

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



TESIS

**MODELADO Y SIMULACIÓN DE LA DINÁMICA DE UNA BOLA
DE BÉISBOL: ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE SUSTENTACIÓN**

POR

MARIO ALBERTO AGUIRRE LÓPEZ

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

FEBRERO, 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS

**MODELADO Y SIMULACIÓN DE LA DINÁMICA DE UNA BOLA
DE BÉISBOL: ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE SUSTENTACIÓN**

POR

MARIO ALBERTO AGUIRRE LÓPEZ

**EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

FEBRERO 2020

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Modelado y simulación de la dinámica de una bola de béisbol: Estudio de las fuerzas de sustentación”, realizada por el alumno Mario Alberto Aguirre López, con número de matrícula 1443147, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Director

Dr. Javier Morales Castillo
Revisor

Dr. Filiberto Hueyotl Zahuantitla
Revisor

Dr. Gerardo Jesús Escalera Santos
Revisor

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Febrero 2020

DEDICATORIA

A Dios.

A mis padres, hermanos y familia.

A todo lector que disfrute leer esta tesis.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	VII
Resumen	VIII
Contribuciones relevantes de la tesis	x
1. Introducción	1
1.1. Las fuerzas de sustentación en una bola de béisbol	1
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Estado del arte	9
1.3.1. Caso 1: lanzamientos con rotación (LCR)	9
1.3.2. Caso 2: lanzamientos sin rotación (LSR)	12
1.4. Contribución científica	16
1.5. Estructura de la tesis	17
2. Metodología	18
2.1. Construcción del modelo para el efecto Magnus en los LCR	18
2.1.1. Ecuaciones que rigen la dinámica de un LCR	18
2.1.2. Procedimiento numérico	19
2.1.3. Aproximación analítica	21
2.2. Modelo numérico en las simulaciones de los LSR	25

2.2.1. Implementación en el software ZEUS-3D	25
2.2.2. Mallado, condiciones iniciales y de frontera	27
2.2.3. Descripción de las simulaciones	29
3. Resultados	33
3.1. El efecto Magnus en los LCR	33
3.1.1. Modelo cardioide	33
3.1.2. Discusión y extensión de los modelos	37
3.2. El coeficiente de sustentación y la distribución de la presión en los LSR . .	41
3.2.1. Características del flujo y validación del modelo	41
3.2.2. Efecto de las costuras	45
3.2.3. Propuestas de investigaciones potenciales	50
3.3. Comparación de los resultados	51
4. Conclusiones	52
A. La fuerza de sustentación	54
A.1. La ecuación de Bernoulli	54
A.2. El teorema Kutta-Joukowski	58
B. Las ecuaciones de Navier-Stokes	64
B.1. Fundamentos de la dinámica de fluidos	64
B.2. Las ecuaciones de Navier-Stokes	68
C. El número de Reynolds	72

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios, a mi mamá y a mi papá por darme todo en esta vida.

Agradezco a mis hermanos por apoyarme y aguantarme todo este tiempo.

Agradezco a mis asesores por su colaboración en este gran trabajo en equipo y apoyo en los momentos difíciles, cada uno de diversas maneras: al Dr. Javier Almaguer por todo lo relevante a la dirección de este trabajo; al Dr. Javier Morales y al Dr. Gerardo Escalera por sus consejos académicos y personales; al Dr. Filiberto Hueyotl por su apoyo constante desde que nos conocemos.

También agradezco al Dr. Omar Ibarra por aceptar ser miembro del comité evaluador, al Dr. Fernando Camacho por su apoyo durante mis estudios de posgrado y al Dr. Orlando Díaz por su colaboración directa en este trabajo.

Por último, agradezco a otras personas que me han apoyado en este y otros trabajos durante mi doctorado: el Dr. Pablo Padilla y mis compañeras Dámaris Dávila, Dianne Villicaña e Isela Hernández; así como a la Universidad Autónoma de Nuevo León y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el soporte financiero otorgado para mis estudios.

RESUMEN

La dinámica de una bola de béisbol se rige en gran medida por las fuerzas de sustentación que actúan en ella, las cuales producen que la trayectoria real de la bola se desvíe lateral o verticalmente de una trayectoria parabólica. De manera general, la sustentación se origina por diferencias de presión en la superficie de la bola, sin embargo, el efecto producido depende en gran medida de las condiciones iniciales del lanzamiento, principalmente de la rotación de la bola, tal que los tipos de lanzamiento se pueden clasificar como lanzamientos con rotación (LCR) y lanzamientos sin rotación (LSR). Por un lado, la sustentación ha sido ampliamente estudiada en los LCR, donde es conocida como el efecto Magnus, y se ha documentado que la desviación producida depende de la velocidad angular de la bola, aunque no se ha establecido una relación precisa entre tal desviación y las condiciones iniciales del problema. Por otro lado, la sustentación en los LSR depende en gran medida de la diferencia de presión producida por la posición de las costuras al no poseer la bola una rotación, lo cual se traduce en trayectorias más erráticas que las producidas en los LCR. Así, la modelación y simulación de los LCR se encuentran más avanzados que los correspondientes a los LSR. La presente investigación se centra en estudiar las relaciones entre las fuerzas de sustentación y los efectos o desviaciones que se producen en la trayectoria de una bola béisbol, por lo que el estudio se divide en dos partes.

La primera parte consiste en expresar el efecto Magnus en LCR mediante una relación matemática que conecte la velocidad angular de la bola con la desviación producida al final de la trayectoria, en el plato de *home*. Para ello se propone una función cardioide, considerando argumentos tanto teóricos como numéricos, y restringiendo la investigación a analizar trayectorias simuladas por las ecuaciones de movimiento de la bola, considerando el eje de giro paralelo al plano horizontal y para valores aleatorios de velocidad lineal y angular. Tales restricciones comprenden el equivalente a combinaciones de *fastballs* y *gyroballs* en lanzamientos profesionales, con condiciones iniciales aleatorias. En este estudio, la velocidad angular se considera como un parámetro libre. Los resultados indican que la desviación vertical se ajusta a un modelo cardioide en función del coeficiente de Magnus y el ángulo de rotación.

La dinámica de los LSR es más compleja, por esta razón, la segunda parte trata con la obtención numérica de la sustentación de una bola en una aproximación 2D (un corte de la bola) y la distribución de la presión alrededor de su superficie. Para esto se resuelven de manera directa las ecuaciones de Navier-Stokes. El estudio consiste en realizar simulaciones del flujo alrededor de la sección transversal de una bola sin costuras y para los casos de una bola con una sola costura situada a varios ángulos. Esto con el fin de parametrizar el flujo de aire perturbado por la costura. La metodología consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el código magneto-hidrodinámico ZEUS-3D (originalmente diseñado para fines astrofísicos) basado en diferencias finitas. De las simulaciones se obtienen la presión, la velocidad y la densidad del aire en cada zona del arreglo computacional para cada instante de tiempo. Estas variables se utilizan para derivar el coeficiente de sustentación. En este trabajo se adaptó el código para considerar un cuerpo sólido (la bola), lo cual es una contribución original importante. El flujo se valida comparando el caso de una bola sin costura con hallazgos previos reportados en la literatura para flujos a través de cilindros circulares lisos en condiciones similares.

Los resultados obtenidos para los dos tipos de lanzamiento aquí estudiados contribuyen al entendimiento, al desarrollo y a la integración del modelado de la dinámica de la bola de béisbol, especialmente sobre las fuerzas de sustentación y su posible expansión hacia objetos con geometrías similares. Finalmente, se discute sobre la complejidad del fenómeno de la sustentación en ambos tipos de lanzamiento y se plantean investigaciones potenciales para cada caso.

Palabras clave: sustentación, efecto Magnus, béisbol, dinámica de fluidos computacional, modelado matemático

CONTRIBUCIONES RELEVANTES DE LA TESIS

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- Una descripción del efecto Magnus en lanzamientos de béisbol. Se propone un modelo paramétrico que relaciona la desviación producida por la fuerza Magnus al final de la trayectoria con la velocidad angular y el ángulo de rotación de la bola.
- Se encontró una conexión del modelo cardioide con la tecnología implementada en el algoritmo $PITCHf/x$.
- Se adaptó el código $ZEUS-3D$ para incluir un cuerpo rígido en la dinámica de fluidos computacional, ya que el código original no está diseñado para este propósito. Esta es una contribución significativa y extiende los alcances del software a diversos problemas de ingeniería.
- A partir de las simulaciones implementadas en $ZEUS-3D$, se obtuvieron perfiles para el coeficiente de sustentación y la distribución de presiones para el caso de una bola de béisbol sin rotación, con una costura localizada a diferentes ángulos.

Además, como fruto del presente estudio se obtuvieron dos artículos de investigación y uno de revisión, por lo que la mayoría de los capítulos o secciones del escrito están basados en tales trabajos, a saber:

- La Sección 1.3 posee gran contenido de: [On the aerodynamic forces on a baseball, with applications](#). Escalera Santos GJ, Aguirre-López MA, Díaz-Hernández O, Hueyotl-Zahuantitla F, Morales-Castillo J, Almaguer F-J. *Front Appl Math Stat* (2019) <https://doi.org/10.3389/fams.2018.00066> [1],
- Las Secciones 2.1 y 3.1 poseen gran contenido de: [A cardioid-parametric model for the Magnus effect in baseballs](#). Aguirre-López MA, Díaz-Hernández O., Hueyotl-Zahuantitla F, Morales-Castillo J, Almaguer F-J, Escalera Santos GJ. *Adv Comput Math* (2019) <https://doi.org/10.1007/s10444-019-09694-w> [2]
- Las Secciones 2.2 y 3.2 poseen gran contenido de: [Simulating the flow around a baseball: Study of a 2D-cylinder with a single bump](#). Aguirre-López MA, Hueyotl-Zahuantitla F, Morales-Castillo J, Escalera Santos GJ, Almaguer F-J. *Comput Math Appl* (2019) <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.05.001> [3]

De este modo, la tesis es una integración y extensión de los artículos arriba mencionados, por lo que estas referencias no serán citadas a lo largo del escrito. Por consiguiente, se entiende que las ecuaciones y las figuras del presente escrito que no estén citadas son obra original de la Tesis, algunas ya fueron publicadas en alguno de los tres artículos.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 LAS FUERZAS DE SUSTENTACIÓN EN UNA BOLA DE BÉISBOL

El pícher es el jugador que más dinero gana dentro de un equipo de béisbol. Este hecho es debido a que, el resultado de un juego de béisbol depende mucho de los lanzamientos que se efectúan. El aficionado disfruta ver “una linda curva”, “una recta potente”, “un buen cambio de dirección”, pero más allá de la trayectoria que sigue la bola de béisbol, lo que realmente importa en un juego es lo que sucede al final de la trayectoria, cuando la bola llega al plato de *home*. Es ahí donde el lanzamiento efectuado se pone a prueba ante el *swing* del bate. Desde ese instante solo queda esperar que la bola no sea golpeada, tratar de evitar un posible *hit* y repetir el proceso hasta el término del tercer *out* de la novena entrada. En cada uno de estos procesos, la parte más importante y decisiva sigue siendo la misma: ¡el final de la trayectoria!

Para abordar la cuestión de si el bate conectará la bola o no, desde una perspectiva dinámica-aerodinámica, el investigador debe limitar su estudio excluyendo el juego mental entre el pícher y el bateador y toda la estadística de juegos previos que ambos usan para decidir su tiro o su *swing*, respectivamente. Así el problema se enfoca en la modelación matemática y simulación de lo que sucede una vez que el pícher ha lanzado la bola. A partir de ese instante de tiempo, el bateador tiene aproximadamente 250 milésimas de segundo para detectar, observar, pensar y empezar su *swing*; si tarda más tiempo, la bola pasará por el plato de *home* antes de que el bate esté en posición para conectar la bola (Adair [4], Bahill [5]). Como se ilustra en la Figura 1.1, esa fracción de tiempo equivale un poco más de la primera mitad de la trayectoria, por lo que la tarea del pícher consiste en dar a la bola un “cierto efecto” que engañe al bateador, a manera que éste subestime o sobreestime el quiebre que hará la bola al final de la trayectoria (Adair [4], Bahill [6]). Tales posibles efectos o desviaciones definen los diferentes tipos de lanzamientos, y son causados por las fuerzas de sustentación.

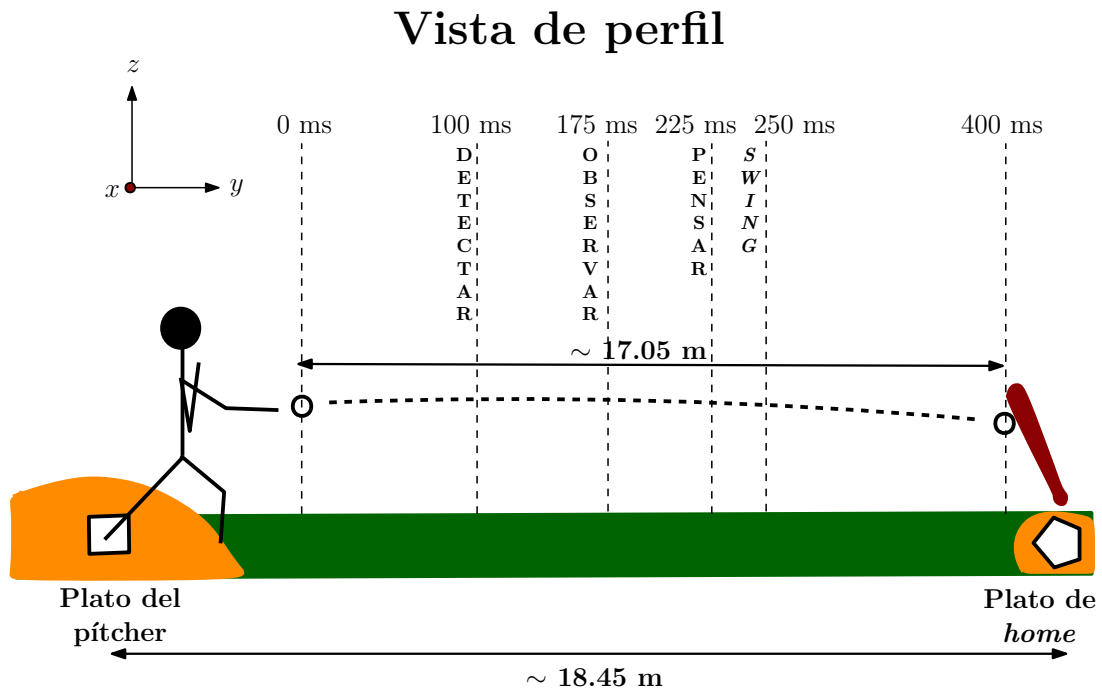


Figura 1.1: Vista de perfil de un lanzamiento ilustrando el sistema de coordenadas, la distancia entre el plato del pítcher y el plato de *home*, la distancia entre el punto donde el pítcher suelta la bola y el plato de *home*, y los tiempos críticos en la trayectoria de la bola para el bateador en un lanzamiento tipo *fastball*: 100 milisegundos (ms) para detectar la bola, 75 ms para una observación detenida y procesar la información, 50 ms para pensar y tomar una decisión, y 25 ms para comenzar a hacer el *swing* del bat. Basada en Adair [4], Bahill [5].

La conexión entre dichas fuerzas y el efecto que producen en la trayectoria tiene como punto de partida su definición, origen y clasificación. Las fuerzas de sustentación se definen como las fuerzas que actúan sobre la bola en dirección perpendicular a su velocidad y en respuesta a su desplazamiento a través del aire (Cross [7], Bahill & Baldwin [8], Drela [9]). Así por ejemplo, la fricción que recibe la bola por su desplazamiento es una fuerza aerodinámica pero actúa, por definición, en dirección paralela a la velocidad de la bola por lo que no se considera una fuerza de sustentación. Por otro lado, la gravedad, aunque la mayoría del tiempo actúa en dirección perpendicular al vector velocidad de la bola, no es causada por la interacción aire-bola, por lo que tampoco es una fuerza de sustentación.

El origen y la clasificación de las fuerzas de sustentación están estrechamente ligados. En cada instante de tiempo, la sustentación es ocasionada principalmente por las diferencias de presión que existen en la superficie de la bola (en dirección perpendicular a su velocidad) relacionadas con la circulación de la velocidad del fluido que circunda la

bola (Prandtl & Tietjens [10], Anderson [11])¹. Sin embargo, la bola experimenta cambios de presión durante su vuelo, por lo que la sustentación no siempre se mantiene constante durante la trayectoria. Al contrario, debido a la velocidad del lanzamiento, el flujo de aire alrededor de la bola se separa de la capa límite (la capa inmediatamente cercana a la bola) pasando de ser laminar en la parte frontal y producir una presión cuasi-estática en la superficie de la bola, a ser turbulento en la parte posterior y producir una presión variable en el tiempo, con mucha sensibilidad a cualquier variación en las condiciones iniciales (Ferziger & Perić [12]). Así, aunque este fenómeno ocurre en cualquier lanzamiento profesional de béisbol, la separación del flujo y por consiguiente los cambios de presión, dependen en gran medida de las condiciones iniciales del lanzamiento, es decir, del tipo de lanzamiento que se efectúa, como se ilustra en los casos representados en la Figura 1.2.

Biomecánicamente, existen dos grupos de lanzamientos o posibles maneras en que el pítcher provoca la sustentación en la bola. La primera es la más intuitiva y la más estudiada: lanzar la bola con una rotación inicial, considerando que a mayor rotación, mayor es la desviación producida. Al deslizar la bola por sus dedos o la palma de su mano, el pítcher logra imprimir un momento angular en la bola con poca pérdida de energía tal que provoca una diferencia de presión con poca variación en el tiempo, ver Figura 1.2 (izquierda). Estos son los llamados lanzamientos con rotación (LCR) y se caracterizan por tener una trayectoria suave, producto de la gran velocidad angular que la bola alcanza y la poca pérdida de energía que ésta experimenta en su rotación, tanto en magnitud como en precesión. A este grupo pertenecen prácticamente todos los tipos de lanzamientos conocidos (*curveball*, *slider*, todos los tipos de *fastball*, *screwball*, *change-up*, entre otros), los cuales se diferencian al realizar diferentes combinaciones de velocidad lineal, velocidad angular y eje de rotación inicial. Algunos de estos lanzamientos se ilustran en la Figura 1.3.

La segunda manera en la que se puede lograr la sustentación consiste en lanzar la bola sin o con muy poca rotación. La forma más común en que el pítcher logra realizar este tipo de lanzamiento es tomando la bola con sus nudillos, tratando de evitar que la bola adquiera un momento angular; de ahí el nombre de la *knuckleball* o la “bola de nudillos”, la cual es el único integrante de los lanzamientos sin rotación (LSR). En este tipo de lanzamientos, las costuras juegan un papel importante ya que, al no existir rotación, la diferencia de presión se obtiene simplemente por el flujo de aire alrededor de la superficie rugosa de la bola, por lo que la magnitud y la dirección de la fuerza de sustentación producida dependerá de la orientación de la bola, ver Figura 1.2 (derecha). Lo anterior conduce a que las desviaciones producidas por los LSR sean generalmente erráticas, ya

¹Las causas que originan la fuerza de sustentación se explican con más detalle en la derivación de la fórmula de sustentación mostrada en el Apéndice A.

que a diferencia de los LCR, un ligero cambio en la orientación de las costuras durante la trayectoria puede cambiar tanto la magnitud como la dirección y el sentido de la sustentación. Los dos tipos más comunes de *knuckleball* son ilustrados en la Figura 1.4.

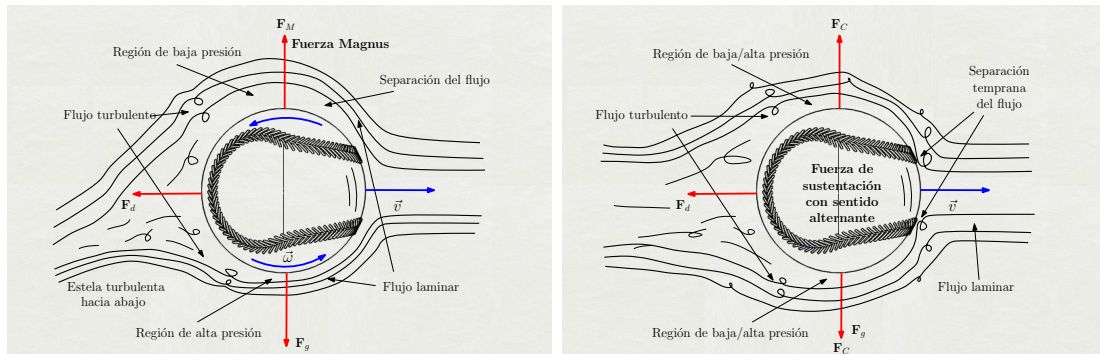


Figura 1.2: Esquemización del flujo alrededor de la bola para lanzamientos con y sin rotación. Las fuerzas de gravedad F_g y de fricción F_d están presentes en ambos tipos de lanzamiento. Izquierda: LCR. El flujo pasa de ser laminar a turbulento con menos variación en el tiempo que en los LSR, causado por la poca pérdida de energía en el momento angular. La fuerza Magnus F_M tiene dirección $\omega \times \mathbf{v}$. Derecha: LSR. La separación del flujo está fuertemente influenciada por la posición de las costuras, de manera que una pequeña variación en la posición puede causar una alternancia en la dirección y sentido de la fuerza de sustentación F_C producida.

En resumen, ambos tipos de lanzamientos tienen sus ventajas y desventajas al ser utilizados. Por un lado, los LCR ofrecen una suavidad en la trayectoria producida, lo cual es una ventaja debido al control que esto ofrece al pitcher. No obstante, la suavidad de las trayectorias puede convertirse en desventaja cuando se considera que, debido a la biomecánica del ser humano, el pitcher está restringido a un número de combinaciones de velocidad angular y eje de rotación, lo cual puede volverlo “predecible”. Por otro lado, los LSR pueden producir efectos más complejos y en mayores combinaciones con tan sólo cambiar la orientación de la bola o imprimir una pequeña rotación. Sin embargo, la erraticidad de sus trayectorias, sumado al poco estudio que se tiene de ellos, los vuelve más difíciles de controlar y por lo tanto menos confiables. Este resumen se ilustra en la Figura 1.5.

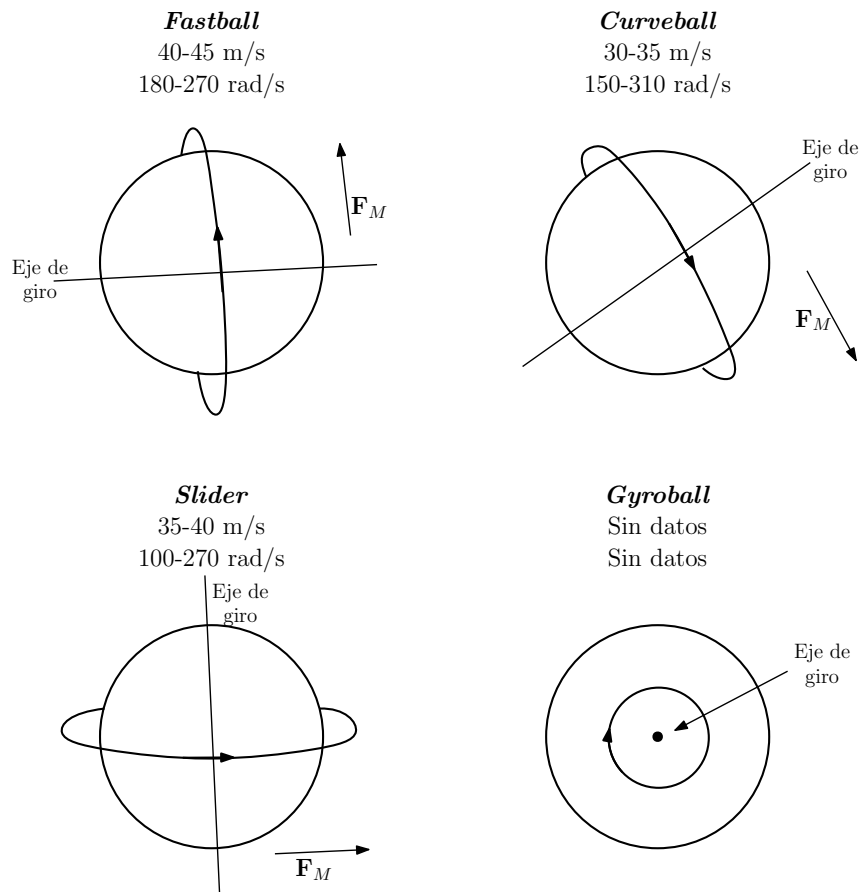


Figura 1.3: Algunos tipos de LCR (y una *gyroball*) indicando el eje de giro, dirección de la fuerza Magnus, rangos típicos de velocidad y velocidad angular. Los dibujos expresan la imagen que ve el bateador de una bola lanzada por un pítcher diestro. Basada en Adair [4] y Cross [7], apoyada por rangos de velocidad y velocidad angular tomados de la página oficial de la *Major League Baseball* [13].

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La presente investigación se centra en el estudio tanto de las fuerzas de sustentación como de los efectos o desviaciones que se producen en la trayectoria durante un lanzamiento de béisbol. Específicamente, abordaremos diversos problemas para los casos LCR y LSR, los cuales serán planteados a continuación.

Comenzaremos recordando la definición de sustentación introducida en la Sección anterior: *Las fuerzas de sustentación se definen como las fuerzas que actúan sobre la bola en dirección perpendicular a su velocidad y en respuesta a su desplazamiento a través del aire.* La expresión matemática de esta definición es una relación teórico-experimental, fundamentada en la distribución de presiones en la superficie de la bola, que se deriva

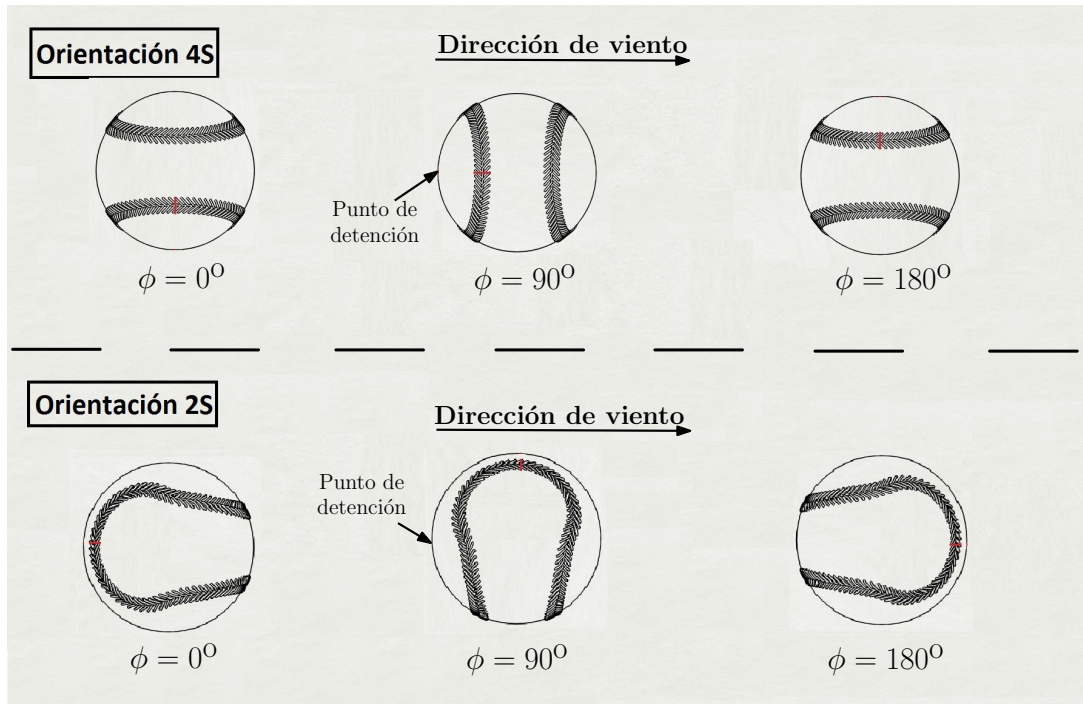


Figura 1.4: Tipos de LSR. El ángulo de ataque ϕ está definido en el plano $y - z$. La dirección del viento en el dibujo es contraria a la considerada en Borg & Morrisey [14].

a partir de la ecuación de Bernoulli (como primera aproximación) o más formalmente, a partir del teorema Kutta-Joukowski², y consiste en:

$$\mathbf{F}_S = \frac{1}{2} \rho A C_S v \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

donde v es la rapidez de la bola, ρ es la densidad característica del aire, A es el área de la sección transversal de la bola y C_S es un coeficiente de ajuste promediado en el tiempo llamado “coeficiente de sustentación”, el cual relaciona la morfología de la bola con su comportamiento aerodinámico; de esta manera, el factor $\frac{1}{2} \rho A C_S$ reúne características promedio de la interacción aire-bola. Por otro lado, la dirección de la fuerza está dada por el producto vectorial (\times) de la velocidad de la bola \mathbf{v} y el vector unitario $\boldsymbol{\alpha}$ que indica la circulación del fluido (Bahill & Baldwin [8]). El coeficiente C_S y el vector $\boldsymbol{\alpha}$ dependen del tipo de lanzamiento (LCR o LSR).

Lanzamientos con rotación (LCR)

En el caso de los LCR, haremos referencia a la sustentación como la fuerza Magnus (\mathbf{F}_M), denominada así en honor al físico y químico alemán Heinrich Gustav Magnus, quien enunció por primera vez el efecto producido por tal fuerza. La expresión (1.1) se adecúa a este tipo de lanzamientos reescribiendo \mathbf{F}_M en función de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Ante

²Para ver la derivación de la Ecuación (1.1), y su adaptación a los LCR y a los LSR, ir al Apéndice A.

