x_0) - m(t_0)]([z_0, x_0] - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ . Aquí,  $\bar{f}(x, t) = [f(x, t), \rho(x, t)]$ ,  $\bar{g}(x, t) = [g(x, t), \sigma(x, t)]$ ,

$$f(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \rho(x, t)dt + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \sigma(x, t)\sigma^T(x, t)dt, \quad g(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \sigma(x, t),$$

y el estado polinomial adicional  $z(t) = h(x, t)$  satisface la ecuación

$$dz(t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \rho(x, t)dt + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \sigma(x, t)\sigma^T(x, t)dt + \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \sigma(x, t)dW_1(t), \quad z(0) = z_0. \quad (6.6)$$

Si la condición inicial  $[z_0, x_0]$  para el extendido vector de estado es condicionalmente gaussiana con respecto a las observaciones, el sistema de ecuaciones de filtrado (6.4),(6.5) se convierte en un sistema de dimensión finita en forma cerrada después de expresar los momentos condicionales superiores del estado del sistema  $x(t)$  con respecto a las observaciones  $y(t)$  como funciones de sólo dos momentos condicionales bajos,  $m(t)$  y  $P(t)$ .

**Demostración.** Reformulemos el problema, introduciendo el proceso estocástico  $z(t) = h(x, t)$ . Usando la fórmula de Itô (ver [84]) para la diferencial estocástica de una función no lineal  $h(x, t)$ , donde  $x(t)$  satisface la ecuación (6.1), la ecuación (6.6) se obtiene para  $z(t)$

$$dz(t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \rho(x, t)dt + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dt +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \sigma(x, t) \sigma^T(x, t) dt + \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \sigma(x, t) dW_1(t), \quad z(0) = z_0.$$

Notar que el término  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \sigma(x, t) \sigma^T(x, t)$  aparece en vista de la segunda derivada en  $x$  en la fórmula de Itô.

Asumamos en este punto que la condición inicial  $[z_0, x_0]$  para el vector de estado extendido es un vector aleatorio condicionalmente gaussiano con respecto a las observaciones. Esta suposición es bastante admisible en el marco del filtrado, puesto que las distribuciones reales de  $x(t)$  y  $z(t)$  son actualmente desconocidas. De hecho, como se sigue de [82], si están disponibles sólo los dos momentos condicionales más bajos, la esperanza  $m_0$  y la varianza  $P_0$ , de un vector aleatorio  $[z_0, x_0]$ , la mejor aproximación para la distribución condicional desconocida de  $[z_0, x_0]$  con respecto a las observaciones es la distribución gaussiana con los mismos parámetros  $N(m_0, P_0)$ . Este hecho también es un corolario del teorema del límite central [97] en la teoría de probabilidad. Notar que el vector aleatorio  $[z_0, x_0]$  puede ser condicionalmente gaussiano con respecto a las observaciones, incluso si  $x_0$  es en realidad incondicionalmente gaussiano.

El punto clave para posteriores derivaciones es que el lado derecho de la ecuación (6.6) es un polinomio en  $x$ . es más, puesto que  $h(x, t)$  es un polinomio en  $x$ , las funciones  $\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} x(t)$ ,  $\frac{\partial h(x, t)}{\partial t}$ , y  $\frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2}$  también son polinomios en  $x$ . De este modo, la ecuación (6.6) es una ecuación polinomial de estado con un ruido multiplicativo polinomial. Ésta se puede escribir en la forma compacta

$$dz(t) = f(x, t)dt + g(x, t)dW_1(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad (6.7)$$

donde

$$f(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \rho(x, t)dt + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \sigma(x, t) \sigma^T(x, t)dt, \quad g(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \sigma(x, t).$$

En términos del proceso  $z(t)$ , la ecuación de observación (6.2) toma la forma

$$dy(t) = [I, 0][z(t), x(t)]dt + B(t)dW_2(t). \quad (6.8)$$

El problema de estimación reformulado es ahora encontrar el estimado óptimo  $[m_z(t), m_x(t)]$  del estado el sistema  $[z(t), x(t)]$ , basado en el proceso de observación  $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$ . Este estimado óptimo está dado por la esperanza condicional

$$m(t) = [m_z(t), m_x(t)] = [E(z(t) | F_t^Y), E(x(t) | F_t^Y)]$$

del estado del sistema  $[z(t), x(t)]$  con respecto a la  $\sigma$  - álgebra  $F_t^Y$  generada por el proceso de observación  $Y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t]$ . La función matricial

$$P(t) = E([z(t), x(t)] - [m_z(t), m_x(t)]([z(t), x(t)] - [m_z(t), m_x(t)])^T | F_t^Y]$$

es la varianza del error de estimación para este problema reformulado.

El sistema de filtrado obtenido incluye dos ecuaciones, (6.6) (o (6.7)) y (6.1), para el estado medido parcialmente  $[z(t), x(t)]$  y la ecuación (6.8) para las observaciones  $y(t)$ , donde  $z(t)$  es un estado polinomial medido completamente con un ruido multiplicativo polinomial,  $x(t)$  es un estado polinomial no medido, y  $y(t)$  es un proceso de observación lineal que mide directamente el estado  $z(t)$ . Como se sigue de la teoría general de filtrado óptimo ([84]), las ecuaciones de filtrado óptimo toman la siguiente forma particular para el sistema (6.7), (6.1), (6.8)

$$dm(t) = E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)[I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - m_z(t)dt), \quad (6.9)$$

$$dP(t) = (E((([z(t), x(t)] - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + E(\bar{f}(x, t)([z(t), x(t)] - m(t))^T | F_t^Y) + \quad (6.10)$$

$$E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)[I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}[I, 0]P(t))dt + \\ E((([z(t), x(t)] - m(t))([z(t), x(t)] - m(t))([z(t), x(t)] - m(t))^T | F_t^Y) \times \\ [I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - m_z(t)dt),$$

donde  $\bar{f}(x, t) = [f(x, t), \rho(x, t)]$  es el término de drift polinomial y  $\bar{g}(x, t) = [g(x, t), \sigma(x, t)]$  es el término de difusión polinomial (ruido multiplicativo) en el sistema completo de las ecuaciones del estado (6.7), (6.1), y el último término debe ser entendido como un tensor tridimensional (bajo el signo de la esperanza) enrevesado con un vector, lo cual da una matriz. Las ecuaciones (6.9), (6.10) deben complementarse con las condiciones iniciales  $m(t_0) = [m_z(t_0), m_x(t_0)] = E([z_0, x_0] | F_{t_0}^Y)$  y  $P(t_0) = E((([z_0, x_0] - m(t_0))([z_0, x_0] - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ .

Demostraremos que un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado puede ser obtenido para el estado polinomial medido incompletamente  $[z(t), x(t)]$  sobre las observaciones lineales  $y(t)$ , en vista de las propiedades polinomiales de las funciones en el lado derecho de la ecuación (6.6). Además, como se muestra en [7]–[16], se puede obtener un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para los estados de sistemas polinomiales (6.6) (o (6.7)) y (6.1) con ruidos multiplicativos polinomiales sobre observaciones lineales, si la matriz de observación es invertible para cualquier  $t \geq t_0$ . Puesto que la matriz de observación  $A(t) = [I, 0] \in R^{m \times (n+m)}$  en (6.8) no es invertible, son introducidas las siguientes transformaciones.

Primero, notar que la matriz  $A$  es una matriz de rango completo,  $m$ , la cual es igual a la dimensión del proceso de observación  $y(t) \in R^m$ . Además notar que el número de procesos de Wiener en las ecuaciones de observación se pueden reducir también a  $m$ , la dimensión de las observaciones independientes, resumiendo y renumerando los procesos de Wiener en cada ecuación de observación (6.2). Por lo tanto, la matriz  $B$  se puede asumir siempre como una matriz cuadrada de dimensión  $m \times m$ , tal que  $B(t)B^T(t)$  es una matriz definida positiva (ver la sección 6.1 para esta condición). Siguiendo, las nuevas matrices  $\bar{A}(t)$  y  $\bar{B}(t)$  son definidas como sigue. La matriz  $\bar{A}(t) \in R^{(n+m) \times (n+m)}$  es obtenida de  $A(t) = [I, 0] \in R^{m \times (n+m)}$  agregando  $n$  renglones linealmente independientes tal que es invertible la matriz  $\bar{A}(t)$  resultante. La matriz  $\bar{B}(t) \in R^{(n+m) \times (n+m)}$  es hecha a partir de la matriz  $B(t) \in R^{m \times m}$  colocando  $B(t)$  en la esquina superior izquierda de  $\bar{B}(t)$ , definiendo las otras  $n$  entradas diagonales de  $\bar{B}(t)$  igual a infinito, y haciendo cero todas las otras entradas de  $\bar{B}(t)$  fuera de la diagonal principal o fuera de la submatriz  $B(t)$ . En otras palabras,  $\bar{B}(t) = \text{diag}[B(t), \beta I_n]$ , donde  $\beta = \infty$ , y  $I_n$  es la matriz de identidad de dimensión  $n \times n$ . De este modo, la nueva ecuación de observación está dada por

$$\bar{y}(t) = \bar{A}(t)x(t)dt + \bar{B}(t)dW_2(t), \quad (6.11)$$

donde  $\bar{y}(t) \in R^{n+m}$ .

El punto clave de la transformación obtenida es que el nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$  al anterior  $y(t)$ , puesto que los ficticios últimos  $n$  componentes de  $\bar{y}(t)$  consisten de puro ruido en vista de intensidades infinitas de los ruidos gaussianos en las correspondientes  $n$  ecuaciones, y los primeros  $m$  componentes de  $\bar{y}(t)$  coinciden con  $y(t)$ . En suma, la matriz completa de observación  $\bar{A}(t)$  es invertible, y la matriz  $(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1} \in R^{(n+m) \times (n+m)}$  existe y es igual a la matriz cuadrada de dimensión  $(n+m) \times (n+m)$ , cuya esquina superior izquierda es ocupada por la submatriz  $(B(t)B^T(t))^{-1} \in R^{m \times m}$  y todas las otras entradas son cero.

En términos de la nueva ecuación de observación (6.11), las ecuaciones de filtrado óptimo (6.9) y (6.10) toman la forma

$$dm(t) = E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}(d\bar{y}(t) - \bar{A}(t)m(t)dt), \quad (6.12)$$

$$dP(t) = (E((([z(t), x(t)] - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + E(\bar{f}(x, t)([z(t), x(t)] - m(t))^T | F_t^Y) + (6.13)$$

$$E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}\bar{A}(t)P(t)dt + \\ E((([z(t), x(t)] - m(t))([z(t), x(t)] - m(t))([z(t), x(t)] - m(t))^T | F_t^Y) \times \\ \bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}(d\bar{y}(t) - \bar{A}(t)m(t)dt),$$



con las condiciones iniciales  $m(t_0) = [m_z(t_0), m_x(t_0)] = E([z_0, x_0] | F_{t_0}^Y)$  and  $P(t_0) = E([z_0, x_0] - m(t_0)([z_0, x_0] - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ .

Puesto que la nueva matriz de observación  $\bar{A}(t)$  es invertible para cualquier  $t \geq t_0$ , la variable aleatoria  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiana con respecto al nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$ , y por lo tanto con respecto al proceso de observación original  $y(t)$ , para cualquier  $t \geq t_0$  (ver [7]–[16]). Por tanto, las siguientes consideraciones son aplicables a las ecuaciones de filtrado (6.12),(6.13).

Primero, puesto que la variable aleatoria  $x(t) - m(t)$  es condicionalmente gaussiana, el tercer momento condicional  $E(((z(t), x(t)) - m(t))(z(t), x(t)) - m(t))(z(t), x(t)) - m(t))^T | F_t^Y)$  con respecto a las observaciones, que están en el último término de la ecuación (6.13), es igual a cero, porque el proceso  $[z(t), x(t)] - m(t)$  es condicionalmente gaussiano. De este modo, todo el último término en (6.13) es borrado y se obtiene la siguiente ecuación de la varianza

$$dP(t) = (E(((z(t), x(t)) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + E(\bar{f}(x, t)((z(t), x(t)) - m(t))^T | F_t^Y) + (6.14)$$

$$E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)\bar{A}^T(t)(\bar{B}(t)\bar{B}^T(t))^{-1}\bar{A}(t)P(t))dt$$

con la condición inicial  $P(t_0) = E([z_0, x_0] - m(t_0)([z_0, x_0] - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ .

Segundo, si las funciones  $\bar{f}(x, t)$  y  $\bar{g}(x, t)$  son funciones polinomiales del estado  $x$  con coeficientes dependientes del tiempo, la expresión de los términos  $E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)$  en (6.12) y  $E((x(t) - m(t))\bar{f}^T(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y)$  en (6.14) también incluirían términos polinomiales de  $x$  únicamente. Entonces, el siguiente paso es considerar los momentos condicionales similarmente al penúltimo párrafo de la página 53. Después de representar todos los términos polinomiales en (6.12) y (6.14), que se generan al expresar  $E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E(((z(t), x(t)) - m(t))\bar{f}^T(x, t) | F_t^Y)$ , y  $E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y)$  como funciones de  $m(t)$  y  $P(t)$ , se obtendría una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado. Las representaciones correspondientes de  $E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)$ ,  $E(((z(t), x(t)) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y)$ , y  $E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y)$  han sido derivadas en [7, 10, 16] para ciertas funciones polinomiales  $\bar{f}(x, t)$  and  $\bar{g}(x, t)$ .

Finalmente, en vista de la definición de las matrices  $\bar{A}(t)$  y  $\bar{B}(t)$  y el nuevo proceso de observación  $\bar{y}(t)$ , se pueden escribir nuevamente las ecuaciones de filtrado (6.12),(6.14) en términos de la ecuación de observación original (6.2) usando  $y(t)$ ,  $A(t) = [I, 0]$ , y  $B(t)$ . Como un resultado, se obtienen las ecuaciones de filtrado óptimo (6.4),(6.5)

$$dm(t) = E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)[I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - m_z(t)dt),$$

$$dP(t) = (E(((z(t), x(t)) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + E(\bar{f}(x, t)((z(t), x(t)) - m(t))^T | F_t^Y) + E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)[I, 0]^T(B(t)B^T(t))^{-1}[I, 0]P(t)),$$

con las condiciones iniciales  $m(t_0) = [m_z(t_0), m_x(t_0)] = E([z_0, x_0] | F_{t_0}^Y)$  and  $P(t_0) = E([(z_0, x_0) - m(t_0)]([z_0, x_0] - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$ . ■

En la siguiente sección, será obtenida una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado para un caso particular de funciones polinomiales escalares de segundo y tercer orden  $\rho(x, t)$ ,  $\sigma(x, t)$ , y  $h(x, t)$  en las ecuaciones (6.1) y (6.2). Sin embargo, la aplicación del mismo procedimiento resultaría en el diseño de un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para cualesquiera funciones polinomiales  $\rho(x, t)$ ,  $\sigma(x, t)$ , y  $h(x, t)$  en (6.1),(6.2).

### 6.3. Ejemplo: Problema de Filtrado del Sensor de Tercer Grado para un Sistema Cuadrático

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del filtro óptimo para un estado cuadrático sobre observaciones polinomiales de tercer grado, reduciéndolo al problema de filtrado óptimo para un estado polinomial de cuarto grado con un ruido multiplicativo polinomial de segundo grado sobre observaciones lineales, donde la condición inicial para el vector de estado extendido es asumido como condicionalmente gaussiano con respecto a las observaciones.

Sea el estado escalar no medido  $x(t)$  el cual satisface la ecuación cuadrática

$$dx(t) = x^2(t)dt + dw_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.15)$$

y el proceso de observación sea dado por una ecuación escalar del sensor de tercer grado

$$dy(t) = (x^3(t) + x(t))dt + dw_2(t), \quad (6.16)$$

donde  $w_1(t)$  y  $w_2(t)$  son procesos estándar de Wiener independientes uno del y de una variable aleatoria gaussiana  $x_0$  actuando como la condición inicial en (6.15). El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado cuadrático (6.15), usando las observaciones del sensor de tercer grado (6.16).

Reformulemos el problema, introduciendo el proceso estocástico  $z(t) = h(x, t) = x^3(t) + x(t)$ . Usando la fórmula de Itô (ver [84]) para la diferencial estocástica de la función cúbica  $h(x, t) = x^3(t) + x(t)$ , donde  $x(t)$  satisface la ecuación (15), se obtiene la siguiente ecuación para  $z(t)$

$$dz(t) = (x^2(t) + 3x(t) + 3x^4(t))dt + (3x^2(t) + 1)dw_1(t), \quad z(0) = z_0. \quad (6.17)$$

Aquí,  $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = 3x^2(t) + 1$ ,  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = 3x(t)$ , y  $\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = 0$ ; por lo tanto,  $f(x, t) = x^2(t) + 3x(t) + 3x^4(t)$  y  $g(x, t) = 3x^2(t) + 1$ . La condición inicial  $[z_0, x_0]$  se considera

condicionalmente gaussiana con respecto a las observaciones (ver el párrafo precedente (6.7) para los detalles). En términos del proceso  $z(t)$ , la ecuación de observación (6.16) toma la forma

$$dy(t) = z(t)dt + dw_2(t). \quad (6.18)$$

El sistema de filtrado obtenido incluye dos ecuaciones, (6.17) y (6.15), para el estado medido parcialmente  $[z(t), x(t)]$  y una ecuación (6.18) para las observaciones  $y(t)$ , donde  $z(t)$  es un estado de cuarto grado medido completamente con un ruido multiplicativo cuadrático,  $x(t)$  es un estado cuadrático no medible, y  $y(t)$  es un proceso de observación lineal que mide directamente el estado  $z(t)$ . Por lo tanto, el filtro óptimo diseñado puede ser aplicado para resolver este problema. Las ecuaciones de filtrado (6.4),(6.5) toman la siguiente forma particular para el sistema (6.17),(6.15),(6.18)

$$dm_1(t) = (1 + 3m_2(t) + 3m_2^2(t) + 3P_{22}(t))dt + P_{11}(t)[dy(t) - m_1(t)dt], \quad (6.19)$$

$$dm_2(t) = (m_2^2(t) + P_{22}(t))dt + P_{12}(t)[dy(t) - m_1(t)dt], \quad (6.20)$$

con las condiciones iniciales  $m_1(0) = E(z_0 | y(0)) = m_{10}$  and  $m_2(0) = E(x_0 | y(0)) = m_{20}$ ,

$$\dot{P}_{11}(t) = 12(P_{12}(t)m_2(t)) + 6P_{12}(t) + 27P_{22}^2(t) + 54P_{22}(t)m_2^2(t) + \quad (6.21)$$

$$9m_2^4(t) + 6P_{22}(t) + 6m_2^2 + 1 - P_{11}^2(t),$$

$$\dot{P}_{12}(t) = 1 + 6(P_{22}(t)m_2(t)) + 3P_{22}(t) + 3(m_2^2(t) + P_{22}(t)) - P_{11}(t)P_{12}(t), \quad (6.22)$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 + 4P_{22}(t)m_2(t) - P_{12}^2(t), \quad (6.23)$$

con la condición inicial  $P(0) = E((x_0, z_0)^T - m(0))(x_0, z_0)^T - m(0))^T | y(0)) = P_0$ . Aquí,  $m_1(t)$  es el estimado óptimo para el estado  $z(t) = x^3(t) + x(t)$  y  $m_2(t)$  es el estimado óptimo para el estado  $x(t)$ .

