



# Revisión de una nueva técnica de control robusto de sensibilidad mezclada

RENÉ GALINDO\*

**E**l control clásico considera sistemas con un canal de entrada y uno de salida, lineales y no lineales. El análisis y diseño de controladores se aplica en el dominio de la frecuencia mediante herramientas como la función de transferencia, el diagrama de Nyquist<sup>1</sup> y la función descriptiva, y se logran diseños robustos que garantizan estabilidad y desempeño, a pesar de dinámicas no modeladas, perturbaciones externas y ruido. En 1938, H.W. Bode determinó la estabilidad del sistema en lazo cerrado, usó márgenes de ganancia y de fase en gráficas de respuesta a la frecuencia de magnitud y fase.<sup>2</sup>

Los trabajos de Rosenbrock<sup>3</sup> extienden algunas de las técnicas de control clásico a sistemas con varios canales de entrada y de salida, y dan origen al control robusto,<sup>4</sup> el cual busca preservar alguna característica del sistema de control en lazo cerrado, tal como estabilidad o desempeño, bajo la presencia de incertidumbres o perturbaciones externas. La incertidumbre  $\Delta$  siempre existe, debido a elementos dependientes de la frecuencia, dinámicas no modeladas y fallas. Una de las técnicas de control robusto que logra establecer un compromiso entre las diversas especificaciones de diseño es la técnica de sensibilidad mezclada.

Una motivación original dada por Zames, en 1981, fue describir  $\Delta$  en el dominio de la frecuencia, tal como se hacía en control clásico. Experimentalmente se encontró que la magnitud de  $\Delta$  crece con la frecuencia y su fase toma cualquier valor.<sup>4</sup> Esto se debe en parte a que los instrumentos y técnicas de identificación de modelos son exactos y precisos para dinámicas lentas (bajas frecuencias). Además, las perturbaciones externas son, generalmente, de bajas frecuencias.

Algunos resultados de control robusto son:

- D.C. Youla, H.A. Jabr y J.J. Bongiorno, en 1976, dieron fórmulas explícitas para un controlador óptimo<sup>5</sup> basado en la minimización Wiener-Hopf por mínimos cuadrados de una funcional de costo.
- C.A. Desoer, R. Liu, J. Murray y R. Saeks, en 1980, propusieron controladores que colocan al sistema retroalimentado en un anillo de operadores con las propiedades preespecificadas. La planta está modelada como una razón de dos operadores en ese anillo.
- M. Vidyasagar, H. Schneider y B.A. Francis, en 1982, establecieron condiciones necesarias y suficientes para que una función de transferencia dada tenga una factorización coprima, y die-

\*Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, UANL.  
Contacto: rgalindo@gama.fime.uanl.mx

ron una caracterización de todos los controladores estabilizantes.<sup>6,16</sup>

- C.N. Nett, C.A. Jacobson y M.J. Balas, en 1984, dieron fórmulas explícitas para una doble representación fraccional coprima de la función de transferencia en espacio de estados. Estas fórmulas emplean una retroalimentación estática del estado para estabilizar a la planta nominal, resuelven la parametrización de todos los controladores estabilizantes en espacio de estados, con base en procedimientos recursivos de control robusto subóptimo.
- K. Glover y D. McFarlane, en 1989, presentaron un margen de estabilidad óptimo, y dieron una caracterización de todos los controladores que satisfacen un margen de estabilidad subóptimo, en espacio de estados.
- Doyle, en 1981; Glover, en 1984, y Francis y Doyle, en 1987, dieron una solución al problema óptimo robusto general estándar. La solución involucra factorizaciones internas-externas y factorizaciones espectrales. Utilizando la parametrización de controladores estabilizantes, se reduce a un problema de seguimiento de modelo, y la solución óptima se obtiene por el Teorema de Nehari, resolviendo ecuaciones de Riccati.

Se realiza una revisión de las ideas fundamentales de una técnica de control robusto de sensibilidad mezclada en un esquema observador-controlador no convencional. El esquema es no convencional, pues una de las entradas del observador es la salida del controlador que pasa a través de una inversa a la izquierda de la matriz de entrada, antes de entrar a la planta. El criterio de sensibilidad mezclada que se presenta atenúa las perturbaciones externas de bajas frecuencias y preserva la estabilidad ante incertidumbres de altas frecuencias.

