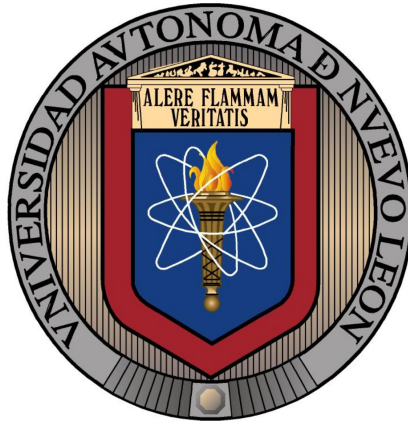


Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas



Tesis

Teoría y Simulación de Caminatas Aleatorias
para Procesos de Difusión

Por

Francisco Javier Betancourt Sotomayor

Como requisito parcial para obtener el grado de
Maestría en Ciencias con Orientación
en Matemáticas

Agosto 2017

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas



Tesis

Teoría y Simulación de Caminatas Aleatorias
para Procesos de Difusión

Por

Francisco Javier Betancourt Sotomayor

Como requisito parcial para obtener el grado de
Maestría en Ciencias con Orientación
en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León.

Agosto 2017

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del comité de tesis de la subdirección de posgrado de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, recomendamos que la tesis “**Teoría y Simulación de Caminatas Aleatorias para Procesos de Difusión**” realizada por el Lic. Francisco Javier Betancourt Sotomayor, con número de matrícula 0813671, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. Francsico Javier Almaguer Martínez
Asesor

Dr. Francisco Hernández Cabrera
Secretario

Dr. María Esther Grimaldo R.
Vocal

Vo.Bo.

Dr. Francsico Javier Almaguer Martínez
Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación
en Matemáticas

Resumen

Cuando se trabaja con procesos fuera de equilibrio, desde el punto de vista probabilístico, es usual comenzar con un proceso aleatorio discreto conocido como caminata aleatoria, luego, de ahí, obtener la ecuación de difusión. Una característica de la difusión es el desplazamiento cuadrático medio (msd) el cual es proporcional al tiempo y es de la forma t^α . Uno de los problemas de la difusión es establecer de qué manera crece el msd en el tiempo, esto es, qué valor tiene α . Si $\alpha = 1$ se conoce como difusión normal, si $\alpha > 1$ superdifusión y si $0 < \alpha < 1$ subdifusión.

En este trabajo se presenta una síntesis de la teoría ya conocida para la construcción y solución de la ecuación de una caminata aleatoria (RW), que es un proceso discreto en el tiempo, y que aproxima el proceso de difusión. A partir de esta ecuación se obtiene y resuelve la ecuación de difusión.

La solución de la ecuación de difusión presenta una tasa de propagación infinita, esto es, da lugar a desplazamientos instantáneos (aunque con poca probabilidad). Un proceso discreto llamado caminata aleatoria con persistencia (PRW) que en su versión continua da lugar a la ecuación del telegrafista tiene como característica un frente de propagación finito, se recapitula la obtención de esta ecuación y su solución.

Así mismo, se revisa la caminata aleatoria de Weierstrass (WRW) la cual es discreta en el tiempo, y que dependiendo de los valores de sus parámetros describe un proceso de superdifusión.

De igual modo, utilizando los casos típicos en la literatura del tema, se muestra cómo obtener los tres tipos de difusión mediante una versión general (un proceso continuo en el tiempo) de la caminata aleatoria conocida como caminata aleatoria en tiempo continuo (CTRW).

Así, mediante un proceso continuo en el tiempo (CTRW) se obtienen los tres tipos de difusión y mediante procesos discretos (RW y WRW) se obtiene la difusión normal y la superdifusión respectivamente. Existe una manera indirecta de obtener un proceso de subdifusión utilizando un proceso discreto, conocido como caminata aleatoria balística (BRW), se menciona de manera breve en qué consiste y queda abierta la cuestión acerca de si existe la posibilidad de obtener una ecuación general para procesos discretos equivalente a la caminata aleatoria en tiempo continuo.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Estructura	10
1.2. Generalidades	12
1.3. Antecedentes	16
2. La Caminata Aleatoria	23
2.1. Un Enfoque Discreto, la Caminata Aleatoria	23
2.2. El Paso al Continuo, la Ecuación de Difusión	32
2.3. Persistencia y Ecuación del Telegrafista	39
2.4. Caminata Aleatoria de Weierstrass	45
2.5. Caminata Aleatoria Balística	49
3. La Caminata Aleatoria en Tiempo Continuo	51
3.1. Ecuación y su Solución General	51
3.2. El Cálculo Fraccional	56
3.3. Distintos Tipos de Difusión	59
4. Conclusiones y Discusión	75
5. Apéndice	77
5.1. Obtención de la ecuación de recurrencia 2.7	77
5.2. Sobre el cambio de variable en la ecuación del telegrafista	79
5.3. Solución de la ecuación del telegrafista	80
5.4. Las funciones η y ψ en el espacio Laplace-Fourier	83
5.5. Funciones Especiales	84
5.5.1. La integral y la transformada de Mellin	84
5.5.2. La Función Hipergeométrica	84
5.5.3. La Función G	85
5.5.4. La Función H	85
5.5.5. La Función de Mittag-Leffler	86

Capítulo 1

Introducción

A partir de la formalización de la teoría de la probabilidad junto con la aparición de la mecánica estadística, ambas a principios de siglo XX, ha tomado gran importancia el concepto de aleatoriedad en los fenómenos físicos.

Para una partícula dada es posible describir casi cualquier fenómeno en el que esté involucrada ya que se conocen bien, por ejemplo, las leyes del electromagnetismo, mecánica cuántica y gravitación; ahora bien, la situación cambia cuando es considerada como parte de un sistema macroscópico típico (alrededor de 10^{23} partículas).

El uso de herramientas estadísticas y/o probabilísticas se hace necesario en estos sistemas con gran cantidad de partículas involucradas (que interactúan entre sí) de manera que al considerar la parte aleatoria o término estocástico nos proporcione un mejor entendimiento de un proceso físico.

Este es el caso de la difusión que se define como un movimiento o transporte de partículas (o energía) debido a una diferencia en la concentración de éstas.

Una característica importante de la difusión de partículas es qué tanto se dispersan conforme avanza el tiempo t y una forma de cuantificarlo es por medio del desplazamiento cuadrático medio, esto es, qué tanto se alejan las partículas con respecto al promedio de los desplazamientos finales.

Este desplazamiento cuadrático medio (msd por sus siglas en inglés) es, en general, proporcional a t^α donde t es tiempo y si $\alpha = 1$ se le llama difusión normal (o estándar) y cuando $\alpha > 0$ y distinto de 1 se le llama difusión anómala [22,24].

En este trabajo presentamos a modo de resumen, basados en [40], la obtención y resolución de la ecuación de la difusión utilizando un proceso aleatorio discreto, conocido como caminata aleatoria la cual se puede visualizar tomando en cuenta que, un camino aleatorio es la trayectoria que seguiría una partícula si estuviera destinada a moverse dando pasos, o saltos, cada uno en una dirección aleatoria(ver Figura 1.1).

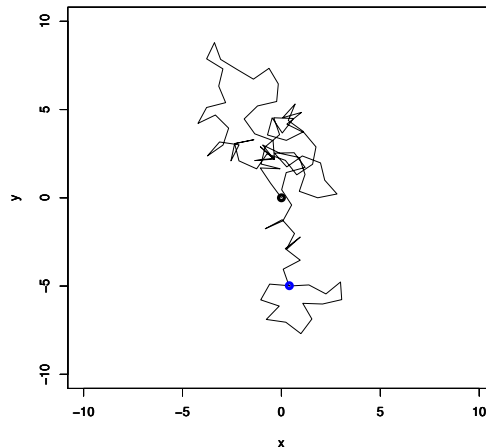


Figura 1.1: Camino aleatorio de una partícula restringida al plano XY en el cual efectuó 150 pasos con dirección aleatoria θ tomada de una distribución uniforme de números entre 0 y 2π , esto es, $\theta \sim U(0, 2\pi)$. En color negro se muestra el inicio y el punto color azul la posición final.

1.1. Estructura

Mediante el uso de caminatas aleatorias es posible plantear ecuaciones de difusión para el caso en una dimensión, de aquí que el objetivo de este trabajo es mostrar el marco teórico existente para caracterizar el proceso de difusión, partiendo de modelos discretos que lo aproximen, así mismo la obtención de los distintos tipos de difusión y poder generar códigos que simulen estos procesos.

En este trabajo se muestra cómo obtener y resolver la ecuación de la difusión utilizando un proceso aleatorio discreto, conocido como caminata aleatoria. En el capítulo 2 se define formalmente ésta, se construye y resuelve la ecuación que la describe. Esta ecuación por su construcción es una ecuación en diferencias que en el caso límite deriva en la ecuación de difusión. En la sección 2.2 se obtiene dicha ecuación y su solución.

En la sección 2.3 se describe la caminata aleatoria con persistencia junto con su caso límite, conocido como la ecuación del telegrafista, mientras que en la sección 2.4 a partir de la caminata aleatoria de Weierstrass se obtiene un proceso en el régimen superdifusivo.

Se hace una revisión de la caminata aleatoria en tiempo continuo en el capítulo 3, siendo su formulación, en particular, la que lleva a distintos tipos de difusión, dependiendo del tipo de distribución que se utilice, los cuales se conocen como normal y anómala. Se muestra mediante tres ejemplos, ya conocidos en la literatura, estos tres tipos de difusión.

En la figura 1.2 se muestra la estructura mencionada anteriormente haciendo

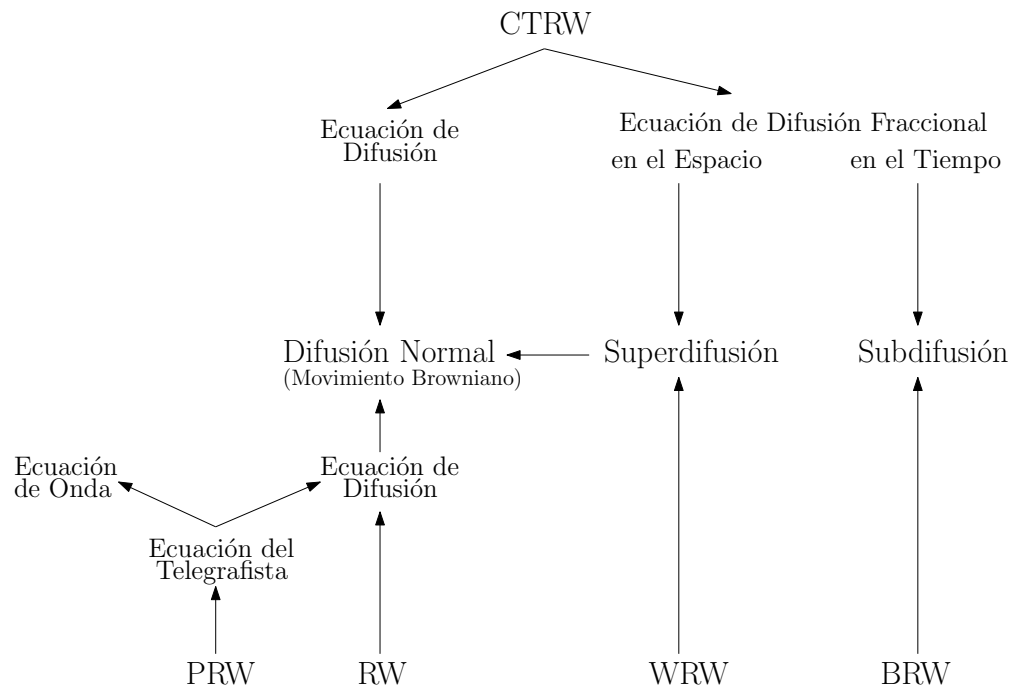


Figura 1.2: Estructura de este trabajo. Partiendo de una caminata aleatoria (extremos superior o inferior) se llega a un proceso de difusión (centro). En algunas caminatas (ecuación en diferencias) es posible, mediante un paso al continuo, obtener una ecuación de difusión (ecuación diferencial). Caminata Aleatoria (RW), de Weierstrass (WRW), Balística (BRW), con Persistencia (PRW), en Tiempo Continuo (CTRW).

énfasis en que mediante un proceso continuo en el tiempo se pueden obtener tres tipos de difusión y a su vez mediante procesos discretos en tiempo y espacio se obtienen estos tres procesos de difusión.

1.2. Generalidades

Entonces, en una caminata aleatoria, la partícula puede tomar cualquier dirección, por lo que esta dirección es la variable aleatoria del proceso pero, no es la única aleatoriedad posible, también puede ser el tamaño del salto, o el tiempo que tarde en completar el salto, una formulación general de la caminata aleatoria, conocida como caminata aleatoria en tiempo continuo, implica partículas que no solo toman una dirección al azar, sino que además, la partícula entre cada salto puede, o no, mantenerse en reposo un cierto tiempo el cual puede ser cualquier valor distinto cada vez.

El que esta formulación general permita considerar distintos tipos de distribución de probabilidad en el tamaño de salto y/o en los intervalos de tiempo entre cada salto es lo que da lugar a distintos tipos de difusión, ya sea normal o anómala.

Existen muchos tipos de caminata aleatoria, los cuales dependen del tipo de restricción que se tenga, y lo importante en ellas, como ya se mencionó arriba, es qué tanto se desplazan las partículas, o bien, en dónde están después de cierto tiempo en particular, y es natural preguntarse: si se tiene una partícula que realiza una caminata aleatoria, y después de cierto tiempo se encuentra a cierta distancia del origen. ¿Se podrá tener una caminata distinta la cual permita que esta partícula en el mismo intervalo de tiempo, en promedio, se encuentre más alejada del origen que en el caso anterior? ¿Es posible tener una restricción la cual no permita que dicha partícula se desplace a grandes distancias en tiempos muy cortos lo cual implicaría grandes velocidades que, a la vez, permitirían cualquier valor de éstas incluyendo mayores que el de la velocidad de la luz?

Es posible describir un tipo particular de caminata aleatoria en donde, para la partícula hay una cierta tendencia a permanecer en la dirección en que se está moviendo, recibe el nombre de caminata aleatoria con persistencia la cual se estudia junto con su caso límite, conocido como la ecuación del telegrafista. Esta ecuación describe un tipo de difusión la cual tiene, entre otras características, un frente de propagación finito, esto es, partículas que no se desplazan grandes distancias en tiempos cortos.

Cuando hablamos de desplazamiento de una partícula, se requiere considerar el tiempo que tarda en hacerlo, y en la difusión no es la excepción, de este modo, la velocidad de la luz es una restricción deseable a considerar en ciertos fenómenos.

Establecer una generalización de modelos de difusión en un marco de referencia relativista es un problema abierto e involucra estudiar el proceso de difusión desde el punto de vista de las ecuaciones de Langevin relativistas, esto es ecuaciones diferenciales estocásticas, y obtener sus respectivas ecuaciones de Fokker-Plank, además de considerar este proceso de difusión relativista en un espacio-tiempo de Minkowski, para un estudio detallado de este proceso de difusión relativista se puede consultar a [13].

Aunque en este trabajo no se toca el punto de vista relativista se puede, utilizando una distribución de probabilidad llamada de Weierstrass, obtener una caminata aleatoria que enseguida se extiende a una versión relativista que restringe la velocidad de los desplazamientos al límite c de la velocidad de la luz [38].

En particular, siguiendo a [2, 38], de la caminata aleatoria de Weierstrass se puede obtener un régimen superdifusivo. Siendo la caminata de Weierstrass y la caminata aleatoria simple procesos discretos sólo faltaría obtener subdifusión mediante otro proceso discreto. Por el momento sólo es posible esto indirectamente mediante una caminata llamada caminata aleatoria balística (BRW) [31] la cual se describe de manera somera.

Queda abierta la pregunta, ¿existe un proceso discreto del cual se pueda obtener una caminata aleatoria que presente un comportamiento subdifusivo? Y buscando una generalización, ¿se puede obtener una caminata aleatoria, como proceso discreto, de la cual dependiendo del tipo de distribución utilizada, se pueda obtener uno de los tres tipos de difusión?

Fenómenos difusivos

La difusión está asociada con cualquier proceso en el que ocurre un desplazamiento de partículas de un lugar a otro como por ejemplo la difusión de dos volúmenes de gases en contacto [18] o bien soluciones en agua [19].

Un fenómeno más complejo ocurre si se tiene un fluido en un medio en el cual al moverse se encuentra con obstáculos en su camino como ocurre con el gas atrapado en el subsuelo o el proceso de filtración de agua. Se dice que ocurrió una percolación cuando el fluido comenzando de un origen atraviesa todo el medio.

Visto como una caminata aleatoria ocurre cuando para una partícula que se desplaza en una retícula ésta tiene algunos nodos o sitios prohibidos (no se pueden ocupar), ver Figura 1.3. Se le llama cluster a dos o más nodos vecinos accesibles conectados y, conforme la cantidad de nodos accesibles aumenta, dos o más clusters se unen formando un cluster de tamaño mayor (finito). Se dice que aparece un cluster infinito cuando la densidad de sitios o nodos accesibles supera un cierto valor crítico, en este caso ocurre la percolación [21, 25].

En la percolación el medio en el que se desplaza la partícula es no-homogéneo, esto es, de todos los nodos que forman la retícula en la que se mueve la partícula algunos son accesibles y otros están prohibidos. Esta proporción de nodos accesibles/prohibidos permanece constante durante todo el proceso. Se puede, por tanto, considerar el caso general (el cual no se tratará en este trabajo) en donde el medio es no-homogeneo y además cambia de manera aleatoria con el tiempo, esto significa que en cada salto la retícula es distinta, a este proceso se le conoce como caminata aleatoria en un medio aleatorio [9].

Un ejemplo donde se utiliza un proceso de percolación es en la propagación de

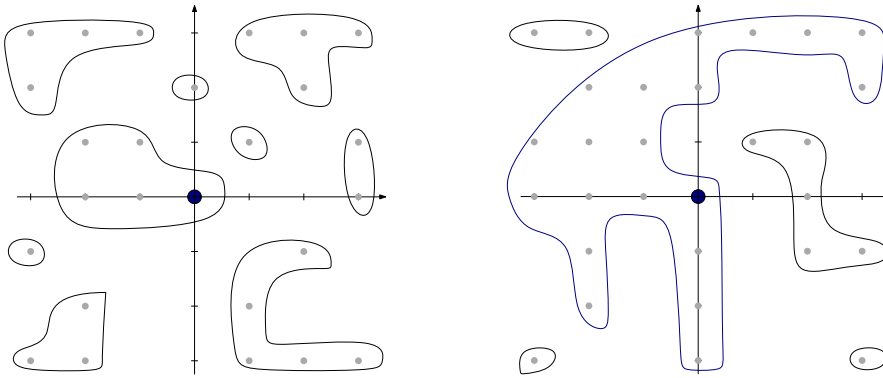


Figura 1.3: Se tiene una región en el plano XY formada por una retícula de tamaño $N \times N$ en donde se han retirado algunos nodos para indicar que son inaccesibles para la partícula. Izquierda, retícula con baja densidad de nodos accesibles. Se tienen únicamente clusters finitos y una partícula que efectúa una caminata aleatoria iniciando en el origen nunca abandona la región. Derecha, al incrementarse los nodos accesibles, aparece un cluster infinito (color azul) en el cual la partícula puede moverse y atravesar la región. Únicamente en la situación del lado derecho ocurre la percolación.

incendios [6], donde incendio se entiende como propagación de fuego sin control, aquí la propagación está restringida a los materiales que se encuentran alrededor del fuego, sean combustibles o no, de aquí que el fuego pueda “saltar” o propagarse únicamente a ciertos lugares permitidos.

Existen diversos ejemplos de fenómenos en los cuales la difusión no es tan evidente como los siguientes.

Un ejemplo de estos es el análisis de imágenes de resonancia magnética funcional de diferentes regiones del cerebro bajo condiciones de reposo [11]. Aquí la dinámica de las variaciones de la señal se consideran como un movimiento estocástico y se estudian a través de una ecuación diferencial estocástica de Langevin generalizada que combina una componente determinista con una componente estocástica la cual proviene de una fuente de ruido que se considera como una distribución α -estable. Las distribuciones α -estables se relacionan con la difusión anómala.

Por otro lado, en astronomía, se le llama medio interestelar (MI) a la materia que se encuentra entre dos puntos en el universo, como lo puede ser entre una estrella y nuestro planeta, esta materia puede estar formada por partículas de polvo, gases o rayos cósmicos entre otros.

La propagación de ondas emitidas por pulsares en el medio interestelar es afectada (refractada) por inhomogeneidades de la densidad de electrones [8] de modo que la intensidad de los pulsos fluctúa con el tiempo, y estos pulsos son usados para conocer la distribución de la densidad de electrones en el MI.

Estas fluctuaciones, para que sean consistentes con el modelo estándar deben seguir estadísticas no-gaussianas, las cuales implican difusión anómala.

En física atómica, un método experimental conocido como enfriamiento láser (del inglés, laser cooling) [4, 7] se utiliza en gases para obtener muestras de átomos a temperaturas en el rango de microkelvin y nanokelvin y consiste en la disminución del momento de los átomos como consecuencia del intercambio de momento entre los átomos y los fotones del láser.

Existe otro método como consecuencia del enfriamiento láser por retroceso (del inglés, subrecoil laser cooling) en el cual se reduce el momento p de los átomos a una cantidad menor que el de un fotón, y esto se logra generando una dependencia del momento con la tasa de dispersión del fotón de modo que disminuya fuertemente en la vecindad de $p = 0$. Cuando esto se logra, el átomo tiende a permanecer ahí por un largo tiempo debido a que la tasa de dispersión es muy baja.

Por tanto, los átomos se acumulan con un momento pequeño, lo cual contribuye a enfriar el sistema.

En ambos mecanismos, la repetición de absorción-emisión espontánea dan lugar a una caminata aleatoria de momentos p del átomo, la dinámica de esta caminata en particular se genera mediante una distribución de Lévy en los tiempos de estancia en los estados con $p = 0$ la cual involucra procesos de difusión anómala.

El grafeno es un material formado de monocapas de átomos de carbono en donde éstos se arreglan en una red hexagonal por la cual los portadores de carga se propagan.

La combinación de una dinámica estocástica y una relativista en el movimiento de los portadores de carga [36] es aplicada al fenómeno de transporte.

En este caso la dinámica de los portadores de carga en un chip de grafeno se formula como una ecuación de Langevin relativista.

La difusión está presente en muchos fenómenos físicos, en algunos casos su presencia es evidente (como en la difusión de sustancias o la percolación), pero en ocasiones no es sencillo de deducir (intensidad de un pulso electromagnético, fluctuaciones de precios, enfriamiento de átomos, intensidad de la amplitud de sonidos, propagación de incendios), creemos que familiarizarse con el fenómeno comenzando con la concepción más sencilla podrá ayudar a detectar procesos difusivos aunque no sean del todo muy claros.

El presente pretende ser un primer escalón en la comprensión de un fenómeno que, por su ubicuidad, puede ser de gran interés para un abanico muy grande de disciplinas de estudio.

1.3. Antecedentes

Diferentes problemas, mismo fenómeno subyacente

El problema de la difusión, cuya formulación matemática se remonta a mediados del siglo XIX, puede abordarse desde muy variados puntos de vista como se verá en seguida, entre ellos se encuentra el punto de vista de la caminata aleatoria, el cual será utilizado en este trabajo.

Fourier y la Ley de Fick

En 1855, Adolph Fick, conociendo la teoría del calor, fundamentada por Fourier y aplicada por Ohm para explicar la difusión de la electricidad en un conductor, y unos estudios publicados varios años antes por Graham sobre la difusibilidad de distintas sales en agua, supuso [15] que la ley que rige la difusión de sal en un solvente debía ser idéntica a la que ocurre con la difusión de calor en un cuerpo conductor, esto es

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -k \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}, \quad (1.1)$$

donde k es una constante que depende de la naturaleza de las sustancias. Fick define a $y = f(x, t)$ como la concentración de sal en una solución de agua y la considera constante en cada estrato (o capa) horizontal elemental. Ésta concentración es función de la altura x del estrato tomando como referencia algún otro estrato considerado como el plano horizontal.

Del estrato entre dos planos x y $x + dx$ pasará al estrato inmediato superior cierta cantidad de sal durante un intervalo de tiempo dt .

A grandes rasgos, fue Fick quien estableció la ecuación de difusión utilizando la ley fundamental, como la llama en ese trabajo, para la difusión de corriente de Fourier.

Bachelier y las “radiaciones” en la bolsa de valores

A principios del siglo XX, el fenómeno de la difusión fue utilizado para tratar el problema de las fluctuaciones en precios de los mercados de valores y el éxito en esta aplicación marcó una pauta para estudiar toda una nueva gama de problemas análogos en los que aparecen términos estocásticos.

En 1900 Louis Bachelier, matemático francés, en su tesis titulada la Teoría de la Especulación [3] llegó a la misma ecuación de Fourier, Eq. (1.1), de una manera en la que queda clara la ubicuidad del fenómeno de la difusión. En este estudio los movimientos, o fluctuaciones, de precios en la bolsa de valores.

Estas fluctuaciones son debidas a causas naturales y artificiales, y además, el movimiento no sólo es función de las fluctuaciones previas sino que también lo

es de la posición actual del mercado [3](p.1).

Y, como lo hace notar Bachelier, “la determinación de estas fluctuaciones es debida a un número infinito de factores, es por tanto, imposible esperar matemáticamente un pronóstico exacto” [3](p.1).

Usando la Teoría de la Probabilidad, la cual no había sido aplicada en este problema, y después de listar algunas definiciones teóricas relativas al tema, aborda la definición de probabilidades en las operaciones de la bolsa de valores, entre ellas la ley de probabilidad de los mercados la cual era el objeto de estudio.