Los estimados obtenidos al resolver las ecuaciones (6.19)–(6.23) son comparados a los estimados que satisfacen a las ecuaciones de filtrado de kalman-Bucy extendidas para el estado cuadrático (6.15) sobre las observaciones polinomiales de tercer orden (6.16), las cuales se obtienen usando el Teorema 8.1 de [55]:

$$\dot{m}_K(t) = m_K^2(t) + P_K(t)(3m_K^2(t) + 1)[y(t) - m_K^3(t) - m_K(t)], \quad (6.24)$$

con la condición inicial  $m_K(0) = E(x(0) | y(0)) = m_{20}$ ,

$$\dot{P}_K(t) = 1 + 4m_K(t)P_K(t) - (3m_K^2(t) + 1)^2 P_K^2(t), \quad (6.25)$$

con la condición inicial  $P_K(0) = E((x(0) - m_K(0))(x(0) - m_K(0))^T | y(0)) = P_K(0) = P_{22}(0)$ .

Los resultados de la simulación Numérica se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (6.19)–(6.23) y (6.24)–(6.25). El solucionador numérico está basado en el algoritmo promedio de Monte-Carlo sobre realizaciones de los procesos estocásticos, estimado óptimo (media condicional) y la varianza del error de estimación. Ésto es realizado en MatLab 7.0 como un esquema de Simulink, incluyendo la subrutina ODE 4.5, la cual está combinada con un ciclo externo para correr realizaciones de Monte Carlo. Los valores obtenidos de los estimados del estado  $m_2(t)$ , que satisfacen la ecuación (6.20), y  $m_K(t)$ , que satisfacen la ecuación (6.24), son comparados a los valores reales de la variable de estado  $x(t)$  en (6.15).

Para los filtros (6.19)–(6.23), (6.24)–(6.25) y el sistema de referencia (6.17),(6.15),(6.18) involucrado en la simulación, se asignan los siguientes valores iniciales:  $x_0 = z_0 = 0$ ,  $m_{20} = m_K(0) = 10$ ,  $m_{10} = 1000$ ,  $P_{11}(0) = 15$ ,  $P_{12}(0) = 3$ ,  $P_{22}(0) = P_K(0) = 1$ . El intervalo de la simulación es establecido en  $[0,0.7]$ . Las perturbaciones gaussianas  $dw_1(t)$  y  $dw_2(t)$  son realizadas usando las funciones de ruido blanco gaussiano construidas en MatLab con los valores iguales de amplitud y discretización del paso, 0.01, el cual corresponde a representaciones discretas de MatLab del ruido blanco gaussiano estándar con intensidad unitaria (potencia del ruido). Notar que la potencia del ruido puede ser cambiada variando los términos  $\sigma(x, t)$  y  $B(t)$  en (6.1),(6.2), lo cual llevaría al cambio de los términos correspondientes en las ecuaciones de filtrado (6.4),(6.5).

La Figura 6.1 muestra las gráficas de los errores entre el estado de referencia  $x(t)$  (6.15) y su estimado óptimo  $m_2(t)$  (6.20), y el estado de referencia  $z(t) = x^3(t) + x(t)$  (6.17) y su estimado óptimo  $m_1(t)$  (6.19), en el intervalo de simulación completo desde  $t_0 = 0$  hasta  $T = 0.7$ . Se puede observar que los errores de la estimación óptima convergen a los estados reales muy rápidamente y entonces mantienen el valor promedio cero, a pesar de un error considerable en las condiciones iniciales,  $m_{20} - x_0 = 10$ ,  $m_{10} - z(0) = 1000$ . El error de estimación para el estado  $x(t)$  en  $T = 0.7$  es igual a  $m_2(0.7) - x(0.7) = 0.04$ . La Figura 6.2 muestra la gráfica del error entre el estado de referencia  $x(t)$  (6.15) y el estimado del filtro de Kalman-Bucy extendido  $m_K(t)$  (6.24). Se puede observar que el estimado del filtro de Kalman-Bucy extendido no converge a cero para el tiempo de la simulación, admitiendo un error bastante grande en  $T = 0.7$ , el cual es igual a  $m_K(0.7) - x(0.7) = 0.57$ , catorce veces más que el error de estimación óptima en la Figura 6.1.

De este modo, se puede concluir que el filtro óptimo obtenido (6.19)–(6.23) resuelve el problema de filtrado del sensor óptimo de tercer orden para el sistema (6.15),(6.16) y proporciona un estimado confiable del estado no medido.

## 6.4. Conclusiones

Esta tesis presenta el filtro óptimo para estados de sistemas polinomiales sobre observaciones polinomiales. Se muestra que el filtro óptimo puede ser obtenido en una forma cerrada para cualquier función polinomial en las ecuaciones del estado y la observación. En el ejemplo, la solución óptima se obtiene para el problema de filtrado de un estado cuadrático sobre observaciones polinomiales de tercer grado, asumiendo una condición inicial condicionalmente gaussiana para el vector de estado de tercer orden extendido. El filtro resultante no provee de una convergencia rápida y confiable del estimado, a pesar de una diferencia significativa en las condiciones iniciales entre el estado y el estimado, mientras que el estimado del filtro de Kalman-Bucy extendido se comporta insatisfactoriamente. Aunque esta conclusión se deduce de la teoría desarrollada, la simulación numérica sirve como una ilustración convincente.

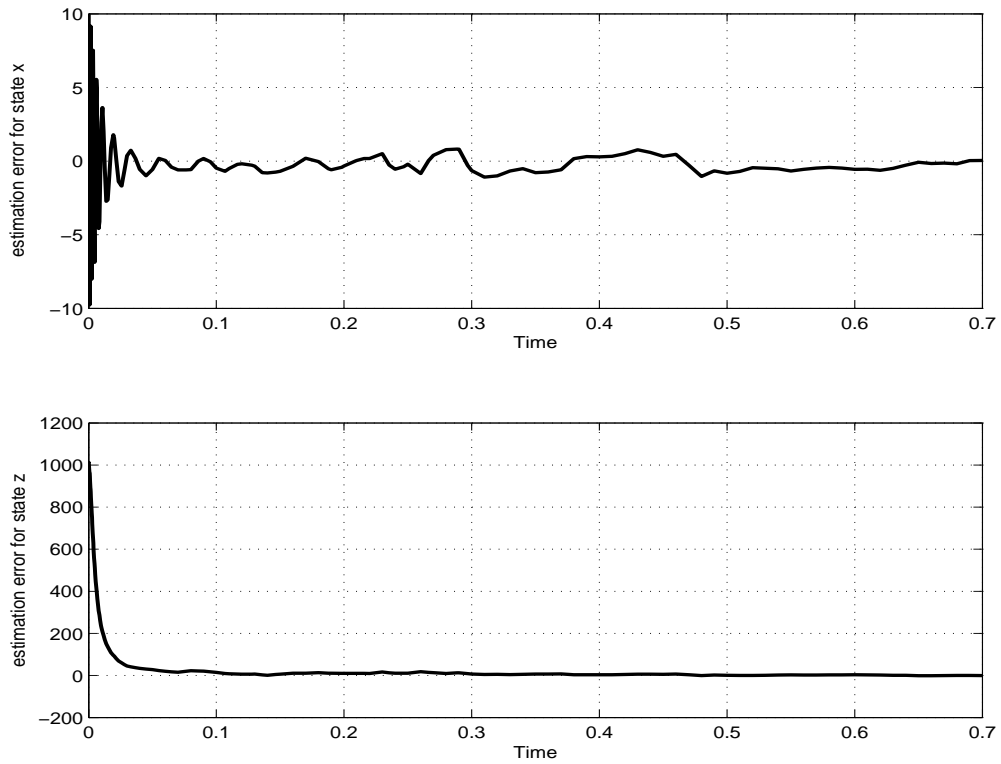


Figura 6.1: **Arriba.** Gráfica del error de estimación entre el estado de referencia  $x(t)$  (6.15) y su estimado óptimo  $m_2(t)$  (6.20) en el intervalo  $[0, 0.7]$ . **Abajo.** Gráfica del error de estimación entre el estado de referencia  $z(t)$  (6.17) y su estimado óptimo  $m_1(t)$  (6.19) en el intervalo  $[0, 0.7]$ .

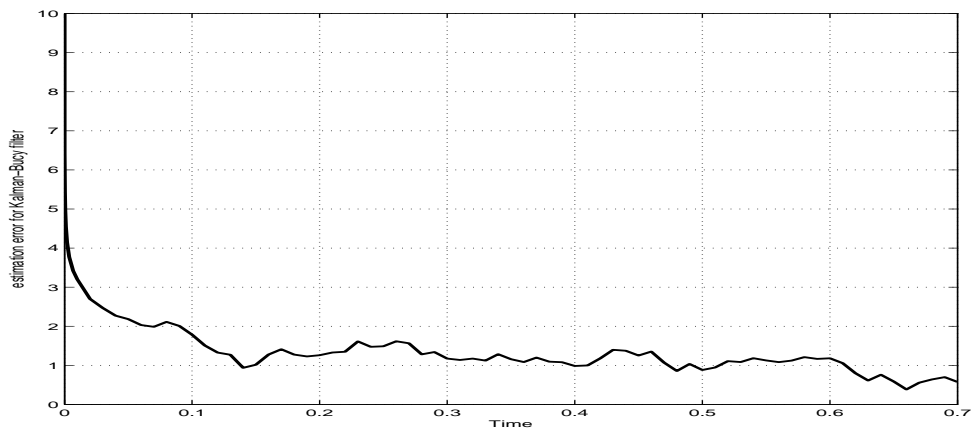


Figura 6.2: Gráfica del error de estimación entre el estado de referencia  $x(t)$  (6.15) y su estimado  $m_K(t)$  (6.24) en el intervalo  $[0, 0.7]$ .

# Capítulo 7

## Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Subóptimo Central para Sistemas Lineales Variables en el Tiempo con Retardo en el Estado o en la Medición

### 7.1. Planteamiento del Problema del Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LTV con Retardo en el Estado

Considerar el siguiente sistema LTV continuo en el tiempo con retardo en el estado:

$$\mathcal{S}_1 : \dot{x}(t) = A(t)x(t-h) + B(t)\omega(t), \quad (7.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)\omega(t), \quad (7.2)$$

$$z(t) = L(t)x(t), \quad (7.3)$$

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [t_0 - h, t_0] \quad (7.4)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  es la señal por estimarse,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  es la salida medida,  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^p[0, \infty)$  es la perturbación de entrada.  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$ ,  $D(\cdot)$ , y  $L(\cdot)$  son funciones continuas conocidas.  $\varphi(t)$  es una función continua vectorial desconocida definida en el intervalo inicial  $[t_0 - h, t_0]$ . El retardo del tiempo  $h$  es conocido.

Para el sistema (7.1)–(7.4), se asumen las siguientes condiciones estándar ([75]):

- el par  $(A, B)$  es estabilizable;  $(\mathcal{C}_1)$



- el par  $(C, A)$  es detectable;  $(\mathcal{C}_2)$
- $D(t)B^T(t) = 0$  y  $D(t)D^T(t) = I_m$ .  $(\mathcal{C}_3)$

Aquí,  $I_m$  es la matriz identidad de dimensión  $m \times m$ . Como es usual, las primeras dos condiciones aseguran que el error de estimación, proporcionado por el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  diseñado, converge a cero ([55]). La última condición de ortonormalidad del ruido es técnica y corresponde a la condición de independencia del proceso estándar de Wiener (ruidos blancos gaussianos) en los problemas de filtrado estocástico ([84]).

Ahora, consideremos un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  de orden completo en la siguiente forma  $(\mathcal{S}_2)$ :

$$\mathcal{S}_2 : \dot{x}_f(t) = A(t)x_f(t-h) + K_f(t)[y(t) - C(t)x_f(t)], \quad (7.5)$$

$$z_f(t) = L(t)x_f(t), \quad (7.6)$$

donde  $x_f(t)$  es el filtro del estado. La matriz de ganancia  $K_f(t)$  será determinada.

Al transformar el modelo (7.1)-(7.3) para incluir los estados del filtro, se obtiene el siguiente sistema de error de filtrado  $(\mathcal{S}_3)$ :

$$\mathcal{S}_3 : \dot{e}(t) = A(t)e(t-h) + B(t)\omega(t) - K_f(t)\tilde{y}(t), \quad (7.7)$$

$$\tilde{y}(t) = C(t)e(t) + D(t)\omega(t), \quad (7.8)$$

$$\tilde{z}(t) = L(t)e(t), \quad (7.9)$$

donde  $e(t) = x(t) - x_f(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y(t) - C(t)x_f(t)$ , y  $\tilde{z}(t) = z(t) - z_f(t)$ .

Por lo tanto, el problema que debe ser considerado es el siguiente: desarrollar un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  robusto de la forma (7.5)-(7.6) para el sistema LTV con retardo en el estado  $(\mathcal{S}_1)$ , tal que se satisfagan los siguientes dos requerimientos:

1. Las dinámicas del error de filtrado resultantes  $(\mathcal{S}_3)$  son robustamente asintóticamente estables en la ausencia de perturbaciones,  $\omega(t) \equiv 0$ ;
2. Las dinámicas del error de filtrado  $(\mathcal{S}_3)$  aseguran una atenuación en el nivel del ruido  $\gamma$  en un sentido  $\mathcal{H}_\infty$ . Más específicamente, para todas  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^p[0, \infty)$ , diferentes de cero se establece la desigualdad

$$\|\tilde{z}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \left\{ \|\omega(t)\|_2^2 + \|\varphi(\theta)\|_{2,R,[-h,0]}^2 \right\} \quad (7.10)$$

para el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$ , donde  $\|f(t)\|_2^2 := \int_{t_0}^{\infty} f^T(t)f(t)dt$ ,  $\|\varphi(\theta)\|_{2,R,[t_0-h,t_0]}^2 = \int_{t_0-h}^{t_0} \varphi^T(\theta)R\varphi(\theta)d\theta$ ,  $R$  es una matriz simétrica definida positiva, y  $\gamma$  es un escalar positivo real dado.

## 7.2. Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas LTV con Retardo en el Estado

El diseño propuesto del filtro central  $\mathcal{H}_\infty$  (ver el Teorema 4 en [35]) para sistemas LTV con retardo en el estado está basado en el resultado general (ver el Teorema 3 en [35]) reduciendo el problema del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para el problema del controlador correspondiente  $H_2$  (i.e., cuadrático lineal óptimo). En esta tesis, es usada únicamente la parte del filtrado de este resultado, válido para el problema completo del controlador. Entonces, el filtro en promedio cuadrático óptimo del tipo de Kalman-Bucy para sistemas LTV con retardo en el estado ([22]) se emplea para obtener el resultado deseado, el cual está dado por el siguiente teorema.

**Teorema 7.1.** *El filtro central  $\mathcal{H}_\infty$  para el estado no observado (7.1) sobre las observaciones (7.2), que asegura la condición  $\mathcal{H}_\infty$  de atenuación del ruido (7.10) para el estimado de salida  $z_f(t)$ , está dado por las ecuaciones para el estimado del estado  $x_f(t)$  y el estimado de la salida  $z_f(t)$*

$$\dot{x}_f(t) = A(t)x_f(t-h) + P(t)C^T(t)[y(t) - C(t)x_f(t)], \quad (7.11)$$

$$z_f(t) = L(t)x_f(t), \quad (7.12)$$

con la condición inicial  $x_f(\theta) = 0$  para  $\forall \theta \in [t_0 - h, t_0]$ , la ecuación para la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$

$$dP(t) = (P_1(t)A^T(t) + A(t)P_1^T(t) + B(t)B^T(t) - P(t)[C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t)]P(t))dt, \quad (7.13)$$

con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ , y el sistema de ecuaciones para las matrices complementarias  $P_i(t)$ ,  $i \geq 1$ ,

$$dP_i(t) = (A(t)P_{i-1}(t-h) + P_{i+1}(t)A^T(t-ih))dt + \frac{1}{2}(B(t)B^T(t-ih) + B(t-ih)B^T(t))dt - \frac{1}{2}(P(t)[C^T(t)C(t-ih) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t-ih)]P(t-ih) + P(t-ih)[C^T(t-ih)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t-ih)L(t)]P(t))dt, \quad (7.14)$$

con las condiciones iniciales

$$P_i(\theta) = 0, \quad \theta \in [t_0 + (i-1)h, t_0 + ih].$$

El número de ecuaciones en (7.14) es igual a la parte entera de la razón  $T/h$ , donde  $h$  es el retardo del estado en (7.1) y  $T$  es el horizonte de filtrado actual.

**Demostración.** Primero que todo, notar que el sistema del error de filtrado (7.7)-(7.9) ya está en la forma usada en el Teorema 3 de [35]. Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 3 de [35], la parte de filtrado de este problema del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  sería equivalente al problema de filtrado  $H_2$  (i.e., promedio cuadrático óptimo), donde es realizada la peor perturbación  $w_{worst}(t) = \gamma^{-2}B^T(t)Q(t)e(t)$ , y  $Q(t)$  es la solución de la ecuación para la correspondiente ganancia del control  $H_2$  (cuadrática lineal óptima). Por tanto, el sistema, para el cual el sistema de filtrado equivalente  $H_2$  (promedio cuadrático óptimo) es establecido, toma la forma

$$\mathcal{S}_4 : \dot{e}(t) = A(t)e(t-h) + \gamma^{-2}B(t)B^T(t)Q(t)e(t) - K_f(t)\tilde{y}(t), \quad (7.15)$$

$$\tilde{y}(t) = C(t)e(t) + \gamma^{-2}D(t)B^T(t)Q(t)e(t), \quad (7.16)$$

$$\tilde{z}(t) = L(t)e(t). \quad (7.17)$$

Como se sigue del Teorema 3 de [35] y el Teorema 1 en [22], las ecuaciones del estimado  $H_2$  (promedio cuadrático óptimo) para los estados del error (7.15) y (7.17) están dadas por

$$\mathcal{S}_5 : \dot{e}_f(t) = A(t)e_f(t-h) - K_f(t)\tilde{y}(t) + P(t)C^T(t)[\tilde{y}(t) - C(t)e_f(t)], \quad (7.18)$$

$$\tilde{z}_f(t) = L(t)e_f(t), \quad (7.19)$$

donde  $e_f(t)$  y  $\tilde{z}_f(t)$  son los estimados  $H_2$  (promedio cuadrático óptimo) para  $e(t)$  y  $\tilde{z}(t)$ , respectivamente. En la ecuación (7.18),  $P(t)$  es la solución de la ecuación para la correspondiente ganancia del filtro  $H_2$  (promedio cuadrático óptimo), donde, de acuerdo al Teorema 3 de [35], la matriz de observación  $C(t)$  debe cambiarse a  $C(t) - \gamma^{-1}L(t)$  ( $L(t)$  es la matriz de salida en (7.3)).