Primero se presentan algunos antecedentes sobre control robusto de sensibilidad mezclada, después se presenta el criterio de sensibilidad mezclada, una solución de la parametrización de controladores estabilizantes para una planta ideal, y soluciones aproximadas del criterio. Luego se extien-

den estos resultados con un esquema observador-controlador no convencional; finalmente, se da un ejemplo de un sistema mecánico de pruebas.

## Antecedentes

Los controladores robustos<sup>4</sup> se diseñan para un modelo nominal conocido  $P(s)$ , que contiene las características esenciales del sistema, y se garantiza la estabilidad del sistema al aplicar el controlador al sistema real. El control robusto funciona para un conjunto de sistemas alrededor del modelo nominal, lo que permite extender la región alrededor del punto o trayectoria de equilibrio, y mantener la estabilidad y el desempeño.

El problema óptimo general estándar<sup>4</sup> de control robusto busca atenuar el efecto de la incertidumbre  $\Delta$  y de las perturbaciones de energía acotada, en una banda de frecuencia, sobre la energía de la salida regulada, y garantiza estabilidad, con un controlador  $K(s)$  estabiliza a  $P(s)$ .

Los modelos de incertidumbre se clasifican<sup>4</sup> en estructurados o paramétricos, los cuales tienen un número finito de parámetros de incertidumbre, y no estructurados, en los que la respuesta en frecuencia permanece dentro de un conjunto para todas las frecuencias. Ejemplos de modelos no estructurados son especificaciones en términos de márgenes de ganancia y de fase, y el modelo de círculo,<sup>4</sup>  $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq m < \infty$ .

Una de las técnicas de control robusto para sistemas lineales utilizada como un primer paso de diseño es la de conformación de lazo,<sup>4</sup> la cual busca dar un comportamiento frecuencial preespecificado a la función de transferencia de lazo abierto. Se asume que la peor incertidumbre ocurre en altas frecuencias y que las perturbaciones externas son de baja frecuencia. Un criterio semejante que utiliza funciones de transferencia de lazo cerrado en lugar de la función de transferencia de lazo abierto es el de sensibilidad mezclada,<sup>4,17</sup> que resuelve simultáneamente los siguientes dos problemas:

1. Estabilidad robusta. Por el Teorema de pequeñas ganancias, si  $\|(1/k)\Delta(s)\|_\infty < 1$ , se garantiza estabilidad si,

$$\|W_2(s)T_{u_\Delta y_\Delta}(s)\|_\infty < 1$$

donde  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  es la función de transferencia de  $u_\Delta(s)$  a  $y_\Delta(s)$  y  $W_2(s)$  es una función de peso pasa altas. La tabla I muestra  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  para diferentes modelos de incertidumbre en un esquema de control en cascada con retroalimentación negativa.

2. Desempeño robusto nominal. Regulación para la planta nominal bajo la presencia de perturbaciones externas, esto es:

$$\|W_1(s)S_o(s)\|_\infty < 1, \text{ o } \min_{K(s)} \|e(t)\|_2$$

donde  $S_o(s) = T_{er}(s) = (I + P(s)K(s))^{-1}$  es la función de sensibilidad a la salida,  $e(t)$  es la señal de error y  $W_1(s)$  es una función de peso de bajas frecuencias.

Tabla I. Función de transferencia de  $u_\Delta(s)$  a  $y_\Delta(s)$  para diferentes modelos de incertidumbre.

Modelo de incertidumbre	$T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$
Aditivo	$K(s) S_o(s)$
Multiplicativo a la salida	$T_o(s) := S_o(s)P(s)K(s)$
Retroalimentado a la entrada	$S_o(s) P(s)$

Así, el criterio de sensibilidad mezclada busca minimizar simultáneamente  $\|W_2(s)T_{u_\Delta y_\Delta}(s)\|_\infty$  y  $\|W_1(s)S_o(s)\|_\infty$ , en el rango de frecuencias en que  $\|d(t)\|_2$  y  $\|\Delta(s)\|_\infty$  son significativas, esto es minimizar:

$$J_1 := \left\| \begin{bmatrix} W_1(s)S_o(s) \\ W_2(s)T_{u_\Delta y_\Delta}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

En caso de rompimiento de lazo, para incrementar el ancho de banda de lazo cerrado o para evitar problemas numéricos, se requiere que el controlador sea estable y resuelva el criterio  $J_1$ . La propiedad de entrelazamiento par<sup>6</sup> establece que existe un controlador estable dentro de la familia de controladores estabilizantes si, y sólo si, el número de polos reales e inestables entre cada par de ceros reales e inestables de  $P(s)$ , es par.