De todos los resultados destaca una ley que, análoga a la ley de difusión en física, llama *Ley de Radiación (o Difusión) de Probabilidad*, en particular esta ley la deriva partiendo de una caminata aleatoria, aunque no lo menciona como tal.

En seguida obtiene una ecuación, análoga a la de Fourier, en la que \mathcal{P} es la probabilidad de que el precio x se encuentre en el tiempo t en el intervalo (x, ∞) :

$$c^2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} = 0, \quad (1.2)$$

donde c es una constante [3].

El contenido de esta tesis se considera como el origen de las matemáticas financieras [12]. En la parte final de su trabajo Bachelier afirma que “el mercado obedece la ley de la probabilidad” [3](p.47).

Movimiento Browniano y Einstein

Por otro lado, se había estado intentado explicar las causas del movimiento irregular de partículas microscópicas suspendidas en un líquido.

Originalmente, Robert Brown, motivado por un tratado sobre botánica en el apéndice de un escrito elaborado por un capitán australiano de nombre Phillip Parker King en 1826 a raíz de unos viajes que realizó principalmente a Sudamérica y Australia, llevó a Brown a observar detenidamente la estructura del polen de ciertas especies de plantas.

En particular, al estudiar bajo el microscopio, la forma de los granos de polen sumergidas en agua observó, como él lo apunta [10](pp.466,467), “muchos de ellos (granos de polen) presentan evidente movimiento; este movimiento consiste no solo de un cambio de lugar en el fluido ... si no que también, aunque no tan frecuente, en un cambio en la forma de la partícula misma ... éstos movimientos eran tales, me quedó claro, que no eran originados por corrientes en el fluido ni por evaporación gradual, sino que pertenecían a la partícula misma”.

Brown, en el referido trabajo titulado *A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants* [10], extiende sus observaciones a muchas otras plantas de la misma familia encontrando el mismo resultado, por lo que en seguida se pregunta [10](p.469) “si esta propiedad (el movimiento) continúa

después de la muerte de la planta, y por cuánto tiempo se mantiene.”

Realizó pruebas con plantas previamente secas o inmersas en alcohol, probó con resinas y sustancias de origen vegetal inclusive carbón y un fósil de madera encontrando el mismo movimiento, pasando a minerales, metales y sus combinaciones, siempre asumiendo hipótesis que explicaran dicho movimiento, en particular alguna molécula responsable presente en estos materiales además de la forma de dichas partículas.

En una siguiente entrega titulada *Additional Remarks on Active Molecules* (1829) concluye [10](p.481) que “partículas extremadamente diminutas de materia sólida obtenidas de sustancias orgánicas o inorgánicas, cuando son suspendidas en agua, o en algún otro fluido acuoso, exhiben movimiento el cual no me es posible explicar y, que de su irregularidad y aparente independencia recuerda con un alto grado los rápidos movimientos de algunos de los más simples animales en infusiones.”

Brown no fue el primero en observar estos movimientos, por ejemplo [10](p.484) “en 1814 el Dr. James Drummond, de Belfast, publicó ... un artículo titulado *On Certain Appearances observed in the Dissection of the Eyes of Fishes ...* en donde el autor da cuenta de movimientos de la espícula la cual forma parte de la cubierta corioide de los ojos de los pescados... la investigación del Dr. Drummond se limitó estrictamente a la espícula de los ojos y escamas de pescados”, pero Brown sí efectuó y consideró esto para todo tipo de materiales y formas.

De los diversos experimentos efectuados por Brown se concluye que este movimiento no es debido a algún proceso vital ni tampoco a alguna molécula responsable del movimiento.

Fue hasta principios del siglo XX en que se concluye que, debido al movimiento térmico molecular, según la teoría cinético-molecular, partículas de tamaño microscópico suspendidas en algún líquido efectúan movimientos de tal magnitud que pueden ser observados en un microscopio. Fue Albert Einstein en 1905 quien publica estos resultados [14] y va más allá estableciendo que es posible que estos movimientos son idénticos al movimiento Browniano.

Partiendo de ciertas hipótesis (lo que ahora define a una partícula browniana), y, en una dimensión, se tiene un total de n partículas suspendidas en un líquido, y, en un intervalo de tiempo τ define Δ como un incremento en el desplazamiento que experimenta una partícula y Δ puede tomar cualquier valor diferente o igual para cada partícula.

En seguida se puede definir a $f(x, t)$ como el número de partículas por unidad de volumen (la concentración) y de aquí obtener el número de partículas

halladas al tiempo $t + \tau$ en un intervalo x y $x + dx$ como sigue

$$f(x, t + \tau)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta) \phi(\Delta) d\Delta , \quad (1.3)$$

esto es, la concentración o densidad de partículas por unidad de volumen en cierto intervalo x y $x + dx$ se obtiene del producto de la concentración f en un cierto tiempo t y en alguna localización $x + \Delta$ multiplicada por la probabilidad de que ocurra cada desplazamiento posible $\phi(\Delta)$ y, para abarcar todo posible valor de Δ se integra de $-\infty$ a ∞ .

En el lado izquierdo usando la definición de derivada y en el lado derecho usando la fórmula de Taylor alrededor de Δ y haciendo

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta) d\Delta ,$$

se obtiene una ecuación diferencial que describe la densidad de probabilidad de un ensamble de estas partículas brownianas en donde f es la probabilidad de encontrar una partícula en un intervalo x y $x + dx$ al tiempo t

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} , \quad (1.4)$$

con D el coeficiente de difusión y, se puede considerar el movimiento de cada partícula con un sistema coordenado cuyo origen coincide con su centro de gravedad con $f(x, t)dx$ el número de partículas cuya coordenada se ha incrementado entre $t = 0$ y $t = t$ en una cantidad que está entre x y $x + dx$.

Además, para $x \neq 0$ en $t = 0$ es $f(x, t) = 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = n ,$$

luego el problema, el cual coincide con el problema de la difusión, está determinado matemáticamente y su solución es

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} , \quad (1.5)$$

y el desplazamiento λ_x que experimenta la partícula en promedio o la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los desplazamientos es

$$\lambda = \sqrt{x^2} = \sqrt{2Dt} , \quad (1.6)$$

el desplazamiento medio es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

Este resultado junto con la Eq.(1.4) son fundamentales, como se verá más adelante, para la comprensión del fenómeno de la difusión.

La teoría atómica (la cual considera que la materia está compuesta de átomos y moléculas), en esos mismos años, no había sido aún aceptada del todo; las verificaciones experimentales de los resultados obtenidos por Einstein fueron claves en la aceptación de esta teoría.

La Ecuación de Langevin

Poco tiempo después de la explicación de Einstein, Smoluchowski en 1906 intentó resolver el mismo problema pero con un método distinto, en su intento casi llega al mismo resultado salvo una diferencia en el desplazamiento cuadrático medio en un factor de 64/27 [26].

Pocos años después Paul Langevin, físico francés, [26] en 1908, logró aplicar correctamente el método propuesto por Smoluchowski y obtener el mismo resultado de Einstein de manera precisa [26](p.1080).

Para esto comienza con una partícula, que se considera grande en relación a la distancia promedio entre las moléculas del líquido, en donde su ecuación de movimiento (segunda ley de Newton) en la dirección x es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a \frac{dx}{dt} + X , \quad (1.7)$$

el término $-6\pi\mu a$ tiene que ver con la viscosidad de acuerdo a la fórmula de Stokes, considerando la partícula como una esfera de radio a y masa m y, además, el término X , al que llamó fuerza complementaria (término estocástico).

Para la solución, Langevin [26](pp.1080-1081) multiplica la ecuación 1.7 por x , define $\xi = dx/dt$ y considera un ensamble grande de partículas para luego tomar la media o valor esperado

$$\frac{1}{2}m \left\langle \frac{d^2}{dt^2}x^2 \right\rangle - m \langle \xi^2 \rangle = -3\pi\mu a \left\langle \frac{d}{dt}x^2 \right\rangle + \langle Xx \rangle , \quad (1.8)$$

en seguida usa el teorema de equipartición de energía que define la energía cinética promedio ($K = 1/2m\xi^2$) como $\langle K \rangle = RT/2N$, donde R es la constante universal de los gases, T es la temperatura absoluta y N el número de Avogadro, entonces

$$\langle \xi^2 \rangle = RT/m , \quad (1.9)$$

y definiendo $z = \langle dx^2/dt \rangle$ se tiene que la ecuación 1.8 es

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}z - \frac{RT}{N} = -3\pi\mu a z , \quad (1.10)$$

en donde $\langle Xx \rangle = 0$ debido a la manera en que definió Langevin a la fuerza X . Esta ecuación es lineal en z con solución

$$z(t) = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} + C e^{-6\pi\mu a t/m} \quad (1.11)$$

y, Langevin le llama a esta última ecuación tasa de agitación, la cual entra en régimen constante después de alrededor de 10^{-8} segundos. Y como $z = \langle dx^2/dt \rangle = \overline{dx^2/dt}$, resuelve para $\overline{x^2}$ en un intervalo de tiempo τ obteniendo

$$\overline{x^2} - \overline{x_0^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} \tau \quad (1.12)$$

este último es el desplazamiento cuadrático medio y esta ecuación 1.12, es la misma obtenida por Einstein. Langevin llegó a la misma demostración de la fórmula de Einstein (como él la llama) de una manera distinta y más sencilla.

Pearson y la Caminata Aleatoria

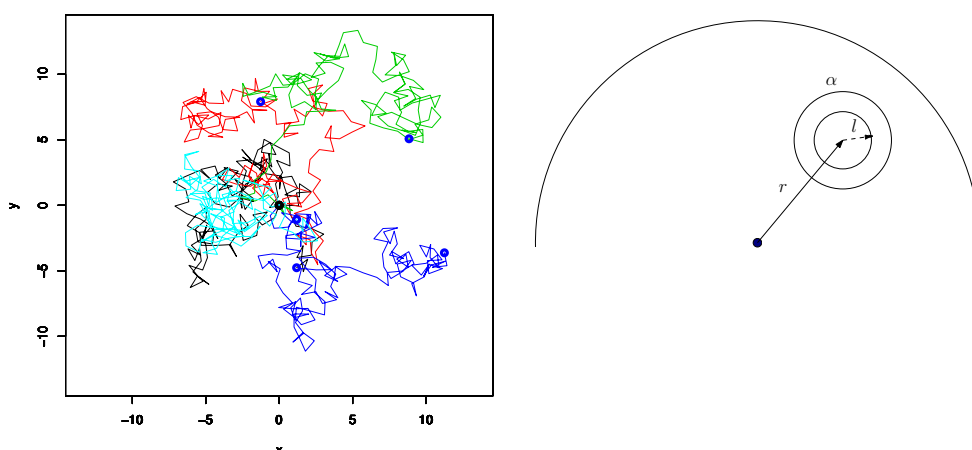


Figura 1.4: Problema de Pearson. Se considera que en el centro hay N individuos y a partir de un cierto tiempo comienzan a desplazarse efectuando n vuelos de manera que, se desplaza un individuo cierta distancia en una dirección, al llegar inicia otro desplazamiento de longitud distinta (aleatoria) en otra dirección también aleatoria. Luego, se requiere encontrar la probabilidad de encontrar un individuo en un círculo de radio l a una distancia r del centro de dispersión (el origen) después de n vuelos. Izquierda, cinco partículas efectuando una caminata de Pearson de $n = 150$ pasos, o vuelos, los puntos azules indican la posición final. Derecha, esquema que muestra, a partir de un centro, a una distancia r un elemento de área α en el cual, en el paso $n - 1$, se encuentran cierta cantidad ϕ de individuos, frecuencia de individuos en α , si cada vuelo es de longitud l , en el tiempo n habrá otra cierta cantidad ϕ de individuos en α , precisamente aquellos que se encuentren dentro del círculo de radio l en el tiempo n , es la probabilidad buscada por Pearson.

Existe aún otra manera de llegar a los mismos resultados ecuación (1.4) y ecuación (1.6).

Alrededor de 1905, Karl Pearson, trabajando con un problema de migración animal formuló la siguiente pregunta [35](pp. 3-4): “Partiendo de un centro ... ¿cuál será la distribución después de n vuelos de N individuos que parten de ese centro?”, para esto, consideró: un territorio, un plano, en el cual se distribuye de manera uniforme la fuente de alimento y además una población de N individuos los cuales se encuentran concentrados en un origen (centro), Figura 1.4.

Ante el poco avance (obtuvo la solución para $n = 2$) en la solución de este problema, Pearson, consultó a sus colegas matemáticos en un número de *Nature*

(72, 294; 318; 342 (1905)) con el título de “El Problema de la Caminata Aleatoria”, en el cual Lord Rayleigh le hizo notar que “el problema de la caminata aleatoria” donde el número de vuelos es muy grande se vuelve idéntico al problema de la combinación de amplitudes de sonido para el caso de notas del mismo periodo [35] (p.4), fenómeno que Rayleigh había estado trabajando alrededor de 1880.

En dicho trabajo, titulado: Sobre el resultado de un gran número de vibraciones del mismo tono y de fase arbitraria [37], aborda el problema de obtener la intensidad promedio en un gran número de casos, o, en lenguaje de probabilidad, cuál es el valor esperado de la intensidad en un solo caso.

Para esto, formula [37](pp.75-77) una variación del problema: limita a las fases posibles a solo dos fases opuestas y considera las amplitudes como positiva o negativa de manera aleatoria, y considera las vibraciones como líneas en donde la resultante de n vibraciones es la suma de estas líneas.

Si n de estas líneas se toman de manera aleatoria, la probabilidad de que el final de la línea, que puede considerarse como un punto, caiga en un rectángulo $dx dy$ es

$$\frac{1}{\pi n} e^{-(x^2+y^2)/n} dx dy \quad (1.13)$$

la cual es la versión en el plano XY de la ecuación (1.5). En este desarrollo trabaja, aunque no lo menciona, con una caminata aleatoria.

Así, como en los casos anteriores, mediante una caminata aleatoria se puede llegar a la ecuación de difusión como se verá en capítulo 2.

Los trabajos hasta aquí expuestos, se dieron casi de manera simultánea y en diferentes áreas de estudio, esto aunado a que la axiomática de la teoría de la probabilidad se formuló en este periodo de tiempo permitió estudiar este fenómeno (la difusión) desde distintos frentes uno de ellos el de las caminatas aleatorias que es el presentado aquí.

Capítulo 2

De la Caminata Aleatoria a la Ecuación de Difusión

Como se vio en el capítulo anterior, es posible formular procesos fuera de equilibrio como la difusión, utilizando distintos enfoques. Entre estos, en el enfoque probabilístico es usual comenzar con una formulación discreta conocida como caminata aleatoria.

2.1. Un Enfoque Discreto, la Caminata Aleatoria

Supongamos que tenemos una partícula la cual está restringida a moverse sobre el eje X dando n saltos de longitud constante $\Delta x = 1$, hacia la derecha o a la izquierda de manera aleatoria con probabilidad p y $q = 1 - p$ respectivamente, y con duración de tiempo constante $\Delta t = 1$.

Se marca el origen $x = 0$ donde actualmente se encuentre la partícula de modo que al moverse ocupará posiciones de una retícula que consta de números enteros.

Después de n saltos, la posición de la partícula será la suma de los saltos dados a la derecha menos los dados a la izquierda.

De este modo, ξ_n representará un salto de la partícula a la derecha o a la izquierda al paso n donde $\xi_n \in \{-1, 1\}$ (es usual hablar de paso en lugar de tiempo cuando éste toma valores discretos) y diremos que da un salto a la derecha cuando ξ toma el valor 1 y que lo da a la izquierda cuando toma el valor -1 (ya que la longitud del salto se supuso como $\Delta x = 1$).

De esta manera,

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n , \quad (2.1)$$

representa la posición final de un camino aleatorio de n pasos el cual es, la trayectoria que se puede formar tomando del primer desplazamiento ξ_1 la posición

final y, a partir de ahí, desplazarse según sea ξ_2 y, así, formando la trayectoria del camino aleatorio de la secuencia $X_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Y para cada paso n existen 2 posibles salidas entonces son 2^n distintos caminos, luego, la colección de todos ellos se conoce como caminata aleatoria.

Se tiene entonces que ξ_k es una variable aleatoria de Bernoulli, y por tanto, un camino aleatorio es una suma de variables aleatorias de Bernoulli, que da la posición de la partícula al tiempo n . De la ecuación 2.1 podemos ver que para $n = 1$, la partícula puede ocupar el lugar $x = 1$ ó $x = -1$, para $n = 2$ puede ocupar el lugar $x = 2$, $x = 0$ ó $x = -2$, y así, para el paso o tiempo n , existen $n + 1$ posibles lugares que puede ocupar la partícula (ver Figura 2.1).

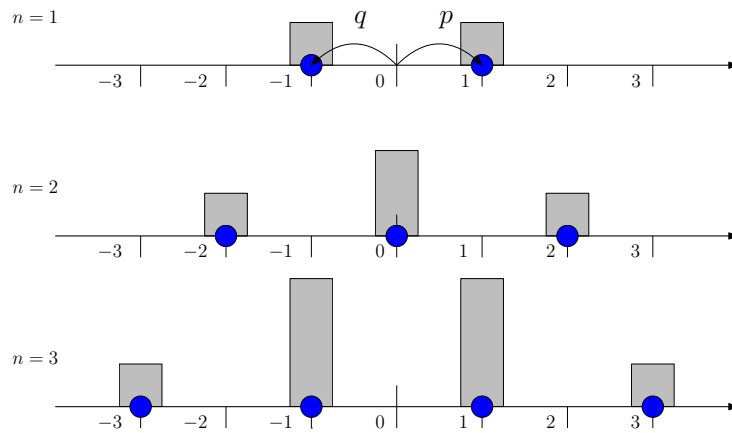


Figura 2.1: Caminata aleatoria en una dimensión, para $n = 1, 2$ y 3 . Para $n = 1$, la partícula comenzando en el origen 0 , dará un salto a la derecha con probabilidad p , o bien, a la izquierda con probabilidad q . Se muestran en azul, las posibles casillas que puede ocupar la partícula al tiempo n y las barras indican el histograma de las frecuencias de las posiciones que toma la partícula.

También es importante notar que si n es impar, la partícula sólo puede ocupar posiciones impares y si n es par, puede ocupar posiciones pares o el origen ($x = 0$) y la posición final nunca es mayor a n .

Ahora bien, existen por ejemplo para $n = 2$, una forma de llegar a $x = 2$, esto es dando dos saltos a la derecha, por tanto, $\xi_1 = 1$ y $\xi_2 = 1$, así

$$X_2 = \xi_1 + \xi_2 = 1 + 1 = 2 .$$

De igual modo, hay dos maneras de terminar en $x = 0$, esto es, dar un salto a la derecha $\xi_1 = 1$, seguido de uno a la izquierda $\xi_2 = -1$, o bien, dar primero un salto a la izquierda $\xi_1 = -1$ seguido de uno a la derecha $\xi_2 = 1$, esto es

$$X_2 = \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 1 + (-1) = 0 , \\ \xi_1 + \xi_2 = (-1) + 1 = 0 . \end{cases}$$

Finalmente, existe una manera de llegar a $x = -2$ la cual es $\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = -1$, por tanto al haber dos formas de terminar en $x = 0$ se puede decir que es más

probable encontrar a la partícula en esa posición y que es igualmente probable que se encuentre en $x = 2$ y $x = -2$ (ver Figura 2.1).

Utilizando a j (en lugar de x) para la posición de la partícula en el caso discreto y sabiendo que en el paso n dicha partícula realizó l pasos a la izquierda y r a la derecha, se tiene que $n = r + l$ y entonces, después de n pasos $j = r - l$. Luego usando estas dos ecuaciones se tiene que $2r = n + j$ por lo que la posición j de la partícula después de n pasos se puede expresar como

$$j = 2r - n . \quad (2.2)$$

De aquí se deduce que si n es par, entonces j es par, y si n es impar entonces j lo es también, tal como se había mencionado anteriormente.

Sobre la Ecuación que rige una Caminata Aleatoria y su Solución

Las Probabilidades de Transición de una Caminata Aleatoria

Como existen 2^n posibles lugares que puede ocupar la partícula, uno se puede preguntar en dónde estará la partícula después de n pasos, o bien, de manera más precisa, cuál es la probabilidad $P(X_n = j)$ de que después de n pasos, se encuentre en la posición j , y así, la idea es construir una fórmula general para encontrar dicha probabilidad.

De manera formal, tenemos un espacio muestral definido para cada paso. Por ejemplo, para el paso $n = 1$ el espacio muestral es $S_1 = \{-1, 1\}$. De igual forma, tenemos que para el paso $n = 2$, el espacio muestral se define como $S_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, y para $n = 3$ tenemos $S_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, y así sucesivamente para cada n del total de pasos en que consta la caminata. Así mismo, tenemos a ξ_k que toma valores $\{-1, 1\}$ para el paso k con respecto a la dirección del salto, es decir, a la derecha (representado con valor 1) con probabilidad de ocurrencia $P(1) = p$, ó a la izquierda (representado con valor -1) con probabilidad $P(-1) = q$, por lo que la caminata aleatoria X_n es la suma de las variables aleatorias ξ_n que indica la posición de la partícula después de n pasos.

Entonces, dado el espacio muestral S de la caminata aleatoria con $B_1 = \{\text{la posición a la izquierda de } j\}$ y $B_2 = \{\text{la posición a la derecha de } j\}$, esto es

$$\begin{aligned} S &= \{-(n+1), -n, \dots, 0, \dots, j, \dots, n+1\}, \\ B_1 &= \{-(n+1), -n, \dots, 0, \dots, j\}, \\ B_2 &= \{j+1, \dots, n, n+1\}, \end{aligned}$$

en donde B_1 y B_2 son eventos con $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2$ y forman una partición de S , ya que:

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \emptyset \\ B_1 \cup B_2 &= S . \end{aligned}$$

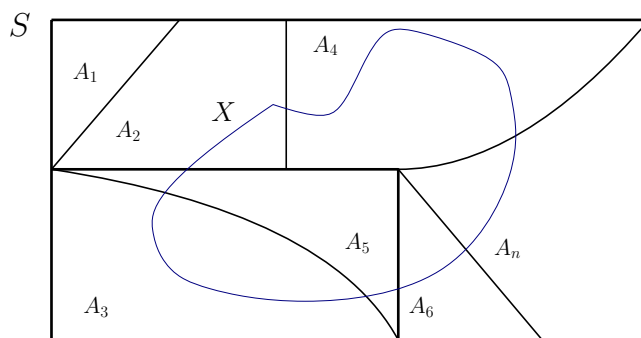


Figura 2.2: En general, un espacio muestral S , puede estar formado por n conjuntos A_i disjuntos entre sí tales que $S = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Un evento X estará formado de la unión de intersecciones de este conjunto X con una cierta cantidad de conjuntos A , $E = X \cap A$, luego $X = \bigcup_i E_i$, siempre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, con $i \neq j$. Por tanto, $P(X) = P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i) = \sum_i P(X \cap A_i) = \sum_i P(X|A_i)P(A_i)$, la última igualdad se obtiene de la definición de probabilidad condicional.

En seguida, para X , que es la posición j de la partícula en el paso n , usando la regla de la probabilidad total se obtiene lo siguiente

$$P(X) = P(X|B_1) P(B_1) + P(X|B_2) P(B_2) , \quad (2.3)$$

en donde $P(X|B_1)$ es la probabilidad de que, dado que se encuentra la partícula a la izquierda de j (esto es, el evento B_1), se desplace a la posición j (esto es, el evento X), entonces $P(X|B_1) = p$, así mismo, $P(B_1)$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre a la izquierda de j , esto es, en $j - 1$ al tiempo n por lo tanto, la ecuación 2.3 toma la forma

$$P(X_{n+1} = j) = p P(X_n = j - 1) + q P(X_n = j + 1) . \quad (2.4)$$

Esta ecuación nos da la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición j al tiempo $n + 1$.

Acerca de la solución de esta ecuación

En delante, para indicar la probabilidad $P(X_n = j)$ de que la partícula se encuentre en la posición j al paso n , por simplicidad se expresará como $P_n(j)$. De este modo, la ecuación 2.4 se escribe como

$$P_{n+1}(j) = p P_n(j - 1) + q P_n(j + 1) . \quad (2.5)$$

que es una ecuación en diferencias con condición inicial, para $n = 0$, dada por

$$P_0(j) = \delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 , \end{cases} \quad (2.6)$$

esto es, para el paso $n = 0$ se tiene toda la certeza (probabilidad 1) de que la partícula se encuentre en el origen, es decir en $j = 0$, con esta información se

obtiene el siguiente resultado:

La solución de la ecuación 2.5 dada la condición inicial 2.6 es

$$P_n(j) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \delta(j - (2r - n)) = P_n(r) , \quad (2.7)$$

(para la obtención de esta ecuación de recurrencia ver Apéndice 5.1) la probabilidad $P_n(j)$ se puede escribir como $P_n(r)$ ya que j depende de r según se estableció en la ecuación 2.2. Ahora con n dado, j toma valores enteros entre $-n$ y n , en particular pares si j es par e impares si j es impar, y con la definición de δ en la ecuación 2.6, para cada j , la ecuación $P_n(r)$ será de la forma

$$P(X_n = j) = P_n(j) = \binom{n}{\frac{j+n}{2}} p^r q^{n-r} , \quad (2.8)$$

$$\text{donde } r = \frac{j+n}{2} , \quad (2.9)$$

y es equivalente a lo que se conoce como la distribución binomial con parámetros n y p , esto es, la ecuación 2.8 indica, para un número n de pasos dado, la probabilidad de que la partícula termine en cada posible valor j de entre los posibles valores desde $-n$ hasta n .