Debe notarse que, en contraste al Teorema 3 de [35], no hay matriz de corrección  $Z_\infty(t) = [I_n - \gamma^{-2}P(t)Q(t)]^{-1}$  en los últimos términos de innovación en el lado derecho de la ecuación (7.18), puesto que no es necesario hacer la corrección relacionada con la estimación de la peor perturbación  $w_{worst}(t)$  en la ecuación del error (7.15). Es más, como está establecido en ([75]), el estimador deseado debe ser imparcial, esto es,  $\tilde{z}_f(t) = 0$ . Puesto que el error de salida  $\tilde{z}(t)$ , que satisface (7.17), también está en el criterio (7.10) y debería reducirse al mínimo tanto como sea posible, la peor perturbación  $w_{worst}(t)$  en la ecuación del error (7.15) debe ser claramente rechazado y, por tanto, no necesita ser estimado. De este modo, la ganancia del filtro correspondiente  $H_2$  (promedio cuadrático óptimo) no incluiría ninguna matriz de corrección  $Z_\infty(t)$ . Se puede observar la misma situación en los Teoremas 1-4 en [75]. Sin embargo, si no el error de salida  $\tilde{z}(t)$  sino la salida  $z(t)$  por sí misma se situaría en el criterio (7.10), debe incluirse la matriz de corrección  $Z_\infty(t) = [I_n - \gamma^{-2}P(t)Q(t)]^{-1}$ .

Tomando en cuenta la imparcialidad del estimador (7.18)-(7.19), se puede concluir con facilidad que la igualdad  $K_f(t) = P(t)C^T(t)$  debe ocurrir para la matriz de ganancia  $K_f(t)$  en (7.5). De este modo, las ecuaciones de filtrado (7.5)-(7.6) toman la forma final (7.11)-(7.12), con la condición inicial  $x_f(\theta) = 0$  para  $\forall \theta \in [t_0 - h, t_0]$ , la cual corresponde al filtro central  $\mathcal{H}_\infty$  (ver Teorema 4 en [35]). Es necesario aún indicar las ecuaciones para la correspondiente  $H_2$  matriz de ganancia del filtro (promedio cuadrático óptimo)  $P(t)$ . De acuerdo con el Teorema 1 de [22], la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$  está dada por la ecuación (7.13), con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ , la cual corresponde al filtro central  $\mathcal{H}_\infty$  (ver los Teoremas 3 y 4 en [75]). Notar que la matriz de observación  $C(t)$  es cambiada a  $C(t) - \gamma^{-1}L(t)$  de acuerdo al Teorema 3 de [35]. Entonces, en vista del Teorema 1 de [22], se deben añadir las ecuaciones (7.14) para matrices complementarias  $P_i(t)$ ,  $i \geq 1$ , para obtener un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado.

Debe notarse que, para cada  $t$  fijo, el número de ecuaciones en (7.14), que se deben tomar en cuenta para obtener un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado, no es igual a infinito, puesto que las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$ , y  $L(t)$  no están definidas para  $t < t_0$ . Por tanto, si el momento actual del tiempo  $t$  pertenece al intervalo semiabierto  $(kh, (k+1)h]$ , donde  $h$  es el valor del retardo en la ecuación (7.1), el número de ecuaciones en (7.14) es igual a  $k$ . ■

Un número finito de las ecuaciones de filtrado para cualquier horizonte de filtrado fijo es una considerable ventaja del diseño del filtro, aunque el espacio de estado del sistema con retardo en el tiempo (7.1) es de dimensión infinita [69].

**Observación 7.1.** Las propiedades de convergencia del estimado obtenido (7.11) están dadas por el teorema de convergencia estándar (ver, por ejemplo, [55]): si en el sistema (7.1),(7.2) el par  $(A(t)\Psi(t-h, t), B(t))$  es completamente uniformemente controlable y el par  $(C(t), A(t)\Psi(t-h, t))$  es completamente uniformemente observable, donde  $\Psi(t, \tau)$  es la matriz de transición de estado para la ecuación (7.1) (ver [69] para la definición de una matriz  $\Psi$ ), y se establece la desigualdad  $C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t) > 0$ , entonces el error del filtro obtenido (7.11)–(7.14) es uniformemente asintóticamente estable. Como es usual, se requiere la condición de controlabilidad completa uniforme para asegurar la no negatividad de la matriz  $P(t)$  (7.13) y puede ser omitida, si la matriz  $P(t)$  es definida no negativa en vista de sus propiedades intrínsecas. Las condiciones de controlabilidad y observabilidad completas uniformes para un sistema lineal con retardos (7.1) y observaciones (7.2) puede ser encontrada en [69].

**Observación 7.2.** La condición  $C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t) > 0$  asegura la acotabilidad de la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$  para cualquier tiempo  $t$  finito, y también cuando el tiempo va al infinito. Aparentemente, si  $C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t) < 0$ , entonces la función  $P(t)$  diverge al infinito para un tiempo finito y el filtro diseñado no funciona. Si ocurre la igualdad  $C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t) = 0$ , entonces el error de estimación es

uniformemente asintóticamente estable, si la matriz  $A(t)$  de las dinámicas de estado por sí misma es asintóticamente estable.

**Observación 7.3.** De acuerdo a los comentarios hechos en la subsección V.G en [35], el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central obtenido (7.11)–(7.14) presenta una elección natural para el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  diseñado admisible entre todos los filtros  $\mathcal{H}_\infty$  que satisfacen la desigualdad (7.10) para un umbral  $\gamma$  dado, puesto que éste no involucra ningún lazo actuador adicional (i.e., cualquier variable de estado externa adicional) en construir la matriz de ganancia del filtro. Además, el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central obtenido (7.11)–(7.14) tiene la propiedad de suboptimalidad, i.e., que minimiza el criterio

$$J = \|\tilde{z}(t)\|_2^2 - \gamma^2 \left\{ \|\omega(t)\|_2^2 + \|\varphi(\theta)\|_{2,R,[-h,0]}^2 \right\}$$

para cada  $\gamma > 0$  positivo de modo tal que se cumpla la desigualdad  $C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t) > 0$ .

**Observación 7.4.** Continuando con la discusión de la subsección V.G en [35], notar que la condición de complementaridad sucede siempre para el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  obtenido (7.11)–(7.14), puesto que la definites positiva de la condición inicial matricial  $R$  implica que la definites positiva de la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$  como solución de (7.13). Por tanto, la falla de la estabilidad es la única razón por la que el filtro obtenido puede dejar de funcionar. De este modo, el margen de estabilidad  $\gamma = \sqrt{\|L^T(t)L(t)\| / \|C^T(t)C(t)\|}$  también define el valor mínimo posible de  $\gamma$ , para el que la condición  $\mathcal{H}_\infty$  (7.10) puede todavía estar satisfecha.

### 7.3. Filtro Alternativo $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas LTV con Retardo en el Estado

Considerar ahora otro diseño del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central para sistemas LTV con retardo en el estado, el cual está basado en el filtro óptimo  $H_2$  alternativo (en promedio cuadrático óptimo) obtenido en [15]. Al hacer esto, el sistema de las ecuaciones (7.13),(7.14) para determinar la matriz de la ganancia del filtro  $P(t)$ , cuyo número crece cuando el horizonte de filtrado tiende al infinito, es reemplazado por la única ecuación para  $P(t)$ , la cual incluye la matriz de transición de estado  $\Psi(t, \tau)$  para la ecuación con retardo en el tiempo (7.1) (ver [69] para la definición). El resultado está dado por el siguiente teorema.

**Teorema 7.2.** *El filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central alternativo para el estado no observado (7.1) sobre las observaciones (7.2), asegura que la condición de atenuación del ruido  $\mathcal{H}_\infty$  (7.10) para el estimado de salida  $z_f(t)$ , está dado por las ecuaciones (7.11) para el estimado óptimo  $x_f(t)$ , la ecuación (7.12) para el estimado de salida  $z_f(t)$ , y la ecuación para la matriz de*

ganancia del filtro  $P(t)$ .

$$dP(t) = A(t)(\Psi(t-h, t))P(t) + P(t)(\Psi(t-h, t))^T A^T(t) + \quad (7.20)$$

$$B(t)B^T(t) - P(t)[C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t)]P(t)dt.$$

con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ .

**Demostración.** En vista del Teorema 1 en [15], la ecuación alternativa para determinar la matriz de ganancia  $H_2$  (en promedio cuadrático óptimo)  $P(t)$  en la ecuación del estimado (7.11) está dada por la ecuación (7.20), con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ , la cual corresponde al filtro central  $\mathcal{H}_\infty$  (ver los Teoremas 3 y 4 en [75]). La matriz de observación  $C(t)$  es cambiada a  $C(t) - \gamma^{-1}L(t)$  de acuerdo al Teorema 3 de [35].

Como se sugiere en [15], para propósitos computacionales, la matriz  $\Psi(\tau, t)$ ,  $\tau \leq t$ , puede ser calculada fácilmente como una solución de la ecuación matricial  $\Psi(\tau, t)x_1(t) = x_1(\tau)$ ,  $\tau \leq t$ , para cualquier  $t, \tau \geq t_0$ , donde  $x_1(t)$  es la solución de la ecuación homogénea (7.1)  $\dot{x}_1(t) = A(t)x_1(t-h)$ , con la condición inicial (7.4). Ya que siempre existe una solución de la ecuación matricial para  $\Psi(\tau, t)$ , si  $x_1(t)$  no es el vector cero. De lo contrario, si  $x_1(t)$  es el vector cero, la matriz  $\Psi(\tau, t)$  podría ser fijada en cero,  $\Psi(\tau, t) = 0$ , para cualquier  $\tau \leq t$ , puesto que  $x_1(\tau)$  sería igual a cero también a pesar del valor de  $\Psi(\tau, t)$ . El método de cálculo más simple es diseñar  $\Psi(\tau, t)$  como una matriz diagonal,  $\Psi_{ij}(\tau, t) = 0$ , si  $i \neq j$ , cuyas entradas diagonales son definidas como  $\Psi_{ii}(\tau, t) = x_{1_i}(\tau)/x_{1_i}(t)$ , si  $x_{1_i}(t) \neq 0$ , y  $\Psi_{ii}(\tau, t) = 0$ , de lo contrario, si  $x_{1_i}(t) = 0$ . ■

Notar que el filtro alternativo diseñado contiene sólo dos ecuaciones diferenciales, la ecuación del estimado (7.11) y la ecuación matricial de ganancia (7.20), a pesar del horizonte de filtrado. Ésto presenta una ventaja significativa en comparación al filtro precedente (7.11)-(7.14) consistente de un número variable de las ecuaciones matriciales de ganancia, el cual es especificado por la razón entre el horizonte de filtrado actual y el valor del retardo en la ecuación de estado y crece inacotadamente cuando el horizonte de filtrado tiende al infinito. Esta ventaja parece ser incluso más significativa al recordar que el espacio de estado del sistema con retardo en el tiempo (7.1) es de dimensión infinita [69].

**Observación 7.5.** Puesto que el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  alternativo diseñado (7.11),(7.12),(7.20) está basado en el filtro en promedio cuadrático  $H_2$  obtenido en [15], el cual es óptimo con respecto a un criterio en promedio cuadrático, Las observaciones 7.1–7.4 permanecen verdaderas para el filtro alternativo también.

## 7.4. Ejemplo: Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas con Retardo en el Estado

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central para un estado lineal con retardo sobre observaciones lineales y comparándolo al mejor filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para un estado lineal sin retardos, el cual es el filtro obtenido en los Teoremas 3 y 4 de [75].

Sea el estado no medido  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in R^2$  con retardos (un oscilador mecánico con una fuerza retardada como entrada) dado por

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t - 5), \quad (7.21)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t - 5) + w_1(t),$$

con una condición inicial desconocida  $x(\theta) = \varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-5, 0]$ , el proceso de observación escalar que satisface la ecuación

$$y(t) = x_1(t) + w_2(t), \quad (7.22)$$

y la salida escalar puede ser representada como

$$z(t) = x_1(t). \quad (7.23)$$

Aquí,  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]$  es una perturbación de entrada. Puede verificarse fácilmente que la condición de la ortonormalidad del ruido (ver la Sección 7.1) ocurre para el sistema (7.21)–(7.23).

El problema de filtrado es encontrar el estimado  $\mathcal{H}_\infty$  para el estado lineal con retardos (7.21) sobre observaciones lineales directas (7.22), las cuales satisfacen la condición de atenuación del ruido (7.10) para un  $\gamma$  dado, usando el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  diseñado (7.11)–(7.14) o el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  alternativo (7.11), (7.20). El horizonte de filtrado es  $T = 10$ . Notar que puesto que  $10 \in [1 \times 5, 2 \times 5]$ , donde el valor del retardo es 5 en la ecuación de estado (7.21), sólo la primera de las ecuaciones (7.14), junto con las ecuaciones (7.11)–(7.13), debe ser empleada.

Las ecuaciones de filtrado (7.11), (7.13), y la primera de las ecuaciones (14) toman la siguiente forma particular para el sistema (7.21), (7.22)

$$\dot{x}_{f_1}(t) = x_{f_2}(t - 5) + P_{11}(t)[y(t) - x_{f_1}(t)], \quad (7.24)$$

$$\dot{x}_{f_2}(t) = -x_{f_1}(t - 5) + P_{12}(t)[y(t) - x_{f_1}(t)],$$

con la condición inicial  $x_f(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [-5, 0]$ ;

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}^2(t), \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}_{12}(t) &= -P_{111}(t) + P_{122}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}(t)P_{12}(t), \\ \dot{P}_{22}(t) &= 1 - 2P_{121}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{12}^2(t),\end{aligned}$$

con la condición inicial  $P(0) = R^{-1}$ ; y

$$\dot{P}_{111}(t) = P_{12}(t-5) + P_{212}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}(t)P_{11}(t-5), \quad (7.26)$$

$$\dot{P}_{112}(t) = P_{22}(t-5) - P_{211}(t) - \frac{1}{2}(1 - \gamma^{-2})[P_{11}(t)P_{12}(t-5) + P_{12}(t)P_{11}(t-5)],$$

$$\dot{P}_{121}(t) = -P_{11}(t-5) + P_{222}(t) - \frac{1}{2}(1 - \gamma^{-2})[P_{11}(t)P_{12}(t-5) + P_{12}(t)P_{11}(t-5)],$$

$$\dot{P}_{122}(t) = 1 - P_{12}(t-5) - P_{221}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{12}(t)P_{12}(t-5),$$

con la condición inicial  $P_1(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [0, 5]$ ; finalmente,  $P_2(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [5, 10]$ .

Los estimados obtenidos al resolver las ecuaciones (7.24)–(7.26) son comparados a los estimados del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  convencional, obtenido en los Teoremas 3 y 4 de [75], los cuales satisfacen las siguientes ecuaciones, donde la ecuación matricial de ganancia es una ecuación de Riccati y no se usan las ecuaciones para las matrices  $P_i(t)$ ,  $i \geq 1$ :

$$\dot{m}_{f_1}(t) = m_{f_2}(t-5) + P_{11}(t)[y(t) - m_{f_1}(t)], \quad (7.27)$$

$$\dot{m}_{f_2}(t) = -m_{f_1}(t-5) + P_{12}(t)[y(t) - m_{f_1}(t)],$$

con la condición inicial  $m_f(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [-5, 0]$ ;

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}^2(t), \quad (7.28)$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{11}(t) + P_{22}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}(t)P_{12}(t),$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 - 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{12}^2(t),$$

con la condición inicial  $P(0) = R^{-1}$ .

Finalmente, los estimados obtenidos previamente son comparados a los estimados del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  alternativo que satisfacen las ecuaciones (7.11),(7.20). La ecuación (7.11) para el estimado  $x_f(t)$  sigue siendo la misma que (7.24), y la ecuación matricial de ganancia (7.20) toma la siguiente forma particular para el sistema (7.21),(7.22)

$$\dot{P}_{11}(t) = 2\Psi_{22}(t-5, t)P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}^2(t), \quad (7.29)$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -\Psi_{11}(t-5, t)P_{11}(t) + \Psi_{22}(t-5, t)P_{22}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}(t)P_{12}(t),$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 - 2\Psi_{11}(t-5, t)P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{12}^2(t),$$



con la condición inicial  $P(0) = R^{-1}$ , donde se toma en cuenta que la matriz de transición de estado  $\Psi(\tau, t)$  para el estado lineal con retardo en el tiempo (7.21) es calculada como una matriz diagonal de acuerdo al algoritmo sugerido en la Sección 7.3.

Los resultados de la simulación numérica se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (7.24)–(7.26), (7.27)–(7.28), y (7.24),(7.29). Los valores del estimado se comparan a los valores reales del vector de estado  $x(t)$  en (7.21).

Para cada uno de los tres filtros (7.24)–(7.26), (7.27)–(7.28), y (7.24),(7.29) y el sistema de referencia (7.21) involucrado, se asignan los siguientes valores iniciales:  $\varphi_1(\theta) = 1$ ,  $\varphi_2(\theta) = 1$ ,  $\theta \in [-5, 0]$ ;  $R = I_2 = \text{diag}[1 \ 1]$ . La perturbación  $L_2$ :  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]$  es realizada como  $w_1(t) = 1/(1+t)^2$ ,  $w_2(t) = 2/(2+t)^2$ .

Puesto que  $C(t) = L(t) = 1$  en (7.22),(7.23) y el mínimo valor alcanzable del umbral  $\gamma$  es igual a  $L/C = 1$ , se asigna el valor  $\gamma = 1.1$  para las simulaciones.

Se obtienen las siguientes gráficas: gráficas del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado  $x_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.24)–(7.26) (Figura 7.1); gráficas del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_f(t)$  correspondientes al estimado convencional  $m_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.27)–(7.28) (Figura 7.2); gráficas del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_f(t)$  correspondientes al estimado alternativo  $m_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.24),(7.29) (Figura 7.3). Las gráficas de los errores de estimación de la salida se muestran en el intervalo completo de simulación desde  $t_0 = 0$  hasta  $T = 10$ . Las figuras 7.1–7.3 también demuestran las dinámicas de las normas  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de la salida correspondientes a la presentación de los errores de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida en cada caso.

Se obtienen los siguientes valores de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de la salida  $\|T_{zw}\|^2 = \|z(t) - z_f(t)\|_2^2 / (\|\omega(t)\|_2^2 + \|\varphi(\theta)\|_{2,R,[-h,0]}^2)$  para las perturbaciones simuladas  $w_1(t)$  y  $w_2(t)$  en el tiempo final de simulación  $T = 10$ :  $\|T_{zw}\| = 0.1614$  para el error  $\mathcal{H}_\infty$  de estimación  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado  $x_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.24)–(7.26),  $\|T_{zw}\| = 1.46202$  para el error  $\mathcal{H}_\infty$  de estimación  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado convencional  $m_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.27)–(7.28), y  $\|T_{zw}\| = 0.29106$  para el error  $\mathcal{H}_\infty$  de estimación  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado alternativo  $x_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.24), (7.29).

Se puede concluir que el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  multicuacional subóptimo central (7.24)–(7.26) y el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  alternativo subóptimo central (7.24),(7.29) proporciona una conducta convergente confiable del error de estimación de la salida, dando valores muy pequeños de las normas  $\mathcal{H}_\infty$  correspondientes, incluso en comparación al valor del umbral asignado  $\gamma = 1.1$ . Lo anterior sirve como un último salto de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de salida cuando el tiempo tiende al infinito. El valor más grande de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  para el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  alternativo (7.24),(7.29) aparece debido al esquema de discretización de MatLab, el cual

maneja pobremente la división por números cercanos al cero empleados para calcular la matriz  $\Psi(t-5, t)$  en (7.29). En contraste, el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central convencional (7.27)–(7.28) da una conducta divergente del error de la estimación de la salida, produciendo un valor grande de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  correspondiente, que supera el umbral asignado. De este modo, los resultados de la simulación muestran una ventaja definitiva de los filtros  $\mathcal{H}_\infty$  subóptimos centrales diseñados para sistemas lineales con retardo en el estado, en comparación al filtro  $\mathcal{H}_\infty$  convencional conocido previamente.

