

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS DE SISTEMAS FRACCIONARIOS  
MEDIANTE TOPOLOGÍA DE BAJA DIMENSIÓN

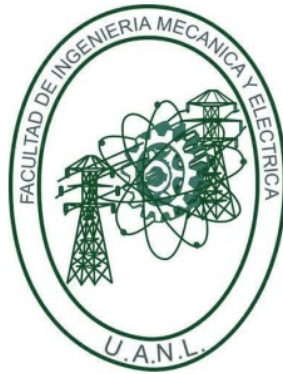
POR  
DANIEL ENRIQUE RIVAS CISNEROS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA. N. L.

ENERO 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS DE SISTEMAS FRACCIONARIOS  
MEDIANTE TOPOLOGÍA DE BAJA DIMENSIÓN

POR  
DANIEL ENRIQUE RIVAS CISNEROS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA. N. L.

ENERO 2020


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

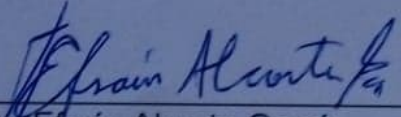
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

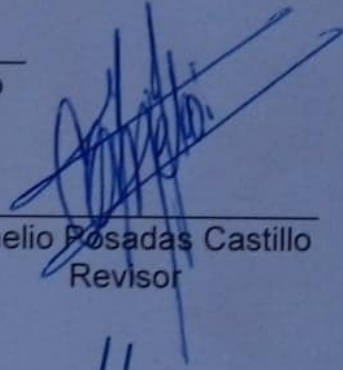
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

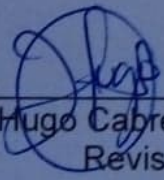
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "ANALISIS DE SISTEMAS FRACCIONARIOS MEDIANTE TOPOLOGIA DE BAJA DIMENSION" realizada por el alumno(a) DANIEL ENRIQUE RIVAS CISNEROS, con número de matrícula 1247586, sea aceptada para su defensa como opción al grado de DOCTORADO EN INGENIERIA ELECTRICA.


El Comité de Tesis

  
\_\_\_\_\_  
Dr. David Alejandro Díaz Romero  
Director

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Efraín Alcorta García  
Revisor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Cornelio Posadas Castillo  
Revisor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Hugo Cabrera Ibarra  
Revisor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Gerardo Romero Galván  
Revisor

Vo. Bo.

\_\_\_\_\_  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León,

diciembre 2019.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de Tesis recomendamos que la Tesis ANÁLISIS DE SISTEMAS FRACCIONARIOS MEDIANTE TOPOLOGÍA DE BAJA DIMENSIÓN realizada por DANIEL ENRIQUE RIVAS CISNEROS, con número de matrícula 1247586, sea aceptada para su defensa como opción al grado de DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

El comité de tesis

---

Dr. David Alejandro Díaz Romero  
Director

---

Dr. Efraín Alcorta García  
Revisor

---

Dr. Cornelio Posadas Castillo  
Revisor

---

Dr. Hugo Cabrera Ibarra  
Revisor

---

Dr. Gerardo Romero Galván  
Revisor

---

Vo. Bo  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
1.1. Motivación . . . . .	10
1.2. Objetivos . . . . .	10
1.3. Antecedentes . . . . .	11
1.4. Organización de la tesis . . . . .	12
<b>2. Topología de baja dimensión</b>	<b>13</b>
2.1. Reseña sobre topología general . . . . .	13
2.1.1. Conjunto . . . . .	14
2.1.2. Espacio métrico y espacio euclidiano . . . . .	15
2.1.3. Espacios topológicos . . . . .	16
2.1.4. Espacios Hausdorff . . . . .	17
2.1.5. Funciones y equivalencia topológica . . . . .	18
2.1.6. Embebimientos . . . . .	19
2.2. Variedades topológicas . . . . .	20
2.3. Superficies . . . . .	20
2.3.1. Suma conectada de superficies . . . . .	21
2.3.2. Equivalencia topológica entre superficies. . . . .	21
2.4. Teoría de nudos . . . . .	22
2.4.1. Nudos y equivalencia entre nudos . . . . .	23
2.4.2. Proyección de un nudo . . . . .	25
2.4.3. El número de cruce . . . . .	28
2.4.4. Movimientos de Reidemeister . . . . .	29
2.4.5. Invariantes polinomiales . . . . .	30
2.5. Conclusiones del capítulo . . . . .	34
<b>3. Sistemas dinámicos y caos</b>	<b>35</b>
3.1. Reseña sobre sistemas dinámicos . . . . .	35
3.2. Sistemas dinámicos no lineales . . . . .	37

3.2.1.	Puntos fijos de sistemas no lineales en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	39
3.3.	Reseña sobre caos . . . . .	40
3.3.1.	Atractores extraños . . . . .	40
3.4.	Conclusiones . . . . .	41
<b>4.</b>	<b>Sistemas de orden fraccionario</b>	<b>42</b>
4.1.	Conceptos básicos sobre cálculo fraccionario . . . . .	43
4.2.	Sistemas dinámicos de orden fraccionario . . . . .	44
4.2.1.	Análisis de puntos fijos de sistemas dinámicos de orden fraccionario. . . . .	45
4.2.2.	Método numérico para simulación de sistemas dinámicos de orden fraccionario . . . . .	46
4.3.	Sistema caótico en $\mathbb{R}^3$ de orden fraccionario . . . . .	46
4.4.	Procesamiento de señales de orden no entero . . . . .	47
4.4.1.	Filtrado de señales de orden entero . . . . .	50
4.4.2.	Filtros de orden fraccionario . . . . .	51
4.5.	Conclusiones del capítulo . . . . .	52
<b>5.</b>	<b>Topología de baja dimensión de sistemas dinámicos en <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>53</b>
5.1.	Superficie de atractores en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	53
5.1.1.	Algunos atractores caóticos y sus formas canónicas . . . . .	54
5.1.2.	Cambio de superficie topológica y retorno de Poincaré . . . . .	61
5.2.	Topología de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	65
5.2.1.	Nudos en sistemas dinámicos generados por ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	66
5.2.2.	Plantilla del nudo . . . . .	66
5.3.	Conclusiones . . . . .	69
<b>6.</b>	<b>Resultados</b>	<b>71</b>
6.1.	Cambio de la superficie topológica de atractores extraños al variar el orden del sistema . . . . .	71
6.1.1.	Atractor extraño de Li de orden fraccionario . . . . .	72
6.1.2.	Atractor extraño de Chen de orden fraccionario . . . . .	84
6.1.3.	Atractor extraño de orden fraccionario generado por un sistema autónomo cuadrático . . . . .	89
6.1.4.	Atractor extraño de proto-Lorenz de orden fraccionario . . . . .	99
6.2.	Análisis topológico de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ al cambio de orden del sistema . . . . .	106

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
<b>7. Conclusiones</b>	<b>109</b>
7.1. Trabajo a futuro. . . . .	110



# Índice de figuras

2.1. Ejemplo de superficies. <i>a)</i> Esfera, <i>b)</i> Toro . . . . .	21
2.2. Doble-toro. . . . .	22
2.3. Representación del nudo trébol <i>a)</i> Nudo trébol $\langle K \rangle$ , <i>b)</i> Nudo trébol poligonal con 6 vértices $\langle PK \rangle$ . . . . .	23
2.4. Deformación de un función $f$ en una función $g$ a través de una homotopía. . . . .	24
2.5. Nudos equivalentes los cuales pertenecen a un grupo de tipo de nudo. . . . .	25
2.6. Proyección del nudo trébol con aristas $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y vértices $V(G) = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	26
2.7. Nudo trébol poligonal <i>a)</i> $PK \in \mathfrak{R}^3$ , <i>b)</i> $PK \in \mathfrak{R}^2$ . . . . .	27
2.8. Representación de los cruces del nudo trébol . . . . .	28
2.9. Algunos nudos con sus números de cruces. . . . .	28
2.10. Movimientos de Reidemeister. . . . .	29
2.11. Notación de Alexander para el cálculo del polinomio de un nudo. . . . .	31
2.12. Diagrama del nudo trébol para el cálculo del invariante polinomial . . . . .	31
2.13. Relación de madeja. . . . .	33
3.1. Evolución temporal de $x_1$ de la ecuación (3.3) . . . . .	38
3.2. Dinámica cardiaca . . . . .	38
3.3. Atractor de Rössler con los parámetros $a = 0.2$ , $b = 0.2$ y $c = 5.7$ . <i>a)</i> atractor en $\mathfrak{R}^3$ . <i>b)</i> atractor sobre el plano x-y. . . . .	41
4.1. Región estable e inestable para sistemas dinámicos de orden fraccionario con $0 < \alpha \leq 1$ . . . . .	45

4.2.	Resultados de la simulación de la ecuación (4.16) con $\sigma = 10$ , $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$ a) Atractor de Lorenz sobre el plano $x - y$ . b) Dinámica del estado $x$ . c) Dinámica del estado $y$ . d) Dinámica del estado $z$ .	48
4.3.	Resultados de la simulación de la ecuación (4.17) con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.995, 0.995, 0.995)$ , y $\sigma = 10$ , $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$ a) Atractor de Lorenz de orden fraccionario sobre el plano $x - y$ . b) Dinámica del estado $x$ . c) Dinámica del estado $y$ . d) Dinámica del estado $z$ .	49
4.4.	Filtro activo pasa bajas de primer orden.	51
4.5.	a) Red para generar filtros de orden fraccionarios con orden $1/s^\alpha$ , donde $0 < \alpha < 1$ . b) Filtro activo de orden fraccionario con función de transferencia $1/s^\alpha$ , donde $0 < \alpha < 1$ .	52
5.1.	$A_1$ representa superficies con $g = 1$ . $\mathbb{E}$ representa superficies con $g = 3$ . $A_4$ representa superficies con $g = 7$ . $A_7$ representa superficies con $g = 13$ .	55
5.2.	$C_3$ representa a los atractores extraños con 3-enrollamientos, los cuales son de $g = 4$ . $C_4$ representa a los atractores extraños con 4-enrollamientos, los cuales son de $g = 5$ .	56
5.3.	Atractor de Rössler con los parámetros $a = 0.2$ , $b = 0.2$ y $c = 5.7$ . a) atractor en $R^3$ . b) atractor sobre el plano $x$ - $y$ .	57
5.4.	Atractor de Lorenz	58
5.5.	Atractor de Chen	59
5.6.	Atractor de Li con $a = 40$ , $c = 11/6$ , $d = 0,16$ , $e = 0,65$ , $k = 55$ , $f = 20$ a) Proyección sobre el plano $x - z$ . b) Proyección sobre el plano $x - y$ .	60
5.7.	Atractor multi- <i>scroll</i> de Chua	61
5.8.	Atractor de Lorenz con $g=3$	62
5.9.	Retorno de Poincaré para el atractor de Lorenz con $g=3$	63
5.10.	Atractor de Lorenz con $g=1$	63
5.11.	Retorno de Poincaré del atractor de Lorenz con $g=1$	64
5.12.	Atractor de Rössler con $g=1$	64
5.13.	Retorno de Poincaré del Atractor de Rössler con $g=1$	65
5.14.	Estructura topológica del nudo trébol generado por la solución del sistema (5.6) a) Trayectoria en $\mathfrak{R}^3$ . b) Proyección de la trayectoria en $\mathfrak{R}^2$ .	67
5.15.	a) Proceso de unión. b) Proceso de división.	68
5.16.	Representación gráfica del proceso de atracción y repulsión de trayectorias en un sistema dinámico.	68

5.17. <i>Template</i> simple del atractor de Lorenz. . . . .	69
5.18. Trayectoria simple sobre el <i>template</i> de Lorenz. . . . .	69
6.1. Resultado de la simulación del sistema (6.1) con $a = 40$ , $c = 11/6$ , $d = 0,16$ , $e = 0,65$ , $k = 55$ , $f = 20$ a) Atractor en $\mathbb{R}^3$ . b) Proyección sobre el plano $x - z$ . c) Proyección sobre el plano $x - y$ . . . . .	74
6.2. Representación gráfica de los puntos $O$ , $C_1$ , $C_2$ , y $z_1$ a) Puntos en $\mathbb{R}^3$ . b) Puntos sobre el plano $x - y$ . . . . .	75
6.3. Deformación del atractor de Li a la forma canónica $\mathbb{E}$ . a) Se representan los agujeros $O$ , $C_1$ y $C_2$ . Y el agujero $C_3$ que se genera al intersectarse $C_1$ y $C_2$ en $z_1$ . b) Al deformar suavemente la superficie del atractor, el agujero $O$ coincide con $C_3$ . c) Forma canónica que representa la superficie del atractor de Li. . . . .	76
6.4. Análisis de Poincaré del atractor de Li. a) Sección de Poincaré del atractor de Li de orden entero. b) Primer retorno de Poincaré del atractor de Li de orden entero. . . . .	78
6.5. Resultado de la simulación del sistema (6.3) con orden $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$ a) Atractor fraccionario en $\mathbb{R}^3$ . b) Proyección sobre el plano $x - y$ . c) Proyección sobre el plano $x - z$ . . . . .	79
6.6. Forma canónica del atractor de Li con orden 2.7. a) Se representan los agujeros $O$ , $C_1$ y $C_2$ . b) Forma canónica que representa la superficie del atractor de Li con orden $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$ . . . . .	81
6.7. Análisis de Poincaré. a) Sección de Poincaré del atractor de Li de orden 2.7. b) Primer retorno de Poincaré del atractor de Li de orden 2.7. . . . .	82
6.8. Resultado de la simulación con $a = 40$ , $c = 11/6$ , $d = 0,16$ , $e = 0,65$ , $k = 55$ , $f = 20$ y $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.9, 1)$ a) Proyección sobre el plano $x - z$ . b) Proyección sobre el plano $x - y$ . . . . .	83
6.9. Análisis de Poincaré. a) Sección de Poincaré del atractor de Li de orden 2.9. b) Primer retorno de Poincaré del atractor de Li de orden 2.9. . . . .	84
6.10. Atractor de Chen de orden entero del sistema 6.8 . . . . .	86
6.11. Mapa del primer retorno del atractor de la figura 6.10 . . . . .	86
6.12. Atractor de Chen con orden $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$ . . . . .	87
6.13. Mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.12 . . . . .	88

6.14. Simulación del sistema (6.13). <i>a</i> ) Atractor de 4-enrollamientos del sistema (6.13) con parámetros $a = 1.46$ , $b = 9$ $c = 5$ , $d = 0.06$ . <i>b</i> ) Atractor de 3-enrollamientos del sistema (6.13) con parámetros $a = 0.977$ , $b = 10$ $c = 4$ y $d = 0.1$ . . . . .	90
6.15. Formas canónicas $C_4$ y $C_3$ . <i>a</i> ) Forma canónica que representa al atractor de 4-enrollamientos de la figura 6.14(a). <i>b</i> ) Forma canónica que representa al atractor de 3-enrollamientos de la figura 6.14(b) . . . . .	91
6.16. Simulación de los puntos fijos del sistema (6.13). <i>a</i> ) Puntos fijos del sistema (6.13) con parámetros $a = 1.46$ , $b = 9$ $c = 5$ , $d = 0.06$ . <i>b</i> ) Puntos fijos del sistema (6.13) con parámetros $a = 0.977$ , $b = 10$ $c = 4$ y $d = 0.1$ . . . . .	92
6.17. Mapa de Poincaré del Primer retorno. <i>a</i> ) Mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.14(a). <i>b</i> ) Mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.14(b). . . . .	94
6.18. Sección de Poincaré. <i>a</i> ) Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.14(a). <i>b</i> ) Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.14(b). . . . .	95
6.19. Atractor extraño de orden fraccionario del sistema (6.15) con parámetros $a = 1.46$ , $b = 9$ $c = 5$ y $d = 0.06$ ; y con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.85, 1, 1)$ . . . . .	96
6.20. Primer retorno de Poincaré del atractor extraño de orden fraccionario de la figura 6.19. . . . .	98
6.21. Sección de Poincaré del atractor extraño de orden fraccionario de la figura 6.19. . . . .	98
6.22. Atractor de 4-enrollamientos generado por el sistema (6.18). . . . .	99
6.23. Primer retorno de Poincaré del atractor de la figura 6.22. . . . .	101
6.24. Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.22. . . . .	102
6.25. Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.22 representando las 8 singularidades que tiene el atractor. . . . .	103
6.26. Atractor extraño del sistema del (6.22) junto con su sección de Poincaré. . . . .	103
6.27. Atractor extraño de orden fraccionario del sistema (6.21) con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1.15, 0, 7, 1.15)$ . <i>a</i> ) Atractor extraño en el plano $x - y - z$ . <i>b</i> ) Atractor extraño en el plano $x - y$ . . . . .	104
6.28. Mapas de Poincaré. <i>a</i> ) Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.27. <i>b</i> ) Primer retorno de Poincaré del atractor de la figura 6.27 . . . . .	105

## **Dedicatoria**

Gracias a mi familia y esposa que estuvieron conmigo y me apoyaron en esta aventura de realizar el doctorado. Y también a mis seres queridos que ya no están aquí.

## **Agradecimientos**

A mi asesor el Dr. David Alejandro Díaz Romero por todo su apoyo y sus consejos en la realización de la tesis.

A los revisores por su aportación dada a esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo y la beca otorgada para el doctorado

## RESUMEN

Desde el punto de vista topológico, los atractores extraños de los sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$  se clasifican por su *género* y las trayectorias tridimensionales por los *nudos* que generan. Existe una herramienta topológica que ayuda a saber el tipo de *género* que tiene el atractor extraño, tal herramienta topológica se le conoce como *formas canónicas* del atractor extraño; y para conocer los tipos de nudos que genera el sistema dinámico la herramienta topológica se le conoce como *holder*. En sistemas dinámicos de orden entero, es bien sabido que el cambio de los parámetros del sistema puede generar cambios en la topología de su atractor extraño, estos cambios se visualizan en el *género* y en el nudo de sus trayectorias.

La teoría de la integración y diferenciación de orden no entero, también conocida como *cálculo fraccionario* ha estado presente desde hace más de 300 años pero que en las últimas décadas ha tenido un gran crecimiento de aplicaciones en diversas áreas de la ciencia. Una de las ventajas del cálculo fraccionario es que los modelos matemáticos de orden fraccionario nos permiten describir un sistema real con más exactitud que los modelos de orden entero. Una de las razones por la cual se usaron por mucho tiempo los modelos de orden entero fue la ausencia de métodos de solución para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Una de las áreas más activas que se usa el cálculo fraccionario es en sistemas caóticos, en donde se estudia si al cambiar el orden del sistema caótico este permanece con su caoticidad.

El cambio de orden no solo afecta la caoticidad del sistema dinámico sino también la topología de su atractor extraño, tal como se muestra en este trabajo. El presente trabajo aborda los cambios topológicos, tanto en su superficie como en sus trayectorias, que sufren algunos sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$  al cambiar el orden del sistema.

En el presente trabajo se muestran los sistemas de Li, Chen, sistema autónomo cuadrático y Proto-Lorenz; donde se muestra que al cambio de orden del sistema modificó la topología de su atractor con respecto a su atractor original (sistema de orden entero) y por ende se generaron nuevos atractores extraños. El análisis de los puntos fijos de los nuevos atractores de orden fraccionario dio información cuantitativa de los cambios generados en su *género*. Los sistemas analizados por teoría de nudos, los resultados fueron que al cambiar el orden del sistema la trayectoria cambió con respecto al de orden entero; ese cambio se mostró con el polinomio del nudo encontrado.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Recientemente, el cálculo fraccionario también conocido como la teoría de la integración y diferenciación de orden no entero, ha tenido una gran importancia en diversas áreas de la ciencia en especial en sistemas dinámicos. Se puede decir que este tópico de las matemáticas es relativamente nuevo en el área de sistemas dinámicos y una de las principales investigaciones que ha originado esta teoría es considerar sistemas dinámicos de orden entero como sistemas de orden fraccionario mediante aproximaciones matemáticas. En esta misma área se analiza si al cambiar el orden de un sistema caótico en  $\mathbb{R}^3$  este permanece caótico, sin embargo no se analiza si el cambio de orden afecta la topología del sistema. En sistemas de orden entero, es bien sabido que el cambio de los parámetros del sistema dinámico genera modificaciones en la superficie del atractor. Por lo que el presente trabajo aborda el estudio del cambio de características topológicas del atractor bajo modificaciones en el orden del sistema dinámico.

### 1.2. Objetivos

El trabajo principal de esta tesis se divide en dos puntos:

1. Determinar si el cambio de orden afecta la *superficie topológica* de sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$ .
2. Determinar si el cambio de orden afecta el arreglo topológico de las trayectorias tridimensionales del sistema dinámico.

El objetivo general de esta tesis es:

- Determinar la estructura topológica de un sistema dinámico a partir del cambio de orden fraccionario del mismo.

Los objetivos particulares son los siguientes:

- Determinar si el *género* de algunos atractores se modifica al cambiar el orden del sistema.
- Determinar mediante teoría de nudos si hay un cambio en las trayectorias del sistema dinámico al cambiar el orden del mismo.

### 1.3. Antecedentes

Topológicamente, los atractores extraños (AE) en  $\mathbb{R}^3$  son clasificados por su tipo de superficie topológica [1, 2]. Algunos ejemplos de superficies topológicas son la esfera, el toro y el doble-toro. En topología, las superficies topológicas se clasifican por su *género*. El *género*  $g$  es un *invariante topológico* que se define, de manera general, como el número de agujeros independientes que tiene una superficie [3], y a su vez un invariante topológico se define como una cantidad que permanece inalterable si hay un homeomorfismo o difeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ , donde  $X$  y  $Y$  son dos objetos topológicos. Por lo que se dice que  $X$  y  $Y$  son *topológicamente equivalentes* si el invariante topológico permanece inalterable. Ejemplo, la superficie de la esfera es de  $g = 0$ , la superficie del toro es de  $g = 1$ , la superficie del doble-toro es de  $g = 2$  y para superficies con  $g \geq 2$  es el toro con  $g$ -agujeros. Dos superficies se dicen que son *topológicamente equivalentes* si y solo si tienen el mismo *género* [3]. Por lo tanto, dos AE son topologicamente equivalentes desde el punto de vista de superficies topológicas si y solo si tienen el mismo *género* [1, 2]. Tsankov y Gilmore muestran en [1, 2] una herramienta topológica que permite conocer el *género* de los atractores extraños. Esta herramienta es llamada la *forma canónica* del atractor extraño. En sistemas de orden entero, es bien sabido que el cambio de los parámetros del sistema dinámico genera cambios en la superficie del atractor [4]. En [5], se estudia el atractor de Rössler y el de Lorenz cambiando el orden del sistema y proponen un *holder* de orden fraccionario, este *holder* tiene como objetivo visualizar el acomodo de las trayectorias del sistema fraccionario ( el *holder* es una plantilla donde pueden vivir los nudos del sistema y un *nudo* se puede considerar como una representación topológica de las trayectorias tridimensionales o como una solución topológica del sistema ).



Topológicamente, las superficies de los atractores se pueden clasificar por su *género* y por ende saber su tipo de *género* mediante sus formas canónicas. En sistemas dinámicos de orden entero, el cambio en los parámetros del sistema genera que el *género* se modifique con respecto al original. El estudio del cambio de orden en los sistemas de Lorenz y Rössler hizo que se propusieran *holders* de orden fraccionarios. Y también es bien sabido que el cambio de orden modifica la caoticidad del sistema.

Por lo que el presente trabajo aborda la investigación en la cual el cambio de orden no solo modifica la caoticidad del sistema sino que cambios suaves en el orden del sistema ocasiona fuertes modificaciones en la superficie topológica del atractor generando nuevos atractores extraños. El análisis de los puntos fijos de los nuevos atractores de orden fraccionario dio información cuantitativa de los cambios generados en su *género*. Se muestra también que el cambio de orden modifica los tipos de nudos que se generan en el sistema.

#### 1.4. Organización de la tesis

El contenido de esta tesis está organizado de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se presenta una breve introducción sobre topología de baja dimensión y sus conceptos más importantes tales como: espacios topológicos, variedades, embebimiento, superficie y nudos .
- En el capítulo 3 se da una reseña sobre los conceptos más importantes de sistemas dinámicos
- En el capítulo 4 se aborda el tema de sistemas de orden fraccionarios así como los conceptos más importantes del cálculo fraccionario.
- En el capítulo 5 se explican las herramientas topológicas para analizar sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$ . Se aborda el tema de superficies para determinar el *género* de los atractores extraños y teoría de nudos para analizar trayectorias tridimensionales.
- En el capítulo 6 se muestran los resultados del análisis al cambiar el orden de sistemas dinámicos, y el análisis topológico aplicado.
- Finalmente, las conclusiones de la tesis en el capítulo 7 así como el trabajo futuro.

## Capítulo 2

# Topología de baja dimensión

La topología de baja dimensión es una de las ramas de la topología geométrica que estudia principalmente espacios topológicos que se asemejan al espacio euclidiano de cuatro dimensiones o menos. Con lo que respecta al trabajo de tesis, en este capítulo solo se abordarán los temas de variedades de tres-dimensiones  $\mathbb{R}^3$  (teoría de nudos) y dos-dimensiones  $\mathbb{R}^2$  (superficies). Antes de abordar los temas de superficies y teoría de nudos se dará una introducción de lo que es topología general y algunos de sus conceptos más importantes. Después de los temas de topología se introduce el tema de sistemas dinámicos, ya que la teoría de los sistemas dinámicos utiliza conceptos y herramientas topológicas.

### 2.1. Reseña sobre topología general

La topología es uno de los tópicos más importantes de las matemáticas ya que tiene aplicaciones en varias ramas de la ciencia, por ejemplo: sistemas dinámicos, ingeniería, química, biología molecular, medicina y cosmología. Estas ramas de la ciencia antes citadas emplean conceptos importantes de topología, tales como: deformación, homeomorfismo, espacios topológicos, invariantes topológicos, cirugías topológicas, embebimiento, superficies, continuidad y puntos fijos; entre otras aplicaciones, para entender y modelar estructuras reales.

La topología se encarga de estudiar, entre otras cosas, principalmente las propiedades de los objetos geométricos que permanecen invariantes a través de transformaciones continuas, estas transformaciones se conocen como homeomorfismos y deformaciones [6]. De una forma abstracta pensemos que un objeto geométrico es de goma, el cual lo podemos moldear por medio

de dobleces, estiramientos, encogimientos (los cuales podemos decir que son deformaciones continuas), u otros modos de deformaciones pero con la restricción de no cortarlo ni pegarle otro objeto lo cual se conce como *cirugías topológicas* [7]. En comparación con la geometría, los objetos son cuerpos rígidos, lo cual para que dos objetos geométricos sean equivalentes deben ser congruentes lo cual significa que deben tener la misma forma y tamaño (el mismo número de lados, la misma longitud de sus lados, el mismo número de ángulos, el mismo valor de los ángulos y la misma área encerrada por su perímetro); estos invariantes geométricos son irrelevantes en topología, más adelante se verán algunos de los invariantes que son de gran importancia en topología.