Si en la caminata aleatoria es igualmente probable dar un salto a la derecha o a la izquierda, esto es $p = q = 1/2$, entonces, la caminata aleatoria se conoce como caminata aleatoria simétrica y la probabilidad de terminar cerca del origen es mayor que la probabilidad de terminar en los extremos (ver Figura 2.3). De otro modo, si la probabilidad de dar un salto a la derecha es diferente a la de dar uno a la izquierda, el valor más alto de probabilidad se desplaza hacia la derecha si es más probable dar un salto a la derecha o a la izquierda si es el otro caso.

En la Figura 2.3, se muestra una solución para n fijo, y se utiliza el hecho de que la posición j de la partícula está relacionada con la cantidad de saltos dados hacia la derecha según la ecuación 2.9 de modo que en el eje horizontal el cero indica cero saltos a la derecha (la partícula efectuó n saltos a la izquierda del total de n saltos) y el $n/2$ es el origen (donde comenzó la partícula a moverse). Así, la gráfica tiene un valor más alto (mayor probabilidad) de estar, al final de la caminata, en el origen.

El valor esperado y la varianza de una caminata aleatoria

Se tiene, entonces, que la caminata aleatoria es un proceso aleatorio con distribución de probabilidad dada por la ecuación 2.8, y para hallar la esperanza matemática $E[X]$ se tiene, partiendo de su definición, lo siguiente

$$E[X_n] = \sum_{j=-n}^n j P(X = j) ,$$

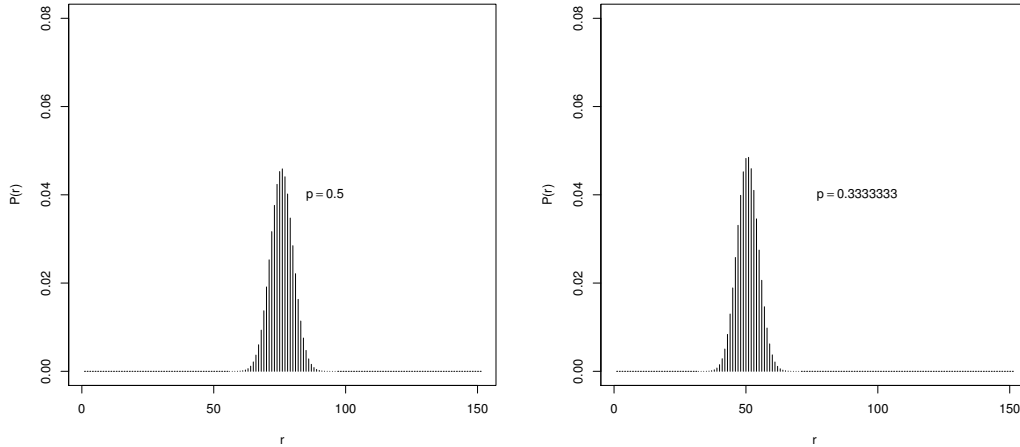


Figura 2.3: Solución de la ecuación que describe una caminata aleatoria en una dimensión (ecuación 2.8) para $n = 301$ pasos. La altura de la gráfica, $P(r)$, indica la probabilidad de encontrar la partícula después de n pasos en la posición r . Izquierda, se tiene una caminata aleatoria en la cual es igualmente probable dar un salto a la derecha que a la izquierda, $p = 1/2$, en este caso se observa que hay más probabilidad de terminar en el origen. Derecha, misma caminata pero en este caso $p = 1/3$, esto es, es menos probable dar un salto a la derecha y como consecuencia la posición más probable se ha corrido del origen hacia la izquierda como es de esperarse.

o bien, como $j = 2r - n$, entonces

$$E[X_n] = \sum_{r=0}^n (2r - n) \binom{n}{r} p^r q^{n-r} ,$$

luego el valor esperado es

$$E[X_n] = (2p - 1)n . \quad (2.10)$$

El valor esperado $E[X]$ o esperanza matemática que también se expresa como $\langle X \rangle$, o como la media μ en algunos contextos, representa la posición promedio que se espera tendrá la partícula después de realizar o repetir la caminata aleatoria un número muy grande de veces.

También es importante saber qué tanto, los valores que toma X , se alejan o están dispersos de la media μ (o valor esperado), y calcular su valor esperado, esto es $\langle (X - \mu)^2 \rangle$ que es el cuadrado de la desviación, o varianza como se le conoce

$$\begin{aligned} \sigma^2 = Var(X) &= \langle (X - \mu)^2 \rangle \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 . \end{aligned}$$

Usando $j = 2r - n$ se tiene que la varianza de la caminata aleatoria simple es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{j=-n}^n j^2 P(X = j) - \left[\sum_{j=-n}^n j P(X = j) \right]^2 \\ &= 4p(1-p)n .\end{aligned}\tag{2.11}$$

Así, la cantidad que indica qué tan lejos terminan en su caminata las partículas del valor promedio, esto es la varianza, se incrementa de manera lineal con respecto al número de pasos n .

En una caminata aleatoria simétrica (cuando p y q son $1/2$) se tiene que

$$\begin{aligned}E[X_n] = \langle X^2 \rangle &= 2np - n \\ &= 0 .\end{aligned}\tag{2.12}$$

Por otro lado, cuando $p \rightarrow 0$ se tiene que $E[X_n]$ se aproxima a $-n$, esto es, la caminata tiene una tendencia a finalizar a la izquierda del origen, por otro lado, cuando $p \rightarrow 1$, $E[X_n]$ se aproxima a n , por tanto tiende a finalizar a la derecha del origen (ver Figura 2.4).

Así mismo la varianza, cuando $p = 1/2$ es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= n \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \\ &= \langle X^2 \rangle = n ,\end{aligned}\tag{2.13}$$

más aún, regresando a la ecuación 2.11, para todo $p \in (0, 1)$, la varianza es proporcional a n . Cuando $p = 0$ ó 1 la varianza es cero, lo cual era de esperarse, porque si $p = 0$ (ó $p = 1$) la caminata deja de ser aleatoria, luego no hay varianza y por tanto, ésta, es cero.

Se llama desplazamiento cuadrático medio (msd, por sus siglas en inglés) al segundo momento $\langle x^2 \rangle$ de la variable aleatoria X , de donde de manera general el n -ésimo momento $\langle x^n \rangle$ de la variable aleatoria X es

$$\langle x^n \rangle = \left. \frac{d^n}{dt^n} E \left[e^{tX} \right] \right|_{t=0}\tag{2.14}$$

La relación entre dos pasos cualesquiera m y n no cero, pudiendo ser o no consecutivos y sin perder generalidad con $m > n$ se conoce como covarianza y viene dada por

$$C(X_n, X_m) = E[X_n X_m] - E[X_n] E[X_m] ,$$

y como

$$X_m = \xi_1 + \dots + \xi_m = \sum_{i=1}^m \xi_i ,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} C(X_n, X_m) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \left(\sum_{j=1}^m \xi_j\right)\right] - E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i\right]E\left[\sum_{j=1}^m \xi_j\right] \\ &= 4np(1-p) . \end{aligned}$$

Luego, el coeficiente de correlación para cualesquier pasos m y n es

$$\rho_X(t_n, t_m) = \frac{C(X_n, X_m)}{\sqrt{\text{Var}(X_n)\text{Var}(X_m)}} ,$$

y para la caminata aleatoria entonces, viene dado por

$$\begin{aligned} \rho_X(t_n, t_m) &= \frac{4np(1-p)}{\sqrt{4np(1-p)4mp(1-p)}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{nm}} . \end{aligned}$$

Hay que notar que

- Para pasos consecutivos n y $n+1$

$$\rho = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} ,$$

si $n \gg 1$, entonces $\rho \rightarrow 1$, esto es, existe un alto grado de linealidad entre pasos consecutivos.

- Cuando $m \gg n = 1$,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{m(1)}} \rightarrow 0 \text{ cuando } m \gg 1 ,$$

esto es, la linealidad en los pasos tiende a perderse cuando están alejados uno del otro.

En general en una caminata aleatoria, en la cual únicamente está variando de manera aleatoria la dirección del salto, podemos conocer, mediante el valor esperado del proceso, la posición final, en promedio, de un ensamble grande de partículas. Así mismo, una característica muy importante se observa al obtener la varianza del proceso la cual es proporcional al número de pasos, o tiempo, n , o bien, la raíz cuadrada (desviación estándar) de este valor es proporcional a \sqrt{n} .

Acerca de la simulación de una caminata aleatoria

En las figuras 2.4 y 2.5 se muestran dos caminatas aleatorias, en una y dos dimensiones respectivamente. Para la caminata en una dimensión se realiza lo siguiente:

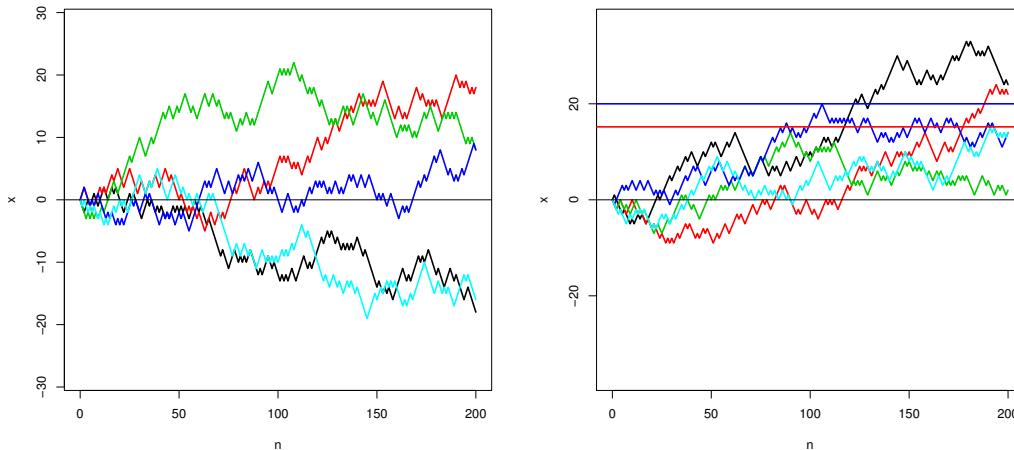


Figura 2.4: Cinco realizaciones de una caminata aleatoria para $n = 200$ pasos y donde la posición final de cada realización se lee verticalmente. A la izquierda se observa una caminata aleatoria simétrica, esto es, $p = q = 0.5$. A la derecha se muestra una caminata aleatoria con $p = 0.55$, esto es, una ligera tendencia hacia un lado (en este caso hacia arriba). Se observa que esta ligera variación arroja una marcada tendencia en la posición final del ensamble, las líneas horizontales azul y roja muestran el valor esperado teórico $(2p - 1)n$ y empírico (promedio de las posiciones finales) respectivamente, es claro que al aumentar el número de realizaciones éstos valores difieran menos.

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x = 0$ en $n = 0$, esto es, $x_0 = 0$.
2. De un conjunto de dos números, $\{-1, 1\}$, que representan un movimiento a la derecha y a la izquierda respectivamente, seleccionar uno, llamado u , con igual probabilidad, $p(1) = 1/2$ y $p(-1) = 1/2$.
3. Sumar este número al valor de la posición anterior, $x_n = u + x_{n-1}$.
4. Se repite la operación 2 y 3 hasta completar los n pasos.

Al final del proceso, en el paso n , el valor x_n indica la posición final de la partícula. En la figura 2.4, a la izquierda, se muestra este proceso para cinco partículas. A la derecha se muestra el mismo proceso pero con probabilidad distinta a $1/2$.

Para el caso en dos dimensiones se considera que la partícula en cada paso tiene cuatro opciones a moverse, a la derecha, izquierda, arriba o abajo. De igual modo que en el caso de una dimensión se procede de la siguiente manera:

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x = 0$ y $y = 0$ en $n = 0$, esto es, $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.
2. De un conjunto de cuatro números, $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ que representan un movimiento a la derecha, arriba, izquierda y abajo respectivamente, seleccionar uno, llamado u , con igual probabilidad igual a $p = 1/4$.

3. En el paso n , si se obtiene $u = 0$ ó $u = \pi$ se calcula $\cos u$ y se suma al valor anterior de x (dejando sin cambio al valor de y), esto es $x_n = x_{n-1} + \cos u$. Y si se obtiene $u = \pi/2$ ó $u = 3\pi/2$, se calcula $\sin u$ y se suma al valor anterior de y (dejando sin cambio al valor de x), esto es $y_n = y_{n-1} + \sin u$.
4. La coordenada (x_n, y_n) indica la posición de la partícula después de n pasos.
5. Se repiten las operaciones 2 al 4 hasta completar los n pasos.

En la figura 2.5 se muestra este proceso para una partícula en el plano XY con $n = 8000$ pasos.

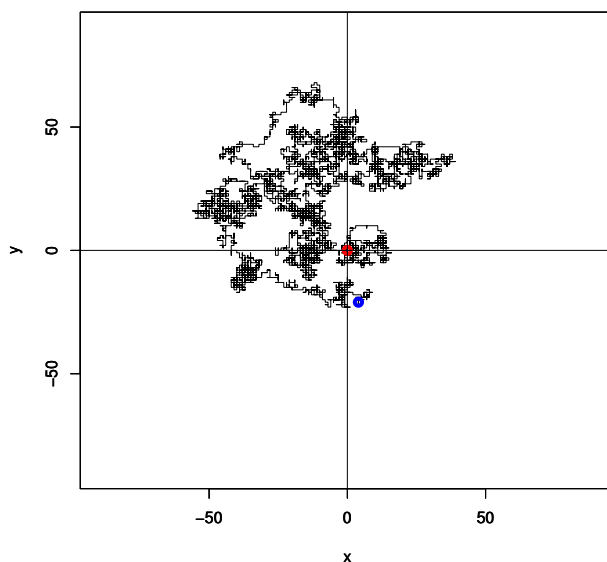


Figura 2.5: Realización de una caminata aleatoria en el plano XY para $n = 8000$ pasos. En rojo se indica el origen y en azul el final de la caminata.

2.2. El Paso al Continuo, la Ecuación de Difusión

Hasta ahora se ha considerado que el tamaño del salto es una cantidad constante, de modo que la partícula en su movimiento está confinada a una retícula de nodos igualmente espaciados siendo el espaciamento Δx un número natural, esto es, el espaciamento entre nodos en la retícula es un múltiplo entero de Δx .

De igual modo, se ha considerado que entre cada salto que realiza la partícula hay un intervalo de tiempo igual a Δt (también $\Delta t \in \mathbb{N}$) por lo que el tiempo se consideró como múltiplo de una unidad discreta de tiempo.

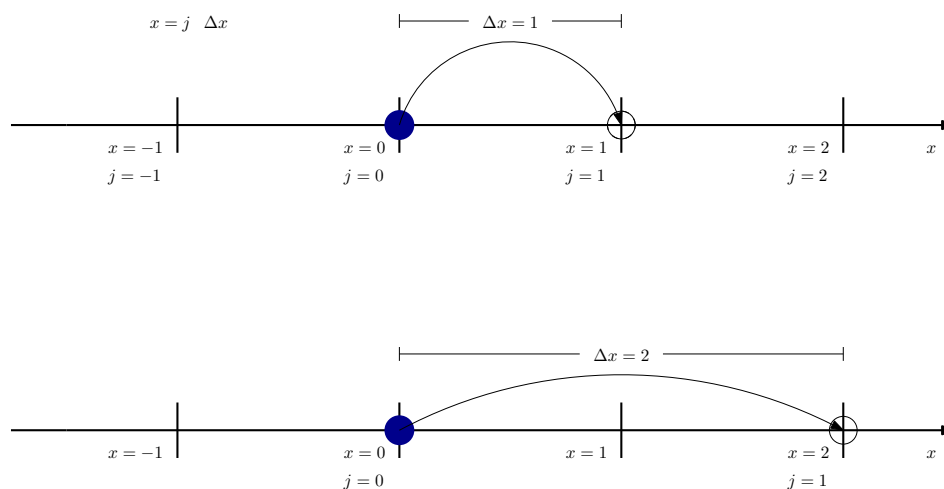


Figura 2.6: El tamaño del salto o desplazamiento Δx determina la posición j de la partícula. Arriba: si $\Delta x = 1$, la posición j de la partícula coincide con el punto x de la recta. Abajo: si $\Delta x = 2$, la partícula solo ocupa puntos de la recta que son múltiplos de 2.

Se sigue ahora la posibilidad de pasar de una caminata aleatoria discreta a un proceso difusivo en el cual el tiempo y la posición espacial pueden tomar valores reales para lo cual es necesario que el número de pasos sea muy grande y el intervalo de tiempo y el espaciamiento entre nodos de la retícula tiendan a cero.

Cuando el espaciamiento Δx entre nodos de la retícula y el intervalo de tiempo Δt entre saltos tienden a cero

El propósito aquí es pasar de una caminata aleatoria definida en los enteros a una caminata definida en los reales, el desarrollo aquí mostrado es basa en [40].

Se tiene entonces, la ecuación 2.5 que describe una caminata aleatoria escrita de manera equivalente como

$$P(j, n + 1) = p P(j - 1, n) + q P(j + 1, n) .$$

Y reemplazando las variables n y j por t y x (las cuales dan una idea de continuo) y, usando lo definido arriba, esto es, la posición de la partícula es un múltiplo de Δx , entonces se escribirá $x = j\Delta x$ y de igual modo para el tiempo, $t = n\Delta t$, por lo que esta relación de escalamiento se puede escribir

$$P(t + \Delta t, x) = p P(t, x - \Delta x) + q P(t, x + \Delta x) , \quad (2.15)$$

esto es, por que dado el tiempo $t = n\Delta t$, para el siguiente paso se tiene $(n + 1)\Delta t = n\Delta t + \Delta t = t + \Delta t$, y de igual modo ocurre para x y $x + \Delta x$.

Y para $n \gg 1$ se toma la fórmula de Taylor alrededor de cero en Δx y Δt ,

la cual es, de primer y segundo orden, respectivamente, con $x_0, h \in \mathbb{R}^n$, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0) + R_1 \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) + R_2, \end{aligned}$$

donde R_i son los residuos respectivos del desarrollo, y entonces usando estas fórmulas en la ecuación 2.15, la de primer orden para el lado izquierdo de la ecuación y la de segundo orden para el lado derecho con $h = (h_1, h_2) = (\Delta t, \Delta x)$ se obtiene

$$P(x, t + \Delta t) = P(x, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + R_1. \quad (2.16)$$

De igual modo para ambas expresiones del lado derecho de la ecuación 2.15 tomando $h = (\Delta t, \Delta x) = (h_1, h_2) = (0, \Delta x)$ se tiene

$$P(x \pm \Delta x, t) = P(x, t) \pm \Delta x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) + R_2 \quad (2.17)$$

Así, usando 2.16 y 2.17 en 2.15 se llega a [40] la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = (q - p) \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t),$$

luego, para poder hacer Δx y $\Delta t \rightarrow 0$ se establecen las constantes [40]

$$\begin{aligned} D &= \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \\ v &= \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} (q - p) \frac{\Delta x}{\Delta t}, \end{aligned}$$

entonces, se tiene [40] la ecuación de difusión

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -v \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (2.18)$$

donde D es el coeficiente de difusión y v se conoce como coeficiente de deriva (del inglés *drift*).

Sobre la Solución de la Ecuación de Difusión

Se tiene entonces la ecuación de difusión 2.18 para $P(x, t)$ y la condición inicial dada en la ecuación 2.6, la cual para el caso continuo es $P(x, 0) = \delta(x)$. Así, multiplicando por e^{-ikx} en ambos lados de la ecuación 2.18 e integrando de $-\infty$ a ∞ , esto es, usando la técnica de la transformada de Fourier se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) e^{-ikx} dx &= -v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) e^{-ikx} dx + \\ &+ D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) e^{-ikx} dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Luego la ecuación 2.19 se vuelve de la forma

$$\frac{d}{dt}P(k, t) = -ikvP(k, t) - k^2DP(k, t) . \quad (2.20)$$

que es una ecuación diferencial cuya solución es

$$P(k, t) = e^{(-Dk^2 - i vk)t} , \quad (2.21)$$

De aquí, para obtener la solución en el espacio original (x, t) se aplica la transformada inversa de Fourier para obtener

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-vt)^2/4Dt} , \quad (2.22)$$

que es la solución de la ecuación de difusión.

En la figura 2.7 se muestra esta solución para tres valores de t . La curva mostrada se conoce como campana de Gauss o curva normal, en particular, la ecuación 2.22 es la función de densidad de probabilidad normal o gaussiana con media

$$\begin{aligned} E[X] &= \int x P(x, t) dx \\ E[X] &= vt , \end{aligned} \quad (2.23)$$

y segundo momento

$$E[X^2] = (vt)^2 + 2Dt \quad (2.24)$$

con varianza

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 \quad (2.25)$$

$$Var(X) = 2Dt . \quad (2.26)$$

El hecho de que las soluciones de la ecuación de una caminata aleatoria (ecuación en diferencias) y la ecuación de difusión (ecuación diferencial) sean respectivamente una distribución binomial (discreta) y una distribución normal (continua) era de esperarse conociendo los resultados que se obtienen mediante el teorema límite central el cual, partiendo de una sucesión de variables aleatorias independientes X_1, X_2, \dots (en nuestro caso la dirección en cada salto que da la partícula), nos muestra que la distribución de la suma de éstas tiende a una distribución normal cuando n crece sin cota.

La solución de la ecuación de difusión representa la probabilidad de encontrar en x al tiempo t a una partícula que se este difundiendo, por tanto, observando la ecuación 2.22 se tiene que es posible encontrar la partícula en todo momento (excepto en $t = 0$) en cualquier posición en el eje X . Se dice entonces que la difusión presenta un frente de propagación infinito.

Esto implica, aunque con probabilidad baja, desplazamientos instantáneos. En la siguiente sección se presenta una caminata la cual en su versión continua ofrece una alternativa a esta situación.

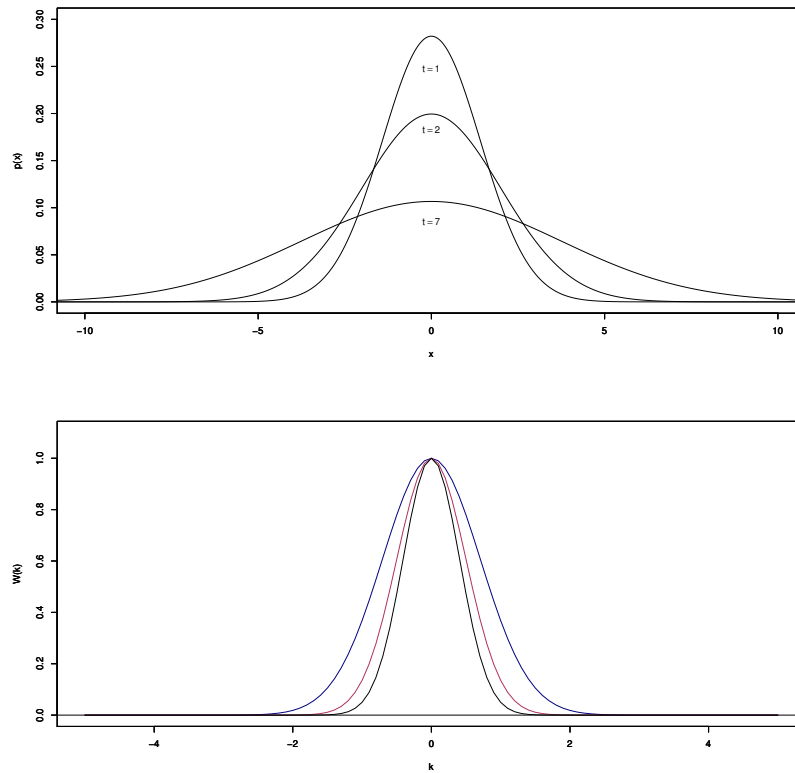


Figura 2.7: Arriba, solución de la ecuación de difusión para distintos valores de t , el valor vt es la media o valor esperado de la función y, cuando la caminata es simétrica ya se vio que éste es igual a cero ($vt = 0$). Conforme t es mayor se observa que la curva “se ensancha y disminuye de altura” ya que el área bajo la curva siempre es igual a 1, el que se “ensanche” implica más dispersión de las partículas, pero esta dispersión aumenta con el tiempo de manera lineal siguiendo la proporción $2Dt$. Abajo, solución de la ecuación de difusión en el espacio de Fourier (ecuación 2.21) para $t = 1, 2, 3$ en color azul, marrón y negro respectivamente, se muestra la parte real de la solución. Nota: Observe que la solución en el espacio de Fourier no está normalizada.

Acerca de la simulación de este proceso

Como se vio en esta sección, la caminata aleatoria la cual estaba restringida a dar saltos de tamaño igual a 1, se extendió al caso general en el que el tamaño de salto puede ser cualquier valor siempre que sea muy pequeño lo cual da pie al movimiento browniano.

Para simular este proceso se sigue la misma secuencia de pasos que en la caminata aleatoria con la variante del tamaño de salto el cual se cambia por un tamaño de salto tomado de un conjunto de números con distribución normal.

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x = 0$ en $t = 0$, esto es $x_0 = 0$.
2. De un conjunto de números se selecciona uno, llamado u , con una probabilidad que tiene una distribución normal.
3. Sumar este número al valor de la posición anterior, $x_n = u + x_{n-1}$.
4. Se repite la operación 2 y 3 hasta completar los n pasos.

En la figura 2.8 (arriba) se muestra este proceso para un ensamble de cinco partículas, el tiempo es el eje horizontal y la posición es el eje vertical. Abajo, en la figura, se muestra la solución de la ecuación de difusión (ecuación 2.22) para este mismo ensamble de cinco partículas tomando valores empíricos (en color rojo) y valores teóricos (curva en color azul).