## 7.5. Planteamiento del Problema de Filtrado $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LTV con retardo en la Medición

Considerar el siguiente sistema LTV continuo en el tiempo con retardo en la medición:

$$\mathcal{M}_1 : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (7.30)$$

$$y(t) = C(t)x(t-h) + D(t)\omega(t), \quad (7.31)$$

$$z(t) = L(t)x(t), \quad (7.32)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  es la señal por estimarse,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  es la medición de la salida,  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^p[0, \infty)$  es la perturbación de entrada.  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$ ,  $D(\cdot)$ , y  $L(\cdot)$  son funciones continuas conocidas.  $x_0$  es un vector inicial desconocido. El retardo en el tiempo  $h$  es conocido. Se asume que las condiciones estándar  $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3)$  de la Sección 7.1 ([75]) ocurren para este sistema.

Considerar un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  de orden completo en la siguiente forma ( $\mathcal{M}_2$ ):

$$\mathcal{M}_2 : \dot{x}_m(t) = A(t)x_m(t) + K_m(t)[y(t) - C(t)x_m(t-h)], \quad (7.33)$$

$$z_m(t) = L(t)x_m(t), \quad (7.34)$$

donde  $x_m(t)$  es el estado del filtro. Se determinará la matriz de ganancia  $K_m(t)$ .

Al transformar el modelo (7.30)–(7.32) para incluir los estados del filtro, se obtiene el siguiente sistema de errores de filtrado ( $\mathcal{M}_3$ ):

$$\mathcal{M}_3 : \dot{e}(t) = A(t)e(t) + B(t)\omega(t) - K_m(t)\tilde{y}(t), \quad (7.35)$$

$$\tilde{y}(t) = C(t)e(t-h) + D(t)\omega(t), \quad (7.36)$$

$$\tilde{z}(t) = L(t)e(t), \quad (7.37)$$

donde  $e(t) = x(t) - x_m(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y(t) - C(t)x_m(t-h)$ , y  $\tilde{z}(t) = z(t) - z_m(t)$ .

Por tanto, el problema que se debe resolver es establecido similarmente al problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  de la Sección 7.1: desarrollar un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  robusto de la forma (7.33)-(7.34) para el sistema LTV con retardo en la medición ( $\mathcal{M}_1$ ), tal que se satisfagan los siguientes dos requerimientos:

1. Las dinámicas del error de filtrado resultante ( $\mathcal{M}_3$ ) son robustamente asintóticamente estables en la ausencia de perturbaciones,  $\omega(t) \equiv 0$ ;
2. Las dinámicas del error de filtrado ( $\mathcal{M}_3$ ) aseguran un nivel de atenuación del ruido  $\gamma$  en un sentido  $\mathcal{H}_\infty$ . Más específicamente, para toda  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^p[0, \infty)$  diferente de cero, la desigualdad

$$\|\tilde{z}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \left\{ \|\omega(t)\|_2^2 + \|x_0\|_{2,R}^2 \right\} \quad (7.38)$$

ocurre para el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$ , donde  $\|f(t)\|_2^2 := \int_{t_0}^\infty f^T(t)f(t)dt$ ,  $\|x_0\|_{2,R}^2 = x_0^T R x_0$ ,  $R$  es una matriz simétrica definida positiva, y  $\gamma$  es un escalar positivo real dado.

## 7.6. Diseño del Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas LTV con Retardo en la Medición

El diseño del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central propuesto (ver el Teorema 4 en [35]) para sistemas LTV con retardo en la medición también está basado en el resultado general (ver el Teorema 3 en [35]) reduciendo problema del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  (en, particular, filtrado) al correspondiente problema del controlador  $H_2$  (i.e., cuadrático lineal óptimo o filtrado en promedio cuadrático). Entonces, el filtro en promedio cuadrático óptimo del tipo de Kalman-Bucy para sistemas LTV con retardo en la medición ([13]) se emplea para obtener el resultado deseado, el cual está dado por el siguiente teorema.

**Teorema 7.3.** *El filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central para el estado no observado (7.30) sobre las observaciones (7.31), que asegura la  $\mathcal{H}_\infty$  condición de atenuación del ruido (7.38) para el estimado de la salida  $z_m(t)$ , está dado por las ecuaciones para el estimado del estado  $x_m(t)$  y el estimado de la salida  $z_m(t)$*

$$\dot{x}_m(t) = A(t)x_m(t) + P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds\right)C^T(t)[y(t) - C(t)x_m(t-h)], \quad (7.39)$$

$$z_m(t) = L(t)x_m(t), \quad (7.40)$$

con la condición inicial  $x_m(t_0) = 0$ , y la ecuación para la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$

$$dP(t) = (P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + B(t)B^T(t) -$$

$$P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds\right)[C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t)] \exp\left(-\int_{t-h}^t A(s)ds\right)P(t)dt,$$

con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ .

**Demostración** Puesto que el sistema del error de filtrado (7.35)-(7.37) ya está en la forma usada en el Teorema 3 de [35], entonces, de acuerdo al Teorema 3 from [35], el problema de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$  sería equivalente al problema de filtrado  $H_2$  (i.e., en promedio cuadrático óptimo), donde se realiza la peor perturbación  $w_{worst}(t) = \gamma^{-2}B^T(t)Q(t)e(t)$ , y  $Q(t)$  es la solución de la ecuación para la correspondiente ganancia del control  $H_2$  (cuadrático lineal óptima). Por tanto, el sistema, para el cual el problema de filtrado  $H_2$  equivalente (en promedio cuadrático óptimo) es establecido, toma la forma

$$\mathcal{M}_4 : \dot{e}(t) = A(t)e(t) + \gamma^{-2}B(t)B^T(t)Q(t)e(t) - K_m(t)\tilde{y}(t), \quad (7.42)$$

$$\tilde{y}(t) = C(t)e(t-h) + \gamma^{-2}D(t)B^T(t)Q(t)e(t), \quad (7.43)$$

$$\tilde{z}(t) = L(t)e(t). \quad (7.44)$$

Como se sigue del Teorema 3 de [35] y el Teorema 1 en [13], las ecuaciones del estimado  $H_2$  (en promedio cuadrático óptimo) para los estados de error (7.42) y (7.44) están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5 : \dot{e}_m(t) &= A(t)e_m(t-h) - K_m(t)\tilde{y}(t) \\ &+ P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds\right)C^T(t)[\tilde{y}(t) - C(t)e_m(t-h)], \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\tilde{z}_m(t) = L(t)e_m(t), \quad (7.46)$$

donde  $e_m(t)$  y  $\tilde{z}_m(t)$  son los estimados  $H_2$  (en promedio cuadrático óptimo) para  $e(t)$  y  $\tilde{z}(t)$ , respectivamente, y  $A(t)$  es la matriz de las dinámicas en la ecuación del estado (7.30). En la ecuación (7.45),  $P(t)$  es la solución de la ecuación para la ganancia del filtro  $H_2$  (en promedio cuadrático óptimo) correspondiente, donde, de acuerdo al Teorema 3 de [35], la matriz de observación  $C(t)$  debe cambiarse a  $C(t) - \gamma^{-1}L(t)$  ( $L(t)$  es la matriz de salida en (7.32). Como fué notado en la Sección 7.1, no hay una matriz de corrección  $Z_\infty(t) = [I_n - \gamma^{-2}P(t)Q(t)]^{-1}$  en los últimos términos de innovación en el lado derecho de la ecuación (7.45).

Tomando en cuenta la no sesgidez (ver [75]) del estimador (7.45)-(7.46), puede concluirse rápidamente que la igualdad  $K_m(t) = P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds\right)C^T(t)$  debe ocurrir para la matriz de ganancia  $K_m(t)$  en (7.33). De este modo, las ecuaciones de filtrado (7.33)-(7.34) toman la forma final (7.39)-(7.40), con la condición inicial  $x_m(t_0) = 0$ , la cual corresponde al filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central (ver el Teorema 4 en [35]). Aún es necesario indicar la ecuación para la matriz de ganancia del filtro  $H_2$  (en promedio cuadrático óptimo)

$P(t)$ . De acuerdo con el Teorema 1 de [13], la ecuación para determinar  $P(t)$  es dada por la ecuación (7.42), con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ , la cual corresponde al filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central (ver los Teoremas 3 y 4 en [75]). Notar que la matriz de observación  $C(t)$  está cambiada a  $C(t) - \gamma^{-1}L(t)$  de acuerdo al Teorema 3 de [35]. ■

**Observación 7.6.** Las propiedades de convergencia del estimado obtenido (7.39) están dadas por el teorema de convergencia estándar (ver, por ejemplo, [55]): si en el sistema (7.30),(7.31) el par  $(A(t), B(t))$  es uniformemente completamente controlable y el par  $(C(t)\Phi(t-h, t), A(t))$  es uniformemente completamente observable, donde  $\Phi(t, \tau)$  es la matriz de transición de estado para la ecuación no retardada (7.30) (ver [31] para la definición de la matriz  $\Phi$ ), y la desigualdad  $C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t) > 0$  ocurre, entonces el error del filtro obtenido (7.39)–(7.41) es uniformemente asintóticamente estable. Como es usual, se requiere la condición de controlabilidad completa uniforme para asegurar la no negatividad de la matriz  $P(t)$  (7.41) y puede omitirse, si la matriz  $P(t)$  es definida no negativa en vista de sus propiedades intrínsecas.

**Observación 7.7.** Puesto que el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  diseñado (7.39)–(7.41) está basado en el filtro en promedio cuadrático  $H_2$  obtenido en [13], el cual es óptimo con respecto a un criterio en promedio cuadrático, las Observaciones 7.2–7.4 siguen siendo ciertas para este filtro también.

## 7.7. Ejemplo: Filtro $\mathcal{H}_\infty$ Central para Sistemas con Retardo en la Medición

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central para un estado lineal sobre observaciones lineales con retardo en la medición y lo compara al mejor filtro  $\mathcal{H}_\infty$  disponible para un sistema lineal sin retardos, que es el filtro obtenido en los Teoremas 3 y 4 de [75].

Sea el estado no medido  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in R^2$  (un oscilador mecánico sin retardos) dado por

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (7.47)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + w_1(t),$$

con una condición inicial desconocida  $x(0) = x_0$ , el proceso de observación escalar retardado satisface la ecuación

$$y(t) = x_1(t-5) + w_2(t), \quad (7.48)$$

y sea la salida escalar representada como

$$z(t) = x_1(t). \quad (7.49)$$

Aquí,  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]$  es una perturbación  $L_2^2$  de entrada. Se puede verificar con facilidad que la condición de ortonormalidad del ruido (ver la Sección 7.1) ocurre para el sistema (7.47)–(7.49).

El problema de filtrado es encontrar el estimado  $\mathcal{H}_\infty$  para el estado lineal (7.47) sobre observaciones lineales directas con retardo en la medición (7.48), que satisfaga la condición de atenuación del ruido (7.38) para un  $\gamma$  dado, usando el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  (7.39)–(7.41). Puesto que la simulación en el intervalo  $[0,10]$  es insuficiente para revelar las propiedades de convergencia de los errores de estimación de la salida, el horizonte de filtrado se extiende y se establece en  $T = 20$ .

Las ecuaciones de filtrado (7.39)–(7.41) toman la forma particular siguiente para el sistema (7.47),(7.48)

$$\dot{x}_{m_1}(t) = x_{m_2}(t) + (0.2837P_{11}(t) + 0.9589P_{12}(t))[y(t) - x_{m_1}(t - 5)], \quad (7.50)$$

$$\dot{x}_{m_2}(t) = -x_{m_1}(t) + (0.2837P_{12}(t) + 0.9589P_{22}(t))[y(t) - x_{m_1}(t - 5)],$$

con la condición inicial  $x_f(0) = 0$ , donde 0.2837 y 0.9589 son entradas (1, 1)– y (2, 1)– del exponente de la integral de la matriz de dinámicas en tiempo inverso para el estado (7.47),  $\exp(-\int_{t-5}^t [0 \ 1 \mid -1 \ 0]^T ds)$ ; y

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})[0.0805P_{11}^2(t) + 0.544P_{11}(t)P_{12}(t) + 0.9195P_{12}^2(t)], \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{12}(t) = & -P_{11}(t) + P_{22}(t) - (1 - \gamma^{-2})[0.0805P_{11}(t)P_{12}(t) + 0.272P_{12}^2(t) + \\ & 0.272P_{11}(t)P_{22}(t) + 0.9195P_{12}(t)P_{22}(t)], \end{aligned}$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 - 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})[0.0805P_{12}^2(t) + 0.544P_{12}(t)P_{22}(t) + 0.9195P_{22}^2(t)],$$

con la condición inicial  $P(0) = R^{-1}$ , donde los valores numéricos son las correspondientes entradas de la matriz  $[\exp(-\int_{t-5}^t [0 \ 1 \mid -1 \ 0]^T ds)][\exp(-\int_{t-5}^t [0 \ 1 \mid -1 \ 0] ds)$ .

Los estimados obtenidos al resolver las ecuaciones (7.50),(7.51) son comparados a los estimados del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  convencional, obtenido en los Teoremas 3 y 4 de [75], los cuales satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{m}_{K_1}(t) = m_{K_2}(t) + P_{11}(t)[y(t) - m_{K_1}(t - 5)], \quad (7.52)$$

$$\dot{m}_{K_2}(t) = -m_{K_1}(t) + P_{12}(t)[y(t) - m_{K_1}(t - 5)],$$

con la condición inicial  $m_f(0) = 0$ ;

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}^2(t), \quad (7.53)$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{11}(t) + P_{22}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{11}(t)P_{12}(t),$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 - 2P_{12}(t) - (1 - \gamma^{-2})P_{12}^2(t),$$

con la condición inicial  $P(0) = R^{-1}$ .

Los resultados de la simulación numérica son obtenidos resolviendo los sistemas de las ecuaciones de filtrado (7.50),(7.51) y (7.52),(7.53). Los valores obtenidos del estimado son comparados con los valores reales del vector de estado  $x(t)$  en (7.47).

Para cada uno de los dos filtros (7.50),(7.51) y (7.52),(7.53) y el sistema de referencia (7.47) involucrados en la simulación, se asignan los siguientes valores iniciales:  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $R = I_2 = \text{diag}[1 \ 1]$ . La perturbación  $L_2$ ,  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]$  es realizada como  $w_1(t) = 1/(1+t)^2$ ,  $w_2(t) = 2/(2+t)^2$ .

Puesto que  $C(t) = L(t) = 1$  en (7.48),(7.49) y el mínimo valor alcanzable del umbral  $\gamma$  es igual a  $L/C = 1$ , se asigna el valor  $\gamma = 1.1$  para las simulaciones.

Se obtienen las siguientes gráficas: gráficas del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_m(t)$  correspondientes al estimado  $x_m(t)$  que satisface las ecuaciones (7.51),(7.52) (Figura 7.4); gráficas del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_m(t)$  correspondientes al estimado  $m_K(t)$  convencional que satisface las ecuaciones (7.53),(7.54) (Figura 7.5). Las gráficas de los errores de estimación de la salida son mostradas en el intervalo de simulación completo desde  $t_0 = 0$  hasta  $T = 20$ . Las Figuras 7.4 y 7.5 también demuestran las dinámicas de las normas  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de la salida correspondientes a los errores de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida mostrada en cada caso.

Se obtuvieron los siguientes valores de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida del ruido  $\|T_{zw}\|^2 = \|z(t) - z_f(t)\|_2^2 / (\|\omega(t)\|_2^2 + \|\varphi(\theta)\|_{2,R,[-h,0]}^2)$  para las perturbaciones simuladas  $w_1(t)$  y  $w_2(t)$  en el tiempo final de la simulación  $T = 20$ :  $\|T_{zw}\| = 0.8138$  para el error  $\mathcal{H}_\infty$  de la estimación  $z(t) - z_m(t)$  correspondiente al estimado  $x_m(t)$  que satisface las ecuaciones (7.51),(7.52) y  $\|T_{zw}\| = 23.75865$  para el error  $\mathcal{H}_\infty$  de la estimación  $z(t) - z_m(t)$  correspondiente al estimado  $m_K(t)$  convencional que satisface las ecuaciones (7.53),(7.54).

Se puede concluir que el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  multiecuacional subóptimo central (7.51),(7.52) proporciona una conducta confiablemente convergente del error de la estimación de la salida, dando un valor menor convincente de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  correspondiente, en comparación al valor de umbral asignado  $\gamma = 1.1$ . Lo anterior sirve como un último acotamiento de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de salida cuando el tiempo tiende al infinito. En contraste, el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central convencional (7.53),(7.54) da una conducta divergente del error de estimación de la salida, proporcionando un valor mucho mayor de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  correspondiente, el cual excede grandemente el umbral asignado. De este modo, los resultados de la simulación muestran ventajas claras del filtro  $\mathcal{H}_\infty$  subóptimo central diseñado para sistemas lineales con retardo en la medición, en comparación al filtro  $\mathcal{H}_\infty$  convencional conocido previamente.

## 7.8. Generalizaciones

Como se muestra en [80], puede omitirse la condición de ortonormalidad del ruido ( $\mathcal{C}_3$ ), tercer condición estándar de la sección 7.1 (ver también [35, 75]). Ésto conduce a la aparición de términos adicionales en todas las ecuaciones de filtrado  $\mathcal{H}_\infty$ . Las generalizaciones correspondientes de los filtros  $\mathcal{H}_\infty$  obtenidos se dan en las siguientes proposiciones.

**Corolario 7.1.** En la ausencia de la condición de ortonormalidad del ruido ( $\mathcal{C}_3$ ), el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central para el estado no observado (7.1) sobre las observaciones (7.2), que aseguran la condición de atenuación  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido (7.10) para el estimando de la salida  $z_f(t)$ , está dado por las siguientes ecuaciones para el estimado del estado  $x_f(t)$  y el estimado de la salida  $z_f(t)$

$$\dot{x}_f(t) = A(t)x_f(t-h) + [P(t)C^T(t) + B(t)D^T(t)](D(t)D^T(t))^{-1}[y(t) - C(t)x_f(t)], \quad (7.54)$$

$$z_f(t) = L(t)x_f(t), \quad (7.55)$$

con la condición inicial  $x_f(\theta) = 0 \forall \theta \in [t_0 - h, t_0]$ , la ecuación para la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$

$$dP(t) = (P_1(t)A^T(t) + A(t)P_1^T(t) + B(t)B^T(t) - [P(t)C^T(t) + B(t)D^T(t)](D(t)D^T(t))^{-1}[D(t)B^T(t) + C(t)P(t)] + \gamma^{-2}P(t)L^T(t)L(t)P(t))dt, \quad (7.56)$$

con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ , y el sistema de ecuaciones para las matrices complementarias  $P_i(t)$ ,  $i \geq 1$ ,

$$dP_i(t) = (A(t)P_{i-1}(t-h) + P_{i+1}(t)A^T(t-ih))dt + \quad (7.57)$$

$$\frac{1}{2}(B(t)B^T(t-ih) + B(t-ih)B^T(t))dt -$$

$$\frac{1}{2}([P(t)C^T(t) + B(t)D^T(t)](D(t)D^T(t-ih))^{-1}[D(t-ih)B^T(t-ih) + C(t-ih)P(t-ih)] -$$

$$\gamma^{-2}P(t)L^T(t)L(t-ih)P(t-ih) +$$

$$[P(t-ih)C^T(t-ih) + B(t-ih)D^T(t-ih)](D(t-ih)D^T(t))^{-1}[D(t)B^T(t) + C(t)P(t)] -$$

$$\gamma^{-2}P(t-ih)L^T(t-ih)L(t)P(t))dt,$$

con las condiciones iniciales

$$P_i(\theta) = 0, \quad \theta \in [t_0 + (i-1)h, t_0 + ih].$$

El número de ecuaciones en (7.58) es igual a la parte entera de la razón  $T/h$ , donde  $h$  es el retardo en el estado en (7.1) y  $T$  es el horizonte de filtrado actual.