### 2.1.1. Conjunto

Introducimos las ideas importantes de la teoría de conjuntos sin analizar su concepto en su profundidad, se dará por sentado que se entiende a un *conjunto* como una colección de objetos. También se presentarán algunas de las terminologías y notaciones más importantes. Comúnmente se utilizan las letras mayúsculas para representar conjuntos y las letras minúsculas para representar *objetos* o *elementos* pertenecientes a estos conjuntos. A continuación, daremos las notaciones más importantes sobre conjuntos [8].

- Si  $x$  pertenece a un conjunto  $X$  se expresa como:

$$x \in X$$

- $x$  no pertenece a  $X$ :

$$x \notin X$$

- $x$  y  $y$  pertenecen al mismo conjunto:

$$x \in y \in X$$

- $X$  y  $Y$  son conjuntos diferentes:

$$X \neq Y$$

- $X$  es subconjunto de  $Y$ :

$$X \subset Y$$

- Suponiendo que  $X$  es el conjunto que contiene a los elementos  $x, y, z$ :

$$X = \{x, y, z\}$$

- $X$  unión con  $Y$ :

$$X \cup Y$$

- $X$  intersección con  $Y$ :

$$X \cap Y$$

### 2.1.2. Espacio métrico y espacio euclidiano

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto. Una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *métrica* sobre  $X$  si [6]:

- (1)  $d(x, y) \geq 0$  para toda  $x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  para toda  $x, y \in X$ ;
- (3)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  para toda  $x, y, z \in X$ .

la primera propiedad se relaciona a la no degeneración, la segunda propiedades es la condición de simetría y la tercera es la desigualdad del triángulo. El conjunto  $X$  junto con la métrica se le conoce como *espacio métrico* y es denotado por  $(X, d)$ .

De forma abstracta, el espacio geométrico se puede definir como el espacio que contempla puntos, líneas y por ende figuras geométricas. Por lo que al unir los puntos se generan líneas y esas líneas generan figuras geométricas. La definición de espacio euclidiano está relacionada con espacios geométricos pero tiene una relación muy importante en topología.

Unos de los conjuntos más usados en la topología es el conjunto de los números reales o  $\mathbb{R}$ , también llamado *n-espacio Euclidiano*. *El plano*, es denotado como  $\mathbb{R}^2$ , el cual es el conjunto de pares ordenados de los números reales,  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ; por lo tanto  $\mathbb{R}^2$  es el producto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  [6].

De forma general,  $\mathbb{R}^n$  es el producto de  $n$  copias de la línea real. Por lo cual se conoce como el conjunto de  $n$ -tuplas de los números reales [6, 9].

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Para la medida de la distancia entre puntos en  $\mathbb{R}^n$  se usa la *fórmula de distancia euclidiana*, definida como sigue:  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , la distancia entre  $x$  y  $y$  es [6]:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, \quad (2.1)$$

Para el estudio de las propiedades de nudos y superficies se toman las siguientes ideas topológicas de espacios euclidianos [6]:

- 1-dimensión ó simplemente  $\mathfrak{R}$  es solo el conjunto de números reales. La distancia euclidiana entre dos números  $x_1$  y  $x_2$  es  $|x_1 - x_2|$ .
- 2-dimensiones o simplemente  $\mathfrak{R}^2$  es el conjunto de todos los pares ordenados  $(x, y)$  de los números reales  $x$  y  $y$ .
- 3-dimensiones o simplemente  $\mathfrak{R}^3$  es el conjunto ordenado de ternas  $(x, y, z)$  de los números reales.

Topológicamente  $\mathfrak{R}$  es como estar sentado en el interior de  $\mathfrak{R}^2$  y observando localmente desde  $x$  se tiene el par ordenado  $(x, 0)$ . Igualmente, para  $\mathfrak{R}^2$  es como estar sentados en  $\mathfrak{R}^3$  y localmente observar el par ordenado  $(x, y)$  y el orden de ternas  $(x, y, 0)$ . Esto último nos dice que en el interior de  $\mathfrak{R}^3$  se encuentra el plano  $x - y$ .

### 2.1.3. Espacios topológicos

De una forma general los espacios topológicos son un conjunto de puntos sobre la cual la noción de proximidad entre puntos está establecida por una colección específica de subconjuntos llamados conjuntos abiertos [6]; la definición formal se dará mas adelante. La línea, el círculo, el plano, la esfera, el toro y la banda de Möbius son ejemplos de espacios topológicos.

La definición de topología, la cual ya se conoce, tardó mucho tiempo en ser concretada. De igual manera, el concepto de espacios topológicos tardó tiempo en ser formulada, se buscaba que estas definiciones fueran lo más general posible y suficientemente estrictas para que abordara todos los conceptos importantes de las matemáticas. Las definiciones formales sobre espacios topológicos y topología se pueden revisar en [6, 11]. Un *espacio topológico* se le conoce como un **conjunto** (i.e., conjunto  $X$ ) y a una topología  $\zeta$  se le conoce como a los **elementos** que integran al conjunto; por lo tanto un espacio topológico se le conoce como un par ordenado  $(X, \zeta)$ . En la literatura se refieren al conjunto  $X$  como un espacio topológico.

A continuación se dan una lista de definiciones que se asocian con espacios topológicos.

**Definición** [6, 11]. Sea  $(X, \zeta)$  un espacio topológico :

- Un subconjunto  $U \in \zeta$  es llamado un **conjunto abierto** del espacio topológico  $X$ .

- Un subconjunto  $F$  del espacio topológico  $X$  es llamado **cerrado** si  $X \setminus F$  es abierto.
- Un subconjunto  $N$  de espacio topológico  $X$  que contiene un punto  $x \in X$  es llamado **vecindario** de un punto  $x$  si hay un conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U \subset N$ .

Una topología definida sobre un espacio métrico se llama **topología métrica**. La topología métrica en el espacio  $R^n$  inducida por una métrica Euclidiana es llamada *topología estándar*. La definición formal de topología estándar es la siguiente [6]:

**Definición** . Sea  $\mathfrak{B}$  la colección de todos los intervalos abiertos sobre la recta real  $\mathfrak{R}$ , entonces  $\mathfrak{B} = \{(a, b) \subset \mathfrak{R} \mid a < b\}$ . Por lo tanto, la topología que genera  $\mathfrak{B}$  se le conoce como *topología estándar*.

Los conjuntos abiertos en la topología estándar sobre  $\mathfrak{R}$  son la unión de intervalos abiertos. Siempre que estudiemos  $\mathfrak{R}$  como un espacio topológico nos referiremos a la topología estándar.

**Definición** . Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  es **cerrado** si el conjunto de  $X - A$  es abierto [6].

Esta definición dice que  $X$  e  $Y$  no se intersecan,  $X$  e  $Y$  son disjuntos si su intersección es vacía y se denota como  $X \cap Y = \emptyset$

**Definición** . Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $Y$  es un subconjunto de  $X$ , entonces  $Y$  se le conoce como un *subespacio topológico* [8].

#### 2.1.4. Espacios Hausdorff

**Definición** [6]. Un espacio topológico  $X$  es **Hausdorff** si para cada par de distintos puntos  $x$  y  $y$  en  $X$ , existen vecindarios disjuntos  $U$  y  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A continuación se enlistan algunas propiedades de los espacios Hausdorff [6]:

1. Un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.
2. Un subespacio  $A$  de un espacio Hausdorff  $X$  es Hausdorff.
3. Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa continuo de un espacio compacto  $X$  dentro de un espacio Hausdorff  $Y$ . Entonces  $f$  es un homeomorfismo si y solo si es biyectivo.
4. Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa abierto sobreyectivo. El espacio topológico  $Y$  es Hausdorff si y solo si el conjunto  $\{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$  es cerrado en  $X \times X$ .

5. Espacios topológico  $X$  y  $Y$  son Hausdorff si y solo si  $X \times X$  es Hausdorff.

### 2.1.5. Funciones y equivalencia topológica

El término *función* es uno de los conceptos más importantes en el área de matemáticas y se puede definir como una regla que asigna a cada elemento de un conjunto  $X$  un único elemento de un conjunto  $Y$  y se escribe como:

$$f : X \rightarrow Y$$

donde  $f$  es una función con dominio  $X$  y rango  $Y$ , donde la palabra rango se conoce como la *imagen* de  $f$ .

El concepto más importantes en topología que ayudan a definir las equivalencias topológicas entre espacios topológicos es la función continua, con lo que se deriva homeomorfismo y difeomorfismo. Estos tres conceptos ayudan a entender las propiedades topológicas que se preservan en los espacios topológicos bajo deformaciones continuas. A continuación se dan las definiciones de los conceptos antes mencionados [6, 12, 13].

**Definición.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **continua** si para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Esto nos dice que la proximidad entre puntos se preservan en una función continua, de esto se genera la definición de continuidad de funciones que mapean un espacio topológico en otro.

Algunas de las funciones continuas son las siguientes:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (Curvas en el plano)}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (Curvas en el espacio)}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (Proyección en el plano)}$$

**Definición.** Sea  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua si  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$  para cada conjunto abierto  $V$  en  $Y$ .

Por lo tanto, la función  $f : X \rightarrow Y$  es continua si la preimagen de cada conjunto abierto en  $Y$  es abierto en  $X$ .

La siguiente definición nos da el concepto de equivalencia topológica.

**Definición.** Sea  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una biyección con inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Si  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones continuas, entonces  $f$

es un **homeomorfismo**. Si existe un homeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ , se dice que son **homeomorfas** ó **topológicamente equivalentes**.

Por lo tanto, la función  $f : X \rightarrow Y$  es topológicamente equivalente si hay un mapeo biyectivo con inversa continua.

**Definición.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos diferenciables, sea  $f : X \rightarrow Y$  una función diferenciable con inversa diferenciable  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Entonces se dice que  $f$  y  $f^{-1}$  es un **difeomorfismo**.

En otras palabras, un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable. Por lo tanto, los espacios que generan la función  $f : X \rightarrow Y$  son topológicamente equivalentes si hay un difeomorfismo.

**Definición .** Un **invariante topológico** es una cantidad que permanece inalterable si hay un homeomorfismo o difeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ , por lo que se dice que  $X$  y  $Y$  son topológicamente equivalente si  $X = Y$  [3].

Esta última definición nos proporciona información contundente para saber si dos espacios topológicos son topológicamente equivalentes. Más adelante se verán algunos invariantes topológicos para el análisis de superficies y nudos.

### 2.1.6. Embebimientos

El concepto de embebimiento nos dice que un espacio topológico puede estar dentro de otro espacio topológico y es una de las definiciones para entender qué es un nudo. Enseguida se da la definición de embebimiento y el teorema de la curva de Jordan, estas definiciones se pueden ver en [6].

**Definición.** Sea  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos. Un **embebimiento** de  $X$  en  $Y$  es una función  $f : X \rightarrow Y$  que mapea a  $X$  homeomorficamente al subespacio  $f(X)$  en  $Y$ .

En otras palabras, el embebimiento  $f : X \rightarrow Y$  es como colocar un copia de  $X$  en  $Y$ . Un embebimiento  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  del círculo en  $\mathbb{R}^3$  se conoce como nudo, el cual veremos mas adelante.

Uno de los teoremas más importantes dentro del tema de embebimientos es el teorema de la curva de Jordan, el cual citaremos a continuación.

**Teorema 1: Teorema de la curva de Jordan** [6]. Sea  $S$  una *curva cerrada simple* en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $\mathbb{R}^2 - S$  consiste en dos componentes, y  $S$  es la frontera en  $\mathbb{R}^2$  de cada uno de los componentes.

**Definición.** Dada una *curva cerrada simple*  $S$  en el plano, se llama a la *componente acotada* de  $\mathbb{R}^2 - S$  el *interior* de  $S$  y a la *componente no acotada* como el *exterior* de  $S$ .

Una curva cerrada simple se le conoce como una *curva de Jordan* y es



homeomorfa al círculo  $S^1$ , se define como una curva que no tiene intersecciones en sí misma. La curva cerrada simple es acotada.

## 2.2. Variedades topológicas

El concepto de *variedad* es el que más se utiliza en topología de baja dimensión y es el que nos dará la introducción formal a los temas de superficies y teoría de nudos. A continuación definiremos lo que es una variedad y se darán algunos teoremas importantes [6, 9, 15].

**Definición.** Una  *$n$ -variedad* es un espacio topológico  $X$  el cual es Hausdorff, donde en cada punto  $x \in X$  existe un conjunto abierto  $U$  de  $X$  que contiene a  $x$  y es homeomorfo a un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

La idea que captura lo que es una variedad es pensando que localmente se asemeja a un espacio  $\mathbb{R}^n$ , por ejemplo, la esfera  $S^2$  vive en un espacio  $\mathbb{R}^3$  pero localmente esta en  $\mathbb{R}^2$ .

A continuación daremos la definición de 1-variedad, 2-variedad y 3-variedad:

**Definición.** 1-variedad se le llama una *curva*.

El siguiente teorema es para la clasificación de curvas:

**Teorema: Teorema para clasificación de curvas.** Sea  $X$  una 1-variedad. Si  $X$  es conecada y compacta, entonces  $X$  es homeomorfa a  $S^1$ . Si  $X$  es conecada y no compacta, entonces  $X$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}$ .

**Definición.** A una 2-variedad se le llama una *superficie*.

El plano  $x-y$  es una superficie y es Hausdorff. Cada subconjunto abierto conecado del plano  $x-y$  es también una superficie.

**Definición.** Al conjunto de puntos  $(x, y, z)$  en el espacio se le conoce como 3-variedad.

## 2.3. Superficies

Hasta este punto ya se dieron algunas de las definiciones mas importantes de topología general para poder abordar los temas de superficies, teoría de nudos y de los siguientes capítulos de esta tesis. El concepto de superficies es un tema puro de topología de baja dimensión, pero que se usa mucho en el análisis de *atractores extraños*. Una forma de clasificar a los *atractores extraños* es por su superficie, esto se abordará en otro capítulo.

Una *superficie*  $\Sigma$  es un espacio topológico compacto el cual distintos puntos tienen distintos vecindarios, y cada punto tiene un vecindario que es homeomorfo al plano  $\mathbb{R}^2$  [16]. Por eso una superficie es una 2-variedad.

Algunos ejemplos de superficies o 2-variedad son: la esfera, el toro y el doble-toro [7]. En la figura 2.1 se muestra la esfera y el toro.

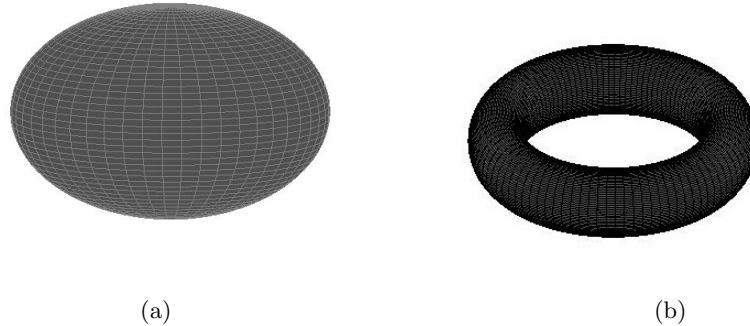


Figura 2.1: Ejemplo de superficies. *a)* Esfera, *b)* Toro .

### 2.3.1. Suma conectada de superficies

Sean dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , la *suma conectada* de estas dos superficies se denota como  $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ , la suma conectada de estas dos superficies se obtiene removiendo un disco de cada superficie y pegando los discos de las dos superficies, a este procedimiento también se le conoce como *cirugias topológicas* [6]. El resultado de la operación de la suma de dos superficies es una superficie.

Sea  $\Sigma_1$  la esfera  $S^2$  y  $\Sigma_2$  cualquier otra superficie, el resultado de la suma conectada de estas dos superficies es  $\Sigma_2$  [6]. El resultado de la suma conectada de dos superficies toroidales  $\Sigma_1 \# \Sigma_2$  es el doble toro como se puede ver en la figura 2.2. A la suma conectada de varios toros se le llama *n-toro*.

### 2.3.2. Equivalencia topológica entre superficies.

Para establecer equivalencias topológicas entre superficies tomaremos en cuenta el concepto de homeomorfismo e introduciremos una propiedad topológica de las superficies la cual se preserva cuando existe un homeomorfismo.

Dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se dicen que son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo entre ellas [13]. Una de las propiedades topológicas

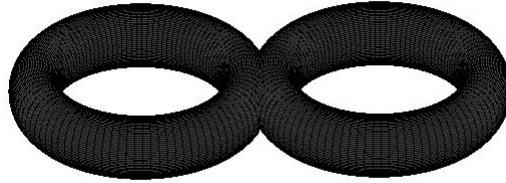


Figura 2.2: Doble-toro.

que se preservan cuando existe un homeomorfismo entre superficies es el *género* o mejor conocido en inglés como *genus*. [1, 3]; entonces dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son topológicamente equivalentes si tienen el mismo *género*. A continuación se da la definición de *género*.

**Definición** [7, 3]. *El género ( $g$ ) es el número de agujeros independientes que tiene una superficie.*

El *género* es un invariante topológico que nos ayuda a clasificar a las superficies, por ejemplo, la esfera es  $g = 0$  y el toro es  $g = 1$ ; para  $g \geq 2$  es el toro con  $g$ -agujeros.

## 2.4. Teoría de nudos

En esta última sección del capítulo se abordara el tema de teoría de nudos y sus conceptos más importantes. La teoría de nudos, entre otras cosas, estudia trayectorias cerradas en  $\mathbb{R}^3$ . Este tema es una de las ramas de la topología que tiene diversas aplicaciones en otras áreas de la ciencia, por ejemplo, sistemas dinámicos, biología molecular, química, física, entre otras. La teoría de nudos nace desde el siglo XIX y desde entonces ha sido estudiada hasta nuestros días, por la cual la hace una de las áreas mas activas de la topología. La teoría de nudos en sí se puede dividir en teoría de nudos clásica y teoría de nudos moderna. La primera se refiere a *nudos* que aceptan solo *cruces* y no intersecciones y la segunda se refiere a *nudos virtuales* los cuales aceptan *cruces* con intersecciones. En esta tesis se trabajará solamente con la teoría de nudos clásica.

### 2.4.1. Nudos y equivalencia entre nudos

En teoría de nudos se trabaja con dos tipos de nudos el *nudo suave* ó simplemente *nudo* y el *nudo poligonal*. Un *nudo*  $\langle K \rangle$  es un embebimiento  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  del círculo en  $\mathbb{R}^3$  el cual no tiene intersecciones [3, 17]. El no nudo ó el nudo trivial es el círculo en  $\mathbb{R}^3$  sin cruces o puede tener muchos cruces pero no esta anudado. Lo que define a un nudo son sus cruces; para que el círculo en  $\mathbb{R}^3$  se considere un nudo tiene que tener igual o más de 3 cruces. Cada nudo, a excepción de los nudos salvajes, puede ser aproximado por un *nudo poligonal*  $\langle PK \rangle$ ; un nudo poligonal en  $\mathbb{R}^3$  consiste en un finito número de líneas llamadas *aristas* las cuales se unen con puntos llamados *vértices* [3, 18]. De una forma simple, un  $PK$  es una discretización de un nudo con la cantidad necesaria de vértices para modelar un nudo. El mínimo número de vértices para construir un  $PK$  en  $\mathbb{R}^3$  es 6 [3, 19, 20]. En teoría de nudos, un nudo y un nudo poligonal son equivalentes. En la figura 2.3 se presenta la *proyección* de un nudo y un nudo poligonal, mas adelante se definirá que es la *proyección de un nudo*, este figura solo muestra gráficamente lo que es un  $K$  y  $PK$ .

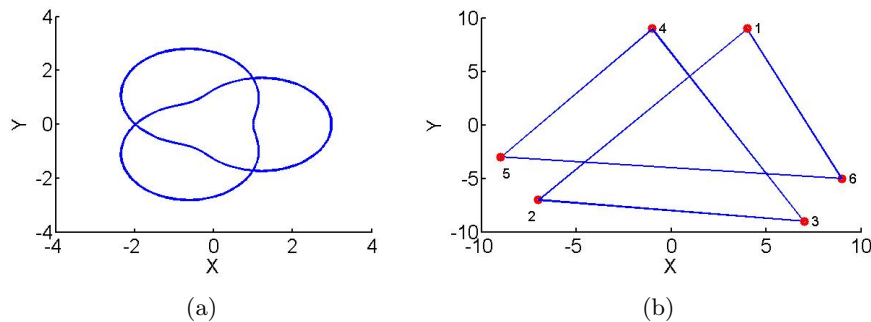


Figura 2.3: Representación del nudo trébol a) Nudo trébol  $\langle K \rangle$ , b) Nudo trébol poligonal con 6 vértices  $\langle PK \rangle$ .

A continuación se definirá la equivalencia entre nudos, por simplicidad solo trabajaremos con el nudo  $\langle K \rangle$  de aquí en adelante a menos que se diga lo contrario; pero se tiene que tener presente que un nudo  $\langle K \rangle$  y un nudo poligonal  $\langle PK \rangle$  son equivalentes entre sí y que los conceptos que se dan engloba a los dos. Enseguida se darán los conceptos de *homotopía*, *isotopía* e *isotopía del ambiente* para la equivalencia de nudos.

**Definición** [6]. Sea  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas. Entonces  $f$  y  $g$  son **homotópicas** si existe una función continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$F(x,0) = f(x)$  y  $F(x,1) = g(x)$ . La función  $F$  se le llama **homotopía** entre  $f$  y  $g$ .

De modo intuitivo, el concepto de homotopía nos refleja como dos funciones ó espacios topológicos son los mismos vistos de otra manera; entonces dos funciones son homotópicas si una de ellas se puede deformar por medio de homeomorfismos en la otra. En la figura 2.4 se muestra a lo que se refiere el concepto de homotopía.

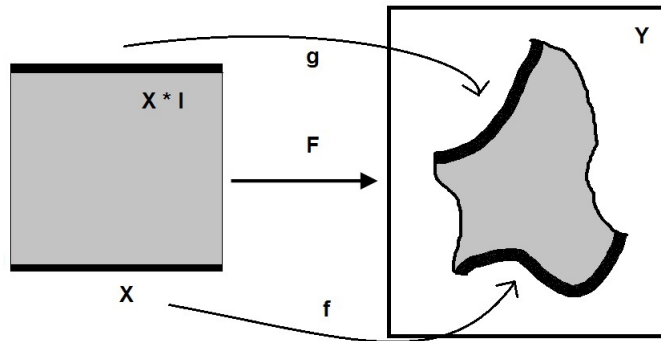


Figura 2.4: Deformación de un función  $f$  en una función  $g$  a través de una homotopía.

**Definición** [6]. Una **isotopía** es una homotopía  $F : X \times I \rightarrow Y$  si  $F|_{X \times \{t\}}$  es un homeomorfismo para toda  $t$  en  $I$ .

En otras palabras, la isotopía es la deformación de un espacio topológico a través del tiempo que no cambia la topología del mismo. A continuación se dará la definición de equivalencia entre nudos [6, 18, 3].

**Definición** [6]. Si  $f : Y \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow X$  son embebimientos de  $Y$  dentro de  $X$ , entonces se dice que  $f$  y  $g$  tienen un **isotopía ambiente** si hay una isotopía  $F : X \times I \rightarrow X$  tal que  $F(x,0) = x$  para toda  $x \in X$  y  $F(f(y),1) = g(y)$  para toda  $y \in Y$ . El espacio  $X$  es llamado **espacio ambiente** y la función  $F$  es llamada una isotopía ambiente.

**Definición** [6]. Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes si hay una isotopía ambiente por lo cual hay una isotopía  $F : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(K_1,0) =$

$F_0(K_1) = K_1$  y  $F(K_1, 1) = F_1(K_1) = K_2$ . Al grupo de nudos equivalentes se le llama un **tipo de nudo**.

Dicho de otra forma, dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  del espacio tridimensional son equivalentes si se pueden deformar uno en otro mediante un camino de homeomorfismos que corresponden con la definición de isotopía y de isotopía ambiente; se empieza con  $K_1 \in \mathfrak{R}^3$  y se termina con un homeomorfismo que lleva de  $K_1$  a  $K_2 \in \mathfrak{R}^3$ . En la figura 2.5 se presentan las *proyecciones* de dos nudos equivalentes y un grupo de *tipo de nudo*.

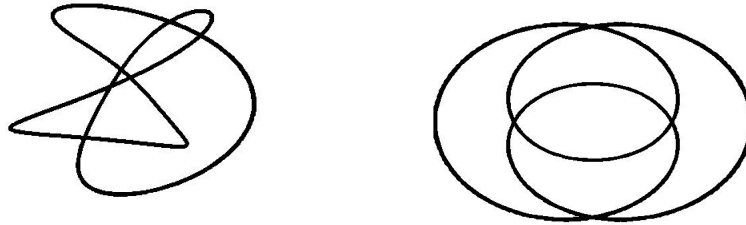


Figura 2.5: Nudos equivalentes los cuales pertenecen a un grupo de tipo de nudo.

Encontrar equivalencias de nudos en  $\mathfrak{R}^3$  es muy complicado por eso se utilizan imágenes de nudos llamados *proyecciones de nudos*, el cual se introduce a continuación.

#### 2.4.2. Proyección de un nudo

Para estudiar los nudos y realizar operaciones en ellos se utilizan imágenes de nudos llamados *proyecciones de nudos*. Los nudos en  $\mathfrak{R}^3$  pueden ser proyectados en una curva cerrada en un plano  $\mathfrak{R}^2$ , esto es conocido como la *proyección de un nudo* [6]. Esto es mostrado como un grafo en el plano dada por la proyección [3, 17]:

$$P : \mathfrak{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{R}^2,$$

$$P(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Lo anterior es una definición general de lo que es una proyección de un nudo, este concepto abarca al nudo y al nudo poligonal pero en particular cada definición difiere un poco entre si.

Un **nudo** en  $\mathbb{R}^3$  puede ser proyectado en una curva cerrada en el plano, a esto se le conoce como la proyección de un nudo [21]. Esta proyección es mostrada con un grafo ( $G$ ) en el plano. Un grafo ( $G$ ) de un nudo consiste de vértices  $V(G)$  y aristas  $E(G)$  donde cada arista es unida con uno ó dos vértices [21]. En la figura 2.6 se presenta el grafo del nudo trébol con sus aristas  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  y vértices  $V(G) = \{1, 2, 3\}$ .

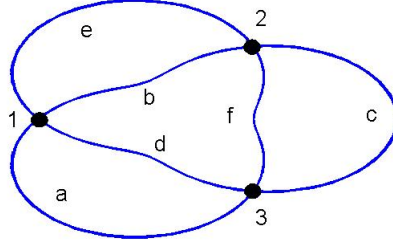


Figura 2.6: Proyección del nudo trébol con aristas  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  y vértices  $V(G) = \{1, 2, 3\}$ .