Para el caso en dos dimensiones se considera que la partícula se mueve en el plano XY , una posible manera de simularlo es la siguiente:

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x = 0$ y $y = 0$ en $n = 0$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.
2. De un conjunto de puntos (x, y) posibles se selecciona uno (u_x, u_y) con distribución normal.
3. Se suma este valor al de la posición anterior $(x_n, y_n) = (x_{n-1}, y_{n-1}) + (u_x, u_y)$. La coordenada (x_n, y_n) indica la posición de la partícula después de n pasos.
4. Se repite la operación 2 y 3 hasta completar los n pasos.

En la figura 2.9 se muestra esta simulación para una partícula.

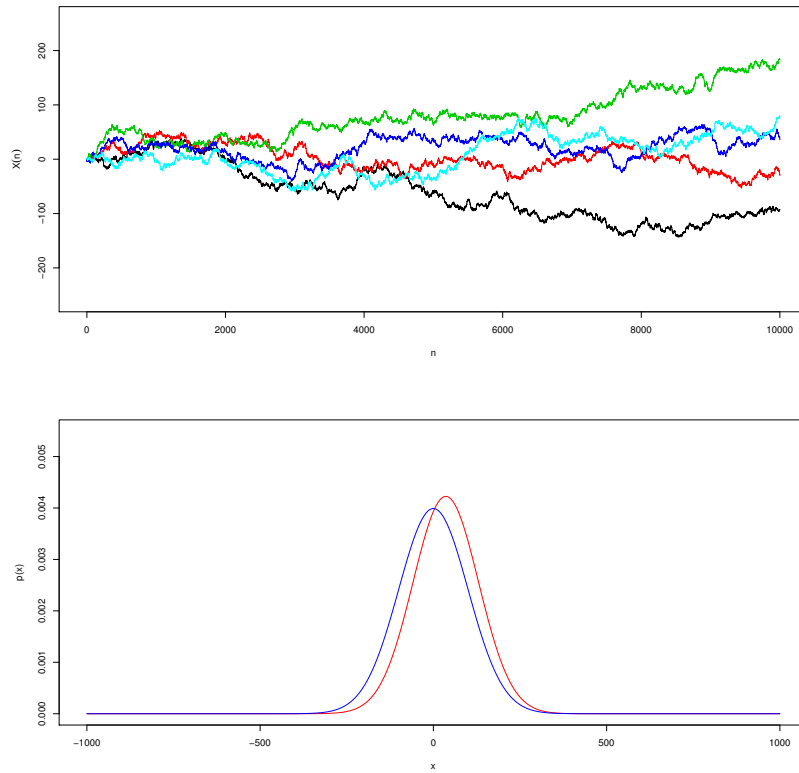


Figura 2.8: Arriba, difusión normal en una dimensión para un ensamble de cinco partículas. Abajo, solución de la ecuación de difusión (ecuación 2.22) para este mismo ensamble de cinco partículas. En azul teórica, en rojo empírica.

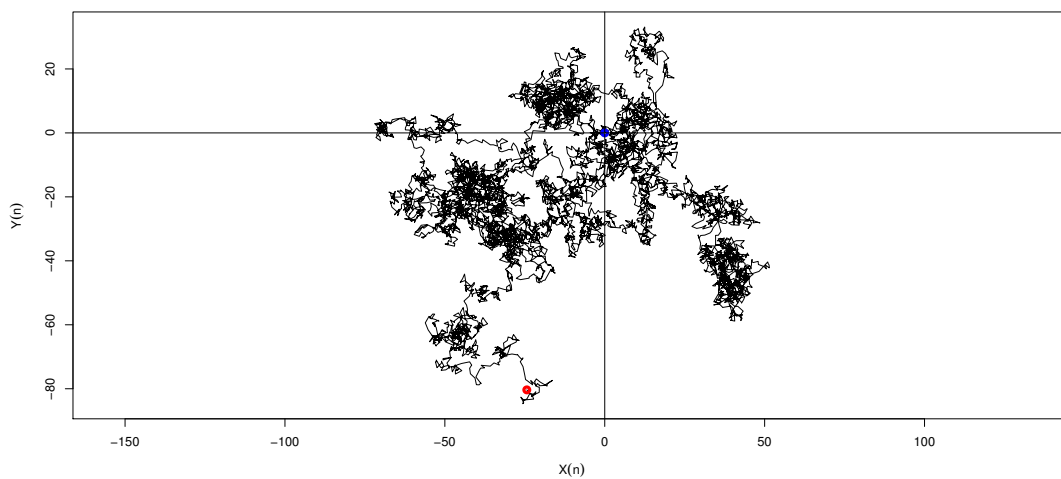


Figura 2.9: Realización para una partícula en un régimen de difusión normal con $n = 8000$ pasos. En azul se indica el origen, y en rojo la posición final de la partícula

2.3. Persistencia y Ecuación del Telegrafista

La caminata aleatoria simple, hasta este punto, se dice que es un proceso no-correlacionado, esto es, no hay una relación (o correlación) en la dirección del movimiento entre pasos consecutivos, esto es, la dirección que toma la partícula es independiente de la dirección tomada en el paso anterior.

Por otro lado, una correlación o dependencia de la dirección a tomar, con la dirección de donde se proviene se conoce como persistencia, esto es, hay una tendencia a continuar en la misma dirección del movimiento.

Una caminata aleatoria con persistencia (PRW por sus siglas en inglés) se presenta, por tanto, cuando la dirección a tomar depende, en cierto grado, de la dirección que tomó en el paso anterior. Se puede considerar como si la partícula experimentara una inercia o cierta renuencia a cambiar de dirección, en particular la caminata aleatoria con persistencia describe mejor el movimiento de un individuo, por ejemplo, al estar caminando una persona es “más sencillo” mantener la misma dirección que cambiar a la dirección opuesta.

El movimiento, o desplazamiento de individuos, no es el único ejemplo de una caminata con persistencia, que en su versión continua da origen a la ecuación del telegrafista, la cual presenta la característica de tener un frente de propagación con velocidad finita en contraparte a la ecuación de difusión.

A continuación se obtiene la ecuación de una caminata aleatoria con persistencia y la ecuación del telegrafista correspondiente. Después se muestra la solución de dicha ecuación siguiendo la construcción mostrada en [40] por Weiss. Se puede consultar otra similar en [41] y una construcción distinta en [32].

La Caminata Aleatoria con Persistencia

Se comienza, al igual que la caminata aleatoria simple, con una partícula la cual puede moverse en el eje X desplazándose únicamente a próximos vecinos de manera aleatoria y se define [40] lo siguiente:

- La probabilidad $p_n(j)$ de estar en la posición j en el paso n , viniendo en el paso anterior de $j - 1$.
- La probabilidad $q_n(j)$ de estar en la posición j en el paso n viniendo de $j + 1$ en el paso anterior.
- La probabilidad a de dar un salto en la misma dirección que el anterior.
- La probabilidad $b = 1 - a$ de cambiar de dirección.

Así, se tienen dos situaciones o estados a definir como la posibilidad de encontrar

la partícula en alguna posición a un tiempo determinado [40]

$$\begin{aligned} p_{n+1}(j) &= a p_n(j-1) + b q_n(j-1) \\ q_{n+1}(j) &= a q_n(j+1) + b p_n(j+1) . \end{aligned} \quad (2.27)$$

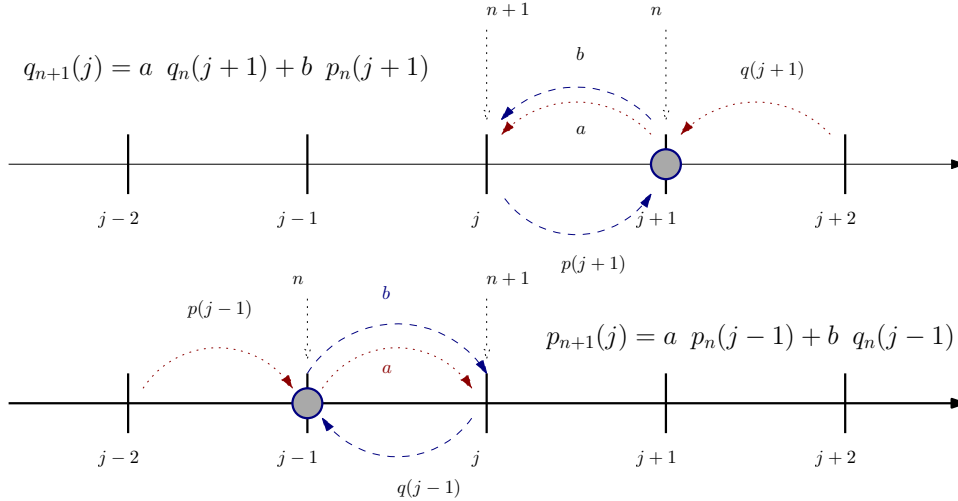


Figura 2.10: Se muestran los dos estados referentes a la probabilidad de estar en j en el paso n del sistema de ecuaciones 2.27. Arriba, se muestra la situación para la probabilidad $q_{n+1}(j)$ de arribar a j en el paso $n+1$ viniendo de $j+1$ (círculo azul). Abajo, se muestra la situación para la probabilidad $p_{n+1}(j)$ en la que en el paso anterior se encuentra en $j-1$.

La Persistencia y su Relación con la Ecuación del Telegrafista

Así como se obtuvo de la ecuación de la caminata aleatoria simple la ecuación de difusión mediante un escalamiento, $x = j\Delta x$ y $t = n\Delta t$, en este caso se hace el mismo procedimiento, sólo que ahora es para un sistema de ecuaciones.

El sistema 2.27, por tanto, es de la forma

$$\begin{aligned} p(t + \Delta t, x) &= a p(t, x - \Delta x) + b q(t, x - \Delta x) \\ q(t + \Delta t, x) &= a q(t, x + \Delta x) + b p(t, x + \Delta x) , \end{aligned} \quad (2.28)$$

usando la fórmula de Taylor de primer orden en este sistema se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= (q - p) \frac{1}{2T} - v \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= (p - q) \frac{1}{2T} + v \frac{\partial q}{\partial x} , \end{aligned} \quad (2.29)$$

en donde [40]

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v .$$

Si se considera que las densidades de probabilidad p y q están relacionadas, lo cual es usual en las aplicaciones de la caminata con persistencia, tomando entonces como $U(t, x) = p(t, x) + q(t, x)$ y su contraparte $W(t, x) = p(t, x) - q(t, x)$, entonces sumando ambas ecuaciones del sistema anterior y sustituyendo U y W y de igual modo restando ambas ecuaciones se llega a [40]

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, x) = -v\frac{\partial}{\partial x}W(t, x) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t, x) = -v\frac{\partial}{\partial x}U(t, x) - \frac{1}{T}W(t, x) . \quad (2.31)$$

Luego derivando con respecto a x la ecuación 2.31

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}W = -v\frac{\partial^2}{\partial x^2}U - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial x}W , \quad (2.32)$$

y sustituyendo la ecuación 2.30 en la ecuación 2.32

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}U\right) &= -v\frac{\partial^2}{\partial x^2}U - \frac{1}{T}\left(-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}U\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}U &= v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U , \end{aligned} \quad (2.33)$$

esta última ecuación se conoce [40] como la ecuación del telegrafista y fue estudiada por William Thomson (Lord Kelvin) cuando trabajaba en el tema de la disipación de las señales en cables para el telégrafo.

En esta ecuación cuando $T \rightarrow \infty$ se obtiene la ecuación de onda, y cuando $T \rightarrow 0$ y $Tv^2 \rightarrow D$ la ecuación de difusión, de aquí que se considere a esta ecuación como una generalización de estas dos.

Acerca de la solución de dicha ecuación

En la caminata con persistencia es necesario considerar que al inicio, en $t = 0$, la partícula (que se encuentra en el origen x_0), para el primer salto, se moverá a la derecha o izquierda con igual probabilidad y, de ahí en adelante quedará determinado el siguiente salto por la dirección del movimiento inmediato anterior. Así se tiene como condición inicial que

$$U(0, x) = p(0, x) + q(0, x) = \delta(x - x_0) ,$$

lo cual implica, si consideramos que la condición es simétrica [40] para p y q

$$p(0, x) = q(0, x) = \frac{1}{2}\delta(x - x_0) . \quad (2.34)$$

La otra condición inicial viene dada por el sistema 2.29 cuando $t = 0$, esto es

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left(q(0, x) - p(0, x)\right)\frac{1}{2T} - v\frac{\partial p(0, x)}{\partial x} \\ \left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left(p(0, x) - q(0, x)\right)\frac{1}{2T} + v\frac{\partial q(0, x)}{\partial x} , \end{aligned}$$

donde el primer término del lado derecho de la ecuación es cero ya que p es igual a q según 2.34 y el segundo término es la derivada de δ con respecto a x por lo que el sistema se reduce a [40]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}p(0, x) &= -\frac{v}{2} \delta'(x - x_0) \\ \frac{\partial}{\partial t}q(0, x) &= \frac{v}{2} \delta'(x - x_0),\end{aligned}$$

por tanto [40],

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U(0, x) &= \frac{\partial}{\partial t}p(0, x) + \frac{\partial}{\partial t}q(0, x) = -\frac{v}{2} \delta'(x - x_0) + \frac{v}{2} \delta'(x - x_0) \\ \frac{\partial}{\partial t}U \Big|_{t=0} &= 0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Si además se toma como $\tau = t/T$ y $y = x/vT$ se tiene que la ecuación 2.33 toma la forma (ver Apéndice 5.2) [40]

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}U + \frac{\partial}{\partial \tau}U = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U.\tag{2.36}$$

La solución $U(\tau, y)$ de esta ecuación se puede obtener aplicando la transformada de Laplace-Fourier (ver Apéndice 5.3). Así, haciendo esto, la ecuación 2.36 es de la forma

$$-s + s^2 U(s, w) - 1 + s U(s, w) = -w^2 U(s, w),$$

cuya solución [40] es

$$U(s, w) = \frac{1 + s}{s^2 + s + w^2},\tag{2.37}$$

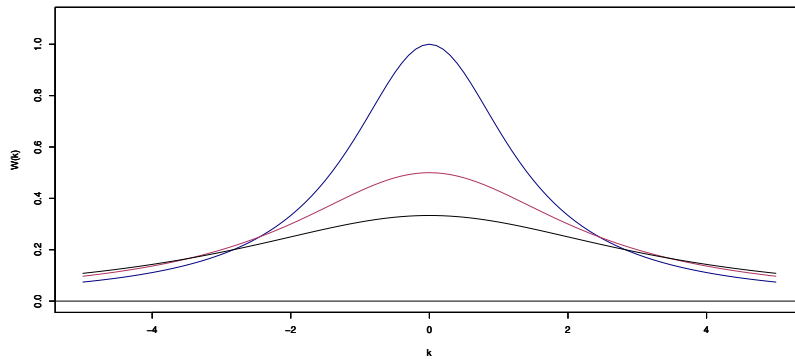


Figura 2.11: Solución de la ecuación del telegrafista (2.37) en el espacio Laplace-Fourier para $s = 1, 2, 3$ en color azul, marrón y negro respectivamente.

y para tener esta solución de nuevo en el espacio (τ, y) se aplica la transformada inversa de Laplace-Fourier, por lo que, si primero se aplica Fourier, se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}\{U(s, w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+s}{s^2+s+w^2} e^{-iwy} dw ,$$

y, usando teoría de residuos se resuelve para obtener

$$U(s, y) = \frac{s+1}{2\sqrt{s^2+s}} e^{-|y|\sqrt{s^2+s}} , \quad (2.38)$$

luego aplicando la transformada inversa de Laplace [40]

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s, y)\} = \int_0^{\infty} \frac{s+1}{2\sqrt{s^2+s}} e^{-|y|\sqrt{s^2+s}} e^{s\tau} ds .$$

La solución, por tanto [40] es

$$U(y, \tau) = \frac{1}{4} e^{-\tau/2} \left[\left(I_0(M(\tau)) + \frac{2\tau}{M} I_1(M(\tau)) \right) H(\tau - |y|) + 2 \delta(\tau - |y|) \right], \quad (2.39)$$

que es la solución de la ecuación del telegrafista, y ésta se muestra en la Figura 2.13.

Es de notar que, para un τ fijo, la solución $U(y, \tau)$ toma únicamente valores para $y < \tau$, luego las partículas no pueden estar más lejos que cierto valor fijo al cabo de cierto tiempo, es decir, sólo pueden estar entre $(-y, y)$, se dice entonces que hay una propagación con velocidad finita. Comparándose con la gráfica de la solución a la ecuación de difusión la cual no tiene estos cortes (ver Figura 2.12), esto muestra que se pueden encontrar partículas en un cierto tiempo t en el intervalo $(-\infty, \infty)$ lo que implica una propagación infinita.

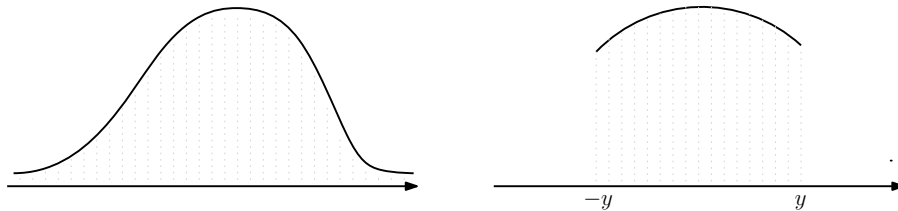


Figura 2.12: Comparación entre las soluciones a la ecuación de difusión y la del telegrafista para un cierto tiempo t . En el intervalo de la región sombreada, la curva indica la probabilidad de encontrar una partícula. A la izquierda, la solución de la ecuación de difusión muestra que es posible encontrarla en cualquier posición entre $(-\infty, \infty)$ lo cual requiere lo que se conoce como una propagación infinita. A la derecha, la solución de la ecuación del telegrafista muestra que la partícula se encontrará después de un cierto tiempo en dentro de un intervalo finito $(-y, y)$ lo cual se interpreta como una propagación finita.

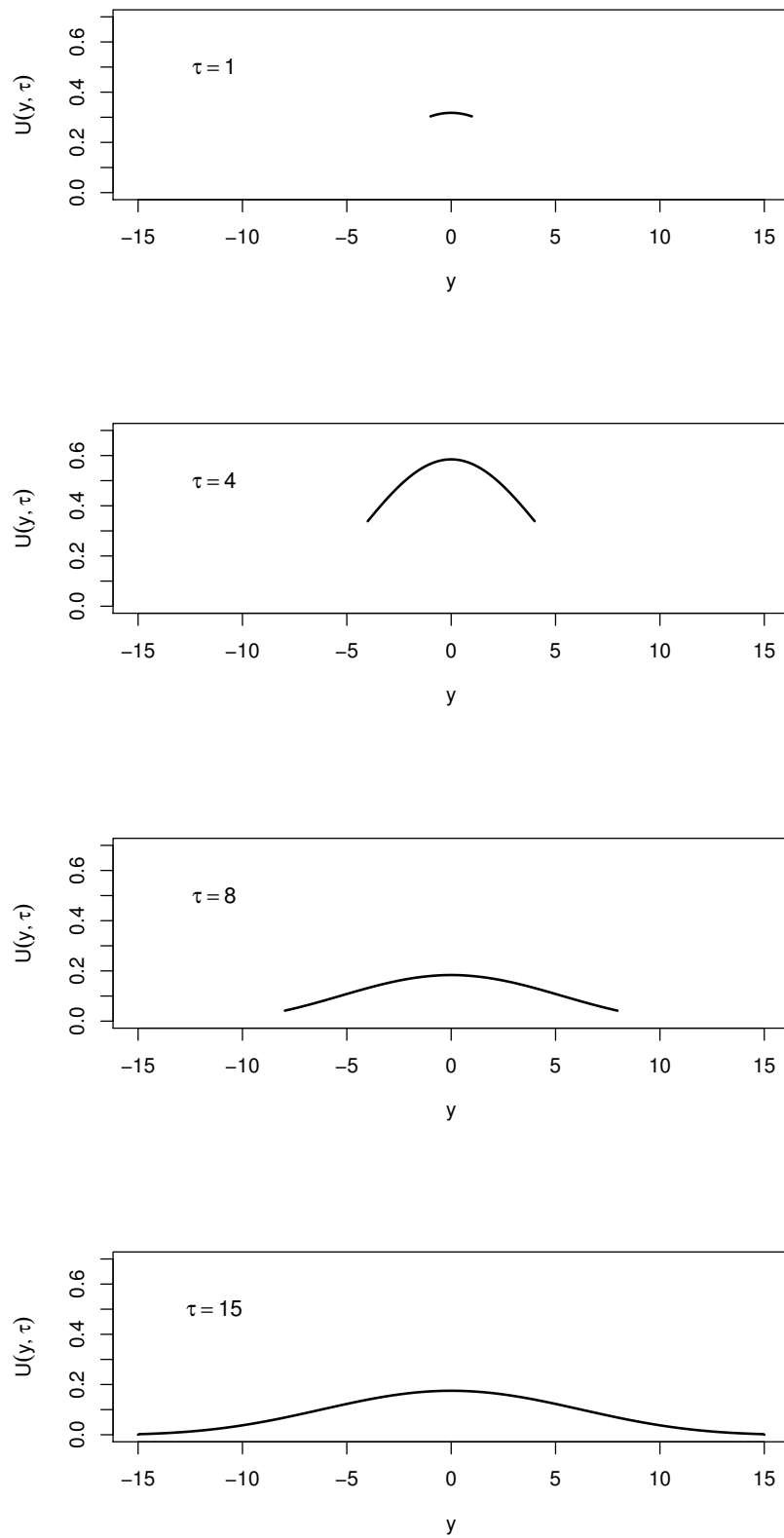


Figura 2.13: Solución de la ecuación del telegrafista para distintos valores de τ . La curva presenta un corte cuando $\tau^2 - y^2 < 0$, para estos valores la función de Bessel es igual a cero, esto se aprecia al aumentar τ , y de paso, la curva toma la forma de una curva gaussiana.

2.4. Caminata Aleatoria de Weierstrass

En esta sección, basada en [2, 34], se presenta la caminata aleatoria de Weierstrass en la cual el tamaño de salto ya no es constante lo cual produce una dinámica caracterizada por “vuelos” largos o de Lévy.

Se tiene entonces la siguiente situación, una partícula que puede moverse sobre el eje real dando saltos a la izquierda o a la derecha de manera aleatoria, pero, en este caso, de distinto tamaño y con probabilidad de cada tamaño de salto distinta, digamos, que sea más probable un tamaño de salto corto en magnitud que uno más largo.

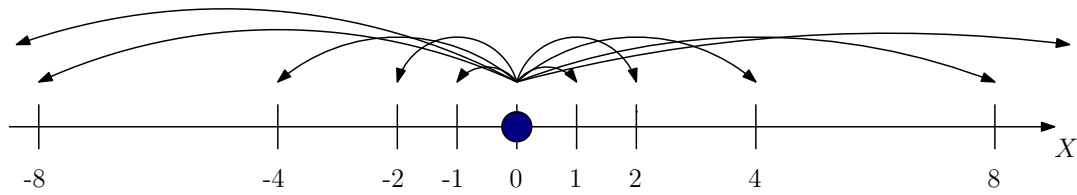


Figura 2.14: Posibles sitios a visitar para una partícula, que se encuentra en el origen $j = 0$, y sigue una caminata de Weierstrass en la cual está permitido cualquier tamaño de salto que es de la forma $\pm v, \pm bv, \pm b^2v, \pm b^3v, \dots$ y, que en caso de tener $v = 1$ y $b = 2$ se tiene la retícula que se observa en la figura.

En particular el tamaño del salto ξ es un múltiplo de un número que va incrementándose en una m potencia del siguiente modo

$$\pm v, \pm bv, \pm b^2v, \pm b^3v, \dots ,$$

esto es, ξ puede tomar cualquier valor de la forma

$$\xi = b^m v \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots , \tag{2.40}$$

y donde v es un número fijo cualquiera que determina el tamaño o escala de la retícula (ver Figura 2.14). Además $b > 1$ y, cada tamaño de salto se da con probabilidad

$$c, c/a, c/a^2, c/a^3, \dots ,$$

esto es,

$$p(\xi) = \frac{c}{a^m} , \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots , \tag{2.41}$$

donde $a > 1$ y $c = (a - 1)/2a$ es una constante de normalización, y de aquí se tiene que la probabilidad de dar un salto de tamaño ξ , o bien que $\xi = x$ (con x cualquier real) es de la siguiente forma [38]

$$p(\xi = x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{a^i} \left(\delta(x + b^i v) + \delta(x - b^i v) \right) , \tag{2.42}$$

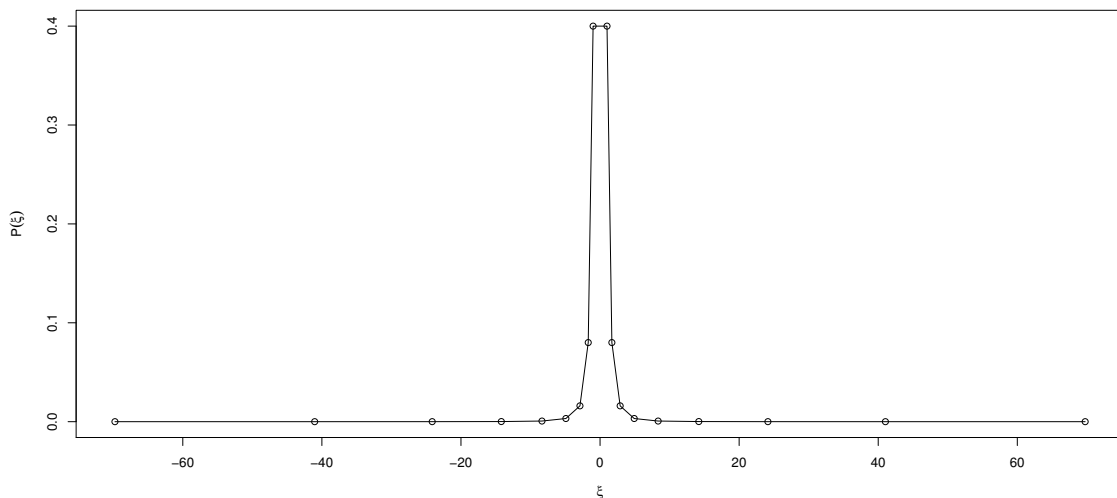


Figura 2.15: Distribución de probabilidad de Weierstrass, ecuación 2.41, para los primeros $m = 9$ lugares en la retícula, se utilizaron los parámetros $a = 5$, $b = 1.7$ y $v = 1$.

donde $\delta(x)$ es la delta de Kronecker y se puede tener una caminata aleatoria con esta distribución de probabilidad. En la figura 2.15 se muestra los valores de esta distribución de probabilidad.