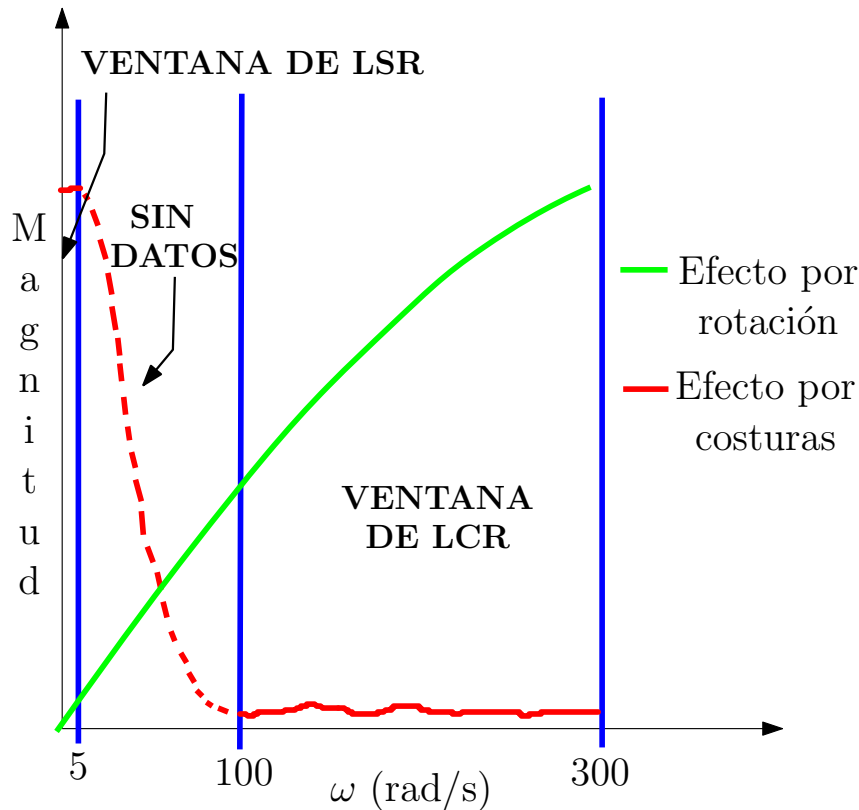


Figura 1.5: Ventanas de lanzamiento.

esta situación, la fuerza Magnus se escribe usualmente como:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{2} \rho A C_M \frac{v}{\omega} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la bola, $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ la rapidez angular, mientras que el coeficiente de ajuste C_M es función de v y ω (Cross [7], Robinson & Robinson [15]).

El objetivo del estudio consiste en expresar el efecto Magnus mediante una relación matemática que conecte la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con la desviación producida al final de la trayectoria. Para ello se propone una función cardioide, considerando argumentos tanto analíticos como numéricos. La investigación se restringe a analizar las desviaciones de lanzamientos simulados con valores iniciales de velocidad lineal y angular aleatorios, satisfaciendo $v \in (30 - 50)$ m/s, $\omega \in (100 - 300)$ rad/s, y considerando el eje de giro paralelo al plano horizontal³. Tales restricciones comprenden el equivalente a combinaciones de *fastballs* y *gyroballs* efectuados por jugadores profesionales, con condiciones iniciales

³A lo largo de la tesis se utilizan las unidades del SI, sin embargo, en juegos de béisbol es más común ver expresadas estas variables en millas por hora (mi/hr) y revoluciones por minuto (rpm), respectivamente. Los valores de los intervalos de arriba, expresados en estas unidades, corresponden aproximadamente a $v \in (67 - 111)$ mi/hr y $\omega \in (954 - 2865)$ rpm. El lector puede hacer una rápida aproximación de la conversión mediante las fórmulas: 1 mi/hr = 2.2 m/s, 1 rad/s = 9.5 rpm

aleatorias. Los lanzamientos son simulados completando las ecuaciones de movimiento de Newton, considerando la fuerza de fricción y la fuerza de gravedad. A su vez, la velocidad angular se considera como un parámetro por lo que la fuerza Magnus solo varía con la velocidad lineal. Estas suposiciones son justificadas por los antecedentes que serán mostrados en la Sección 1.3.1.

Lanzamientos sin rotación (LSR)

En el caso de los LSR, la sustentación es causada principalmente por las costuras, por lo que haremos referencia a la sustentación mediante \mathbf{F}_C , y la orientación de la bola tomará parte en la ecuación de la sustentación. Para este tipo de lanzamientos consideraremos el caso del perfil de una bola, es decir, el caso 2D de una bola en movimiento. De este modo, la expresión (1.1) se transforma en

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{2}\rho AC_C v \hat{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es un vector unitario perpendicular tanto a \mathbf{F}_C como a \mathbf{v} , mientras que el coeficiente de ajuste C_C es función del ángulo de ataque ϕ (Nathan [16]). Esta restricción al caso 2D, representa a los lanzamientos de nudillos *4-seam* (4S) y *2-seam* (2S), los cuales provocan la sustentación en la bola principalmente en dirección vertical. El coeficiente C_C también varía dependiendo de la orientación de la bola, 4S ó 2S.

El objetivo de la investigación es obtener numéricamente el coeficiente de sustentación C_C y la distribución de la presión alrededor de la sección transversal de la bola que viaja a 30 m/s, la cual posee una sola costura situada a un cierto ángulo ϕ del frente de su circunferencia. Se realiza un estudio sistemático de las variaciones del ángulo ϕ , con el objetivo de parametrizar el flujo de aire perturbado por la costura. A diferencia del caso LCR, la dinámica de la bola no puede ser estudiada por medio de las ecuaciones del movimiento de Newton, en este caso es necesario resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo compresible, para poder estudiar el flujo de aire que circula alrededor de la bola⁴. La metodología consiste en resolver tales ecuaciones utilizando la técnica de Dinámica de Fluidos Computacional (*CFD*, por sus siglas en inglés) con un método de diferencias finitas, mediante el código magneto-hidrodinámico ZEUS-3D, originalmente diseñado para fines astrofísicos. De cada simulación, se obtienen la presión, velocidad y densidad del aire en cada instante de tiempo y espacio de la malla computacional, con lo cual se deriva el coeficiente promedio C_C . El código se adaptó para incluir un cuerpo sólido (la bola). El flujo se valida comparando el caso de una bola sin costura con hallazgos

⁴La derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido newtoniano compresible puede ser vista en el Apéndice B.

previos reportados en la literatura para cilindros circulares lisos en condiciones similares, los cuales son mostrados en la Sección 1.3.2.

1.3 ESTADO DEL ARTE

La presente Sección consta de una revisión literaria tanto para LCR (§1.3.1) como para LSR (§1.3.2); así mismo, sirve como justificación de las suposiciones hechas en el planteamiento del problema, ver Ecuación (1.2). El lector que esté familiarizado con los antecedentes de las fuerzas de sustentación en alguno de estos tipos de lanzamientos (LCR y/o LSR) puede obviar la Subsección correspondiente sin perder el rumbo del escrito.

1.3.1 CASO 1: LANZAMIENTOS CON ROTACIÓN (LCR)

El estudio de las fuerzas de sustentación en los LCR ha ganado terreno sobre los avances en los LSR. Quizá por el interés que despierta la facilidad para controlar y obtener trayectorias suaves, así como también por las similitudes que este tipo de lanzamientos comparte con el movimiento de otras pelotas u objetos esféricos con diferente superficie. De hecho, la expresión de la fuerza Magnus (1.2) es válida para casi cualquier tipo de esfera, siendo la bola de béisbol un caso particular. Como mencionamos previamente en la Sección 1.2, el ajuste entre la expresión de la fuerza Magnus y la morfología de la esfera está dado por el coeficiente Magnus C_M .

Esto es motivo para que la determinación de C_M sea objeto de estudio en experimentos de diversos juegos de pelota. Algunos ejemplos son: Davies [17], Daish [18], Crabill, Witherden & Jameson [19], y Li, Tsubokura & Tsunoda [20] en golf; Goodwill, Chin & Haake [21] en tenis; Kray, Franke & Frank [22], y Passmore, Tuplin & Stawski [23] en fútbol; Sayers & Hill [24] en cricket; Briggs [25] y Nathan [26, 27] en béisbol. En la mayoría de los casos, se concluye que el coeficiente Magnus es función de la magnitud tanto de la velocidad lineal como de la angular $C_M \equiv C_M(v, \omega)$ ya que, como se ve en la Ecuación (1.2), ambas contribuyen a la velocidad instantánea de la bola en dirección de la sustentación. Más detalladamente, se ha reportado que el coeficiente Magnus C_M depende de la razón de rotación $S = R\omega/v$, donde R es el radio de la bola. Se recomiendan las referencias Cross [7], Robinson & Robinson [28], Clark, Greer & Semon [29], Ward-Alaways [30] y Syamsuddin & Kwon [31] para el lector que desee ahondar más en una expresión de C_M en función de S , así como Nguyen et al. [32] para la determinación de C_M en un cuerpo sólido con morfología arbitraria y para el desarrollo de técnicas alternativas en el estudio del efecto Magnus.

No obstante, las investigaciones sobre bolas de béisbol realizadas por Nathan [26, 27] han demostrado que, para factores de rotación en el rango $S \in (0.090 - 0.595)$ y número de Reynolds⁵ ($\text{Re} = \frac{\rho v R}{\mu}$, $\mu \equiv$ viscosidad dinámica del aire) en el rango $\text{Re} \in (1.1 \times 10^5 - 2.4 \times 10^5)$, el coeficiente Magnus no tiene gran dependencia de v , tal que $C_M \equiv C_M(\omega)$, aproximándose a

$$C_M(\omega) = 0.319 \left[1 - e^{-2.48 \times 10^{-3} \omega} \right]. \quad (1.4)$$

Los rangos de S y Re mencionados equivalen a los rangos $v \in (25 - 50)$ m/s, $\omega \in (150 - 450)$ rad/s, para una bola típica de béisbol de ~ 7.1 cm de radio, por lo que el modelo (1.4) abarca la mayor parte de los valores usados en la presente investigación y, en general, para los lanzamientos que se efectúan en el béisbol profesional. En efecto, este modelo se ajusta a los valores experimentales reportados en Briggs [25], y ha sido utilizado tanto para simular (investigaciones de Robinson & Robinson [15, 33, 34]) como para reconstruir trayectorias (Aguirre-López et al. [35]) reportando buenos resultados (errores ~ 0.1 mm al final de la trayectoria) y la implicación que conlleva en los juegos de pelota y la tecnología relevante a ello.

Por supuesto, la profundidad del estudio y complejidad del modelo utilizado están inversamente relacionados con la aplicación y practicidad de los resultados. Como ejemplo, el problema de la presente investigación (relacionar la fuerza Magnus con las desviaciones producidas) es abordado en el algoritmo desarrollado por Aguirre-López et al. [35] para reconstruir trayectorias, el cual resuelve las ecuaciones de movimiento de la bola por medio de los métodos de la secante y Newton-Raphson a partir de tres puntos conocidos en tiempo y espacio de la trayectoria; esto lo logran midiendo las diferencias entre trayectorias simuladas con y sin fuerza Magnus. Así mismo, otras estimaciones basadas en la medición de las desviaciones producidas en trayectorias con condiciones iniciales similares han sido reportadas por Clark, Greer & Semon [29], Kistemaker, Faber & Beek [36] y Shum & Komura [37]. Sin embargo, la relación entre la fuerza Magnus y su efecto no había sido estudiada a detalle. Es en la presente investigación donde se logra establecer tal relación, usando gran parte del trabajo realizado por Aguirre-López et al. [35], y restringiendo ω como mencionamos en el planteamiento del problema, en §1.2.

Más aún, el `PITCHf/x algorithm` propuesto por Nathan [38] es una herramienta diseñada, no sólo para relacionar el efecto Magnus sino que además, usa las relaciones encontradas para clasificar trayectorias reales en base a su desviación final y condiciones iniciales. El algoritmo no profundiza en la física del movimiento de la bola debido a que sólo utiliza las ecuaciones cinemáticas del movimiento en lugar de las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica de un objeto sólido. Los resultados que se obtienen

⁵Para tener una mayor visualización del significado y la importancia del número de Reynolds, ver el Apéndice C.

han servido para consolidar al `PITCHf/x algorithm` como la herramienta y el método matemático más popular para estudiar, entrenar y predecir lanzamientos en el mundo del béisbol, teniendo un impacto directo en los equipos profesionales de béisbol (Nathan [38], Sievert [39]). Aunado a esto, el `PITCHf/x algorithm` y el software `trajectory calculator` desarrollado por Kagan & Nathan [40] han servido de base para abordar el problema de clasificación y agrupamiento de trayectorias, motivando a nuevas tecnologías como las mostradas en Cross [7], Syamsuddin & Kwon [31], Pane [41], Nagami, Higuchi & Kanosue [42], Nagami et al. [43], Nagami et al. [44] y Miyata [45]. Para descargar alguno de estos softwares el lector puede visitar el sitio web de Nathan[46].

Al lector que desee tener conocimiento sobre el problema de simulación o reconstrucción de trayectorias en LCR enfocado al desarrollo de tecnología, como videojuegos, máquinas de pitcheo o repeticiones instantáneas, se recomiendan las referencias Takahashi, Fujii & Yagi [47], Chu, Wang & Wu[48], Chang, Han & Gong [49], Hung & Hsieh [50] y Guéziec [51].

En cuanto a las restricciones de la presente investigación, la suposición de considerar la velocidad angular ω como una constante en el tiempo, mencionada en el planteamiento del problema (Sección 1.2), se justifica por las investigaciones de Ward-Alaways [30] y Adair [52], donde se concluye que tanto la fuerza de torque como las fuerzas de compresión sobre la bola son despreciables. Esto se ve reflejado en las trayectorias de los LCR: el espectador observa que la bola se desvía más al final de la trayectoria que al principio, lo cual es consecuencia de que la bola desacelera rápido en v (fricción), mientras que conserva su momento angular $\sim \omega$. Aunado a la justificación anterior, hay muy poca literatura sobre cómo actúan estas fuerzas específicamente en una bola de béisbol. En efecto, todas las investigaciones sobre el comportamiento de C_M y sus aplicaciones toman como modelo ω constante. Para casos con ω variable, se recomienda al lector las referencias Cross [7] y Robinson & Robinson [33] y las referencias Ivanov Ivanov [53] y Gardner & Jia [54] para una revisión del movimiento de un cuerpo sólido en general.

Como puntos finales de esta revisión literaria, es importante mencionar la existencia del efecto anti-Magnus y el comportamiento de la fuerza de fricción en los LCR. El primer punto es un fenómeno que ocurre a $Re \sim 10^5$ y $S \in (0 - 0.6)$, y consiste en un cambio de dirección en la fuerza Magnus causado cuando la cara de la bola hacia donde apunta \mathbf{F}_M permanece en un flujo laminar (baja velocidad y alta presión) mientras que el flujo en la otra cara sigue siendo turbulento (alta velocidad y baja presión); de tal manera que se invierte la dirección de la fuerza al cambiar la diferencia de presiones. La implicación de este fenómeno en una trayectoria real de un LCR terminaría con la suavidad que caracteriza a este tipo de lanzamientos; sin embargo, el efecto anti-Magnus solo ha sido reportado en pelotas con superficie lisa (lo que permite el flujo laminar) como en los

experimentos realizados en las investigaciones de Kray, Franke & Frank [22] y Briggs [25], mientras que en el caso de una bola de béisbol, las costuras aportan la rugosidad suficiente para impedir la alta presión relativa causada por el flujo laminar. Para una explicación detallada del efecto anti-Magnus se recomienda leer Cross & Lindsey [55] o visitar la página de Rod Cross <http://www.physics.usyd.edu.au/~cross/>.

La fuerza de fricción juega un papel fundamental en cualquier trayectoria de béisbol, sea un LCR o un LSR. Al igual que en la fuerza Magnus, el estudio del coeficiente de ajuste correspondiente es la manera más efectiva de estudiar la fricción: el coeficiente de fricción C_d . Existen dos caminos para explicar el comportamiento de C_d . Por un lado está la crisis en fricción mencionada en Landau & Lifshitz [56] para esferas con superficie suave, el cual indica que una crisis en los valores de C_d puede ocurrir en $Re \sim 10^5$ (a velocidades de 30-40 m/s). Los datos obtenidos en Frohlich [57] y en Cross [58] se ajustan a tal modelo. Por otro lado están las investigaciones que no defienden tal fenómeno; desde la curva propuesta por Adair [4] hasta los datos recientes obtenidos por Naito et al. [59], la mayoría de los experimentos sugieren un modelo sin una crisis en la fricción (Bahill [5], Cross [7], Nathan et al. [26], Alam [60] y Kensrud & Smith [61]). Esta predominancia se mantiene para pelotas de otros deportes, ver por ejemplo Cross [58], Kray, Franke & Frank [22], Cross [62] y Goff [63]. Por otro lado, se tienen dos modelos de especial interés: el modelo reportado en Cross [7], del cual C_d puede ser obtenido si la velocidad instantánea de la bola es conocida, y la ya mencionada curva de Adair [4], la cual se aproxima a

$$C_d(v) = 0.29 + 0.22 [1 + e^{(v-32.37)/5.2}]^{-1}, \quad (1.5)$$

de acuerdo con Aguirre-López et al. [35]. Es conveniente aclarar que las fórmulas de los coeficientes Magnus (1.4) y de fricción (1.5) son generalmente calculadas a partir de experimentos considerando varios tipos de LCR (*fastball*, *curveball*, entre otros), por lo que debe entenderse que, además de ser coeficientes promediados en el tiempo, son expresiones ajustadas y extrapoladas a cualquier tipo de LCR (Adair [4]).

1.3.2 CASO 2: LANZAMIENTOS SIN ROTACIÓN (LSR)

Al igual que para los LCR, en esta sección mostraremos los avances que atañen a la fuerza de sustentación en los LSR la cual, como recordará el lector, es ocasionada principalmente por las costuras. Debido a que la bola de béisbol no es una esfera completamente simétrica, la orientación de la bola jugará un papel importante en la fuerza producida.

Como mencionamos en la Sección 1.1, la *knuckleball* es el único lanzamiento en la categoría de los LSR. Las condiciones iniciales de este lanzamiento incluyen combinaciones

de rapidez linear y angular en los rangos $v \in (20 - 40)$ m/s y $\omega \in (0 - 50)$ rad/s, ver Bahill [5] y Borg & Morrissey [14]. Aunque es un lanzamiento muy poco utilizado en el béisbol profesional, a lo largo de la historia algunos pícheres han logrado “dominar” la *knuckleball*, encontrando empíricamente orientaciones iniciales de la bola que producen trayectorias no tan erráticas y con desviaciones principales en sólo un eje (x ó z). Estas orientaciones especiales son mencionadas comúnmente como *4-seam* (4S) y *2-seam* (2S) ya que, al efectuarse una revolución completa en la dirección principal de movimiento, las costuras pasarían cuatro y dos veces, respectivamente, por el frente de la bola (Borg & Morrissey [14], Higuchi & Kiura [64], Himeno [65]). Las imágenes de la Figura 1.2 sirven como representación de las orientaciones 4S y 2S, donde la fuerza de sustentación producida tendría al eje z como componente principal de la magnitud de la fuerza, mientras que la fuerza producida en la componente x sería prácticamente nula debido a la simetría que la bola guarda con respecto a ese eje. De esta manera, la dinámica de la bola se restringe a un movimiento en dos dimensiones (plano $y - z$).

La magnitud y el sentido de la fuerza de sustentación están en función del ángulo de ataque ϕ , por medio del coeficiente de sustentación $C_C \equiv C_C(\phi)$, pero a diferencia de $C_M(\omega)$ en el caso LCR, $C_C(\phi)$ no es una función tan suave como la Ecuación (1.4). Los experimentos de Borg & Morrissey [14] muestran cuatro ciclos en los valores de $C_C(\phi)$, con $\phi = 0^\circ - 360^\circ$ para la orientación 4S, cada ciclo con periodo de 90° , con un comportamiento cuasi-senoidal con bucles al término de cada ciclo. Además del cambio en magnitud y las zonas de bucles existentes, en cada ciclo se alterna el sentido de la fuerza, de modo que este comportamiento en el coeficiente de sustentación reflejan la gran variación que se produce en la trayectoria. Adicionalmente a tal complejidad que mostraría una *knuckleball* sin rotación, en la práctica es difícil que una bola viaje con la misma orientación durante todo su vuelo, ya que ligeras rotaciones son inducidas por el contacto del aire con las costuras (Mehta [66], Texier et al. [67]). En consecuencia, las rotaciones inducidas aumentan la erraticidad del movimiento, lo que ha llevado a caracterizar a las desviaciones producidas en las trayectorias de *knuckleballs* como aleatorias conforme se varía ϕ , ver Nathan [16]. Todas estos efectos marcan lo complejo que es establecer una expresión similar a la de $C_M(\omega)$ para $C_C(\phi)$. Hasta donde sabemos, el modelo descrito por Aguirre-López et al. [68] es la única investigación que trata este asunto, expresando C_C como una suma de funciones senoidales dependientes de ϕ . En general, el modelo brinda buenos resultados, ajustándose más a los datos experimentales de la configuración 4S que a los de la configuración 2S. Resultados similares a los obtenidos por Borg & Morrissey [14] han sido reportados en otras investigaciones como en Kensrud [69], Higuchi & Kiura [64], Watts & Sawyer [70].

Estudios experimentales detallados sobre la influencia de las costuras han conducido a una mejor comprensión y descripción del origen y comportamiento de las fuerzas de sustentación:

Por un lado, está el estudio del efecto de las costuras en la separación del flujo. Tanto Borg & Morrissey [14] como Higuchi & Kiura [64] y Watts & Sawyer [70] reportaron que, cuando una costura está ubicada cerca del ángulo de separación natural (el correspondiente a una esfera lisa), la separación del flujo se vuelve muy impredecible, ya que la turbulencia inducida puede ocasionar un retraso en el ángulo de separación o bien, forzar la separación en un ángulo inmediato. Tales efectos son reflejados en los cambios rápidos de magnitud y sentido de C_C en los ángulos $\phi = 52^\circ, 140^\circ, 220^\circ, 310^\circ$ en Borg & Morrissey [14] y Watts & Sawyer [70]. A su vez, los experimentos de Higuchi & Kiura [64] mostraron que una variación de tan sólo un grado (36° a 37°) en la posición de una costura puede causar una separación temprana, es decir, a un ángulo menor. Más aún, ellos reportaron que para orientaciones 4S y Re cercanos a 1.5×10^5 la bola es sensible a la rotación inicial, mientras que para orientaciones 2S la frecuencia de oscilación es constante para $Re \in [1.9 \times 10^5, 4.6 \times 10^5]$. Como consecuencia de la rotación inducida el fenómeno se vuelve más impredecible. Esta es la razón por la que los lanzamientos en la ventana intermedia de la Figura 1.5 son los más impredecibles.

Por otro lado, estudios aún más profundos sobre la interacción aire-costuras han sido dirigidos para describir detalladamente el origen de las fuerzas de sustentación. Watts & Sawyer [70] y Mehta [66] mencionan que hay dos posibles caminos para producir sustentación en una bola de béisbol: por muchos años se argumentaba que la sustentación no es producida tan solo por las perturbaciones locales que causan las costuras sino también por la retroalimentación recibida de los vórtices que se generan en la parte posterior de la bola (en la estela del flujo). Esta hipótesis es defendida en los trabajos de Ferziger & Perić [71], Watts & Sawyer [70] y Mehta [66]; mientras que las mediciones de Texier [67] apuntan que los aportes a la sustentación por parte de los vórtices son significativamente menores a los de las costuras, por lo que sólo las perturbaciones locales en el frente de la bola causan la separación del flujo y en consecuencia, la fuerza de sustentación. Más información acerca de la fuerza de sustentación en deportes de pelota puede ser encontrada en Mehta [66], Hong et al. [72] y Murakami et al. [73].

Luego, la influencia de las costuras en la aerodinámica de la bola sumado a los avances tecnológicos en las técnicas de *CFD*, han permitido que surja el interés de realizar estudios numéricos del flujo alrededor de la bola, se sometan a validación con los experimentos reportados, y se establezcan modelos más generales o nuevas observaciones sobre el coeficiente C_C . Sin embargo, solo unas pocas investigaciones tratan con el problema de simular el flujo alrededor de una pelota, resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes. Es-

pecíficamente, Himeno R. [65] realizó simulaciones con ambas configuraciones (4S y 2S), analizando el flujo y la separación del mismo, pero concluyendo que los perfiles obtenidos para el C_C no concuerdan con los resultados reportados en las pruebas experimentales ya mencionadas anteriormente. A su vez, Jalilian et al. [74] estudiaron correlaciones entre la rapidez angular y las fuerzas aerodinámicas en pelotas de béisbol, fútbol y tenis; con esos datos, determinaron la trayectoria completa con errores de ~ 0.2 metros respecto a los datos reales de la trayectoria, lo cual es muy significativo; mientras que Barber et al. [75] reprodujeron curvas equivalentes a las de Himeno [65] para pelotas de fútbol, logrando reproducir trayectorias completas en este deporte.

Como se menciona en el párrafo anterior, existe poca literatura directamente relacionada con la técnica *CFD* aplicada a bolas de béisbol; sin embargo, el problema puede ser estudiado como primera aproximación analizando el caso del flujo alrededor de la sección transversal de la bola de forma semejante al flujo alrededor de un cilindro. En este caso utilizando un Re de acuerdo a las condiciones de un lanzamiento “típico” con $Re=1.46 \times 10^5$ (dentro del régimen alto-subcrítico). Las características del flujo correspondientes a tal número Re incluyen una capa límite laminar con separaciones no estacionarias del flujo más frecuentes que en el régimen bajo-sucrítico, cambios de dirección en el flujo y una estela turbulenta (Norberg [76], Sidebottom, Ooi & Jones [77], Pastò [78]). Estudios previos indican que el coeficiente de fricción (C_d) y de sustentación (C_C) oscilan alrededor de 1.2 y 0 unidades, respectivamente, con altas fluctuaciones. Además, el coeficiente de presión promedio (C_p) alrededor de la bola tiene un comportamiento característico como es mostrado en las referencias Norberg [76], Johansson, Nielsen & Nielsen [79], Alonzo García [80], Tremblay [81], Naito & Fukagata [82] y Breuer [83]. A su vez, el esquema numérico y la metodología utilizada pueden producir variaciones mínimas en los valores de C_p , ver Norberg [84] y Lloyd & James [85].

Por último, es importante mencionar que el comportamiento de la fricción en los LSR no es parecido al caso de los LCR. Como vimos en la Sección 1.3.1, la fricción puede ser tomada como constante o aproximada por un modelo similar a la Ecuación (1.5). Sin embargo, cuando la bola viaja sin rotación los vórtices oscilatorios en la parte posterior de la bola tienen un mayor aporte en la dinámica provocando que la fuerza de fricción oscile de igual manera en el tiempo (Ferziger & Perić [71], Texier et al. [67]). Aunado a esto, la fuerza de fricción también oscila al variar el ángulo de orientación ϕ de la bola (Borg & Morrisey [14], Higuchi & Kiura[64]). Asimismo, la altura y anchura de las costuras pueden proporcionar variaciones extra, como es reportado por Alam et al. [60] y Kensrud et al. [69].

1.4 CONTRIBUCIÓN CIENTÍFICA

Una vez establecido el planteamiento del problema y el estado del arte del mismo, la contribución científica que aporta la presente investigación se resume en los siguientes puntos:

Caso LCR

- Descripción del efecto Magnus en lanzamientos de béisbol mediante un modelo paramétrico que relaciona la desviación producida por la fuerza Magnus al final de la trayectoria con la velocidad angular ω y el ángulo de rotación ϕ de la bola.
- Se estableció una conexión y se dio soporte matemático a la tecnología implementada en el algoritmo $PITCHf/x$.
- Propuestas claras de investigación a futuro relacionadas con la extensión del modelo cardioide.

Caso LSR

- Implementación de un problema hidrodinámico con la inclusión de un cuerpo sólido en el software **ZEUS-3D**, el cual no está diseñado para estos propósitos, extendiendo así los alcances del software a problemas de ingeniería.
- Obtención de valores del coeficiente de sustentación y distribución de presiones para el caso de la bola de béisbol con una costura localizada a diferentes ángulos, a partir de experimentos simulados mediante la técnica directa de *CFD*.
- Extensión del modelo numérico al estudio del comportamiento de estructuras cilíndricas como chimeneas, mástiles y otras construcciones similares ante el paso de un fluido con $Re \sim 1.5 \times 10^5$.
- Planteamiento conciso de investigaciones futuras relacionadas con simulaciones en 2D y 3D mediante otros softwares y técnicas de *CFD*.

1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS

El manuscrito está estructurado de la siguiente manera: la metodología para el estudio de las fuerzas de sustentación se encuentra descrita en el Capítulo 2. La Sección 2.1 está dedicada al caso de los LCR y la Sección 2.2 al caso de los LSR. Los resultados de ambos casos se muestran en el Capítulo 3: para LCR en la Sección 3.1, y para LSR en la Sección 3.2; mientras que una discusión y comparación de los resultados en ambos tipos de lanzamiento se muestra en la Sección 3.3. El Capítulo 4 está dedicado a las conclusiones generales del trabajo. El trabajo incluye tres Apéndices A, B y C, donde se describen aspectos del marco teórico de la investigación, los cuales están relacionados con la sustentación, las ecuaciones de Navier-Stokes y el número de Reynolds, respectivamente.

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

2.1 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PARA EL EFECTO MAGNUS EN LOS LCR

En esta sección se describe y desarrolla la metodología utilizada para construir el modelo que relaciona el efecto Magnus con las condiciones iniciales de los LCR. Las ecuaciones de movimiento usadas para simular las trayectorias son descritas en la Sección 2.1.1. La metodología consta de dos partes: un procedimiento numérico y uno teórico, los cuales se presentan en las Secciones 2.1.2 y 2.1.3, respectivamente.