Cada vértice de la figura 2.6 se le conoce como un punto de cruce del nudo en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $1$  y  $\hat{1}$  un punto de cruce en  $\mathbb{R}^3$ , el cual en la proyección se intersecta en el grafo pero no se intersecta en  $\mathbb{R}^3$ ; no se intersecta en  $\mathbb{R}^3$  porque  $1$  y  $\hat{1}$  tienen diferentes coordenadas en  $z$ . Con esta información podremos saber si es un cruce por arriba o un cruce por abajo[18].

Un **nudo poligonal** en  $\mathbb{R}^3$  puede ser proyectado en una curva poligonal cerrada en el plano, a esto se le conoce como proyección del nudo poligonal [6, 3, 17]. La estructura de un nudo poligonal en  $\mathbb{R}^3$  puede ser definida como una secuencia de vertices tal como:

$$\begin{aligned} V(1) &= (x_1, y_1, z_1); \\ V(2) &= (x_2, y_2, z_2); \\ V(3) &= (x_3, y_3, z_3); \\ V(4) &= (x_4, y_4, z_4); \\ V(5) &= (x_5, y_5, z_5); \\ V(6) &= (x_6, y_6, z_6); \end{aligned}$$

$$V(n) = (x_n, y_n, z_n).$$

En la figura 2.7 se da un  $PK \in \mathfrak{R}^3$  que representa al nudo trébol con una secuencia de vértices y su proyección en  $\mathfrak{R}^2$ , la secuencia de vértices es [3]:  $V = \{(4, 9, 5), (-7, -7, -5), (7, -9, 5), (-1, 9, -5), (-9, -3, 5), (9, -5, -5)\}$ .

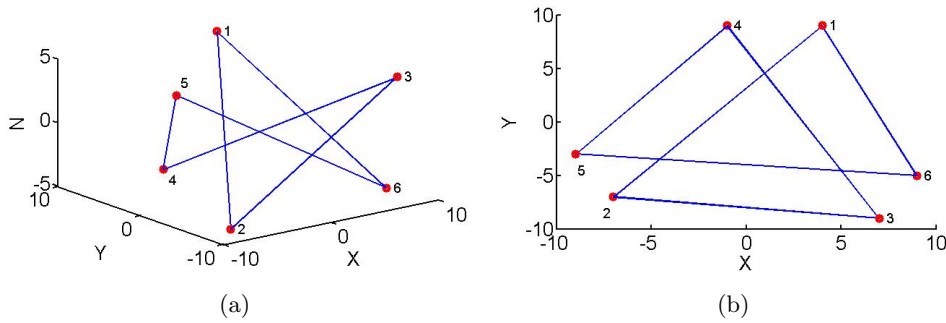


Figura 2.7: Nudo trébol poligonal a)  $PK \in \mathfrak{R}^3$  , b)  $PK \in \mathfrak{R}^2$  .

Los puntos rojos de la figura 2.7 representan los vértices del nudo y las líneas azules son las aristas. A la correcta proyección de un nudo poligonal se le conoce como *proyección regular* . Una proyección es regular si se cumplen los siguientes 3 puntos [6, 17] :

1. Ningún punto en la proyección corresponde a más de dos puntos sobre el nudo.
2. Hay sólo un número finito de puntos en la proyección que corresponden a dos puntos en el nudo. Esto se llaman *puntos dobles* de la proyección.
3. Ningún punto doble corresponde a un vértice del nudo.

Los puntos dobles en la proyección del nudo poligonal se le conoce como *cruces* de la proyección [6]. En la figura 2.8 se indican dentro de círculos punteados los puntos dobles o *cruces* del nudo trébol poligonal.



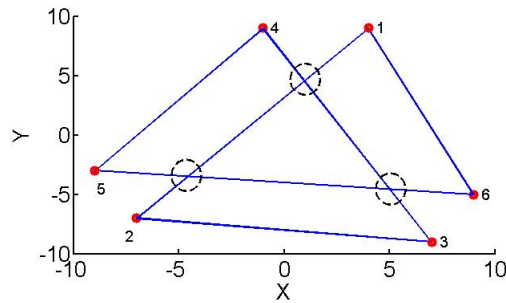


Figura 2.8: Representación de los cruces del nudo trébol

### 2.4.3. El número de cruce

Aquí se mencionará una forma de catalogar a los nudos de acuerdo al número de cruces que tiene un nudo en su proyección. El número de cruces en una proyección se denotará como  $c(p)$ .

**Definición.** *El número de cruces de un nudo es el mínimo número de cruces que ocurre en la proyección de un nudo [3, 18].*

El catálogo de nudos está acomodado por el número de cruces que tiene el nudo en su proyección y un subíndice que diferencia a los nudos con el mismo número de cruces. Por ejemplo, hay tres nudos con 6 cruces por lo que su proyección es de 6 cruces; estos tres nudos con 6 cruces se catalogan en la tabla de nudos como:  $6_1$ ,  $6_2$  y  $6_3$ . En la figura 2.9 se muestran los nudos  $3_1$ ,  $4_1$ ,  $5_1$  y  $7_1$ .

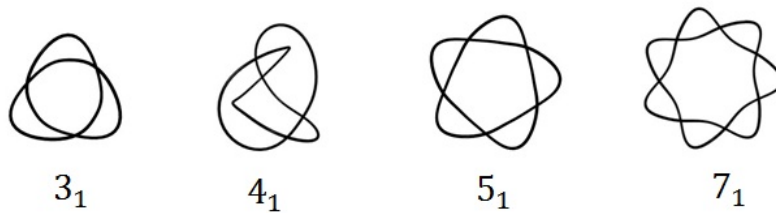


Figura 2.9: Algunos nudos con sus números de cruces.

#### 2.4.4. Movimientos de Reidemeister

Este punto se enfoca en saber si dos proyecciones de dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  que se visualizan diferentes son equivalentes, si son equivalentes hay una isotopía ambiente, determinar si existe una isotopía ambiente entre las dos proyecciones es difícil. En 1927 Kurt Reidemeister simplificó la tarea al mostrar que la existencia de una isotopía ambiente entre nudos representados por dos proyecciones de nudos diferentes es equivalente a la existencia de una secuencia de movimientos, llamados movimientos de Reidemeister, que nos lleva de una proyección a otra [6, 18].

Los movimientos de Reidemeister son tres y se conocen como movimiento de tipo I (agregar o remover un rizo), tipo II (agregar o remover dos cruces por arriba o por abajo consecutivos) y tipo III (movimiento triangular). En la figura 2.10 se presentan los tres tipos de movimientos de Reidemeister.

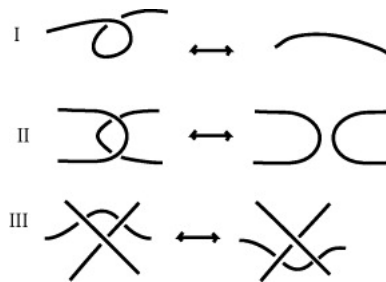


Figura 2.10: Movimientos de Reidemeister.

El siguiente teorema nos dice que dos nudos son equivalentes si hay una secuencia homeomórfica que lleve de una proyección a otra [6].

**Teorema 4: Teorema de Reidemeister.** Dos nudos son equivalentes si y solo si hay una secuencia finita de isotopías planares y movimientos de Reidemeister que nos lleven de una proyección de un nudo a otra.

El resultado de Reidemeister resuelve el problema de saber si dos nudos son equivalentes, pero no proporciona un algoritmo para determinar si dos nudos son equivalentes; en otras palabras, da las herramientas para generar cambios en un nudo que puede llevar al segundo nudo pero no determina cuantos movimientos son necesarios para lograrlo. Un avance significativo en esta dirección fue la introducción en 1928 del primer invariante polinomial.

### 2.4.5. Invariantes polinomiales

Uno de los problemas fundamentales en teoría de nudos es saber si dos nudos que se visualizan diferentes son equivalentes. Basado en este problema, J.W. Alexander introdujo el primer invariante polinomial de nudos. Este invariante hace posible distinguir, algunos nudos, si dos nudos son equivalentes o no comparando su polinomio asociado. Desde la introducción del primer invariante polinomial, una variedad de nuevos invariantes han sido desarrollados tales como el polinomio de Jones, el corchete de Kauffman, H.O.M.F.L.Y., entre otros [3, 17, 21].

A continuación se expone el polinomio de Alexander y el de H.O.M.F.L.Y. ya que se utilizará posteriormente. Actualmente hay programas de computadora que calculan estos invariantes topológicos de nudos, enseguida se verá cómo se calcula manualmente estos polinomios. La diferencia entre los dos es que Alexander no detecta quiralidad y el de H.O.M.F.L.Y. si, por lo que el polinomio de H.O.M.F.L.Y. es mejor en clasificar nudos que el de Alexander.

#### ■ Polinomio de Alexander

Alexander propone el diagrama expuesto en la figura 2.11 que representa el cruce de un nudo. Sea  $r_j$ ,  $r_k$ ,  $r_l$  y  $r_m$  las cuatro regiones que rodean el punto de cruce, siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj, de acuerdo a la figura 2.11 y empezando desde las regiones punteadas  $r_j$  y  $r_k$ ; se calcula una suma alternante de los símbolos que representan las cuatro regiones en su orden cíclico y se multiplican las regiones punteadas por  $t$  obteniendo la siguiente ecuación lienal:

$$c_i(r) = tr_j - tr_k + r_l - r_m = 0, \quad (2.2)$$

Considerando el diagrama del nudo trébol de la figura 2.12, se examina el cruce  $c_1$  y podemos ver que las regiones  $r_3$  y  $r_0$  están punteadas y que el ciclo antihorario es  $r_0, r_3, r_4, r_1$ .

La ecuación obtenida para el cruce  $c_1$  es:

$$c_1(r) = tr_0 - tr_3 + r_4 - r_1 = 0, \quad (2.3)$$

Repitiendo el mismo proceso para los puntos de cruce  $c_2$  y  $c_3$  obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$c_2(r) = tr_0 - tr_1 + r_4 - r_2 = 0, \quad (2.4)$$

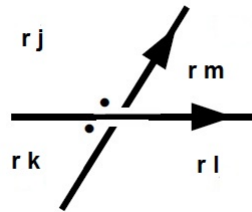


Figura 2.11: Notación de Alexander para el cálculo del polinomio de un nudo.

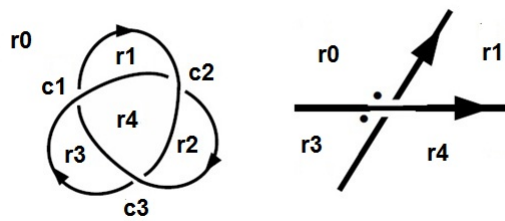


Figura 2.12: Diagrama del nudo trébol para el cálculo del invariante polinomial

$$c3(r) = tr_0 - tr_2 + r_4 - r_3 = 0. \quad (2.5)$$

Las ecuaciones obtenidas se representan con la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ t & -t & -1 \\ t & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

De la matriz anterior se eliminan dos regiones vecinas, en este caso se-  
ran  $r_3$  y  $r_4$  que son las dos últimas columnas de la matriz y se calcula el  
determinante de la matriz como  $M_{3,4}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{3,4}(t) &= \det M_{3,4} \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ t & -t & -1 \\ t & 0 & -t \end{pmatrix}, \\ &= t^3 - t^2 + t, \\ &= t(t^2 - t + 1). \end{aligned}$$

eliminando el factor de  $t$  del polinomio se obtiene el polinomio normalizado:

$$\Delta k(t) = t^2 - t + 1.$$

este polinomio es el resultado estándar del invariante de Alexander para el  
nudo trébol.

El procedimiento anterior es general para el cálculo del polinomio de  
Alexander de los diferentes tipo de nudos.

### ■ Polinomio de HOMFLY

El polinomio de HOMFLY de un nudo orientado  $K$ , denotado por  $P(K)$ ,  
es un polinomio de dos variables  $a$  y  $z$ . Este polinomio se define por la  
siguiente relación de madeja [18]:

- $P(\bigcirc) = 1 \rightarrow$  donde  $\bigcirc$  representa el diagrama del no nudo.
- $aP(L_+) - a^{-1}P(L_-) = zH(L_o)$ , donde  $L_+$ ,  $L_-$  y  $L_o$  es igual a la  
relación de madeja que se muestra en la figura 2.13

A continuación se muestra en la figura un ejemplo de cómo se calcula el  
polinomio de HOMFLY del nudo trébol.

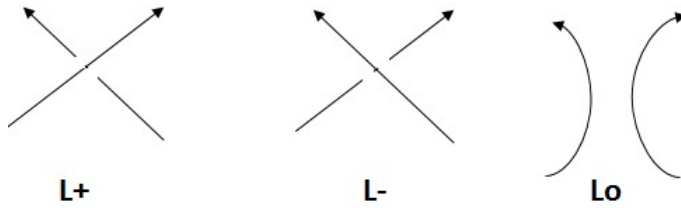


Figura 2.13: Relación de madeja.

$$\begin{aligned}
 aP \left( \text{Diagram 1} \right) &= a^{-1}P \left( \text{Diagram 2} \right) - zP \left( \text{Diagram 3} \right) \\
 P \left( \text{Diagram 1} \right) &= a^{-2}P \left( \text{Diagram 4} \right) - a^{-1}zP \left( \text{Diagram 5} \right) \\
 &= a^{-2} - a^{-2}z \left( a^{-1}P \left( \text{Diagram 6} \right) - zP \left( \text{Diagram 7} \right) \right) \\
 &= a^{-2} - a^{-3}zP \left( \text{Diagram 8} \right) - a^{-2}z^2P \left( \text{Diagram 9} \right) \\
 &= a^{-2} - a^{-3}z \left( a^{-1} - a \right) z^{-1}P \left( \text{Diagram 10} \right) - P \left( \text{Diagram 11} \right) + a^{-2}z^2 \\
 &= a^{-2} - a^{-4} + a^{-2} + a^2z^2 \\
 &= 2a^{-2} - a^{-4} + z^2a^{-2}
 \end{aligned}$$

## 2.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se dan las bases para abordar algunos temas de capítulos siguientes, también se dieron conceptos importantes de topología general, tales como: homeomorfismo, difeomorfismo, equivalencia topológica, invariante topológico, embebimiento y variedad; los cuales sirvieron para abordar los temas de superficies y teoría de nudos. Lo importante del tema de superficies es el concepto de *género* el cual nos dice si dos superficies son topológicamente equivalentes, y ayuda a clasificar los tipos de superficies. En teoría de nudos, saber si dos nudos que se visualizan diferentes son equivalentes y dado un nudo saber a que tipo de nudo pertenece se resuelve con los invariantes polinomiales.

## Capítulo 3

# Sistemas dinámicos y caos

En el presente capítulo se introduce el tema de sistema dinámico desde el punto de vista topológico, ya que los sistemas caóticos y los sistemas dinámicos no lineales usan conceptos y herramientas topológicas para su análisis.

### 3.1. Reseña sobre sistemas dinámicos

En palabras simples, un sistema dinámico es un sistema que evoluciona o cambia con el tiempo. Formalmente, un sistema dinámico puede ser representado por un modelo matemático o por un modelo por series de tiempo de un sistema que evoluciona conforme pasa el tiempo.

El principal término matemático que describe a un sistema dinámico es la caracterización de su *estado* por un número finito  $n$  de cantidades medibles, denotado como *variables de estado*, expresado por números reales  $x_i \in \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  [22]. El conjunto ordenado de los números reales puede ser visto como un vector  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ . A partir del término variable de estado, se define el siguiente término, el *espacio de estado*  $X \subseteq \mathfrak{R}^n$  es el conjunto de valores admisibles de las variables de estado [22], y a la representación gráfica del espacio de estado se le conoce como *espacio de fase*. Como mencionamos anteriormente, un sistema dinámico es la evolución de un sistema en el tiempo, entonces, las variables de estado son funciones del tiempo  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $t$  puede ser un número real (tiempo continuo) o un número natural (tiempo discreto) [22]. De lo anterior se da la siguiente definición topológica sobre sistemas dinámicos.

**Definición** [6, 23]. *Un sistema dinámico se define por  $f : X \rightarrow X$ , donde  $f$  es una función que mapea al espacio topológico  $X$  a sí mismo. Si el sistema*



dinámico es definido por el conjunto de interacciones  $f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+$  se le conoce como **sistema dinámico discreto**. Si el sistema dinámico es definido por el conjunto de interacciones  $f^n(x) : n \in \mathbb{R}$  se le conoce como **sistema dinámico continuo**.

Usualmente un sistema dinámico discreto se define por la relación [24]:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (3.1)$$

La *sección de Poincaré* (superficie) y el *primer retorno de Poincaré* son algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos de la forma (3.1). En este capítulo nos enfocaremos a los sistemas dinámicos continuos y en capítulos posteriores veremos los sistemas dinámicos discretos como herramienta para analizar la topología de sistemas dinámicos continuos.

Ya que hemos definido lo que es una variable de estado y un espacio de estado, a continuación definiremos *flujo* el cual es el tercer término que define a un sistema dinámico. Un *flujo* (o semiflujo) es una familia  $\Phi_t : X \rightarrow X$  de mapas de un conjunto  $X$  en sí mismo, para  $t \in \mathbb{R}(t \geq 0)$ , el cual satisface [25, 26, 27] :

1.  $\Phi_0 = Id$ .
2. Para todo  $t, s \in \mathbb{R}(t, s \geq 0)$ ,

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}.$$

3. Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_t$  es un homeomorfismo con inversa  $\Phi_{-t}$ .
4. Para un estado inicial dado  $x_0$ , se estudia el proceso

$$x(t) = \Phi_t x_0.$$

transformando el estado inicial en el instante  $t$ . Entonces, el punto 2 implica que  $x(t, s) = \Phi_t x(s)$ , esto nos dice que,  $y(t) = x(t, s)$  es el estado en el tiempo  $t$  del proceso con estado inicial  $y(0) = x(s)$ .

Ya con estos tres términos, se puede definir formalmente y de forma general un sistema dinámico :

**Definición**[23, 25]: *Un sistema dinámico consiste de un espacio de estado  $X$ , un tiempo  $t \in \mathbb{R}$  y un operador de evolución (flujo)  $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ .*

Por lo tanto, un sistema dinámico es caracterizado por  $X$ ,  $t$  y  $\Phi$ . Desde el punto de vista topológico, el espacio  $X$  es un *espacio topológico* y  $\Phi$  es continuo.

Los siguientes conceptos son propiedades de un sistema dinámico [26, 27]:

- El mapa  $t \mapsto x(t)$  se le conoce como una trayectoria,
- $\{x(t) : t \in \mathfrak{R}\}$  es la órbita de  $x_0$ ,
- $x_0$  es llamado un punto fijo si  $x_t = x_0$  para toda  $t$ .

Como definimos anteriormente, un sistema dinámico también puede ser visto como una función  $f : X \rightarrow X$  en la cual  $f$  es una función que mapea un *espacio topológico*  $X$  a sí mismo. El sistema  $(X, f)$  se dice que es reversible si  $f$  es un homeomorfismo o difeomorfismo de  $X$  a  $X$  [23].

Ya hemos definido de forma general lo que es un sistema dinámico, ahora definiremos el sistema de acuerdo a su modelo matemático y a su modelo en forma de serie de tiempo. Un sistema dinámico puede ser representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (modelo matemático de orden entero), y se describe de la forma [25]:

$$\frac{d^r x_i}{dt^r} = f_i(x(t); c) \quad r = 1; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

donde  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  son las variables de estado y  $c$  son los parámetros del sistema. El sistema dinámico (3.2) también se caracteriza por  $X$ ,  $t$  y  $\Phi$ . Tiene un flujo  $\Phi_t : X \rightarrow X$  el cual es inducido por  $f$ . Topológicamente,  $X$  es una *variedad topológica*.

De acuerdo al modelo mediante series de tiempo, un sistema dinámico puede ser definido como una función  $\mathfrak{S} : [0, T] \rightarrow X$ , donde  $T$  es la longitud de los segmentos de datos. Por definición topológica, un sistema dinámico es una función que mapea un espacio a sí mismo, por lo tanto el intervalo  $[0, T]$  se puede definir como un *espacio topológico*  $X$ , entonces  $\mathfrak{S} : X \rightarrow X$  [23].

### 3.2. Sistemas dinámicos no lineales

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar en lineales o no lineales de acuerdo a la dinámica que presentan en su trayectoria. Solo se hablará de sistemas dinámicos no lineales ya que son los que se analizan en este trabajo. Los sistemas no lineales son de gran interés en diversas ramas de la ciencia debido a que la mayoría de los problemas físicos o reales son de naturaleza no lineal. Frecuentemente los sistemas dinámicos no lineales son difíciles de analizar ya que a menudo exhiben un fenómeno conocido como caos. Un ejemplo de un sistema dinámico no lineal dado por ecuaciones diferenciales de la forma (3.2) es el oscilador de Van der Pol el cual se muestra en la figura

3.1. El modelo matemático de este oscilador se presenta por las ecuaciones (3.3).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

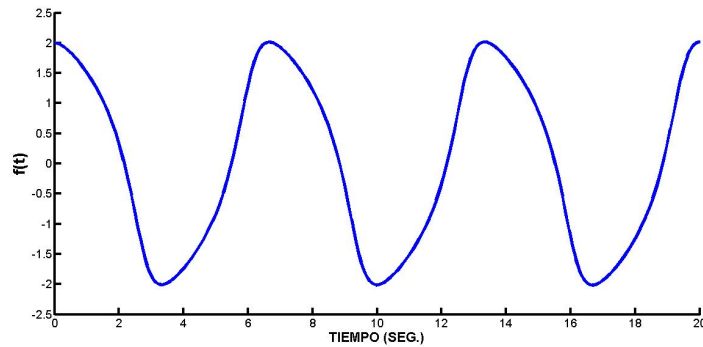


Figura 3.1: Evolución temporal de  $x_1$  de la ecuación (3.3)

Un sistema dinámico no lineal dado por series de tiempo de la forma  $\mathfrak{S} : [0, T] \rightarrow X$  se presenta en la figura 3.2, la serie de tiempo de esta figura representa la dinámica del corazón la cual es extraída de un *electrocardiograma*, esta serie de tiempo se obtuvo de la página de Physionet.

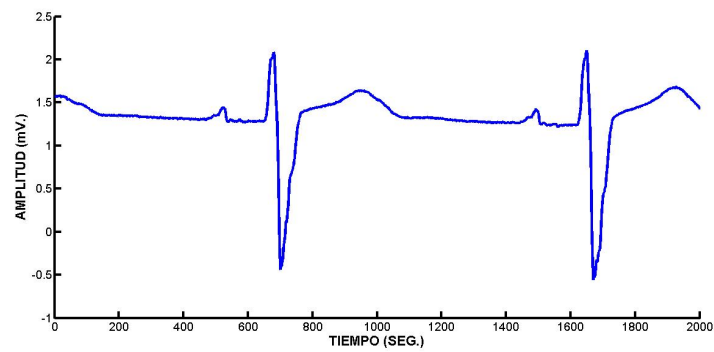


Figura 3.2: Dinámica cardíaca

El modo usual de analizar a los sistemas dinámicos no lineales de la forma (3.2) es linealizar el sistema. La linealización del sistema es un método cuantitativo que se refiere a una aproximación en el vecindario de un punto de operación (Puntos de equilibrio) o también como *punto fijo*, esto significa que es un análisis local del sistema no lineal y sólo se puede obtener información de ese punto de operación y no del comportamiento global de todo el sistema. Como se verá posteriormente, emplearemos métodos cualitativos (topológicos) para analizar el comportamiento global (analizar el tipo de superficie topológica que tiene el sistema no lineal y el tipo de nudo que genera) de algunos sistemas dinámicos no lineales. Solo se empleara la linealización para conocer los tipos de puntos fijos que tiene el sistema no lineal y relacionarlo con su superficie.

Algunas de las propiedades de la mayoría de los sistemas no lineales son [7]:

- Puntos de equilibrio múltiples
- Ciclos límite
- Escape en tiempo finito
- Bifurcaciones
- Caos

### 3.2.1. Puntos fijos de sistemas no lineales en $\mathcal{R}^3$

La estabilidad de los sistemas dinámicos no lineales de orden entero se analiza mediante la matriz Jacobiana del sistema, la cual se representa por la letra  $J$ . Los eigenvalores  $\lambda$  de la matriz  $J$  proporcionan el tipo de estabilidad que tienen los puntos fijos del sistema dinámico de acuerdo a los signos de  $\lambda$ . La matriz  $J$  de un sistema dinámico en  $\mathcal{R}^3$  tiene tres eigenvalores, uno es real y los otros dos pueden ser reales o complejos conjugados. Si los tres eigenvalores son reales y con signos opuestos se dice que es un punto silla. Si un eigenvalor es real y los otros dos son complejos conjugados, donde el signo de la parte real del complejo conjugado es opuesto al signo del eigenvalor real se dice que es un punto silla-foco. A los puntos silla se les asocia otra medida que se denomina *index*, el tipo de index va de acuerdo al número de signos positivos que tiene las partes reales de los eigenvalores, si solo tiene un signo positivo se le denomina index 1 y si tiene dos signos positivos se le denomina index 2.

### 3.3. Reseña sobre caos

De forma matemática, caos se refiere a la sensibilidad que tiene el sistema a sus condiciones iniciales, esto significa que los estados del sistema evolucionan separadamente. Esta sensibilidad hace parecer que el caos sea estocástico pero es lo contrario ya que los sistemas caóticos están definidos por ecuaciones no lineales el cual hace que el caos sea casi siempre determinístico.

Visto desde topología y sistemas dinámicos, caos se refiere a la interacción de orbitas periódicas inestables y el entrelazamiento de sus *variedades* estables e inestables. Las orbitas caóticas fueron llamadas *extrañas* por Ruelle y Takens al ver que tenían dimensión fractal [25]. Y esto llevo a la conexión del caos con objetos fractales. La no linealidad y dimensión ( $\geq 3$ ) son la clave requerida para el caos en sistemas dinámicos modelados mediante ecuaciones diferenciales mientras que en series de tiempo el comportamiento caótico se puede presentar en una dimensión.

#### 3.3.1. Atractores extraños

El embebimiento de las trayectorias de sistemas caóticos, en especial en  $\mathbb{R}^3$ , genera objetos geométricos los cuales se le conocen como *atractores extraños*. Una de las características de los atractores extraños es que exhibe sensibilidad en las condiciones iniciales del sistema y que tienen dimensión Hausdorff, lo que significa que es un atractor con dimensión no entera [6, 25, 7].

A continuación se presenta el sistema caótico de Rössler el cual vive en 3-dimensiones, y su atractor extraño. El conjunto de ecuaciones de primer orden (orden entero) que generan este atractor extraño son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . En la figura 5.3 se muestra el atractor de Rössler.