## Resultados

El criterio  $J_1$  ha sido transformado por Galindo, Malabre y Kuèera en 2004 a:<sup>7</sup>

$$J_2 := \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ T_{u_\Delta y_\Delta h} \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

donde  $S_{ol} = \lim_{s \rightarrow 0} S_o(s)$  y  $T_{u_\Delta y_\Delta h} = \lim_{s \rightarrow \infty} T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  son ahora matrices reales. El criterio  $J_2$  involucra la minimización simultánea de  $\|S_{ol}\|_\infty$  y  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$ , esto es:

$$\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty$$

$$\text{sujeto a } \|S_{ol}\|_\infty = \|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$$

que es equivalente a minimizar la siguiente función de Lagrange,<sup>8</sup> propuesta por Galindo, Herrera y Martínez en 2000:

$$f := \|S_{ol}\|_\infty - \eta (\|S_{ol}\|_\infty - \|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty)$$

donde  $\eta$  es un multiplicador de Lagrange.

## Soluciones directas

Galindo, Sánchez y Herrera, en 2002, propusieron el siguiente resultado sobre la familia de controladores estabilizantes<sup>9</sup> para una planta ideal con información completa del estado y matriz de entrada no singular.

Lema. Suponga que  $\det\{(s+a)I_n - R(s)\}$  es un polinomio Hurwitz. Defina:

$$X(s) = \tilde{X}(s) = aI_n + A$$

$$Y(s) = \tilde{Y}(s) = I_n$$

$$\tilde{N}(s) = N(s) = \frac{1}{s+a} I_n$$

$$\tilde{D}(s) = D(s) = \frac{1}{s+a} (sI_n - A)$$

Entonces, un controlador  $K(s)$  propio que estabiliza a  $(sI - A)^{-1}$  es:

$$K(s) = A + [(s+a)I_n - R(s)]^{-1} [(s+a)aI_n + R(s)s]$$

y:

$$\begin{aligned}\|S_{ol}\|_{\infty} &= \frac{1}{a^2} \|(aI_n - R_r)A\|_{\infty} \\ \|K_h S_{oh}\|_{\infty} &= \|A + aI_n + R_h\|_{\infty} \\ \|T_{oh}\|_{\infty} &= \frac{1}{w_h} \|A + aI_n + R_h\|_{\infty} \\ \|S_{oh} P_h\|_{\infty} &= \frac{1}{w_h}\end{aligned}$$

donde  $w_h$  es una frecuencia fija en el rango de altas frecuencias de  $P(s)$ . ■

La factorización de la planta sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables se obtiene fácilmente, dado que:

$$N(s)D^{-1}(s) = \left(\frac{1}{s+a}\right) \left[\frac{1}{s+a}(sI_n - A)\right]^{-1}$$

También, la solución de la ecuación Diophantina:

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = (aI_n + A) \left(\frac{1}{s+a}\right) + \frac{1}{s+a}(sI_n - A) = I_n$$

Tanto la factorización de la planta como la solución de la ecuación Diophantina dan por resultado elementos cuyo orden es a lo más el de la planta ideal, e implica bajo esfuerzo computacional. Además, incrementando los valores de los parámetros de control  $a$  y  $w_h$ ,  $\|S_{ol}\|_{\infty}$  y  $\|T_{oh}\|_{\infty}$  disminuyen, respectivamente.