Así, como en la caminata aleatoria ya vista en la sección 2.1, es posible tener una ecuación que nos da la probabilidad de encontrar la partícula en x , esto es, que haga un desplazamiento de tamaño $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ después de un tiempo n . Siguiendo la misma construcción se tiene que la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición x al tiempo n viene dado por el producto de la probabilidad de estar al tiempo $n - 1$ en una posición anterior válida (esto es, de la forma $\xi = b^m v$ para ciertos v y b fijos) $p_{n-1}(x \pm b^m v)$ y la probabilidad de dar un salto precisamente de ese tamaño, $p(\xi) = c/a^m$. Luego como existen m posibles $b^m v$ sitios en que puede encontrarse la partícula se suma cada posible probabilidad. Así, la caminata aleatoria de Weierstrass (WRW) viene dada como sigue [2]

$$p_n(x) = \frac{a-1}{2a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a^i} [p_{n-1}(x + b^i v) + p_{n-1}(x - b^i v)] , \quad (2.43)$$

esta caminata se puede estudiar con mas detalle en [2, 34, 38] y de entre los resultados importantes se tiene que la media y el segundo momento de la ecuación 2.41 respectivamente son

$$\langle \xi \rangle = 0 \quad (2.44)$$

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{a-1}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(bv)^2}{a} \right)^i , \quad (2.45)$$

de modo que si $(bv)^2 < a$, entonces 2.45 es finita y por tanto, 2.41 tiende a una Gaussiana, esto es, se tiene difusión normal en el sentido de tener una distribución de probabilidad con varianza finita, de otro modo, este segundo momento

diverge. En estos procesos el segundo momento define una longitud (o tamaño) de escala [34] y al ser éste divergente se dice que es libre de escala, esto se observa en la Figura 2.16 en donde se tienen saltos largos después de formar cúmulos pequeños, procesos con esta característica son conocidos como vuelos de Lévy y se dice que están en un régimen de superdifusión el cual se trata en el siguiente capítulo.

En la Figura 2.16 se observa una caminata de Weierstrass obtenida usando las ecuaciones 2.40 y 2.41. Al variar los parámetros a y b se obtienen, una caminata en régimen de superdifusión, esto es, cuando $a < b^2$ y por tanto la ecuación 2.45 no es finita y difusión normal cuando $b^2 < a$.

Hasta aquí es lo que respecta a una caminata aleatoria construida con una distribución llamada de Weierstrass y su respectiva simulación. Para la solución de esta ecuación y sus alcances se puede consultar [2, 34, 38].

Acerca de la simulación de este proceso

En este caso para representar una caminata aleatoria de Weierstrass primero se obtienen los sitios a ocupar por la partícula, esto viene dado por la ecuación 2.40. Entonces se calculan los $\xi = b^m v$ para los primeros m enteros y como los sitios a ocupar pueden ser tanto hacia la derecha como la izquierda del origen es necesario hacerlo para $-b^m v$.

Enseguida se calcula la distribución de probabilidad asociada a estos valores de ξ usando la ecuación 2.41. Por tanto para simular el proceso, al igual que en los capítulos anteriores se procede de la siguiente manera:

1. Se fija el inicio de la caminata en $x = 0$ para $t = 0$, esto es, se fija $x_0 = 0$.
2. Se calculan los sitios a ocupar por la partícula usando $\xi = b^m v$ y se calculan las probabilidades asociadas a esos sitios a ocupar mediante la ecuación 2.41.
3. Se obtiene un número de manera aleatoria de entre los generados en el paso anterior llamado u .
4. Se suma este valor a la posición anterior, esto es $x_n = x_{n-1} + u$.
5. Se repiten los pasos 3 y 4 hasta terminar el proceso.

En la figura 2.16 se observa una caminata aleatoria generada con el procedimiento anterior para distintos parámetros de a , b y v .

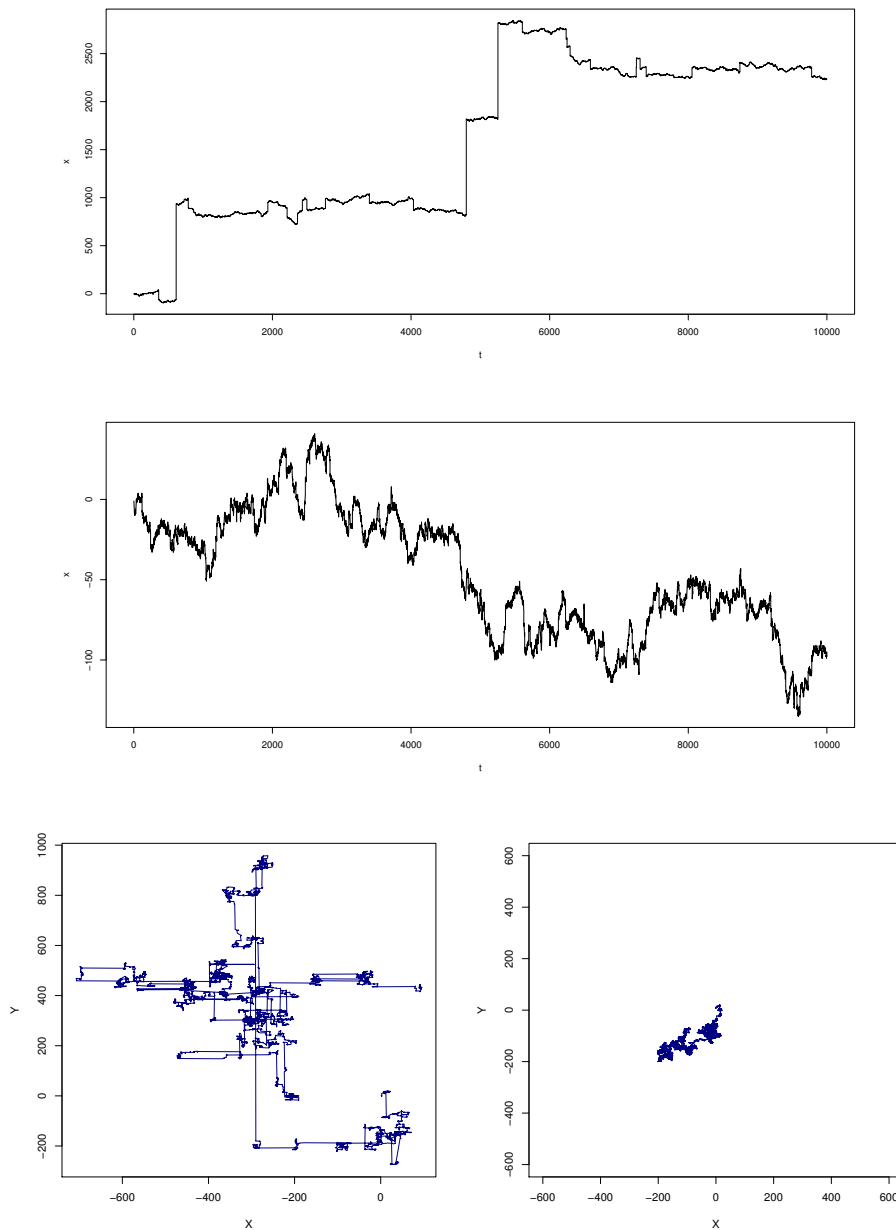


Figura 2.16: Una partícula efectuando una caminata aleatoria de Weierstrass para $n = 10000$ pasos con parámetros a y b . Si $a < b^2$ el comportamiento tiende a ser superdifusivo, en caso contrario ($b^2 < a$) tiende a ser un proceso de difusión gaussiana. Arriba, caso uno-dimensional. Los parámetros $a = 20$ y $b = 10$ dan lugar a un proceso en donde se observa un gran salto después de formar cúmulos pequeños, en particular este ensayo es un vuelo de Lévy, esto es, un proceso de superdifusión. Centro, los parámetros $a = 100$ y $b = 9$ no dan lugar a saltos largos y el patrón obtenido tiende a un movimiento browniano. Abajo mismos parámetros pero en el caso dos-dimensional. Abajo a la izquierda $a = 20$ y $b = 10$ (superdifusión). Abajo a la derecha con $a = 100$ y $b = 9$ (difusión normal).

2.5. Caminata Aleatoria Balística

Hasta ahora se han presentado dos procesos discretos de los que se obtiene la difusión normal (Sección 2.1) y la superdifusión (Sección 2.4). Para completar el cuadro es de esperarse tener otro proceso discreto que genere un proceso de subdifusión.

Una manera indirecta de obtenerlo es mediante un proceso discreto conocido como caminata aleatoria balística [31]. En este caso el medio (la retícula) en el cual se desplaza la partícula cambia en el tiempo.

El proceso se describe de la siguiente manera [31], se tiene una retícula en el plano XY y en cada nodo de ésta se coloca una partícula del tipo A excepto en el origen en el cual se coloca la partícula B que se va a desplazar. La partícula B se desplaza a uno de los cuatro nodos vecinos de manera aleatoria y, si está ocupado por una partícula A la “desprende” (la remueve) de la retícula dejando el nodo vacío, en seguida esta partícula B cambia de dirección de manera aleatoria, ver Figura 2.17.

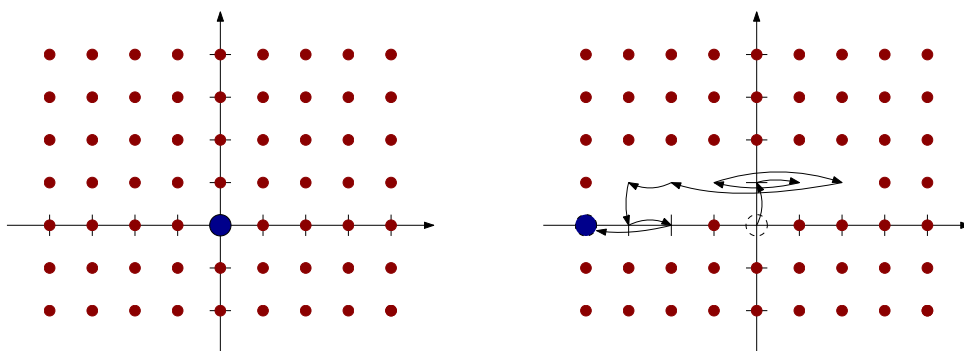


Figura 2.17: Representación de una caminata aleatoria balística para una retícula en el plano XY . Izquierda, en el inicio, al tiempo $n = 0$, todos los nodos están ocupados por una partícula A (color rojo) y una partícula B (en azul) en el origen. Derecha, se muestra la posición de la partícula B después de 10 pasos ($n = 10$). En cada salto desplazó una partícula A y aleatoriamente siguió en alguna de las posibles cuatro direcciones, si llega a un nodo vacío continúa su movimiento sin detenerse hasta llegar a un nodo ocupado por una partícula A .

Al inicio de la caminata todos los nodos están ocupados por una partícula del tipo A y el movimiento es idéntico a una caminata aleatoria simple, esto se mantiene para tiempos cortos, en este punto la probabilidad de que la partícula B choque con una A es alta.

Conforme pasa el tiempo se forma un cluster de nodos vacíos ya que el número de partículas A disminuye.

Para tiempos grandes (comportamiento asintótico) es necesario considerar [31] que el cluster de nodos visitados por B conforme pasa el tiempo se aproxima a una forma circular, en este punto la probabilidad de visitar un nodo no-ocupado se incrementa.

Cuando la partícula B alcanza el contorno del círculo formado, es removida una partícula A y al siguiente tiempo, con cierta probabilidad la partícula podría "rebotar" hacia atrás viajando a través del cluster de nodos no-ocupados y alcanzar la frontera opuesta, o moverse lateralmente, o bien, continuar su movimiento en la misma dirección ocupando el siguiente nodo vecino adentrándose en la región de nodos ocupados [31].

Esto se traduce (en [31]) en que la partícula pasa gran parte del tiempo desplazándose en la región central de la retícula. Y de aquí se tiene un "retardo" o comportamiento subdifusivo.

El tiempo requerido para que el área $S = \pi R^2$ de un cluster de radio R cambie viene dado [31] por

$$dt/dS = \alpha(R) + \beta R \quad , \quad (2.46)$$

donde el término $\alpha(R)$ es despreciable en el límite para valores de grandes de R y $\beta \in (0, 1/2]$ es una constante de proporcionalidad. Resolviendo la ecuación 2.46 se obtiene

$$\begin{aligned} KR^{3/2} &\sim t \\ R^2 &\sim kt^{1/3} \quad , \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde $k = 1/K = 3\sqrt{\pi}/2\beta$ es una constante. Considerando que el radio R escala con el mismo exponente que el desplazamiento cuadrático medio se tiene éste en la ecuación 2.47 con valor de $1/3$, el cual es menor que 1, implica subdifusión. Lo anterior es debido a que el movimiento de la partícula (lo que está relacionado con el desplazamiento cuadrático medio) está acotado por la frontera del cluster de radio R de nodos no-visitados.

Siendo esta una manera indirecta de obtener un comportamiento subdifusivo mediante un proceso discreto queda pendiente determinar si existe o no una distribución discreta que, en análogo a la binomial y la de Weierstrass, pudiera completar el cuadro referente a la obtención de los tres tipos de difusión mediante procesos discretos.

Más aún, por qué no, una caminata aleatoria discreta general que, dependiendo del tipo de distribución utilizada se comporte dentro de cualquiera de los tres regímenes de difusión, esto es, un análogo a la caminata aleatoria en tiempo continuo, la cual se revisa en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

La Caminata Aleatoria en Tiempo Continuo

Hasta ahora, si la caminata aleatoria descrita en los capítulos anteriores la queremos aplicar al problema de Pearson, en donde se considera el movimiento de alguna especie animal (o individuo) que se va desplazando de manera aleatoria dando saltos, esto implicaría que dicho individuo se estuviera moviendo “continuamente” esto es, da un salto (o vuelo) y al llegar a algún lado iniciará otro salto y así durante todo el tiempo que dure la caminata.

Pero, si el individuo después de cada salto, o vuelo, se detiene un momento “a descansar” y después continúa su caminata haciendo esta pausa o tiempo de espera, cada vez y con tiempos de duración distintos (aleatorios) se presenta una generalización de la caminata aleatoria ya vista, en la cual el tiempo de espera es cero. A esta caminata se le conoce como caminata aleatoria en tiempo continuo (CTRW por sus siglas en inglés).

La caminata aleatoria en tiempo continuo permite estudiar muchos y muy diversos problemas como los ya comentados en el capítulo 1 y en particular bajo ciertas condiciones, es posible obtener no sólo frentes de propagación finitos o infinitos, sino que dichos frentes evolucionen en el tiempo ya no de manera lineal como la difusión gaussiana obtenida en el capítulo 2. Procesos como estos se dice que tienen una difusión anómala.

A continuación se muestra la ecuación que rige una caminata aleatoria en tiempo continuo y su solución tomando como referencia principalmente a [30], y como apoyo a [25, 40], para los resultados numéricos según [22].

3.1. Ecuación y su Solución General

La situación en este caso es como sigue: se tiene la misma partícula la cual sólo puede desplazarse sobre el eje real dando saltos de tamaño cualquiera hacia la izquierda o derecha con cierta probabilidad y solo uno a la vez, pero ahora entre

cada salto la partícula se queda en reposo un cierto tiempo, distinto en cada paso, antes de dar el siguiente salto.

Lo único aleatorio en la caminata aleatoria simple era la dirección en la que se desplazaba la partícula ya que la longitud del salto y el tiempo entre cada salto eran constantes. Si se permite que el tamaño de salto tome cualquier valor al azar, por ejemplo con distribución normal de entre $(-\infty, \infty)$, se obtiene el movimiento browniano. Ahora en la caminata aleatoria en tiempo continuo (CTRW) se considerarán la longitud del salto y el intervalo de tiempo entre dos saltos como variables aleatorias.

De este modo, se define una función densidad de probabilidad de salto $\psi(x, t)$ de las dos variables ya citadas, la longitud de salto $X = x$ y el tiempo de espera entre dos saltos sucesivos $T = t$. Por tanto, la función densidad de probabilidad de la longitud de salto $\lambda_X(x)$ y la densidad de probabilidad del tiempo de espera $\omega_T(t)$ son las distribuciones marginales respectivas de $\psi(x, t)$, esto es

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \int_0^{\infty} \psi(x, t) dt \\ \omega(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) dx ,\end{aligned}$$

y se considera que ambas variables aleatorias son independientes, entonces $\psi(x, t) = \lambda(x)\omega(t)$.

De aquí se tiene que, la probabilidad de que la longitud del salto esté entre x y $x + dx$ viene dada por

$$P(x < X < x + dx) = \lambda_X(x) dx = \int_x^{x+dx} \int_0^{\infty} \psi(x, t) dt dx .$$

Ahora bien, para la partícula, la probabilidad $\eta(x, t)$ de arribar a x en el tiempo t , viene dada por [30]

$$\eta(x, t) = \delta(x)\delta(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t') \psi(x - x', t - t') dt' dx' , \quad (3.1)$$

lo cual se entiende de la siguiente manera: la probabilidad $\eta(x, t)$ de arribar a x en el tiempo t viene dada por el producto de la probabilidad $\eta(x', t')$ de arribar a la posición anterior x' al tiempo anterior t' y la probabilidad ψ de dar un salto de tamaño $x - x'$ con un tiempo de espera entre los dos saltos de $t - t'$, notando que ambos eventos: arribar a x en el tiempo t y dar un salto de cierto tamaño con cierto tiempo de espera, son independientes, de ahí el producto entre ambos.

Luego, se toma para toda posición x' posible (integrando de $-\infty$ a ∞) además de todo tiempo t' posible (integrando de 0 a ∞).

Finalmente la expresión $\delta(x)\delta(t)$ en el lado derecho de la igualdad es la condición inicial la cual garantiza que al inicio, en $t = 0$, con toda certeza la partícula

estará en $x = 0$ ya que

$$\begin{aligned}\eta(0, 0) &= \delta(0)\delta(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t') \psi(0 - x', 0 - t') dt' dx' \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t') \psi(-x', -t') dt' dx' \\ &= 1 ,\end{aligned}$$

la última igualdad es debido a que $\psi(-x', -t')$ no está definido, esto es, la probabilidad de dar un salto de tamaño $-x$ y con intervalo de tiempo negativo no tiene sentido físico y, por tanto, se le asigna una probabilidad de cero, $\psi(-x', -t') = 0$.

Hay que aclarar que hay varias maneras de considerar el inicio de la caminata, aquí se considera como si la partícula se estuviera moviendo y cuando definimos el inicio de la caminata es cuando arriba exactamente a lo que definimos como $x = 0$ en $t = 0$, lo anterior a este punto en el espacio y en el tiempo no está definido y por tanto no afecta al proceso.

Esta consideración se tomó en la caminata aleatoria (capítulo 2), volviendo a la ecuación 3.1, si se observa bien, tiene una estructura similar a la ecuación 2.5 de la caminata aleatoria simple, en donde la probabilidad $P_n(j - 1)$ de estar en $j - 1$ al tiempo n es el análogo de $\eta(x', t')$ estar en x' al tiempo t' y la probabilidad p de dar el salto hacia la derecha es el análogo de ψ de dar un salto de tamaño $x - x'$. Luego en 2.5 se suman ambas opciones, o se da el salto desde la izquierda o desde la derecha que es el análogo de integrar en x desde $-\infty$ a ∞ , así la estructura de ambos modelos es la misma.

Ya se definió la probabilidad η para la partícula de arribar a x exactamente al tiempo t . Lo siguiente es hallar la probabilidad W de encontrar la partícula en x en el tiempo t , en ambos casos se trata de: observar la partícula en x en el tiempo t , para el primer caso coincide que arribó ahí exactamente en ese tiempo t , y para el segundo caso es: la partícula ya había arribado antes de observarla (Figura 3.1).

La distribución de probabilidad $W(x, t)$ de estar en x al tiempo t viene dada por

$$W(x, t) = \int_0^t \eta(x, t') \Psi(t - t') dt' . \quad (3.2)$$

En general, la función $\Psi(\tau)$ es la probabilidad de tener un tiempo de espera de duración τ , esto es, que la partícula no realice un salto durante el intervalo de 0 a τ .

Lo anterior se obtiene de

$$\bar{\Psi}(t) = \int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau , \quad (3.3)$$

la cual es la probabilidad de dar un salto en cualquier momento τ entre $(0, t)$, así, su complemento es la probabilidad de no dar un salto durante el intervalo

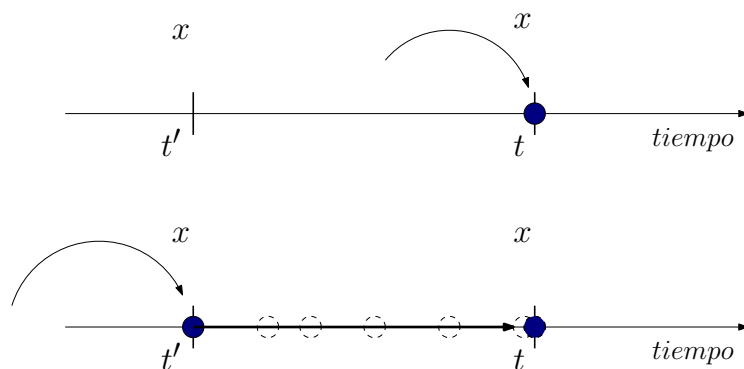


Figura 3.1: El eje horizontal es el tiempo. Arriba, representación de la situación de arribar a x al tiempo t , se observa que en el tiempo anterior t' en ese punto x , no está la partícula. Abajo, se representa la situación de estar la partícula en x al tiempo t , aquí en t la partícula se encuentra en x y obsérvese que en el tiempo t' la partícula ya se encontraba ahí y se queda en reposo hasta el momento en que se observa en el tiempo t .

de 0 a τ

$$\overline{\Psi}(t) = \Psi(t) = 1 - \int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau . \quad (3.4)$$

De aquí se tiene que la ecuación 3.2 describe la evolución de una caminata aleatoria en tiempo continuo como la probabilidad de estar en x al tiempo t y viene dada por, la probabilidad $\eta(x, t')$ de arribar a x en el tiempo t' y no moverse, esto es, hay un tiempo de espera $t - t'$ permaneciendo la partícula en x (como se ve en la Figura 3.1).

La solución de la ecuación de una caminata aleatoria en tiempo continuo

Resolver la ecuación 3.2 que rige una caminata aleatoria en tiempo continuo, como en los casos ya descritos, equivale a encontrar una función, este caso, $W(x, t)$ que nos dice la probabilidad de encontrar una partícula en la posición x al tiempo t , de igual modo, se utiliza la transformada de Fourier para la variable espacial y, aprovechando que se tiene una variable temporal, se puede utilizar a la vez una transformada de Laplace.

Se sigue, entonces, que pasando al espacio de Fourier-Laplace la ecuación 3.2

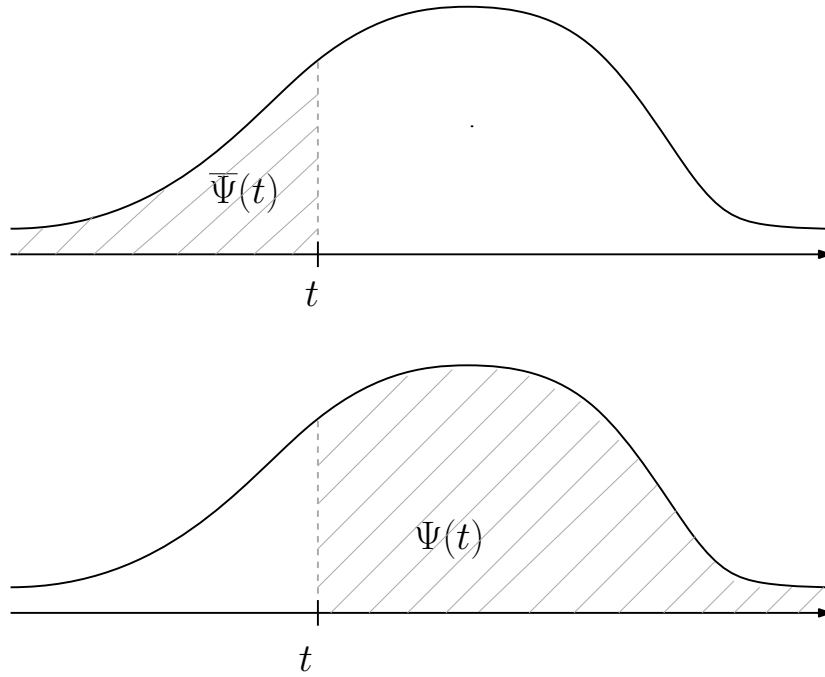


Figura 3.2: Arriba, se muestra la probabilidad de dar un salto en un intervalo de tiempo que puede ser cualquier valor τ entre 0 y t , y viene dado por la densidad acumulada de $w(t)$, esto es $\bar{\Psi}(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau$. Abajo, la probabilidad de no efectuar un salto a partir de t se representa por el área sombrada en la figura (el complemento de $\bar{\Psi}(t)$) y es igual a $\Psi(t) = 1 - \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau$.

es

$$\begin{aligned}
 W(x, s) &= \int_0^{\infty} \int_0^t \eta(x, t') \Psi(t - t') e^{-st} dt' dt \\
 &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \eta(x, t') \Psi(t - t') dt' \right\} \\
 &= \eta(x, s) \Psi(s) , \\
 W(k, s) &= \mathcal{F} \left\{ \eta(x, s) \Psi(s) \right\} \\
 &= \eta(k, s) \Psi(s) , \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

en donde, $\eta(k, s)$ y $\Psi(s)$ son (ver Apéndice 5.4)

$$\begin{aligned}
 \eta(k, s) &= \frac{1}{1 - \psi(k, s)} \\
 \Psi(s) &= \frac{1}{s} (1 - w(s)) .
 \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación 3.5 se tiene

$$W(k, s) = \frac{1 - w(s)}{s} \frac{1}{1 - \psi(k, s)} . \tag{3.6}$$

Esta es la solución de 3.2 y también es conocida como el propagador en el espacio Fourier-Laplace (k, s) , finalmente, la solución se obtiene regresando el espacio

original (x, t) aplicando la transformada inversa de Fourier-Laplace.