Una peculiaridad de los atractores extraños es que se pueden catalogar por el número de enrollamientos que genera el atractor. Por ejemplo, el atractor de Rössler de la figura 5.3 es de un enrollamiento. Posteriormente veremos como el número de enrollamientos nos ayudara a saber que tipo de superficie tiene el atractor extraño. El área de las matemáticas que estudia a los atractores extraños es la de *superficies topológicas*. Desde el punto

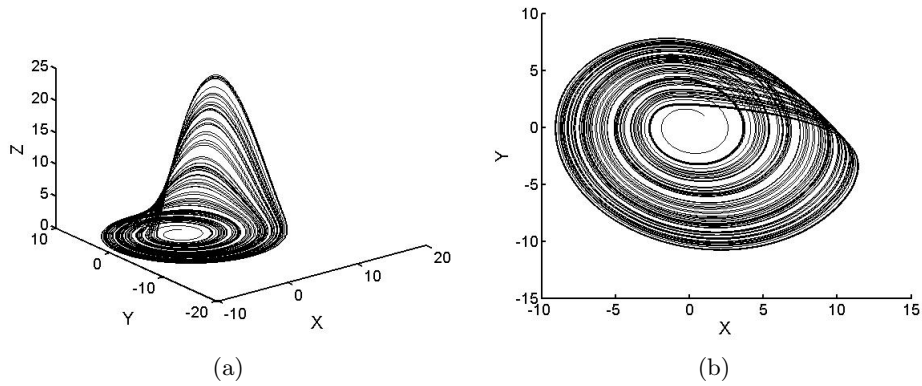


Figura 3.3: Atractor de Rössler con los parámetros  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ .  
 a) atractor en  $\mathbb{R}^3$ . b) atractor sobre el plano x-y.

de vista topológico, los atractores extraños se pueden estudiar y clasificar por el tipo de superficie que tienen, por ejemplo, se sabe que la mayoría de los atractores extraños tienen superficies toroidales [1, 2] y mediante el concepto de *género* se conoce el tipo de superficie toroidal que tiene el atractor extraño. Con la *teoría de nudos* se analiza el tipo de acomodo topológico que tienen las trayectorias no lineales o caóticas, por ejemplo, se ha encontrado que sistemas no lineales como la actividad cardiaca generan nudos [28].

### 3.4. Conclusiones

Se presenta de manera no exhaustiva conceptos básicos de sistemas dinámicos en general. De manera general se expone que los sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$ , específicamente los no lineales y los caóticos, se conforman de un conjunto de trayectorias las cuales embebidas en  $\mathbb{R}^3$  pueden generar variedades topológicas, las cuales pueden ser analizadas por herramientas de topología de baja dimensión.

## Capítulo 4

# Sistemas de orden fraccionario

La teoría de la integración y diferenciación de orden no entero, también conocida como *cálculo fraccionario* ha estado presente desde hace más de 300 años pero que en las últimas décadas ha tenido un gran crecimiento de aplicaciones en diversas áreas de la ciencia tales como: sistemas dinámicos [29], ingeniería de control [30], procesamiento de señales [31] e ingeniería biomédica [32]. Esta área de las matemáticas permite considerar la integración y la derivación de cualquier orden, no necesariamente entero.

El cálculo fraccionario nació gracias a Leibniz y L'Hopital, quienes por primera vez trataron el tema de la derivada de orden fraccionario. Desde entonces, varios científicos contribuyeron al desarrollo de esta teoría, siendo los más destacados, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Grünwald, Riemann, Letnikov, Podlubny y Caputo.

Una de las ventajas del cálculo fraccionario es que los modelos matemáticos de orden fraccionario nos permiten describir un sistema real con más exactitud que los modelos de orden entero. Una de las razones por la cual se usaron por mucho tiempo los modelos de orden entero fue la ausencia de métodos de solución para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Gracias a la investigación de científicos como Liouville, Grünwald, Riemann, Letnikov y Caputo, en el presente tenemos métodos de solución para la derivada de orden fraccionario e integral de orden fraccionario.

En este capítulo se presentan los conceptos más importantes y temas específicos que aborda el cálculo fraccionario, los cuales son relevantes en esta tesis.

## 4.1. Conceptos básicos sobre cálculo fraccionario

Las funciones especiales para el cálculo fraccionario son las siguientes:

- Función Gamma de Euler

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad \Re(n) > 0 \quad (4.1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (4.2)$$

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (4.3)$$

- Función de Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (4.4)$$

Estas funciones ayudan a resolver el operador fraccionario el cual se define a continuación.

El operador fundamental del cálculo fraccionario se denota como  ${}_a D_t^\alpha$ , donde  $a$  y  $t$  son los límites de la operación y  $\alpha$  el orden del sistema de la diferenciación o integración. El operador fraccionario se define como [33]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

Para  $\alpha = r$ , donde  $r$  es entero, la operación  ${}_0 D_t^\alpha f(t)$  da el mismo resultado como la diferenciación e integración clásica. Las aproximaciones más usadas para definir el operador fraccionario son tres, estas son la de Grünwald-Letnikov (G-L), Riemann-Liouville (R-L) y Caputo. Estas definiciones se describen como:

- Grünwald-Letnikov

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh). \quad (4.5)$$



- **Riemann-Liouville**

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau, \quad \alpha, a \in \mathfrak{R}, \alpha < 0 \quad (4.6)$$

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (4.7)$$

- **Caputo**

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (4.8)$$

## 4.2. Sistemas dinámicos de orden fraccionario

Tal como se vio en el capítulo anterior, un sistema dinámico de orden entero puede ser generalmente definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma (3.2). Un sistema dinámico de orden fraccionario es una generalización de los sistemas dinámicos de orden entero, por lo cual puede ser definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, y se describe como sigue [35]:

$${}_0 D_t^\alpha x_i = F_i(x; c) \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

En sistemas dinámicos de orden fraccionario el término “orden del sistema” no es igual a los sistemas de orden entero. En sistemas dinámicos de orden entero, el orden del sistema es igual al número de estados del sistema o al conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. En sistemas de orden fraccionario, el orden del sistema es igual a la suma de los ordenes que tenga cada ecuación diferencial que conforme al sistema dinámico. Esto quiere decir, si tenemos un sistema dinámico de orden 3 lo cual son tres ecuaciones diferenciales de primer orden, esto puede ser modificado a que una de las ecuaciones diferenciales su derivada sea de orden fraccionario, por lo cual el orden del sistema sería  $2 + \alpha$  [36], donde  $0 < \alpha \leq 1$  y si las tres ecuaciones diferenciales sus derivadas son de orden fraccionario el orden total sería  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Y a partir de esto nos hacemos la siguiente pregunta la cual es el tema principal de este trabajo ¿Con el cambio de orden se obtiene una representación topológica equivalente del atractor extraño conforme al sistema dinámico original o una diferente?

### 4.2.1. Análisis de puntos fijos de sistemas dinámicos de orden fraccionario.

En sistemas de orden fraccionario el orden de la derivada puede tomar cualquier valor arbitrario. Para sistemas de orden constante, i.e,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_i$ , se conoce como *orden conmensurado*. Para sistemas con orden diferente, i.e,  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \alpha_i$ , se conoce como orden inconmensurado [37]. Para calcular los puntos fijos de un sistema caótico o no lineales en  $\mathbb{R}^3$  de orden fraccionario es como sigue [33]:

$$\det(\text{diag}([\lambda^{m\alpha_1} \quad \lambda^{m\alpha_2} \quad \lambda^{m\alpha_3}]) - J). \quad (4.10)$$

los puntos críticos son asintóticamente estables si todos los eigenvalores de la ecuación (4.10) cumplen la siguiente condición [33]:

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2m}. \quad (4.11)$$

donde  $\alpha$  es el orden del sistema,  $m$  es el mínimo común múltiplo de  $\alpha$  y  $J$  es la matriz Jacobiana del sistema. En la figura 4.1 se muestra la región de estabilidad e inestabilidad de los sistemas dinámicos de orden fraccionario.

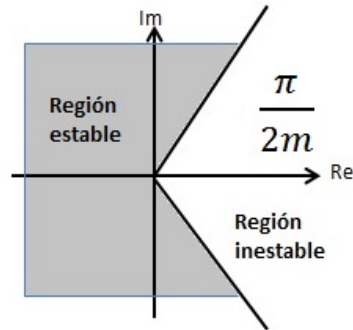


Figura 4.1: Región estable e inestable para sistemas dinámicos de orden fraccionario con  $0 < \alpha \leq 1$ .

### 4.2.2. Método numérico para simulación de sistemas dinámicos de orden fraccionario

El algoritmo para resolver la ecuación 4.9 usa el principio de *memoria corta* y se basa en la definición de G-L (4.5). El esquema numérico tiene la siguiente forma [33]:

$${}_{(k-Lm/h)}D_{tk}^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh). \quad (4.12)$$

donde  $Lm$  es la *longitud de memoria*,  $tk = kh(k = 1, 2, \dots)$ ,  $h$  es el intervalo de tiempo del cálculo y  $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$  que son los coeficientes binomiales  $c_j^{(\alpha)}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ). Para su cálculo se usa la siguiente expresión [33]:

$$c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)}. \quad (4.13)$$

La solución numérica general de la ecuación diferencial de orden fraccionario es de la forma:

$${}_a D_t^\alpha x(t) = f(x(t), t). \quad (4.14)$$

la solución de la ecuación (4.14) puede ser expresada como:

$$x(tk) = f(x(tk), tk)h^\alpha - \sum_{j=v}^k c_j^{(\alpha)} x(tk - j). \quad (4.15)$$

### 4.3. Sistema caótico en $\mathfrak{R}^3$ de orden fraccionario

Es bien sabido que en sistemas dinámicos de orden entero el caos no se presenta cuando se tiene un orden menor que tres, tomando como orden el número total de estados del sistema. Sin embargo, se ha encontrado caos en sistemas dinámicos con orden menor a tres, siendo estos sistemas dinámicos de orden fraccionario [33]. Como se mencionó anteriormente, el orden ya no depende del conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que tenga el sistema dinámico en representación de orden entero sino a la suma de los ordenes que tenga cada ecuación diferencial que conforme al sistema fraccionario.

A continuación se simula el atractor caótico de Lorenz de orden entero y de orden fraccionario, utilizando el método numérico de G-L que se mencionó anteriormente. El atractor de Lorenz es, quizá, uno de los atractores

caóticos más conocidos, no solo porque fue uno de los primeros en definirse y estudiarse, si no también porque es uno de los más complejos y peculiares. En 1963 Edward Lorenz descubre este atractor al simular un sistema que intentaba predecir el comportamiento atmosférico. Lorenz fue el primero en usar el término *efecto mariposa*, el cual en teoría de caos significa sensibilidad a las condiciones iniciales. El sistema caótico de Lorenz (orden entero) en  $\mathfrak{R}^3$  se describe mediante las siguientes tres ecuaciones diferenciales de primer orden :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z,\end{aligned}\tag{4.16}$$

donde  $\sigma$  es llamado el número de Prandtl and  $\rho$  es llamado el número de Rayleigh. Los valores de parámetros de control son usualmente  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  and  $\rho$  es el que varia. Este sistema presenta un comportamiento caótico para  $\rho = 28$ . El atarctor de Lorenz de orden entero se muestra en la figura 4.2 junto con la dinámica de sus estados.

La representación del sistema de Lorenz en orden fraccionario es la siguiente [33]:

$$\begin{aligned}{}_0D_t^{\alpha_1}x &= \sigma(y - x), \\ {}_0D_t^{\alpha_2}y &= x(\rho - z) - y, \\ {}_0D_t^{\alpha_3}z &= xy - \beta z,\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son los ordenes del sistema, para este caso los ordenes son  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.995, 0.995, 0.995)$ , donde el orden total del sistema es 2.9850. El atractor de Lorenz de orden fraccionario se muestra en la figura 4.3 junto con la dinámica de sus estados. Las condiciones iniciales para los sistemas (4.16) y (4.17) son las mismas.

#### 4.4. Procesamiento de señales de orden no entero

La diferenciación y la integración de orden fraccionaria son la herramienta principal para el procesamiento de señales de orden fraccionario. La función de transferencia de un integrador de orden fraccionario es [31]:

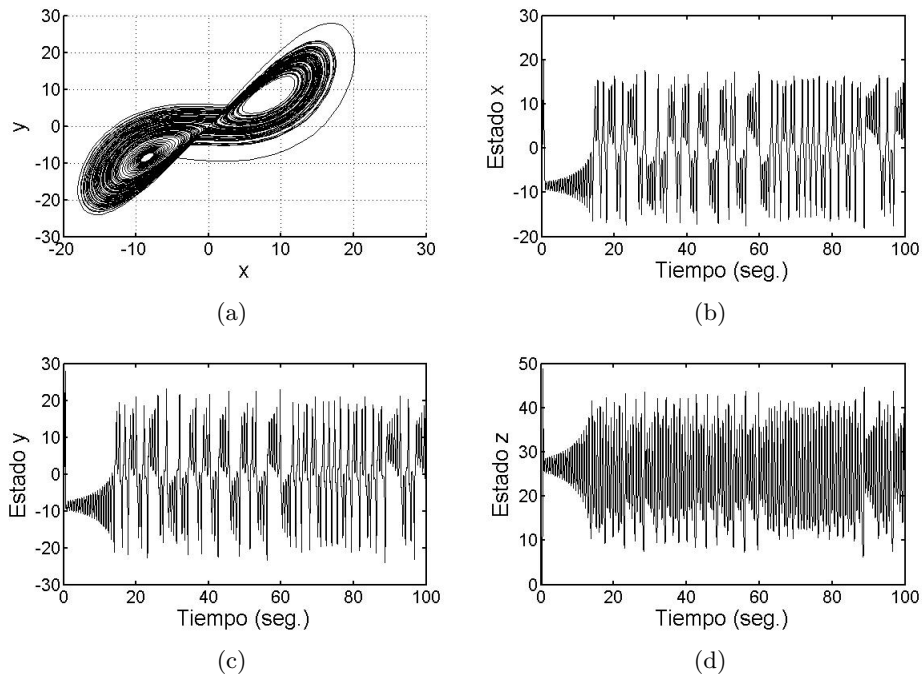


Figura 4.2: Resultados de la simulación de la ecuación (4.16) con  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 28$  a) Atractor de Lorenz sobre el plano  $x - y$ . b) Dinámica del estado  $x$ . c) Dinámica del estado  $y$ . d) Dinámica del estado  $z$ .

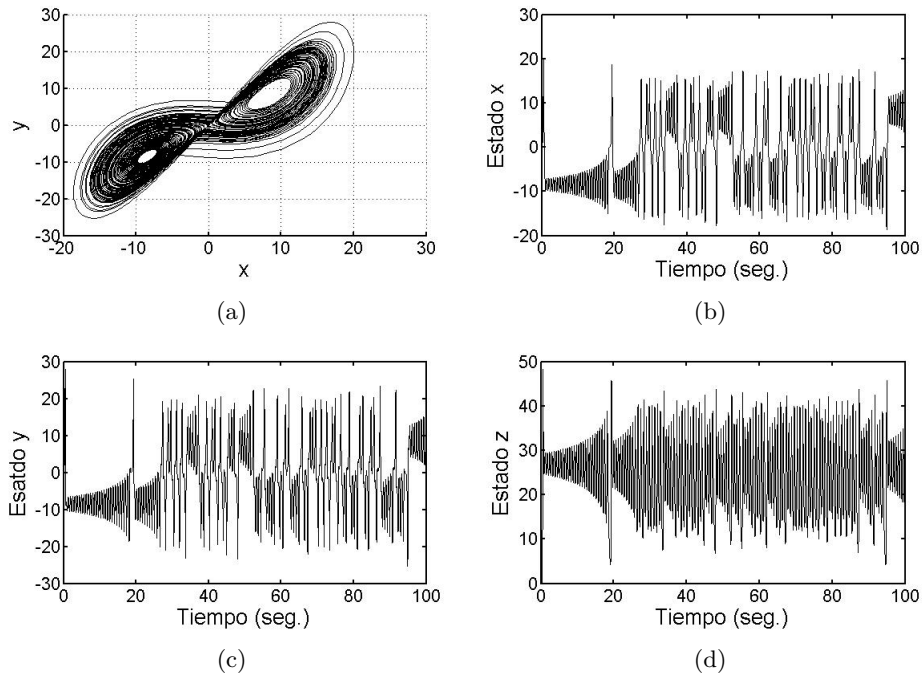


Figura 4.3: Resultados de la simulación de la ecuación (4.17) con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.995, 0.995, 0.995)$ , y  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 28$  a) Atractor de Lorenz de orden fraccionario sobre el plano  $x - y$ . b) Dinámica del estado  $x$ . c) Dinámica del estado  $y$ . d) Dinámica del estado  $z$ .

$$H = \frac{1}{s^\alpha} \quad (4.18)$$

La función de transferencia para un diferenciador de orden fraccionario es [31]:

$$H = s^\alpha \quad (4.19)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ .

#### 4.4.1. Filtrado de señales de orden entero

Del punto de vista matemático, el término *filtro* se refiere a un mapeo lineal de una señal de entrada a una señal de salida. En procesamiento de señales, el filtrado es usado entre otras cosas, para remover contenido no deseado de la señal, tal como ruido. Básicamente, la señal de entrada con ruido es mapeada a una señal de salida sin ruido, la cual no pierde las características importantes de la señal original. Los filtros pueden ser clasificados como filtros analógicos o filtros digitales.

Los filtros analógicos son circuitos electrónicos que tienen como ventaja una alta frecuencia de operación sin problemas de cuantización, y con una transición más suave de señales analógicas de bajo nivel. Estos filtros procesan señales que están en la forma de señales en tiempo continuo [31]. Existen dos tipos de filtros analógicos, el pasivo y el activo. Los filtros pasivos se basan en combinaciones de componentes pasivos como: resistencias (R), inductores (L) y capacitores (C). Los filtros activos se basan en componentes pasivos y activos (OpAmps). El orden del filtro es aproximadamente el número de capacitores que tenga el filtro. En la figura se muestra un filtro activo pasa bajas de primer orden. La frecuencia de corte para este filtro es:

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C_1} \quad (4.20)$$

Los filtros digitales operan con señales muestreadas o discretas, estas señales están en la forma de señales en tiempo discreto. Los filtros digitales pueden ser clasificados como: respuesta de impulso finito que se conoce por sus siglas en inglés como FIR o como respuesta de impulso infinito que se conoce por sus siglas en inglés se como IIR [31]. Los filtros digitales tienen como entrada una señal analógica o señal digital. Se le denomina digital más por su forma de implementación, que es a través de un programa computacional. Algunas ventajas de los filtros digitales son [31]:

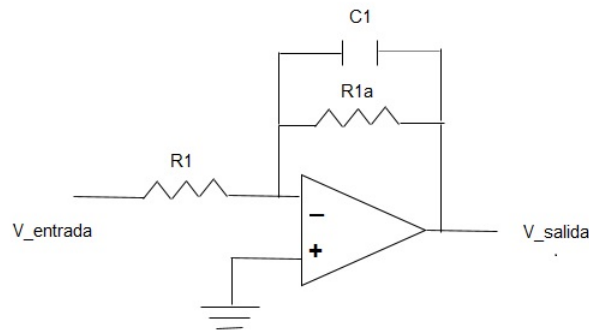


Figura 4.4: Filtro activo pasa bajas de primer orden.

1. Los filtros digitales pueden ser fácilmente diseñados en un programa computacional.
2. Los filtros digitales son programables, esto quiere decir que pueden ser fácilmente modificados en el programa.
3. Los filtros digitales son mas versátiles y flexibles en sus habilidades para procesar una variedad de señales.

#### 4.4.2. Filtros de orden fraccionario

Como se mencionó en el punto anterior, para filtros de orden entero, el orden del filtro es aproximadamente el número de capacitores que tenga el filtro. Por lo que la función de transferencia de un capacitor es aproximadamente:

$$H = \frac{1}{s^\alpha}; \quad \alpha = 1 \quad (4.21)$$

Para generar un filtro de orden fraccionario, se genera una red de escalera que consta de resistencias y capacitores [31, 39]. El capacitor del filtro se reemplaza por esta red y con los valores adecuados de las resistencias y capacitores, como resultado se obtiene un filtro de orden fraccionario. La figura 4.5 muestra esta red mencionada, donde su función de transeferencia



es la mostrada en la ecuación (4.18) para  $0 < \alpha < 1$  y se muestra un filtro activo analógico de orden fraccionario.

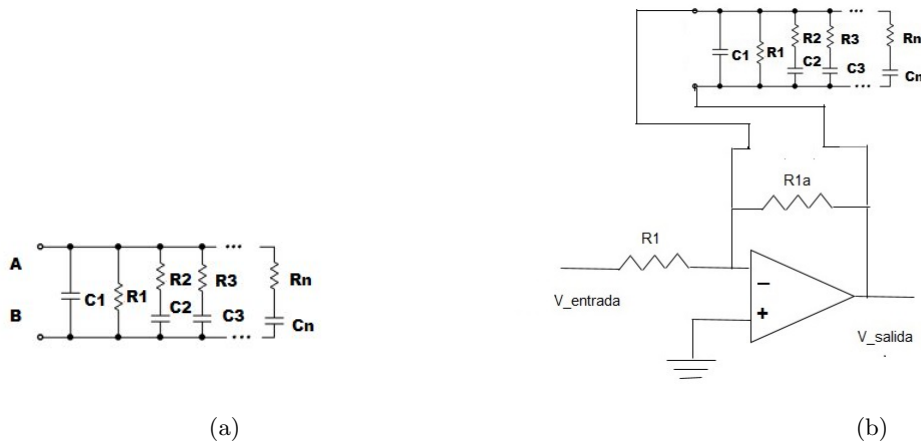


Figura 4.5: *a)* Red para generar filtros de orden fraccionarios con orden  $1/s^\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . *b)* Filtro activo de orden fraccionario con función de transferencia  $1/s^\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ .

## 4.5. Conclusiones del capítulo

Se dieron las tres definiciones más importantes para la diferenciación e integración de orden fraccionario, las cuales son la de Grünwald-Letnikov (G-L), Riemann-Liouville (R-L) y Caputo. Se mencionó que se trabajará con la de definición G-L. Se dio a conocer el concepto de lo que es un sistema dinámico de orden fraccionario y la definición de sistemas caóticos. También se abordó el tema de procesamiento de señales de orden fraccionario, donde se menciona como se realiza un filtro de orden fraccionario. También se mostró un ejemplo de sistema dinámico fraccionario con comportamiento caótico el cual se utilizará posteriormente en este trabajo.

## Capítulo 5

# Topología de baja dimensión de sistemas dinámicos en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo se exponen los conceptos y las herramientas topológicas que se usan en la literatura para analizar, estudiar y clasificar sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$ , especialmente atractores caóticos y trayectorias tridimensionales.

### 5.1. Superficie de atractores en $\mathbb{R}^3$

Topológicamente, los atractores caóticos tienen tres estructuras bien establecidas, las cuales son [1, 2]:

1. La estructura fractal.
2. El conjunto de trayectorias.
3. La superficie del atractor.

La superficie del atractor es la estructura topológica más grande del atractor. El concepto de superficie tal como se dio en el capítulo 2, se define como una variedad bidimensional que localmente se asemeja al plano  $\mathbb{R}^2$ . La esfera y el toro son ejemplos de superficies topológicas. Una de las formas de clasificar las superficies topológicas es a través de su *género*. El *género* es un invariante topológico y se define como el número de agujeros que tiene la superficie [40]. De esta manera, la esfera tiene una superficie con *género*  $g = 0$ , la superficie del toro tiene un *género*  $g = 1$ ; para  $g \geq 2$  es el toro con  $g$ -agujeros.

La mayoría de los atractores caóticos están encerrados o cubiertos por una superficie topológica, por lo que estos atractores caóticos pueden ser clasificados por su *género* [1, 2]. Por lo tanto, la superficie de un atractor caótico puede ser mapeada 1-1 si y solo si el *género* permanece invariante, esto significa que las superficies son topológicamente equivalentes.

La topología de los AE puede ser determinada por los puntos fijos del sistema dinámico [24]. En el caso de los atractores extraños en  $\mathbb{R}^3$  dependen del número, tipo y localización de los puntos fijos del sistema [1, 2].

Una forma sencilla de analizar el *género* de la superficie del AE en  $\mathbb{R}^3$  es de acuerdo a la estructura geométrica del *holder* del sistema. El *holder* es una abstracción de los flujos de la dinámica del sistema [23]. La forma canónica del AE se define como la proyección del AE sobre un *holder* en  $\mathbb{R}^2$  [1, 2]. Existe una configuración topológica de superficies que representan a una gran variedad de AE, las cuales son la forma canónica de la *cadena* y del *círculo*; las cuales son mencionadas a continuación.

La forma canónica de la cadena se representa como  $A_n$  ( $n \geq 1$ ) con  $n$ -enrollamientos interiores y  $n - 1$  agujeros cuadrados que separan a los  $n$ -enrollamientos, estos agujeros cuadrados tienen cuatro singularidades cada uno. El *género* de la forma canónica de la cadena se calcula con la fórmula  $g = 2n - 1$  donde  $n$  es el número de enrollamientos del atractor extraño. La forma canónica del círculo se representa como  $C_n$  ( $n \geq 2$ ) con  $n$ -enrollamientos y con un agujero interior con  $2n$  singularidades. El *género* para este tipo de forma canónica se calcula con la fórmula  $g = n + 1$  donde  $n$  es el número de enrollamientos del atractor extraño.

Específicamente, la forma  $A_2$  es igual a la forma  $C_2$  [1, 2], entonces definiremos  $\mathbb{E} = A_2 = C_2$ . Por lo tanto, si  $A_2 = C_2$ , entonces cualquier atractor que pertenezca a la forma canónica  $\mathbb{E}$  se le puede asociar las expresiones  $g = 2n - 1$  o  $g = n + 1$ , de lo contrario no es equivalente. Los atractores caóticos multi-scroll pertenecen a  $A_n$  [1, 2]. La figura 5.1 muestra la forma canónica  $A_1$ ,  $\mathbb{E}$ ,  $A_4$ ,  $A_7$ . la figura 5.2 muestra la forma canónica  $C_3$  y  $C_4$ .

Si dos AE tienen el mismo *género* y la misma forma canónica se dice que son topológicamente equivalentes entre sí. Por lo tanto, es común que atractores que no son dinámicamente equivalentes tengan el mismo *género* y por ende la misma superficie topológica [1, 2].