**Corolario 7.2.** En ausencia de la condición de la ortonormalidad del ruido ( $\mathcal{C}_3$ ), el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central alternativo para el estado no observado (7.1) sobre las observaciones (7.2), que aseguran la condición de atenuación  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido (7.10) para el estimado de la salida  $z_f(t)$ , está dado por la ecuación (7.55) para el estimado del estado  $x_f(t)$ , la ecuación (7.56) para el estimado de la salida  $z_f(t)$ , y la siguiente ecuación para la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$

$$dP(t) = A(t)(\Psi(t-h, t))P(t) + P(t)(\Psi(t-h, t))^T A^T(t) + B(t)B^T(t) - \quad (7.58)$$

$[P(t)C^T(t) + B(t)D^T(t)](D(t)D^T(t))^{-1}[D(t)B^T(t) + C(t)P(t)] + \gamma^{-2}P(t)L^T(t)L(t)P(t)dt.$   
con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$

**Corolario 7.3.** En ausencia de la condición de la ortonormalidad del ruido ( $\mathcal{C}_3$ ), el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  central para el estado no observado (7.30) sobre las observaciones (7.31), que aseguran la condición de atenuación  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido (7.38) para el estimado de la salida  $z_m(t)$ , está dado por las siguientes ecuaciones para el estimado del estado  $x_m(t)$  y el estimado de salida  $z_m(t)$

$$\dot{x}_m(t) = A(t)x_m(t) + [P(t) \exp(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds)C^T(t) + \quad (7.59)$$

$$B(t)D^T(t)]T^{-1}(t)[y(t) - C(t)x_m(t-h)],$$

$$z_m(t) = L(t)x_m(t), \quad (7.60)$$

con la condición inicial  $x_m(t_0) = 0$ , y la ecuación para la matriz de ganancia del filtro  $P(t)$

$$dP(t) = (P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + B(t)B^T(t) + \quad (7.61)$$

$$\gamma^{-2}P(t) \exp(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds)L^T(t)L(t) \exp(-\int_{t-h}^t A(s)ds)P(t) -$$

$$[P(t) \exp(-\int_{t-h}^t A^T(s)ds)C^T(t) + B(t)D^T(t)]T^{-1}(t) \times$$

$$[C(t) \exp(-\int_{t-h}^t A(s)ds)P(t) + D(t)B^T(t)]dt,$$

con la condición inicial  $P(t_0) = R^{-1}$ , donde la matriz  $T(t)$  está definida como

$$T(t) = D(t)D^T(t) + C(t) \exp(-\int_{t-h}^t A(s)ds) \times$$

$$\left[ \int_{t-h}^t \exp \left( \int_{\tau}^t A(s) ds \right) B(\tau) B^T(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^t A^T(s) ds \right) d\tau \right] \exp \left( - \int_{t-h}^t A^T(s) ds \right) C^T(t).$$

**Demostración.** Las pruebas de todos los tres corolarios son dadas simplemente usando la técnica del manejo de los problemas de filtrado  $\mathcal{H}_{\infty}$  para sistemas con ruidos no ortonormales, la cual puede ser encontrada en [80].

**Observación 7.8.** Puesto que los filtros  $\mathcal{H}_{\infty}$  diseñados en los corolarios 7.1–7.3 se basan en los filtros en promedio cuadrático  $H_2$  correspondientes, los cuales son óptimos con respecto a los criterios en promedio cuadrático, las Observaciones 7.2–7.4 permanecen válidas.

## 7.9. Conclusiones

Esta tesis diseña los filtros  $\mathcal{H}_{\infty}$  de dimensión finita centrales para sistemas lineales con retardo en el estado o en la medición, que son subóptimos para un umbral  $\gamma$  dado con respecto a un criterio cuadrático de Bolza-Meyer modificado incluyendo el término de la atenuación del control con el signo opuesto. Se obtiene primero el filtro  $\mathcal{H}_{\infty}$  subóptimo central para sistemas lineales con retardo en el estado, el cual contiene un número finito de ecuaciones de filtrado para algún horizonte de filtrado fijo, pero este número crece ilimitadamente cuando el tiempo tiende al infinito. Para superar esa dificultad, se diseñó el filtro  $\mathcal{H}_{\infty}$  subóptimo central alternativo para sistemas lineales con retardo en el estado, el cual contiene sólo dos ecuaciones diferenciales para determinar el estimado y la matriz de ganancia del filtro, a pesar del horizonte de filtrado. Entonces, la tesis presenta el filtro  $\mathcal{H}_{\infty}$  subóptimo central para sistemas lineales con retardo en la medición. Finalmente, las versiones generalizadas de todos los tres filtros se diseñan en ausencia de la condición de ortonormalidad del ruido estándar.

En los ejemplos basados sobre un modelo de un oscilador mecánico, se corren las simulaciones numéricas para verificar el rendimiento de los filtros subóptimos centrales diseñados para sistemas lineales con retardo en el estado o en la medición contra el filtro  $\mathcal{H}_{\infty}$  subóptimo central disponible para sistemas lineales sin retardo. Los resultados de la simulación muestran una clara ventaja en los valores de las normas  $\mathcal{H}_{\infty}$  de la función de transferencia del ruido de la salida en favor de los filtros diseñados. En particular, los errores de estimación dados por los filtros obtenidos convergen a cero, mientras que los errores de estimación de los filtros convencionales divergen. Esta mejora significativa en la conducta del estimado se obtiene debido a la selección más cuidadosa de la matriz de la ganancia del filtro en los filtros diseñados. Aunque esta conclusión sigue de la teoría desarrollada, la simulación numérica sirve como una ilustración convincente.

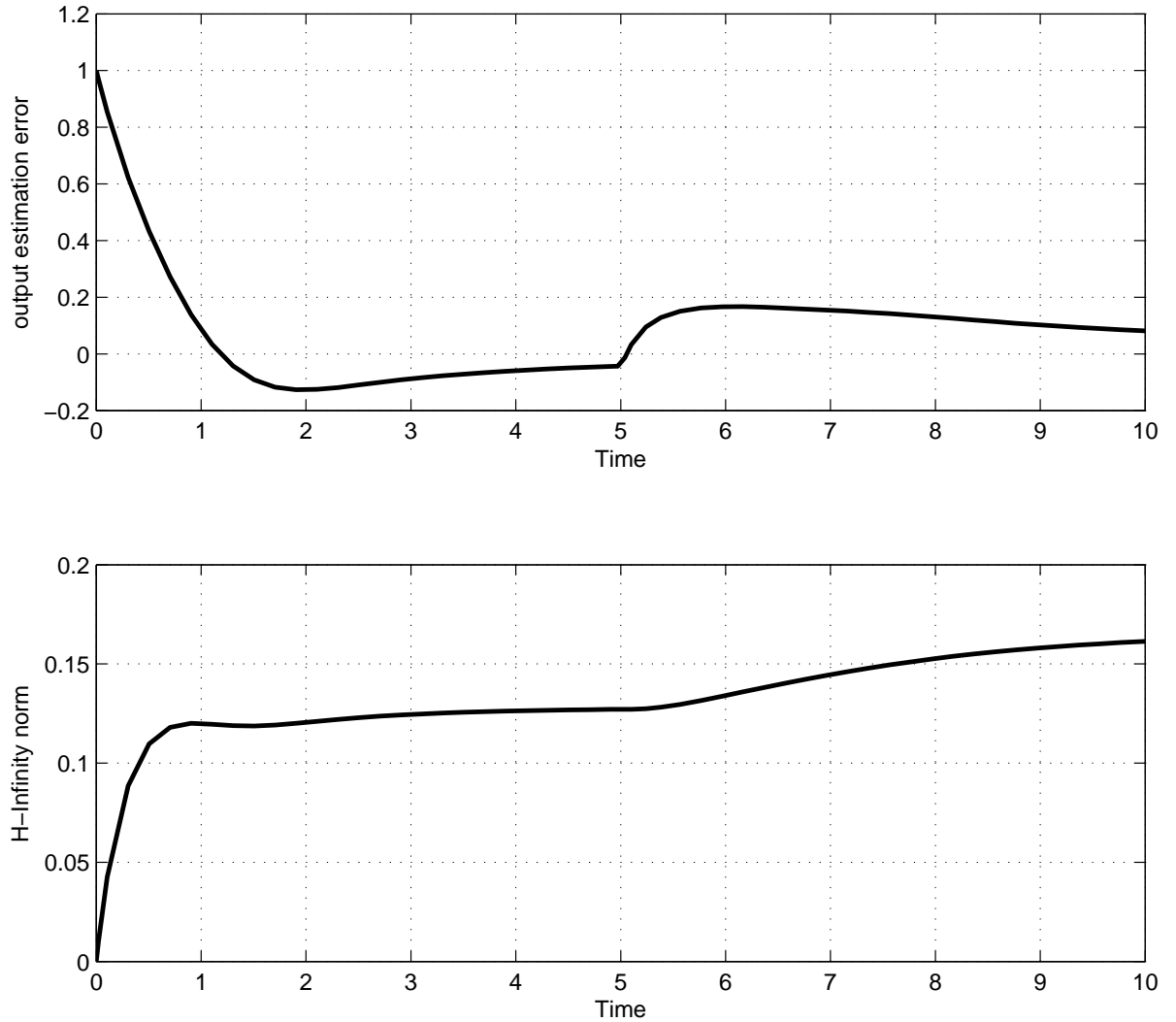


Figura 7.1: **Arriba.** Gráfica del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado  $x_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.24)–(7.26), en el intervalo de simulación  $[0,10]$ . **Abajo.** Gráfica de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de salida correspondiente al error mostrado de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida, en el intervalo de simulación  $[0,10]$ .

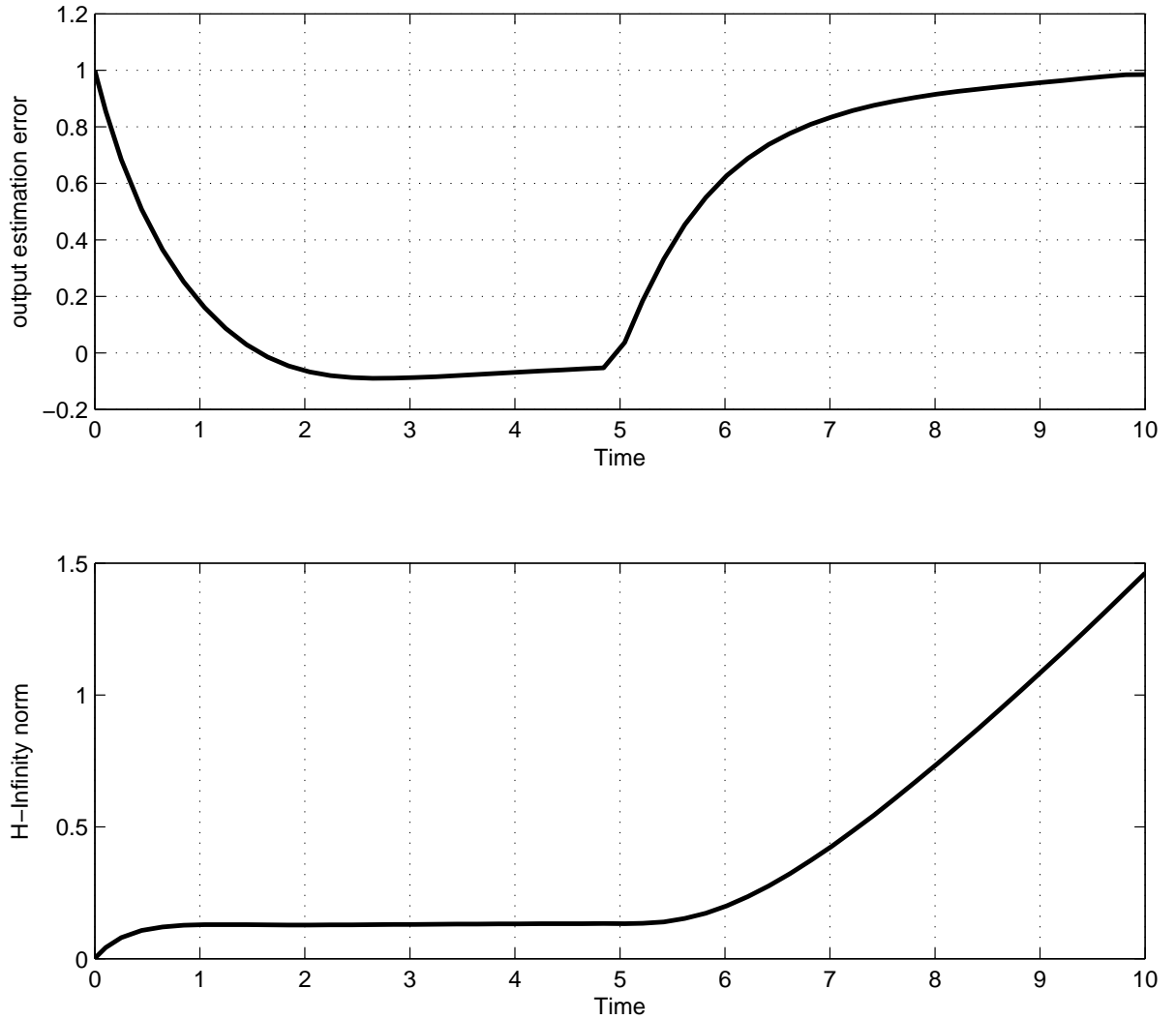


Figura 7.2: **Arriba.** Gráfica del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado  $x_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.27)–(7.28), en el intervalo de simulación  $[0,10]$ . **Abajo.** Gráfica de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de salida correspondiente al error mostrado de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida, en el intervalo de simulación  $[0,10]$ .

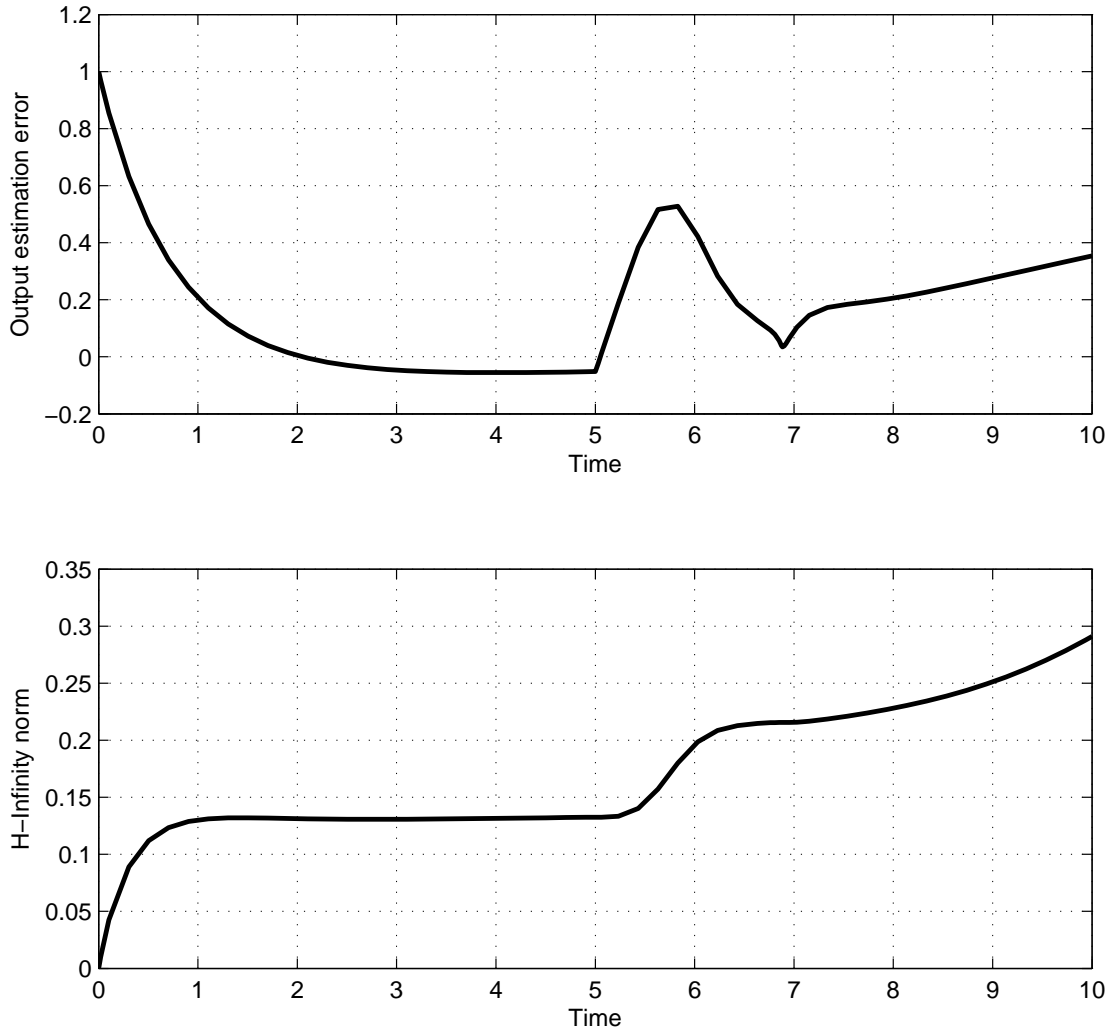


Figura 7.3: **Arriba.** Gráfica del error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida  $z(t) - z_f(t)$  correspondiente al estimado  $x_f(t)$  que satisface las ecuaciones (7.24),(7.29), en el intervalo de simulación  $[0,10]$ .**Abajo.** Gráfica de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de salida correspondiente al error mostrado de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida, en el intervalo de simulación  $[0,10]$ .