Para  $P(s)$  estrictamente propia, la solución se simplifica, pues  $T_{oh} \cong L_{oh}$  en altas frecuencias. Además,  $K(s)$  se convierte en un controlador proporcional integral conforme  $r \rightarrow a$ , donde se fijó el valor de  $R(s)$  a  $rI_n$ , y  $K(s)$  es estable si  $r < a$ . En 2004, Galindo, Malabre y Kucěra mostraron que existe un intervalo<sup>7</sup>  $[-a, a]$  en el cual  $\|T_{oh}\|_{\infty}$  disminuye (aumenta) y  $\|S_{ol}\|_{\infty}$  aumenta (disminuye, respectivamente) como funciones de  $r$ . Además, dieron las siguientes dos soluciones aproximadas para  $r$ ,

Lema.

$$r \cong a \left(1 - \frac{\gamma_{\min} a}{(w_h + 1) \|A\|_{\infty}}\right)$$

donde  $\gamma_{\min} = [1 + \lambda_{\max}(YX)]^{1/2}$ , siendo  $Y$  y  $X$  las soluciones de las ecuaciones de Riccati,  $A^T X + XA - X^2 + I_n = 0$  y  $AY + YA^T - Y^2 + I_n = 0$ .

El valor óptimo para  $r$  se encuentra en el intervalo,

$$r \in [r_b, a]$$

y una cota inferior  $r_b$  para  $r$  es:

$$r_b = \frac{a[(w_h - a)\|A\|_{\infty} - a^2]}{w_h \|A\|_{\infty} + a^2} \quad \blacksquare$$

En los límites de  $w_h$  tenemos  $\lim_{w_h \rightarrow 0} r_b = -(a + \|A\|_{\infty})$  y  $\lim_{w_h \rightarrow \infty} r_b = a$ , siendo así  $[r_b, a]$  un intervalo más cerrado que  $[-a, a]$ .

## Controladores

Considere la representación en espacio de estados de una planta nominal con información completa del estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Galindo, Sánchez y Herrera, en 2002, propusieron utilizar una matriz  $B^L$  inversa a la izquierda de  $B$ , i.e.,  $B^L B = I_n$ , en el esquema<sup>9</sup> de la figura 1, donde  $d_1(s)$  y  $d_2(s)$  son perturbaciones externas de bajas y altas frecuencias, respectivamente; modelando  $d_2(s)$  el error en la medición. Defina  $v_1(t) := Bu(t)$ , entonces  $u(t) = B^L v_1(t)$  y:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + v_1(t)$$

que es la planta ideal de diseño. Sin embargo, como se muestra en la figura 1, la planta a la que se aplica el controlador diseñado para esta planta ideal es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BB^L v_1(t)$$

Así, existe un error entre la planta de diseño y la planta a la que se aplica el controlador, dado por  $E_1 := BB^L - I_n$ .

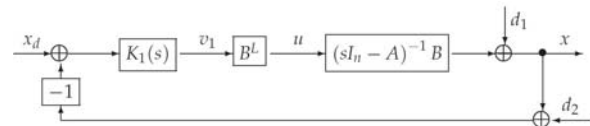


Fig. 1. Esquema de control para una planta con información completa del estado.

Sea la realización  $(A, BB^L, C)$ , si todo el estado está disponible, la ley de control para esta planta es:

$$u(s) = B^L K_1(s)(x_d(s) - x(s))$$





se ha aplicado en prototipos de laboratorio<sup>14,15</sup> al control de la velocidad de un motor de CD y al control de nivel de un sistema de tres tanques. En Galindo<sup>12</sup> se simplifica el esquema de la figura 3 al de la figura 4. Este esquema es no convencional, dado que una de las entradas del observador es  $v_1(t)$  en lugar de la entrada de la planta  $u(t)$ . Además, se muestra<sup>12</sup> que el principio de separación no se satisface; los polos de lazo cerrado dependen de la selección de los parámetros libres de  $B^L$  y  $C^R$ , y el resto  $s = -a_i$  son polos estables. Algunos de los polos permanecen fijos bajo la acción de control. Así, para  $\tilde{c} = 0$  y para  $\bar{c} = 0$ ,  $\det(sI_m - A_{22})$  y  $\det(sI_m - A_{11})$  deben ser polinomios Hurwitz, respectivamente. En 2004 Galindo, Malabre y Kučera proponen el siguiente procedimiento de sintonización:<sup>7</sup>

Para un tiempo de respuesta deseado, atenuación de  $\|d_1(t)\|_2$ , i.e., para una  $a_1$  dada,

- 1) Seleccionar  $a_2 = a_1 > 0$ ,
- 2) Encontrar los valores más grandes de los parámetros libres de  $B^L$  y  $C^R$ , y la menor  $w_1$ , satisfaciendo.