### 5.1.1. Algunos atractores caóticos y sus formas canónicas

En este punto se mostrarán el atractor de Rössler, Lorenz, Li, Chen y el atractor multi-scroll de Chua con sus respectivas superficies. De forma

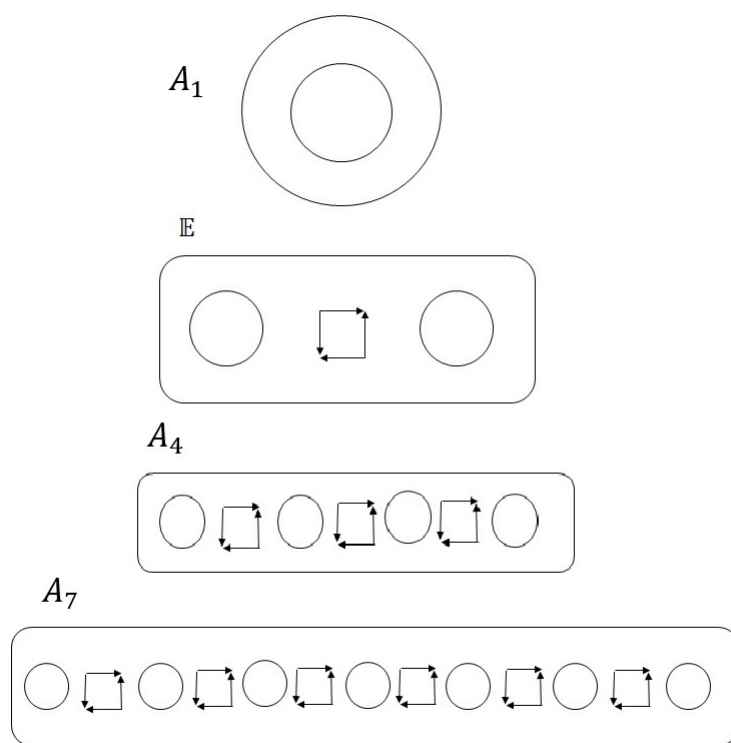


Figura 5.1:  $A_1$  representa superficies con  $g = 1$ .  $E$  representa superficies con  $g = 3$ .  $A_4$  representa superficies con  $g = 7$ .  $A_7$  representa superficies con  $g = 13$ .

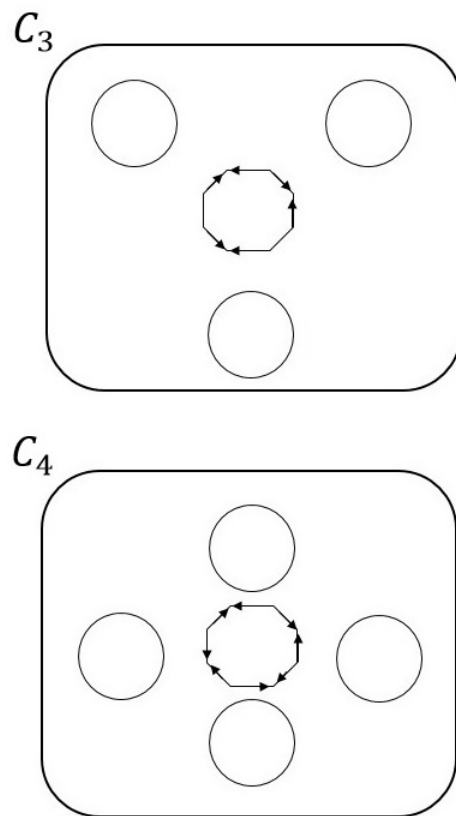


Figura 5.2:  $C_3$  representa a los atractores extraños con 3-enrollamientos, los cuales son de  $g = 4$ .  $C_4$  representa a los atractores extraños con 4-enrollamientos, los cuales son de  $g = 5$ .

introdutoria se mostrarán las superficies de los atractores que se mencionaron, ya que se analizarán algunos de estos atractores con mayor detalle en el capítulo posterior.

■ **Atractor de Rössler**

O. Rössler en 1976 propuso un sistema caótico, el cual es conocido como el atractor de Rössler. Este sistema es usado para modelar reacciones químicas. El conjunto de ecuaciones de primer orden que generan a este atractor son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c). \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . En la figura 5.3 se muestra el atractor de Rössler.

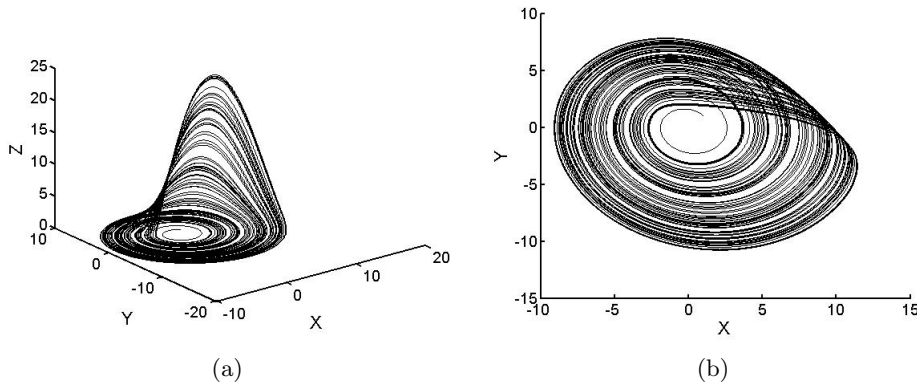


Figura 5.3: Atractor de Rössler con los parámetros  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . a) atractor en  $\mathbb{R}^3$ . b) atractor sobre el plano x-y.

Este atractor tiene 1-*scroll* y pertenece a la forma canónica  $A_1$  y por ende es de *género* 1 [1, 2], si usamos la expresión  $g = 2n - 1$  obtenemos que  $g = 1$ .

■ **Atractor de Lorenz**

El conjunto de ecuaciones de primer orden que generan el atractor de Lorenz son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= x(b - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - cz. \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde  $a = 10$ ,  $b = 28$  y  $c = 8/3$ . En la figura 5.8 se muestra el atractor de Lorenz.

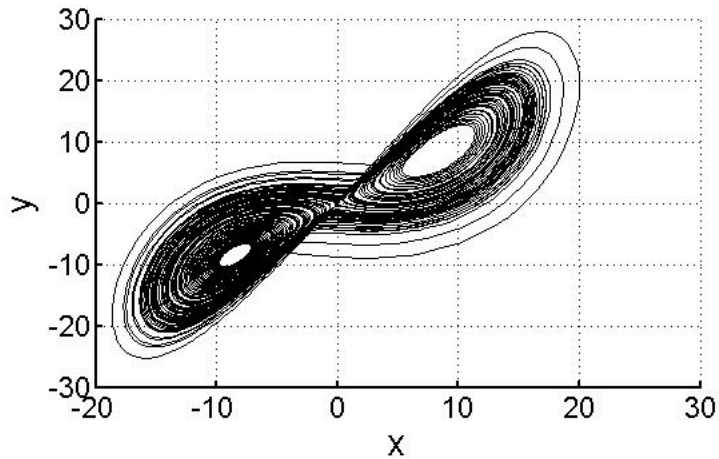


Figura 5.4: Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz tiene *2-scrolls* y pertenece a la forma canónica  $A_2$  por lo que pertenece a  $\mathbb{E}$  y su *género* es 3 [1, 2], si usamos la expresión  $g = 2n - 1$  o  $g = n + 1$  obtenemos que  $g = 3$ .

■ **Atractor de Chen**

El atractor de Chen se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde  $a = 35$ ,  $b = 3$  y  $c = 28$ . En la figura 5.5 se muestra el atractor de Chen.

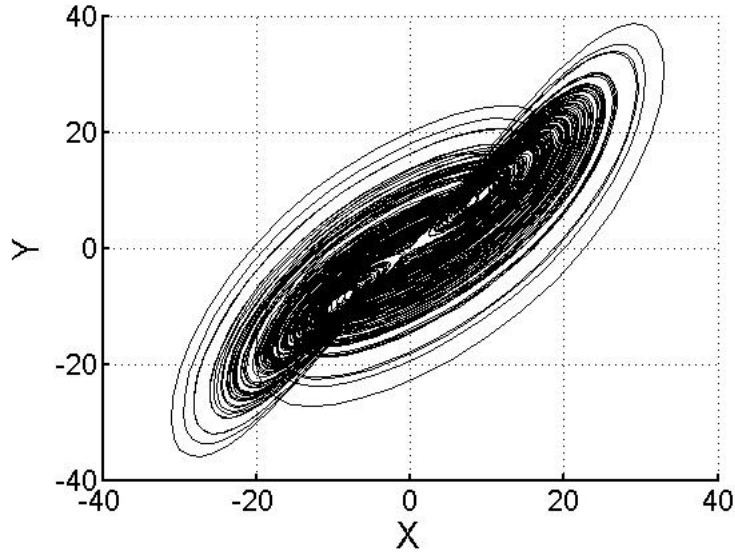


Figura 5.5: Atractor de Chen

El atractor de Chen es de *2-scrolls* y pertenece a la forma canónica  $\mathbb{E}$  y su *género* es 3, si usamos la expresión  $g = 2n - 1$  o  $g = n + 1$  obtenemos que  $g = 3$ . Aunque el atractor de Chen y el atractor de Lorenz dinámicamente no son equivalentes, sin embargo, sus superficies son topológicamente equivalentes ya que tienen el mismo *género* y pertenecen a la misma forma canónica.

■ **Atractor de Li**

El atractor caótico de Li es un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^3$  el cual tiene *3-scrolls* y se deriva del sistema de Lorenz [41]. Topológicamente el atractor esta contenido en una esfera sólida la cual es perforada por dos agujeros que se intersectan en el eje de simetría. A continuación se presenta el sistema dinámico propuesto por Li [41]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + dxz, \\ \dot{y} &= kx + fy - xz, \\ \dot{z} &= cz + xy - ex^2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde los parámetros del sistema son:  $a = 40$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0,16$ ,



$e = 0,65$ ,  $k = 55$ ,  $f = 20$  [42]. En la figura 6.1 se muestra el atractor de Li.

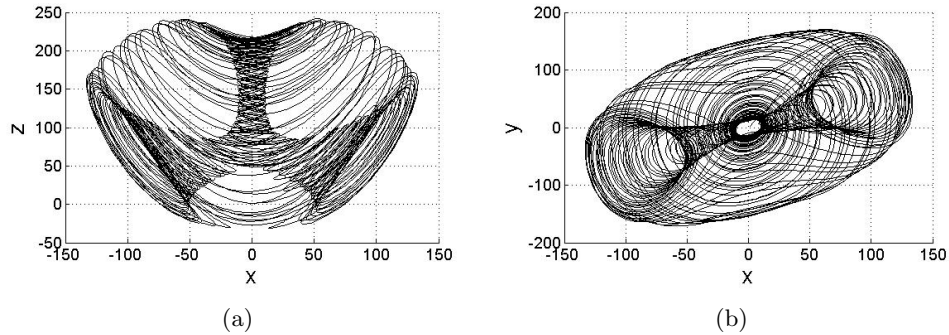


Figura 5.6: Atractor de Li con  $a = 40$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0,16$ ,  $e = 0,65$ ,  $k = 55$ ,  $f = 20$  a) Proyección sobre el plano  $x - z$ . b) Proyección sobre el plano  $x - y$ .

T.D. Letellier y R. Gilmore analizaron la superficie topológica del atractor de Li y su resultado fue que el atractor es de *género 3* [42]. Por lo que este atractor pertenece a la forma canónica  $\mathbb{E}$ . De manera rigurosa, hablando topológicamente, este atractor tiene dos agujeros, independientemente de si se intersectan y esta intersección genera el tercer agujero. Entonces, si usamos la expresión  $g = 2n - 1$  o  $g = n + 1$  el resultado es  $g = 3$ . El atractor de Li tiene la forma canónica  $\mathbb{E}$ , por lo tanto su superficie es topológicamente equivalente a la de Lorenz y Chen.

■ **Atractor de multi-scroll de Chua**

El atractor clásico de Chua genera un atractor caótico de 2-scroll; el atractor modificado de Chua genera un atractor multi-*scroll*. Un atractor multi-*scroll*, es un atractor con un número de enrollamientos mayor a 2. El atractor modificado de Chua se describe como sigue [43]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -By. \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde  $f(x) = -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right)$ . Los parámetros son:  $A=10.814$ ,  $B=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$  y  $d=0$ . El atractor multi-*scroll* de Chua se muestra en la figura 5.7.

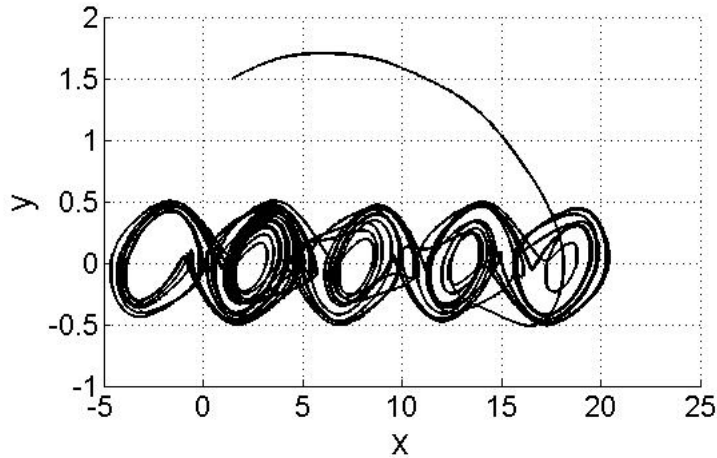


Figura 5.7: Atractor multi-*scroll* de Chua .

Como se puede observar en la figura 5.7 el atractor tiene 5-*scrolls* por lo que su forma canónica pertenece a  $A_5$  y de acuerdo a la fórmula  $g = 2n - 1$  es de  $g = 9$ .

### 5.1.2. Cambio de superficie topológica y retorno de Poincaré

El cambio en los parámetros del sistema dinámico de orden entero genera cambios en la topología del atractor [4]. El cambio puede generarse en el acomodo topológico de sus trayectorias y cambios globales el cual afecte la superficie del atractor.

El retorno de Poincaré, topológicamente nos sirve para verificar si el atractor sufre cambio en su superficie; en particular en su *género* [4]. El retorno de Poincaré se puede definir como la intersección sucesiva de trayectorias en el espacio de estados dada una superficie generada por un sistema dinámico continuo [24]. Para un atractor con  $g > 3$  el proceso topológico se le conoce como *tearing* (en español se puede traducir como división o razgado, es cuando en el primer retorno de Poincaré las trayectorias se dividen o no se juntan) o *tearing + folding*, para un atractor con  $g=1$  se le conoce como *folding* (en español se puede traducir como unión o doblés, es cuando en el primer retorno de Poincaré las trayectorias se unen en un solo componente). Estos cambios ocurren cuando el flujo cambia a través del eje  $Z$  y por ende ocurre cambios en los puntos de estabilidad [4]. A continuación, se presenta

el cambio de *género* del atractor de Lorenz y su retorno de Poincaré, el cual verifica el cambio de *género*.

En la figura 5.8 se muestra el atractor de Lorenz de la ecuación (5.2) con  $g = 3$  donde  $a = 10$ ,  $b = 28$  y  $c = 8/3$ ; en el artículo [4] se encuentran los valores de los parámetros que generan cambios en el *género* de algunos sistemas dinámicos de orden entero. En la figura 5.9 se muestra el retorno de Poincaré del atractor de la figura 5.8 el cual proyecta 4 líneas divididas al cual se le conoce como el proceso de *tearing*.

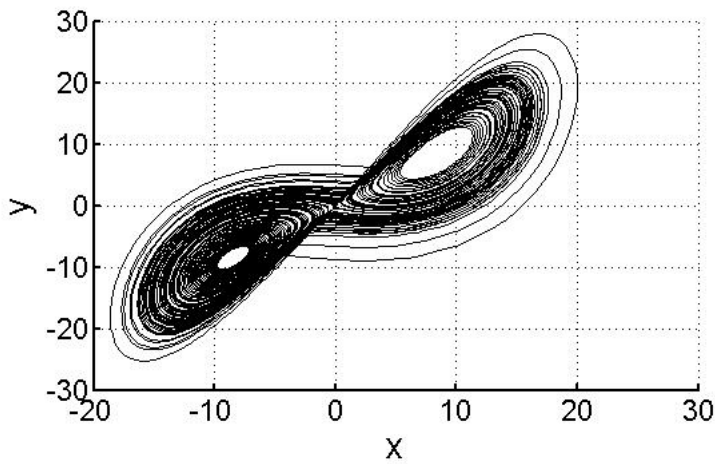


Figura 5.8: Atractor de Lorenz con  $g=3$

En la figura 5.10 se muestra el atractor de Lorenz de la ecuación (5.2) con  $g = 1$  donde  $a = 30$ ,  $b = 278.56$  y  $c = 1$ . La figura 5.11 se muestra el retorno de Poincaré del atractor de la figura 5.10 el cual proyecta una sola línea como componente del primer retorno de Poincaré al cual se le conoce como el proceso de *foldng*

En la figura 5.12 se muestra el atractor de Rössler de la ecuación (5.1) el cual ya sabemos que su *género* es 1 donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . En la figura 5.13 se presenta el primer retorno de Poincaré el cual muestra solo un componente lo que ratifica su *género*.

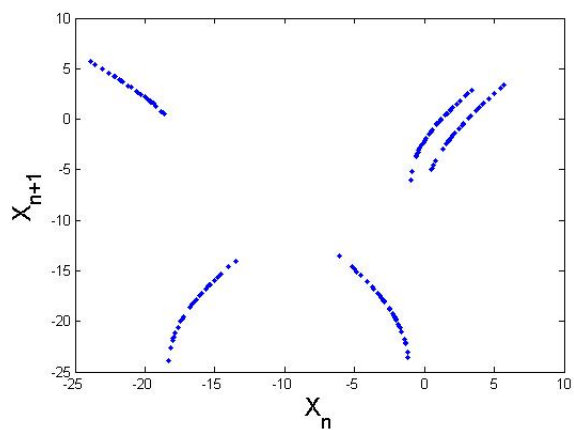


Figura 5.9: Retorno de Poincaré para el atractor de Lorenz con  $g=3$

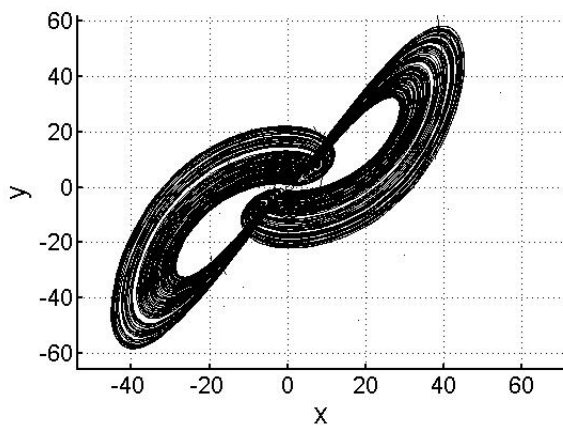


Figura 5.10: Atractor de Lorenz con  $g=1$

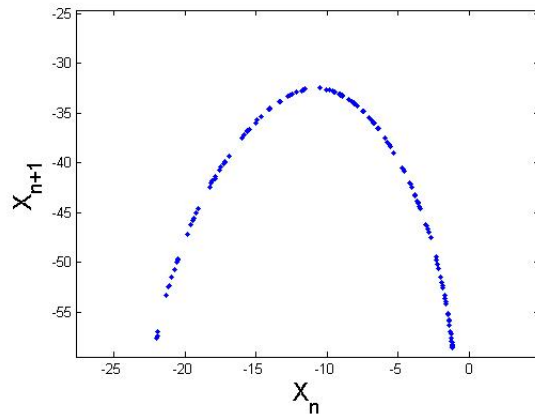


Figura 5.11: Retorno de Poincaré del atractor de Lorenz con  $g=1$

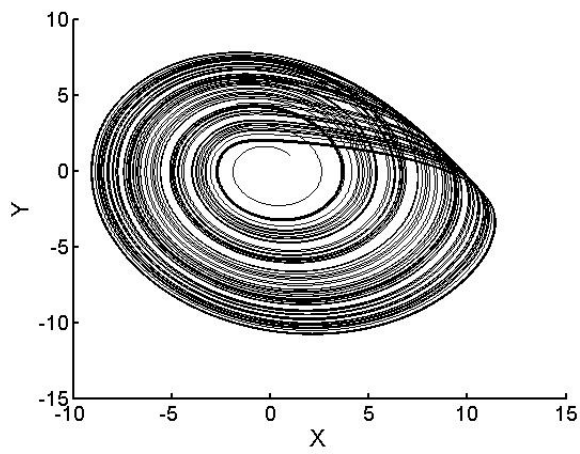


Figura 5.12: Atractor de Rössler con  $g=1$

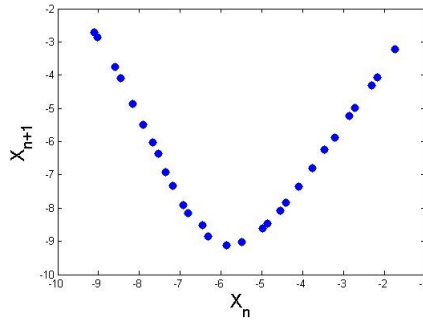


Figura 5.13: Retorno de Poincaré del Atractor de Rössler con  $g=1$

## 5.2. Topología de trayectorias en $\mathbb{R}^3$

El análisis topológico de trayectorias tridimensionales mediante teoría de nudos es relativamente nuevo, a finales de los años 60 fue cuando se propuso el uso de teoría de nudos para el análisis de sistemas dinámicos y en 1976 Birman y Williams lo proponen para sistemas caóticos.

Con la teoría de nudos se analiza el tipo de arreglo o acomodo topológico que tienen las trayectorias en  $\mathbb{R}^3$ . Desde la perspectiva de una persona, saber el tipo de nudo que se genera en una trayectoria tridimensional mediante un análisis manual es complicado y tardado; y saber si dos trayectorias que se visualizan diferentes son el mismo nudo es complicado también. Por lo que es necesario usar programas de análisis topológico para:

1. Calcular el polinomio del nudo y así saber si dos trayectorias son topológicamente equivalentes.
2. Para simplificar el análisis.

En esta sección se expondrá la teoría esencial para analizar las trayectorias tridimensionales mediante conceptos y herramientas de teoría de nudos.

### 5.2.1. Nudos en sistemas dinámicos generados por ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathfrak{R}^3$

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, un nudo se puede definir como una curva simple generada por una trayectoria tridimensional. Si la trayectoria se genera por la solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de tercer-orden, entonces, las orbitas periódicas de la solución de la EDO son nudos topológicos y una colección de orbitas periódicas de una trayectoria tridimensional forma una unión disjunta de nudos [44]. Topológicamente, los nudos generados se pueden representar como una solución global de la trayectoria de la EDO de tercer-orden [44].

Entonces, por el concepto de equivalencias de nudos, se dice que dos trayectorias tridimensionales que se visualizan diferentes son equivalentes si las dos generan el mismo tipo de nudo.

De acuerdo a la simplicidad o complejidad de la trayectoria tridimensional, R. Ghrist categoriza dos tipos de nudos [45]:

- nudos simples
- nudos complicados

A esto también se le puede añadir, que mientras más complicada sea la trayectoria más complicado será identificar los nudos que se generan. Por ejemplo, una trayectoria complicada sería la trayectoria tridimensional que genera el sistema caótico de Lorenz el cual puede contener una cantidad innumerable de nudos [46]; lo complicado de este tipo de sistemas es encontrar las orbitas periódicas inestables y así identificar los nudos que se generan.

A continuación, en la figura se presenta la trayectoria tridimensional que representa la estructura topológica del nudo trébol generado por la solución del sistema de Parris y Rassai, el cual se representa por las siguientes EDO  $\in \mathfrak{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -mx_2 + nx_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= mx_1 + nx_2x_3, \\ \dot{x}_3 &= (n/2)(1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde las condiciones iniciales son:  $x_1(0) = -2.5, x_2(0) = 2.5, x_3(0) = 0.78$  y los parámetros del sistema son:  $m = 2$  y  $n = 3$ .

### 5.2.2. Plantilla del nudo

En este punto se explicará la herramienta topológica que hace posible investigar los nudos en trayectorias en  $\mathfrak{R}^3$ . A esta herramienta se le conoce

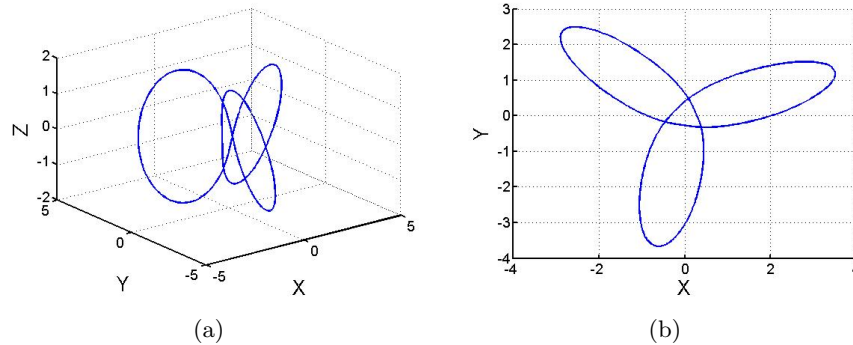


Figura 5.14: Estructura topológica del nudo trébol generado por la solución del sistema (5.6) a) Trayectoria en  $\mathbb{R}^3$ . b) Proyección de la trayectoria en  $\mathbb{R}^2$ .

como la *plantilla del nudo* o mejor conocida por su nombre en inglés como *template* o *knot holder*; para referirnos a esta herramienta se usará su nombre en inglés. El *template* fue desarrollado por Birman y Williams para investigar los nudos que se generaban en trayectorias tridimensionales y es el instrumento principal para estudiar la estructura topológica de las trayectorias en  $\mathbb{R}^3$ . El *template* se puede definir, de manera no formal, como una 2-variedad la cual contiene las órbitas periódicas de la trayectoria. La principal función de esta herramienta es determinar la relación entre la topología de las orbitas periódicas (nudos), la dinámica y bifurcaciones del sistema.

**Definición:** *El template es una 2-variedad compacta con frontera y un semiflujo suave expansivo construido por dos tipos de procesos estructurales: unión y división [46, 23, 47].*

La dinámica sobre un *template* es un semiflujo ya que solo va en una dirección y no es reversible [44, 23]. Tal como se definió anteriormente: un *flujo* (o semiflujo) es una familia  $\Phi_t : X \rightarrow X$  de mapas de un conjunto  $X$  en sí mismo, para  $t \in \mathbb{R}(t \geq 0)$ . Los procesos de la unión y división se presentan en la figura 5.15. El proceso de la unión y división son conectadas en tal manera que no hay finales libres. Estas dos conexiones forman una estructura de 2-dimensiones compacta con frontera [44, 23].