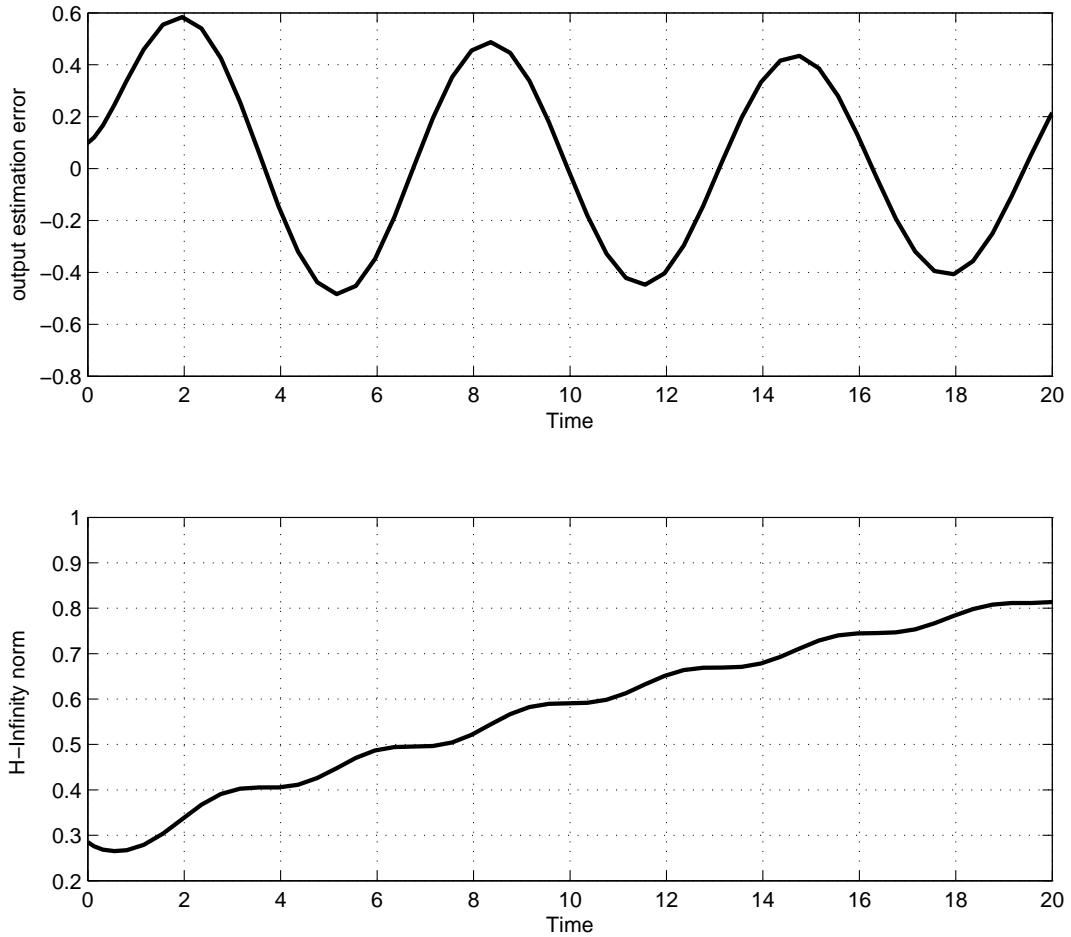


Figura 7.4: **Arriba.** Gráfica del error de estimación  $z(t) - z_m(t)$  de la salida  $\mathcal{H}_\infty$  correspondiente al estimado  $x_m(t)$  que satisface las ecuaciones (7.51),(7.52), en el intervalo de simulación  $[0,20]$ .**Abajo.** Gráfica de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de la salida correspondiente al error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida mostrado, en el intervalo de simulación  $[0,20]$ .

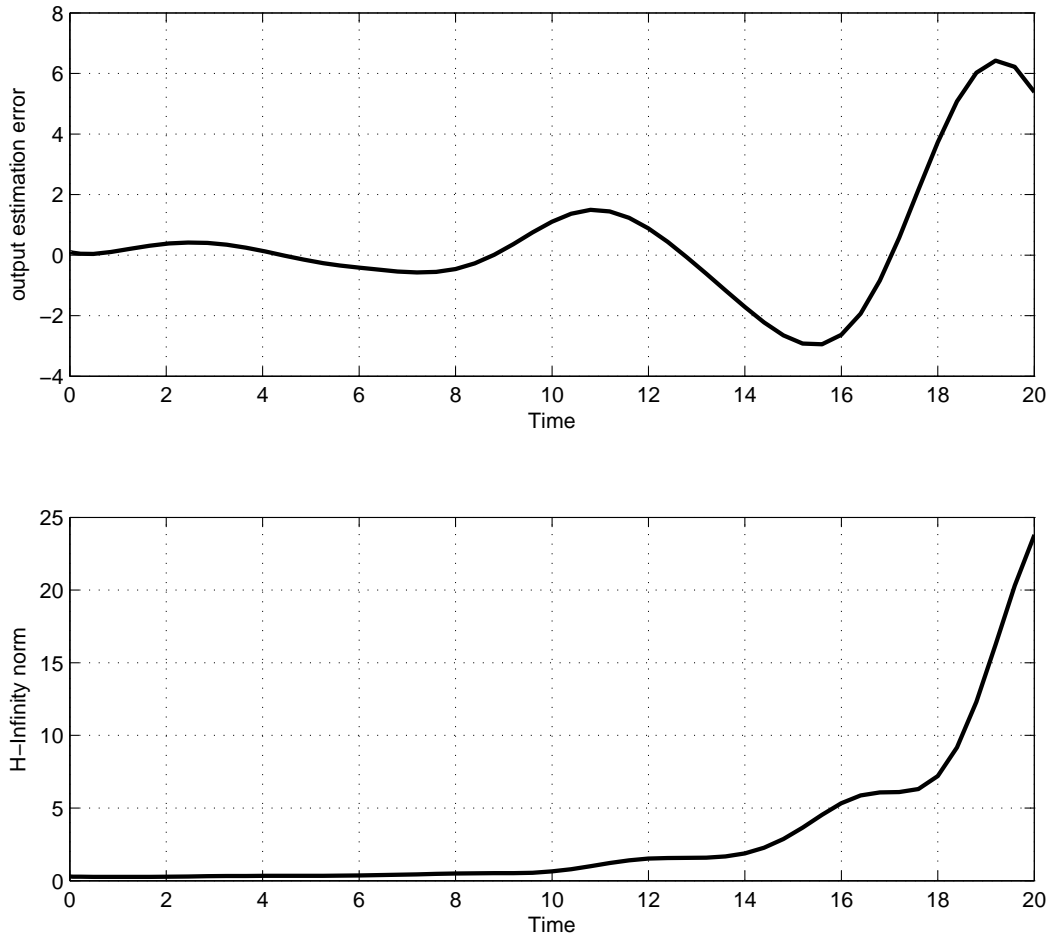


Figura 7.5: **Arriba.** Gráfica del error de estimación  $z(t) - z_m(t)$  de la salida  $\mathcal{H}_\infty$  correspondiente al estimado  $m_K(t)$  que satisface las ecuaciones (7.53),(7.54), en el intervalo de simulación  $[0,20]$ . **Abajo.** Gráfica de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del ruido de la salida correspondiente al error de estimación  $\mathcal{H}_\infty$  de la salida mostrado, en el intervalo de simulación  $[0,20]$ .

## Capítulo 8

# Regulador en Modo Deslizante como Solución del Problema de Control Óptimo con un Criterio no Cuadrático

### 8.1. Planteamiento del Problema

Considerar un sistema lineal variante en el tiempo convencional

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (8.1)$$

donde  $x(t) \in R^n$  es el estado del sistema y  $u(t) \in R^m$  es la entrada de control. Los coeficientes  $A(t)$  y  $B(t)$  son considerados funciones continuas del tiempo. Sin pérdida de generalidad, el sistema (8.1) (el par  $(A, B)$ ) se asume como controlable.

En el problema de control óptimo lineal clásico [41, 40], el criterio que se debe minimizar es definido como una funcional de Bolza-Meyer cuadrática:

$$J_2 = \frac{1}{2}[x(T)]^T \psi[x(T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds, \quad (8.2)$$

donde  $R(s)$  es positivo y  $\psi$ ,  $L(s)$  son funciones matriciales simétricas definidas no negativas, y  $T > t_0$  es un cierto momento del tiempo. La solución a este problema es bien conocida [40, 41] y se considera fundamental para la teoría de sistemas lineales óptimos.



En este capítulo, el criterio que se debe minimizar incluye un término terminal no cuadrático y está definido como sigue:

$$J_1 = \sum_{i,j=1}^n \psi_{ij} |x_j(T)| + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds, \quad (8.3)$$

donde  $R(s)$  es positivo y  $L(s)$ ,  $\psi$  son funciones matriciales simétricas continuas definidas no negativas, y  $|x_j|$  es el valor absoluto del componente  $x_j$  del vector  $x \in R^n$ .

El problema de control óptimo es encontrar el control  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , que minimiza el criterio  $J_1$  (8.3) a lo largo de la trayectoria  $x^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación de estado (8.1).

Una solución del problema de control óptimo establecido está dada en la siguiente sección y entonces es demostrada en el Apéndice. Como se ha demostrado, la solución obtenida es un control en modo deslizante que es óptimo con respecto al criterio (8.3).

## 8.2. Solución del Problema de Control Óptimo

La solución al problema de control óptimo para el sistema lineal (8.1) y el criterio (8.3) está dada como sigue. La ley de control óptimo toma la forma de control en modo deslizante

$$u^*(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[x(t)], \quad (8.4)$$

donde la función Signo de un vector  $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$  se define como  $Sign[x] = [sign(x_1), \dots, sign(x_n)] \in R^n$ , y la función signo de un escalar  $x$  se define como  $sign(x) = 1$ , si  $x > 0$ ,  $sign(x) = 0$ , si  $x = 0$ , y  $sign(x) = -1$ , si  $x < 0$ .

La función matricial  $Q(t)$  satisface la ecuación matricial con coeficientes variables en el tiempo

$$\dot{Q}(t) = L(t)*|x(t)| - A^T(t)Q(t), \quad (8.5)$$

donde  $|x| = [|x_1|, \dots, |x_n|] \in R^n$  está definido como el vector de valores absolutos de los componentes del vector  $x \in R^n$ , y  $A*b$  denota un producto entre una matriz  $A \in R^{n \times n}$  y un vector  $b \in R^n$ , que resulta en la matriz definida como sigue: todas las entradas de la  $j$ -ésima columna de la matriz  $A$  se multiplican por la  $j$ -ésima componente del vector  $b$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

La condición terminal para la ecuación (8.5) está definida como  $Q(T) = -\psi$ , si el estado  $x(t)$  no alcanza la superficie deslizante  $x = 0$  dentro del intervalo del tiempo  $[t_0, T]$ ,  $x(t) \neq 0$ ,  $t \in [t_0, T]$ . De lo contrario, si el estado  $x(t)$  alcanza la superficie deslizante  $x = 0$  dentro el intervalo del tiempo  $[t_0, T]$ ,  $x(t) = 0$  para algún  $t \in [t_0, T]$ , entonces  $Q(t)$  se

establece como igual a una función matricial  $Q_0(t)$  que es tal solución de (8.5) de modo que  $x(t)$  alcanza la superficie deslizante  $x = 0$  bajo la ley de control (8.4) con la matriz  $Q_0(t)$  exactamente en el momento del tiempo final  $t = T$ ,  $x(T) = 0$ , pero  $x(t) \neq 0$ ,  $t < T$ . El caso trivial  $x(t_0) = 0$  y, por tanto,  $x(t) = 0$ ,  $t \in [t_0, T]$ , no es considerado aquí. Es más, si  $x(t) = 0$ , entonces  $u(t) = 0$ ; por tanto, no se necesita el el valor de  $Q(t)$ .

Al sustituir el control óptimo (8.4) en la ecuación de estado (8.1), se obtiene la ecuación de estado óptimamente controlada

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[x(t)], \quad x(t_0) = x_0. \quad (8.6)$$

Consecuentemente, el resultado principal es formulado en el siguiente teorema y demostrado en el Apéndice.

**Teorema 8.1.** El regulador óptimo para el sistema lineal (8.1) con respecto al criterio (8.3) está dado por la ley de control en modo deslizante (8.4) y la ecuación diferencial matricial de ganancia (8.5). El estado óptimamente controlado del sistema lineal (8.1) es gobernado por la ecuación (8.6).

**Observación 8.1.** No es difícil ver que la solución  $Q_0(t)$  existe realmente y puede ser calculada. Es más, si  $\psi = 0$  en el criterio (8.2) y (8.3) y el término no integral está ausente, entonces las soluciones óptimas con respecto a ambos criterios coinciden (ver el Apéndice para la demostración). En este caso, como sigue de la teoría LQR óptima [41, 40], la matriz de ganancia óptima  $Q(t)$  tiene valor terminal cero,  $Q(T) = 0$ , sin embargo, el valor terminal del estado es diferente de cero,  $x(T) \neq 0$ . Entonces, decreciendo el valor de  $-\psi$  como la condición terminal para la ecuación (8.5) y, consecuentemente, incrementando la energía del control (8.4), el valor de estado terminal cero se alcanzaría para un cierto valor definido negativo de  $-\psi_0$ , tomando en cuenta que cada superficie  $x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es deslizante para el componente correspondiente  $x_i$  y el sistema (8.1) es asumido como controlable. Finalmente, la solución de la ecuación (8.5) con la condición terminal  $-\psi_0$  sería la solución deseada  $Q_0(t)$ .

**Observación 8.2.** Notar que el Teorema 8.1 sugiere un posible algoritmo para la solución numérica de la ecuación de la matriz de ganancia (8.5). De hecho, primero, el sistema de ecuaciones (8.1),(8.4),(8.5) es resuelto con una condición inicial dada  $x_0$  y la condición terminal  $-\psi$  correspondiente al término no integral en el criterio (8.3). Cualquier método numérico conocido, tal como "disparos", el cual consiste en variar las condiciones para (8.5) hasta que se cumpla una condición terminal dada, podría ser utilizada. Si el estado del sistema  $x(t)$  no alcanza el cero en el intervalo  $[0, T]$  o lo alcanza exactamente en el momento final  $t = T$ , entonces la trayectoria óptima y el control óptimo son encontrados. Si  $x(t)$  alcanza el cero en cualquier punto  $t < T$ , el sistema de ecuaciones (8.1),(8.4),(8.5) es resuelto de nuevo con la condición inicial  $x_0$  y la condición terminal  $-\psi_0$ , dando la

solución  $Q_0(t)$ . La solución correspondiente de la ecuación (8.1) da la trayectoria óptima. La fórmula (8.4) con  $Q_0(t)$  sustituido y la trayectoria óptima dan el control óptimo como una función del tiempo.

**Observación 8.3.** Como está establecido en el Teorema 8.1, la aplicación del control en modo deslizante (8.4) conduce a una condición terminal causal para la ecuación matricial de ganancia (8.5), lo que hace que el problema de control óptimo sea numéricamente resoluble. En contraste, la aplicación del control de retroalimentación lineal  $u^*(t) = K(t)x(t)$  nos lleva a la condición terminal  $Q(T) = -\psi * \text{Sign}[x(t)]$ , la cual depende explícitamente del valor desconocido  $x(T)$ , y, por tanto, es no causal. Como es bien conocido, los problemas no causales no son numéricamente resolubles y son inservibles en la práctica. De este modo, en caso de un criterio (8.3), el control en modo deslizante permite obtener una solución factible del problema de control óptimo, mientras que el control de retroalimentación clásico lineal falla.

### 8.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del regulador óptimo para un sistema (8.1) con un criterio (8.3), usando el esquema (8.4)–(8.6).

Considerar un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1. \quad (8.7)$$

El problema de control es encontrar el control  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T = 5$ , que minimiza el criterio

$$J_1 = 50 |x(T)| + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t)) dt, \quad (8.8)$$

donde  $|x|$  denota el valor absoluto de una variable escalar  $x$ .

Aplicando el regulador óptimo (8.4)–(8.6), la ley de control (8.4) está dada por

$$u^*(t) = Q^*(t) \text{sign}[x(t)], \quad (8.9)$$

donde  $Q^*(t)$  satisface la ecuación

$$\dot{Q}^*(t) = |x(t)| - Q^*(t), \quad (8.10)$$

con la condición inicial  $Q^*(5) = -50$ , si  $x(t) \neq 0$  para cualquier  $t < 5$ , y  $Q^*(5) = 0$ , de otro modo.

Al sustituir el control (9) y la expresión obtenida para  $Q^*(t)$  en (8.7), el sistema óptimamente controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + Q^*(t)\text{sign}[x(t)], \quad x(0) = 1. \quad (8.11)$$

El sistema (8.10),(8.11) se simula primero con la condición terminal  $Q^*(5) = -50$ . Como muestra la simulación, el estado  $x(t)$  alcanza el cero antes del momento final  $T = 5$ . En consecuencia, la condición terminal para la ecuación (8.10) se restaura a  $Q^*(5) = -\psi_0$  tal que  $x(5) = 0$  (ver la Observación 8.2 en la Sección 8.2), y el sistema (8.10),(8.11) se simula nuevamente. Los resultados obtenidos al aplicar el regulador (8.9)–(8.11) al sistema (8.7) se muestran en la Figura 8.1, la cual presenta las gráficas de la matriz de ganancia (8.10)  $Q^*(t)$ , el control (8.9)  $u^*(t)$ , el estado (8.7)  $x(t)$ , y el criterio (8.8)  $J_1(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ . El valor del criterio (8.8) en el momento final  $T = 5$  es  $J_1(5) = 2.4142$ .

El regulador óptimo (8.9)–(8.11) es comparado al mejor regulador lineal para el criterio (8.2) con el término no integral cuadrático

$$J_2 = 25x^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t))dt, \quad (8.12)$$

Como se sigue de la teoría LQR óptima [41, 40], la ley de control lineal está dada por

$$u(t) = Q(t)x(t), \quad (8.13)$$

donde  $Q(t)$  satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t),$$

con la condición terminal  $Q(T) = -\psi$ . Sustituyendo valores numéricos de (8.7),(8.12) para los parámetros  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $L(t)$ , y  $R(t)$ , la última ecuación toma la forma

$$\dot{Q}(t) = 1 - 2Q(t) - Q^2(t), \quad Q(5) = -50. \quad (8.14)$$

Al sustituir el control (8.13) en (8.7), el sistema controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + Q(t)x(t), \quad x(0) = 1. \quad (8.15)$$

Los resultados obtenidos aplicando el regulador (8.13)–(8.15) al sistema (8.7) son mostrados en la Figura 8.2, la cual presenta las gráficas de la matriz de ganancia (8.14)  $Q(t)$ , el control (8.13)  $u(t)$ , el estado (8.7)  $x(t)$ , y el criterio (8.8)  $J_1(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ . El valor del criterio (8.8) en el momento final  $T = 5$  es  $J_2(5) = 2.4142 + 2.1 \times 10^{-3} = 2.4163$ . Para dar una mejor comparación, la Figura 8.3 presenta las gráficas de las funciones de

control (8.9)  $u^*(t)$  y (8.13)  $u(t)$  y las correspondientes trayectorias del estado (8.7)  $x(t)$  en detalle en el intervalo [4.995, 5].

Se puede observar que el control en modo deslizante óptimo (8.9) da sin duda un mejor valor del criterio (8.8) en comparación al control de retroalimentación lineal (8.13). Notar nuevamente que el control en retroalimentación lineal clásico falla al dar un control óptimo causal para el criterio (8.8) (ver también la Observación 8.3).