a) Especificaciones de error en estado estacionario.

b)  $r_i \gg a_i(1-a_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

c) Minimizando  $\|E_1(\rho_1 A + I_n)\|_\infty$  y  $\|(\rho_2 A + I_n)E_2\|_\infty$ , donde:

$$\rho_i := \begin{cases} (a_i - r_i)/a_i^2 & \text{si } r_i \neq a_i \\ w_i/a_i^2 & \text{si } r_i = a_i \end{cases}$$

y  $w_i$  es una frecuencia fija en la banda de bajas frecuencias de  $K_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ ,

3) Si es posible seleccione  $x_d \in \text{Im}B$  para asegurar que:

$$\lim_{r_i \rightarrow a_i} \hat{x}_{ss} \rightarrow x_{ss} \text{ y}$$

4) Si se necesita, use un prefiltro  $W_r(s)$  para la referencia.

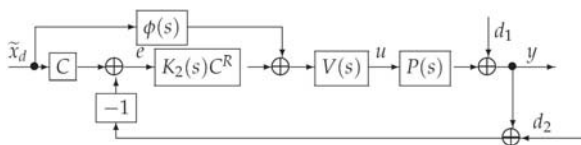


Fig. 5. Estructura de la ley de control.

En la figura 5 se muestra un esquema<sup>12</sup> equivalente al de la figura 4 propuesto por Galindo, donde  $\Phi(s) := sI_n - A$  y  $V(s) := \sigma(s)B^L K_1(s)\Gamma^{-1}(s)$ , siendo  $\Gamma(s) := I_n + \sigma(s)K_2(s)C^R C$  y  $\sigma(s) := (s + a_1 - r_1)/(s + a_1)^2$ . Este esquema permite obtener  $\|T_{u,\Delta,y,\Delta,h}\|_\infty$ , esto es  $T_{u,\Delta,y,\Delta,h}(s)$  no depende de  $\tilde{x}_d$  y está dada en la tabla I, donde:

$$K(s) := V(s) K_2(s) C^R$$

Esta expresión de  $K(s)$  no es útil para la implementación del controlador, el cual se implementa en el esquema de la figura 4; sin embargo, permite obtener sus aproximaciones de bajas y altas frecuencias.

En los esquemas de control de las figuras 3 y 4 parte de los polos permanece fija durante la acción de control, esto no es una limitante, enseguida se muestra cómo asignar una dinámica deseada a esta parte mediante un cambio de coordenadas.<sup>12</sup>

Lema. Sea el cambio de base:

$$T = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ T_{21} & I_q \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -T_{21} & I_q \end{bmatrix}$$

preservando la estructura de B, donde  $q \geq m$ , y

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

particionada de acuerdo a la partición a bloques de T. Así,

$$\bar{A} = TAT^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}T_{21} & \tilde{A}_{12} \\ T_{21}\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{21} - (T_{21}\tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{22})T_{21} & T_{21}\tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$T_{21} = \tilde{A}_{12}^R (\tilde{A}_{11} - \Lambda_{11}) \text{ y } T_{21} = (\Lambda_{22} - \tilde{A}_{22}) \tilde{A}_{12}^L$$

asignan una dinámica deseada  $\Lambda_{11}$  y  $\Lambda_{22}$  a  $\tilde{A}_{11}$  y a  $\tilde{A}_{22}$ , respectivamente. ■

### Sensibilidad mezclada

Gracias a la estructura de la ley de control de la figura 5, el resultado principal es:<sup>12</sup>

Teorema. La norma infinito de  $T_{u,\Delta,y,\Delta,h}$  es:

$$\begin{aligned} \|K_h S_{oh}\|_\infty &= \frac{1}{w_h} \|B^L D_1 D_2 C^R\|_\infty \\ \|T_{oh}\|_\infty &= \frac{1}{w_h^2} \|C B B^L D_1 D_2 C^R\|_\infty \\ \|S_{oh} P_h\|_\infty &= \frac{1}{w_h} \|C B\|_\infty \end{aligned}$$

donde  $D_i := A + (a_i + r_i)I_n$ ,  $i = 1, 2$ . ■

En este resultado  $\|T_{u_h, y_h}\|_\infty$  se da para tres modelos de incertidumbre, y depende únicamente de la realización del sistema en lazo abierto y de los parámetros de control.