La conexión de estos dos procesos también se le puede conocer como atracción y repulsión en las trayectorias de un sistema dinámico, tal como se muestra en la figura 5.16, donde las flechas representan la atracción



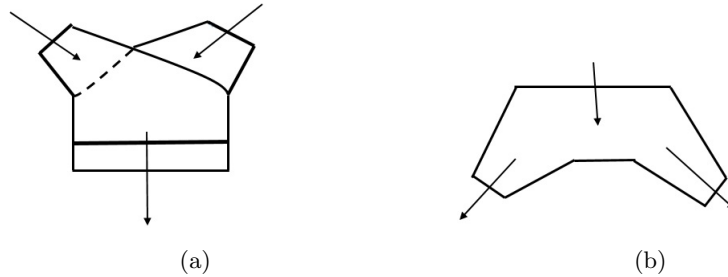


Figura 5.15: a) Proceso de unión. b) Proceso de división.

y repulsión de las trayectorias formando así una estructura compacta con frontera.

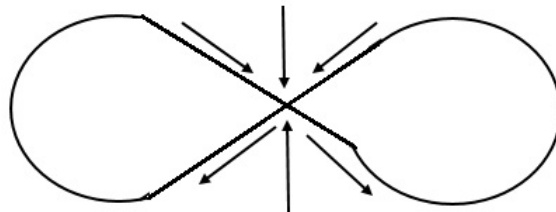


Figura 5.16: Representación gráfica del proceso de atracción y repulsión de trayectorias en un sistema dinámico.

El siguiente teorema da la conexión entre *templates* y nudos en trayectorias [46, 23, 47].

**Teorema** (Birman y Williams): *Dado un flujo  $\Phi$  sobre  $\mathbb{R}^3$  que tiene un conjunto  $\lambda$  invariante hiperbólico no trivial, los nudos o enlaces de órbitas periódicas de  $\lambda$  son una correspondencia 1:1 con los enlaces o nudos de las órbitas periódicas sobre algún template embebido  $\mathfrak{T} \subset \mathbb{R}^3$ .*

Por lo tanto, el *template* debe contener un número infinito de órbitas

anudadas disjuntas. El ejemplo más peculiar de un *template* es el *template* del atractor de Lorenz, el cual se muestra en la figura 5.17.

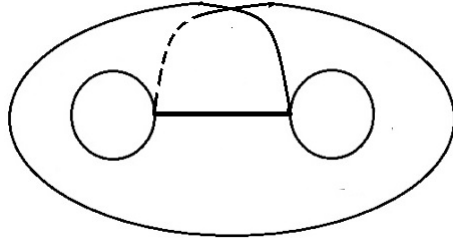


Figura 5.17: *Template* simple del atractor de Lorenz.

En la figura 5.18 se muestra como ejemplo demostrativo una trayectoria simple de un nudo trivial sobre el *template* de Lorenz.

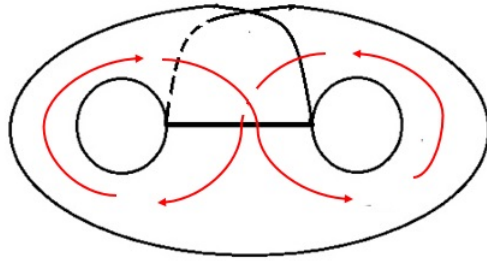


Figura 5.18: Trayectoria simple sobre el *template* de Lorenz.

### 5.3. Conclusiones

De manera práctica se dan los conceptos teóricos de superficies y teoría de nudos para analizar y estudiar sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$ . Cualquier em-

*CAPÍTULO 5. TOPOLOGÍA DE BAJA DIMENSIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS EN  $\mathbb{R}^3$*  70

bebimiento en  $\mathbb{R}^3$  puede representar una superficie topológica o un nudo. La ventaja del análisis topológico respecto al análisis cuantitativo es que, el análisis topológico a sistemas en  $\mathbb{R}^3$  ayuda a conocer la estructura global del sistema y saber si hay un cambio de trayectoria o de superficie; y el análisis cuantitativo no proporciona esa información.

## Capítulo 6

# Resultados

El presente capítulo se divide en dos partes. En la primera, se presentan los cambios topológicos que sufren los atractores extraños al cambiar el orden del mismo. La segunda, se muestra el análisis por teoría de nudos de trayectorias tridimensionales al cambio de orden del sistema.

### 6.1. Cambio de la superficie topológica de atractores extraños al variar el orden del sistema

Antes de exponer los resultados obtenidos, primeramente definiremos la equivalencia topológica entre superficies de atractores de orden entero y orden fraccionario.

Desde el punto de vista topológico, dos superficies topológicas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son topológicamente equivalentes si hay un homeomorfismo o difeomorfismo entre ellas, lo que significa que hay un mapeo continuo 1-1 con inversa continua. Como se mencionó, el *género* es un invariante topológico de superficies, y que se define como el número de agujeros independientes o disjuntos que tiene la superficie. Entonces, dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son topológicamente equivalentes si tienen el mismo *género*. Por lo tanto, si el *género* permanece inalterable se dice que hay un homeomorfismo o difeomorfismo entre las dos superficies. Topológicamente, un sistema dinámico consiste de una variedad o un espacio topológico  $\Sigma$  también conocida como superficie [34], un tiempo  $t \in \mathfrak{R}$  y de un operador de evolución  $\Phi : \Sigma \times \mathfrak{R} \rightarrow \Sigma$  inducido por  $F^r$ . Por lo tanto, un sistema dinámico también se define como una función  $F^r : \Sigma \rightarrow \Sigma$  que mapea una superficie a sí misma [48]. Como se mencionó anteriormente, los atractores extraños se clasifican por su *género* [1, 2]. Entonces, hablando estrictamente de la superficie topológica de un sistema dinámico caótico

en  $R^3$ , las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  de dos atractores extraños, las cuales están dadas por  $F_1^r : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$  y  $F_2^r : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , son topológicamente equivalentes si tienen el mismo *género*, por lo que hay un difeomorfismo tal que  $g(\Sigma_1) = g(\Sigma_2)$ . Supongamos que  $F_1^r$  y  $F_2^r$  son dos sistemas caóticos distintos y que generan dos atractores que dinámicamente no son equivalentes pero sus superficies son topológicamente equivalentes ya que  $g(\Sigma_1) = g(\Sigma_2)$ , por eso es común que atractores extraños no equivalentes dinámicamente tengan la misma superficie [1, 2].

Entonces, un sistema dinámico de orden fraccionario va a constar de una superficie  $\beta$ , un tiempo  $t \in \mathfrak{R}$  y de un operador de evolución  $\psi : \beta \times \mathfrak{R} \rightarrow \beta$  inducido por  $F^\alpha$ ; por lo tanto,  $F^\alpha : \beta \rightarrow \beta$  es una función que mapea una superficie a sí misma. A continuación se dará una definición sobre la equivalencia entre la superficie de un atractor de orden entero y uno de orden fraccionario.

**Definición.** Dos atractores extraños generados por  $F^r : \Sigma \rightarrow \Sigma$  y  $F^\alpha : \beta \rightarrow \beta$ , sus superficies son topológicamente equivalentes si  $g(\Sigma) = g(\beta)$ . Por lo tanto, sea  $f^{r \rightarrow \alpha} : \Sigma \rightarrow \beta$  una función que mapea un atractor extraño de orden entero a un atractor extraño de orden fraccionario, entonces sus superficies  $\Sigma$  y  $\beta$  son topológicamente equivalentes si y solo si  $g(\Sigma) = g(\beta)$ , sin importar que  $\Phi \neq \psi$ .

A continuación se introducirán algunos atractores extraños los cuales modificaron su topología al cambiar el orden del sistema, y un caso especial donde al cambiar el orden cambia de estructura geométrica con respecto al original pero la superficie topológica sigue siendo la misma al atractor original.

### 6.1.1. Atractor extraño de Li de orden fraccionario

Primeramente analizaremos el atractor extraño de Li de orden entero, el cual se describe por las siguientes ecuaciones diferenciales [41]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + dxz, \\ \dot{y} &= kx + fy - xz, \\ \dot{z} &= cz + xy - ex^2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde los parámetros del sistema son:  $a = 40$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0.16$ ,  $e = 0.65$ ,  $k = 55$ ,  $f = 20$  [42]. En la figura 6.1 se muestra el atractor de Li. Este atractor extraño es un atractor que tiene 3-enrollamientos [41]. Topológicamente, el atractor de Li está contenido en una esfera sólida la cual es perforada por dos agujeros que se intersectan en el punto  $(0, 0, z)$  [42], el atractor de Li es

de género 3 y se demuestra en [42], por lo que su superficie se representa por  $\mathbb{E}$ .

El sistema tiene tres puntos fijos, uno en el origen  $O = (0, 0, 0)$ , y dos que son simétricos  $C_1 = (x, y, z)$  y  $C_2 = (-x, -y, z)$  [41], donde:

$$x = \sqrt{\frac{ca(k+f)}{ea+efd+kd-a}}, \quad y = \frac{a-kd}{a+fd} \sqrt{\frac{ca(k+f)}{ea+efd+kd-a}}, \quad z = \frac{a(k+f)}{a+fd}.$$

con el conjunto de parámetros del sistema, los puntos fijos son:

$$C_1 = (41.98i, 30.21i, 69.4444)$$

$$C_2 = (-41.98i, -30.21i, 69.4444)$$

y el punto fijo en el eje- $z$  es:

$$z_1 = (0, 0, 69.4444)$$

en la figura 6.2 se representan gráficamente los puntos fijos.

El punto  $z_1$  es de gran importancia para la topología del atractor de Li de orden entero, ya que es donde se genera el tercer enrollamiento [42], por lo que se analizará su eigenvalor y será comparado con el de orden fraccionario. La matriz Jacobiana del sistema (6.1) es la siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} -a + dz & a & dx \\ k - z & f & -x \\ y - 2ex & x & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eje } z} \begin{bmatrix} -a + dz & a & 0 \\ k - z & f & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

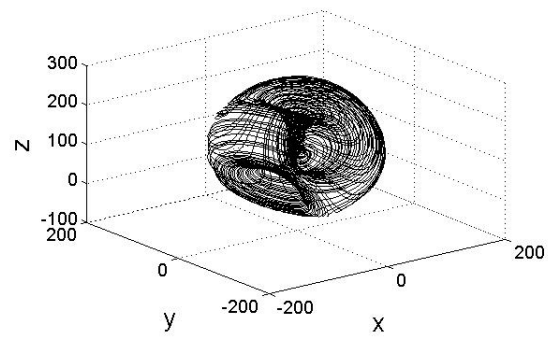
evaluando los tres puntos fijos y  $z_1$  en (6.2) se obtienen sus correspondientes eigenvalores, los cuales se muestran enseguida:

$$O : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-65.67, 45.67, 1.83)$$

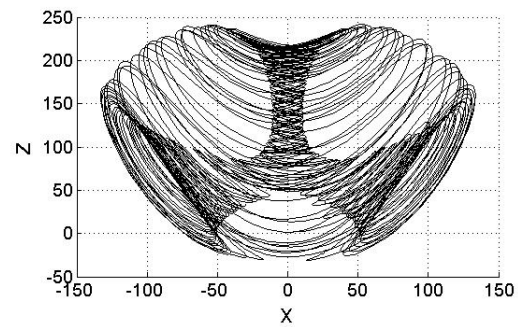
$$C_{1,2} : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (43.45, -5.63, -44.87)$$

$$z_1 : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-8.89, 0, 1.83)$$

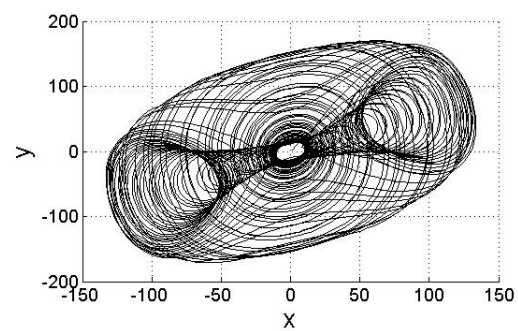
El punto  $O$  es un punto silla index 2, los puntos  $C_1$  y  $C_2$  son dos puntos silla index 1 y el punto  $z_1$  es un nodo silla. El nodo silla es un punto no hiperbólico, y significa que hubo una bifurcación donde dos puntos de equilibrio se colisionan y se unen en un solo punto de equilibrio [41]. Por lo tanto este nodo silla hace que los dos agujeros que perforan al atractor se unan en  $z_1$  generando un tercer agujero. La comprobación de que este atractor de tres enrollamientos es de  $g = 3$  se puede ver en [42]. La explicación que



(a)



(b)



(c)

Figura 6.1: Resultado de la simulación del sistema (6.1) con  $a = 40$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0,16$ ,  $e = 0,65$ ,  $k = 55$ ,  $f = 20$  a) Atractor en  $\mathbb{R}^3$ . b) Proyección sobre el plano  $x - z$ . c) Proyección sobre el plano  $x - y$ .

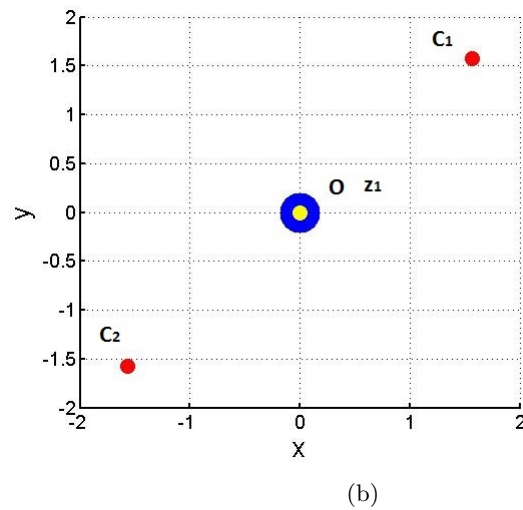
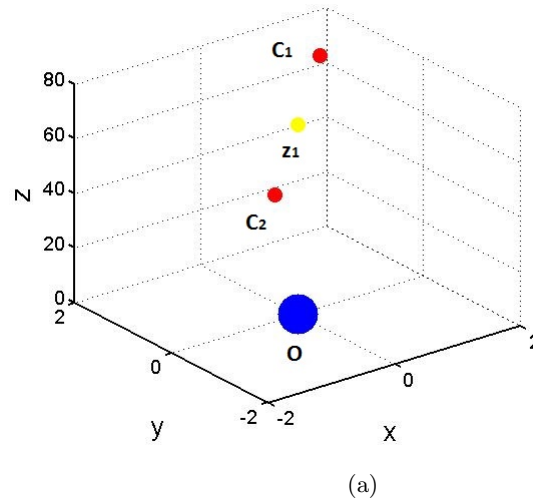


Figura 6.2: Representación gráfica de los puntos  $O$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , y  $z_1$  a) Puntos en  $\mathbb{R}^3$ . b) Puntos sobre el plano  $x - y$ .



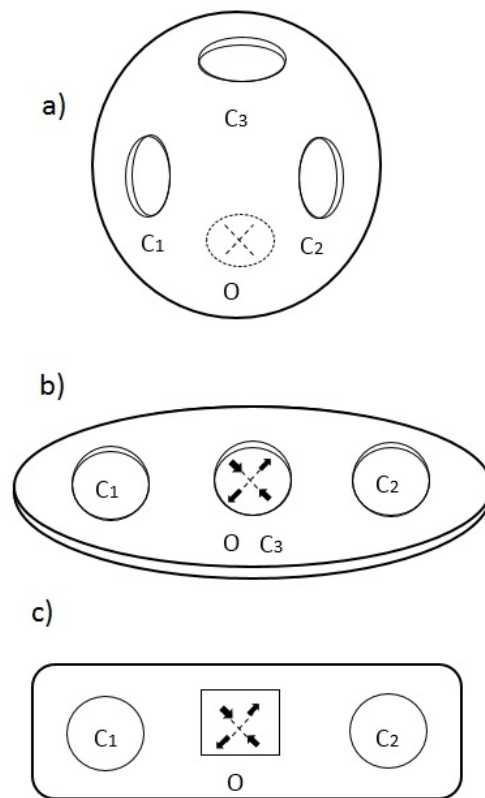


Figura 6.3: Deformación del atractor de Li a la forma canónica  $\mathbb{E}$ . *a)* Se representan los agujeros  $O$ ,  $C_1$  y  $C_2$ . Y el agujero  $C_3$  que se genera al intersectarse  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_1$ . *b)* Al deformar suavemente la superficie del atractor, el agujero  $O$  coincide con  $C_3$ . *c)* Forma canónica que representa la superficie del atractor de Li.

se expondrá para comprobar que el atractor es de  $g = 3$  es siguiendo la misma comprobación de [42] pero ahora con los puntos fijos del atractor, para después comprobar los resultados al cambiar el orden del sistema (6.1)

Sabiendo de antemano que el *género* está determinado por los puntos fijos que genera el atractor [42], supongamos que el punto  $O$  es el agujero del atractor que se genera en el origen, los puntos  $C_1$  y  $C_2$  son los dos agujeros simétricos que se generan en el atractor y la intersección de  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_1$  genera un cuarto agujero el cual llamaremos  $C_3$ , esto se observa en la figura 6.3(a). Deformando la superficie del atractor, tal como se explica en [42], se observa en la figura 6.3(b) que el agujero  $O$  coincide con  $C_3$ ; tal como se puede observar en la figura 6.2(b) donde al proyectar los puntos fijos en el plano  $x - y$  el punto  $z_1$  coincide en el punto  $O$ . En la figura 6.3(c) se muestra la superficie resultante, la cual es del tipo  $\mathbb{E}$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son los puntos simétricos del atractor y  $O$  es el punto en el origen el cual separa a  $C_1$  y  $C_2$ , por lo que es  $g = 3$ .

Ya que  $A_2 = C_2$ , entonces cualquier atractor que pertenezca a la forma canónica  $\mathbb{E}$  se le puede asociar las dos expresiones  $g = 2n - 1$  y  $g = n + 1$ . Por lo tanto  $2n - 1 = n + 1$ , entonces  $n = 2$ . Por lo que, para que la superficie de un atractor pertenezca a  $\mathbb{E}$  la condición es que el atractor tenga dos enrollamientos. Entonces, de manera estricta, el atractor de Li genera dos enrollamientos por sus puntos fijos  $C_1$  y  $C_2$  sin tomar en cuenta el tercero que se genera por la intersección, por lo tanto  $g = 2n - 1 = n + 1 = 3$ .

Lo más interesante de este atractor es que su sección de Poincaré muestra perfectamente los tres agujeros que se generan en la superficie ratificando su *género* tal como se muestra en la figura 6.4(a) y en la figura 6.4(b) se presenta su primer retorno de Poincaré el cual se ve el proceso que se llama *tearing + folding* el cual representa al  $g = 3$ .

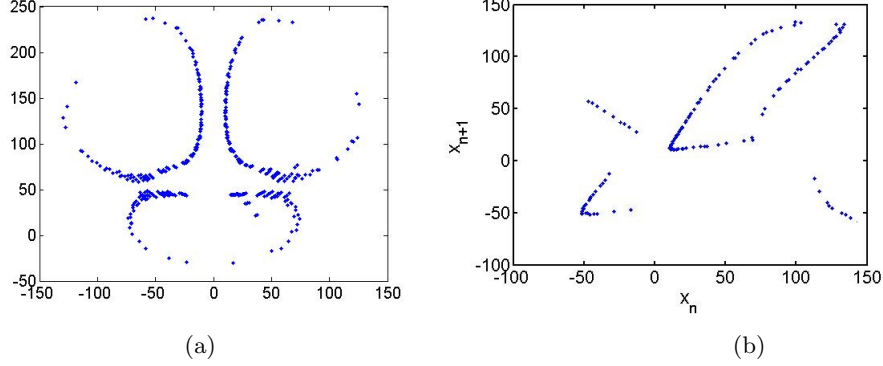


Figura 6.4: Análisis de Poincaré del atractor de Li. *a)* Sección de Poincaré del atractor de Li de orden entero. *b)* Primer retorno de Poincaré del atractor de Li de orden entero.

### Atractor de Li con orden 2.7

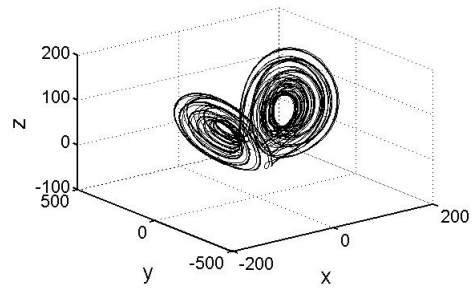
De acuerdo a (4.9), el sistema dinámico de Li (6.1) puede ser descrito como:

$$\begin{aligned}
 D_t^{\alpha_1} x &= a(y - x) + dxz, \\
 D_t^{\alpha_2} y &= kx + fy - xz, \\
 D_t^{\alpha_3} z &= cz + xy - ex^2,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

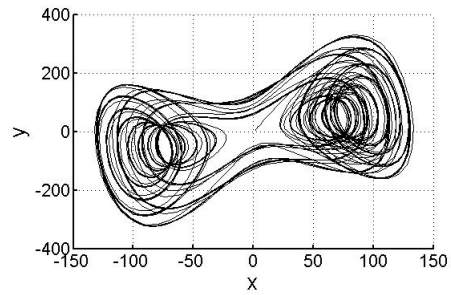
donde los parámetros son los mismos que el sistema de orden entero, solo se cambia el orden  $\alpha$  del sistema. Con orden inconmensurado  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$  donde el orden total es 2.7, el atractor que se genera con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$  se muestra en la figura 6.5.

Conforme a la ecuación (4.10) y de acuerdo con los valores de  $\alpha$  del sistema fraccionario se tiene:

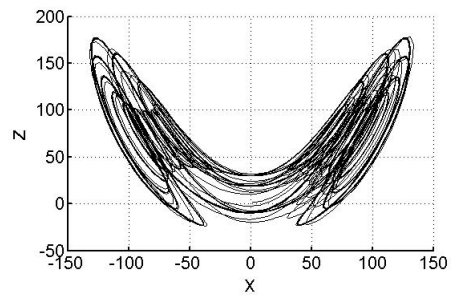
$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda^{10} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^7 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{10} \end{bmatrix} - J \right) \tag{6.4}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 6.5: Resultado de la simulación del sistema (6.3) con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$  a) Atractor fraccionario en  $\mathbb{R}^3$ . b) Proyección sobre el plano  $x - y$ . c) Proyección sobre el plano  $x - z$ .

donde  $m = 10$ . Para que los eigenvalores del sistema sean asintóticamente estable la condición (4.11) debe cumplir con:

$$|arg(\lambda)| > 0.1571 \tag{6.5}$$

Evaluando los puntos  $O$ ,  $C_{1,2}$  y  $z_1$  en (6.6) se obtienen los eigenvalores del sistema de orden fraccionario, los cuales se muestran en el cuadro 6.1 y su argumento se muestra en el cuadro 6.2. De acuerdo al argumento de los eigenvalores, el punto  $O$  es un punto silla index 2, los puntos  $C_{1,2}$  son puntos silla-foco index 1, el punto  $z_1$  es un punto silla-foco index 1. Claramente, se observa que el número de enrollamientos y la forma geométrica del atractor del sistema (6.1) cambió con respecto al sistema (6.3), por lo que se genera un nuevo atractor al cambiar el orden del sistema. Este resultado se debe a que el punto  $z_1$  cambia de nodo silla a punto silla index 1 y es el mismo tipo de equilibrio que los puntos  $C_1$  y  $C_2$ ; por lo tanto los dos enrollamientos  $C_1$  y  $C_2$  no colisionan, por lo que no generan el tercer enrollamiento que se ve en el atractor de Li de orden entero.

Cuadro 6.1: Eigenvalores del sistema de Li de orden fraccionario 2.7.

	$O$	$C_{1,2}$	$z_1$
$\lambda_1$	1.6414	1.6169	1.3551
$\lambda_2$	1.0625	1.1408-0.3835i	0.8596+0.6245
$\lambda_3$	-1.0625	1.1408+0.3835i	0.8596-0.6245

Cuadro 6.2: Argumento de los eigenvalores del sistema de Li de orden fraccionario 2.7.

	$ arg(\lambda_O) $	$ arg(\lambda_{C_{1,2}}) $	$ arg(\lambda_{z_1}) $
$\lambda_1$	0	0	0
$\lambda_2$	0	0.3243	0.6283
$\lambda_3$	3.1416	0.3243	0.6283

En la figura 6.5 se observa que el atractor de Li de orden fraccionario con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$  es de 2-enrollamientos, por lo que  $g = 3$ . Esto se puede comprobar de la misma forma que el atractor de Li de orden entero. El punto fijo  $O$  pertenece al agujero que se genera en el origen y separa a los puntos  $C_1$  y  $C_2$ ; el punto  $O$  es el mismo punto silla index 2 que el de orden entero. Los puntos  $C_1$  y  $C_2$  son los dos agujeros simétricos (o los dos

enrollamientos) que se generan en el atractor, esto se observa en la figura 6.6(a). Como resultado, la superficie de la figura 6.6(b) es la misma que la del atractor de orden entero y su *género* es 3. Por lo tanto, las dos superficies del atractor de orden entero y la del atractor con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$  son topológicamente equivalentes ya que la función  $f^{r \rightarrow \alpha} : \Sigma \rightarrow \beta$  cumple con  $g(\Sigma) = g(\beta)$ . Aunque cambió el número de enrollamientos, el *género* no fue afectado al desaparecer el enrollamiento  $C_3$  ya que el agujero del punto  $O$  permanece igual.

En la figura 6.7(a) se muestra la sección de Poincaré la cual muestra perfectamente los tres agujeros del atractor de Li con orden 2.7 y en la figura 6.7(b) se ve el primer retorno de Poincaré el cual genera el proceso de *tearing*, por lo que nos ratifica que el nuevo atractor de Li de la figura 6.5 con orden 2.7 es de  $g = 3$ .

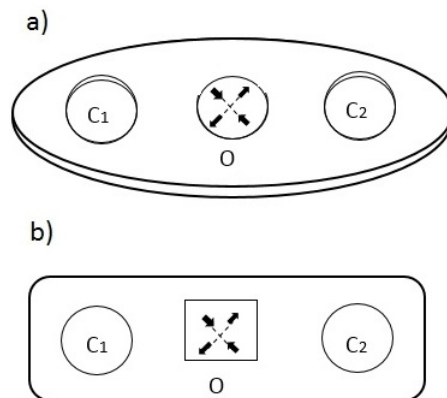


Figura 6.6: Forma canónica del atractor de Li con orden 2.7. *a)* Se representan los agujeros  $O$ ,  $C_1$  y  $C_2$ . *b)* Forma canónica que representa la superficie del atractor de Li con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.7, 1)$ .