2.1.1 ECUACIONES QUE RIGEN LA DINÁMICA DE UN LCR

De la segunda Ley de Newton, la derivada temporal del momento lineal de la bola es igual a la suma de las fuerzas externas que actúan en la bola. Las fuerzas externas que completan el sistema de ecuaciones que definen el movimiento de una bola con rotación son: la fricción \mathbf{F}_d , la gravedad \mathbf{F}_g y por supuesto, la fuerza Magnus \mathbf{F}_M , tal que

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_g \quad (2.1)$$

donde m es la masa de la bola (Robinson & Robinson [15]). El resto de las fuerzas que actúan sobre la bola tienen por lo general un menor efecto en su dinámica, tomando parte importante sólo en casos especiales. Tal es el caso de la fuerza centrífuga, cuyo efecto tangencial a la superficie terrestre se ve reflejado principalmente en altas y bajas latitudes, i.e., hacia los polos y el ecuador, mientras que el efecto radial se refleja en latitudes cercanas a los 45 grados (Taylor [86]); sin embargo, se estima que ambas componentes producen desviaciones de a lo más seis veces el radio de la bola, ver Aguirre-López [35]. A su vez, la fuerza de Coriolis toma un papel importante en tiempos de vuelo más grandes, como es el caso después de que la bola es bateada, lo cual no es objeto de estudio de la presente investigación (Cross [7], Robinson & Robinson [87]). La fuerza de torque, que

proporciona un momento angular a la bola, se asume despreciable, como se justificó en la Sección 1.3.1. La compresión y demás fuerzas que puedan deformar la bola se asumen como despreciables en un lanzamiento. De este modo, las únicas variables del sistema de ecuaciones que regirán la dinámica de la bola son las componentes de la velocidad lineal, ya que la velocidad angular se asume constante mientras que la orientación de la bola no es tomada en cuenta debido a que se caracteriza a la bola solamente por su centro de masa.

La expresión comúnmente utilizada para la fuerza de fricción ($\mathbf{F}_d = 0.5\rho AC_d v(-\mathbf{v})$) es muy similar a la expresión de la fuerza Magnus, Ecuación (1.2), la cual fue presentada en la Sección 1.2, donde los coeficientes de ajuste se expresan como C_d y C_M , Ecuaciones (1.5) y (1.4), respectivamente. A su vez, la fuerza de gravedad se define como $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, de manera que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales resultante es

$$m\dot{\mathbf{v}} = 0.5\rho AC_d v(-\mathbf{v}) + 0.5\rho AC_M \frac{v}{\omega} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\mathbf{g}, \quad (2.2)$$

que desarrollando explícitamente en sus componentes resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= kv \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_y v_z - \omega_z v_y) - C_d v_x \right] \\ \ddot{y} &= kv \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_z v_x - \omega_x v_z) - C_d v_y \right] \\ \ddot{z} &= kv \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_x v_y - \omega_y v_x) - C_d v_z \right] - g, \end{aligned} \quad (2.3)$$

con (x, y, z) como el vector de posición, $k = \rho A / (2m)$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$, ver Robinson & Robinson [15] y Nathan [38]. La no linealidad de los coeficientes C_M y C_d dificulta en gran medida la solución analítica del sistema.

2.1.2 PROCEDIMIENTO NUMÉRICO

Con el objetivo de cuantificar o “extraer” el efecto Magnus, se introduce el siguiente sistema de ecuaciones omitiendo el término de la fuerza Magnus, dando como resultado las ecuaciones de un tiro balístico:

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= -\frac{k}{m} C_d' v' v_x' \\ \ddot{y}' &= -\frac{k}{m} C_d' v' v_y' \\ \ddot{z}' &= -\frac{k}{m} C_d' v' v_z' - g, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde se utilizan las variables primadas $(\cdot)'$ para puntualizar que las trayectorias generadas por las Ecuaciones (2.4) son diferentes a las generadas por las Ecuaciones (2.3), incluso para las mismas condiciones iniciales.

El método consiste en resolver los sistemas de ecuaciones con y sin el término de la fuerza Magnus, Ecuaciones (2.3) y (2.4), respectivamente. Se utilizó el método de Runge-Kutta de orden 4, para un total de 10,000 trayectorias con posición inicial en $(0, 0, 0)$ y valores aleatorios iniciales de la velocidad lineal \mathbf{v}_0 y de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, dentro de los intervalos indicados en la Tabla 2.1. Los valores son extendidos fuera de los límites típicos de una *fastball*, ver Figura 1.3.

Tabla 2.1: Valores mínimos y máximos de las condiciones iniciales utilizadas.

	Min	Max
v_x (m/s)	-3	3
v_y (m/s)	30	50
v_z (m/s)	-3	3
ω (rad/s)	50	310
ψ (grados)	0	360

Como se mencionó en la Sección 1.2, sólo se simularon trayectorias con el eje de rotación ($\hat{\boldsymbol{\omega}}$) en el plano $x - y$, tal que los valores aleatorios de ψ producen trayectorias que alternan entre lanzamientos tipo *fastball* y *gyroball*, ver Figura 2.1.

El conjunto de desviaciones radiales producido ($\langle R_f \rangle$) es ilustrado en la Figura 2.2 desde la perspectiva del *catcher*. Como se puede ver en el mapa, los datos tienen una orientación preferencial vertical, variando de -0.4 m a +0.4 m, lo cual concuerda con que $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ esté en el plano $x - y$. Más aún, las desviaciones resultantes para valores de ω grandes se encuentran más distantes de una trayectoria balística, la cual corresponde al centro de la gráfica, que aquellas con valores pequeños de ω . Tales desviaciones son más grandes que el tamaño de un bate de béisbol, por lo que las variaciones en estos valores tienen una gran implicación en el juego.

La diferencia de las soluciones en el eje z , ($Z = z - z'$), a una distancia de 17.05 m -la distancia tomada en el presente trabajo como la distancia que existe desde el punto en el que el pítcher suelta la bola hasta el plato de *home-* es analizada en la Sección 3.1. El código para resolver los sistemas de ecuaciones fue programado usando el software `R statistics software` [88].

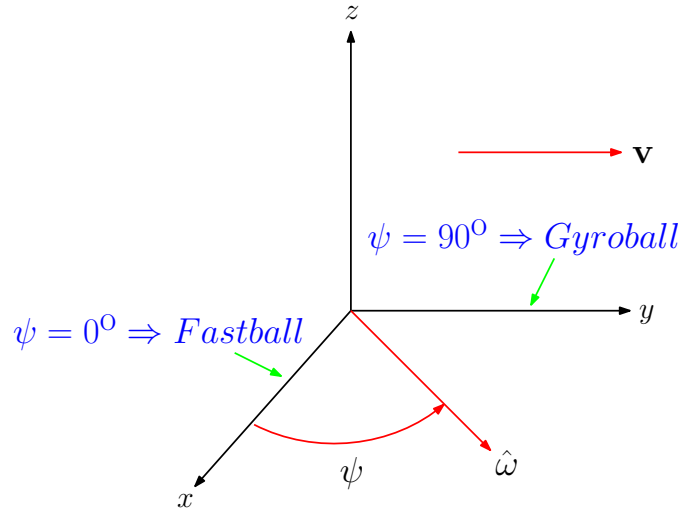


Figura 2.1: Sistema de coordenadas del problema: una bola moviéndose con velocidad \mathbf{v} y cuya dirección principal de movimiento es paralela al eje y . El eje de rotación $\hat{\omega}$ se encuentra en el plano $x - y$, y el ángulo de rotación ψ se define como se ilustra en la imagen, produciendo una *fastball* con giro hacia abajo en $\psi = 0^\circ$, con giro hacia arriba en $\psi = 180^\circ$, y bolas tipo *gyrobball* en $\psi = 90^\circ$ y $\psi = 270^\circ$.

2.1.3 APROXIMACIÓN ANALÍTICA

En esta Sección se realiza un equivalente analítico al procedimiento numérico descrito en la Sección 2.1.2, lo que en conjunto servirá para la cuantificación y construcción del modelo que se presentará en la Sección 3.1.

La aproximación analítica comienza por restar cada una de las Ecuaciones (2.4) de las Ecuaciones (2.3), componente por componente, obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= kV \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_y v_z - \omega_z v_y) - C_D V_x \right] \\ \ddot{Y} &= kV \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_z v_x - \omega_x v_z) - C_D V_y \right] \\ \ddot{Z} &= kV \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_x v_y - \omega_y v_x) - C_D V_z \right],\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde $C_D = C_d - C'_d$, $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ y $\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}'$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, tal que el vector de posicionamiento \mathbf{R} denota la desviación producida entre la trayectoria de la bola con rotación respecto a la trayectoria balística, de modo similar al procedimiento numérico mostrado en la Sección 2.1.2, con R_f denotando la componente radial de tal desviación en la posición final (en el plato de *home*).

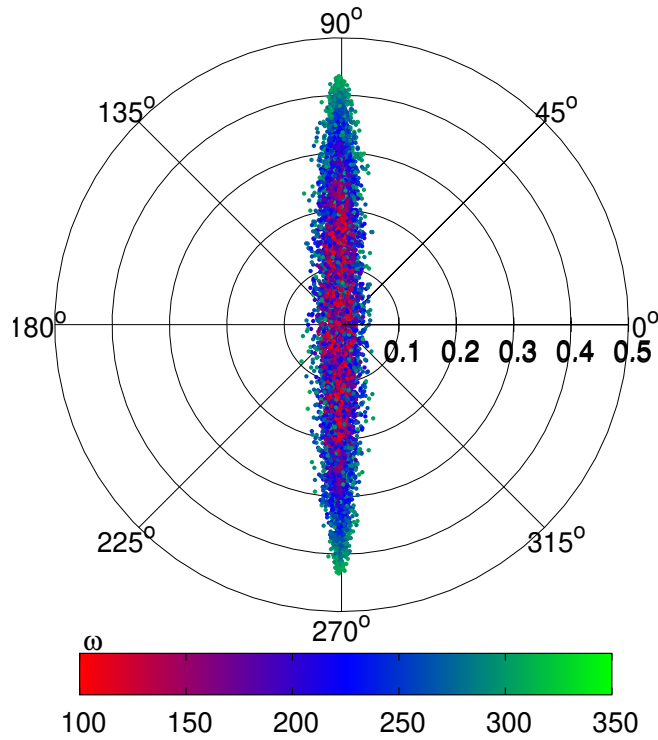


Figura 2.2: Vista del *catcher* de las desviaciones obtenidas por las trayectorias numéricas. El eje radial corresponde a la desviación radial R_f en metros, mientras que el eje polar corresponde a la desviación angular en grados. La escala de colores representa los valores de la velocidad angular ω . El centro de la gráfica coincide con la posición de la trayectoria balística (sin fuerza Magnus).

A diferencia del procedimiento mostrado en la Sección 2.1.2, donde se resolvían las Ecuaciones (2.3) y (2.4) por separado para después medir la desviación final de las respectivas trayectorias, las Ecuaciones (2.5) permiten evaluar la desviación entre ambas trayectorias en cada instante de tiempo. Más aún, las Ecuaciones (2.5) permite realizar algunas observaciones y considerar otras suposiciones, como se describe a continuación.

Primero, la restricción de fijar $\hat{\omega}$ al plano $x - y$ significa que $\omega_z = 0$ rad/s en las Ecuaciones (2.5). Haciendo un análisis de órdenes de magnitud y tomando en cuenta los valores de rotación mínima y la velocidad lineal máxima de la Tabla 2.1 para la componente z , uno observa que hay una diferencia de cuatro órdenes entre los valores del término relacionado con la fricción y los valores del término relacionado con la fuerza Magnus: el mínimo de $(\omega_x v_y - \omega_y v_x) / \omega$ es al menos del orden de 10^0 m/s y ocurre para valores de $\omega_x > \frac{\omega}{10}$, ya que $v_y > \frac{v_x}{10}$, mientras que $C_M \sim 10^{-1}$ unidades adimensionales; a su vez, V_z no es más grande que (10^{-1}) m/s, como sugieren los valores de la Figura 2.2,

mientras que $C_D \sim 10^{-4}$ unidades adimensionales. En consecuencia, el orden del primer término del lado derecho es de 10^{-1} m/s mientras que el orden del segundo término es de 10^{-5} m/s.

Esta diferencia en órdenes de magnitud es consistente con la Figura 2.3, la cual muestra un histograma del valor absoluto de ambos términos para un conjunto de trayectorias obtenidas numéricamente con el procedimiento de la Sección 2.1.2. Como se observa en el gráfico referente a la fuerza Magnus $\frac{C_M}{\omega} (\omega_x v_y - \omega_y v_x)$, los valores de tal término son del orden 10^0 m/s en la mayoría de las trayectorias; mientras que el histograma referente a la diferencia de fricción ($C_D V_z$) indica que los valores del término son del orden 10^{-4} m/s para la mayoría de las trayectorias. Así, tanto de manera analítica como numérica se obtiene la misma diferencia en orden de magnitud de los términos de fricción y Magnus, es decir una diferencia de cuatro órdenes.

Tanto la media como la desviación estándar fueron calculados con un conjunto de 10,000 trayectorias. De esta manera se justifica que el término que involucra la diferencia entre coeficientes de fricción pueda ser omitido, por lo que la componente z del sistema (2.5) se simplifica a

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= kV \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_y v_z - \omega_z v_y) \right] \\ \ddot{Y} &= kV \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_z v_x - \omega_x v_z) \right] \\ \ddot{Z} &= kV \left[\frac{C_M}{\omega} (\omega_x v_y - \omega_y v_x) \right]\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde las componentes x y y son derivadas por la misma aproximación.

Finalmente, considerando la restricción $\omega_z = 0$ rad/s y que las componentes de ω pueden ser reescritas como $\omega_x = \omega \cos \psi$, $\omega_y = \omega \sin \psi$, se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= kV [C_M (v_z \sin \psi)] \\ \ddot{Y} &= kV [C_M (-v_z \cos \psi)] \\ \ddot{Z} &= kV [C_M (v_y \cos \psi - v_x \sin \psi)].\end{aligned}\tag{2.7}$$

Esta última expresión describe la dinámica de las desviaciones en el eje z de la trayectoria causada por la fuerza Magnus, con las restricciones y suposiciones consideradas. En la Ecuación (2.7) se puede ver que Z depende de dos términos, el primero relacionado con v_y y el segundo relacionado con v_x . Además, ambos términos están relacionados con la diferencia en velocidades V , la rapidez angular ω , el coeficiente $C_M(\omega)$, y el ángulo de

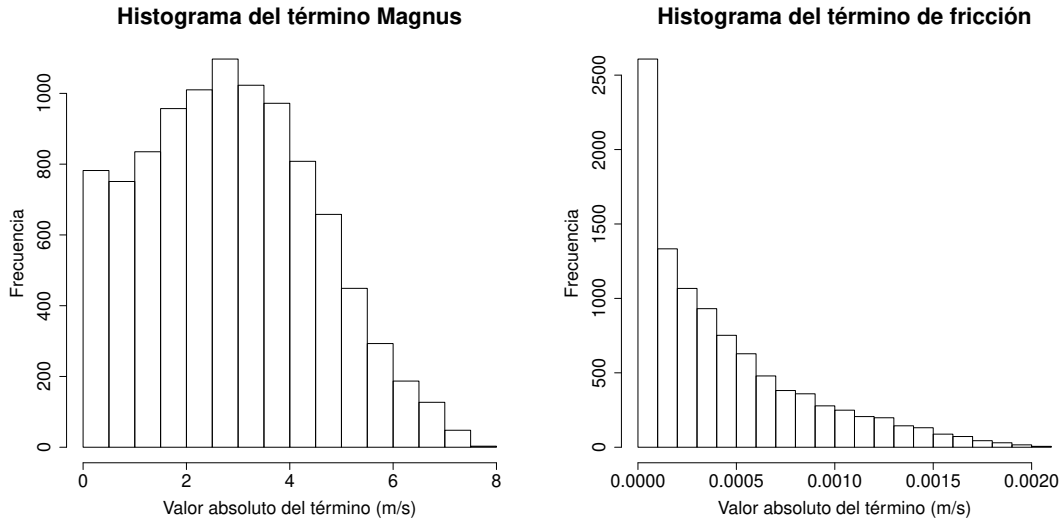


Figura 2.3: Histograma de valores absolutos de los términos referentes a la fuerza Magnus (izquierda) y de fricción (derecha) en la componente z del sistema (2.5), para un conjunto de 10,000 trayectorias. En el histograma de la izquierda, la mayor frecuencia de valores entre la unidad y las diez unidades indican que el término Magnus es de orden 10^0 m/s. En el histograma de la derecha, la frecuencia de valores inferiores a 0.001 m/s indican que el término de la diferencia de fricción es a lo más de orden 10^{-4} . Los valores corresponden al valor que toma el término al final de la trayectoria, en el plato de *home*, al ser calculados con el procedimiento numérico de la Sección 2.1.2.

rotación ψ . Por lo tanto, tanto C_M como $\cos \psi$ y $\sin \psi$ deberían de aparecer en la solución Z de (2.7), puesto que ω es constante.

Así, este conjunto de observaciones obtenidas a lo largo de la Sección 2.1, servirán y se conectarán en la Sección 3.1 al terminar la construcción del modelo para el efecto Magnus.

2.2 MODELO NUMÉRICO EN LAS SIMULACIONES DE LOS LSR

En esta sección se describe el modelo del problema planteado para los LSR, el cual consiste en simular el flujo de aire en dos dimensiones dentro de un túnel de viento con un obstáculo presente, la bola de béisbol fija. En detalle, la sección muestra el modelo numérico y la metodología utilizada para obtener la fricción, la sustentación y la distribución de presión alrededor del perfil de la bola. En la Sección 2.2.1 se presenta información general del funcionamiento y la implementación del software utilizado. El esquema computacional, las condiciones iniciales y de frontera así como el mallado utilizado, es descrito en la Sección 2.2.2, mientras que la Sección 2.2.3 describe aspectos más detallados de las pruebas experimentales que se llevaron a cabo.

Es importante mencionar que a partir de este punto, la densidad del aire ρ deja de considerarse como parámetro (recordando que era utilizado como un valor promediado), pasando a ser una variable a obtener $\rho \equiv \rho(x, y, z, t)$.

2.2.1 IMPLEMENTACIÓN EN EL SOFTWARE ZEUS-3D

El software ZEUS-3D (versión 3.6)¹ es un código multi-física de radiación magneto-hidrodinámico, escrito en FORTRAN77, y diseñado principalmente para fines astrofísicos, aunque no restringido a este campo. En este trabajo el módulo de radiación como el electromagnético fueron apagados en el presente trabajo. Solo el módulo hidrodinámico del código fue utilizado para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos compresibles, las cuales son derivadas en el Apéndice B en su forma convectiva como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \mu \mathbf{S}) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e\mathbf{U}) = -p\nabla \cdot \mathbf{U} + \mu \mathbf{S} : \nabla \mathbf{U}, \quad (2.10)$$

donde ρ es la densidad del fluido, \mathbf{U} es el vector de velocidad, p es la presión, \mathbf{I} es el tensor unitario, e es la densidad de energía interna del fluido, μ es el coeficiente de viscosidad de corte, \mathbf{S} es el tensor de esfuerzo cortante, con elementos $S_{ij} = \partial_j U_i + \partial_i U_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{U}$. La Ecuación (2.10) es una versión equivalente a la Ecuación de energía (B.15) obtenida

¹Esta es la versión más reciente del código (v3.6), la cual está disponible desde el año 2016 en la liga <http://www.ica.smu.ca/zeus3d/version3.6/> [89].

en el Apéndice B. A su vez, la ecuación de estado que cierra el sistema de ecuaciones corresponde a la de un gas ideal:

$$p = (\gamma - 1)e \quad (2.11)$$

donde γ es el coeficiente de calores específicos, con valor de $\gamma = 1.4$ para el caso de las condiciones atmosféricas usadas en este trabajo [90].

Operacionalmente, los términos del conjunto de ecuaciones están divididos en tres sub-grupos descritos a continuación:

- a) *Términos fuente*: incluyen todos los términos del lado derecho de la igualdad en las Ecuaciones (2.8)-(2.10), y son evaluados en cada paso o iteración de los cálculos del término.
- b) *Términos de transporte*: incluyen todos los rotacionales y divergencias del lado izquierdo de las ecuaciones (2.8)-(2.10). Incluye el transporte de todas las variables escalares, por ejemplo $\partial_x \rho U_x$ y las componentes vectoriales paralelas a la dirección de transporte, por ejemplo $\partial_x S_x U_x$.
- c) *Términos de transporte transversal*: incluyen el transporte de todas las componentes vectoriales perpendiculares a la dirección del transporte, por ejemplo $\partial_x S_y U_x$.

Las ecuaciones (2.8)-(2.10) son resueltas usando algoritmos hidrodinámicos bien desarrollados, basados en el método de diferencias finitas. ZEUS-3D utiliza una *malla escalada* con un operador de *descomposición-direccional*: en un mallado escalado las variables escalares están centradas en las zonas de las celdas del mallado mientras que las componentes de las variables vectoriales se encuentran centradas en las caras; esto dentro de un esquema de *descomposición-direccional*, hace que cada término presente en las Ecuaciones (2.8)-(2.11) sea calculado de manera secuencial, con las variables ρ y e actualizadas después de que cada término es calculado.

Además, la versión 3.6 del código utiliza un esquema de transporte re-estructurado llamado *Finely Interleaved Transport* (FIT), en el que la densidad y energía interna deben actualizarse tan pronto como las cantidades que la afectan se hayan actualizado. Por ejemplo, suponiendo que se acaba de actualizar la componente de momento $S_x \equiv \rho U_x$, en lugar de esperar hasta que todas las componentes de momento se actualicen para después actualizar los componentes de velocidad, el esquema FIT actualiza U_x tan pronto como ρ y S_x hayan sido transportados en la dirección x . De esa manera, el valor de U_x usado para transportar S_y en la dirección x tiene beneficio o aporte de un paso parcial del transporte. El lector puede dirigirse al ejemplo de advección en http://ap.smu.ca/~dclarke/zeus3d/version3.6/gallery/2dprob/problem.01/advect_2D.pdf [91] para

tener más detalles de este esquema, así como a Stone & Norman [92] para ver detalles más profundos sobre el mallado, esquema de diferencias finitas y familia de códigos disponibles del software.

El código ZEUS-3D utiliza un esquema de tiempo explícito. Es decir, el paso de tiempo usado para la evolución de las ecuaciones dinámicas no es constante y su valor se limita a satisfacer la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Físicamente, esto significa que el paso de tiempo debe ser más pequeño que la escala de tiempo característica de algún proceso físico en cualquier zona de la malla. La manera en la que ZEUS calcula el paso de tiempo requerido está dada por la siguiente expresión:

$$\delta t = C_o / [\text{máx}(\delta t_1^{-2} + \delta t_2^{-2} + \delta t_3^{-2} + \delta t_4^{-2})]^{1/2},$$

donde C_o es un factor de seguridad llamado el número de Courant. El conjunto de pasos de tiempo limitantes está definido como: $\delta t_1 = [\text{mín}(\Delta x, \Delta y)]/c_s$, donde Δx es el tamaño de una celda en una dirección dada y c_s es la rapidez adiabática del sonido en dicha celda; $\delta t_2 = \Delta x/U_x$ and $\delta t_3 = \Delta y/U_y$; $\delta t_4 = \text{mín}[(\Delta x)^2/4\nu, (\Delta y)^2/4\nu]$, donde ν es el coeficiente de viscosidad cinemática (Stone & Norman [92]). El paso de tiempo utilizado en estas simulaciones se determinó con $C_o = 0.35$ para asegurar la estabilidad de los cálculos, de acuerdo a la operación del software. Todos los otros parámetros del código fueron utilizados con la opción estándar o por defecto del software.

ZEUS añade cinco filas de zonas auxiliares en cada frontera del arreglo computacional, por lo que la diferenciación finita de las Ecuaciones (2.8)-(2.10) cerca de las fronteras de la malla requiere valores de modo que las variables dependientes sean especificadas más allá del dominio computacional. Los valores que toman las variables en tales zonas son especificados por el usuario mediante las condiciones de frontera (disponibles) apropiadas para la geometría y la física del problema a resolver. De esta manera, las ecuaciones del fluido no son resueltas en las zonas auxiliares.

2.2.2 MALLADO, CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Debido a que por el momento el software no tiene una opción para combinar un mallado cartesiano con uno polar, y así poder implementar el primero en las fronteras del arreglo y el segundo en la frontera de la bola, se optó por solamente implementar el mallado cartesiano con las especificaciones ya mencionadas. De este modo, el mallado utilizado no puede reproducir una bola perfectamente esférica con superficie suave, sin embargo, la suavidad se aproxima con la alta la resolución utilizada (4 celdas/mm).

El mallado está compuesto por un total de 756×572 celdas (o zonas) definidas en un sistema cartesiano. Dos secciones componen tal mallado: una sección con estructura *uniforme* (Sección A), y otra con estructura *escalada* (Sección B). Una vista general de la malla es mostrada en la Figura 2.4 (arriba). La sección A es introducida para obtener alta resolución (4 celdas/mm) cerca de la bola, a diferencia de las zonas en la sección escalada, donde no es necesaria tanta resolución. La longitud característica del problema corresponde al diámetro de la sección transversal de la bola $D = 7.16$ cm. El tiempo de vuelo total T que simulan las pruebas realizadas es de 0.39 s, el cual corresponde a un tiempo adimensional ($\tau = tU_\infty/D$) de 163 unidades. El panel de la izquierda muestra también el mapa de densidad correspondiente a la solución hidrodinámica del problema en el tiempo $t = 0.39$ s; en la imagen, la densidad está normalizada a la densidad del flujo en la entrada.

La pelota y las costuras fueron definidas con celdas de cero velocidad (condición de no deslizamiento). Ya que el software resuelve las ecuaciones del fluido en todo el dominio computacional, la condición de no deslizamiento en la bola es logrado actualizando la velocidad y las demás variables en cada paso de tiempo. Tal condición se aplica a todas las celdas del mallado cuya distancia de su centro geométrico al centro de la bola es menor que el radio físico de la bola $D/2$. Una parte de la geometría de la bola resultante es mostrada en la Figura 2.4 (abajo); la imagen muestra el arreglo de celdas uniformes cerca de la bola, la cual en este caso tiene una protuberancia centrada en 45° que representa una costura. La barra de colores representa la densidad normalizada como en el panel de la izquierda.

Para los límites del arreglo computacional se implementaron tres tipos de condiciones de frontera, las cuales se ilustran en la Figura 2.4 (arriba): se utilizaron condiciones de *frontera de reflexión* arriba y abajo, lo que significa que todas las variables centradas en las zonas y las componentes de la velocidad en las zonas auxiliares son fijadas a los valores correspondientes de sus imágenes en la zona activa inmediata, mientras que la componente normal de la velocidad es fijada al valor cero en la frontera; estas fronteras están a una distancia de aproximadamente $3.5D$ unidades del centro de la bola. En el lado izquierdo del dominio se utilizó una condición de *frontera de entrada*, es decir, los valores de todas las variables en las primeras cuatro celdas son fijadas igual a los valores predeterminados del flujo de entrada. En el extremo derecho se utilizó una condición de *frontera de salida* –dado que el flujo es compresible, una condición de frontera advectiva (permitiendo el transporte de salida) de dos celdas fue fijada ($9D$ unidades a la derecha) con los mismo valores que en la condición de *entrada*, ver Ferziger & Perić [12] y Breuer [83]. Los valores de los parámetros en las zonas auxiliares son fijados igual a los valores correspondientes en las zonas activas inmediatas. Tanto la frontera de entrada como la

frontera de salida están separadas por una zona de transición con anchura de una celda del resto del dominio computacional.

Las simulaciones fueron realizadas a $Re=1.46 \times 10^5$, el cual es el número de Reynolds correspondiente a nuestro problema de interés, una bola que viaja a 30 m/s en el aire, como se mencionó en la Sección 1.2. La presión y densidad iniciales son fijadas a $p = 1013200$ Ba y $\rho = 1.225 \times 10^{-3}$ g/cm³ en todas las zonas del dominio computacional, mientras que la velocidad inicial se fijó en $U_y = 3000$ cm/s en la condición de *entrada* y $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ cm/s en el resto del dominio. Los valores de T , D y U_y se eligieron de acuerdo al tiempo de vuelo, diámetro y rapidez de una bola de béisbol, respectivamente, en un lanzamiento típico de béisbol (Adair [4]). Los valores de presión p y densidad ρ se eligieron de acuerdo a condiciones atmosféricas estándar a 15°C, ver la página [93].

La condición de *entrada* genera una discontinuidad que produce un perfil cosenoidal promediado en el tiempo en las zonas cercanas, ver Figura 2.5 (izquierda). A su vez, las variaciones temporales de la velocidad se estabilizan después de $\tau = 40$ unidades, aproximadamente $\frac{1}{4}$ del tiempo total de simulación, como se ilustra en la Figura 2.5 (derecha). Los parámetros característicos resultantes para la simulación son: velocidad de $U_\infty = 2987.91$ cm/s, densidad de $\rho_\infty = 1.229 \times 10^{-3}$ g/cm³, y presión de $p_\infty = 1017204$ Ba, los cuales son calculados promediando los tres perfiles más cercanos a la transición entre las columnas de entrada y las del resto del dominio. Los promedios de los parámetros característicos y de todas las demás mediciones fueron realizados considerando sólo tiempos después de $\tau = 40$ unidades en orden a asegurar cálculos con un flujo de entrada estable.

2.2.3 DESCRIPCIÓN DE LAS SIMULACIONES

El estudio consiste en medir las características del flujo alrededor de la bola y en la estela formada, para la obtención de los coeficientes y la validación del flujo, respectivamente. El coeficiente de presión promedio es definido de acuerdo a Drela [9] por

$$C_p(\theta) = \frac{\langle p(\theta) \rangle - p_\infty}{0.5\rho_\infty U_\infty^2}, \quad (2.12)$$

donde $C_p(\theta)$ es la presión promedio en el tiempo a un ángulo θ , considerando $\theta = 0^\circ$ como el punto de detención en el frente de la bola, $\theta = 90^\circ$ como el punto máximo en la parte superior de la bola, y $\theta = 180^\circ$ en la parte trasera de la bola. Una vez obtenido C_p , la fricción promedio C_d es calculada mediante la diferencia de los valores de presión en las partes de enfrente y de atrás de la bola, mientras que la sustentación promedio C_C es calculada mediante la diferencia de los valores de presión en las partes de arriba y de

abajo de la bola (Ferziger & Perić [12]). La estela hidrodinámica producida por la bola fue caracterizada a diferentes distancias de la bola. Las mediciones se realizaron en un perfil con dirección paralela a la corriente principal del flujo y en dos perfiles transversales al flujo.