Para propósitos de verificación, ambos, el modo deslizante y las leyes de control en retroalimentación lineal, son aplicados para minimizar el criterio

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t)) dt, \quad (8.16)$$

el cual coincide con los criterios (8.8) y (8.12), si el término no integral está ausente. En este caso, el regulador en modo deslizante óptimo

$$\begin{aligned} u^*(t) &= Q^*(t) \text{sign}[x(t)], \\ \dot{Q}^*(t) &= |x(t)| - Q^*(t), \quad Q(5) = 0, \\ \dot{x}(t) &= x(t) + Q^*(t) \text{sign}[x(t)], \quad x(0) = 1. \end{aligned} \quad (8.17)$$

y el regulador en retroalimentación lineal óptimo

$$\begin{aligned} u(t) &= Q(t)x(t), \\ \dot{Q}(t) &= 1 - 2Q(t) - Q^2(t), \quad Q(5) = 0. \\ \dot{x}(t) &= x(t) + Q(t)x(t), \quad x(0) = 1. \end{aligned} \quad (8.18)$$

da el mismo control  $u^*(t) = u(t)$  y, en consecuencia, la misma trayectoria óptima  $x(t)$  y el mismo valor final del criterio  $J(5) = 2.4142$ , aunque las matrices de ganancia  $Q^*(t)$  y  $Q(t)$  son diferentes, como se ve en la Figura 8.4.

## 8.4. Apéndice

**Demostración de Teorema 8.1. Necesidad.** Definamos la función hamiltoniana [41] para el problema del control óptimo (8.1),(8.3) como

$$\begin{aligned} H(x, u, q, t) &= \frac{1}{2}(u^T R(t)u + x^T L(t)x + q^T \dot{x}(t) = \\ &= \frac{1}{2}(u^T R(t)u + x^T L(t)x + q^T [A(t)x + B(t)u]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Aplicando la condición del principio del máximo  $\partial H/\partial u = 0$  a esta función hamiltoniana específica (8.19) resulta

$$\partial H/\partial u = 0 \Rightarrow R(t)u(t) + B^T(t)q(t) = 0.$$

En consecuencia, la ley de control óptimo es obtenida como

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)q(t).$$

Vamos a buscar  $q(t)$  como la función Signo de  $x(t)$  multiplicada por una matriz de ganancia

$$q(t) = -Q(t)Sign[x(t)], \quad (8.20)$$

donde  $Q(t)$  es una matriz simétrica cuadrada de dimensión  $n \times n$ . Esto proporciona la forma completa del control óptimo

$$u^*(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[x(t)]. \quad (8.21)$$

Usando la ecuación de coestado  $dq(t)/dt = -\partial H/\partial x$ , la cual proporciona

$$-dq(t)/dt = L(t)x(t) + A^T(t)q(t), \quad (8.22)$$

y sustituyendo (8.20) en (8.22), obtenemos

$$\dot{Q}(t)Sign[x(t)] + Q(t)d(Sign[x(t)])/dt = L(t)x(t) - A^T(t)Q(t)Sign[x(t)]. \quad (8.23)$$

Tomando en cuenta que  $d(Sign[x(t)])/dx = 0$  en casi todas partes fuera de la superficie deslizante  $x(t) = 0$ , se obtiene la siguiente ecuación

$$\dot{Q}(t)Sign[x(t)] = L(t)x(t) - A^T(t)Q(t)Sign[x(t)]. \quad (8.24)$$

Notar que si  $x(t) = 0$ , entonces  $u(t) = 0$ ; por tanto, el valor de  $Q(t)$  ya no es necesario. La ecuación (8.24) está satisfecha, si  $Q(t)$  es asignada como una solución de la ecuación (8.5).

Si el estado  $x(t)$  no alcanza la superficie deslizante  $x(t) = 0$  en un punto interior del intervalo  $[0, T]$ , la condición de transversalidad [41] para  $q(T)$  implica que

$$q(T) = -Q(T)Sign[x(T)] = \partial J/\partial x(T) = \psi Sign[x(T)],$$

lo cual se satisface si

$$Q(T) = -\psi. \quad (8.25)$$

Sin embargo, si  $x(t)$  alcanza la superficie deslizante  $x(t) = 0$  antes del momento final  $t = T$ , entonces la condición de transversalidad no es útil, puesto que el problema se convierte en un problema de dos puntos fijos donde el punto terminal se fija *a priori* en un momento desconocido del tiempo cuando  $x(t)$  alcanza la superficie deslizante  $x(t) = 0$ . Dado que el valor del estado final  $x(T)$  permanece igual a cero, si el estado entra en el modo deslizante antes del momento final  $t = T$ , sólo la parte integral del criterio debería reducirse al mínimo sobre todas las leyes del control proporcionando que  $x(t)$  alcance la superficie deslizante  $x(t) = 0$  en el intervalo  $[0, T]$ . Puesto que el valor mínimo de la parte integral del criterio (8.3) sobre todos los controles posibles es dado por el control de retroalimentación lineal resolviendo el problema del LQR óptimo (ver también la Observación 8.1 en la Sección 8.3), lo cual lleva al valor del estado final diferente de cero  $x(T) \neq 0$  (ver [40, 41]), el valor mínimo de la parte integral del criterio (8.3) sobre todas las leyes de control siempre que  $x(t)$  alcance la superficie deslizante  $x(t) = 0$  dentro del intervalo  $[0, T]$  está dado por la ley de control, la cual trae al estado hacia dentro de la superficie deslizante  $x(t) = 0$  exactamente en el momento final  $t = T$ . Esta ley de control corresponde a la matriz de ganancia  $Q_0(t)$  en vista de su definición en el párrafo después de (8.5). De este modo, las condiciones terminales para la ecuación (8.5) está correctamente definidas por el Teorema 8.1. La parte de la necesidad está demostrada.

**Suficiencia.** La optimalidad de la ley de control óptimo  $u^*(t)$  dada el el Teorema 8.1 y por la fórmula (8.21) está demostrada en una forma estándar (ver detalles por ejemplo, en [19]): que componen la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), correspondiente al hamiltoniano (8.19), y demostrando que éste se satisface con la función de Bellman  $V(x, t) = - \sum_{i,j=1}^n Q_{ij}(t) |x_j|$ , donde  $Q_{ij}(t)$  son las entradas de la matriz  $Q(t)$ , que son solución de la ecuación (8.5). La demostración repite principalmente las fórmulas (8.22)–(8.25) en la parte de la necesidad. Finalmente, minimizando el lado derecho de la ecuación HJB sobre  $u$  se da el control óptimo  $u^*(t)$  en la forma (8.21). El teorema está demostrado.

■

**Prueba de la Proposición en la Observación 8.1.** Considerar el problema de control óptimo para un sistema lineal (8.1) con respecto al criterio de Bolza-Meyer sin un término no integral

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds. \quad (8.26)$$

Como sigue de la teoría LQR óptima [41, 40], la ley de control lineal está dada por

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)x(t), \quad (8.27)$$

donde  $Q(t)$  satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \quad (8.28)$$

con la condición terminal  $Q(T) = 0$ , y el sistema controlado óptimamente toma la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (8.29)$$

Vamos a mostrar que el regulador óptimo LQ (8.27)-(8.29) coincide con el regulador en modo deslizante óptimo dado por el Teorema 8.1. Es más, al introducir la nueva matriz de ganancia  $Q^*(t) = Q(t)* | x(t) |$ , la ley de control (8.27) se convierte en el control en modo deslizante (8.4) y la ecuación (8.29) coincide con (8.6). Además, en vista de (8.28) y (8.29), la matriz de ganancia introducida recientemente  $Q^*(t)$  satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{Q}^*(t) &= \frac{d(Q(t)* | x(t) |)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} * | x(t) | + Q(t) * \frac{d(| x(t) |)}{dt} = \\ &(-A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t))* | x(t) | + \\ &Q(t)(A(t)* | x(t) | + R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)* | x(t) |) = \\ &L(t)* | x(t) | - A^T(t)Q(t)* | x(t) | = L(t)* | x(t) | - A^T(t)Q^*(t), \end{aligned}$$

con la condición terminal  $Q^*(T) = 0$ , la cual coincide con (8.5). La proposición está demostrada. ■

## 8.5. Conclusiones

Esta tesis presenta un problema de control óptimo, cuya solución está dada por un control en modo deslizante, de este modo abordamos una cuestión difícil bajo discusión puesto que el inicio del diseño de un control en modo deslizante: Queremos saber si puede un control en modo deslizante ser una solución para un problema de control óptimo. El problema de control óptimo está considerado para un sistema lineal con un criterio de Bolza-Meyer, donde los términos del control integral y de la energía del estado son cuadráticos y el término no integral es de primer grado. Se muestra que la solución óptima está dada por un control en modo deslizante causal, mientras que el control de retroalimentación lineal convencional falla para dar una solución viable. También se verifica que el regulador en modo deslizante y el regulador LQ dan la misma trayectoria óptima, siendo aplicado al problema de control óptimo con respecto al criterio cuadrático de Bolza-Meyer sin el término no integral, cuya solución es bien conocida debido a la teoría del LQR. Se espera que la aproximación propuesta basada en un control en modo deslizante sea aplicable a otros problemas de control óptimo con criterios no cuadráticos, donde el control de retroalimentación lineal convencional no funciona.



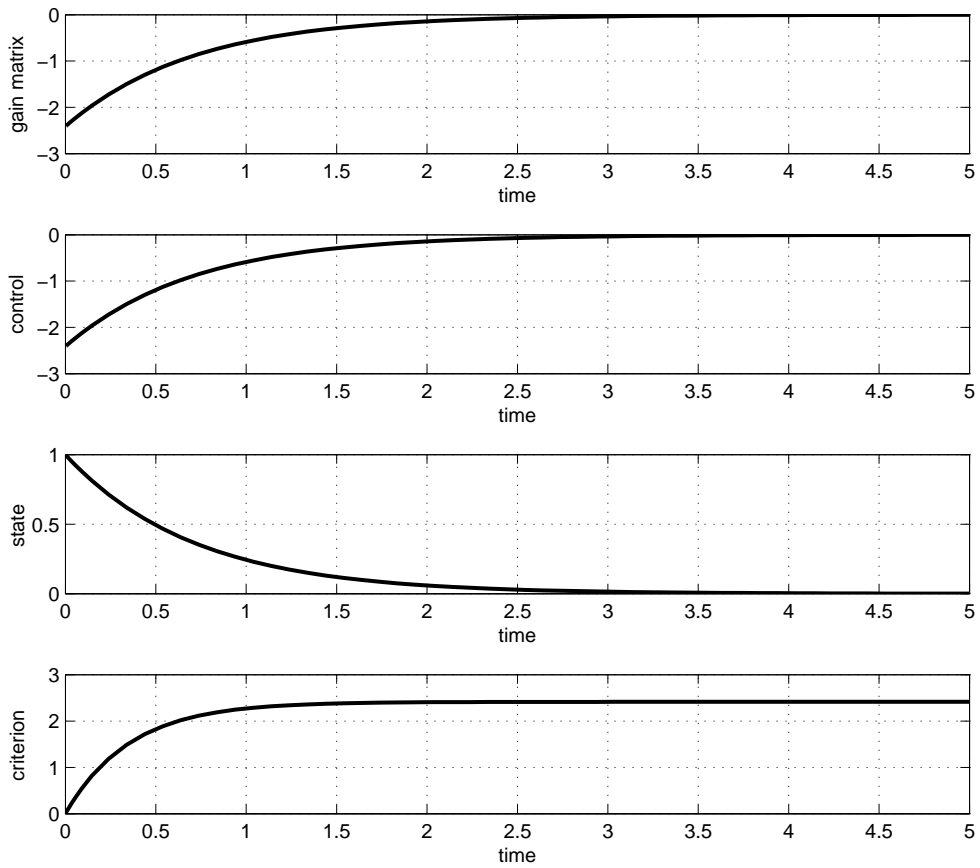


Figura 8.1: Regulador óptimo en modo deslizante con respecto al criterio  $J_1$ . Gráficas de la matriz de ganancia (8.10)  $Q^*(t)$ , el control (8.9)  $u^*(t)$ , el estado (8.7)  $x(t)$ , y el criterio (8.8)  $J_1(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

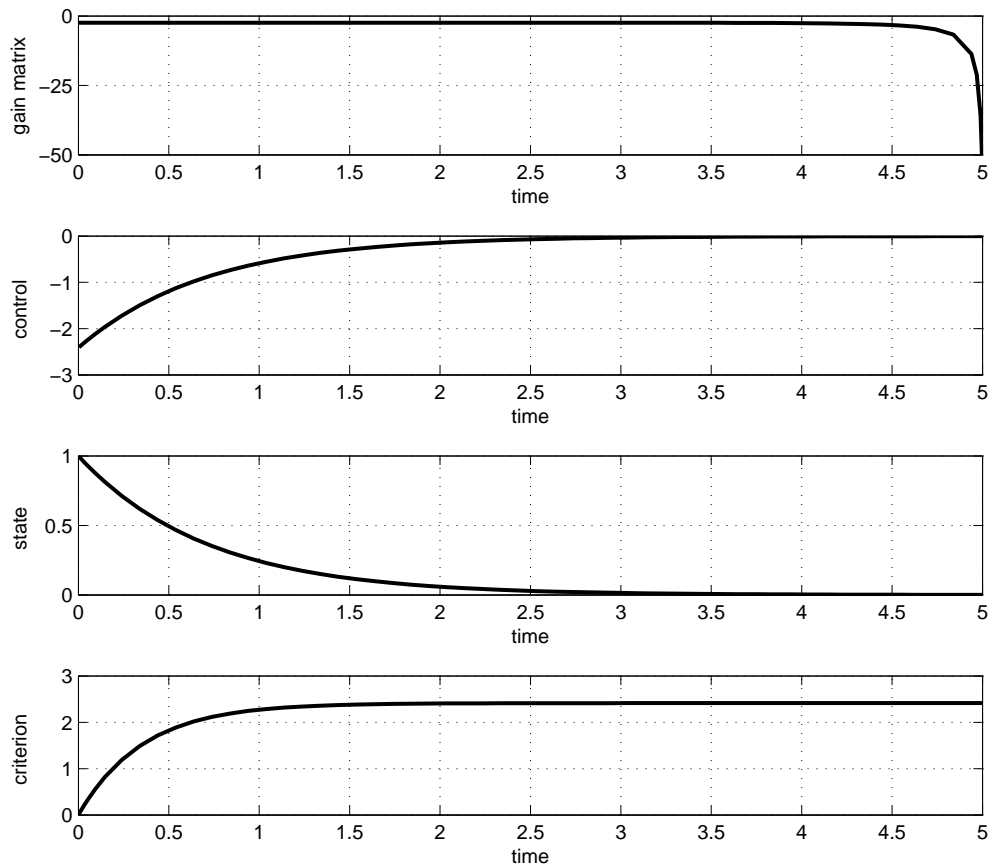


Figura 8.2: Regulador de retroalimentación lineal. Gráficas de la matriz de ganancia (8.14)  $Q(t)$ , el control (8.13)  $u(t)$ , el estado (8.7)  $x(t)$ , y el criterio (8.8)  $J_1(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

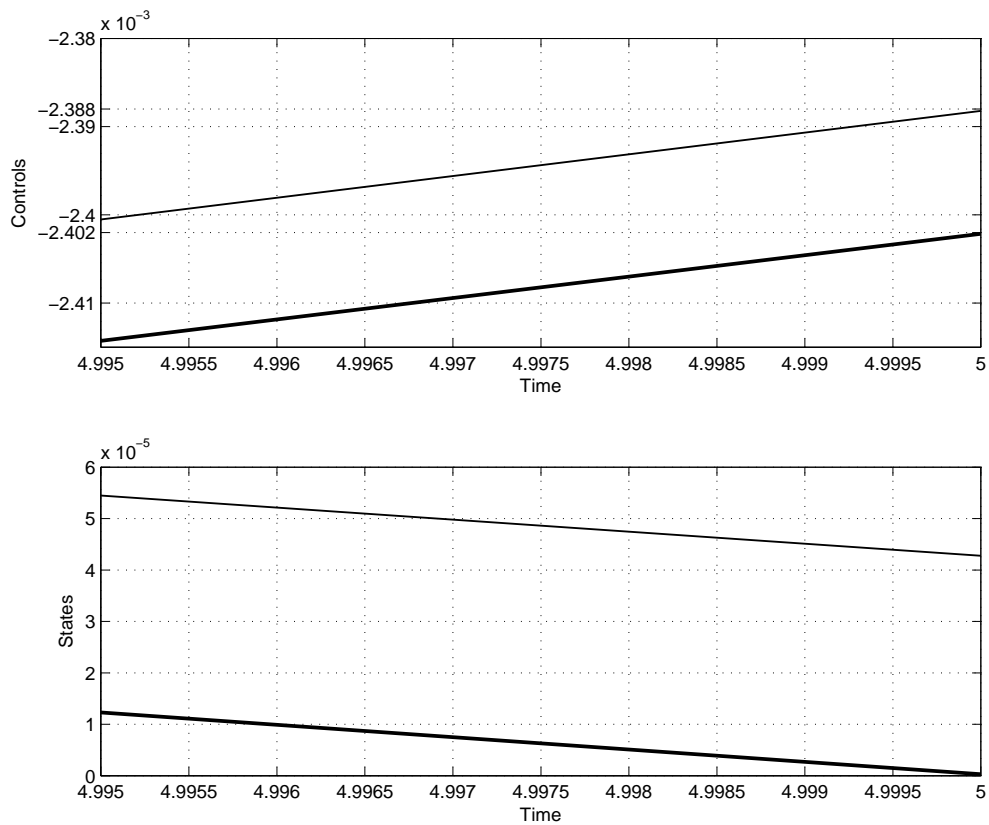


Figura 8.3: Gráficas de las funciones de control (8.9)  $u^*(t)$  (línea gruesa) y (8.13)  $u(t)$  (línea delgada) y las correspondientes trayectorias del estado (8.7)  $x(t)$  en detalle en el intervalo  $[4.995, 5]$ .

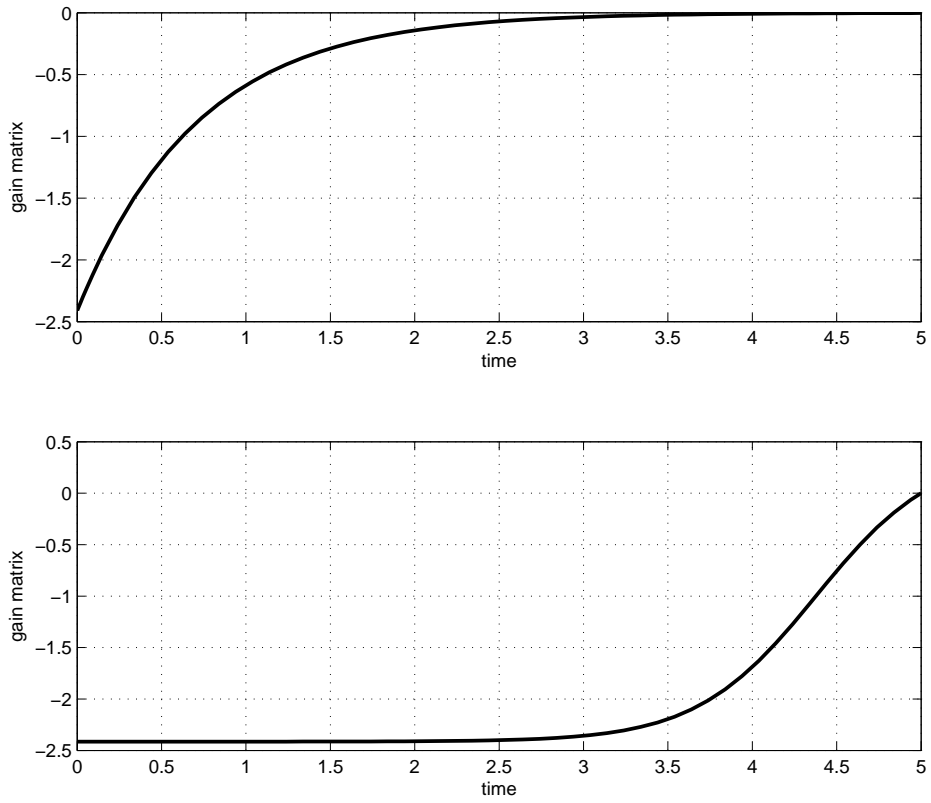


Figura 8.4: Gráficas de las matrices de ganancia  $Q^*(t)$  (arriba) y  $Q(t)$  (abajo) para el criterio (8.16)  $J_1$  sin el término no integral.