En 2004, Galindo, Malabre y Kučera mostraron<sup>7</sup> que  $\|\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{\rho_i \rightarrow 0} S_o(s)\|_\infty \cong (w_l / a_i^2) \|A\|_\infty$ . Así se logra un desempeño robusto nominal aumentando  $a_i$  y, por el contrario, se logra estabilidad robusta en bajas frecuencias disminuyendo  $a_i$ , pero el desempeño empeora. En altas frecuencias, de acuerdo al resultado anterior, se tiene estabilidad robusta aumentando  $w_h$ , lo cual implica además que  $\rho_i \rightarrow 0$ , y logra desempeño robusto a bajas frecuencias. El precio que se paga es que disminuye el ancho de banda de altas frecuencias.

### Sistema mecánico de pruebas

Considere un modelo perturbado para el sistema mecánico mostrado en la figura 6:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Psi d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde  $x(t)^T := [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]$ ,  $d(t)$  es una perturbación externa desconocida y:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{-k}{m_2} & \frac{-b}{m_2} & \frac{b}{m_2} \\ \frac{-k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} & \frac{-b}{m_1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

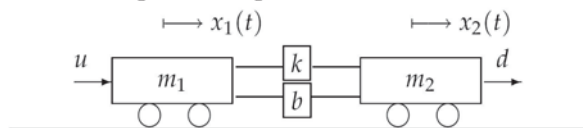


Fig. 6. Sistema mecánico de pruebas.

siendo  $k$  y  $b$  los coeficientes de elasticidad y fricción. Se considera el caso no colocado:<sup>13</sup> la entrada de control actúa únicamente sobre la masa incierta  $0.1 \leq m_1 \leq 3$  y la salida regulada es la posición de la masa  $m_2$ . Debido a la incertidumbre de la masa  $m_1$ , no se sabe cuánta fuerza se aplica a la masa  $m_2$ . Se considera un valor nominal para la masa  $m_1$  de 1, y  $m_2 = k = b = 1$ .

Sea  $a := a_1 = a_2$ . Así,  $r := r_1 = r_2$  que implica  $K_1(s) = K_2(s)$ .

Se observa que  $(A, B, C)$  es una realización mínima,  $B$  tiene la estructura deseada,  $P(s)$  satisface la propiedad de entrelazamiento par,  $\tilde{C} = 0$  y  $\det(sI_m - A_{22}) = s + 1$  es un polinomio Hurwitz. Se asigna una dinámica deseada<sup>12</sup>  $\Lambda_{22} = \text{diag}\{-2, -2\}$  utiliza la transformación  $T$  propuesta con  $q = 2$ , y obtiene:

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right], \bar{B} = B, \bar{C} = C$$

cuyo polinomio característico  $\det(sI_m - \bar{A}_{22}) = s + 2$  también es Hurwitz.

Sea  $a = 2$  y,

$$\begin{aligned} B^L &= [g_1 \ 0 \ 0 \ 1] \\ C^R &= [g_2 \ 1 \ 0 \ g_3]^T \end{aligned}$$

donde,

$$g_1 = 1.6, g_2 = 0.3, g_3 = -0.55$$

Dado que  $CB = 0$ , entonces,  $\|T_{oh}\|_\infty = 0$  y  $\|S_{oh} P_h\|_\infty = 0$ . Para  $\Lambda_{22}$ ,  $a$ , y  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , fijos, en la tabla II se selecciona  $w_h$  minimizando  $\|K_h S_{oh}\|_\infty$  y tal que el polinomio característico de lazo cerrado sea Hurwitz.

En el rango estable se selecciona  $w_h = 17$  rad/sec., entonces,  $r = 1.622$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 0.094$ ,  $\|E_1(\rho_1 A + I_n)\|_\infty = 2.052$ , y  $\|(\rho_2 A + I_n)E_2\|_\infty = 1.625$ . Además, el controlador completo es estable.

Tabla II. Sintonización de  $w_h$  para minimizar  $\|K_h S_{oh}\|_\infty$ .