Para validar el modelo, se realizaron pruebas con una bola de superficie suave sin costura a $Re=1 \times 10^5$ y 1.4×10^5 , las cuales fueron comparadas con resultados reportados en literatura para cilindros en 2D a números de Reynolds similares, a saber, Johansson, Nielsen & Nielsen [79], Naito & Fukagata [82] a $Re=1 \times 10^5$ y Tremblay [81], Breuer [83] y Cantwell & Coles [94] a $Re=1.4 \times 10^5$, siendo estos últimos los casos más cercanos al número de Reynolds de nuestro problema, $Re=1.46 \times 10^5$.

Se realizó un análisis sistemático para diferentes posiciones de la costura. Para esto se hicieron simulaciones con la costura localizada a diferentes ángulos, a saber, $\phi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$. La costura es simulada como una protuberancia de longitud L y altura H definidas en función del diámetro de la bola, tal que $L = D/7.16$ y $H = D/71.6$, correspondiendo de tal manera a las medidas de las costuras en una bola de béisbol profesional (Kensrud et al. [69]), ver Figura 2.6. Los resultados de estas pruebas se comparan tanto con el caso con superficie suave para realizar un análisis sistemático de la perturbación que la costura produce en el flujo como con las referencias Borg & Morrisey [14] y Higuchi & Kiura [64] para discutir la diferencia entre la perturbación de las costuras en estructuras 2D y 3D.

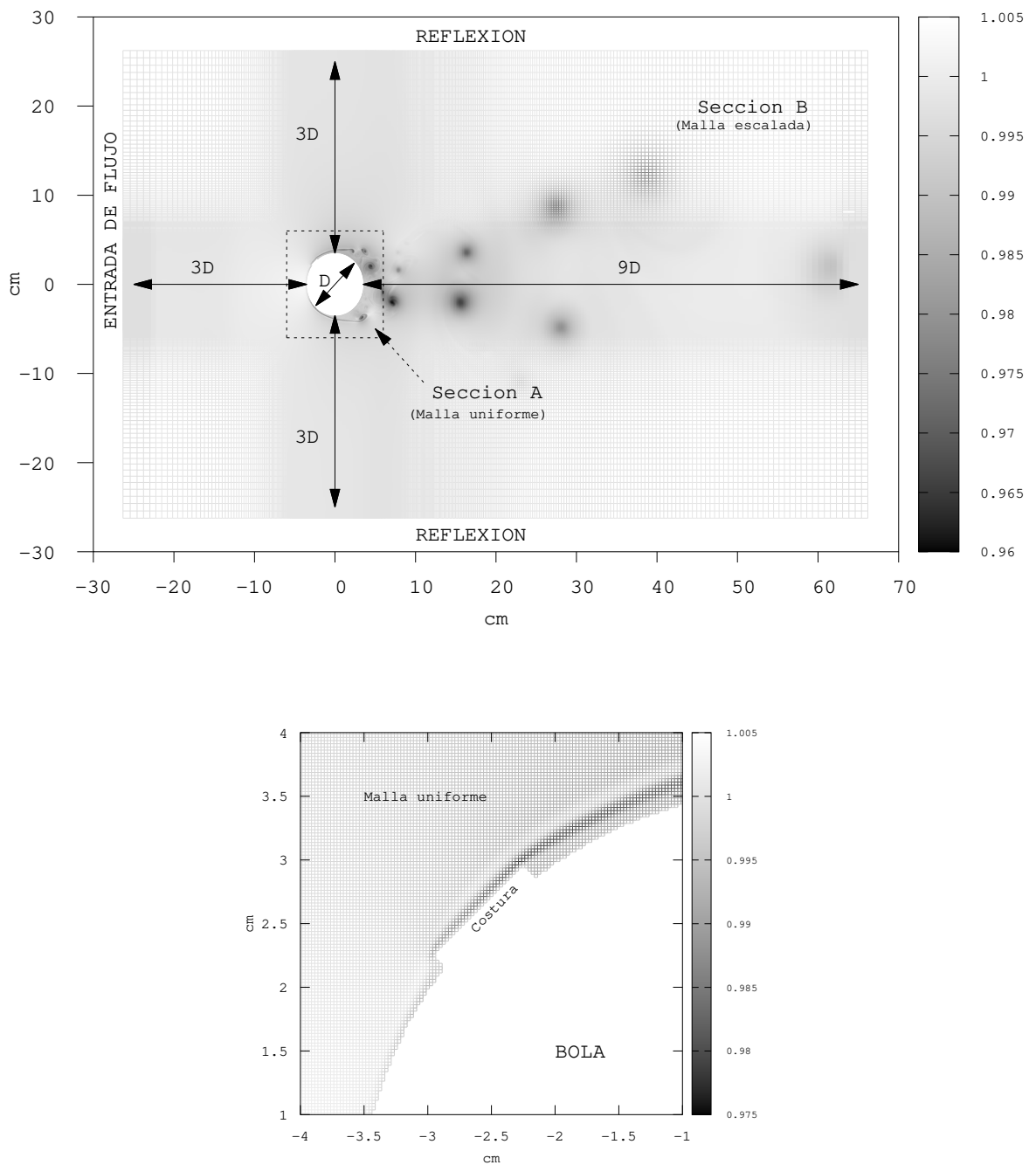


Figura 2.4: Esquema del arreglo computacional. Las imágenes fueron hechas a partir del mapa de densidad en un instante de tiempo. La escala de grises se refiere a la densidad relativa en términos de la densidad característica. Arriba: Dimensiones del arreglo computacional, características generales del mallado y las fronteras. Abajo: Acercamiento de la zona donde se encuentra la costura.

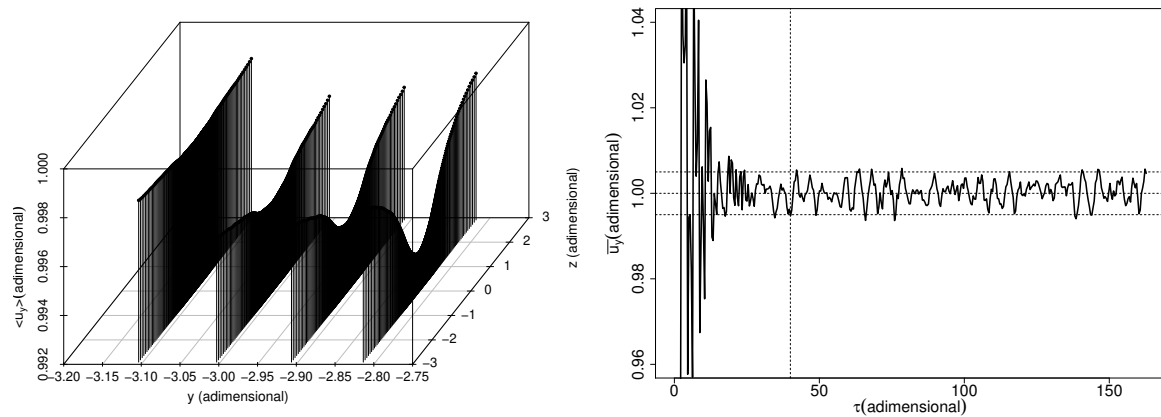


Figura 2.5: Características del flujo de entrada. Izquierda: $\langle u_y \rangle = \langle U_y \rangle / U_\infty$ en diferentes perfiles en dirección y (ejes y y z en términos de D). La columna de transición es aquella localizada en $y \approx -3.10$ unidades. Los parámetros característicos fueron obtenidos promediando las variables correspondientes en $y \approx -3.0, -2.9, -2.8$ unidades. Derecha: La serie de tiempo de la velocidad en la componente principal del flujo promediada espacialmente (\bar{U}_y), considerando los tres perfiles más cercanos en dirección y a la zona de transición. La serie oscila alrededor de U_∞ con variaciones de ± 0.005 unidades, después de aproximadamente $\frac{1}{4}$ del tiempo total. Esto está marcado con líneas punteadas en las figuras.

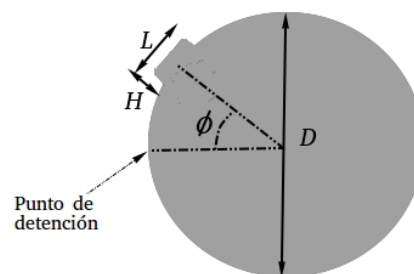


Figura 2.6: Esquema de la bola con una costura.

RESULTADOS

3.1 EL EFECTO MAGNUS EN LOS LCR

Esta sección muestra los resultados referentes a la sustentación en los LCR. En la Sección 3.1.1, se termina de construir el modelo cardioide que conecta la desviación producida por la fuerza Magnus con la velocidad angular del lanzamiento, con base en las observaciones y restricciones mencionadas en la Sección 2.1. A su vez, la Sección 3.1.2 plantea posibles extensiones del modelo tanto hacia casos más generales como hacia casos con otras restricciones.

3.1.1 MODELO CARDIOIDE

Las desviaciones finales en el eje z (Z_f), producidas por las trayectorias simuladas (Sección 2.1.2), son analizadas como respuesta al ángulo de rotación ψ y a la rapidez angular ω . La Figura 3.1 (izquierda) muestra el diagrama de dispersión polar de los datos Z_f contra el parámetro ψ , mientras que el parámetro ω está representado por la escala de colores. En el gráfico se puede ver que Z_f obedece a una distribución cardioide respecto a ψ , con periodo 2π . Los valores de Z_f son negativos para valores ψ desde los ángulos 0° hasta 90° y desde 270° hasta 360° , los cuales corresponden a lanzamientos que van desde *fastballs* con giro hacia abajo hasta *gyroballs* y viceversa, respectivamente. A su vez, los valores ψ que van desde 90° hasta 270° producen lanzamientos que van desde *gyroballs* hasta *fastballs* con giro hacia arriba, produciendo valores positivos de Z_f , y de regreso a lanzamientos tipo *gyroballs*.

Los valores mínimo y máximo de los datos de $|Z_f|$ en los ángulos $\psi = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ son $\sim 0.177\text{m}$ y $\sim 0.433\text{m}$, respectivamente, los cuales corresponden a las desviaciones mínima y máxima producidas por los lanzamientos cercanos a *fastballs* simuladas con ω entre 100 rad/s y 310 rad/s . A su vez, los valores de $|Z_f|$ alrededor de $\psi = 90^\circ, 270^\circ$ (*gyroballs*) son cercanos a 0 m , como es esperado desde el punto de vista físico y del decremento del término $\cos\psi$ en la componente z de la Ecuación (2.7).

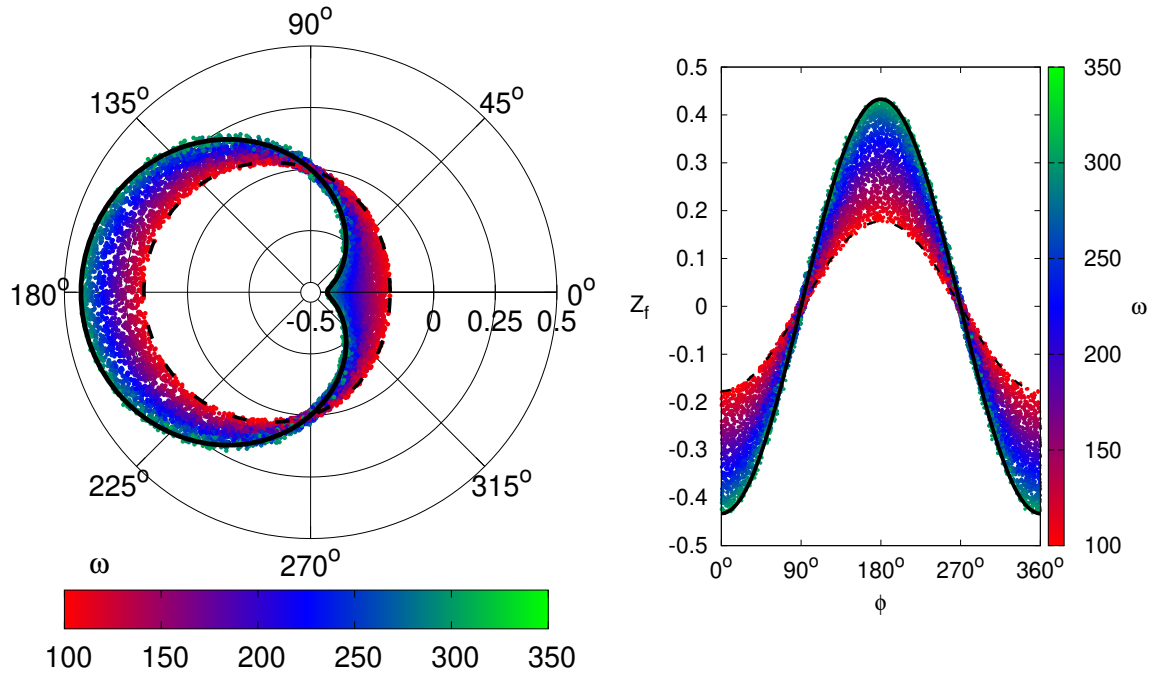


Figura 3.1: Izquierda: Diagrama de dispersión en coordenadas polares de la desviación vertical Z_f (en metros) vs el ángulo de rotación ψ (en grados). La barra de colores indica el valor de ω (en rad/s). Las curvas punteada y continua dibujan los ajustes de $\langle Z_f \rangle$ con $\omega = 100$ rad/s y $\omega = 310$ rad/s, respectivamente, los cuales son obtenidos mediante el modelo (3.3) con $\beta = 2.53$ m. El origen del eje radial fue movido al punto -0.5 m para mostrar claramente la forma y característica de la distribución de los datos Z_f , ya que oscilan alrededor del cero. Derecha: Visualización cartesiana.

Hasta este punto, se podría formular un modelo paramétrico de las desviaciones Z_f en función de ω , considerando un conjunto de trayectorias con valores dentro de los rangos de la Tabla 2.1, tal que

$$\langle Z_f(\omega, \psi) \rangle = \alpha(\omega) \cos \psi \quad (3.1)$$

donde los corchetes $\langle \cdot \rangle$ denotan el promedio sobre el conjunto de las 10,000 trayectorias simuladas, con la distribución coseno del ángulo de rotación ψ y la amplitud mediante una función de la rapidez angular ω , con una forma explícita hasta el momento desconocida.

Al observar la representación cartesiana del gráfico por intervalos discretos de ψ , Figura 3.1 (derecha), notamos que la escala de colores expresa una conexión entre el incremento en amplitud de la distribución cosenoidal y el incremento correspondiente de ω . Tal conexión se clarifica de la siguiente manera.

De las condiciones iniciales en consideración (Tabla 2.1) y la componente z de la Ecuación (2.7), la cual se escribe como

$$\ddot{Z} = kV [C_M (v_y \cos \psi - v_x \sin \psi)],$$

notamos que $\langle Vv_x \rangle$ no tiene una dirección preferencial para conjuntos de casos con valores de \mathbf{v}_0 simétricamente distribuidos alrededor del eje x . Además, aunque las componentes en la Ecuación (2.7) están acopladas, haciendo una comparación de z contra las otras dos componentes se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{Z}}{\sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2}} &= \frac{kV [C_M (v_y \cos \psi - v_x \sin \psi)]}{\sqrt{(kVC_M v_z)^2 [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi]}} \\ &= \frac{kV [C_M (v_y \cos \psi - v_x \sin \psi)]}{kVC_M v_z} \\ &= \frac{v_y \cos \psi - v_x \sin \psi}{v_z}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

de manera que, para ángulos ψ no cercanos a 90° o 270° , la aceleración en el eje z es aproximadamente un orden mayor que la aceleración en el plano $x - y$ debido a la diferencia en órdenes de v_y con respecto a v_z y v_x . Es decir, la Ecuación (3.2) sugiere que la componente z de la Ecuación (2.7) puede ser desacoplada de las componentes x y y ya que no recibe gran retroalimentación del acople con ellas. En efecto, v_x no tiene gran variación comparada con v_y por lo que al considerar grandes conjuntos de trayectorias con velocidades iniciales simétricamente distribuidas alrededor del eje x , $v_x \approx 0$ y el segundo término de la Ecuación (2.7) puede ser omitido.

Luego, la solución $\langle Z \rangle$ involucra al coeficiente C_M , ya que al ser ω un parámetro, la segunda derivada aplica sólo para el factor Vv_y , mientras que el factor $C_M \cos \psi$ es constante. Esto permite proponer un ajuste del término $\alpha(\omega)$ en (3.1) a una función lineal de C_M , tal que, $\alpha = -\beta C_M$ y por lo tanto la ecuación (3.1) es reescrita para las desviaciones finales como

$$\langle Z_f(\omega, \psi) \rangle = -\beta C_M(\omega) \cos \psi, \quad (3.3)$$

donde β es el parámetro a ser estimado ajustando los datos α , y está relacionado con la velocidad de la bola.

El ajuste fue realizado, primeramente, discretizando los datos de las desviaciones finales Z_f en intervalos de ω cada 5 rad/s, obteniendo varias familias de curvas con diferente ω para así poder estimar $\alpha(\omega)$ en la Ecuación (3.1). El ajuste se realizó con el método de mínimos cuadrados utilizando el software **R statistics** [88] con la variable

“metric algorithm” (opción “BFGS” en la función “optim”) y una solución inicial de $\alpha(\omega) = 0$ m. Los valores obtenidos son graficados con círculos en la Figura 3.2.

Una vez obtenidos los valores de $\alpha(\omega)$, se realizó un ajuste similar sobre $\alpha = \beta C_M$ para obtener β . El valor obtenido para las desviaciones finales Z_f es $\beta = 2.53$ m. La curva resultante de este segundo ajuste está graficada en la Figura 3.2 utilizando como límites $\omega = 100$ rad/s y $\omega = 310$ rad/s en el cálculo de C_M . Asimismo, las cotas inferior y superior de Z_f son graficadas en la Figura 3.1 mediante las líneas punteada y continua, usando el modelo (3.3) con $\omega = 100$ rad/s y $\omega = 310$ rad/s, respectivamente. La calidad del ajuste en ambas Figuras (3.1 y 3.2) refleja la dependencia de Z_f sobre C_M , y en consecuencia valida numéricamente el modelo (3.3).

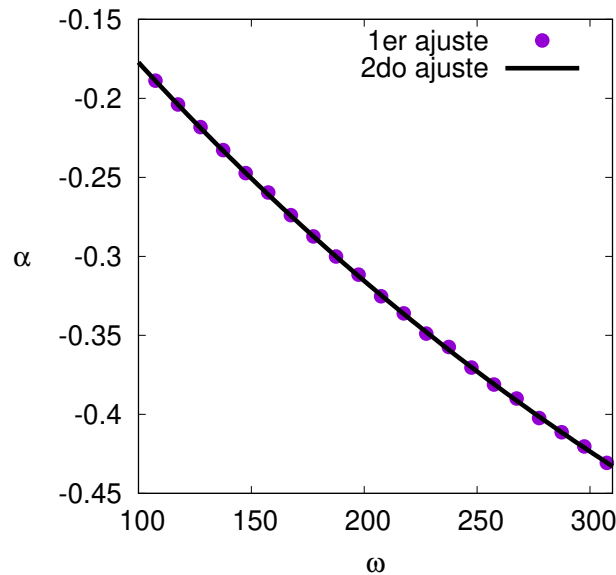


Figura 3.2: Estimación discreta y continua de la amplitud de las desviaciones α (en metros) en función de ω (en rad/s). Los puntos discretos (primer ajuste) fueron obtenidos ajustando los datos Z_f por subconjuntos tomados en intervalos de ω cada 5 rad/s, utilizando la técnica de mínimos cuadrados. La curva continua (segundo ajuste) fue obtenida ajustando la Ecuación (3.3) a los puntos anteriores, con $\beta = 2.53$ m y $C_M = C_M(\omega \in [100 - 310]$ rad/s).

El modelo coincide con la estimación obtenida en el PITCHf/x algorithm, el cual involucra un modelo basado en las ecuaciones cinemáticas de movimiento, expresando la desviación Z de una sola trayectoria como $Z = (1/2)a_{Mz}t^2$, donde $a_{Mz} = kC_Mv^2 \cos \psi$ es la aceleración en la dirección z causada por la fuerza Magnus, y el factor $(vt)^2$ es el cuadrado de la distancia que existe desde el pítcher hasta el plato de *home*, ver el sitio web [46] y Kagan & Nathan [95]. Esta es una observación interesante que sirve como soporte

al PITCHf/x algorithm desde una perspectiva con un modelo matemático más completo, ya que el modelo (3.3) se refiere a la desviación promedio de un conjunto de trayectorias simuladas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que el modelo de aceleración constante (ecuaciones cinemáticas) promedia la velocidad en el tiempo de una sola trayectoria.

Aunado a esto, el modelo (3.3) puede ser reformulado para aproximar la componente radial de la desviación final producida (R_f). Como se ve en la Figura 2.2, las desviaciones radiales R_f están principalmente orientadas a la componente z tal que $\langle R_f \rangle \sim \langle |Z_f| \rangle$, por lo que

$$\langle R_f(\omega, \psi) \rangle = |\beta C_M(\omega) \cos \psi|. \quad (3.4)$$

La Figura 3.3 (izquierda) muestra el diagrama de dispersión polar de los datos R_f , de manera similar a la Figura 3.1 (izquierda) para los datos Z_f . Las curvas punteada y continua se refieren a la cota inferior y superior de las desviaciones R_f con diferente ω . La curva punteada (cota inferior) se ajusta bien a los datos, mientras que algunos puntos quedan por arriba de la curva sólida (cota superior), especialmente en lanzamientos cercanos a *gyroballs* ($\psi = 90^\circ$ y 270°), ver la representación cartesiana del gráfico en la Figura 3.3 (derecha). Estas discrepancias son asociadas con el decremento del efecto Magnus en dirección z y su correspondiente incremento en la dirección x por medio de los factores $\cos \psi$ y $\sin \psi$ en la Ecuación (2.7), lo cual produce efectos de retroalimentación por el acople de las ecuaciones, como ya se mencionó anteriormente. En la práctica, lanzamientos tipo *fastballs* son más comunes que *gyroballs* debido a limitaciones motrices del cuerpo humano, siendo así de mayor utilidad el ajuste de los modelos (3.3) y (3.4) cercanos a un eje de giro ψ de 0° y 180° .

3.1.2 DISCUSIÓN Y EXTENSIÓN DE LOS MODELOS

El modelo (3.3) puede ser extendido hacia varios caminos, obteniendo expresiones de la desviación final para casos particulares o más generales. En esta sección se proponen algunas investigaciones que podrían realizarse a futuro.

Lanzamientos con orientación sesgada

La desviación final Z_f es sensible a una orientación preferencial en la velocidad inicial (en v_x). Con el objetivo de mostrar esto, se compararon desviaciones producidas por trayectorias con valores iniciales en v_x simétricos con desviaciones producidas por trayectorias con valores iniciales asimétricos. Para reproducir este segundo conjunto de trayectorias se utilizaron condiciones iniciales similares a las presentadas en la Tabla 2.1 pero considerando $v_x \in (7 - 13)$ m/s. La diferencia entre ambos conjuntos de desviaciones se

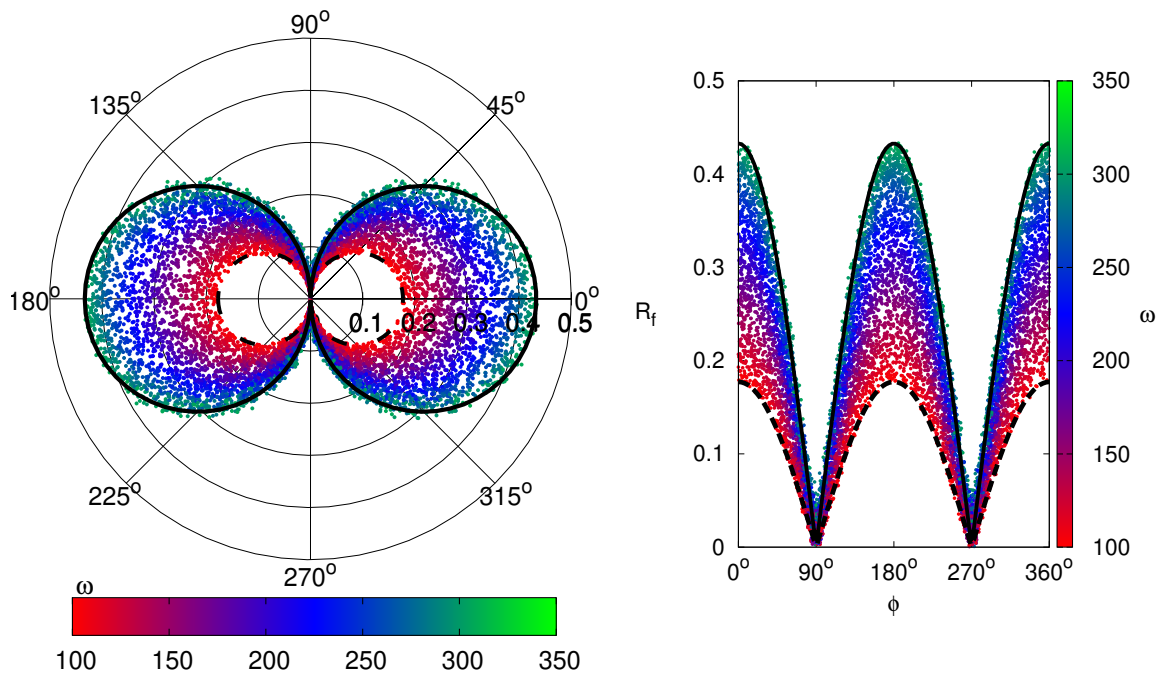


Figura 3.3: Izquierda: Diagrama de dispersión polar de R_f (en metros) vs ψ (en grados). La barra de colores indica el valor de ω (en rad/s). Las curvas punteada y continua dibujan los datos de $\langle Z_f \rangle$ para $\omega = 100$ rad/s y $\omega = 310$ rad/s, obtenidos mediante el modelo (3.3) con $\beta = 2.53$ m. Derecha: Visualización cartesiana.

pueden observar en la Figura 3.4. En la figura se hace referencia a las trayectorias con datos simétricos mediante las cotas inferior y superior con las curvas punteada y continua, respectivamente; mientras que los puntos representan las desviaciones producidas por las trayectorias con datos sesgados. Como se puede observar, las pruebas con datos sesgados modifican la amplitud y la fase de la función armónica, lo cual indica que el caso general obedece a una distribución más compleja que el modelo (3.3). Esto tiene implicaciones al tratar de expresar mediante un modelo la desviación final causada por el efecto Magnus de un lanzamiento en específico y no de un conjunto de lanzamientos, ya que al realizar un análisis similar para trayectorias con diferentes intervalos pequeños de valores de v_x , se podría suponer que el modelo obtenido tendería a aproximarse a la desviación producida por el promedio de los valores del rango v_x .

Variación con la distancia *pícher-home*

El valor de la desviación final Z_f también depende de la distancia a la que se analiza ya que, obviamente, la diferencia entre un lanzamiento normal y uno simulado sin el término Magnus no se mantienen constantes a lo largo de sus trayectorias. Esta variación

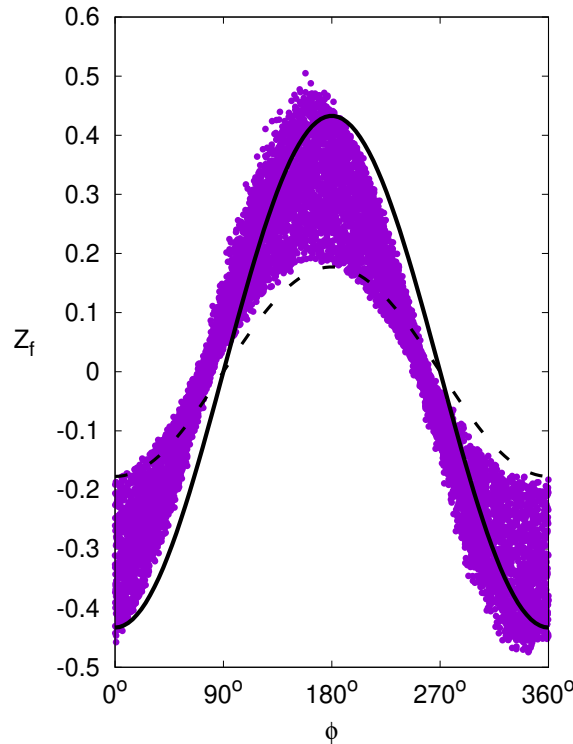


Figura 3.4: Contraste entre los datos Z_f (en metros) obtenidos a partir de trayectorias numéricas con valores iniciales de v_x simétricamente distribuidos y con valores asimétricamente distribuidos (o sesgados). Las curvas punteada y continua son las cotas inferior y superior, respectivamente, del caso simétrico (las mismas que las mostradas en la Figura 3.1), mientras que los puntos de color son el conjunto de desviaciones Z_f del caso asimétrico.

en las desviaciones puede ser estudiada en un rango de distancias *pícher-home* de interés deportivo, por ejemplo, la distancia de 17-18.5 m en el béisbol profesional (reglas de beisbol [96]), distancias alrededor de 13-14 m para softbol varonil y femenino (reglas de softbol [97]), y distancias alrededor de 14.5 m para béisbol infantil (reglamento de béisbol infantil [98]).

La Figura 3.5 muestra las desviaciones Z_f obtenidas a diferentes distancias *pícher-home* entre 10-20 m. Como se puede observar, la magnitud de cada conjunto de desviaciones Z_f se incrementa conforme aumenta la distancia entre el *pícher* y el plato de *home*, lo cual es de esperarse. La relación entre estos gráficos sugiere una extensión del modelo (3.3), agregando el parámetro de la distancia *pícher-home* a la expresión de Z_f como un factor que multiplica a la magnitud del coseno.