# Capítulo 9

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 9.1. Conclusiones

En esta tesis se diseñaron los filtros óptimos para sistemas polinomiales medidos incompletamente sobre observaciones lineales y polinomiales, uno de ellos con ruido multiplicativo. Otro diseño tomado en cuenta es el de un controlador óptimo para sistemas estocásticos lineales con parámetros desconocidos. También se creó un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  subóptimo central para sistemas lineales con retardo en el estado o en la medición y bajo un horizonte de filtrado finito; como el número de ecuaciones de filtrado para tales sistemas crece inacotadamente conforme el horizonte de tiempo tiende a infinito también se diseñó un filtro subóptimo central alternativo, que soporta horizontes de tiempo infinitos. Por último se expuso el diseño de un regulador en modo deslizante para un problema de control óptimo con un criterio no cuadrático. Se detalló el desarrollo de estos diseños y se estableció su base matemática además de la simulación computacional de cada uno y los resultados exhibieron un mejor o similar desempeño que sistemas ya establecidos en la teoría y en la práctica.

### 9.2. Trabajo Futuro

El trabajo futuro consta de los siguientes problemas:

- Diseño del Filtro  $\mathcal{H}_\infty$  Subóptimo Central para Sistemas Lineales Variables en el Tiempo con Retardos en el Estado y en la Medición.
- Diseño del Controlador  $\mathcal{H}_\infty$  Subóptimo Central para Sistemas Lineales con Parámetros Desconocidos.

# Bibliografía

- [1] Ackermann J and Utkin VI. Sliding mode control design based on Ackermann's formula, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.43, pp. 234-237, 1998.
- [2] Alford RL and Lee EB. Sampled data hereditary systems: linear quadratic theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-31, pp. 60-65, 1986.
- [3] Arnold L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, New York: Wiley, 1974.
- [4] Åström KJ. *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press: New York, 1970.
- [5] Azemi A and Yaz E. Sliding mode adaptive observer approach to chaotic synchronization, *ASME Transactions, Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 122, pp. 758-765, 2000.
- [6] Bartolini G, Ferrara A, Levant A and Usai E. On second order sliding mode controllers, In: *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control* (K. D. Young and U. Ozguner, Eds.), *Lecture Notes in Control and Information Series*, Vol. 247, Springer-Verlag, London, pp. 329-350, 1999.
- [7] Basin MV. On optimal filtering for polynomial system states. *ASME Transactions, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* Vol. 125, pp 123-125, 2003.
- [8] Basin MV *et al.* Integral sliding mode design for robust filtering and control of linear stochastic time-delay systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 15, pp. 407-421, 2005.
- [9] Basin MV *et al.* Optimal and robust sliding mode filter for systems with continuous and delayed measurements, *Proceedings of the 41st Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, pp. 2594-2599, 2002.
- [10] Basin MV and Alcorta-Garcia MA. Optimal filtering and control for third degree polynomial systems. *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems*, Vol. 10B, 663-680, 2003.

- [11] Basin MV, Alcorta-Garcia MA and Rodriguez-Gonzalez JG. Optimal filtering for linear systems with state and observation delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 15, pp. 859-871, 2005.
- [12] Basin MV, Fridman LM, Rodriguez-Gonzalez JG and Acosta P. Optimal and robust sliding mode control for linear systems with multiple time delays in control input, *Asian Journal of Control*, Vol. 5, no. 4, pp. 557-567, 2003.
- [13] Basin MV and Martinez-Zuniga R. Optimal linear filtering over observations with multiple delays, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 14, no. 8, pp. 685-696, 2004.
- [14] Basin MV, Perez J and Calderon-Alvarez D. Optimal filtering for linear systems over polynomial observations, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol.4, no.2, pp. 313-320, 2008.
- [15] Basin MV, Perez J and Martinez-Zuniga R, Alternative optimal filter for linear state delay systems, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 20, no. 10, pp. 509-517, 2006.
- [16] Basin MV, Perez J and Skliar M. Optimal filtering for polynomial system states with polynomial multiplicative noise, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 16, pp. 287-298, 2006.
- [17] Basin MV, Perez J and Skliar M. Optimal filtering for polynomial systems with partially measured states and multiplicative noises, *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pp. 4169-4174, 2006.
- [18] Basin MV and Rodriguez-Gonzalez JG. A closed-form optimal control for linear systems with equal state and input delays, *Automatica*, Vol. 41, pp. 915-921, 2005.
- [19] Basin MV and Rodriguez-Gonzalez JG. Optimal control for linear systems with multiple time delays in control input, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 91-96, 2006.
- [20] Basin MV, Rodriguez-Gonzalez J, Fridman L and Acosta P. Integral sliding mode design for robust filtering and control of linear stochastic time delay systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 15 pp. 407-421, 2005.
- [21] Basin MV, Rodriguez-Gonzalez JG and Martinez-Zuniga R. Optimal control for linear systems with time delay in control input, *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 341, no. 3, pp. 267-278, 2004.

- [22] Basin MV, Rodriguez-Gonzalez JG and Martinez-Zuniga R. Optimal filtering for linear state delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-50, pp. 684-690, 2005.
- [23] Basin MV, Sanchez E and Martinez-Zuniga R. Optimal linear filtering for systems with multiple state and observation delays, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol.3, no.5, pp. 1309-1320, 2007.
- [24] Basin MV and Skliar M. Optimal filtering for partially measured polynomial system states, *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, Portland, OR, USA, pp. 4022-4027, 2005.
- [25] Bellman R. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.
- [26] Benes VE. Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift, *Stochastics*, Vol. 5, pp. 65-92, 1981.
- [27] Boiko I, Fridman L, Pisano A and Usai E. Analysis of chattering in systems with second order sliding modes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, pp. 2085-2102, 2007.
- [28] Boukas EK and Liu ZK. *Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems*, Birkhauser, 2002.
- [29] Boukas EK and Liu ZK. Robust  $H_\infty$  filtering for polytopic uncertain time-delay systems with Markov jumps, *Computers and Electrical Engineering*, Vol. 28, pp. 171-193, 2002.
- [30] Castaños F and Fridman L. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 853-858, 2006.
- [31] Chen CT. *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1984.
- [32] Davila J, Fridman L and Poznyak A. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes, *International Journal of Control*, Vol. 79, pp. 1251-1262, 2006.
- [33] Delfour MC. The linear quadratic control problem with delays in space and control variables: a state space approach, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 24, pp. 835-883, 1986.
- [34] Dion JM. *et al.* (Eds.), *Linear Time Delay Systems*, Pergamon, London, 1999.



- [35] Doyle JC, Glover K, Khargonekar PP and Francis BA. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-34, pp. 831-847, 1989.
- [36] Dugard JL and Verriest EI (Eds.), *Stability and Control of Time-Delay Systems*, Springer, 1998.
- [37] Eller DH, Aggarwal JK and Banks HT. Optimal control of linear time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-14, no. 6, pp. 678-687, 1969.
- [38] Fattou A, Sename O and Dion J.  $H_\infty$  observer design for time-delay systems, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, pp. 4545-4546, 1998.
- [39] Fleming WH and McEneaney WM. Robust limits of risk sensitive nonlinear filters, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Vol. 14, pp. 109-142, 2001.
- [40] Fleming FH and Rishel RW. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, 1975.
- [41] Fleming FH and Rishel RW. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [42] Fridman L and Levant A. Higher order sliding modes, In *Sliding Mode Control in Engineering* (W. Perruquetti, J. P. Barbot, Eds.), Marcel Dekker, Inc., pp. 53-101, 2002.
- [43] Fridman E and Shaked U. A new  $H_\infty$  filter design for linear time-delay systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, no. 11, pp. 2839-2843, 2001.
- [44] Fridman E and Shaked U. An improved delay-dependent  $H_\infty$  filtering of linear neutral systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 52, pp. 668-673, 2004.
- [45] Fridman E and Shaked U. On regional nonlinear  $H_\infty$  filtering, *Systems and Control Letters*, Vol. 29, pp. 233-240, 1997.
- [46] Fridman E, Shaked U and Xie L. Robust  $H_\infty$  filtering of linear systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 159-165, 2003.
- [47] Gao H, Lam L and Wang C. Robust energy-to-peak filter design for stochastic time-delay systems, *Systems and Control Letters*, Vol. 55, pp. 101-111, 2006.
- [48] Gao H, Lam J, Xie L, and Wang C. New approach to mixed  $H_2/H_\infty$ -filtering for polytopic discrete-time systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, pp. 3183-3192, 2005.
- [49] Gao H, Meng X and Chen T. A new design of robust  $H_2$  filters for uncertain systems, *Systems and Control Letters*, DOI: 10.1016/j.sysconle.2007.12.008.

- [50] Gao H and Wang C. A delay-dependent approach to robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 52, pp. 1631-1640, 2004.
- [51] Gao H and Wang C. Delay-dependent robust  $H_\infty$  and  $L_2$ - $L_\infty$  filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 1661-1666, 2003.
- [52] Gu K and Niculescu SI. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems, *ASME Transactions, Journal of Dynamic, Systems, Measurements and Control*, Vol. 125, no. 2, pp. 158-165, 2003.
- [53] Hazewinkel M, Marcus SI and Sussmann HJ. Nonexistence of exact finite-dimensional filters for conditional statistics of the cubic sensor problem. *Systems and Control Letters*, Vol. 5, pp. 331-340, 1983.
- [54] Hsiao FH and Pan ST. Robust Kalman filter synthesis for uncertain multiple time-delay stochastic systems, *ASME Transactions. Journal of Dynamic, Systems, Measurements and Control*, Vol. 118, pp. 803-807, 1996.
- [55] Jazwinski AH. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press: New York, 1970.
- [56] Jin SH and Park JB. Robust  $H_\infty$  filtering for polytopic uncertain systems via convex optimization, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 148, pp. 55-59, 2001.
- [57] Kallianpur G. *Stochastic Filtering Theory*, Springer, 1980.
- [58] Kalman RE and Bucy RS. New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Transactions, Part D (Journal of Basic Engineering)*, Vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [59] Kim JH. Robust  $H_\infty$  and guaranteed-cost filter designs for uncertain time-varying delay systems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 34, pp. 485-493, 2003.
- [60] Koivo HN. Least-squares estimator for hereditary systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 4, pp. 275-283, 1974.
- [61] Kolmanovskii VB and Myshkis AD. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer, New York, 1999.
- [62] Kolmanovskii VB and Shaikhet LE. *Control of Systems with Aftereffect*, American Mathematical Society, Providence, 1996.
- [63] Kushner HJ. On differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, *SIAM Journal on Control*, Vol. 12, pp. 106-119, 1964.

- [64] Kwakernaak H and Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
- [65] Kwakernaak H. Optimal filtering in systems with time delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 19, pp. 169-173, 1974.
- [66] Kwakernaak H and Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [67] Kwon OM and Park JH. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain time-delay systems: Matrix inequality approach, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 129, pp. 309-324, 2006.
- [68] Liptser RS and Shiriyayev AN. *Statistics of Random Processes. Vol. I: General Theory*, Springer-Verlag, 2000 (1st. Ed., 1974).
- [69] Malek-Zavarei M and Jamshidi M. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [70] Mahmoud MS. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Marcel Dekker, 2000.
- [71] Mahmoud M and Shi P. Robust Kalman filtering for continuous time-lag systems with Markovian jump parameters, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 50, pp. 98-105, 2003.
- [72] Mahmoud MS, Shi P and Ismail A. Robust  $H_\infty$  filtering for a class of linear jumping discrete-time delay systems, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems, Series B*, Vol. 10, pp. 647-662, 2003.
- [73] Mao X. *Stochastic Differential Equations and Their Applications*, Chichester: Horwood, 1997.
- [74] McEneaney WM. Robust/ $H_\infty$  filtering for nonlinear systems, *Systems and Control Letters*, Vol. 33, pp. 315-325, 1998.
- [75] Nagpal KM and Khargonekar PP. Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-36, pp. 152-166, 1991.
- [76] Nguang SK and Fu MY. Robust nonlinear  $H_\infty$  filtering, *Automatica*, Vol. 32, pp. 1195-1199, 1996.
- [77] Niculescu SI. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Springer, Heidelberg, 2001.
- [78] Oksendal B. *Stochastic Differential Equations*. Springer: Berlin, 2006.

- [79] Papoulis A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc.Graw-Hill, New York, USA, 1965.
- [80] Pila A, Shaked U and De Souza CE.  $H_\infty$  filtering for continuous-time linear systems with delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, pp. 1412-1417, 1999.
- [81] Pontryagin LS, Boltyanskii VG, Gamkrelidze RV and Mishchenko EF. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley and sons, Inc., 1962.
- [82] Pugachev VS. *Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers*, Pergamon, 1984.
- [83] Pugachev VS and Sinityn IN. *Stochastic Differential Systems: Analysis and Filtering*, World Scientific, 1987.
- [84] Pugachev VS and Sinityn IN. *Stochastic Systems: Theory and Applications*, World Scientific, 2001.
- [85] Richard JP. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, Vol. 39, no. 10, pp. 1667-1694, 2003.
- [86] Rudin W. *Análisis Real y Complejo*, Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill, 1988.
- [87] Shaked U.  $H_\infty$  minimum error state estimation of linear stationary processes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, pp. 554-558, 1990.
- [88] Sheng J. Optimal filtering for multirate systems based on lifted models. *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, Portland, OR, USA, pp. 3459-3461, 2005.
- [89] Sheng J, Chen T and Shah SL. Optimal filtering for multirate systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 52, pp. 228-232, 2005.
- [90] Shi P. Filtering on sampled-data systems with parametric uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, pp. 1022-1027, 1998.
- [91] Shi P, Mahmoud MS, Nguang S and Ismail A. Robust filtering for jumping systems with mode-dependent delays, *Signal Processing*, Vol. 86, pp. 140-152, 2006.
- [92] Shtessel YB, Zinober ASI and Shkolnikov I. Sliding mode control for nonlinear systems with output delay via method of stable system center, *ASME Transactions, Journal of Dynamic, Systems, Measurements and Control*, Vol. 125, pp. 253-257, 2003.
- [93] De Souza CE, Palhares RM and Peres PLD. Robust  $H_\infty$  filtering design for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, pp. 569-576, 2001.

- [94] Stratonovich RL. A New Representation for Stochastic Integrals and Equations, *SIAM Journal of Control*, Vol. 4 No. 2, pp. 362-371, 1966.
- [95] Suzuki Pan SY, Furuta K and Hatakeyama S. VS-control with time-varying sliding sector: Design and application to pendulum, *Asian Journal of Control*, Vol. 6, pp. 307-316, 2004.
- [96] Tanikawa A. On new smoothing algorithms for discrete-time linear stochastic systems with unknown disturbances, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol.4, no.1, pp.15-24, 2008.
- [97] Tucker HG. *A Graduate Course in Probability*. Academic Press: New York, 1967.
- [98] Uchida K, Shimemura E, Kubo T and Abe N. The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay, *Automatica*, Vol. 24, no. 6, pp. 773-780, 1988.
- [99] Utkin VI. *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer, Berlin, 1992.
- [100] Utkin VI, Guldner J and Shi J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor and Francis, London, 1999.
- [101] Utkin VI and Shi L. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions, *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 4591-4596, 1996.
- [102] Wang ZD et al., Robust  $H_\infty$  filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 54, pp. 2579-2587, 2006.
- [103] Wonham WM. Some applications of stochastic differential equations to nonlinear filtering, *SIAM Journal on Control*, Vol. 2 1965.
- [104] Xia Y and Jia Y. Robust sliding mode control for uncertain stochastic time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 1086-1092, 2003.
- [105] Xie LH. De Souza CE and Wang YY. Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, pp. 297-312, 1996.
- [106] Xu SY. Robust  $H_\infty$  filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Vol. 49, pp. 1853-1859, 2002.
- [107] Xu SY and Chen TW.  $H_\infty$  model reduction in the stochastic framework, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 42, pp. 1293-1309, 2003.
- [108] Xu SY and Chen TW. Robust  $H_\infty$  control for uncertain stochastic systems with state delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, pp. 2089-2094, 2002.

- [109] Xu SY and Chen TW. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements, *Automatica*, Vol. 39, pp. 509-516, 2003.
- [110] Xu SY, Chen TW and Lam L. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 900-907, 2003.
- [111] Xu SY and Chen TW. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain stochastic time delay systems, *Asian Journal of Control*, Vol. 5, pp. 364-373, 2003.
- [112] Xu SY, Lam J, Gao HJ and Zhou Y. Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete stochastic systems with time delays, *Circuits, Systems and Signal Processing*, Vol 24, pp. 753-770, 2005.
- [113] Xu S and van Dooren PV. Robust  $H_\infty$  filtering for a class of nonlinear systems with state delay and parameter uncertainty, *International Journal of Control*, Vol. 75, pp. 766-774, 2002.
- [114] Yaesh I and Shaked U. Game theory approach to optimal linear estimation in the minimum  $H$ -infinity norm sense, *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, pp. 421425, 1989.
- [115] Yau SST. Finite-dimensional filters with nonlinear drift I: a class of filters including both Kalman-Bucy and Benes filters. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, Vol. 4, pp. 181-203, 1994.
- [116] Yaz E and Yaz Y. State estimation of uncertain nonlinear systems with general criteria, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 14, pp. 605-610, 2001.
- [117] Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, pp. 301- 320, 1981.
- [118] Zhang H, Basin MV and Skliar M. Itô-Volterra optimal state estimation with continuous, multirate, randomly sampled, and delayed measurements, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, 401-416, 2007.
- [119] Zhang WH, Chen BS and Tseng CS. Robust  $H_\infty$  filtering for nonlinear stochastic systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, pp. 589-598, 2005.
- [120] Zhang HS et al.,  $H_\infty$  filtering for multiple time-delay measurements, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 54, pp. 1681-1688, 2006.

- [121] Zhang HS, Lu X and Cheng D. Optimal estimation for continuous-time systems with delayed measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 823-827, 2006.
- [122] Zhang L, Shi P, Wang C and Gao H. Robust  $H_\infty$  filtering for switched linear discrete-time systems with polytopic uncertainties, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 20, pp. 291-304, 2006.
- [123] Zhong X, Xing H and Fujimoto K. Sliding mode variable structure control for uncertain stochastic systems, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol.3, no.2, pp. 397-406, 2007.