$w_h$	$\ K_h S_{oh}\ _\infty$	
1	0.05	inestable
5	0.35	inestable
10	0.195	estable
15	0.134	estable
17	0.119	estable
18	0.113	estable
20	0.102	inestable

Se propone  $x_d(t) = [0 \ y_d \ 0 \ 0]^T \notin \text{Im}B$ , siendo  $y_d = 5$  la referencia de  $y(t)$ . Las salidas<sup>12</sup> se muestran en las figuras 7 y 8 para  $m_1 = 0.1, 1$  y  $3$  bajo la presencia de la perturbación  $d_2(t) = 0.1(\sin(10t) + \sin(100t))$ . En la figura 7, la posición de la segunda masa  $x_2(t)$  sigue a la señal de referencia a pesar de la presencia de  $d(t)$  y las variaciones en el parámetro  $m_1$ ;  $d_2(t)$  permanece como oscilaciones muy pequeñas en  $y(t)$ , perturbaciones sinusoidales de frecuencias arriba de  $w_h = 17$  rad/sec. se atenúan bien en  $y(t)$ , el error en estado estacionario es muy pequeño y el tiempo de respuesta es aceptable. En la figura 8 se muestra una ley de control suave y de baja energía; conforme el valor de  $m_1$  se incrementa, se requiere más energía y los picos y frecuencia de las oscilaciones en la entrada de control disminuyen.

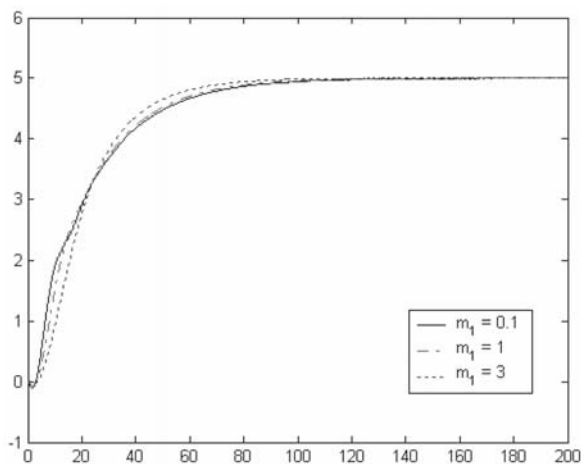


Fig. 7. Salida de la planta.

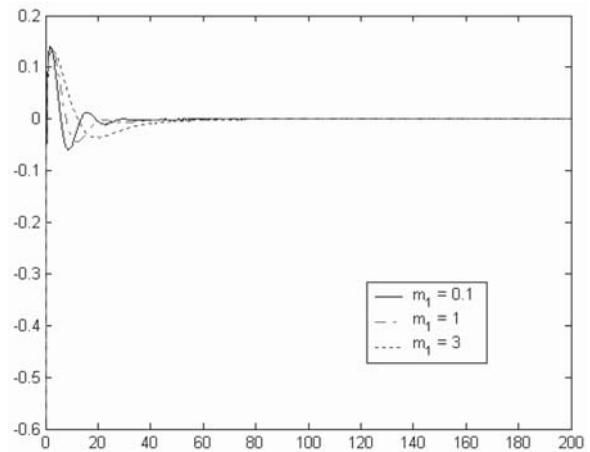


Fig. 8. Entrada de la planta.

## Conclusiones

Se presenta una metodología para diseñar un controlador robusto de sensibilidad mezclada para una planta lineal invariante en el tiempo con varios canales de entrada y de salida. Se diseña un controlador para la planta nominal, y se resuelve un problema de control robusto de sensibilidad mezclada en un esquema observador-controlador no convencional. Se da una ley de control robusto de sensibilidad mezclada y condiciones de estabilidad necesarias y suficientes. Se tiene buen desempeño garantizando estabilidad a pesar de las incertidumbres y las perturbaciones externas que son atenuadas. Un método analítico o numérico que remplace al procedimiento de sintonización es aún un problema abierto.

El criterio de sensibilidad mezclada propuesto es un criterio que cumple con dos requisitos indispensables: la atenuación de perturbaciones externas de bajas frecuencias y preserva la estabilidad ante incertidumbres de altas frecuencias. Además, esto se lleva a cabo con controladores de bajo esfuerzo computacional, y se dispone de fórmulas analíticas para el controlador y las funciones de sensibilidad. Esto se logra al explotar las ventajas del enfoque en el dominio de la frecuencia en una realización en variables de estado. Sin embargo, el criterio



propuesto no garantiza un buen desempeño en bandas de frecuencia intermedias o ante otro tipo de perturbaciones o incertidumbres.