Variación en el eje de rotación

Finalmente, es importante mencionar que la suposición de $\omega_z = 0$ rad/s restringe la pre-

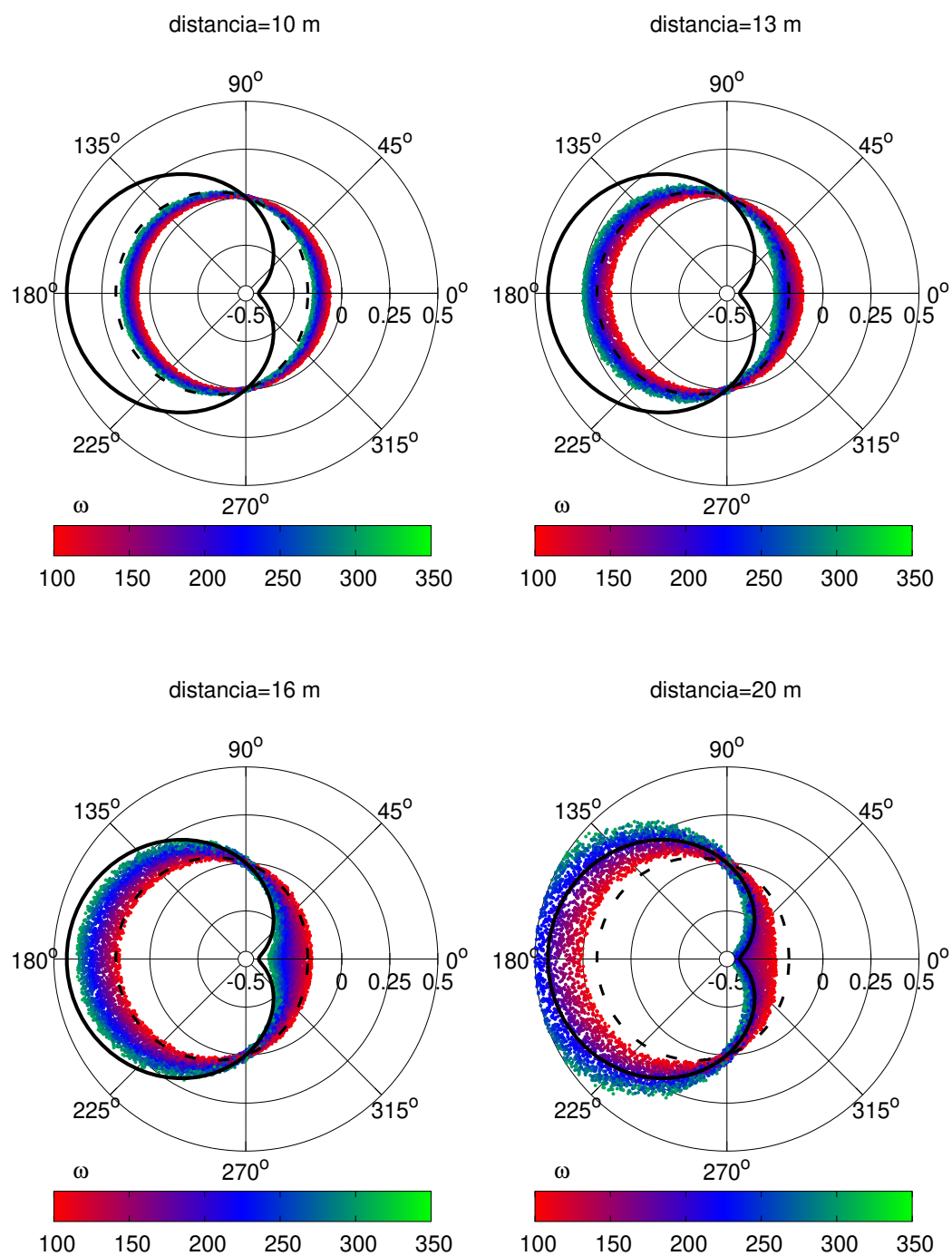


Figura 3.5: Comparación de la desviación Z_f producida a diferentes distancias pícher-home: 10 m (arriba-izquierda), 13 m (arriba-derecha), 16 m (abajo-izquierda), 20 m (abajo-derecha). Notar que en el último caso algunas desviaciones son mayores a 0.5 m por lo que algunos puntos quedan fuera del gráfico. Las curvas punteada y continua son las cotas inferior y superior, respectivamente, a la distancia del modelo de referencia de esta tesis, 17.05 m.

sente investigación a un cierto tipo de lanzamientos, sin embargo, la metodología utilizada puede ser aplicada de manera similar para analizar desviaciones en otros ejes, por ejemplo en x con $\omega_x = 0$ para bolas con rotación, simulando lanzamientos que se alternan entre *sliders* y *gyroballs*.

Además, cabe mencionar que la metodología utilizada, combinando herramientas numéricas y analíticas, permitiría la derivación de un modelo más robusto que podría aplicarse no sólo a bolas de béisbol sino para cualquier tipo de pelota esférica.

3.2 EL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN Y LA DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN EN LOS LSR

En esta sección se presentan los resultados referentes a la sustentación en los LSR. La metodología y el flujo se validan en la Sección 3.2.1 mientras que el efecto producido por las costuras en la sustentación se muestra en la Sección 3.2.2.

Para una representación estándar, todas las gráficas y los resultados son presentados en términos de las unidades características, sustituyendo las variables de distancia y velocidad por variables adimensionales, tal que ($y = Y/D$), ($z = Z/D$), ($u_y = U_y/U_\infty$), ($u_z = U_z/U_\infty$). Todos los gráficos fueron obtenidos usando `R statistics software` [88].

3.2.1 CARACTERÍSTICAS DEL FLUJO Y VALIDACIÓN DEL MODELO

Como base de comparación para el estudio del efecto de una costura y como validación del modelo, se estudiaron las características principales del flujo para el caso de la bola con superficie suave (caso suave) a diferentes Re .

Para reforzar la validez del modelo se comparó el caso suave con resultados de simulaciones y experimentos reportados en la literatura para geometrías y parámetros similares. La Figura 3.6 muestra la curva de distribuciones de presión en términos del coeficiente de presión promedio C_p , de acuerdo a la Ecuación (2.12), para el caso $Re=1 \times 10^5$. Los valores que se muestran fueron calculados promediando temporalmente los datos de la parte superior e inferior correspondiente, dentro de un capa que rodea a la superficie de la bola de $D/100$ unidades en dirección radial, por intervalos de un grado. Así, por ejemplo, el valor de $C_p(\theta = 1^\circ)$ consiste en el promedio obtenido con todos los valores dentro de las capas correspondientes a los intervalos $(0.5^\circ - 1.5^\circ)$ y $(358.5^\circ - 359.5^\circ)$; de igual manera, $C_p(\theta = 90^\circ)$ está asociado con $(89.5^\circ - 90.5^\circ)$ y $(269.5^\circ - 270.5^\circ)$,

mientras que $C_p(\theta = 0^\circ)$ y $C_p(\theta = 180^\circ)$ están asociados solamente con $(359.5^\circ - 0.5^\circ)$ y $(179.5^\circ - 180.5^\circ)$, respectivamente.

El comportamiento general del gráfico se puede describir como una curva decreciente que parte del valor $C_p(0^\circ) = 1$ con una pendiente pronunciada hasta $\theta \sim 80^\circ$, donde alcanza un valor de $C_p(80^\circ) \approx -1.7$, para después seguir decreciendo hasta $C_p(180^\circ) \approx -2.3$. La curva posee características de los datos reportados en la literatura por Johansson et al. [79] y por Naito & Fukagata [82], los cuales fueron obtenidos por simulación, utilizando la metodología *Large Eddy Simulations (LES)*¹ para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. En detalle, nuestros resultados se aproximan a los reportados en literatura hasta $\theta \approx 80^\circ$, en la zona de pendiente pronunciada; en este rango, nuestra solución tiene pequeñas oscilaciones que son producidas por efecto de la resolución de la malla. Después, aproximadamente desde $\theta = 80^\circ$ hasta $\theta = 95^\circ$, los datos de investigaciones previas incrementan mientras que nuestros resultados continúan decreciendo manteniendo una diferencia entre ellos de aproximadamente de 0.3-0.4 unidades hasta $\theta = 180^\circ$.

En el mismo gráfico, se muestra el efecto de la resolución, comparando las tres curvas denominadas *alta* (8 celdas/mm), *estándar* (4 celdas/mm) y *baja* (2 celdas/mm) resolución. La curva correspondiente a la *baja* resolución difiere mucho de las otras dos en los últimos veinte grados, en tanto que la curva con *alta* resolución claramente se acerca más a los resultados de las referencias Johansson et al. [79] y Naito & Fukagata [82]. Sin embargo, ya que el método utilizado en la presente investigación consiste en resolver de manera directa las ecuaciones de movimiento del fluido, no es factible usar la alta resolución en todas las pruebas, pues el número de celdas a evaluar en la sección A del mallado aumenta en cuatro veces, lo que a su vez aumentaría el tiempo de cómputo en más de 2.5 veces (alrededor de 1 mes) produciendo además, limitaciones en la memoria y almacenamiento de los archivos de datos. Por estas razones, se eligió la resolución *estándar* para las simulaciones en el presente trabajo, haciendo el compromiso calidad-memoria-tiempo.

La desviación de nuestros resultados respecto a los datos de la literatura son principalmente en la parte trasera de la bola y se debe a un problema de resolución. Sin embargo, el presente estudio se enfoca principalmente al efecto en la parte delantera de la bola ($\theta \leq 90^\circ$) por lo que los resultados obtenidos son útiles para la presente investigación. La falta de resolución también se puede entender como un efecto de rugosidad en la bola.

¹Básicamente, esta metodología consiste en resolver los términos de mayor escala en las ecuaciones de Navier-Stokes (los términos de transporte) y modelar las escalas más pequeñas (los términos de viscosidad).

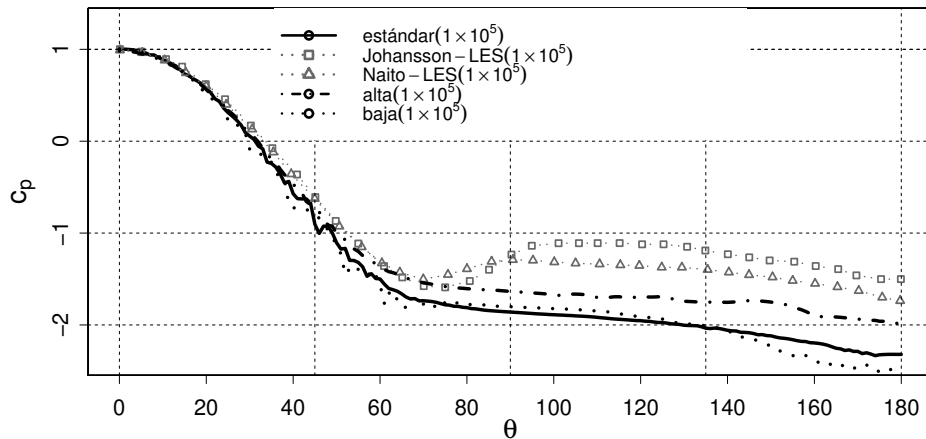


Figura 3.6: Coeficiente de presión promedio C_p calculado alrededor de un corte de la bola con superficie suave a $Re=1 \times 10^5$ para diferentes resoluciones en el mallado: como comparación también se muestran los resultados reportados por Johansson et al. [79] y Naito & Fukagata [82] al mismo Re .

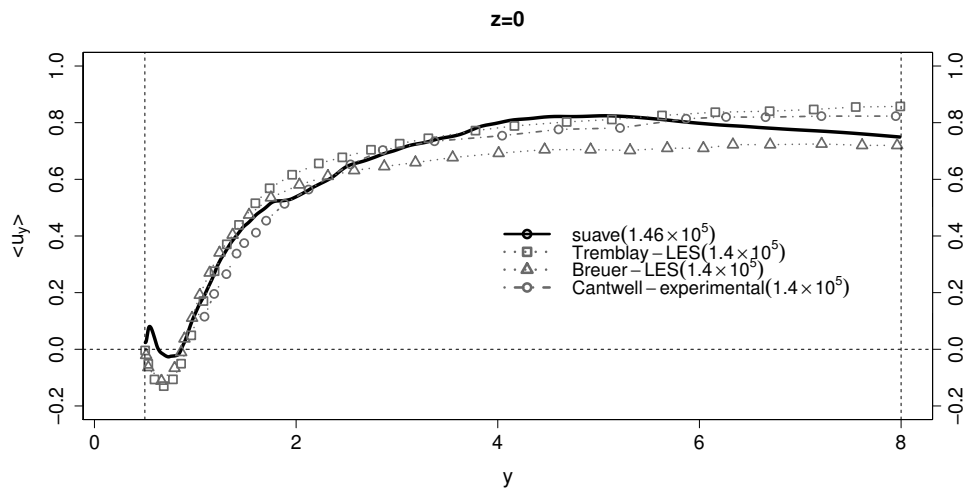


Figura 3.7: Velocidad $\langle u_y \rangle$ en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo a lo largo de la línea de simetría $z = 0$ en comparación con los valores reportados por Tremblay [81], Breuer [83], Cantwell & Coles [94] a $Re=1.4 \times 10^5$.

A su vez, los efectos de la resolución en la solución no se ven reflejados en la estela del flujo. Los valores promedio en el tiempo de la velocidad, en su componente principal $\langle u_y \rangle$ y su componente normal $\langle u_z \rangle$, son comparados con los resultados obtenidos por Tremblay [81] y Breuer [83] por el método de *LES*, y con las mediciones experimentales de Cantwell & Coles [94]; todos ellos a $Re=1.4 \times 10^5$. En general, las características de la

estela reportadas previamente son reproducidas con nuestras simulaciones, como se puede ver en las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9. $\langle u_y \rangle$ sólo difiere de los resultados en la literatura en las zonas inmediatas a la parte trasera de la bola (a lo largo de la línea de simetría $z = 0$, desde $y = 0.5$ hasta $y = 1$), donde aún alcanza a tener efecto la diferente separación del flujo producida por la rugosidad de la bola, ver Figura 3.7. No obstante, desde $y = 1$ hasta $y = 8$, los valores de $\langle u_y \rangle$ obtenidos concuerdan con los reportados en literatura, estabilizándose cerca $y = 4$ en un valor de 0.8 unidades. Las características del flujo son también reproducidas a lo largo de los perfiles $y = 1$ y $y = 3$ para $\langle u_y \rangle$, obteniendo perturbaciones simétricas significativas dentro del canal correspondiente a dos veces el diámetro de la bola, ver Figura 3.8 (izquierda) y (derecha). A su vez, $\langle u_z \rangle$ captura la estructura simétrica promedio de los vórtices alrededor de $z = 0$, al cambiar sus valores de positivo a negativo en la línea $y = 1$, ver Figura 3.9 (izquierda), es decir, recordando que el perfil mostrado en el gráfico guarda simetría con respecto al eje z del arreglo, los valores positivos de $\langle u_z \rangle$ en $z < 0$ indican que el promedio de los vórtices en esa región se forman con una orientación hacia arriba, mientras que los valores negativos de $\langle u_z \rangle$ en $z > 0$ indican una formación hacia abajo, lo que en conjunto significa que los efectos de la sustentación promedio en la estela se aproximan a ser nulos, como es de esperarse. Por último, las perturbaciones en $y = 3$ son mucho más pequeñas comparadas con las producidas en $y = 1$, tanto para $\langle u_y \rangle$ como para $\langle u_z \rangle$, lo cual concuerda con la estabilización del flujo a grandes distancias, como es mostrado en la Figura 3.7.

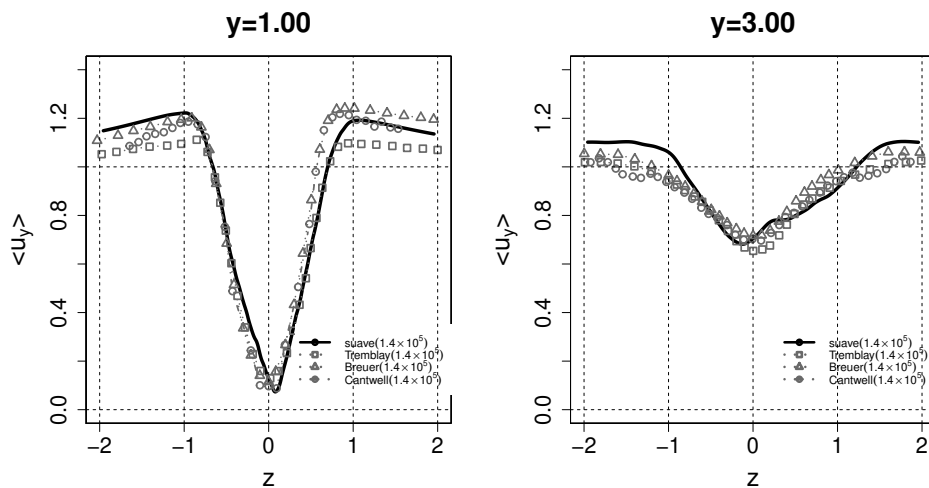


Figura 3.8: Velocidad en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_y \rangle$ alrededor de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ en comparación con los valores reportados por Tremblay [81], Breuer [83], Cantwell & Coles [94].

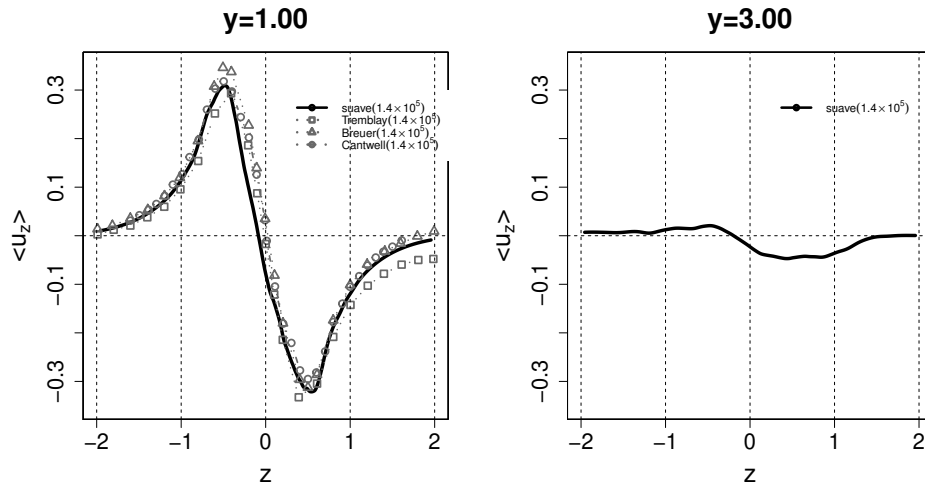


Figura 3.9: Velocidad en dirección normal a la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_z \rangle$ a lo largo de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ en comparación con los valores reportados por Tremblay [81], Breuer [83], Cantwell & Coles [94], sólo para el perfil $y = 1$.

3.2.2 EFECTO DE LAS COSTURAS

Las perturbaciones en C_p originadas por las costuras son mostradas en la Figura 3.10 (izquierda). Para cada ángulo de ataque ϕ se producen tanto un efecto local grande en los ángulos inmediatos como un efecto suave de larga escala en ángulos distantes, después de $\theta = 100^\circ$. La Figura 3.10 (derecha) muestra una vista detallada de los efectos locales comparados con el caso *suave*. En la gráfica, se pueden notar tres tipos de curvas. Las costuras localizadas en ángulos de ataque entre 0° y 30° producen un decaimiento rápido que se mantiene como un movimiento errático durante un cierto intervalo hasta que prácticamente desaparece, al obtener un incremento igualmente repentino; a su vez, las curvas de perturbación asociadas a las costuras entre 60° y 90° se caracterizan por un incremento gradual que alcanza un máximo y decrece rápidamente, seguido por un intervalo correspondiente de estabilización. Las principales perturbaciones en ambos tipos de curvas ocurren en un rango de valores negativos o positivos, pero no en ambos. Las máximas perturbaciones en el primer tipo tienen prácticamente el mismo valor para todas las curvas alrededor de -0.7 unidades, mientras que para el segundo tipo los valores decrecen aproximadamente de 0.9 a 0.5 unidades conforme ϕ incrementa. A su vez, la costura situada a 45° actúa como un punto de inflexión ya que su curva correspondiente posee las características del segundo tipo de curvas pero pasando de perturbaciones positivas a negativas con aproximadamente la misma magnitud.

Adicionalmente a las observaciones anteriores, el rango de acción en el cual la costura disturba el flujo se incrementa un poco cuando el ángulo de ataque se aproxima a $\phi = 45^\circ$, ver la distancia entre el inicio y el final de la perturbación en la Figura 3.11. Estas variaciones están asociadas a la generación temprana y separación tardía del flujo como respuesta directa a la localización de la costura, de los cuales se puede observar que las costuras en ángulos cercanos a 45° producen un flujo más sensible a pequeñas variaciones del ángulo de ataque que las costuras situadas en otros ángulos, como es observado en el experimento de Higuchi & Kiura [64] en $\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ con bolas de béisbol reales.

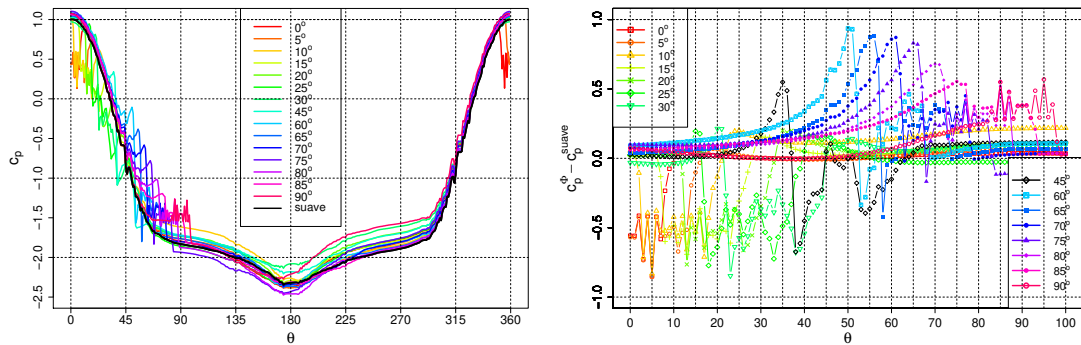


Figura 3.10: Coeficiente de presión promedio C_p calculado para diferentes ángulos de ataque ϕ . Se reescribe el coeficiente como C_p^ϕ para indicar la variación con respecto a ϕ . Izquierda: Alrededor de la bola. Derecha: Acercamiento en $\theta \in [0^\circ - 100^\circ]$ de la diferencia de C_p^ϕ para cada costura en ϕ con respecto al caso *suave* C_p^{suave} , i.e., los datos están trasladados tal que el valor del cero indica la curva de C_p^{suave} para todos los ángulos θ , graficando $C_p^\phi - C_p^{suave}$.

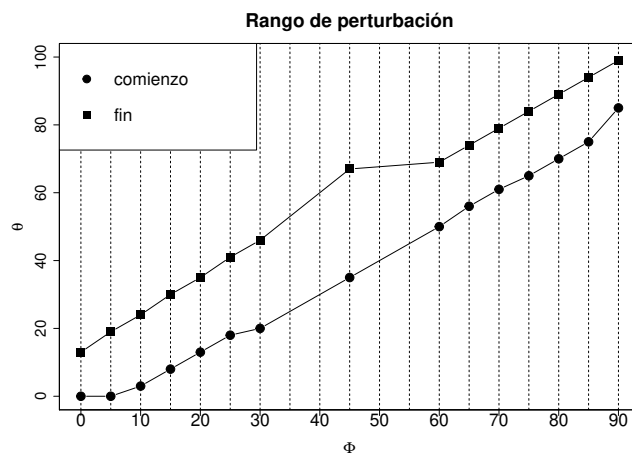


Figura 3.11: Efecto local de la costura. Los puntos y los cuadros indican el comienzo y el fin de las perturbaciones en respuesta del ángulo de ataque, respectivamente.

El efecto global de las perturbaciones en la presión se puede visualizar en los coeficientes de presión y de sustentación promedio. La Figura 3.12 (izquierda) sugiere una relación directa entre C_d y las principales perturbaciones en C_p^ϕ . En efecto, el coeficiente de fricción C_d presenta un decremento respecto al caso *suave* en los valores asociados a las costuras situadas a $\phi < 45^\circ$ y un incremento para las costuras situadas a $\phi > 45^\circ$, mientras que $\phi = 45^\circ$ actúa como un punto de inflexión. La mínima fricción (~ 0.7 unidades) es causada por la costura situada en $\phi = 30^\circ$, mientras que la máxima (~ 1.2 unidades) es causada por $\phi = 75^\circ$. El coeficiente de sustentación C_C es graficado en la Figura 3.12 (derecha). Similarmente al coeficiente de fricción, la curva de C_C se mantiene simétrica respecto al caso *suave*. Sin embargo, la sustentación posee un comportamiento oscilatorio y la costura localizada en $\phi = 45^\circ$ no coincide con el caso *suave* sino con el cero. Las máximas perturbaciones son producidas por los ángulos de ataque $\phi = 30^\circ, 85^\circ, 90^\circ$. La relación entre C_d y C_C tiene implicaciones en trayectorias reales de bolas de béisbol. Por ejemplo, aunque una costura localizada en $\phi = 30^\circ$ produce la máxima sustentación, la fricción correspondiente a tal ángulo es menor en ~ 0.35 unidades que la fricción producida por una costura localizada en $\phi = 85^\circ$, lo cual significa que una bola lanzada con esta última orientación se tardaría más en llegar al plato de *home* que una bola con una costura situada en $\phi = 30^\circ$; esto conduce a que la sustentación producida (en dirección opuesta) por $\phi = 85^\circ$ actuaría más tiempo que la sustentación producida por el caso $\phi = 30^\circ$, de manera que el efecto final podría ser mayor en el primer caso. Los valores obtenidos para el caso *suave* son $C_d = 0.82$ y $C_C = -0.085$.

Para visualizar y comparar los resultados de este trabajo con los datos de lanzamientos reales de béisbol, en la Figura 3.12 (derecha) se muestran los datos experimentales de Borg & Morrissey [14] para orientaciones 4S y 2S. Los datos representan la sustentación causada por el conjunto de costuras y no por una sola por lo que es difícil plantear una correlación entre tales datos y los obtenidos en la presente investigación. A pesar de este hecho, se puede observar que los datos reales están conectados en fase con la sustentación producida por una sola costura.

Las principales perturbaciones en la estela son causadas por las costuras situadas en los ángulos 30° y 90° . En la Figura 3.13, $\phi = 30^\circ$ produce el mayor cambio en zonas cercanas a la bola, alcanzando una rapidez negativa de alrededor de $\langle u_y \rangle = -0.2$ unidades, lo cual se refleja en la fricción pequeña que produce tal costura, ver Figura 3.12 (izquierda). A su vez, las perturbaciones producidas por la costura en $\phi = 90^\circ$ alcanzan un máximo valor alrededor de $y = 4$, emparejándose luego con el caso *suave* en $y = 8$. No se encontraron perturbaciones relevantes en la estela producidas por costuras situadas en el resto de las posiciones. De manera general, todos los casos se estabilizan entre $\langle u_y \rangle = 0.7$ y $\langle u_y \rangle = 0.8$ unidades en $y = 8$. Las perturbaciones en la formación de

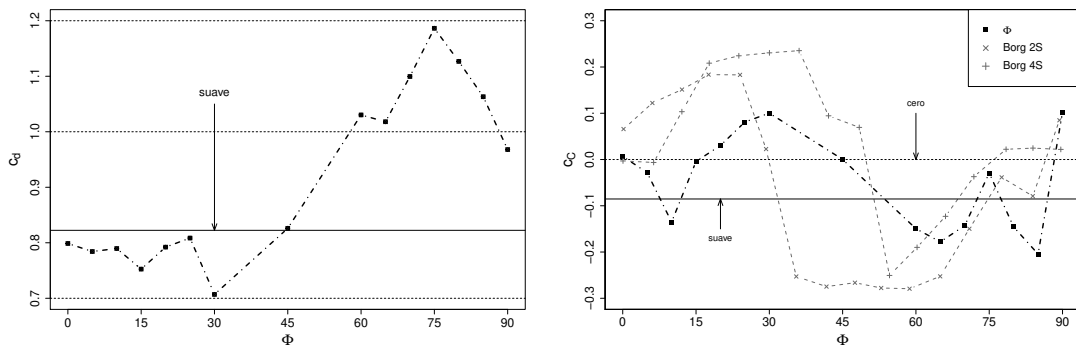


Figura 3.12: Izquierda: Coeficiente de presión promedio C_d para diferentes ángulos de ataque ϕ . Derecha: Coeficiente de sustentación promedio C_c para diferentes ángulos de ataque ϕ . Las líneas punteadas horizontales marcan el valor cero, mientras que la línea horizontal sólida marca el valor calculado para el caso *suave*. Los datos experimentales de Borg & Morrissey [14] para diferentes orientaciones de la bola son graficados en dirección opuesta (de $\theta = 90^\circ$ a $\theta = 0^\circ$).