La ecuación 3.6, dependiendo de las distribuciones $\lambda(x)$ y $w(t)$, para transformarse en el espacio (x, t) , requiere, en ocasiones, de técnicas no convencionales como el cálculo fraccional, y de aquí que las soluciones en el espacio (x, t) no se comporten de manera similar dando lugar, por sus características, a distintos tipos de difusión.

A continuación, se hace un paréntesis y se introduce de manera breve el cálculo fraccional y un resultado que se utiliza en la solución de una ecuación de una caminata aleatoria en tiempo continuo.

3.2. El Cálculo Fraccional

La manera más útil de describir y/o solucionar problemas en física, y muchas otras áreas, es por medio de ecuaciones, en particular, cuando está involucrado el cambio de alguna magnitud se requiere establecer una relación entre dicha magnitud y la tasa a la cual cambia, esto se logra por medio de una ecuación diferencial (una ecuación que tiene al menos una derivada entre sus términos), es decir, si la distancia x que recorre un objeto cambia con el tiempo t , esta tasa recibe el nombre de rapidez v y es proporcionada por una expresión que conocemos como derivada de la cantidad (función) que está cambiando

$$v = \frac{d}{dt}x . \quad (3.7)$$

Esta tasa (o rapidez) puede ser constante o no, y se puede obtener la razón de cambio (que en el caso de la rapidez recibe el nombre de aceleración) usando una segunda derivada (esto es derivar la función ya derivada, siempre que esta derivada exista)

$$a = \frac{d}{dt}v = \frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}x \right) .$$

Matemáticamente hablando, si la función lo permite, se puede obtener una tercer derivada, y así sucesivamente aunque carezca de significado físico.

Ahora bien, en una ecuación diferencial, tener una derivada entre sus términos, implica al resolverla, que se efectúe una operación recíproca en la derivada de la función, esto es, la antiderivada de f (o integral de la función).

Aunque por definición (y por analogía con algún fenómeno físico) una función f sólo admite un número natural como orden de derivada, es posible construir, bajo ciertas condiciones, una forma general de una derivada de una función la cual admita un orden de derivación cualquiera, es decir, un orden del tipo un número negativo y, más aún, cualquier número real.

Esta construcción recibe el nombre de derivada de orden fraccional (y la respectiva rama de estudio, cálculo fraccional) y, aunque aún no es aceptado del todo, debido a que sus definiciones y teoremas no son compatibles entre sí o con los resultados del análisis convencional, ha resultado ser una herramienta muy útil para resolver problemas en muchas áreas de investigación.

La gran cantidad de resultados favorables, obtenidos utilizando cálculo fraccional, y el simple hecho de eliminar la restricción de admitir sólo derivadas de orden $n \in \mathbb{N}$ son razones suficientes para trabajar con ésta, ya sea utilizándolo como herramienta que genere nuevas preguntas a resolver, o bien, para formalizarlo y finalmente tener una generalización dentro del análisis el cual abra nuevas ventanas de estudio.

Como se mencionó arriba, es natural preguntarse si existe un orden de derivada que no sea un número entero positivo. A continuación se presenta de manera breve la construcción presentada por Oldham y Spanier [33] siguiendo su notación, la cual, de entre las muchas existentes, nos parece intuitiva y de fácil manejo.

Para contestar esta pregunta, primero se puede establecer que, dada una función f , la primer derivada de esta función se designa como f' , la segunda derivada como f'' , pudiendo ser f^1 y f^2 , o bien

$$\frac{d}{dx}f \text{ y } \frac{d^2}{dx^2}f, \quad (3.8)$$

respectivamente y entendiéndose que se puede extender a cualquier orden n de derivada siempre que la función lo permita.

Con esta notación es natural asumir que, si la derivada es de orden 1, su recíproco, es decir, la integral (o antiderivada) de una función, será una derivada de orden -1

$$\frac{d^{-1}}{[dx]^{-1}}f = \int_0^x f(y) dy, \quad (3.9)$$

los límites de esta integral se escogieron por definición y hacen énfasis en que se está operando con la variable x . Más aún, usando la traslación de los límites en una integral por medio de

$$\int_a^x f dy = \int_0^{x-a} f(y+a) dy,$$

es preferible hacer

$$\frac{d^{-1}f}{[d(x-a)]^{-1}} = \int_a^x f(y) dy. \quad (3.10)$$

Para una justificación en la extensión a un orden $n < -1$ y todo resultado aquí expuesto existe una gran variedad de trabajos con diversos enfoques ya

sea en ingeniería, física, matemáticas y otros, además del trabajo ya citado de Oldham [33] capítulos 2, 3 y 8.

Así, de manera general se tiene que

$$\frac{d^{-n} f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0, \quad (3.11)$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Siguiendo a Oldham, se llama a las expresiones 3.9, 3.10, 3.11, operador diferintegral (del inglés differintegral), debido a que el operador derivada e integral es el mismo salvo el signo del orden.

Y así, de manera más precisa establece [33](p.45) “el valor en x_0 de la diferintegral de orden q de una función f definida en el intervalo $a \leq x_0 \leq x$ será:”

$$\left. \frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} \right|_{x=x_0}. \quad (3.12)$$

Un operador de este tipo se puede descomponer según la siguiente proposición

$$\frac{d^{m+n} f}{[d(x-a)]^{m+n}} = \frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n f}{[d(x-a)]^n}, \quad (3.13)$$

para $m, n \geq 0$. Y de manera general

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-n} f}{[d(x-a)]^{m-n}} &= \frac{d^m}{d[(x-a)]^m} \left[\frac{d^{-n} f}{[d(x-a)]^{-n}} \right] \\ &= \frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}} \left[\frac{d^m f}{[d(x-a)]^m} \right] + R, \end{aligned} \quad (3.14)$$

para $m, n \geq 0$ y con R un residuo de la función evaluado en el punto a como sigue

$$R = \sum_{k=n-m}^{n-1} \frac{[x-a]^k}{k!} f^{(k+m-n)} \Big|_{x=a}.$$

Esta propiedad es equivalente a tener

$$\frac{d}{dx} \int f = \int \frac{df}{dx} + R, \quad (3.15)$$

como cabría esperar.

Ahora, se define el operador derivada (fraccional) de Riemann-Liouville como

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-a)^{q+1}} dy, \quad (3.16)$$

para $q < 0$ y donde $\Gamma(n + 1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$. La definición anterior se puede extender a cualquier q usando la propiedad mostrada en la ecuación 3.13, de manera que la ecuación 3.16 se descomponga en

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{d^{q-n} f}{[d(x-a)]^{q-n}} \right], \quad (3.17)$$

eligiendo un n que cumpla $q < n$, observando que d^n/dx^n es una derivada de orden entero del análisis estándar.

Por simplicidad se define (siguiendo la notación de Metzler [30]) el operador de Riemann-Liouville como

$${}_a D_x^q f = \frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}. \quad (3.18)$$

Como es de esperarse, existen numerosos resultados y propiedades a partir de estas definiciones, entre otros la linealidad, la composición, regla de Leibniz, regla de la cadena.

Finalmente, un resultado que será utilizado en la sección siguiente es la transformada de Laplace de una derivada de orden fraccional [33]

$$\mathcal{L}\{{}_0 D_t^q f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^q f}{dt^q}\right\} = s^q \mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{q-1-k}}{dt^{q-1-k}} f \Big|_{t=0}, \quad (3.19)$$

para todo q tal que $n - 1 < q \leq n$ con n entero.

3.3. Distintos Tipos de Difusión

Como se mencionó anteriormente, en la difusión, una característica importante es qué tanto se desplazan las partículas en el tiempo y, el desplazamiento cuadrático medio (msd) nos da una medida de esto, dependiendo cómo se relacione con el tiempo se define como difusión normal si éste aumenta de manera lineal, esto es, $\propto t^\alpha$ con $\alpha = 1$, y si

$$\begin{aligned} \alpha > 1 & \text{ se conoce como superdifusión} \\ 0 < \alpha < 1 & \text{ se conoce como subdifusión} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Esto se observa en la figura 3.3 y, a continuación, se describen estas situaciones.

La Difusión Normal

Por ejemplo, si en la caminata aleatoria en tiempo continuo se tiene que el tamaño de los saltos es una cantidad aleatoria que sigue una distribución normal

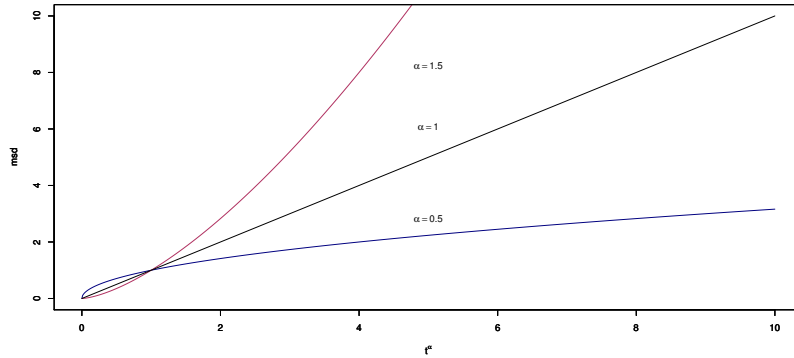


Figura 3.3: Desplazamiento cuadrático medio (msd) para los tres tipos de difusión, el cual es de la forma t^α con $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ ó $\alpha = 1$

y los tiempos de espera entre cada salto son también un valor aleatorio pero tomados de una distribución de tipo exponencial, esto es

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-x^2/4\sigma^2} \quad \text{y} \quad w(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} . \quad (3.21)$$

Luego, sus respectivas representaciones (después de una expansión) en el espacio de Fourier y Laplace son

$$\lambda(k) = e^{-\sigma^2 k^2} = 1 - \sigma^2 k^2 + O(k^4) \quad (3.22)$$

$$w(s) = \frac{1}{1 + \tau s} = 1 - \tau s + O(s^2) , \quad (3.23)$$

de aquí, en la ecuación 3.6 se obtiene

$$W(k, s) = \frac{1}{s + K k^2} , \quad (3.24)$$

esta es la solución en el espacio (k, s) , donde $K = \sigma^2/\tau$, y para la solución en el espacio (x, t) se aplica la transformada inversa de Laplace-Fourier, entonces

$$s W(k, s) - 1 = -K k^2 W(k, s) . \quad (3.25)$$

En este caso se tienen ya establecidas las relaciones

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \right\} = -k^2 W(k, t) \quad (3.26)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} W(x, t) \right\} = s W(x, s) - W_0(x) , \quad (3.27)$$

de modo que se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) , \quad (3.28)$$

la cual es similar a la ecuación 2.18 con $v = 0$, esto es, recordando que $v \propto (b-a)$ se tiene que $a = b = 1/2$, por lo que se tiene un movimiento Browniano cuya solución (ya obtenida) es la ecuación 2.22 y se observa en la figura 3.5 (abajo).

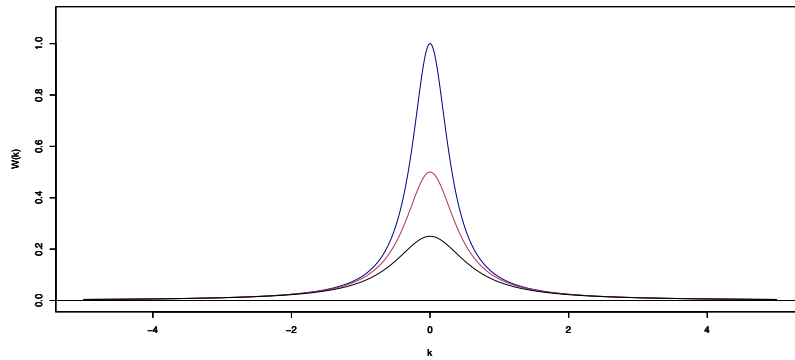


Figura 3.4: Solución de la ecuación 3.24 (régimen de difusión normal), espacio Laplace-Fourier (k, s) con $\sigma = 1$ y $\tau = 0.1$ y tiempos $s = 1, 2, 3$, en color azul, marrón y negro respectivamente.

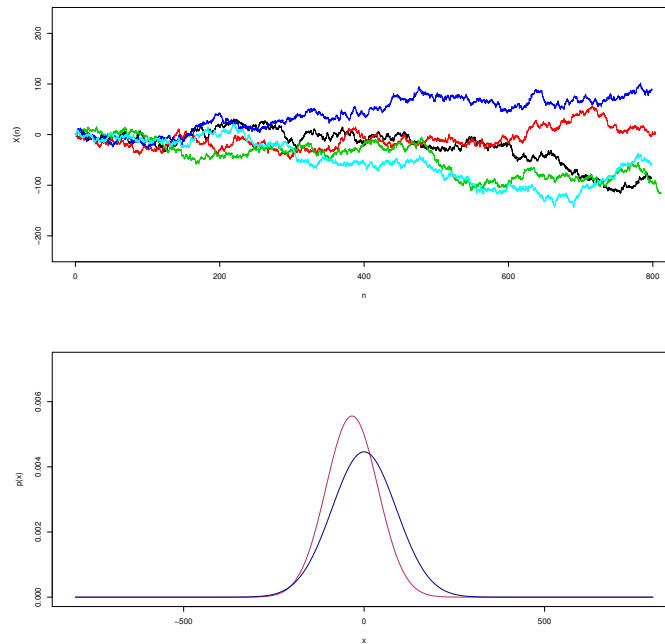


Figura 3.5: Arriba, realización de una caminata aleatoria en tiempo continuo para cinco partículas que sigue un comportamiento de difusión normal. Abajo, solución de la ecuación 3.28, en azul teórica, en rojo empírica.

Acerca de la simulación de este proceso

Para simular la caminata aleatoria en tiempo continuo en un régimen de difusión normal se utiliza para el tamaño del salto una distribución normal, para los tiempos de espera, una distribución exponencial. Por tanto una manera de obtener una simulación es:

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x_0 = 0$.

2. Para el tamaño de salto se genera un número aleatorio u con distribución normal. Este valor se suma a la posición anterior, esto es $x_n = x_{n-1} + u$.
3. Luego para el tiempo de espera se genera un número aleatorio r de una distribución exponencial. Este valor se suma al tiempo anterior, esto es $t_n = t_{n-1} + r$.
4. Se repiten los pasos 2 y 3 hasta completar el proceso deseado.

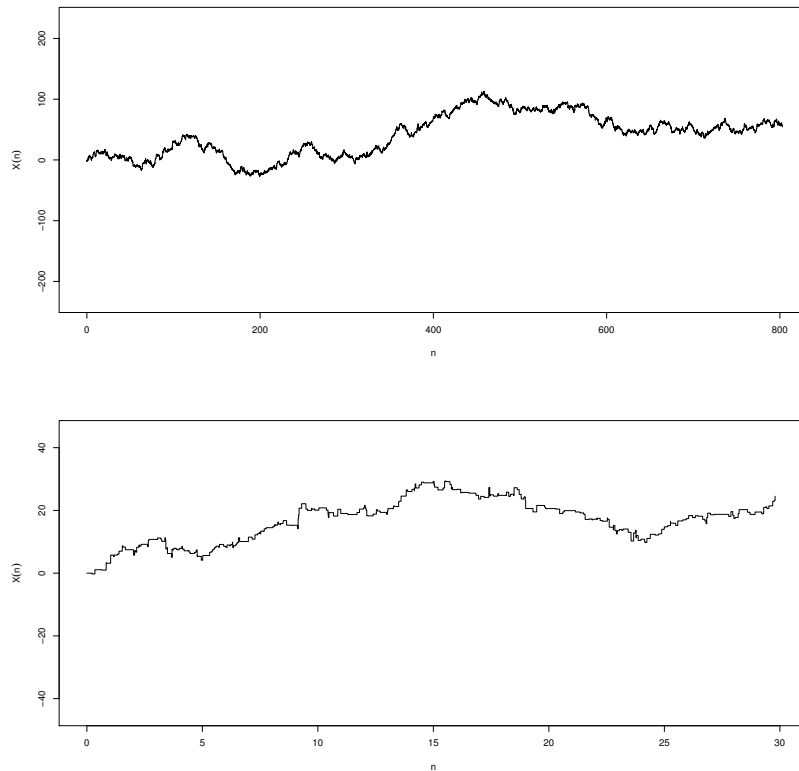


Figura 3.6: Realización de una caminata aleatoria en tiempo continuo en un régimen de difusión normal, el eje horizontal representa el tiempo t , el eje vertical la posición x . Abajo, realización para un intervalo de tiempo corto en donde se observa los tiempos de espera como segmentos horizontales en donde la partícula no se desplaza. En la figura de arriba no se notan estos tiempos de espera debido a la escala de la gráfica.

Subdifusión

La difusión anómala se obtiene dependiendo del comportamiento de las distribuciones, en particular, cuando

- i*) la media de $w(t)$ (conocida como tiempo característico) no existe y la varianza de $\lambda(x)$ es finita,
- ii*) la media de $w(t)$ es finita pero la varianza de $\lambda(x)$ no exista,
- iii*) ambas, la media de $w(t)$ y la varianza de $\lambda(x)$ no existan.

Aquí nos centramos en los primeros dos, en el caso *i* se utiliza una densidad de tiempos de espera que tenga una forma de ley de potencia y en particular con un comportamiento asintótico en el espacio de Laplace de la forma

$$w(s) \sim 1 - (s\tau)^\alpha \quad (3.29)$$

en donde $\alpha \in (0, 1)$ y una densidad normal del tamaño de salto de la forma $\lambda(k) \sim 1 - (\sigma k)^2$ en el espacio de Fourier.

Luego, de la ecuación 3.6 se llega a

$$\begin{aligned} W(k, s) &= \frac{1 - (1 - (s\tau)^\alpha)}{s} \frac{W_0(k)}{1 - [(1 - s^\alpha \tau^\alpha)(1 - \sigma^2 k^2)]} \\ W(k, s) &= \frac{W_0(k)/s}{1 + K_\alpha s^{-\alpha} k^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $K_\alpha = \sigma^2/\tau^\alpha$, al igual que en el caso anterior, esta es la solución de la ecuación en el espacio Fourier-Laplace (k, s) (ver Figura 3.7).

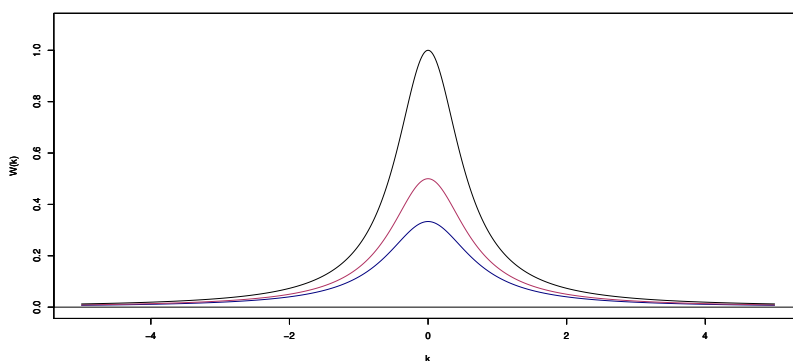


Figura 3.7: Solución de la caminata aleatoria en tiempo continuo de un proceso en régimen de subdifusión, ecuación 3.30, espacio de Laplace-Fourier (k, s) , con $\alpha = 1/2$, $\tau = 1/10$, $\sigma = 1$ y tiempos $s = 1$, $s = 2$ y $s = 3$ en color azul, marrón y negro respectivamente.

Para obtener la solución en el espacio (x, t) , se aplican las transformadas inversas de Fourier y Laplace. Si se aplica primero Fourier (ecuación 3.26), se tiene que

$$\begin{aligned} sW(k, s) + K_\alpha s^{1-\alpha} k^2 W(k, s) &= W_0(k) \\ sW(x, s) - W_0(x) &= K_\alpha s^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, s) \end{aligned} \quad (3.31)$$

con $\alpha \in (0, 1)$. Ahora bien, al querer aplicar la transformada inversa de Laplace hay que observar que la ecuación 3.27 es válida solo para potencias enteras (y mayores que 0) de s , por tanto, se utiliza la fórmula de la transformada de Laplace de una derivada de orden un número q real (sección 3.2 o bien [30] pp. 18(32)), por tanto

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^p f(t) \} = s^p F(s) \quad ; \quad \text{para } p < 0 , \quad (3.32)$$

y se tiene entonces,

$$sW(x, s) - W_0(x) = K_\alpha s^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, s) , \quad (3.33)$$

y en el lado izquierdo de la igualdad se aplica Laplace para potencias enteras de s , $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$, y en el lado derecho se aplica 3.32, por lo que se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) , \quad (3.34)$$

esta última se conoce como ecuación de difusión fraccional (en el tiempo) donde K_α es el coeficiente de difusión. La solución [28, 30] de esta ecuación se obtiene de nuevo en el espacio Laplace-Fourier de la ecuación 3.30

$$W(k, s) = \frac{1/s}{1 + K_\alpha s^{-\alpha} k^2} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + K_\alpha k^2} , \quad (3.35)$$

Y usando el resultado de la ecuación 5.34 del Apéndice 5.5.5 en la ecuación anterior se tiene

$$W(k, t) = E_{\alpha,1}(at^\alpha) \quad ; \quad \text{con } a = -K_\alpha k^2 , \quad (3.36)$$

y en seguida aplicando Fourier

$$W(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-K_\alpha t^\alpha k^2) e^{-ikx} dk ,$$

observando que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ donde $\sin x$ al ser función impar es cero y a la vez $E_{\alpha,1}(-pk^2)$ es función par junto con $\cos x$ por lo que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-pk^2) \cos kx dk = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_{\alpha,1}(-pk^2) \cos kx dk ,$$

y del resultado de la ecuación 5.35 del Apéndice 5.5.5

$$W(x, t) = \frac{1}{|x|} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|^2}{K_\alpha t^\alpha} \left| \begin{matrix} (1, \alpha) \\ (1, 2) \end{matrix} \right. \right] , \quad (3.37)$$

después aplicando las propiedades descritas en las ecuaciones 5.29 y 5.30 primero

$$W(x, t) = \frac{1}{2|x|} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|}{K_\alpha t^\alpha} \left| \begin{matrix} (1, \alpha/2) \\ (1, 2/2) \end{matrix} \right. \right] ,$$

y, en seguida

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \frac{1}{2} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|}{K_\alpha t^\alpha} \left| \begin{matrix} (1 + (-1)\alpha/2, \alpha/2) \\ (1 + (-1)1, 1) \end{matrix} \right. \right], \\ W(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4K_\alpha t^\alpha}} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}} \left| \begin{matrix} (1 - \alpha/2, \alpha/2) \\ (0, 1) \end{matrix} \right. \right], \end{aligned} \quad (3.38)$$

esta es la solución de la ecuación y viene dada en términos de una función H (o función de Fox) $H_{p,q}^{m,n}(z)$ [29, 30] en donde K_α se toma como coeficiente de difusión.

Finalmente, para el desplazamiento cuadrático medio se tiene que [30]

$$\langle x^2 \rangle = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^2}{dk^2} W(k, s), \quad (3.39)$$

seguido de la transformada inversa de Laplace, por tanto derivando dos veces la ecuación 3.30

$$\frac{d^2}{dk^2} W(k, s) = \frac{W_0(k)}{s} \left[- \frac{2K_\alpha s^{-\alpha}}{1 + K_\alpha s^{-\alpha} k^2} - \frac{2(2kK_\alpha s^{-\alpha})^2}{(1 + K_\alpha s^{-\alpha} k^2)^3} \right], \quad (3.40)$$

luego, cuando $k \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^2}{dk^2} W(k, s) = 2K_\alpha \frac{1}{s^{1+\alpha}}, \quad (3.41)$$

donde $W_0(k) = 1$ y de su transformada inversa se obtiene

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \quad (3.42)$$

esto es, la media del cuadrado del desplazamiento crece a una tasa menor que uno (ya que $\alpha \in (0, 1)$). A esto se le llama subdifusión.