## Resumen

Se revisan algunas de las ideas fundamentales del control robusto de sensibilidad mezclada. Se dan algunas técnicas y resultados recientes sobre control robusto de sensibilidad mezclada, en particular sobre control robusto de sensibilidad mezclada en un esquema observador-controlador no convencional. La medida de la atenuación de la incertidumbre está en términos de la realización de la planta en lazo abierto y de los parámetros de control. Además, el error en estado estacionario se aproxima a cero asintóticamente. Los resultados de simulación se ilustran en un sistema mecánico de pruebas.

**Palabras clave:** Sensibilidad mezclada, Observador-controlador no convencional, Regulación, Estabilidad robusta.

## Abstract

Some of the fundamental ideas of mixed sensitivity robust control are reviewed. Some recent techniques and results on mixed sensitivity robust control, in particular on mixed sensitivity robust control in a non-conventional observer-controller scheme, are given. The measure of the uncertainty is in terms of the plant realization and of the control parameters. Also, the stationary state error approach to zero asymptotically. The simulation results are illustrated in a benchmark of a mechanical system.

**Keywords:** Mixed sensitivity, Non-conventional Observer-controller, Regulation, Robust stability.

## Referencias

1. Nyquist, H., "Regeneration Theory," Bell Syst. Tech. J., 1932.
2. Bode, H.W., "Feedback Amplifier Design," Bell System Tech. J., vol. 19, p. 42, 1940.
3. Rosenbrock, H.H., Computer-Aided Control System Design, New York: Academic Press, 1974.
4. Zhou K., Doyle J.C. y Glover K., Robust and optimal control, Prentice Hall, 1995.
5. Youla D.C., Jabr H.A. y Bongiorno J.J., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: part II", IEEE Trans. on Automatic Control (TAC), Vol. AC-21, pp. 319-338, 1976.
6. Vidyasagar M., Control system synthesis: a factorization approach, The MIT Press Cambridge, Massachusetts, 1985.
7. Galindo R., Malabre M. y Kucera V.,  $\infty H$  control for LTI systems", Conference on Decision and Control (CDC), pp. 1331-1336, 2004.
8. Galindo R., Herrera A. y Martínez J.C., "Methodology on low-order robust controllers. Application to a tandem fan in a platform", American Control Conference (ACC), pp. 909-913, 2000.
9. Galindo R., Sánchez-Orta A. E., y Herrera A., "Stabilizing controllers for a class of linear MIMO systems", Instrumentation, Systems and Automation Society (ISA), pp. 107-115, 2002.
10. Galindo R., "Stabilization using a stable compensator and robust stability and performance", por aparecer en la Int. J. of Control.
11. Basile G. y Marro G., Controlled and conditioned invariants in linear systems theory, Prentice Hall, 1992.
12. Galindo R., "Robust Stability and Performance in a Non-conventional Observer-Compensator Scheme", Emerging Technologies, Robotics and Control Systems, vol. 2, pp. 74-82, 2007, además en la Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing, issue 3, pp. 137-145, International Society for Advanced Research, 2007.

13. B. Wie y D.S. Bernstein, "Benchmark problems for robust control design", ACC, pp. 2047-2048, 1992, y también en la J. of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 15, no. 5, pp. 1057-1059, 1992.
14. Galindo R., "Constant approximation of a mixed sensitivity  $H^\infty$  control law, and its application to the speed control of a DC motor", ACC, pp. 3176-3181, 2006.
15. Galindo R., "Mixed sensitivity  $H^\infty$  control of a three-tank-system", ACC, pp. 1764-1769, 2005.
16. Ku?era V., Discrete linear control, the polynomial equation approach, Wiley, Chichester, 1979.
17. McFarlane D., Glover K., "A loop shaping design procedure using  $H^\infty$  synthesis", TAC, Vol. 37. pp. 759 -769, 1992.

*Recibido: 3 de abril de 2009  
Aceptado: 11 de mayo de 2009*