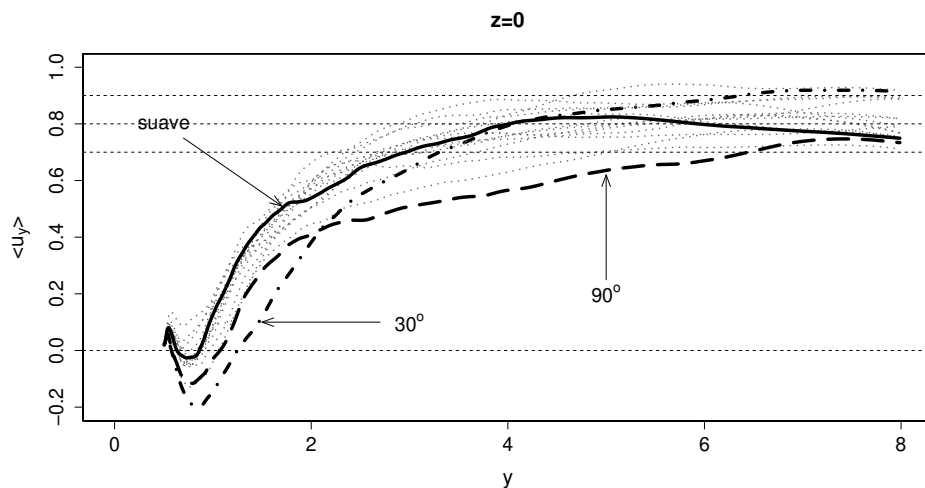


Figura 3.13: Velocidad en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_y \rangle$ a lo largo de la línea de simetría $z = 0$ para diferentes ángulos de ataque ϕ .

vórtices cercanas a la bola son capturadas a lo largo de la línea $y = 1$ en las Figuras 3.14 y 3.15. Como se comentó anteriormente, la costura en $\phi = 30^\circ$ produce los valores más grandes en $\langle u_y \rangle$, mientras que reduce a la mitad la curva de $\langle u_z \rangle$ producida por el caso *suave*, manteniendo la simetría respecto al eje $z = 0$. En acuerdo con el análisis de la Figura 3.13, las principales perturbaciones en $\langle u_y \rangle$ por una costura situada en $\phi = 90^\circ$ son producidas a distancias intermedias de la bola ($y = 3$), por lo que se podría discutir que los efectos de esta costura tienen un impacto de largo alcance, a diferencia del

caso $\phi = 30^\circ$. Por último, a pesar de que la costura situada en $\phi = 85^\circ$ produce grandes variaciones en C_d y en C_C , su efecto no se ve reflejado en la estela producida.

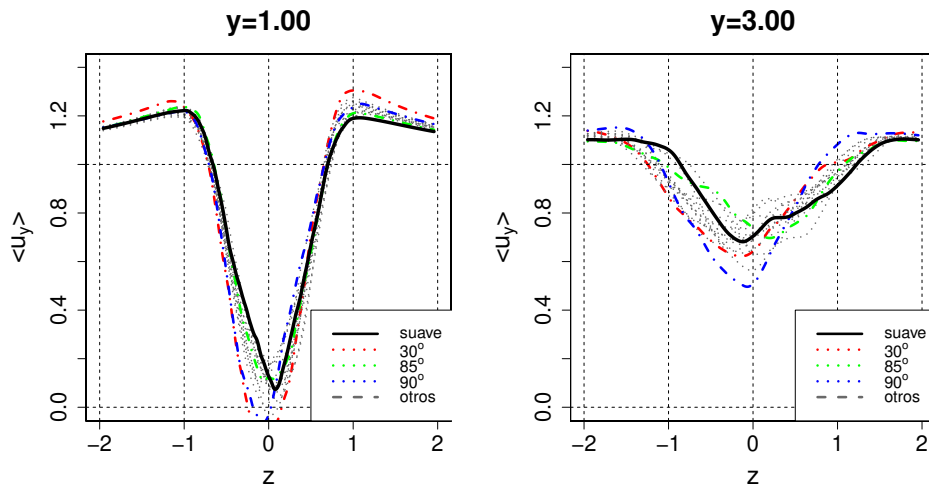


Figura 3.14: Velocidad en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_y \rangle$ a lo largo de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ para diferentes ángulos de ataque ϕ .

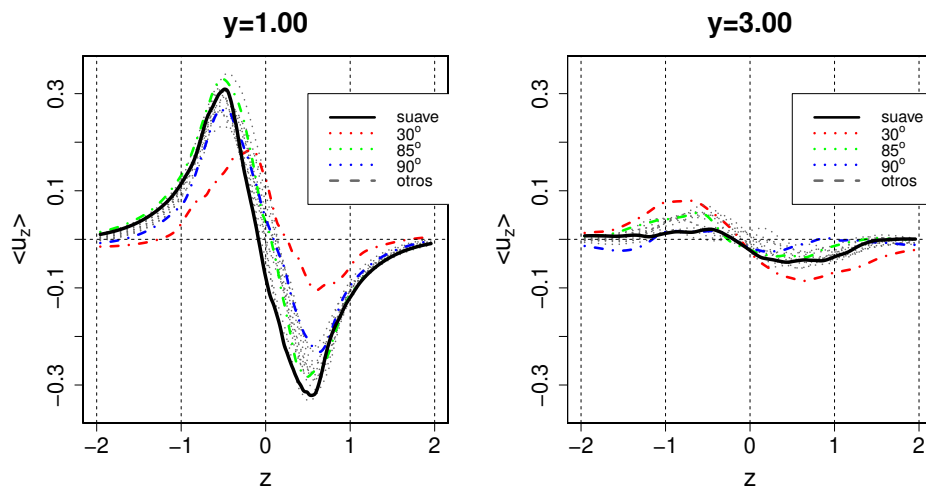


Figura 3.15: Velocidad en dirección normal a la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_z \rangle$ a lo largo de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ para diferentes ángulos de ataque ϕ .

Adicionalmente al impacto de las fuerzas de fricción y sustentación, y aunque fuera del objetivo central de la presente investigación, cabe mencionar que tanto la curva de presión C_p^ϕ mostrada en la Figura 3.10 como los efectos que las costuras producen en la

estela (Figuras 3.13, 3.14 y 3.15) pueden ser de gran utilidad en el diseño y posicionamiento de partes sensibles en superficies de objetos aerodinámicos.

3.2.3 PROPUESTAS DE INVESTIGACIONES POTENCIALES

Las pruebas computacionales para los LSR pueden expandirse en el aporte a las fuerzas de sustentación en diferentes maneras. En esta sección se discuten algunas de estas investigaciones potenciales.

Construcción de C_C a partir del caso 2D

Las pruebas realizadas en la presente investigación proveen el coeficiente de sustentación solo para el caso 2D de una bola con una sola costura por lo que, si bien ayudan a comprender la relación entre el ángulo de la costura y la sustentación producida, no logran reproducir por completo la dinámica de la bola. Sin embargo, el caso 3D podría ser reproducido mediante una integración de casos 2D del problema. Una hipótesis de esto consiste en partir la bola con costuras 3D en un conjunto de láminas 2D para después simular por separado la hidrodinámica de cada una de las láminas; realizar una posterior integración de los resultados en 2D, ajustándolos a los datos experimentales mostrados en Borg & Morrissey [14]. Esto aportaría conocimiento no a la parte práctica del problema sino en cuanto a la teoría de la dinámica de fluidos.

Construcción de C_C a partir del caso 3D

Otra manera de obtener el C_C real de una bola de béisbol es directamente mediante simulaciones *CFD* del caso 3D. Sin embargo, tanto la memoria como el tiempo computacional requeridos aumentan a tal grado que no es factible realizar este tipo de estudios con la metodología implementada. Para ello, habría que reemplazar las simulaciones directas, las cuales resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes, por técnicas como *Large Eddy Simulations* (LES) o utilizar modelos tipo *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS), los cuales resuelven las escalas grandes del problema y modelan las escalas pequeñas, ahorrando así tiempo de cómputo a medida que se vuelve factible resolver el caso 3D.

3.3 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados de ambos tipos de lanzamiento (LCR y LSR) contribuyen al modelado de la dinámica de la bola de béisbol en diferentes maneras y profundidad. Por un lado, el modelo cardioide para la sustentación en los LCR estima la desviación producida por el efecto Magnus (sustentación) con una precisión tal que puede tener un uso práctico en las tecnologías relacionadas con un juego de béisbol, como en simulaciones de videojuegos, visualización de posibles trayectorias dependiendo de la velocidad angular en transmisiones en vivo, o simplemente facilitando esta información a los jugadores. Por otro lado, los valores del coeficiente de sustentación obtenidos mediante las pruebas numéricas realizadas para los LSR son un primer intento prometedor en la obtención del coeficiente de sustentación por lo que, si bien la construcción de un modelo análogo al de los LCR es aún distante, los resultados son de gran utilidad al caracterizar el efecto producido por cada costura de forma particular de manera numérica.

Los resultados anteriores concuerdan con el hecho de que la sustentación en los LSR es un proceso más complejo que en los LCR, debido a que la distribución de la presión en la superficie de la bola se ve afectada por la posición y asimetría de las costuras. Es por ello que la complejidad del modelo utilizado para los LSR resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes debe ser capaz de simular las escalas más pequeñas del fluido, mientras que para los LCR basta con un modelo que promedie las características del fluido, enfocándose en el movimiento de la bola y utilizando simplemente las ecuaciones de Newton. Lo anterior está relacionado con el método de solución, ya que las simulaciones de los LSR requieren de un método como diferencias finitas, mientras que las simulaciones de los LCR se pueden realizar con el método de Runge-Kutta.

No obstante, los métodos de *CFD*, como los utilizados en los LSR, tienen un gran potencial en el análisis de la aerodinámica de una bola de béisbol y otros objetos similares, incluyendo el caso de los LCR. Así, el uso de *CFD* es de vital importancia en futuros trabajos que describan con más detalle tanto la dinámica de los LCR como la de los LSR.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En el presente estudio se abordó el problema de la determinación de la fuerza de sustentación en una bola de béisbol, y su conexión con las condiciones iniciales y parámetros del problema a partir de diferentes metodologías, según el tipo de lanzamiento:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{2}\rho AC_M \frac{v}{\omega} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

con rotación (LCR), y

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{2}\rho AC_C v \hat{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{v}$$

sin rotación (LSR).

Para los LCR se contruyó un modelo cosenoidal que relaciona la velocidad angular de la bola con la desviación producida por el efecto Magnus, que es la sustentación en los LCR. El modelo propuesto ajusta perfectamente a los datos de desviación en el eje Z de un conjunto de trayectorias simuladas en función de la rapidez angular ω y el ángulo de rotación ϕ , los cuales son parámetros del sistema de ecuaciones que modela la dinámica de la bola. La rapidez angular define la amplitud en el modelo por medio de una relación lineal con el coeficiente Magnus C_M , mientras que el ángulo ϕ es el argumento del coseno. La rapidez lineal promedio del conjunto de trayectorias $\langle V \rangle$ es introducida como un factor constante. El modelo es deducido a partir de argumentos teóricos y numéricos. El modelo se ajusta también a las desviaciones radiales R_f y reproduce los resultados del algoritmo PITCHf/x.

A su vez, como principales resultados en los LSR, se obtuvieron las perturbaciones de presión y velocidad en el flujo alrededor de sección 2D de la bola de béisbol con una costura situada a diferentes ángulos, via dinámica de fluidos computacional. Cada costura disturba abruptamente la presión en ángulos inmediatamente cercanos a ella, mientras que produce efectos más suaves en ángulos lejanos. Además las costuras perturban los valores del coeficiente de sustentación y de fricción según el ángulo en el que se encuentra, a saber: el ángulo de ataque de 45° actúa como un punto de inflexión en el cual los coeficientes

aerodinámicos son prácticamente no perturbados con respecto al caso con superficie suave; las costuras situadas a ángulos menores de 45° reducen la fricción mientras que las que se sitúan a ángulos mayores la incrementan; la sustentación tiene un comportamiento oscilatorio respecto a los ángulos de ataque. A pesar de que el método numérico utilizado reproduce las características del flujo en la parte frontal de la bola y en la estela, en la zona cercana a la parte trasera difiere de los resultados simulados y experimentales tomados de la literatura. Estas discrepancias son consecuencia de la resolución del mallado y limitaciones del software ZEUS3D, el cual fue adaptado para definir la bola como un objeto sólido.

Los puntos anteriores llevan a la conclusión general de que la sustentación en los LSR es más impredecible que en los LCR, debido a la mayor sensibilidad a la distribución de presión en la superficie de la bola, lo que conduce a que la complejidad del modelo a utilizar para la simulación de la dinámica de la bola debe ser mayor en los LSR, por ejemplo resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes, que en los LCR, donde basta con resolver las ecuaciones de Newton. Finalmente, se presentó un planteamiento de investigaciones potenciales para ambos tipos de lanzamiento, las cuales dan continuidad al presente estudio.

Los resultados de ambos tipos de lanzamiento contribuyen al entendimiento, al desarrollo y a la integración del modelado de la dinámica de la bola de béisbol, especialmente sobre las fuerzas de sustentación. Por un lado, el modelo construido para las desviaciones en los LCR tiene aplicaciones directas o casi directas en las tecnologías relacionadas con un juego de béisbol. Un ejemplo de aplicación se encuentra en la industria de los videojuegos, los cuales requieren de simulaciones reales, precisas y rápidas del vuelo de la bola de béisbol; estos requerimientos son cumplidos por nuestro modelo, ya que al introducirlo como fórmula en el algoritmo del videojuego se ahorra tiempo computacional en lugar de resolver la trayectoria completa. Otro ejemplo se encuentra en la visualización de familias de soluciones con variación en la velocidad angular, siendo esto útil tanto en videojuegos, como en transmisiones en vivo y uso en el béisbol profesional. Por otro lado, los valores de presión obtenidos para los LSR con la costura situada a distintos ángulos son de gran utilidad para fortalecer el ajuste del modelo fenomenológico construido previamente, el cual puede ser utilizado a su vez para reproducir trayectorias de lanzamientos sin rotación. Los resultados obtenidos son de todavía más utilidad al caracterizar el efecto producido por cada costura de forma particular de manera numérica, lo que motiva a continuar con esta línea de investigación en dirección a formular modelos similares al propuesto para los LCR. Finalmente, los resultados se pueden extender o aplicar a objetos con geometrías similares.

APÉNDICE A

LA FUERZA DE SUSTENTACIÓN

Resumen: El enfoque de la presente investigación gira alrededor de la sustentación que experimenta la bola de béisbol durante su vuelo. La sustentación (y la fricción) se expresan matemáticamente por fórmulas teórico-experimentales fundamentadas en la distribución de presiones sobre la superficie de la bola. Estas fórmulas, aunque bien conocidas por quienes están familiarizados con trabajos de aerodinámica, se utilizan a tal grado en este trabajo que conviene describirlas y derivarlas con detalle para aquéllos lectores no tan familiarizados con ellas o como simple revisión para quienes sí lo están. El presente Apéndice trata con ello, presentando una primera aproximación (a las fórmulas de fricción y sustentación) a partir de la derivación de la ecuación de Bernoulli en la Sección A.1 y más formalmente, a partir de la derivación del teorema Kutta-Joukowski en la Sección A.2.

“The person who merely watches the flight of a bird gathers the impression that the bird has nothing to think of but the flapping of its wings. As a matter of fact this is a very small part of its mental labor. To even mention all the things the bird must constantly keep in mind in order to fly securely through the air would take a considerable part of the evening . . . The bird has learned this art of equilibrium, and learned it so thoroughly that its skill is not apparent to our sight. We only learn to appreciate it when we try to imitate it.- Wilbur Wright, 1901”

A.1 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

La derivación de la ecuación de Bernoulli que aquí se presenta está basada en la derivación mostrada por Landau & Lifshitz [56] y por Drela [9].

La aproximación comienza tomando como punto de partida la ecuación de movimiento de un fluido newtoniano no viscoso (cuya derivación se puede ver en la Sección B.1 del Apéndice B):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z, t)$, $p = p(x, y, z, t)$ y $\rho = \rho(x, y, z, t)$ son la velocidad, presión y densidad del fluido, respectivamente. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Euler.

Luego, usando la conocida fórmula de análisis vectorial¹ $\frac{1}{2}\nabla U^2 = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$, la ecuación (A.1) puede reescribirse como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left[\frac{1}{2}\nabla U^2 - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) \right] = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

y se simplifica al considerar un flujo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \right) && \text{incompresible } (\rho = \text{constante}), \\ \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) &= \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \right) && \text{y estático } \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por último, se analiza el flujo (por medio de la ecuación (A.2)) a lo largo de una línea de corriente, la cual se define como una curva espacial (en 2D) cuya tangente en algún punto da la dirección de la velocidad en tal punto, ver Figura A.1. Al realizar el producto escalar de la ecuación (A.2) con el vector unitario (denotado por $\hat{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|}$) tangente a la línea de corriente en cada punto tenemos

$$\begin{aligned} [\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U})] \cdot \hat{\mathbf{U}} &= \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \right) \cdot \hat{\mathbf{U}} \\ 0 &= \frac{\partial \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \right)}{\partial l}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$(\text{A.4})$$

donde el término de la izquierda se vuelve cero debido a que el vector $\mathbf{U} \times (\cdot)$ es perpendicular a la dirección de la velocidad mientras, por lo que su proyección en la dirección de $\hat{\mathbf{U}}$ es cero. A su vez, la proyección del término de la derecha en $\hat{\mathbf{U}}$ es la derivada del término en dirección de la línea de corriente, la cual se denota como $\frac{\partial}{\partial l}$.

De la ecuación (A.3) solo basta observar que al ser la derivada $\frac{\partial(\cdot)}{\partial l} = 0$ a lo largo de la línea de corriente, entonces

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{constante}. \quad (\text{A.5})$$

¹La derivación de esta fórmula se encuentra al final de la presente Sección.

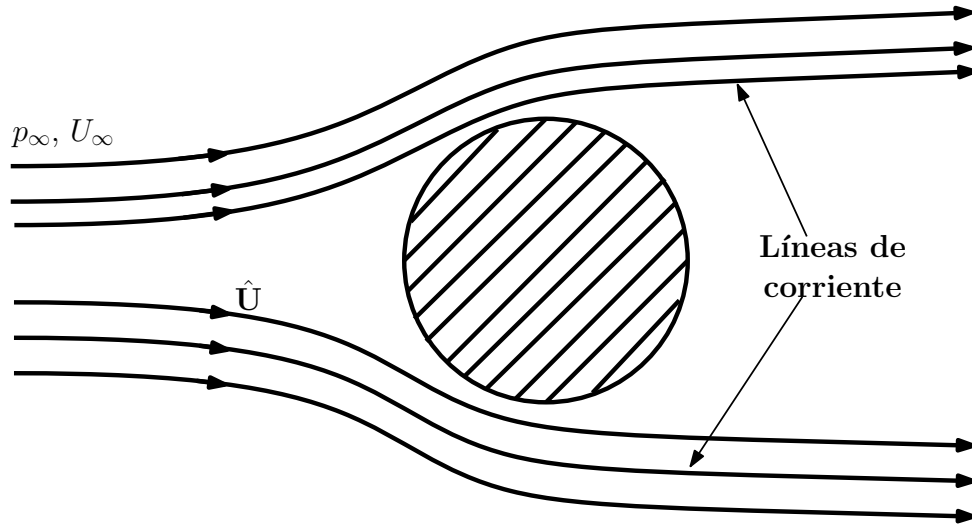


Figura A.1: Esquemmatización de las líneas de corriente.

La ecuación (A.5) es la llamada **ecuación de Bernoulli**, y es de vital importancia para fluidos sin fricción, ya que da la relación entre velocidad, posición y presión de las partículas del fluido que están en la misma línea de corriente Prandtl & Tietjens [10].

La aplicación de la presente aproximación al caso de la bola de béisbol se puede ver al reorganizar la ecuación de Bernoulli (A.5) en términos de presión y utilizando el valor de presión lejos de la bola p_∞ , tal que

$$p_\infty = p + \frac{1}{2}\rho U^2. \quad (\text{A.6})$$

La diferencia de presión entre la parte frontal y trasera de la bola a lo largo de una línea de corriente, se obtiene mediante la resta de la evaluación de la ecuación (A.6) en ambas partes, tal que

$$p_{\text{atrás}} - p_{\text{frente}} = -\frac{1}{2}\rho(U_{\text{atrás}}^2 - U_{\text{frente}}^2); \quad (\text{A.7})$$

así, aunque analizando sólo una línea de corriente y en un flujo incompresible y sin viscosidad, la ecuación (A.6) es una primera aproximación a la fricción (por presión) de la bola al introducir la sección transversal de área de la bola A , y compensando la diferencia de velocidades ($U_{\text{atrás}} - U_{\text{frente}}$) con la velocidad característica U_∞ de la bola y el coeficiente de fricción C_d :

$$\frac{\text{fricción}}{A} = p_{\text{atrás}} - p_{\text{frente}} = \frac{1}{2}\rho C_d U_\infty^2. \quad (\text{A.8})$$

Un procedimiento similar pero aplicado a la parte superior e inferior de la bola conduce la fuerza de sustentación:

$$\frac{\text{sustentación}}{A} = p_{\text{arriba}} - p_{\text{abajo}} = \frac{1}{2} \rho C_S U_{\infty}^2. \quad (\text{A.9})$$

Identidad vectorial 1. $\frac{1}{2} \nabla U^2 = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$

Demostración:

Utilizando coordenadas cartesianas, tal que $\mathbf{U} = (U_x \hat{x} + U_y \hat{y} + U_z \hat{z})$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right)$, desarrollamos

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) &= \mathbf{U} \times \left[\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \hat{z} \right] \\ &= \left[U_y \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) - U_z \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \right] \hat{x} + \\ &\quad \left[U_z \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) - U_x \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \right] \hat{y} + \\ &\quad \left[U_x \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) - U_y \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right] \hat{z}. \end{aligned}$$

Reorganizando y agregando la resta nula $U_{\xi} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} - U_{\xi} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} (= 0)$ a la respectiva componente componente $\xi = x, y, z$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) &= \left[U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial x} - \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right] \hat{x} \\ &\quad \left[U_x \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial y} - \left(U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right] \hat{y} \\ &\quad \left[U_x \frac{\partial U_x}{\partial z} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial z} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} - \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right] \hat{z} \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)}{\partial x} - \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right] \hat{x} \\ &\quad \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)}{\partial y} - \left(U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right] \hat{y} \\ &\quad \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)}{\partial z} - \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right] \hat{z}, \end{aligned}$$

donde el primer término de cada dirección se obtiene al asociar las derivadas respecto a cada componente.

Luego, reagrupando los primeros y segundos términos de cada dirección, respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)}{\partial x} \hat{x} + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)}{\partial y} \hat{y} + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)}{\partial z} \hat{z} \right] - \\
 &\quad \left(U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} + U_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (U_x \hat{x} + U_y \hat{y} + U_z \hat{z}) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) - (\mathbf{U} \cdot \nabla) (U_x \hat{x} + U_y \hat{y} + U_z \hat{z}) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla U^2 - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

A.2 EL TEOREMA KUTTA-JOUKOWSKI

La derivación del teorema Kutta-Joukowski que aquí se presenta está basada en la derivación mostrada por Drela [9] y por Prandtl & Tietjens [10].

A diferencia de la aproximación de Bernoulli, la derivación de Kutta-Joukowski comienza tomando como punto de partida la ecuación de movimiento de un fluido newtoniano viscoso (cuya derivación se puede ver en la Sección B.2 del Apéndice B):

$$\frac{\rho \partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}}, \tag{A.11}$$

donde $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ es el tensor de esfuerzos por viscosidad. Esta ecuación, junto con la ecuación de conservación de masa y de energía se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes.

Expresando la ecuación (A.11) en su forma integral volumétrica y aplicando el teorema de la divergencia, ($\oint \oint \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} = \int \int \int \nabla \cdot \mathbf{U} d\mathcal{V}$), se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \int \int \left[\frac{\rho \partial \mathbf{U}}{\partial t} \right] &= \int \int \int [-\rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla p + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}}] \\
 &= - \oint \oint [\rho (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{U} + p \hat{\mathbf{n}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\mathcal{S}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

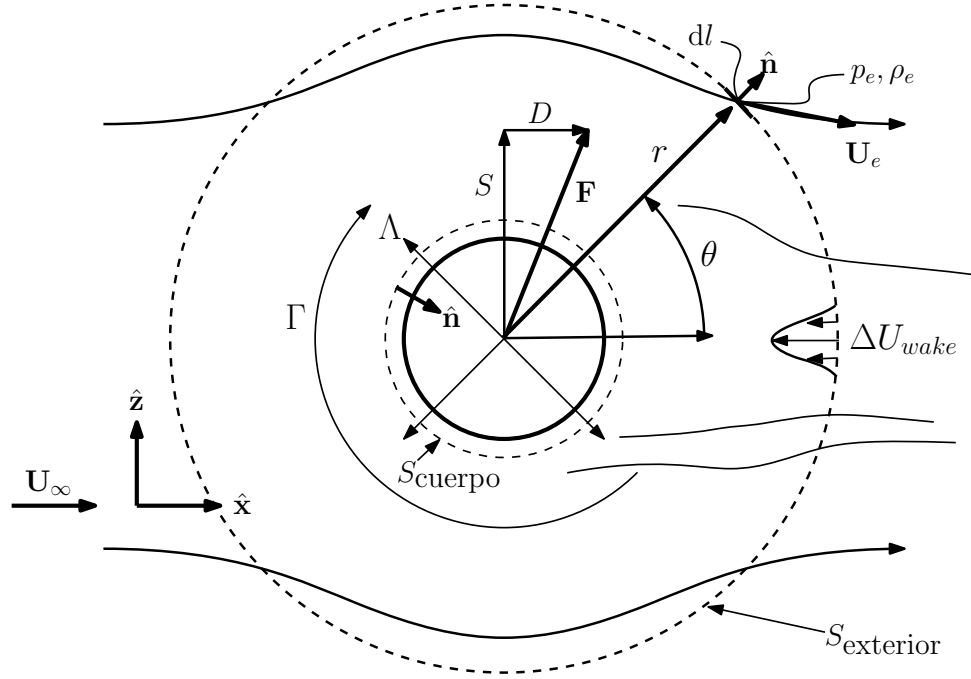


Figura A.2: Representación de los contornos S_{cuerpo} y S_{exterior} , así como de la fuerza aerodinámica \mathbf{F} , su descomposición en sustentación S y fricción D , y de la velocidad en el campo lejano \mathbf{U}_e para una esfera moviéndose hacia la izquierda, o bien una esfera estática con flujo hacia la derecha con velocidad \mathbf{U}_∞ . También se visualiza la circulación Γ , la fuente Λ y defecto por la estela ΔU_{wake} . Basada en Drela [9].

Luego, se considera que el flujo es estacionario por lo que la ecuación de movimiento (A.12) se reduce a

$$\oint \oint [\rho(\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{U} + p\hat{\mathbf{n}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\mathcal{S} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.13})$$

donde la integral de contorno se puede descomponer en dos partes, ver Figura A.2, tal que

$$\oint \oint [] d\mathcal{S} = \oint \oint_{\text{cuerpo}} [] d\mathcal{S} + \oint \oint_{\text{exterior}} [] d\mathcal{S} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.14})$$

El contorno S_{cuerpo} está definido en la superficie del cuerpo donde $\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, por la condición de no deslizamiento, tal que la integral sobre S_{cuerpo} se refiere a la fuerza de campo cercano al cuerpo $\mathbf{F}_{\text{cuerpo}}$, y se reduce a

$$\oint \oint_{\text{cuerpo}} [\rho(\mathbf{U}_c \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{U}_c + p_c\hat{\mathbf{n}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\mathcal{S} = \oint \oint_{\text{cuerpo}} [p_c\hat{\mathbf{n}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\mathcal{S} = \mathbf{F}_{\text{cuerpo}}. \quad (\text{A.15})$$

Combinando (A.13) y (A.15) de acuerdo a (A.14), se obtiene la fuerza de campo lejano al cuerpo

$$\mathbf{F}_{\text{exterior}} = \oint \oint [(p_\infty - p)\hat{\mathbf{n}} - \rho(\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{U}] d\mathcal{S}, \quad (\text{A.16})$$

donde se asume que el contorno S_{exterior} se encuentra lo suficientemente lejos del cuerpo para despreciar el esfuerzo viscoso $\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, es decir, la mayoría de este esfuerzo ocurre en el campo cercano tal que $\bar{\boldsymbol{\tau}} \approx \bar{\boldsymbol{\tau}}_c$. A su vez, el término de presión puede ser reemplazado por $p_\infty - p$ ya que la presión uniforme p_∞ no ejerce una fuerza neta sobre el cuerpo, debido a la identidad $\oint \oint \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} = \mathbf{0}$, válida para cualquier volumen.

El teorema se deriva a partir de la fuerza de campo lejano (A.16), ya que la parte advectiva de esta fuerza (aunado al término de presión) es lo que permite encontrar una expresión para aproximar la sustentación en función de la velocidad de la bola. Por otro lado, un desarrollo de la fuerza de campo cercano (A.15) sólo nos permite expresar la sustentación en función de la presión alrededor del cuerpo, como se ve brevemente a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cuerpo}} &= \mathbf{F}_{\text{presión}} + \mathbf{F}_{\text{viscosidad}} \\ \mathbf{F}_{\text{presión}} &= \oint \oint -p_c \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} = \oint \oint (p_\infty - p_c) \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{F}_{\text{viscosidad}} = \oint \oint \bar{\boldsymbol{\tau}}_c \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S}. \quad (\text{A.18})$$

Así, eligiendo el eje y alineado a la dirección de la corriente ($\mathbf{U}_\infty = U_\infty \hat{\mathbf{y}}$) y el eje z en dirección vertical, la fricción ($D = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{y}}$) y sustentación ($S = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}}$) se obtienen al evaluar las integrales correspondientes. Por ejemplo, la sustentación por presión se obtiene al integrar $S_{\text{presión}} = \mathbf{F}_{\text{presión}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \oint \oint (p_\infty - p_c) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} d\mathcal{S}$. Esta expresión es de utilidad al realizar pruebas numéricas para la obtención de la sustentación, sin embargo, no lo es tanto en la derivación del modelo para la sustentación. La sustentación por esfuerzo viscoso es despreciable para números de Reynolds grandes (similares al orden de las características del movimiento de la bola).