Acerca de la simulación de este proceso

Para una simulación en el caso de la subdifusión en una dimensión se puede considerar el tamaño de salto como una variable aleatoria con distribución de probabilidad normal mientras que para obtener valores de tiempo de espera seguimos la metodología mostrada en [22], (p.31). En éste parte de una densidad de tiempos de espera de la forma

$$\psi(t) = \frac{\alpha/\tau}{(1 + t/\tau)^{1+\alpha}}, \quad (3.43)$$

donde α y τ son el exponente fraccional de la difusión y el tiempo de espera característico respectivamente. Después de realizar la expansión asintótica de esta densidad y tomar ciertas consideraciones llega a

$$\delta t = \tau \left((1 - r)^{1-\alpha} - 1 \right), \quad (3.44)$$

donde r proviene de una distribución uniforme entre 0 y 1. Así, un algoritmo para esta simulación es el siguiente

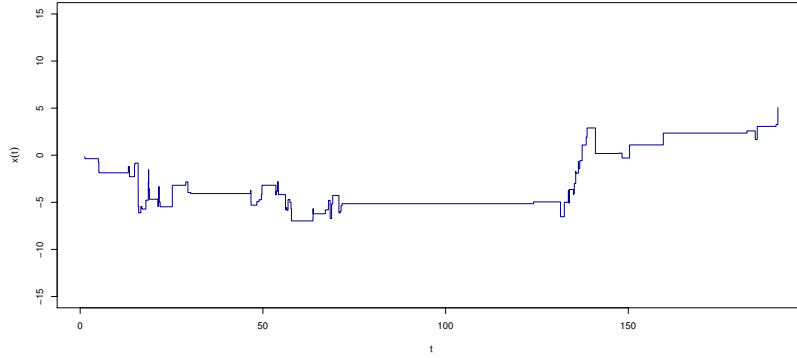


Figura 3.8: Realización de una caminata aleatoria en tiempo continuo en un régimen de subdifusión. El eje horizontal representa el tiempo t , y el vertical la posición de la partícula. En este caso se observa cómo en intervalos ‘largos’ de tiempo la partícula no se desplaza (línea horizontal) además de desplazarse dando saltos ‘cortos’ (líneas verticales). Al final del proceso la posición final es una distancia ‘corta’ con respecto al origen, de ahí el término subdifusión. Tiene que pasar ‘mucho’ tiempo para que la partícula se aleje considerablemente del origen.

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x = 0$ en $t = 0$, $x_0 = 0$.
2. Se genera un número aleatorio con distribución normal u y uno con distribución uniforme r .
3. Se suma el valor u al valor de posición anterior, esto es $x_t = u + x_{t-1}$.
4. Para el caso del tiempo, dado r , se calcula el número δt de la ecuación 3.44 y se suma al valor de tiempo anterior, esto es $t_n = t_{n-1} + r$.
5. Se repiten los pasos 2 al 4 hasta completar los n pasos.

En la figura 3.8 se muestra una simulación utilizando los pasos anteriores. El eje horizontal representa el tiempo y aquí se ve que no en todo valor de t ocurre un desplazamiento, más aún, ocurren intervalos largos de t en los que no se desplaza la partícula, esto es debido a que la varianza de las distribución de tiempos de espera es infinita.

Superdifusión

Por otro lado, para el caso *ii* se tiene que el tiempo característico (la media de $w(t)$) es finito pero la varianza del tamaño de salto $\lambda(x)$ diverge [30] [25] (pp. 97, 111), de modo que

$$\lambda(x) \sim \frac{A_\alpha}{\sigma^\alpha |x|^{1+\alpha}} \quad ; \quad \lambda(k) \sim 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha \quad (3.45)$$

$$w(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad ; \quad w(s) \sim 1 - \tau s \quad , \quad (3.46)$$

con $\alpha \in (1, 2)$ y como en el caso anterior al sustituir estas en la ecuación 3.6 se obtiene

$$W(k, s) = \frac{1}{s + K^\alpha |k|^\alpha} \quad , \quad (3.47)$$

la cual es la solución de la ecuación de la caminata aleatoria en tiempo continuo en el espacio Laplace-Fourier (k, s) con $K^\alpha = \sigma^\alpha/\tau$ (ver Figura 3.9). Para obtener la solución en el espacio (x, t) se aplica, primero la transformada inversa de Laplace y enseguida la de Fourier

$$\begin{aligned} sW(k, s) - 1 &= -K^\alpha |k|^\alpha W(k, s) \\ \frac{\partial}{\partial t} W(k, t) &= -K^\alpha |k|^\alpha W(k, t) \quad , \end{aligned} \quad (3.48)$$

con $\alpha \in (1, 2)$, y como en el caso anterior, la fórmula de la transformada de Fourier es para potencias enteras mayores que 0, por lo que usando la transformada de Fourier obtenida del cálculo fraccional [30] p.59(A.13) $\mathcal{F}\{-_\infty D_x^\alpha f(x)\} = -|k|^\alpha f(k)$ es

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = -_\infty D_x^\alpha K^\alpha W(x, t) \quad , \quad (3.49)$$

la cual es una ecuación de difusión fraccional (en el espacio) en donde $-\infty D_x^\alpha$ es el operador fraccional Riez-Weyl definido como sigue

$$-\infty D_x^\alpha f = \frac{d^q}{dx^q} f = \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1+q}} dy \quad , \quad (3.50)$$

y con K^α la constante de difusión y cuya solución en términos de una función de Fox [17,30] se obtiene, al igual que en el caso anterior, aplicando la transformada de Laplace-Fourier inversa al propagador (ecuación 3.47), pero antes se le da la siguiente forma [28]

$$\begin{aligned} W(k, s) &= \frac{1}{s + K^\alpha |k|^\alpha} \quad , \\ W(k, s) &= \frac{1}{s + A} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - (-As^{-1})} \\ &= \frac{1}{s} \frac{1}{1 - B} \end{aligned} \quad (3.51)$$

y la segunda expresión de la derecha de la igualdad es a donde converge una serie geométrica siempre que $|B| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} W(k, s) &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} B^n = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{A}{s}\right)^n \\ W(k, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n s^{n-1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

ahora la transformada inversa de Laplace de esta ecuación sabiendo que para una potencia es $\mathcal{L}^{-1}\{s^{-n}\} = t^{n-1}/\Gamma(n)$ [25, 28]

$$W(k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{\Gamma(n+1)} \quad (3.53)$$

donde $A = K^\alpha |k|^\alpha$, y usando el hecho de que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$W(k, t) = e^{-K^\alpha |k|^\alpha t}. \quad (3.54)$$

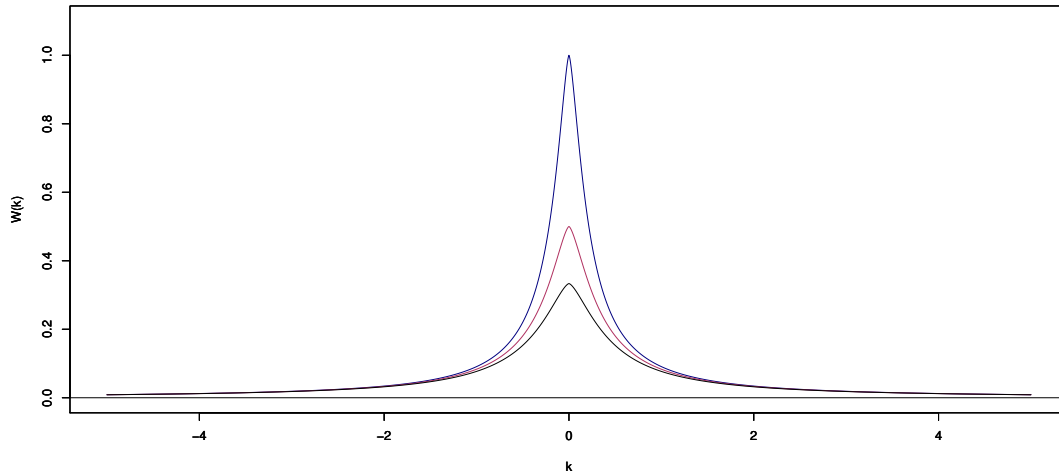


Figura 3.9: Solución de la ecuación de una caminata aleatoria en tiempo continuo en un régimen de superdifusión, ecuación 3.47, en el espacio Laplace-Fourier (k, s) con $\alpha = 3/2$, $\sigma = 1$, $\tau = 1/10$, para tiempos $s = 1, 2, 3$; en color azul, marrón y negro, respectivamente.

Finalmente de la transformada inversa de Fourier, usando el resultado mostrado en la ecuación 5.31 del Apéndice 5.5.4, se obtiene la solución

$$W(x, t) = \frac{1}{\alpha|x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{|x|}{(K^\alpha t)^{1/\alpha}} \left| \begin{matrix} (1, 1/\alpha) & (1, 1/2) \\ (1, 1) & (1, 1/2) \end{matrix} \right. \right], \quad (3.55)$$

la cual está en términos de una función de Fox.

En este caso, no es posible calcular el desplazamiento cuadrático medio (o momento de orden dos) ya que $\langle x^2(t) \rangle \rightarrow \infty$, sin embargo es posible calcular, usando las propiedades de la función de Fox, un equivalente al momento, conocido como momento fraccional [30] utilizando la siguiente igualdad

$$\langle |x|^\delta \rangle = 2 \int_0^\infty x^\delta W(x, t) dx ,$$

que es tal que converge para $0 < \delta < \alpha$ y donde, siendo $W(x, t)$ función de Fox, Metzler en [30] pp. 27-29 muestra de manera detallada este desarrollo que involucra una transformada de Mellin y en donde se llega a una expresión general de la forma $\langle |x|^\delta \rangle \propto t^{\delta/\alpha}$ y de la que, cuando $\delta = 2$

$$\langle |x|^2 \rangle \propto t^{2/\alpha} \quad (3.56)$$

de aquí que como $\alpha \in (1, 2)$, este tipo de desplazamiento cuadrático crece a una tasa mayor que uno, a esto se le conoce como superdifusión. En la figura 3.10 se observa lo anterior, haciendo notar que durante la realización del proceso siempre ocurre que algunos de los saltos (o desplazamientos) son de gran longitud. Esto es de esperarse ya que la distribución de probabilidad del tamaño del salto así lo permite, esto es, existe una cierta probabilidad de que el tamaño de salto sea grande (asociado a esto, es la varianza infinita) contrario a una distribución de probabilidad normal en la cual el 99.87% de las partículas terminan en un radio de 3 desviaciones estándar alrededor de la media (asociado a esto se tiene la varianza finita).

Acerca de la simulación de este proceso

Para el caso de la superdifusión, la generación de números aleatorios para el tamaño de salto viene dada por la variable aleatoria α -estable

$$L = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{(\cos \gamma)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\gamma)}{Y} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} , \quad (3.57)$$

(la cual se obtiene del resultado tomado de [39], p.42), en donde Y es una variable aleatoria con distribución exponencial y γ es una variable aleatoria con distribución uniforme en $(-\pi/2, \pi/2)$. Por tanto una simulación de un proceso de superdifusión en una dimensión es:

1. Fijar la posición de la partícula al tiempo cero, $x = 0$ en $t = 0$.
2. Para el tamaño de salto se genera un número aleatorio con distribución exponencial w y uno con distribución uniforme u . Luego se obtiene el valor l de la ecuación 3.57. Este valor se suma a la posición anterior, esto es, $x_n = x_{n-1} + l$.
3. Para el tiempo de espera se genera un número aleatorio r con distribución exponencial. Este valor se suma al tiempo anterior, esto es $t_n = t_{n-1} + r$

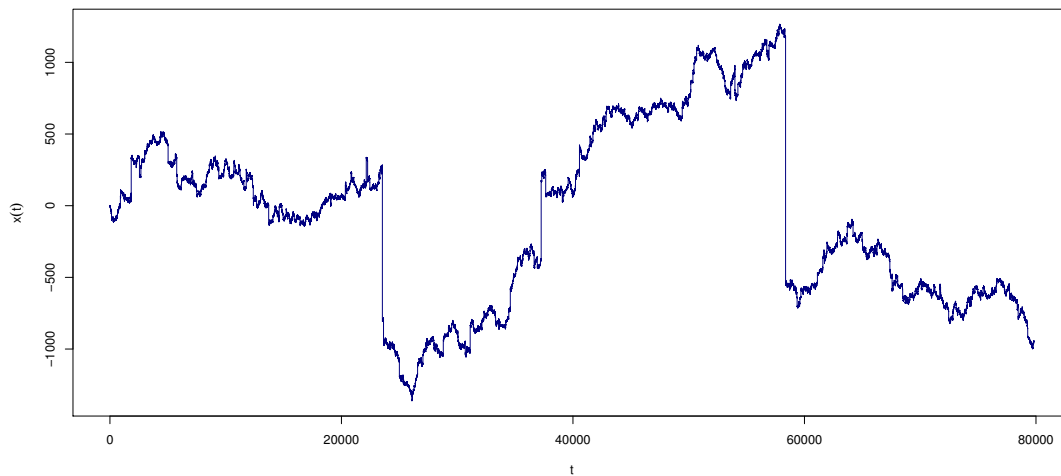


Figura 3.10: Realización de una caminata aleatoria en tiempo continuo en un régimen de superdifusión. En el eje horizontal se representa el tiempo t o número de pasos y en el vertical se observa la posición de la partícula. Se puede observar el salto de gran longitud una característica de la superdifusión, también conocido como vuelo de Lévy.

4. Se repiten los pasos 2 al 3 hasta completar los n pasos.

La figura 3.10 representa un proceso de superdifusión obtenido de la descripción anterior.

Existen muchas formas de obtener comportamientos que se consideren como difusión anómala. En este trabajo se presentaron dos casos particulares, los más conocidos y estudiados ya sea porque sus distribuciones son hasta cierto punto sencillas de manejar o bien, por que la solución de su respectiva ecuación de difusión es cerrada o numéricamente manejable.

En la Figura 3.11 se observa la realización de una caminata aleatoria en tiempo continuo para una partícula de un proceso de difusión normal (azul), una de superdifusión (rojo) y una de subdifusión (verde) en una dimensión. El eje horizontal es el tiempo y el eje vertical el desplazamiento. Se observa la diferencia en el tamaño del desplazamiento, mientras que en la superdifusión (en color rojo) hay grandes saltos, en la subdifusión el tamaño de los saltos es pequeño combinado con periodos muy largos de tiempo en que la partícula no se desplaza (línea horizontal en verde), ambos con respecto a la difusión normal (en azul).

Para el caso de una representación en dos dimensiones para una caminata aleatoria en tiempo continuo la situación cambia al querer representar tres coordenadas (dos espaciales y una temporal) en una gráfica “plana”.

En la figura 3.12 se observa una realización de una caminata aleatoria de una partícula en un proceso de difusión normal y una realización para un proceso en

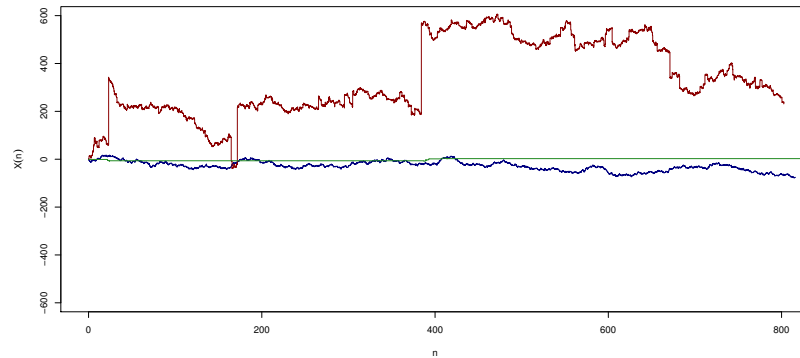


Figura 3.11: Realización en una dimensión de una caminata aleatoria en tiempo continuo en los tres regímenes de difusión, difusión normal en azul, superdifusión en rojo y subdifusión en verde, el eje horizontal representa el tiempo y el vertical el espacio. Se observan los saltos de gran magnitud característicos de un vuelo de Lévy (superdifusión) y en el caso de la subdifusión cuyos valores se mantienen constantes durante gran parte del tiempo, esto es, valores de tiempo de espera muy grandes.

régimen de superdifusión (conocido como vuelo de Lévy). En esta figura se hace evidente el término superdifusión, esto es, para una misma cantidad de tiempo t la partícula que realiza un vuelo de Lévy explora una región mayor a la de su contraparte gaussiana, en la cual, el espacio explorado, para el 99.87% de las partículas está restringido por su varianza finita a un circunferencia de radio 3σ para un ensamble grande de partículas que efectúan un proceso de difusión normal.

Es natural preguntarse por qué no se incluye en este comparativo una realización de un proceso de subdifusión, la respuesta es que al momento no contamos con un proceso aleatorio discreto que se comporte de esta manera.

Desde luego existen formas de simular un proceso de subdifusión aunque son maneras indirectas, en Molinas-Mata(1996), Brunner, et al.(2010) se pueden estudiar el problema el cual está fuera los objetivos de este trabajo.

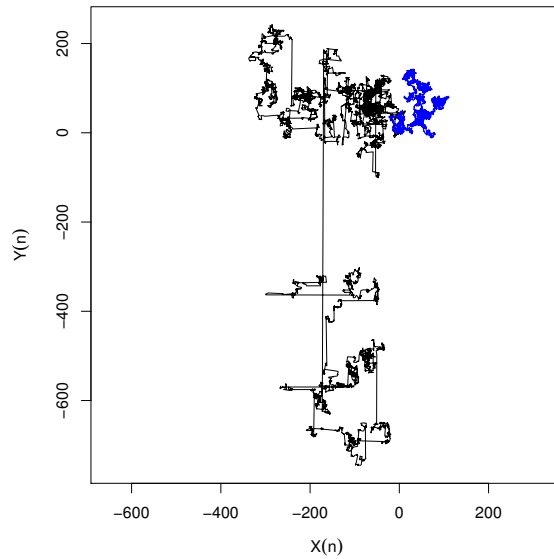


Figura 3.12: Realización de una caminata aleatoria en un régimen de difusión normal (en azul) y una caminata aleatoria en un régimen de superdifusión (en negro). Se observa una característica del régimen de superdifusión, eventualmente ocurrirá un salto (o desplazamiento) de gran longitud el cual no ocurre en un régimen de difusión normal o gaussiano.

Cuando el segundo momento en los tiempos de espera y tamaño de salto divergen

Se ha visto hasta ahora, para los casos de difusión anómala, que el segundo momento o desplazamiento cuadrático medio de una de las dos variables aleatorias existe y el de la otra variable, diverge. Esto da lugar a una ecuación de difusión fraccional en el espacio cuando el desplazamiento cuadrático medio diverge en el tamaño de salto y fraccional en el tiempo cuando éste diverge en los tiempos de espera.

Es natural el caso en que ambas distribuciones con segundo momento que diverge. Una caminata aleatoria en tiempo continuo de este tipo en una dimensión se observa en la Figura 3.13.

Así, tomando para los tiempos de espera la ecuación 3.29 y para el tamaño de salto $\lambda(k) = 1 - \sigma^\beta |k|^\beta$ que es la ecuación 3.45 renombrando el exponente

para evitar confusiones. Y en el propagador, ecuación 3.6, se tiene que

$$\begin{aligned}
W(k, s) &= \frac{1 - (1 - s^\alpha t^\alpha)}{s} \frac{W_0(k)}{1 - (1 - s^\alpha \tau^\alpha)(1 - \sigma^\beta |k|^\beta)} \\
&= \frac{1}{s^{-\alpha} \tau^{-\alpha}} \frac{W_0(k)/s}{\sigma^\beta |k|^\beta + s^\alpha \tau^\alpha} \\
&= \frac{1}{s^{-\alpha} \tau^{-\alpha}} \frac{W_0(k)/s}{s^\alpha k^\beta \left(\frac{\sigma^\beta}{s^\alpha} + \frac{\tau^\alpha}{|k|^\beta} \right)} \\
&= \frac{W_0}{\frac{s}{|k|^\beta \left(\frac{\sigma^\beta}{s^\alpha} + \frac{\tau^\alpha}{|k|^\beta} \right)}} \\
W(k, s) &= \frac{W_0(k)/s}{1 + K \frac{k^\beta}{s^\alpha}} \tag{3.58}
\end{aligned}$$

que es la solución de la ecuación con $K = \sigma^\alpha / \tau^\beta$, ahora aplicando la transformada inversa de Laplace y Fourier como en los casos anteriores para obtener la solución en el espacio (x, t)

$$\begin{aligned}
W(k, s) + K \frac{k^\beta}{s^\alpha} W(k, s) &= \frac{W_0}{s} \\
sW(k, s) + K k^\beta s^{1-\alpha} W(k, s) - W_0 &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) &= K {}_0D_t^{1-\alpha} {}_0D_x^\beta W(x, t) \tag{3.59}
\end{aligned}$$

con $\alpha \in (0, 1)$ y $\beta \in (1, 2)$, esta ecuación de difusión es de orden fraccional en el espacio y en el tiempo. Hasta la fecha, los autores de este trabajo no hemos encontrado un tratamiento de esta ecuación y su solución la cual seguramente implica un aparato matemático fuera del alcance de este trabajo. Para un estudio sobre este punto y el desplazamiento cuadrático medio en este caso se puede ver en [30] (pp. 29-30).

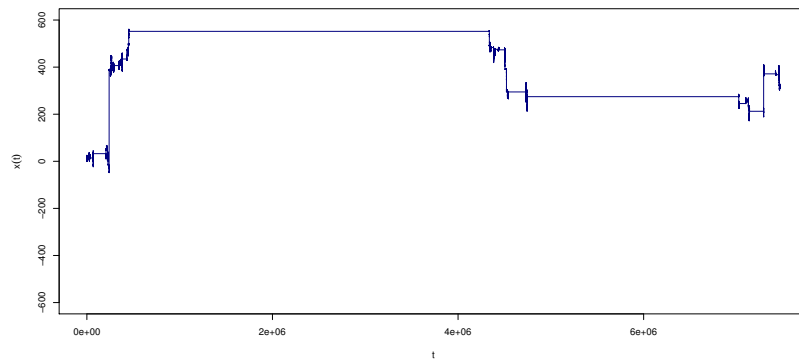


Figura 3.13: Realización de una caminata aleatoria en tiempo continuo para el caso de tiempo de espera y tamaño de salto cuyos segundos momentos divergen. El eje horizontal representa el tiempo y el vertical el desplazamiento. Se observan grandes saltos (trazos verticales en la gráfica) acompañados de largos trazos horizontales en los que la partícula no efectúa ningún movimiento.

Capítulo 4

Conclusiones y Discusión

El problema de la difusión, como se vio en este trabajo, aparece en cualquier proceso que involucre movimiento o transporte de energía (o partículas) y puede ser estudiado desde distintos puntos de vista. El enfoque probabilístico que parte de una caminata aleatoria resulta una forma sencilla de obtener una ecuación de difusión.

De entre todas las posibles formas de obtener y construir una ecuación que represente una caminata aleatoria la forma en que se presentó, utilizando el marco de referencia de la probabilidad, muestra una secuencia de pasos a seguir para una simulación numérica del proceso, es cierto, existen construcciones teóricas con mayor alcance que la aquí mostrada, como lo es utilizar cadenas de Márkov o bien utilizando funciones generadoras por sólo mencionar algunas, sin embargo lo expuesto en este trabajo llega al mismo resultado sin requerir de un aparato matemático complejo lo cual es útil para abordar el tema por primera vez.

La caminata aleatoria simple modela procesos aleatorios en donde alguna cantidad, ya sea un desplazamiento, velocidad o momentum, fluctúa en el tiempo y estas dinámicas son descritas mediante la distribución binomial y, aunque no se trató en este trabajo, debido a la ley de los grandes números se obtiene, mediante un paso al continuo, un proceso de difusión normal.

Diferentes tipos de caminatas aleatorias pueden dar lugar a dinámicas que se comportan siguiendo distribuciones con momentos divergentes, en particular la caminata aleatoria de Weierstrass da lugar a un proceso, cuya distribución es de la forma de una ley de potencia la cual no tiene segundo momento $\langle x^2 \rangle$ y de aquí que no se ajuste a la ley de los grandes números, como consecuencia se obtiene un vuelo de Lévy (superdifusión).

En la caminata aleatoria en tiempo continuo (CTRW) al utilizar en el propagador del espacio Laplace-Fourier (esto es, la solución de la CTRW en este espacio) distribuciones con momentos $\langle x^n \rangle$ definidos se obtiene una ecuación diferencial parcial, la ecuación de difusión, cuyo comportamiento es el llamado difusión normal. Por otro lado, distribuciones con momentos divergentes, como

las de tipo ley de potencia, dan lugar a ecuaciones diferenciales parciales de orden no entero cuyas dinámicas caen dentro del llamado régimen de difusión anómalo.

Aunque la difusión anómala no fue expuesta a profundidad en este trabajo, se muestra que el tratamiento de dicho problema requiere de herramientas matemáticas avanzadas.

Un problema relacionado a la difusión normal es referido a la característica que presenta conocida como frente de propagación infinita, ésta particularidad se expresa como sigue: en un ensamble grande de partículas existe la posibilidad (aunque muy pequeña) de encontrar algunas de ellas muy lejos del origen lo cual se traduce como un desplazamiento muy grande pudiendo ser en tiempos muy cortos, esto es, desplazamientos casi instantáneos. En general se puede despreciar este pequeño número de partículas pero en algunos procesos biológicos y/o químicos se necesitan de muy pocas partículas o moléculas de alguna sustancia para activar un proceso. De aquí que sea necesario evitar esta propagación infinita. En respuesta a esto el proceso difusivo obtenido de la ecuación del telegrafista presenta un frente de propagación finito adecuado a esta situación. Así se tiene que es posible construir una caminata aleatoria en la cual no se permiten desplazamientos instantáneos.