### Atractor de Li con orden 2.9

Conforme a la ecuación (4.10) y de acuerdo con los valores de  $\alpha$  del sistema fraccionario se tiene:

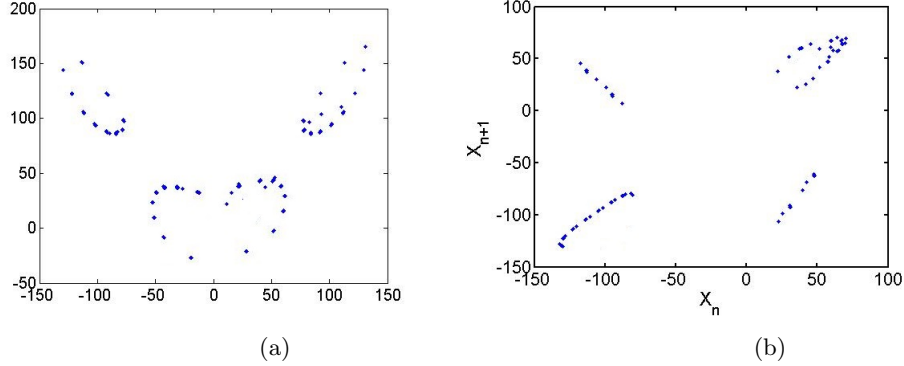


Figura 6.7: Análisis de Poincaré. *a)* Sección de Poincaré del atractor de Li de orden 2.7. *b)* Primer retorno de Poincaré del atractor de Li de orden 2.7.

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda^{10} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^9 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{10} \end{bmatrix} - J \right) \quad (6.6)$$

donde  $m = 10$ . Para que los eigenvalores del sistema sean asintóticamente estable la condición (4.11) debe cumplir con:

$$|\arg(\lambda)| > 0.1571 \quad (6.7)$$

Evaluando los puntos  $O$ ,  $C_{1,2}$  y  $z_1$  en (6.6) se obtienen los eigenvalores del sistema de orden fraccionario, los cuales se muestran en el cuadro 6.3 y su argumento se muestra en el cuadro 6.4. De acuerdo al argumento de los eigenvalores, el punto  $O$  es un punto silla index 2, los puntos  $C_{1,2}$  son puntos silla-foco index 1, el punto  $z_1$  es un punto silla index 2.

El atractor de Li con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.9, 1)$  se muestra en la figura 6.8. Claramente, se observa que la topología de este atractor cambia con respecto al atractor de la figura 6.1 y figura 6.5.

Se ve en la figura 6.5 que este atractor con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.9, 1)$  es de un enrollamiento y esto se debe a que el punto  $O$  es el mismo tipo de punto que el punto  $z_1$ . Esto significa dos cosas:

1. El flujo se mueve alrededor de los puntos  $O$ ,  $C_1$  y  $C_2$ .

Cuadro 6.3: Eigenvalores del sistema de Li de orden fraccionario 2.9.

	$O$	$C_{1,2}$	$z_1$
$\lambda_1$	1.5125	1.49	1.061
$\lambda_2$	1.0625	1.1327-0.3741i	0.4632
$\lambda_3$	-1.0624	1.1327+0.3741i	-1.063

Cuadro 6.4: Argumento de los eigenvalores del sistema de Li de orden fraccionario 2.9.

	$ arg(\lambda_O) $	$ arg(\lambda_{C_{1,2}}) $	$ arg(\lambda_{z_1}) $
$\lambda_1$	0	0	0
$\lambda_2$	0	0.3190	0
$\lambda_3$	3.1416	0.3190	3.1416

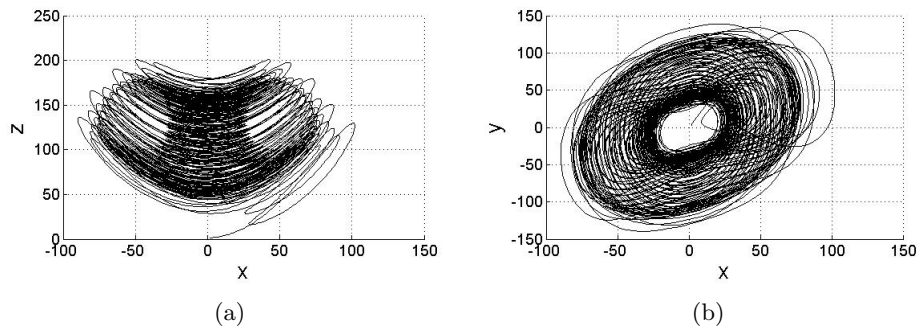


Figura 6.8: Resultado de la simulación con  $a = 40$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0,16$ ,  $e = 0,65$ ,  $k = 55$ ,  $f = 20$  y  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.9, 1)$  a) Proyección sobre el plano  $x - z$ . b) Proyección sobre el plano.  $x - y$ .



2. El flujo no pasa a través del punto  $O$  el cual haría que el atractor se dividiera en dos enrollamientos.

El resultado de este cambio de orden genera que la superficie del atractor con orden 2.9 de la figura 6.8 cambie a  $g = 1$ , por lo que no es topológicamente equivalente al atractor de orden entero y al atractor con orden 2.7. En la figura 6.9(a) se muestra la sección de Poincaré la cual muestra perfectamente un agujero del nuevo atractor de Li con orden 2.9 y en la figura 6.9(b) se ve el primer retorno de Poincaré el cual genera el proceso de *folding*, por lo que nos ratifica el atractor de Li de la figura 6.8 con orden 2.9 es de  $g = 1$ .

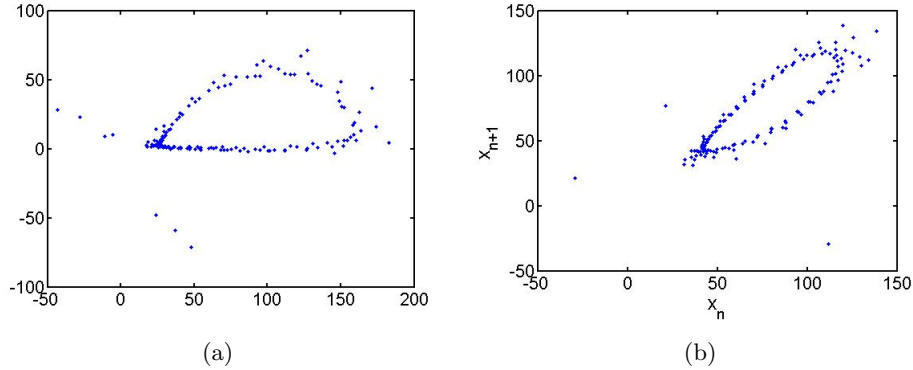


Figura 6.9: Análisis de Poincaré. a) Sección de Poincaré del atractor de Li de orden 2.9. b) Primer retorno de Poincaré del atractor de Li de orden 2.9.

### 6.1.2. Atractor extraño de Chen de orden fraccionario

El atractor de Chen se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (orden entero):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{6.8}$$

donde  $a = 35$ ,  $b = 3$  y  $c = 28$ . El sistema (6.8) tiene tres puntos, uno en el origen y dos simétricos de equilibrio los cuales son:

$$O = (0, 0, 0)$$

$$C_1 = (\sqrt{b(2c-a)}, \sqrt{b(2c-a)}, 2c-a)$$

$$C_1 = (-\sqrt{b(2c-a)}, -\sqrt{b(2c-a)}, 2c-a)$$

y el punto en el eje-z es:

$$z_1 = (0, 0, 2c-a)$$

con el conjunto de parámetros del sistema los puntos fijos son:

$$O = (0, 0, 0)$$

$$C_1 = (7,9373, 7,9373, 21)$$

$$C_1 = (-7,9373, -7,9373, 21)$$

$$z_1 = (0, 0, 21)$$

la matriz Jacobiana del sistema (6.8) es:

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a-z & c & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eje } z} \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a-z & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Evaluando los puntos en  $O, C_1, C_2$  y  $z_1$  en 6.9 se obtienen los eigenvalores del sistema (6.8), los cuales se muestran en le cuadro 6.5. De acuerdo a los eigenvalores, el punto  $O$  es un punto silla index 1, los puntos  $C_1$  y  $C_2$  son dos puntos silla-foco index; y el punto  $z_1$  es un nodo silla. El atractor de Chen de orden entero se muestra en la figura 6.10.

Cuadro 6.5: Eigenvalores del sistema de Chen de orden entero

	$O$	$C_{1,2}$	$z_1$
$\lambda_1$	-30.8359	-18.4280	-7
$\lambda_2$	23.8359	4.2140+14.8847i	0
$\lambda_3$	-3	4.2140+14.8847i	-3

El atractor de la figura 6.10 es un atractor de doble-enrollamiento y de acuerdo a las formas canónicas, este atractor pertenece a la forma  $A_2$  y es de  $g = 3$ . En la figura 6.11 se muestra el mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.10. Este mapa nos dice que el mecanismo topológico que genera a este atractor es el *tearing* ya que las trayectorias que se muestran en el mapa estan separadas o no coinciden, y es el causante que este atractor sea de doble-enrollamiento y por ende de  $g = 3$ .

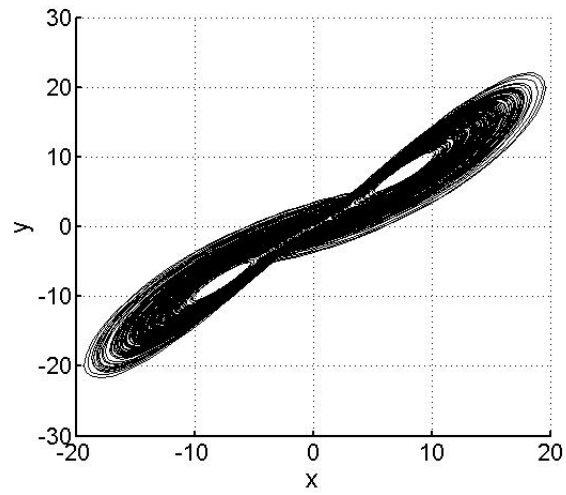


Figura 6.10: Atractor de Chen de orden entero del sistema 6.8

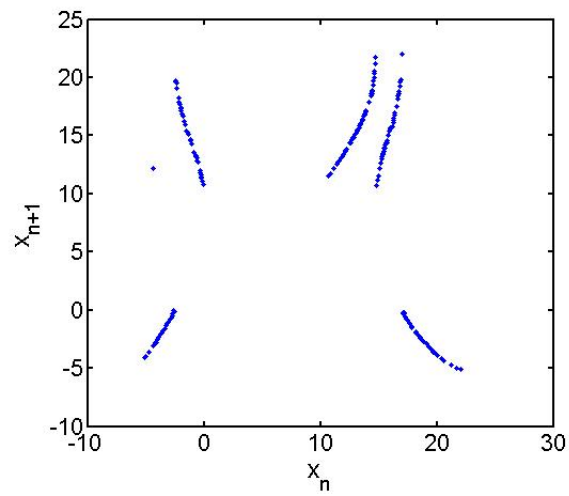


Figura 6.11: Mapa del primer retorno del atractor de la figura 6.10

### Atractor de Chen de orden fraccionario

De acuerdo a (4.9), el sistema dinámico de Chen (6.8) puede ser descrito como:

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha_1} x &= a(y - x), \\ D_t^{\alpha_2} y &= (c - a)x - xz + cy, \\ D_t^{\alpha_3} z &= xy - bz. \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$  se genera el atractor de la figura 6.12. A simple vista se observa que el atractor de la figura 6.12 cambio con respecto al atractor de orden entero de la figura 6.10. En la figura 6.13 se muestra el mapa Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.12 para saber el tipo de mecanismo topológico que construye a este atractor.

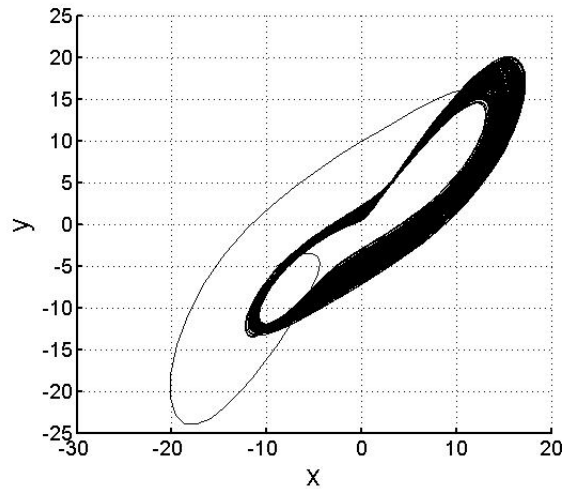


Figura 6.12: Atractor de Chen con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$

Como se puede observar en el mapa de la figura 6.13 el primer retorno del atractor con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$  coincide en un punto lo que significa que el tipo de mecanismo topológico que construye a este atractor es el *folding* por lo que es de  $g = 1$ . El resultado del cambio de orden genera un solo enrollamiento en el atractor y de acuerdo a las formas canónicas, el atractor de Chen con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$  pertenece a  $A_1$ . Por ende, la superficie de este atractor de Chen de orden

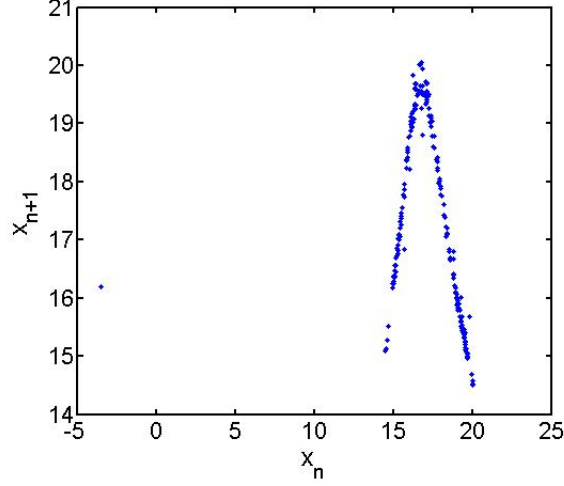


Figura 6.13: Mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.12

fraccionario no es topológicamente equivalente al atractor de Chen de orden entero ya que  $g(\Sigma) \neq g(\beta)$ .

A continuación analizaremos si este atractor fraccionario es caótico conforme a la teoría de estabilidad de los sistemas caóticos de orden fraccionario. Conforme a la ecuación (4.10) y de acuerdo con los valores de  $\alpha$  del sistema fraccionario se tiene:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda^{95} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{85} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{80} \end{bmatrix} - J \right) \quad (6.11)$$

donde  $m = 100$ . Para que los eigenvalores del sistema sean asintóticamente estables la condición (4.11) debe cumplir con:

$$|\arg(\lambda)| > 0.0157 \quad (6.12)$$

De acuerdo a la teoría de estabilidad de sistemas caóticos de orden fraccionario sólo con evaluar los puntos  $C_{1,2}$  se puede determinar si el atractor es caótico. Evaluando los  $C_{1,2}$  en (6.11) se obtienen los eigenvalores de los puntos  $C_{1,2}$ , los cuales se muestran en el cuadro 6.6 y el argumento de estos eigenvalores también se encuentran en este mismo cuadro.

Cuadro 6.6: Eigenvalores de los puntos  $C_{1,2}$  del atractor fraccionario de Chen con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$

	$C_{1,2}$	$ arg(\lambda) $
$\lambda_1$	$1.0308+0.0150i$	0.0146
$\lambda_2$	$1.0308-0.0150i$	0.0146

De acuerdo a que el argumento de los puntos  $C_1$  y  $C_2$  es menor a 0.0157, el atractor de Chen con orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.95, 0.85, 0.8)$  cumple la condición necesaria para ser caótico.

### 6.1.3. Atractor extraño de orden fraccionario generado por un sistema autónomo cuadrático

El atractor extraño de orden entero generado por un sistema autónomo cuadrático se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden [49]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x - y) - yz, \\ \dot{y} &= -by + xz, \\ \dot{z} &= -cz + dx + xy.\end{aligned}\tag{6.13}$$

donde los  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son los parámetros del sistema. Con diferentes parámetros el sistema visualiza un atractor caótico de 4-enrollamientos y un atractor caótico de 3-enrollamientos [49].

Con los parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$  y  $d = 0.06$  el sistema (6.13) visualiza un atractor de 4-enrollamientos, y con los parámetros  $a = 0.977$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$  y  $d = 0.1$  el sistema (6.13) visualiza un atractor de 3-enrollamientos, los cuales se presentan en la figura 6.14.

De acuerdo a la forma que muestran los atractores extraños de las figuras 6.14(a) y 6.14(b) sobre el plano  $x-y$  los atractores corresponden a las formas canónicas  $C_4$  y  $C_3$  respectivamente. Estas formas canónicas tienen en el origen un agujero con  $2n$  singularidades por lo que a cada enrollamiento le corresponden 2 singularidades. El atractor de la figura 6.14(a) tiene 8 singularidades y es de  $g = 5$ , el atractor de la 6.14(b) le corresponden 6 singularidades y es de  $g = 4$ . En la figura 6.15 se presentan las formas canónicas de  $C_4$  y  $C_3$ .

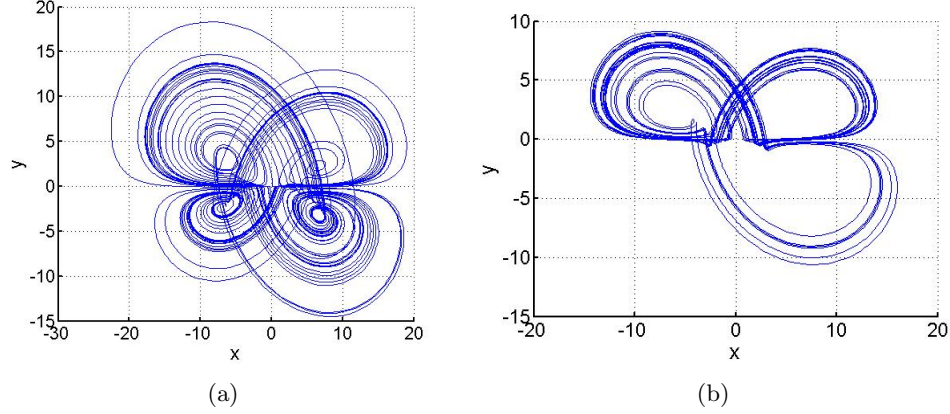


Figura 6.14: Simulación del sistema (6.13). *a*) Atractor de 4-enrollamientos del sistema (6.13) con parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.06$ . *b*) Atractor de 3-enrollamientos del sistema (6.13) con parámetros  $a = 0.977$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$  y  $d = 0.1$

El sistema (6.13) tiene 5 puntos fijos [49], con los parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.06$  coincide que el *género* es el mismo que el número de sus puntos fijos, pero con los valores de  $a = 0.977$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$  y  $d = 0.1$  el *género* no coincide con el número de puntos fijos del sistema (6.13). A continuación se analizarán la estabilidad de los puntos fijos del sistema (6.13) con los dos conjuntos de parámetros para después comparar la estabilidad de los puntos y ver si hay un cambio en los eigenvalores de los puntos entre el atractor de la figura 6.14(a) y 6.14(b).

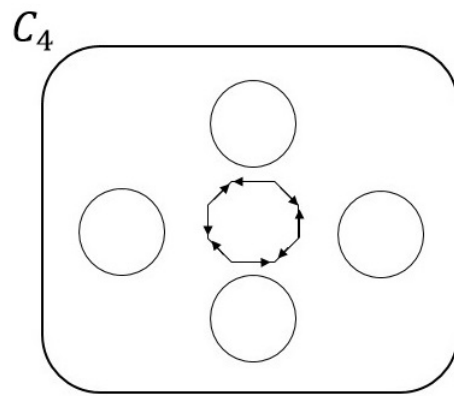
Los puntos fijos del sistema (6.13) son los siguientes [49]:

$$0(0, 0, 0), \quad S_1(x_1, y_1, z_1), \quad S_2(x_2, y_2, z_2), \quad S_3(x_3, y_3, z_3), \quad S_4(x_4, y_4, z_4)$$

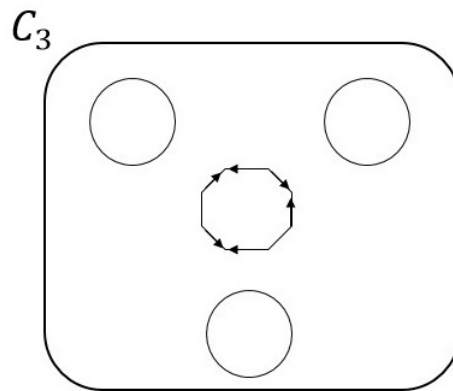
donde

$$\Delta = \sqrt{a^2 + 4ab}, \quad \Gamma = \sqrt{(bd)^2 + bc(-a + \Delta)^2}, \quad \Lambda = \sqrt{(bd)^2 + bc(-a - \Delta)^2}$$

$$x_1 = \frac{-bd + \Gamma}{-a + \Delta}, \quad x_2 = \frac{-bd - \Gamma}{-a + \Delta}, \quad x_3 = \frac{-bd + \Lambda}{-a - \Delta}, \quad x_4 = \frac{-bd - \Lambda}{-a - \Delta}$$



(a)



(b)

Figura 6.15: Formas canónicas  $C_4$  y  $C_3$ . *a)* Forma canónica que representa al atractor de 4-enrollamientos de la figura 6.14(a). *b)* Forma canónica que representa al atractor de 3-enrollamientos de la figura 6.14(b)



$$z_1 = z_2 = -\frac{a}{2} + \frac{\Delta}{2}, \quad z_3 = z_4 = -\frac{a}{2} - \frac{\Delta}{2}, \quad y_1 = \frac{x_1 z_1}{b}, \quad y_2 = \frac{x_2 z_2}{b}$$

$$y_3 = \frac{x_3 z_3}{b}, \quad y_4 = \frac{x_4 z_4}{b}$$

con los valores de  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.06$ , el cual llamaremos conjunto  $A$ , los puntos fijos  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ , son:

$$S_1(6.6178, 2.1822, 2.9677), \quad S_2(-6.7998, -2.2422, 2.9677),$$

$$S_3(-6.6475, 3.2703, -4.4277), \quad S_4(6.7695, -3.3303, -4.4277)$$

y con los parámetros  $a = 0.977$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$  y  $d = 0.1$ , el cual llamaremos conjunto  $B$ , son los siguientes:

$$S_1(6.1404, 1.6426, 2.6751), \quad S_2(-6.5142, -1.7426, 2.6751),$$

$$S_3(-6.1891, 2.2604, -3.6521), \quad S_4(6.4629, -2.3604, -3.6521)$$

En la figura 6.16 se representan los puntos fijos del sistema dinámico (6.13) con respecto al conjunto de parámetros  $A$  y  $B$ . Como se puede observar en la figura 6.16(b), el enrollamiento correspondiente a  $S_2$  es el que desaparece conforme a la figura 6.16(a).

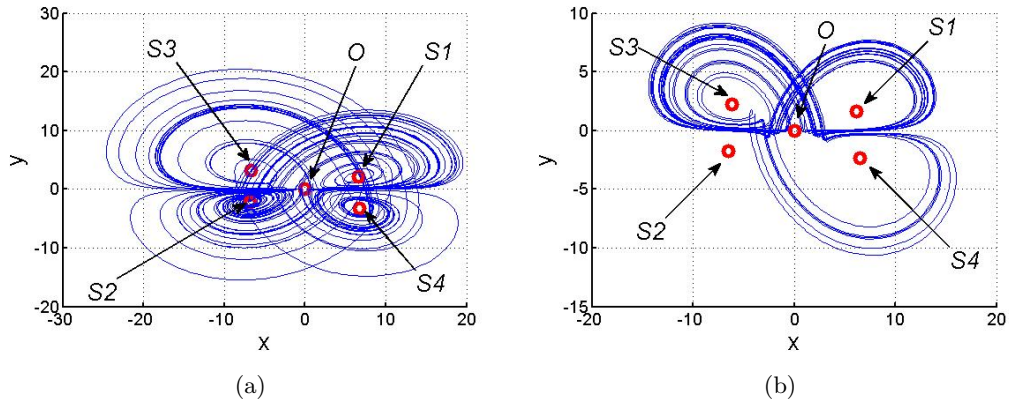


Figura 6.16: Simulación de los puntos fijos del sistema (6.13). *a)* Puntos fijos del sistema (6.13) con parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.06$ . *b)* Puntos fijos del sistema (6.13) con parámetros  $a = 0.977$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$  y  $d = 0.1$ .

La matriz jacobiana del sistema (6.13) es la siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} a & -a - z & -y \\ z & -b & x \\ d + y & x & -c \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

evaluando los puntos  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  en (6.14) del conjunto  $A$  y  $B$  obtenemos los eigenvalores de los puntos fijos del sistema (6.13), los cuales se muestran en el cuadro 6.7 y 6.8.

Cuadro 6.7: Eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  del sistema (6.13) con los parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.06$

	$O$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$\lambda_1$	-5	-13.76	-13.94	-13.90	-14.0232
$\lambda_2$	1.46	0.6147+3.9177i	0.7027+3.9320i	0.7416+4.7973i	0.7416+4.7973
$\lambda_3$	-9	0.6147-3.9177i	0.7027-3.9320i	0.7416-4.7973i	0.7416+4.7973

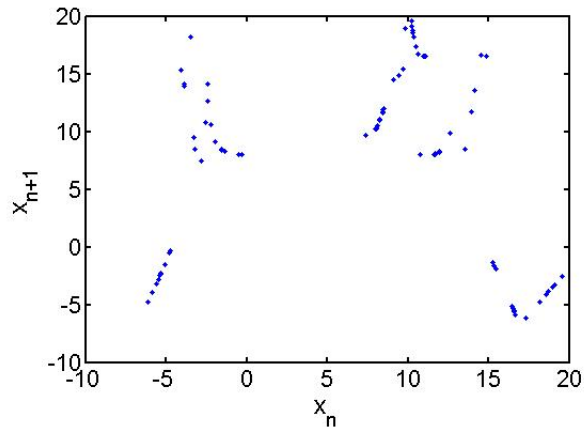
Cuadro 6.8: Eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  del sistema (6.13) con los parámetros  $a = 0.977$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$  y  $d = 0.1$

	$O$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$\lambda_1$	-4	-13.6384	-13.9853	-13.7527	-14.0101
$\lambda_2$	0.97	0.3077+0.0901i	0.4811+3.1217i	0.3648+3.6059i	0.4935+3.6059i
$\lambda_3$	-10	0.3077-0.0901i	0.4811-3.1217i	0.3648-3.6059i	0.4935-3.6059i

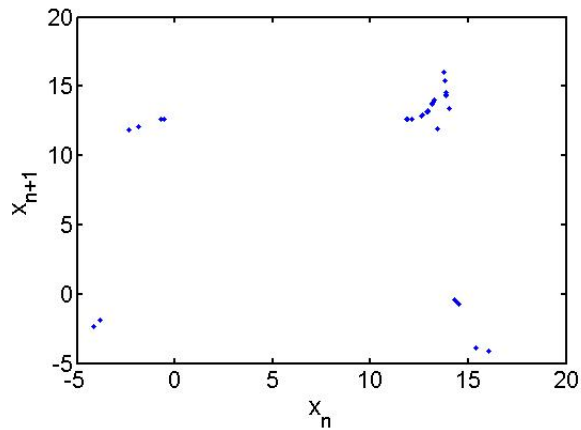
De acuerdo a los eigenvalores del cuadro 6.7 y 6.8; los puntos  $O$  son puntos silla index 1, los puntos  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  son puntos sillafoco index 2. Los 5 puntos fijos son inestables de acuerdo a sus eigenvalores y son los mismos tipos de puntos para el conjunto  $A$  y  $B$ . Como podemos observar, para este caso no hubo un cambio en los tipos de puntos fijos que nos ayude a identificar el cambio de *género* que hubo en los atractores al cambio de parámetros. Para este caso en particular, las *formas canónicas* es la única herramienta que proporciona información para analizar el cambio en el número de enrollamientos. De acuerdo a las formas canónicas  $C_3$  y  $C_4$ , el sistema (6.13) pierde dos singularidades con el conjunto de parámetros B y eso ocasiona que el atractor extraño de 4-enrollamientos (sistema con conjunto de parámetros A) cambie a un atractor de 3-enrollamientos y por ende modifique su *género*.