Siguiendo con la derivación del teorema, la expresión para la fuerza de campo lejano (A.16) en el caso 2D tiene la forma

$$\mathbf{F}_{\text{exterior}} = - \oint \rho (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{U} dl + \oint (p_\infty - p) \hat{\mathbf{n}} dl. \quad (\text{A.19})$$

Realizando el producto punto entre la ecuación (A.19) y los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$, se obtienen las ecuaciones para la fricción D y la sustentación S , respectivamente:

$$\mathbf{F}_{\text{exterior}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = D = - \oint \rho (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{x}}) dl + \oint (p_\infty - p) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) dl \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{F}_{\text{exterior}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = S = - \oint \rho (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{z}}) dl + \oint (p_\infty - p) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) dl. \quad (\text{A.21})$$

Para la evaluación de la integral de presión en (A.21) se considera un flujo potencial en el contorno S_{exterior} , de manera que la presión (p_e) es definida por la ecuación de Bernoulli (A.7) como

$$p_\infty - p_e(x, z) = \frac{1}{2}\rho(U_e^2 - U_\infty^2)$$

donde

$$\begin{aligned} U_e^2 - U_\infty^2 &= \left[U_\infty \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} \right]^2 + \left[-U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \right]^2 - U_\infty^2 \\ &= 2U_\infty \frac{\Lambda}{2\pi r} \cos \theta + 2U_\infty \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta + \frac{\Lambda^2 + \Gamma^2}{(2\pi r)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

de acuerdo a la expresión de la velocidad en el campo lejano U_e en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} dl &= r d\theta \\ \hat{\mathbf{n}} &= \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{U}_e &= U_\infty(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\Lambda}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

con $\Gamma \equiv$ circulación y $\Lambda \equiv$ fuerza de campo lejano, actuando como parámetros, ver Figura A.2.

Usando las integrales $\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$, $\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$, y el resultado (A.22), la integral de presión en la ecuación de sustentación (A.21) se evalúa como sigue

$$\begin{aligned} \oint (p_\infty - p_e)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) dl &= r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho(U_e^2 - U_\infty^2) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\rho r \int_0^{2\pi} \left(2U_\infty \frac{\Lambda}{2\pi r} \cos \theta + 2U_\infty \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta + \frac{\Lambda^2 + \Gamma^2}{(2\pi r)^2} \right) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\rho U_\infty \Gamma}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

ya que $\hat{\mathbf{z}} = \sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ y por consiguiente $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sin \theta$.

Por otro lado, la velocidad de flujo potencial en el campo lejano U_e no representa completamente la estela viscosa. Esto se corrige añadiendo la velocidad por defecto de estela tal que $U_{\text{ew}} = U_e + \Delta U_{\text{wake}} \hat{\mathbf{x}}$, donde se entiende que ΔU_{wake} es cero en cualquier lugar del contorno S_{exterior} , excepto en la estela. Por lo tanto, ΔU_{wake} debe ser incluido en los productos punto de velocidad que aparecen en la ecuación (A.21), tal que

$$U_{\text{ew}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \left[U_\infty \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} \right] \sin \theta + \left[-U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \right] \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Lambda}{2\pi r} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \\
 U_{ew} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \left[U_{\infty} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\Lambda}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \Delta U_{wake} \hat{\mathbf{x}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
 &= U_{\infty} \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} + \Delta U_{wake}.
 \end{aligned}$$

Usando las integrales $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$ y las evaluaciones anteriores, la integral de flujo de momento en la ecuación de sustentación (A.21) se evalúa como

$$\begin{aligned}
 - \oint \rho (\mathbf{U}_{ew} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{x}}) dl &= -\rho \oint \left(U_{\infty} \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} + \Delta U_{wake} \right) \left(\frac{\Lambda}{2\pi r} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right) dl \\
 &= -\rho r \int_0^{2\pi} \left(\frac{U_{\infty} \Lambda}{2\pi r} \sin \theta \cos \theta - \frac{U_{\infty} \Gamma}{2\pi r} \cos^2 \theta + \frac{\Lambda^2}{(2\pi r)^2} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Lambda \Gamma}{(2\pi r)^2} \cos \theta \right) d\theta \\
 &\quad - \rho \int \Delta U_{wake} \left(\frac{\Lambda}{2\pi r} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right) dz \\
 &= \frac{\rho U_{\infty} \Gamma}{2} - \frac{\rho \dot{v}_{wake} \Gamma}{2\pi r} \\
 &\simeq \frac{\rho U_{\infty} \Gamma}{2}, \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

donde $\int \Delta U_{wake} dz = \dot{v}_{wake}$ es la razón de flujo de entrada al contorno S_{exterior} y su término correspondiente se aproxima a cero cuando el radio r del volumen de control se considera lo suficientemente grande.

La suma de las integrales (A.24) y (A.25) de acuerdo a (A.21) da el teorema de Kutta-Joukowski, relacionando la sustentación con la circulación del flujo

$$S = \rho U_{\infty} \Gamma, \tag{A.26}$$

de manera que el teorema de Kutta-Joukowski es una manera alternativa de representar las consecuencias de la distribución de presión en la superficie de la bola

El caso 3D de la expresión (A.26) es, a su vez,

$$\mathbf{S} = \rho \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Gamma},$$

donde se sustituye la velocidad lejana a la esfera (o a la bola de béisbol) por la velocidad promedio de la bola \mathbf{V} .

Aunque se sabe que la circulación está directamente relacionada con la velocidad y con el tamaño de la esfera, encontrar analíticamente una expresión de la circulación es un tema complicado. No obstante, se ha determinado experimentalmente y basándose en la fórmula de Bernoulli, que la circulación se puede aproximar por $-\frac{1}{2}AV\mathbf{a}$, de modo que

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\rho AC_S V \mathbf{a} \times \mathbf{V}, \quad (\text{A.27})$$

donde A es la sección transversal de área de la esfera, \mathbf{a} es un vector unitario que indica la dirección de la circulación, mientras que el coeficiente de ajuste C_S es introducido para relacionar la morfología específica de la bola con los datos experimentales recolectados.

Finalmente, debido a la naturaleza de los lanzamientos, tanto el coeficiente C_S como el vector unitario \mathbf{a} en la fórmula (A.27) toman diferentes formas dependiendo del tipo de lanzamiento. En efecto, para los lanzamientos con rotación (LCR), la dirección de la circulación \mathbf{a} depende de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, tal que $\mathbf{a} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$. De igual manera, $C_S \equiv C_S(\omega)$. A su vez, para los lanzamientos sin rotación (LSR) la orientación de la bola (debido a la asimetría que ésta presenta) entra como variable al sistema que define la dinámica de la bola, tal que $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\phi, \psi)$, $C_S \equiv C_S(\phi, \psi)$, con ϕ, ψ los ángulos que definen la orientación de la bola.

APÉNDICE B

LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Resumen: La representación de un fenómeno físico de interés, como el movimiento de un fluido, requiere de un modelo matemático adecuado. Particularmente, las ecuaciones de Navier-Stokes son el modelo más aceptado para representar la dinámica de fluidos. La construcción de estas ecuaciones está basada en tres principios físicos fundamentales, a saber, la conservación de masa, la segunda ley de Newton y la conservación de energía. El presente Apéndice se estructura de la siguiente manera para presentar la derivación de tales ecuaciones: la Sección B.1 describe las bases en las que se sustentan la de la dinámica de fluidos, obteniendo como punto final la ecuación de Euler, mientras que la obtención completa de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de energía se muestran en la Sección B.2.

“All the mathematical sciences are founded on relations between physical laws and laws of numbers, so that the aim of exact science is to reduce the problems of nature to the determination of quantities by operations with numbers.- James Clerk Maxwell, 1856”

B.1 FUNDAMENTOS DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Las ecuaciones gobernantes de la dinámica de fluidos están basadas en tres principios físicos:

- La masa se conserva \implies Ecuación de continuidad
- Segunda ley de Newton \implies Ecuación de momento
- La energía se conserva \implies Ecuación de energía

de manera que estas ecuaciones, comúnmente conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes, “hablan” la física de los fluidos en general, y de fenómeno en particular al añadir restricciones al inicio del proceso (condiciones iniciales) y en los límites espaciales del

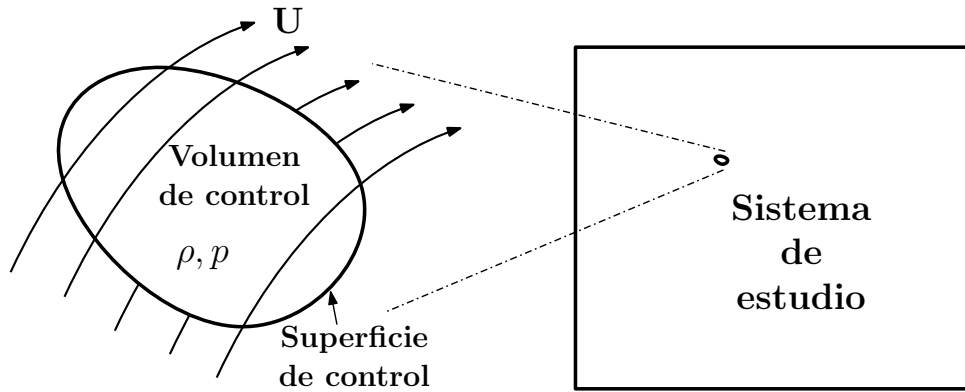


Figura B.1: Visualización ampliada del flujo a través de un volumen de control con propiedades ρ, p, \mathbf{U} . El volumen de control está delimitado por su correspondiente superficie de control, y se encuentra dentro del sistema de estudio.

fenómeno en consideración (condiciones de frontera). Aunque existen diversas maneras para deducir tales ecuaciones, la derivación que aquí se presenta es una integración de las derivaciones mostradas por Anderson [11], Landau & Lifshitz [56] y Xamán & Gijón-Rivera [99].

La derivación comienza con establecer las bases del modelo a considerar. En efecto, para el análisis de flujo de fluidos a escalas macroscópicas ($> 1\mu m$), la estructura molecular de la materia y los movimientos moleculares pueden ignorarse, por lo que el fluido puede considerarse como un medio continuo. Es decir, el elemento de fluido o “control de volumen” considerado, es pequeño comparado con el sistema de estudio pero grande comparado con el tamaño de las moléculas del fluido y la distancia entre ellas. Estas consideraciones permiten que la descripción matemática del estado del fluido pueda ser escrita en términos de la distribución de las propiedades macroscópicas velocidad $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z, t)$, presión $p = p(x, y, z, t)$ y densidad $\rho = \rho(x, y, z, t)$, y sus derivadas en el tiempo y en el espacio, ver Figura B.1. La derivación que se muestra a continuación tiene un enfoque euleriano, es decir, se analiza el flujo que circula a través de un volumen de control fijo en un punto del sistema.

La ecuación de continuidad

Comenzaremos con la ecuación que describe la conservación de materia. Al considerar un volumen de control \mathcal{V}_0 , es fácil notar que la masa \mathcal{M} de fluido contenida en \mathcal{V}_0 en un instante de tiempo t , se puede expresar integrando la densidad del fluido ρ dentro de \mathcal{V}_0 , tal que $\mathcal{M}(t) \equiv \int \rho d\mathcal{V}$, donde la integración es tomada sobre \mathcal{V}_0 ¹. Por consiguiente, el

¹Es decir, para facilitar la notación se abrevia la triple integral ($\int \int \int$) sobre el volumen de control mediante (\int). Algo similar se realiza para la integración cerrada sobre la superficie (\oint), utilizada un poco más abajo; esta integral es la abreviación de una doble integral (\iint).

decrecimiento por unidad de tiempo de la masa del fluido dentro del volumen de control puede ser escrita como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\mathcal{V}. \quad (\text{B.1})$$

A su vez, la masa de fluido moviéndose con velocidad \mathbf{U} por unidad de tiempo através de un elemento de área se puede expresar como el producto $\rho\mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}$, donde el vector $d\mathbf{A}$ denota la normal al elemento con magnitud igual al área de la superficie del elemento. Considerando que la superficie del volumen de control \mathcal{V}_0 puede ser definida por un conjunto de elementos de área como $\oint d\mathbf{A}$, donde el símbolo \oint denota la integración sobre la superficie cerrada del \mathcal{V}_0 , se define por convención que $d\mathbf{A}$ apunta hacia afuera de \mathcal{V}_0 , por lo que $\rho\mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}$ es positivo si el fluido sale del volumen o negativo si entra al volumen. De esta manera, la masa total que sale del volumen \mathcal{V}_0 por unidad de tiempo es

$$\oint \rho\mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}, \quad (\text{B.2})$$

Ya que la suposición inicial es que la masa se conserva dentro de un volumen de control, se tiene que la cantidad de masa que disminuye en el tiempo en dicho volumen (B.1) es igual a la masa que sale por su superficie (B.2), por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\mathcal{V} = - \oint \rho\mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{B.3})$$

Luego, notando que la derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ puede ser introducida a la integral sin afectar la ecuación, y que por el teorema de la divergencia, $\oint \rho\mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) d\mathcal{V}$, la ecuación (B.3) se transforma en

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} &= \int \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) d\mathcal{V} \\ \int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) \right] d\mathcal{V} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ya que la ecuación debe cumplirse para cualquier volumen, también debe cumplirse que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

La ecuación (B.5) es la ecuación de continuidad.

La ecuación de Euler

Similarmente al caso anterior, la fuerza total \mathbf{F} actuando en el volumen \mathcal{V}_0 es igual a la

integral de la presión sobre la superficie del volumen, es decir,

$$\mathbf{F} = - \oint p d\mathbf{A},$$

la cual puede ser transformada por la fórmula de Green en una integral de volumen, tal que

$$\mathbf{F} = - \oint p d\mathbf{A} = - \int \nabla p d\mathcal{V},$$

de manera que ∇p es la fuerza actuante por unidad de volumen, mientras que el diferencial de la fuerza $d\mathbf{F}$ equivale a

$$d\mathbf{F} = -\nabla p d\mathcal{V} \quad (\text{B.6})$$

Por otro lado, es conveniente notar que $d\mathbf{F}$ puede reescribirse en términos de la velocidad \mathbf{U} del fluido como

$$d\mathbf{F} = dm \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (\text{B.7})$$

donde dm se refiere al diferencial de masa.

Igualando y combinando las ecuaciones (B.6) y (B.7) se tiene

$$\begin{aligned} -\nabla p d\mathcal{V} &= dm \frac{d\mathbf{U}}{dt} \\ -\nabla p &= \left(\frac{dm}{d\mathcal{V}} \right) \frac{d\mathbf{U}}{dt} \\ &= \rho \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ya que la densidad (ρ) de un elemento de fluido es, en efecto, $\frac{dm}{d\mathcal{V}}$. La ecuación (B.8) expresa la Segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{U}}$) para el movimiento de fluidos por unidad de volumen, y es conocida como la ecuación de Euler, siendo válida para fluidos “ideales”. Es decir, la ecuación (B.8) representa el movimiento de fluidos cuya conductividad térmica y viscosidad no son importantes, por lo que no hay pérdida de energía.

Finalmente, con el objetivo de tener una expresión de la ecuación de Euler (B.8) similar a la ecuación de continuidad (B.5), se hace la observación de la identidad de la derivada total, esto es, que la derivada $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ puede descomponerse en una suma de derivadas parciales de espacio y tiempo, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} d\mathbf{U} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt \\ &= (d\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt, \quad \text{donde } \boldsymbol{\xi} \equiv \text{vector de posición} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{U}}{dt} = (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \quad \text{ya que, a su vez } \frac{d\xi}{dt} = \mathbf{U}. \quad (\text{B.9})$$

Aplicando esta identidad a la ecuación de Euler (B.8) se tiene

$$-\nabla p = \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$$

o bien,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (\text{B.10})$$

como es comúnmente conocida la ecuación de Euler.

B.2 LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Una vez obtenida la ecuación de continuidad (B.5), el siguiente paso en la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes consiste en la derivación de las ecuaciones que involucran disipación de energía del fluido, a saber, la(s) ecuación(es) de momento y la ecuación de energía.

La ecuación de momento

Como es de esperarse, para obtener las ecuaciones de un fluido viscoso, es necesario añadir algunos términos a las ecuaciones de movimiento de un fluido ideal (continuidad (B.5) y Euler (B.10)), específicamente a la ecuación de Euler. En efecto, la viscosidad o fricción interna del fluido es introducida en la ecuación de Euler (B.10) por medio de un tensor de esfuerzo viscoso $\bar{\bar{\tau}}$, definido como

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix},$$

actuando tanto en dirección normal (componentes τ_{ii}) como en dirección de corte (componentes τ_{ij} , $i \neq j$). De este modo, la ecuación de momento queda definida como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}, \quad (\text{B.11})$$

o bien, expresando (B.11) componente por componente, la correspondiente al eje x está dada por

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right],$$

en la cual, ayudándose de la Figura B.2, se puede ver más claramente la justificación de introducir el esfuerzo viscoso mediante el término $\nabla \cdot \bar{\tau}$.

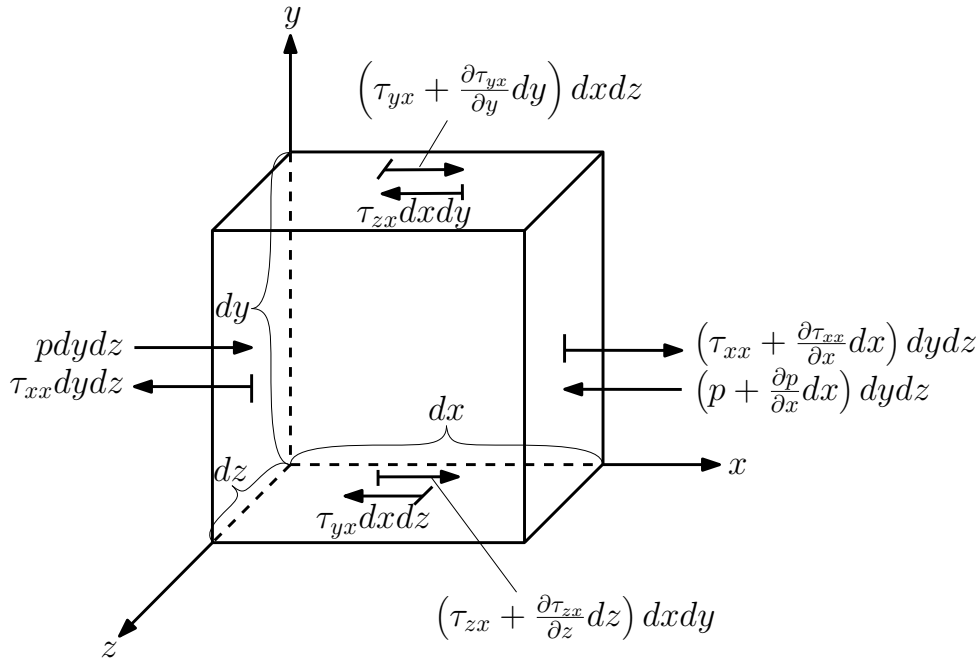


Figura B.2: Fuerzas superficiales actuando en dirección x .

Luego, la viscosidad está relacionada con la velocidad del fluido, pues causa una transferencia de momento irreversible de los puntos donde la velocidad es grande hacia los puntos donde la velocidad es pequeña. De hecho, en el siglo XVII Isaac Newton afirmó que el esfuerzo viscoso en un fluido es proporcional a la razón de cambio del esfuerzo, es decir, a los gradientes de velocidad del flujo. Tales fluidos son llamados “newtonianos”, y son el tipo de fluidos que involucra esta investigación. Posteriormente, Stokes (1985) obtuvo para tales fluidos las relaciones

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U}) + 2\mu \frac{\partial U_x}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U}) + 2\mu \frac{\partial U_y}{\partial y} \\
 \tau_{zz} &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U}) + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \\
 \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \\
 \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right),
 \end{aligned}$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica, y λ es el segundo coeficiente de viscosidad, el cual se relaciona con μ tal que $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$, con $\kappa \equiv$ viscosidad de expansión. Sin embargo, se ha demostrado que κ es despreciable en la mayoría de las ocasiones, de manera que $\lambda \approx -\frac{2}{3}\mu$ y entonces, las ecuaciones de momento quedan definidas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \right] \right] \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right] \right] \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right] \right], \end{aligned}$$

o bien, en su forma vectorial como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \mu \mathbf{S}), \quad (\text{B.12})$$

donde $S_{ij} = \partial_j U_i + \partial_i U_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{U}$, e \mathbf{I} es el tensor unitario.

La ecuación de energía

El principio de conservación de energía (o primera ley de la termodinámica) establece que la cantidad de cambio de energía de una partícula es igual a la cantidad de calor adicionado al elemento más la cantidad de trabajo realizado sobre la partícula. Es decir, la conservación de energía expresa que el flujo neto de salida de energía E de un volumen de control \mathcal{V}_0 , términos advectivos y temporal, debe ser igual al trabajo realizado, tanto por fuerzas superficiales como por volumétricas, las cuales han sido omitidas a lo largo de la presente derivación, p.ej., la fuerza gravitatoria. Las fuerzas superficiales consisten en las fuerzas viscosas ($\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U})$) y la presión ($-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{U})$) más el flujo neto de calor ($\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$) entrante al volumen de control \mathcal{V}_0 , de manera que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{U}) = \frac{1}{\rho} [-\nabla \cdot (p\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}) + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}], \quad (\text{B.13})$$

donde $\dot{\mathbf{q}} = k\nabla T$, con T es la temperatura del fluido y k la conductividad térmica.

Luego, aunque la ecuación (B.13) es la ecuación de energía total del fluido, conviene extraer la parte de la energía cinética (e_k) para así obtener la energía interna (e_i) o temperatura T . Entonces, ya que la energía total se define como $E = e_k + e_i$, con $e_k = \frac{1}{2} (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)$, la energía cinética se puede obtener al realizar (B.12)· \mathbf{U} y sumar los resultados de acuerdo a la definición de energía cinética, tal que

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} + \nabla \cdot (e_k \mathbf{U}) = \frac{1}{\rho} [-\mathbf{U} \cdot (\nabla p) + \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}})] \quad (\text{B.14})$$

Por último, de acuerdo a la definición de la energía total, restando (B.14) de (B.13), se tiene la ecuación de la energía interna

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \nabla \cdot (e_i \mathbf{U}) = \frac{1}{\rho} [-p \nabla \cdot \mathbf{U} + (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{U} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}] \quad (\text{B.15})$$

Las ecuaciones (B.5), (B.12) y (B.15) son las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales, junto con la ecuación ideal de estado ($p = (\gamma - 1)e_i$, $\gamma \equiv$ relación de calores específicos) definen el movimiento del fluido.

APÉNDICE C

EL NÚMERO DE REYNOLDS

Resumen: El número de Reynolds (Re) es una de las leyes de similitud de la mecánica de fluidos. Estas leyes relacionan bajo qué condiciones un flujo que circula alrededor de cuerpos geoméricamente (o mediante geometrías) similares, es similar geoméricamente, ver Figura C. En particular, el número de Reynolds es un parámetro adimensional que establece la similitud del fluido relacionando la fuerza inercial y la fuerza por viscosidad, lo cual es de gran utilidad para encontrar relaciones entre resultados experimentales obtenidos en un gran número de flujos. En efecto, el número de Reynolds nos permite validar la experimentación numérica presentada para los LSR. El presente Apéndice trata con la derivación del número de Reynolds al comparar la fuerza inercial o convectiva con la viscosidad del fluido.

“We are to admit that no more causes of natural things than such as are both true and sufficient to explain their appearances . . . To this purpose the philosophers say that Nature does nothing in vain, and more is in vain when less will serve; for Nature is pleased with simplicity, and affects not the pomp of superfluous causes.- Isaac Newton, 1687”

La Figura C muestra la descripción gráfica de una ley de similitud: en la imagen, un flujo circula alrededor dos esferas de diferente diámetro (cuerpos geoméricamente similares); una ley de similitud para este problema consiste entonces en establecer un relación entre las características del flujo que asegure que las líneas de corriente alrededor de ambas esferas sean geoméricamente iguales.

El número de Reynolds

$$Re = \frac{AU_\infty}{\nu}, \quad (C.1)$$

donde A y U_∞ son la distancia y la velocidad características del problema, respectivamente, ν es la viscosidad cinemática del fluido, es el más claro e importante ejemplo de una ley de similitud. La derivación de la ecuación (C.1) se muestra a continuación, basada principalmente en Prandtl & Tietjens [10].

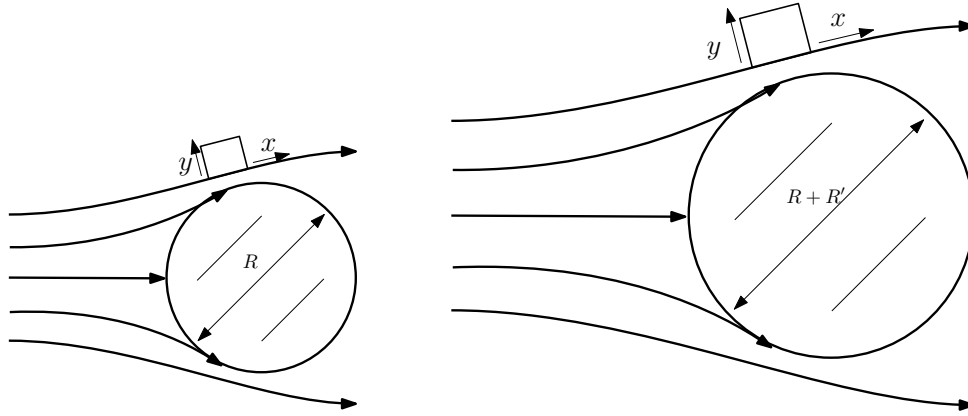


Figura C.1: Líneas de corriente alrededor de dos esferas de diferente diámetro, R y $R + R'$. Basada de Prandtl & Tietjens [10].

Consideremos un sistema 2D de flujo estacionario en el que las únicas fuerzas actuantes son la inercia (por advección: $\rho[\mathbf{U} \cdot \nabla] \mathbf{U}$) y la fricción (por viscosidad: $\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}$), asumiendo que todas las demás fuerzas pueden ser omitidas; es decir, esto incluye a la fuerza de gravedad y la suposición de que el fluido sea incompresible, ver ecuaciones de Navier-Stokes (B.11) en Apéndice B. Con estas suposiciones, para que el flujo en ambas imágenes de la Figura C sean similares, es necesario que la relación entre las fuerzas de inercia y de fricción en cualquier instante de tiempo sea la misma para puntos similarmente situados con respecto a las esferas de diámetro R y $R + R'$, tal que

$$\frac{\text{Inercia}_R}{\text{Fricción}_R} = \frac{\text{Inercia}_{R+R'}}{\text{Fricción}_{R+R'}}, \quad (\text{C.2})$$

por lo que es necesario conocer las expresiones correspondientes para ambas fuerzas. Para ellos, se enfocará el análisis a un elemento de volumen paralelo a una línea de corriente, como los mostrados en la Figura C, de manera que la dirección x del elemento y del fluido coinciden. El elemento de volumen se escoge lo suficientemente pequeño tal que la componente principal del flujo se concentra en la dirección x , es decir, es un flujo unidimensional.

El esfuerzo cortante (por viscosidad) se reduce entonces a $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, $\mu \equiv$ la viscosidad dinámica del fluido, por lo que la diferencia entre las fuerzas de corte actuando en el elemento (o bien, la fuerza viscosa por unidad de volumen) es igual a

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \quad (\text{C.3})$$

como se puede ver en la Figura C:

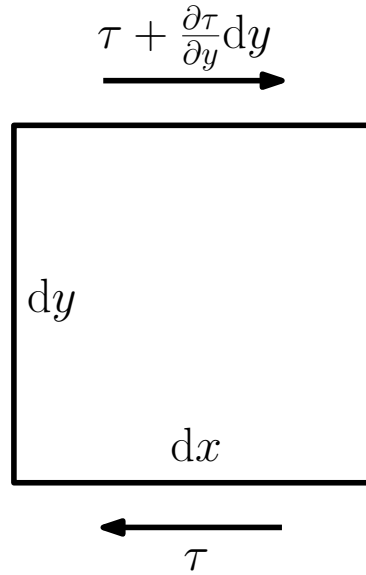


Figura C.2: Esfuerzo por viscosidad en un elemento de volumen. Basada de Prandtl & Tietjens [10].

Por otro lado, ya que el flujo es unidimensional en el elemento de volumen, la fuerza inercial (por advección) se reduce a la componente “x” de $(\rho [\mathbf{U} \cdot \nabla] \mathbf{U})$, es decir, Inercia = $\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}$, de tal manera que el criterio para la similaridad del fluido es que la relación

$$\frac{\text{Inercia}}{\text{Fricción}} = \frac{\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}} \tag{C.4}$$

sea igual para ambos lados de la ecuación (C.2).

Luego, es necesario expresar la relación (C.4) en términos de las cantidades características ($U_\infty \equiv$ velocidad, $A \equiv$ distancia, $\rho \equiv$ densidad, $\mu \equiv$ viscosidad dinámica) para describir el cambio de las fuerzas inercial y de fricción.

Primero, es claro que la velocidad U_x en cualquier punto del campo de flujo tiene el mismo orden de magnitud que la velocidad característica U_∞ , la velocidad del flujo sin perturbar por la esfera en el ejemplo de la Figura C. Por lo tanto, U_x es proporcional a U_∞ ($U_x \sim U_\infty$); y por la misma razón $dU_x \sim U_\infty$, pues la relación de orden de magnitud de la diferencia de velocidades dU_x en dos puntos correspondientes es $U_\infty/U_\infty = 1$.