Ante la falta de una ecuación análoga a la de la caminata aleatoria en tiempo continuo, que dependiendo del tipo de distribución utilizada su solución se comporte como algún tipo de difusión, se tiene un proceso discreto en el tiempo conocido como caminata aleatoria de Weierstrass que se comporta como un proceso en régimen superdifusivo. Queda por encontrar un análogo discreto en el tiempo del cual obtener un comportamiento subdifusivo.

Una aproximación para obtener este proceso se construye mediante una caminata aleatoria distinta de las ya mostradas la cual difiere en que el medio en el que se propaga la partícula cambia cada vez que realiza un movimiento. Esta caminata se conoce como caminata aleatoria balística y resultados numéricos obtenidos (ver [31]) muestran dicho comportamiento subdifusivo.

No sólo la difusión anómala o una extensión relativista se pueden considerar en el problema de la difusión, se puede agregar la difusión en un medio irregular ya sea fijo, o bien, que varíe la probabilidad de transición dependiendo del medio en el que se propague la partícula, lo que se puede estudiar mediante una caminata aleatoria en un medio aleatorio.

Agregar o quitar restricciones a una caminata aleatoria simple rápidamente arroja un espectro amplio de problemas complejos que aún siguen abiertos, las posibilidades de obtener un modelo general están lejos de alcanzarse. La idea de este trabajo fue presentar un panorama breve de este fenómeno y los tipos de caminos a seguir para resolver.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Obtención de la ecuación de recurrencia 2.7

Se tiene la ecuación

$$P_{n+1}(j) = p P_n(j - 1) + q P_n(j + 1) , \quad (5.1)$$

para $n = 1$ se escribe

$$P_1(j) = p P_0(j - 1) + q P_0(j + 1) . \quad (5.2)$$

Y usando la condición inicial

$$P_0(j) = \delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 , \end{cases} \quad (5.3)$$

entonces

$$P_1(j) = p \delta(j - 1) + q \delta(j + 1) . \quad (5.4)$$

De igual modo, para $n = 2$ de manera recursiva usando las ecuaciones 5.2 y 5.3

$$\begin{aligned} P_2(j) &= p P_1(j - 1) + q P_1(j + 1) \\ &= p [p \delta(j - 2) + q \delta(j)] + q [p \delta(j) + q \delta(j + 2)] \\ &= p^2 \delta(j - 2) + 2pq \delta(j) + q^2 \delta(j + 2) , \end{aligned}$$

Para $n = 3$, usando el desarrollo de P_2

$$P_3(j) = p^3 \delta(j - 3) + 3p^2q \delta(j - 1) + 3pq^2 \delta(j + 1) + q^3 \delta(j + 3) . \quad (5.5)$$

Aquí se puede observar que los coeficientes de cada término de la ecuación (esto es: 1, 3, 3 y 1) indican la frecuencia o número distinto de maneras de terminar en cada nodo (el -3, -1, 1 ó 3). Esto se puede ver también en la Figura 2.1 para $n = 3$.

Si se continua este proceso se observa que P_n es de la forma del binomio de Newton, y sólo falta darle una forma compacta al término δ de la ecuación. Esto

se logra si, por ejemplo para la ecuación 5.5, se toman los argumentos de la función δ de modo que el primer término de la suma es -3 , el segundo es -1 , y entonces haciendo una tabla:

x	y
0	-3
1	-1
2	1
3	3

donde δ es de la forma $\delta(j - y)$ y se quiere una expresión general para los argumentos de δ (columna y), en este caso, se tiene que $y = 2x - 3$. En particular x es el número de pasos r a la derecha ($x = r$) y y es la posición de la partícula, así δ es de la forma $\delta(j - (2r - 3))$, y esto es para $n = 3$, así para los primeros $n = 1, 2, 3$ se tiene

$$\begin{aligned}
 P_1(j) &= \sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} p^r q^{1-r} \delta(j - (2r - 1)) \\
 P_2(j) &= \sum_{r=0}^2 \binom{2}{r} p^r q^{2-r} \delta(j - (2r - 2)) \\
 P_3(j) &= \sum_{r=0}^3 \binom{3}{r} p^r q^{3-r} \delta(j - (2r - 3)) ,
 \end{aligned}$$

Y de manera general se obtiene

$$P_n(j) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \delta(j - (2r - n)) = P_n(r) .$$

5.2. Sobre el cambio de variable en la ecuación del telegrafista

Se tiene, para $U(t, x)$, la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} U = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U \quad , \quad (5.6)$$

y se definen las variables $\tau = t/T$ y $y = x/vT$ donde T es un número, y respectivamente $dt = Td\tau$ y $dx = vTdy$.

Entonces, como $U(t, x)$, ahora será $U(\tau T, yvT)$, y así

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial t} T \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} U' = \frac{\partial U'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) T = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} T \right) T \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= T^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad , \end{aligned} \quad (5.7)$$

De igual modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} vT \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= v^2 T^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \end{aligned} \quad (5.8)$$

Entonces, usando 5.7 y 5.8 en la ecuación 5.6 se obtiene

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{1}{T^2} \frac{\partial U}{\partial \tau} = v^2 \frac{1}{v^2 T^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad ,$$

Y así

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad ,$$

que es la ecuación a la que se deseaba llegar.

5.3. Solución de la ecuación del telegrafista

Seguindo a Weiss en [40] se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U + \frac{\partial}{\partial \tau} U = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U. \quad (5.9)$$

La solución $U(t, x)$ de esta ecuación se puede obtener aplicando la transformada de Laplace-Fourier. Así, para el lado derecho de la ecuación 5.9

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 U(y, \tau)}{\partial \tau^2}\right\} &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{iwy} e^{-s\tau} \frac{\partial^2 U(y, \tau)}{\partial \tau^2} dy d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U(\tau, w) d\tau \\ &= -\frac{\partial}{\partial \tau} U(0, w) - sU(0, w) + s^2 U(s, w) \\ &= -s + s^2 U(s, w), \end{aligned} \quad (5.10)$$

el último paso se obtuvo usando la condición inicial (ecuaciones 2.34, 2.35).

De manera similar se procede para ambos términos del lado izquierdo de 5.9

$$\mathcal{L}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial U(y, \tau)}{\partial \tau}\right\} = -1 + s U(s, w) \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 U(y, \tau)}{\partial y^2}\right\} = -w^2 U(s, w), \quad (5.12)$$

por tanto, en el espacio Laplace-Fourier, la ecuación 5.9, usando 5.10, 5.11 y 5.12 es de la forma

$$-s + s^2 U(s, w) - 1 + s U(s, w) = -w^2 U(s, w),$$

cuya solución es

$$U(s, w) = \frac{1 + s}{s^2 + s + w^2}, \quad (5.13)$$

y para tener esta solución de nuevo en el espacio (τ, y) se aplica la transformada inversa de Laplace-Fourier, por lo que, si primero se aplica Fourier, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{U(s, w)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1 + s}{s^2 + s + w^2} e^{-iwy} dw \\ &= \frac{s + 1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^2 + w^2} e^{-iwy} dw, \end{aligned}$$

$$\text{donde } a^2 = s^2 + s,$$

y, usando teoría de residuos se resuelve para obtener

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{U(s, w)\right\} = \frac{s+1}{2\sqrt{s^2+s}} e^{-|y|\sqrt{s^2+s}},$$

luego aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{U(y, s)\right\} &= \int_0^{\infty} \frac{s+1}{2\sqrt{s^2+s}} e^{-|y|\sqrt{s^2+s}} e^{s\tau} ds \\ U(y, \tau) &= \int_0^{\infty} \frac{(s+1/2)+1/2}{2\sqrt{(s+1/2)^2-1/4}} e^{-|y|\sqrt{(s+1/2)^2-1/4}} e^{s\tau} ds,\end{aligned}$$

y, haciendo, $\sigma = s + 1/2$ con $d\sigma = ds$ se tiene que

$$\begin{aligned}U(y, \tau) &= \int_0^{\infty} \frac{\sigma+1/2}{2\sqrt{\sigma^2-1/4}} e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-1/4}} e^{(\sigma-1/2)\tau} d\sigma \\ U(y, \tau) &= \frac{1}{4} e^{-\tau/2} \left[2 \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1/4}} e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-1/4}+\sigma\tau} d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2-1/4}} e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-1/4}+\sigma\tau} d\sigma \right],\end{aligned}\quad (5.14)$$

en seguida, usando la siguiente propiedad (ver [1] Cap.29, pp.1027)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}}\right\} = I_0\left(a\sqrt{t^2-k^2}\right) H(t-|k|), \quad (5.15)$$

en donde $I_0(x)$ es una función de Bessel modificada de primera especie de orden 0 y $H(x)$ es la función escalón (también llamada función de Heaviside) que se define como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 1/2 & ; x = 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad (5.16)$$

y el segundo término de la ecuación 5.14 es de esta forma, más aún, el primero es de la forma

$$\mathcal{L}^{-1}\{s F(s)\} = \frac{df(t)}{dt}, \quad (5.17)$$

por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}U(y, \tau) &= \frac{1}{4} e^{-\tau/2} \left[2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[I_0\left(1/2 \sqrt{\tau^2-|y|^2}\right) H(\tau-|y|) \right] \right. \\ &\quad \left. + I_0\left(1/2 \sqrt{\tau^2-|y|^2}\right) H(\tau-|y|) \right],\end{aligned}\quad (5.18)$$

en donde, usando la derivada de la función $I_0(z)$ con $M(\tau) = 1/2 \sqrt{\tau^2 - |y|^2}$ (ver [1] p.376)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[I_0(M(\tau)) H(\tau - |y|) \right] &= I_0(M(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} H(\tau - |y|) + \left[\frac{\partial}{\partial \tau} I_0(M(\tau)) \right] H(\tau - |y|) \\ &= I_0(M(\tau)) \delta(\tau - |y|) + \frac{\tau}{M} I_1(M) H(\tau - |y|), \end{aligned}$$

con $H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ y, regresando a la ecuación 5.18, se tiene que

$$U(y, \tau) = \frac{1}{4} e^{-\tau/2} \left[\begin{aligned} &2I_0(M(\tau)) \delta(\tau - |y|) + \frac{2\tau}{M} I_1(M) H(\tau - |y|) \\ &+ I_0(M(\tau)) H(\tau - |y|) \end{aligned} \right],$$

luego,

$$U(y, \tau) = \frac{1}{4} e^{-\tau/2} \left[\left(I_0(M(\tau)) + \frac{2\tau}{M} I_1(M(\tau)) \right) H(\tau - |y|) + 2 \delta(\tau - |y|) \right],$$

que es la solución de la ecuación del telegrafista.

5.4. Las funciones η y ψ en el espacio Laplace-Fourier

Se tiene la ecuación

$$\eta(x, t) = \delta(x)\delta(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t')\psi(x - x', t - t') dt' dx'$$

a la cual aplicando transformada de Laplace

$$\begin{aligned} \eta(x, s) &= \int_0^{\infty} \delta(x)\delta(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t')\psi(x - x', t - t') e^{-st} dt' dx' dt \\ &= \delta(x) \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t')\psi(x - x', t - t') e^{-st} dt' dt \\ &= \delta(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \eta(x, s) \psi(x - x', s) \end{aligned}$$

De igual modo, aplicando transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \eta(k, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, s) \psi(x - x', s) e^{-ikx} dx' dx \\ &= 1 + \eta(k, s) \psi(k, s) \\ \eta(k, s) &= \frac{1}{1 - \psi(k, s)} \end{aligned}$$

La cual es la versión de η en el espacio Laplace-Fourier.

Así mismo, la función

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t w(\tau) d\tau$$

al aplicar la transformada de Laplace toma la forma,

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt - \int_0^{\infty} \int_0^t w(\tau) e^{-st} d\tau dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{w(s)}{s} \\ &= \frac{1}{s} (1 - w(s)) \end{aligned}$$

que es la función Ψ en el espacio de Laplace.

5.5. Funciones Especiales

5.5.1. La integral y la transformada de Mellin

Se define la transformada de Mellin para una función f (para la existencia de la esta transformada ver [17] p.307), como

$$\mathcal{M}\{f(r)\} = f(s) = \int_0^{\infty} f(r) r^{s-1} dr \quad (5.19)$$

$$\mathcal{M}^{-1}\{f(s)\} = f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s) r^{-s} ds, \quad (5.20)$$

donde $r > 0$, $\gamma = \text{Re}(s)$.

Una integral de Mellin-Barnes [17] (p.319), es del tipo

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(s) z^{-s} ds, \quad (5.21)$$

donde L es un contorno en el plano complejo.

5.5.2. La Función Hipergeométrica

Para un estudio detallado de la función hipergeométrica se puede consultar [5, 20, 42]. Una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, \quad (5.22)$$

con $d_0 = 1$ y donde d_n es una función racional que se expresa como

$$d_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n}, \quad (5.23)$$

en la que

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (5.24)$$

se conoce como serie hipergeométrica y se denota por $F(a, b, c; x)$. Si esta serie converge, la función generada por ésta recibe el nombre de función hipergeométrica y si $c \neq 0, 1, 2, \dots$, entonces

$$F(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} x^k. \quad (5.25)$$

5.5.3. La Función G

Una generalización de estas funciones hipergeométricas fue desarrollada en 1961 por Charles Fox [16]. Una función G es una suma de funciones hipergeométricas cada una de las cuales es usualmente una función entera.

Una función G , también conocida como función G de Meijer, se puede definir en términos de una transformada de Mellin [16](ecuación 5)

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i - s) \prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s)} x^{-s} ds \quad (5.26)$$

donde T es un contorno en el cual quedan los polos del integrando $\Gamma(b_i + s)$, para todo i , de un lado, y en el otro lado caen los polos de $\Gamma(1 - a_i - s)$.

5.5.4. La Función H

Una Función más general que la función G es la función H , o función de Fox, que se define como sigue [16](ecuación 52)

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\prod_{m=1}^q \Gamma(b_m + c_m s) \prod_{n=1}^p \Gamma(a_n - e_n s)}{\prod_{m=1}^q \Gamma(b_m + c_m - c_m s) \prod_{n=1}^p \Gamma(a_n - e_n + e_n s)} x^{-s} ds, \quad (5.27)$$

donde:

- i) $c_m > 0$, $m = 1, \dots, q$, y $e_n > 0$, $n = 1, \dots, p$.
- ii) Los polos del integrando son simples.
- iii) El contorno T es una línea recta paralela al eje imaginario del plano y los polos de $\Gamma(b_m + c_m s)$ caen a la izquierda de T , mientras que los de $\Gamma(a_n - e_n s)$ caen a la derecha de T .

La función H de Fox es, como ya se mencionó, una generalización de la función G de Meijer y por consiguiente de la función hipergeométrica, así mismo de la función de Mittag-Leffler y la función generalizada de Bessel.

Es común expresar [28](p.2) la función H como

$$H(x) = H_{p,q}^{m,n}(x) = H_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right], \quad (5.28)$$

Son útiles las siguientes propiedades [28] (p.12) de la función H

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = k H_{p,q}^{m,n} \left[z^k \left| \begin{matrix} (a_p, kA_p) \\ (b_q, kB_q) \end{matrix} \right. \right] ; \quad k > 0 \quad (5.29)$$

$$z^\sigma H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p + \sigma A_p, A_p) \\ (b_q + \sigma B_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] ; \quad \sigma \in \mathbb{C} , \quad (5.30)$$

además [22](p.49, ecuación 1.190)

$$\mathcal{F}^{-1} \{ e^{-Dt|q|^\alpha} \} = \frac{1}{\alpha|x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{|x|}{(Dt)^{1/\alpha}} \left| \begin{matrix} (1, 1/\alpha) & (1, 1/2) \\ (1, 1) & (1, 1/2) \end{matrix} \right. \right] . \quad (5.31)$$

5.5.5. La Función de Mittag-Leffler

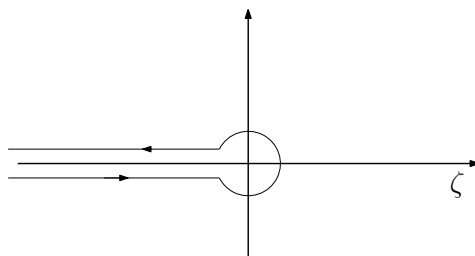


Figura 5.1: Contorno o trayectoria de Hankel C_- , el contorno C_+ es similar sólo que inicia y termina en ∞ . Figura basada en [17].

Se define la función $E_\alpha(z)$ como una serie de potencias [17](p.1) de la forma

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} ; \quad \alpha \in \mathbb{C} ; \quad Re \alpha > 0 , \quad (5.32)$$

conocida como función de Mittag-Leffler con parámetro α . En particular cuando $\alpha = 1$ se tiene que

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z ,$$

de donde se ve que esta función es una generalización de la función exponencial.

Se tiene la representación integral de esta función [17](p.25, ecuación 3.4.12) de la siguiente manera

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\zeta^{\alpha-1} e^\zeta}{\zeta^\alpha - z} d\zeta , \quad (5.33)$$

donde C_- es un contorno que se conoce como trayectoria de Hankel la cual es un lazo que inicia en $-\infty$ del eje ζ y continúa de manera paralela sobre el eje hasta llegar al origen en donde se retorna formando un disco $|\zeta| \leq |z|^{1/\alpha}$ con

dirección, de nuevo, de $-\infty$ (Figura 5.1).

Un par de resultados útiles son [28] (pp. 49,176)

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a} \quad (5.34)$$

$$\int_0^\infty \cos(kt) E_{\alpha,\beta}(-at^2) dt = \frac{\pi}{k} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{k^2}{a} \left| \begin{matrix} [(\beta, \alpha)] \\ [(1, 2)] \end{matrix} \right. \right], \quad (5.35)$$

Bibliografía

- [1] **Abramowitz, M., Stegun, I.A.**, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, 10th printing, 1972, United States Department of Commerce, Washington, D.C.
- [2] **Almaguer, F., et al.**, *Riemann and Weierstrass Walks Revisited*, Applied Mathematics and Computation, Elsevier, 2017.
(DOI: 10.1016/j.amc.2017.05.048)
(<https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.05.048>)
- [3] **Bachelier, L.**, *The Theory of Speculation*, translated by D. May from Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 17(1900), p.21-86.
- [4] **Bardou, F., et al.**, *Lévy Statistics and Laser Cooling, how rare events bring atoms to rest*, 2002, Cambridge University Press.
- [5] **Bateman, H.**, *Higher Transcendental Functions, Volume I*, California Institute of Technology, Bateman Manuscript Project, Erdélyi, A. Editor, McGraw-Hill Book Company, Inc., United States of America, 1953.
- [6] **Beer, T., Enting, I.G.**, *Fire Spread and Percolation Modelling*, Mathl Comput. Modelling Vol.13, No.11, pp.77-96, 1990.
- [7] **Bertin, E., Bardou, F.**, *From laser cooling to aging: A unified Lévy flight description*, Am. J. Phys. 76(7), July 2008.
- [8] **Boldyrev, S., Gwinn, C.**, *Radio-wave propagation in the non-Gaussian interstellar medium*, 2005, arXiv:astro-ph/0404570v3.
- [9] **Bogachev, L.V.**, *Random Walks in Random Environments*, 2006, Encyclopedia of Mathematical Physics, (J.-P. Francoise, G. Naber, and S.T. Tsou, eds.), Vol. 4, pp. 353-371. Elsevier, Oxford, arXiv:0707.3160v1
- [10] **Brown, R.**, *A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants*, Philosophical Magazine 4. Consultado en: <http://sciweb.nybg.org/science2/pdfs/dws/Brownian.pdf>

- [11] **Costa, T., Boccignone, G., Cauda, F., Ferraro, M.**, *The Foraging Brain: Evidence of Lévy Dynamics in Brain Networks*, PLoS ONE 11(9): e0161702. doi:10.1371/journal.pone.0161702
- [12] **Courtault, J.M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P.**, *Louis Bachelier on the Centenary of Théorie de la Spéculation*, Mathematical Finance, Vol. 10, No. 3 (July 2000), 341-353.
- [13] **Dunkel, J., Hänggi, P.**, *Relativistic Brownian Motion*, 2009, arXiv:0812.1996v2 [cond-mat.stat-mech].
- [14] **Einstein, A.**, Annalen der Physik 17 (1905) 549-560.
 Versión en línea en inglés: *On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*, 1905.
<http://old.stat.duke.edu/courses/Spring12/sta357/refs/Eins1905EN.pdf>
- [15] **Fick, A.**, *On Liquid Diffusion*, Journal of Membrane Science 100 (1995)33-38.
 The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. X (1855)30-39. Abstracted by the author from the German original: Über Diffusion, Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, 94 (1855)59-86.
- [16] **Fox, C.**, *The G and H Functions as Symmetrical Fourier Kernels*, 1961, Trans. Amer. Math. Soc. 98:395.
- [17] **Gorenflo, R., et al.**, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [18] **Graham, T.**, *On the Law of the Diffusion of Gases*, Journal of Membrane Science, Volume 100, Issue 1, 1995, Pages 17-21, ISSN 0376-7388, [http://dx.doi.org/10.1016/0376-7388\(94\)00228-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0376-7388(94)00228-Q). (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037673889400228Q>)
- [19] **Graham, T.**, *Liquid Diffusion Applied to Analysis*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1861 151, 183-224, published 1 January 1861. (<http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/151/183.full.pdf>)
- [20] **Hardy, G.H., Cunningham, E., Ed.**, *Generalized Hypergeometric Series, No.32*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Cambridge University Press, Stechert-Hafner Service Agency, Inc., New York, N.Y., 1964.
- [21] **Havlin, S., Ben-Avraham, D.**, *Diffusion in Disordered Media*, 2002, Advances in Physics, 51:1, 187-292.
 doi: 10.1080/00018730110116353
 (<http://dx.doi.org/10.1080/00018730110116353>)

- [22] **Henry, B.I., Langlands, T.A.M., Straka, P.**, *An Introduction to Fractional Diffusion*, 2009, Conference paper, Conference: Complex Physical, Biophysical and Econophysical Systems - Proceedings of the 22nd Canberra International Physics Summer School, disponible en:
https://www.researchgate.net/publication/224040147_An_Introduction_to_Fractional_Diffusion
- [23] **Herrmann, R.**, *Fractional Calculus, an Introduction to Physicists*, 2011, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- [24] **Klafter, J., et al.**, *Stochastic Pathway to Anomalous Diffusion*, Phys. Rev. A, Vol. 35, pp.3081-3085, 1987.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.35.3081>
- [25] **Klafter, J., Sokolov, M.**, *First Steps in Random Walks, From Tools to Applications*, 2011, Oxford University Press Inc., New York, United States.
- [26] **Lemons, D., Gythiel, A.**, *Paul Langevin's 1908 paper "On the Theory of Brownian Motion" ["Sur la théorie du mouvement brownien" C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530-533 (1908)]*, American Journal of Physics, Vol. 65, 11, pp.1079-1081, 1997, doi:10.1119/1.18725,
(<http://dx.doi.org/10.1119/1.18725>)
- [27] **Mathai, A.M., Saxena, R.K.**, *The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines*, 1978, Wiley Eastern Limited New Delhi, Published in the Western Hemisphere by Halsted Press, a Division of John Wiley & Sons, Inc., New York, Printed in India by Prabhat Press, Meerut.
- [28] **Mathai, A.M., Saxena, R.K., Haubold, H.J.**, *The H-Function, Theory and Applications*, Springer Science+Business Media, LLC 2010, Spring Street, New York, NY, USA.
- [29] **Mainardi, F., et al.**, *Fox H Functions in Fractional Diffusion*, Journal of Computational and Applied Mathematics 178(2005) 321-331.
- [30] **Metzler, R., Klafter, J.**, *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach*, Physics Reports 339(2000) 1-77.
- [31] **Molinàs-Mata, P., et al.**, *Ballistic Random Walker*, Phys. Rev. E54, 968, 1996.
- [32] **Okubo, A.**, *Application of the Telegraph Equation to Oceanic Diffusion: Another Mathematical Model*, 1971, Chesapeake Bay

Institute, The Johns Hopkins University, Reference 71-3, Technical Report 69.

- [33] **Oldham, K., Spanier, J.**, *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, 2006, Dover Publications Inc., Mineola New York.
- [34] **Paul, W., Baschnagel, J.**, *Stochastic Processes, from physics to finance*, 2nd Edition, Springer International Publishing Switzerland, 2013.
- [35] **Pearson, K., Blakeman, J.**, *A Mathematical Theory of Random Migration*, 1906, Drapers Company Research Memoirs - Biometric Series III, Department of Applied Mathematics, University of London, Published by Dulau and Co., 37, Soho Square, W, London. (<https://archive.org/details/cu31924003051285>)
- [36] **Pototski, A., et al.**, *Relativistic Brownian Motion on a Graphene Chip*, Eur. Phys. J. B(2012) 85:356
- [37] **Rayleigh, L.**, *On the Resultant of a large Number of Vibrations of the same Pitch and of arbitrary Phase.*, Philosophical Magazine and Journal of Science (Fifth Series) Vol 10, No. 60, Aug. 1880. London, Edimburgh and Dublin.
- [38] **Saa, A., Venegeroles, R.**, *Relativistic Weierstrass Random Walks*, 2010, Physical Review. ArXiv:1007.3314v2
- [39] **Samorodnitsky, G., Taqqu, M.**, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with infinite Variance*, 2000, Chapman & Hall/CRC, United States of America.
- [40] **Weiss, G.**, *Aspects and Applications of The Random Walk*, 1994, Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands.
- [41] **Weiss, G.**, *Some Applications of Persistent Random Walks and the Telegrapher's Equation*, Physica A 311 (2002) 381-410.
- [42] **Weisstein, Eric W.**, *Generalized Hypergeometric Function*, from MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedHypergeometricFunction.html>