A su vez, es evidente que las distancias ente dos puntos en flujos mecánicamente similares es proporcional a las dimensiones de los respectivos cuerpos por los cuales circula el flujo (R y $R + R'$ en la Figura C), es decir, $\frac{dx}{dx^*} = \frac{A}{A^*}$. Al realizar estas sustituciones para

ambos flujos se tiene que la fuerza inercial puede ser representada por

$$\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} \sim \rho U_\infty \frac{U_\infty}{A} = \rho \frac{U_\infty^2}{A}, \quad (\text{C.5})$$

y por las mismas razones

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \sim \frac{U_\infty}{A^2}. \quad (\text{C.6})$$

Por consiguiente, la relación de similaridad (C.4) se transforma en

$$\frac{\text{Inercia}}{\text{Fricción}} = \frac{\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}} = \frac{\rho \frac{U_\infty^2}{A}}{\mu \frac{U_\infty}{A^2}} = \frac{\rho}{\mu} U_\infty A. \quad (\text{C.7})$$

Por último, el factor $\frac{\mu}{\rho}$ puede ser reescrito simplemente como $\nu \equiv$ viscosidad cinemática del fluido. Así, de (C.2) se concluye que dos flujos diferentes alrededor de cuerpos geoméricamente similares, son similares si se cumple

$$\frac{U_\infty A}{\nu} = \frac{\rho}{\mu} U_\infty A = \frac{\text{Inercia}_A}{\text{Fricción}_A} = \frac{\text{Inercia}_{A^*}}{\text{Fricción}_{A^*}} = \frac{\rho^*}{\mu^*} U_\infty^* A^* = \frac{U_\infty^* A^*}{\nu^*}.$$

A la cantidad

$$\text{Re} = \frac{U_\infty A}{\nu} \quad (\text{C.8})$$

se le conoce como el número de Reynolds (Re), el cual ha sido y sigue siendo la herramienta más utilizada para caracterizar relaciones entre flujos con distintas características.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Escalera Santos GJ, Aguirre-López MA, Díaz-Hernández O, Hueyotl-Zahuantitla F, Morales-Castillo J, Almaguer F-J. On the aerodynamic forces on a baseball, with applications. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* (2019) <https://doi.org/10.3389/fams.2018.00066>
- [2] Aguirre-López MA, Díaz-Hernández O., Hueyotl-Zahuantitla F, Morales-Castillo J, Almaguer F-J, Escalera Santos GJ. A cardioid-parametric model for the Magnus effect in baseballs. *Advances in Computational Mathematics* (2019) <https://doi.org/10.1007/s10444-019-09694-w>
- [3] Aguirre-López MA, Hueyotl-Zahuantitla F, Morales-Castillo J, Escalera Santos GJ, Almaguer F-J. Simulating the flow around a baseball: Study of a 2D-cylinder with a single bump. *Computers & Mathematics with Applications* (2019) <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.05.001>
- [4] Adair RK. *The Physics of Baseball*. USA: Harper-Collins Publishers (2002).
- [5] Bahill AT. The Ball in Flight Model. In: *The Science of Baseball: Batting, Bats, Ball Collisions, and the Flight of the Ball*. Springer (2019) 157-207 https://doi.org/10.1007/978-3-030-03032-2_7
- [6] Bahill AT, LaRitz T. Why can't batters keep their eyes on the ball?. *American Scientist* (1984), 72(3) 249-253.
- [7] Cross R. *Physics of Baseball & Softball*. Springer (2011)
- [8] Bahill AT, Baldwin DG. Describing baseball pitch movement with right-hand rules. *Computers in Biology and Medicine* (2007) <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2006.06.007>
- [9] Drela M. *Flight Vehicle Aerodynamics*. USA: MIT Press (2014).
- [10] Prandtl L, Tietjens OG. *Applied hydro-and aeromechanics*. USA: Dover publications (2012).

-
- [11] Anderson JD. *Computational fluid dynamics: the basics with applications*. USA: McGraw-Hill (1995)
- [12] Ferziger JH, Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer (2002) <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
- [13] Sitio web: *The spectrum of Statcast: Spin vs. velocity* <https://www.mlb.com/news/statcast-spin-rate-compared-to-velocity/c-160896926> (accedido en 17/08/2019)
- [14] Borg JP, Morrisey MP. Aerodynamics of the knuckleball pitch: Experimental measurements on slowly rotating baseballs. *American Journal of Physics* (2014) <https://doi.org/10.1119/1.4885341>
- [15] Robinson G, Robinson I. The Motion of an Arbitrarily Rotating Spherical Projectile and its Application to Ball Games. *Physica Scripta* (2014) <https://doi.org/10.1088/0031-8949/88/01/018101>
- [16] Nathan AM. Analysis of Knuckleball Trajectories. *Procedia Engineering* (2012) <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.04.021>
- [17] Davies JM. The aerodynamics of golf balls. *Journal of Applied Physics* (1949) <https://doi.org/10.1063/1.1698540>
- [18] Daish CB. *The Physics of Ball Games*. UK: The English Universities Press (1972).
- [19] Crabill J, Witherden F, Jameson A. High-order computational fluid dynamics simulations of a spinning golf ball. *Sports Engineering* (2019) <https://doi.org/10.1007/s12283-019-0300-y>
- [20] Li J, Tsubokura M, Tsunoda M. Numerical investigation of the flow past a rotating golf ball and its comparison with a rotating smooth sphere. *Flow Turbulence Combust* (2017) <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9859-1>
- [21] Goodwill SR, Chin SB, Haake SJ. Aerodynamics of Spinning and Non-Spinning Tennis Balls. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* (2004) <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2004.05.004>
- [22] Kray T, Franke J, Frank W. Magnus effect on a rotating soccerball at high Reynolds numbers. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* (2014) <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2013.10.010>

- [23] Passmore MA, Tuplin S, Stawski A. The real-time measurement of football aerodynamic loads under spinning conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P: Journal of Sports Engineering and Technology* (2017), 231(4) 262-274.
- [24] Sayers AT, Hill A. Aerodynamics of a Cricket Ball. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* (1999) [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(97\)00299-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(97)00299-7)
- [25] Briggs LJ. Effect of spin and speed on the lateral deflection (curve) of a baseball; and the Magnus effect for smooth spheres. *American Journal of Physics* (1959) <https://doi.org/10.1119/1.1934921>
- [26] Nathan, A.M. The effect of spin on the flight of a baseball. *American Journal of Physics* (2008) <https://doi.org/10.1119/1.2805242>
- [27] Nathan AM, Hopkins J, Chong L, Kaczmarek H. The Effect of Spin on the Flight of a Baseball. In: E.F. Moritz, and S. Haake (Eds.), *The Engineering of Sport 6* (2006) https://doi.org/10.1007/978-0-387-46050-5_5. Springer
- [28] Robinson G, Robinson I. Reply to Comment on 'The motion of an arbitrarily rotating spherical projectile and its application to ball games'. *Physica Scripta* (2014) <https://doi.org/10.1088/0031-8949/89/6/067002>
- [29] Clark JM, Greer ML, Semon MD. Modeling pitch trajectories in fastpitch softball. *Sports Engineering* (2015) <https://doi.org/10.1007/s12283-015-0176-4>
- [30] Ward-Alaways, L. *Aerodynamics of the Curve-Ball: An Investigation of the Effects of Angular Velocity on Baseball Trajectories*. No publicado. Tesis doctoral, USA: University of California (1998)
- [31] Syamsuddin MR, Kwon YM. Simulation of Baseball Pitching and Hitting on Virtual World. *Physica Scripta* (2011) <https://doi.org/10.1109/CISIS.2011.111>
- [32] Nguyen S, Corey M, Chan W, Greenhalgh ES, Graham JMR. Experimental determination of the aerodynamic coefficients of spinning bodies. *The Aeronautical Journal* (2019) <https://doi.org/10.1017/aer.2019.15>
- [33] Robinson G, Robinson I. Model trajectories for a spinning tennis ball: I. The service stroke. *Physica Scripta* (2018) <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aae733>
- [34] Robinson G, Robinson I. Model trajectories for a spinning tennis ball: II. The service stroke in the presence of a wind. *Physica Scripta* (2018) <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aae744>

- [35] Aguirre-López MA, Morales-Castillo J, Díaz-Hernández O, Escalera Santos GJ, Almaguer F-J. Trajectories reconstruction of spinning baseball pitches by three-point-based algorithm. *Applied Mathematics and Computation* (2018) <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.016>
- [36] Kistemaker DA, Faber H, Beek PJ. Catching fly balls: A simulation study of the Chapman strategy. *Human Movement Science* (2009) <https://doi.org/10.1016/j.humov.2008.11.001>
- [37] Shum H, Komura T. A Spatiotemporal Approach to Extract the 3D Trajectory of the Baseball from a Single View Video Sequence. *International Conference on Multimedia and Expo* (2004) <https://doi.org/10.1109/ICME.2004.1394551>
- [38] Nathan AM. Analysis of PITCHfx Pitched Baseball Trajectories (2008). No publicado: documento disponible en https://www.researchgate.net/publication/228563555_Analysis_of_PITCHfx_Pitched_Baseball_Trajectories (accedido en 05/07/2019)
- [39] Sievert C. Taming PITCHfx Data with XML2R and pitchRx. *The R Journal* (2014) <https://doi.org/10.32614/RJ-2014-001>
- [40] Kagan D, Nathan AM. Statcast and the Baseball Trajectory Calculator. *Physics Teacher* (2017) <https://doi.org/10.1119/1.4976652>
- [41] Pane MA. Trouble with the curve: identifying clusters of MLB pitchers using improved pitch classification techniques. No publicado: tesis doctoral, Carnegie Mellon University (2013)
- [42] Nagami T, Higuchi T, Kanosue K. How baseball spin influences the performance of a pitcher. *JThe Journal of Physical Fitness and Sports Medicine* (2013) <https://doi.org/10.7600/jpfsm.2.63>
- [43] Nagami T, Higuchi T, Nakata H, Yanai, T, Kanosue K. Relation between lift force and ball spin for different baseball pitches. *Journal of Applied Biomechanics* (2016) <https://doi.org/10.1123/jab.2015-0068>
- [44] Nagami T, Kimura Y, Kanosue K, Yanai T. Kinematic characteristics of various types of baseball pitches. *Japan Journal of Physical Education, Health and Sport Sciences* (2016) <https://doi.org/10.5432/jjpehss.16021>
- [45] Miyata S, Saito H, Takahashi K, Mikami D, Isogawa M, Kimata H. Ball 3D Trajectory Reconstruction without Preliminary Temporal and Geometrical Camera Calibra-

- tion. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops* (2017) <https://doi.org/10.1109/CVPRW.2017.26>
- [46] Sitio web de Alan Nathan. <http://baseball.physics.illinois.edu/>
- [47] Takahashi M, Fujii M, Yagi N. Automatic Pitch Type Recognition from Baseball Broadcast Videos. *International Symposium on Multimedia* (2008) <https://doi.org/10.1109/ISM.2008.47>
- [48] Chu WT, Wang CW, Wu JL. Extraction of Baseball Trajectory and Physics-Based Validation for Single-View Baseball Video Sequences. *International Congress on Multimedia and Expo* (2006) <https://doi.org/10.1109/ICME.2006.262905>
- [49] Chang P, Han M, Gong Y. Extract Highlights from Baseball Game Video with Hidden Markov Models. *International Congress of Imaging Processing* (2002) <https://doi.org/10.1109/ICIP.2002.1038097>
- [50] Hung MH, Hsieh CH. Event Detection of Broadcast Baseball Videos. *Transactions on Circuits and Systems for Video Technology* (2008) 18:1713-1726.
- [51] Guézic A. Tracking Pitches for Broadcast Television. *Computer* (2002) <https://doi.org/10.1109/2.989928>
- [52] Adair RK. The Physics of baseball. *Physics Today* (1995) 26-31
- [53] Ivanov Ivanov A. Theoretical matrix study of rigid body absolute motion. *The International Journal of Engineering and Science* (2018) <https://doi.org/10.9790/1813-0706020108>
- [54] Gardner MPh, Jia Y-B. Estimating the linear and angular velocities of an object in free flight. No publicado: en *Proceedings de SemanticScholar* (2018)
- [55] Cross R, Lindsey C. Measurements of drag and lift on smooth balls in flight. *European Journal of Physics* (2017) <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa6e44>
- [56] Landau LD, Lifshitz EM. *Fluid Mechanics*. USA: Elsevier (1987).
- [57] Frohlich C. Aerodynamic drag crisis and its possible effect on the flight of baseballs. *American Journal of Physics* (1984) <https://doi.org/10.1119/1.13883>
- [58] Cross R. Effects of turbulence on the drag force on a golf ball. *European Journal of Physics* (2016) <https://doi.org/10.1088/0143-0807/37/5/054001>

- [59] Naito K, Hong S, Koido M, Nakayama M, Sakamoto K, Asai T. Effect of seam characteristics on critical Reynolds number in footballs. *Mechanical Engineering Journal* (2018) <https://doi.org/10.1299/mej.17-00369>
- [60] Alam F, Ho H, Smith L, Subic A, Chowdhury H, Kumar A. A study of baseball and softball aerodynamics. *Procedia Engineering* (2012) <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.04.016>
- [61] Kensrud JR, Smith LV. In situ drag measurements of sports balls. *Procedia Engineering* (2010) <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2010.04.012>
- [62] Cross R. Vertical impact of a sphere falling into water. *The Physics Teacher* (2016) <https://doi.org/10.1119/1.4942136>
- [63] Goff JE. A review of recent research into aerodynamics of sport projectiles. *Sports Engineering* (2013) <https://doi.org/10.1007/s12283-013-0117-z>
- [64] Higuchi H, Kiura T. Aerodynamics of knuckle ball: Flow-structure interaction problem on a pitched baseball without spin. *Journal of fluids and structures* (2012) <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.01.004>
- [65] Himeno R. Computational study of influences of a seam line of a ball for baseball on flows. *Journal of Visualization* (2001), 4(2).
- [66] Mehta RD. Aerodynamics of sports balls. *Annual Reviews on Fluid Mechanics* (1985) <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.17.010185.001055>
- [67] Texier BD, Cohen C, Quéré D, Clanet C. Physics of knuckleballs. *New Journal of Physics* (2016) <https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/7/073027>
- [68] Aguirre-López MA, Díaz-Hernández O, Almaguer F-J, Morales-Castillo J, Escalera Santos GJ. A phenomenological model for the aerodynamics of the knuckleball. *Applied Mathematics and Computation* (2017) <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.05.001>
- [69] Kensrud JR, Smith LV, Nathan A, Nevins D. Relating baseball seam height to carry distance. *Procedia Engineering* (2015), 112:406-411.
- [70] Watts RG, Sawyer E. Aerodynamics of a knuckleball. *American Journal of Physics* (1975) <https://doi.org/10.1119/1.10020>
- [71] Ferziger JH, Perić M. *Computational Methods for fluid dynamics*. Germany: Springer (1996).

- [72] Hong S, Chung C, Nakayama M, Asai T. *Unsteady Aerodynamic Force on a Knuckleball in Soccer*. *Procedia Engineering* (2010) <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2010.04.015>
- [73] Murakami M, Seo K, Kondoh M, Iwai Y. Wind tunnel measurement and flow visualisation of soccer ball knuckle effect. *Sports Engineering* (2012) <https://doi.org/10.1007/s12283-012-0085-8>
- [74] Jalilian P, Kreun PK, Makhmalbaf MM, Liou WW. Computational aerodynamics of baseball, soccer ball and volleyball. *American Journal of Sports Science* (2014) <https://doi.org/10.11648/j.ajss.20140205.12>
- [75] Barber S, Chin SB, Carré MJ. Sports ball aerodynamics: A numerical study of the erratic motion of soccer balls. *Computers & Fluids* (2009) <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.11.001>
- [76] Norberg C. Flow around a circular cylinder: aspects of fluctuating lift. *Journal of Fluids and Structures* (2001) <https://doi.org/10.1006/j#s.2000.0367> 459-469.
- [77] Sidebottom W, Ooi A, Jones D. Large eddy simulation of flow past a circular cylinder at Reynolds number 3900. *Proceedings of the 18th Australasian Fluid Mechanics Conference* (2012) <https://people.eng.unimelb.edu.au/imarusic/proceedings/18%20AFMC%20TOC.htm> (accedido 13/05/2018).
- [78] Pastò S. Vortex-induced vibrations of a circular cylinder in laminar and turbulent flows. *Journal of Fluids and Structures* (2008) <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2008.01.001>
- [79] Johansson J, Nielsen MP, Nielsen LO. Uniform flow around a circular cylinder in the subcritical range - using the self-induced angular moment method turbulence model. *Proceedings of the 8th Asia-Pacific Conference on Wind Engineering* (2013) https://doi.org/10.3850/978-981-07-8012-8_171
- [80] Alonzo García A, Gutiérrez Torres C, Jiménez Bernal JA, López Aguado Montes JL, Barbosa Saldaña JG. Simulación de grandes remolinos del flujo sobre un cilindro ($Re=1.4E+5$). *Memorias del XVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM* (2011) 1310-1316. ISBN: 978-607-95309-5-2
- [81] Tremblay F. Tesis de doctorado: Technischen Universität München. *Direct and large-eddy simulation of flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds numbers* (2001) <https://mediatum.ub.tum.de/doc/601868/601868.pdf> (accedido 14/05/2018).

- [82] Naito H, Fukagata K. Numerical simulation of flow around a circular cylinder having porous surface. *Physic of Fluids* (2012) <https://doi.org/10.1063/1.4767534>
- [83] Breuer M. A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow* (2000) [https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(00\)00056-4](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(00)00056-4)
- [84] Norberg C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures* (2003) [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(02\)00099-3](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(02)00099-3)
- [85] Lloyd TP, James M. Large eddy simulations of a circular cylinder at Reynolds numbers surrounding the drag crisis. *Applied Ocean Research* (2016) <https://doi.org/10.1016/j.apor.2015.11.009>
- [86] Taylor JR. *Classical Mechanics*. University Science Books (2005)
- [87] Robinson G, Robinson I. Are inertial forces ever of significance in cricket, golf and other sports? *Physica Scripta* (2017) <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aa634e>
- [88] R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>, 2018 (accedido en 30/07/2018)
- [89] Clarke DA. Comunicación personal: ZEUS-3D User Manual (version 3.6). <http://www.ica.smu.ca/zeus3d/version3.6/> (accedido el 05/07/2017).
- [90] Coeficiente de dilatación adiabática. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_dilataci%C3%B3n_adiab%C3%A1tica (accedido el 18/11/2019)
- [91] Clarke DA. Comunicación personal: ZEUS-3D 2-D Gallery Num 1: 2-D Advection (version 3.6). http://ap.smu.ca/~dclarke/zeus3d/version3.6/gallery/2dprob/problem.01/advect_2D.pdf (accedido el 27/02/2019).
- [92] Stone JM, Norman M. A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions: I The hydrodynamic algorithms and tests. *The Astrophysical Journal Supplement Series* (1992) <https://doi.org/10.1086/191680>
- [93] Engineering ToolBox, (2003). U.S. Standard Atmosphere. Disponible en: https://www.engineeringtoolbox.com/standard-atmosphere-d_604.html (accedido el 10/10/2019)

-
- [94] Cantwell B, Coles D. An experimental study on entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* (1983) <https://doi.org/10.1017/S0022112083002189>
- [95] Kagan D, Nathan A. Simplified models for the drag coefficient of a pitched baseball. *The Physics Teacher* (2014) <https://doi.org/10.1119/1.4872406>
- [96] Official Baseball Rules (2015). http://mlb.mlb.com/mlb/downloads/y2015/official_baseball_rules.pdf
- [97] Softbol en las escuelas. Documento de la Federación Internacional de Softbol http://www.fcbs.cat/docs/SOFTBOL_EN_LAS_ESCUELAS.pdf
- [98] Reglamento del campeonato de beisbol infantil de las Américas 2019 <http://beisbolinfantil.elimparcial.com/reglamento/>
- [99] Xamán J, Gijón-Rivera M. *Dinámica de fluidos computacional para ingenieros*. Palibrio (2015)

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Vista de perfil de un lanzamiento ilustrando el sistema de coordenadas, la distancia entre el plato del pícher y el plato de <i>home</i> , la distancia entre el punto donde el pícher suelta la bola y el plato de <i>home</i> , y los tiempos críticos en la trayectoria de la bola para el bateador en un lanzamiento tipo <i>fastball</i> : 100 milisegundos (ms) para detectar la bola, 75 ms para una observación detenida y procesar la información, 50 ms para pensar y tomar una decisión, y 25 ms para comenzar a hacer el <i>swing</i> del bat. Basada en Adair [4], Bahill [5].	2
1.2. Esquematación del flujo alrededor de la bola para lanzamientos con y sin rotación. Las fuerzas de gravedad \mathbf{F}_g y de fricción \mathbf{F}_d están presentes en ambos tipos de lanzamiento. Izquierda: LCR. El flujo pasa de ser laminar a turbulento con menos variación en el tiempo que en los LSR, causado por la poca pérdida de energía en el momento angular. La fuerza Magnus \mathbf{F}_M tiene dirección $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. Derecha: LSR. La separación del flujo está fuertemente influenciada por la posición de las costuras, de manera que una pequeña variación en la posición puede causar una alternancia en la dirección y sentido de la fuerza de sustentación \mathbf{F}_C producida.	4
1.3. Algunos tipos de LCR (y una <i>gyroball</i>) indicando el eje de giro, dirección de la fuerza Magnus, rangos típicos de velocidad y velocidad angular. Los dibujos expresan la imagen que ve el bateador de una bola lanzada por un pícher diestro. Basada en Adair [4] y Cross [7], apoyada por rangos de velocidad y velocidad angular tomados de la página oficial de la <i>Major League Baseball</i> [13].	5
1.4. Tipos de LSR. El ángulo de ataque ϕ está definido en el plano $y - z$. La dirección del viento en el dibujo es contraria a la considerada en Borg & Morrissey [14].	6
1.5. Ventanas de lanzamiento.	7

2.1. Sistema de coordenadas del problema: una bola moviéndose con velocidad \mathbf{v} y cuya dirección principal de movimiento es paralela al eje y . El eje de rotación $\hat{\omega}$ se encuentra en el plano $x-y$, y el ángulo de rotación ψ se define como se ilustra en la imagen, produciendo una *fastball* con giro hacia abajo en $\psi = 0^\circ$, con giro hacia arriba en $\psi = 180^\circ$, y bolas tipo *gyroball* en $\psi = 90^\circ$ y $\psi = 270^\circ$ 21

2.2. Vista del *catcher* de las desviaciones obtenidas por las trayectorias numéricas. El eje radial corresponde a la desviación radial R_f en metros, mientras que el eje polar corresponde a la desviación angular en grados. La escala de colores representa los valores de la velocidad angular ω . El centro de la gráfica coincide con la posición de la trayectoria balística (sin fuerza Magnus). 22

2.3. Histograma de valores absolutos de los términos referentes a la fuerza Magnus (izquierda) y de fricción (derecha) en la componente z del sistema (2.5), para un conjunto de 10,000 trayectorias. En el histograma de la izquierda, la mayor frecuencia de valores entre la unidad y las diez unidades indican que el término Magnus es de orden 10^0 m/s. En el histograma de la derecha, la frecuencia de valores inferiores a 0.001 m/s indican que el término de la diferencia de fricción es a lo más de orden 10^{-4} . Los valores corresponden al valor que toma el término al final de la trayectoria, en el plato de *home*, al ser calculados con el procedimiento numérico de la Sección 2.1.2. 24

2.4. Esquema del arreglo computacional. Las imagenes fueron hechas a partir del mapa de densidad en un instante de tiempo. La escala de grises se refiere a la densidad relativa en términos de la densidad característica. Arriba: Dimensiones del arreglo computacional, características generales del malla-do y las fronteras. Abajo: Acercamiento de la zona donde se encuentra la costura. 31

2.5. Características del flujo de entrada. Izquierda: $\langle u_y \rangle = \langle U_y \rangle / U_\infty$ en diferentes perfiles en dirección y (ejes y y z en términos de D). La columna de transición es aquella localizada en $y \approx -3.10$ unidades. Los parámetros característicos fueron obtenidos promediando las variables correspondientes en $y \approx -3.0, -2.9, -2.8$ unidades. Derecha: La serie de tiempo de la velocidad en la componente principal del flujo promediada espacialmente (\bar{U}_y), considerando los tres perfiles más cercanos en dirección y a la zona de transición. La serie oscila alrededor de U_∞ con variaciones de ± 0.005 unidades, después de aproximadamente $\frac{1}{4}$ del tiempo total. Esto está marcado con líneas punteadas en las figuras. 32

2.6. Esquema de la bola con una costura. 32

3.1. Izquierda: Diagrama de dispersión en coordenadas polares de la desviación vertical Z_f (en metros) vs el ángulo de rotación ψ (en grados). La barra de colores indica el valor de ω (en rad/s). Las curvas punteada y continua dibujan los ajustes de $\langle Z_f \rangle$ con $\omega = 100$ rad/s y $\omega = 310$ rad/s, respectivamente, los cuales son obtenidos mediante el modelo (3.3) con $\beta = 2.53$ m. El origen del eje radial fue movido al punto -0.5 m para mostrar claramente la forma y característica de la distribución de los datos Z_f , ya que oscilan alrededor del cero. Derecha: Visualización cartesiana. . . 34

3.2. Estimación discreta y continua de la amplitud de las desviaciones α (en metros) en función de ω (en rad/s). Los puntos discretos (primer ajuste) fueron obtenidos ajustando los datos Z_f por subconjuntos tomados en intervalos de ω cada 5 rad/s, utilizando la técnica de mínimos cuadrados. La curva continua (segundo ajuste) fue obtenida ajustando la Ecuación (3.3) a los puntos anteriores, con $\beta = 2.53$ m y $C_M = C_M(\omega \in [100 - 310]$ rad/s). 36

3.3. Izquierda: Diagrama de dispersión polar de R_f (en metros) vs ψ (en grados). La barra de colores indica el valor de ω (en rad/s). Las curvas punteada y continua dibujan los datos de $\langle Z_f \rangle$ para $\omega = 100$ rad/s y $\omega = 310$ rad/s, obtenidos mediante el modelo (3.3) con $\beta = 2.53$ m. Derecha: Visualización cartesiana. 38

3.4. Contraste entre los datos Z_f (en metros) obtenidos a partir de trayectorias numéricas con valores iniciales de v_x simétricamente distribuidos y con valores asimétricamente distribuidos (o sesgados). Las curvas punteada y continua son las cotas inferior y superior, respectivamente, del caso simétrico (las mismas que las mostradas en la Figura 3.1), mientras que los puntos de color son el conjunto de desviaciones Z_f del caso asimétrico. 39

3.5. Comparación de la desviación Z_f producida a diferentes distancias picher-home: 10 m (arriba-izquierda), 13 m (arriba-derecha), 16 m (abajo-izquierda), 20 m (abajo-derecha). Notar que en el último caso algunas desviaciones son mayores a 0.5 m por lo que algunos puntos quedan fuera del gráfico. Las curvas punteada y continua son las cotas inferior y superior, respectivamente, a la distancia del modelo de referencia de esta tesis, 17.05 m. 40

3.6. Coeficiente de presión promedio C_p calculado alrededor de un corte de la bola con superficie suave a $Re=1 \times 10^5$ para diferentes resoluciones en el mallado: como comparación también se muestran los resultados reportados por Johansson et al. [79] y Naito & Fukagata [82] al mismo Re 43

3.7. Velocidad $\langle u_y \rangle$ en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo a lo largo de la línea de simetría $z = 0$ en comparación con los valores reportados por Tremblay [81], Breuer [83], Cantwell & Coles [94] a $Re=1.4 \times 10^5$ 43

3.8. Velocidad en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_y \rangle$ alrededor de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ en comparación con los valores reportados por Tremblay [81], Breuer [83], Cantwell & Coles [94]. 44

3.9. Velocidad en dirección normal a la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_z \rangle$ a lo largo de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ en comparación con los valores reportados por Tremblay [81], Breuer [83], Cantwell & Coles [94], sólo para el perfil $y = 1$ 45

3.10. Coeficiente de presión promedio C_p calculado para diferentes ángulos de ataque ϕ . Se reescribe el coeficiente como C_p^ϕ para indicar la variación con respecto a ϕ . Izquierda: Alrededor de la bola. Derecha: Acercamiento en $\theta \in [0^\circ - 100^\circ]$ de la diferencia de C_p^ϕ para cada costura en ϕ con respecto al caso *suave* C_p^{suave} , i.e., los datos están trasladados tal que el valor del cero indica la curva de C_p^{suave} para todos los ángulos θ , graficando $C_p^\phi - C_p^{suave}$ 46

3.11. Efecto local de la costura. Los puntos y los cuadros indican el comienzo y el fin de las perturbaciones en respuesta del ángulo de ataque, respectivamente. 46

3.12. Izquierda: Coeficiente de presión promedio C_d para diferentes ángulos de ataque ϕ . Derecha: Coeficiente de sustentación promedio C_C para diferentes ángulos de ataque ϕ . Las líneas punteadas horizontales marcan el valor cero, mientras que la línea horizontal sólida marca el valor calculado para el caso *suave*. Los datos experimentales de Borg & Morrissey [14] para diferentes orientaciones de la bola son graficados en dirección opuesta (de $\theta = 90^\circ$ a $\theta = 0^\circ$). 48

3.13. Velocidad en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_y \rangle$ a lo largo de la línea de simetría $z = 0$ para diferentes ángulos de ataque ϕ 48

3.14. Velocidad en dirección de la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_y \rangle$ a lo largo de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ para diferentes ángulos de ataque ϕ	49
3.15. Velocidad en dirección normal a la corriente principal promediada en el tiempo $\langle u_z \rangle$ a lo largo de las líneas (izquierda) $y = 1$ y (derecha) $y = 3$ para diferentes ángulos de ataque ϕ	49
A.1. Esquematación de las líneas de corriente.	56
A.2. Representación de los contornos S_{cuerpo} y S_{exterior} , así como de la fuerza aerodinámica \mathbf{F} , su descomposición en sustentación S y fricción D , y de la velocidad en el campo lejano \mathbf{U}_e para una esfera moviéndose hacia la izquierda, o bien una esfera estática con flujo hacia la derecha con velocidad \mathbf{U}_∞ . También se visualiza la circulación Γ , la fuente Λ y defecto por la estela ΔU_{wake} . Basada en Drela [9].	59
B.1. Visualización amplificada del flujo a través de un volumen de control con propiedades ρ, p, \mathbf{U} . El volumen de control está delimitado por su correspondiente superficie de control, y se encuentra dentro del sistema de estudio.	65
B.2. Fuerzas superficiales actuando en dirección x	69
C.1. Líneas de corriente alrededor de dos esferas de diferente diámetro, R y $R + R'$. Basada de Prandtl & Tietjens [10].	73
C.2. Esfuerzo por viscosidad en un elemento de volumen. Basada de Prandtl & Tietjens [10].	74

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Valores mínimos y máximos de las condiciones iniciales utilizadas.	20
---	----