Los punto  $O$  son puntos silla lo que nos dice que las trayectorias se dividen al llegar al origen, por lo tanto el mecanismo topológico que genera a estos atractores es el *tearing*. Este mecanismo lo podemos ver con el mapa

de Poincaré del primer retorno de los atractores de la figura 6.14(a) y 6.14(b), el cual se muestra en la figura 6.17.



(a)

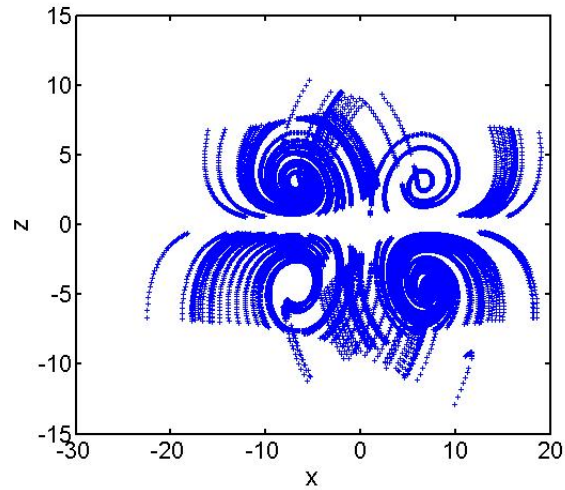


(b)

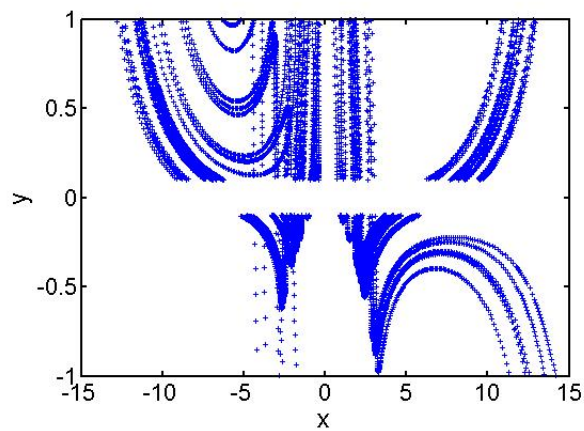
Figura 6.17: Mapa de Poincaré del Primer retorno. *a)* Mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.14(a). *b)* Mapa de Poincaré del primer retorno del atractor de la figura 6.14(b).

A continuación, en la figura 6.18 se muestra la sección de Poincaré de los atractores de la figura 6.14(a) y 6.14(b). Como se puede observar en la sección de Poincaré de la figura 6.18(a) las trayectorias toman 4 regiones

diferentes formando así los 4-enrollamientos y la sección de Poincaré de la figura 6.18(b) las trayectorias toman 3 regiones diferentes formando así los 3-enrollamientos. A continuación se expone el sistema (6.13) en orden fraccionario.



(a)



(b)

Figura 6.18: Sección de Poincaré. *a*) Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.14(a). *b*) Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.14(b).

### Atractor extraño de orden fraccionario generado por el sistema (6.13)

De acuerdo a (4.9), el sistema autónomo cuadrático (6.13) puede ser descrito como:

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha_1} x &= a(x - y) - yz, \\ D_t^{\alpha_2} y &= -by + xz, \\ D_t^{\alpha_3} z &= -cz + dx + xy. \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde los parámetros de control son:  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$  y  $d = 0.06$ , los cuales llamamos conjunto  $A$ . Estos parámetros generan un atractor de 4-enrollamientos tal como se vió anteriormente. Con el orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.85, 1, 1)$  el sistema (6.15) da como resultado un atractor de 3-enrollamientos tal como se ve en la figura 6.19, por lo tanto su *género* es 4 y el cual su forma canónica es del tipo  $C_3$ .

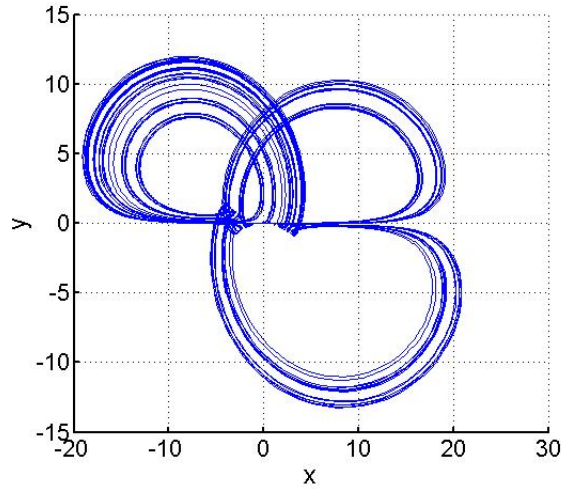


Figura 6.19: Atractor extraño de orden fraccionario del sistema (6.15) con parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$  y  $d = 0.06$ ; y con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.85, 1, 1)$

A continuación se analizan los puntos fijos del sistema fraccionario (6.15) con  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$  y  $d = 0.06$ , y con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.85, 1, 1)$ . Conforme a la ecuación 4.10 y de acuerdo con los valores de  $\alpha$  del sistema (6.15), se tiene:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda^{85} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{100} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{100} \end{bmatrix} - J \right) \quad (6.16)$$

donde  $m = 100$ . Para que los eigenvalores del sistema sean asintóticamente estable la condición (4.11) debe cumplir con:

$$|\arg(\lambda)| > 0.0157 \quad (6.17)$$

Evaluando los puntos  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  con respecto al conjunto de parámetros  $A$  en (6.16) se obtienen los eigenvalores del sistema (6.15), los cuales se muestran en el cuadro 6.9. En el cuadro 6.10 se muestran los argumentos de los eigenvalores del cuadro 6.9.

Cuadro 6.9: Eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  del sistema (6.15) con los parámetros  $a = 1.46$ ,  $b = 9$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.06$  y con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.85, 1, 1)$ .

	$O$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$\lambda_1$	1.0044	-1.0128	1.0152+0.01511	-1.0153	-1.0154
$\lambda_2$	1.0157+0.0319i	1.0152+0.0153i	1.0152-0.01511	1.0173+0.0155i	1.0173+0.0151i
$\lambda_3$	1.0157-0.0319i	1.0152+0.0153i		1.0173-0.0155i	1.0173-0.0151i

Cuadro 6.10: Argumento de los eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  del cuadro 6.9.

	$O$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$\lambda_1$	0	3.1416	0.0149	3.1416	3.1416
$\lambda_2$	0.0314	0.0151	0.0149	0.0152	0.0151
$\lambda_3$	0.0314	0.0151		0.0152	0.0151

Como se puede apreciar en los eigenvalores del cuadro 6.9 y conforme a su argumento, el sistema (6.15) posee un punto silla-foco index 1 en  $O$ , un punto silla-foco index 2 en  $S_1$ , un punto foco en  $S_2$ , un punto silla-foco index 2 en  $S_3$  y un punto silla-foco index 2 en  $S_4$ . Se puede observar que hay dos cambios en el conjunto de puntos fijos, el origen  $O$  cambia de punto silla index 1 en (6.13) a punto silla-foco index 1 en (6.15) y  $S_2$  cambia de punto silla-foco en (6.13) a punto foco en (6.15). El cambio más drástico de tipo de punto fijo se da en  $S_2$  ya que después del cambio de orden este punto fijo, el cual es un punto foco sólo existe en  $\mathbb{R}^2$  [50] y no en  $\mathbb{R}^3$ . Si relacionamos la modificación del punto fijo  $S_2$  con el cambio de forma canónica de  $C_4$  a  $C_3$ ,

el *género* se modifica de 5 a 4 ya que la alteración de  $S_2$  causo la disminución de singularidades de 8 a 6 en el atractor, por lo tanto modifica la estructura topológica del sistema. Para este caso en particular el cambio de orden da mejor información cuantitativa del porque sufre el cambio en la superficie del atractor.

A continuación se muestra en la figura 6.20 el primer retorno de Poincaré y en la figura se muestra 6.21 la sección de Poincaré del atractor extraño de orden fraccionario de la figura 6.19.

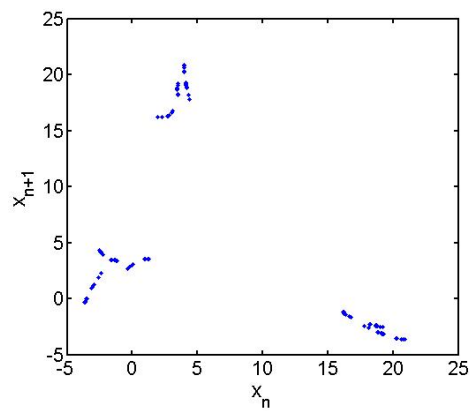


Figura 6.20: Primer retorno de Poincaré del atractor extraño de orden fraccionario de la figura 6.19.

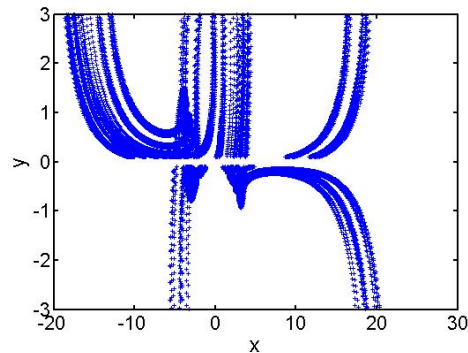


Figura 6.21: Sección de Poincaré del atractor extraño de orden fraccionario de la figura 6.19.

#### 6.1.4. Atractor extraño de proto-Lorenz de orden fraccionario

A continuación se presenta el sistema de proto-Lorenz de orden entero el cual genera un atractor de 4-enrollamientos, este sistema esta dado por el siguiente conjunto de ecuaciones [43]:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \frac{1}{2(s^2 + w^2)}[-as^3 + (2a + c - z)s^2w + (a - 2)sw^2 - (c - z)w^3], \\ \dot{w} &= \frac{1}{2(s^2 + w^2)}[(c - z)s^3 + (a - 2)s^2w + (-2a - c + z)sw^2 - aw^3], \\ \dot{z} &= 2s^3w - 2sw^3 - bz.\end{aligned}\tag{6.18}$$

donde  $a = 10$   $b = 8/3$  y  $c = 28$ . El atractor que genera el sistema (6.18) se muestra en la figura 6.22. Este atractor pertenece a la forma canónica  $C_4$  por lo que su género es 5 y tiene 8 singularidades; a cada enrollamiento le corresponden 2 singularidades.

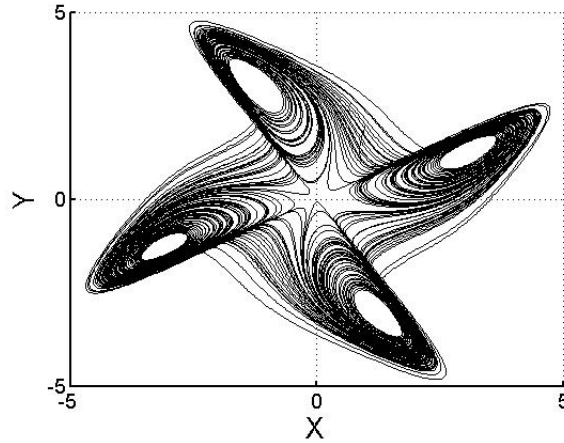


Figura 6.22: Atractor de 4-enrollamientos generado por el sistema (6.18).

El sistema tiene 5 puntos fijos, para  $a = 10$   $b = 8/3$  y  $c = 28$  los puntos fijos son [43]:

$$0(0, 0, 0), F_1(s_f, w_f, z_f), F_2(s_f, -w_f, z_f), F_3(-s_f, -w_f, z_f), F_4(-s_f, w_f, z_f).$$



donde  $s_f = 3.200412582$ ,  $w_f = 1.32564297$  y  $z_f = 27$

La matriz jacobiana del sistema (6.18) es la siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

donde  $a_{11} = a_{11a} + a_{11b}$ ,  $a_{12} = a_{12a} + a_{12b}$ ,  $a_{13} = a_{13a}$ ,  $a_{21} = a_{21a} + a_{21b}$ ,  $a_{22} = a_{22a} - a_{22b}$ ,  $a_{23} = a_{23a}$ ,  $a_{31} = a_{31a}$ ,  $a_{32} = a_{32a}$  y  $a_{33} = a_{33a}$ .

$$\begin{aligned} a_{11a} &= (w^2(a-2) - 3as^2 + 2sw(2a+c-z))/(2s^2 + 2w^2) \\ a_{11b} &= (4s(as^3 + (z-c-2a)s^2w + (2-a)sw^2 + (c-z)w^3))/(2s^2 + 2w^2)^2 \\ a_{12a} &= (s^2(2a+c-z) - 3w^2(c-z) + 2sw(a-2))/(2s^2 + 2w^2) \\ a_{12b} &= (4w(as^3 + (z-c-2a)s^2w + (2-a)sw^2 + (c-z)w^3))/(2s^2 + 2w^2)^2 \\ a_{13a} &= -(s^2 * w - w^3)/(2 * s^2 + 2 * w^2) \\ a_{21a} &= (3s^2(c-z) - w^2(2a+c-z) + 2sw(a-2))/(2s^2 + 2w^2) \\ a_{21b} &= (4s((z-c)s^3 + (2-a)s^2w + (2a+c-z)sw^2 + aw^3))/(2s^2 + 2w^2)^2 \\ a_{22a} &= (4w((z-c)s^3 + (2-a)s^2w + (2a+c-z)sw^2 + aw^3))/(2s^2 + 2w^2)^2 \\ a_{22b} &= (3aw^2 - s^2(a-2) + 2sw(2a+c-z))/(2s^2 + 2w^2) \\ a_{23a} &= (-s^3 + sw^2)/(2s^2 + 2w^2) \\ a_{31a} &= 6s^2 * w - 2w^3 \\ a_{32a} &= 2s^3 - 6sw^2 \\ a_{33a} &= -b \end{aligned}$$

Evaluando los puntos  $O$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$   $F_5$  en (6.19) obtenemos los eigenvalores de cada punto fijo, los cuales se presentan en el cuadro 6.11.

Cuadro 6.11: Eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  del sistema (6.18) con los parámetros  $a = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $c = 28$

	$O$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$\lambda_1$	NaN	-13.8545	4.1504	-13.8545	4.1504
$\lambda_2$	NaN	0.0940+10.1945i	-3.4085+6.1787i	0.0940+10.1945i	-3.4085+6.1787i
$\lambda_3$	NaN	0.0940-10.1945i	-3.4085-6.1787i	0.0940-10.1945i	-3.4085-6.1787i

De acuerdo a los eigenvalores los puntos  $F_1$  y  $F_3$  son puntos sillas-foco index 2, los puntos  $F_2$  y  $F_4$  son puntos sillas-foco index 1. El punto  $O$  tiene

eigenvalores indeterminados ya que al evaluar el punto  $O$  en (6.19) los valores  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{23}$  da una operación de  $0/0$  generando una matriz con valores indeterminados, tal como se muestra a continuación.

$$J = \begin{bmatrix} NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN \\ 0 & 0 & -2.6667 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Para conocer los eigenvalores del punto  $O$  se propone un conjunto de intervalos tan pequeños que contengan al cero (cercanos a cero), el conjunto de intervalos que se propone es el siguiente:

$$[-1 \times 10^{-20} \ 0) \cup (0 \ 1 \times 10^{-20}]$$

tomando los límites  $-1 \times 10^{-20}$  y  $1 \times 10^{-20}$  el punto  $O$  quedaría como  $O_1(-1 \times 10^{-20}, -1 \times 10^{-20}, -1 \times 10^{-20})$  y  $O_2(1 \times 10^{-20}, 1 \times 10^{-20}, 1 \times 10^{-20})$ . Evaluando los puntos  $O_1$  y  $O_2$  en (6.19) se obtienen los mismo eigenvalores para los puntos  $O_1$  y  $O_2$ , los cuales son:  $\lambda_1 = 8.6107$ ,  $\lambda_2 = -18.6107$  y  $\lambda_3 = -2.6667$ . Con estos eigenvalores obtenidos podemos decir que el punto  $O$  es un punto silla index 1. En la figura 6.23 se muestra el primer retorno de Poincaré del atractor 6.22 y en la figura 6.24 se muestra la sección de Poincaré del mismo atractor.

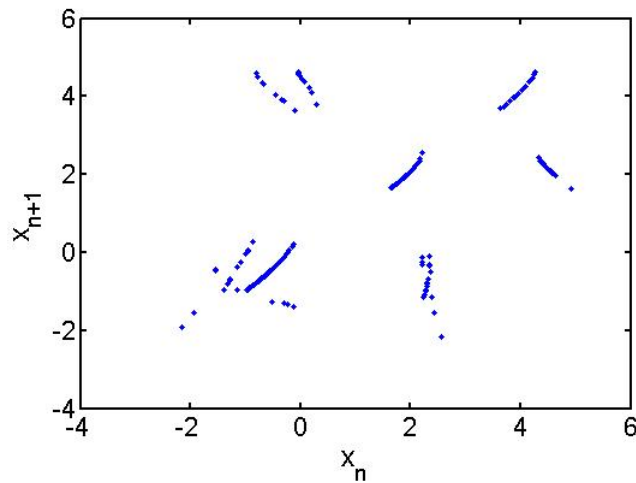


Figura 6.23: Primer retorno de Poincaré del atractor de la figura 6.22.

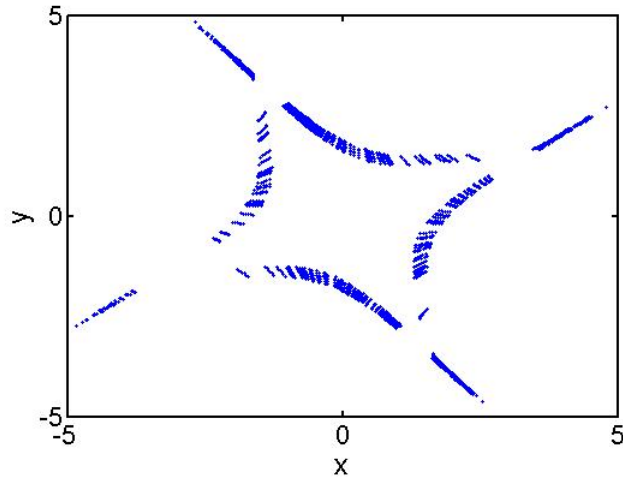


Figura 6.24: Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.22.

Para este atractor, en la sección de Poincaré se pueden visualizar gráficamente las 8 singularidades que tiene el sistema (6.18), en la figura 6.25 se muestra nuevamente la sección de Poincaré del atractor de la figura 6.22 pero ahora se enumeran representativamente las 8 singularidades que tiene el atractor de acuerdo a su forma canónica. En la figura 6.26 se presenta el atractor de 4-enrollamientos del sistema (6.18) y su sección de Poincaré, y se visualiza como para cada dos singularidades le corresponde un enrollamiento.

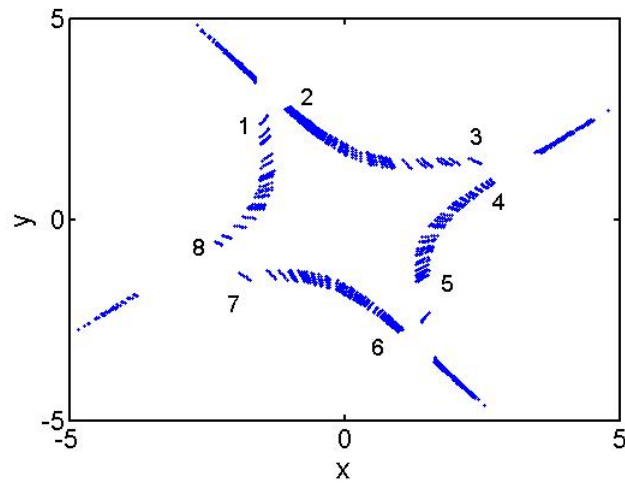


Figura 6.25: Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.22 representando las 8 singularidades que tiene el atractor.

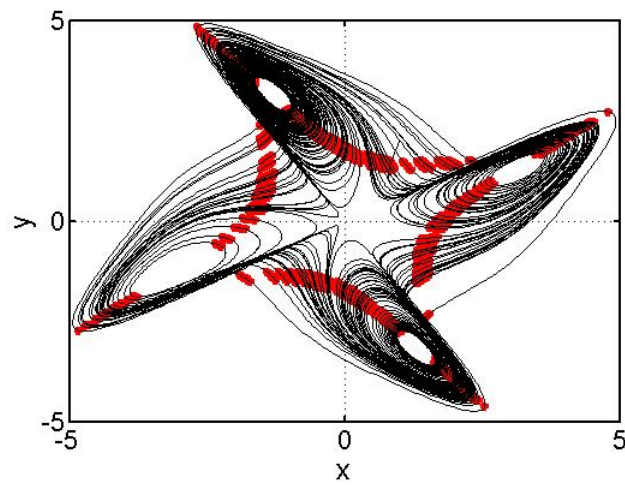


Figura 6.26: Atractor extraño del sistema del (6.22) junto con su sección de Poincaré.

**Atractor extraño de proto-Lorenz de orden fraccionario**

De acuerdo a (4.9), el sistema de proto-Lorenz (6.18) puede ser descrito como:

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha_1} s &= \frac{1}{2(s^2 + w^2)} [-as^3 + (2a + c - z)s^2w + (a - 2)sw^2 - (c - z)w^3], \\ D_t^{\alpha_2} w &= \frac{1}{2(s^2 + w^2)} [(c - z)s^3 + (a - 2)s^2w + (-2a - c + z)sw^2 - aw^3], \\ D_t^{\alpha_3} z &= 2s^3w - 2sw^3 - bz. \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde los parámetros de control son los mismos que el de orden entero. Con el orden  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1.15, 0.7, 1.15)$  el sistema (6.21) da como resultado un atractor extraño de orden fraccionario el cual se muestra en la figura 6.27. Este atractor extraño es un atractor de 2-enrollamientos por lo que su forma canónica es del tipo  $\mathbb{E}$ , por lo que su *género* es 3 y tiene 4 singularidades.

A continuación se analizan los puntos fijos del sistema fraccionario (6.21) con  $a = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $c = 28$ , y con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1.15, 0.7, 1.15)$ . Conforme a la ecuación 4.10 y de acuerdo con los valores de  $\alpha$  del sistema (6.15), se tiene:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda^{115} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{70} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{115} \end{bmatrix} - J \right) \quad (6.22)$$

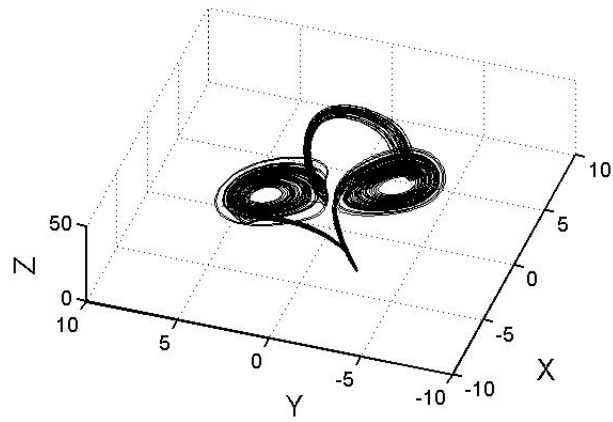
donde  $m = 100$ . Para que los eigenvalores del sistema sean asintóticamente estables la condición (4.11) debe cumplir con:

$$|\arg(\lambda)| > 0.0157 \quad (6.23)$$

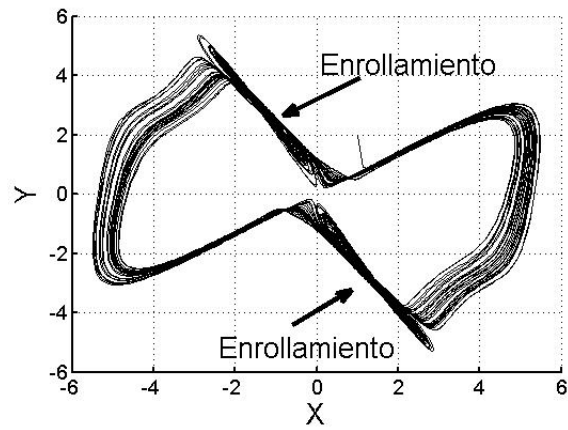
Evaluando los puntos  $O$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  en (6.22) se obtienen los eigenvalores del sistema (6.21), los cuales se muestran en el cuadro 6.12. En el cuadro 6.13 se muestran los argumentos de los eigenvalores del cuadro 6.12.

Cuadro 6.12: Eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  del sistema (6.21) con los parámetros con  $a = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $c = 28$ , y con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1.15, 0.7, 1.15)$ .

	$O$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$\lambda_1$	1.078	1.0220+0.0154i	1.0246	1.0220+0.0154i	1.0246
$\lambda_2$	1.0082+0.0275i	1.0220-0.0154i	1.0163+0.0162i	1.0220-0.0154i	1.0163+0.0162i
$\lambda_3$	1.0082-0.0275i		1.0163-0.0162i		1.0163-0.0162i



(a)



(b)

Figura 6.27: Atractor extraño de orden fraccionario del sistema (6.21) con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1.15, 0.7, 1.15)$ . a) Atractor extraño en el plano  $x - y - z$ . b) Atractor extraño en el plano  $x - y$ .

Cuadro 6.13: Argumento de los eigenvalores de los puntos  $O$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  del cuadro 6.12.

	$O$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$\lambda_1$	0	0.0150	0	0.0150	0
$\lambda_2$	0.0273	0.0150	0.0159	0.0150	0.0159
$\lambda_3$	0.0273		0.0159		0.0159

De acuerdo a los eigenvalores los puntos  $F_1$  y  $F_3$  son puntos focos, los puntos  $F_2$  y  $F_4$  son puntos sillas-foco index 1, el punto  $O$  es un punto silla index 1. Como se puede observar el cambio se da en los puntos  $F_1$  y  $F_3$  ya que cambian de silla foco index 2 (orden entero) a punto foco (orden fraccionario) y como se mencionó anteriormente el punto foco solo existe en  $R^2$ . Por lo tanto este cambio genera que el atractor modifique su superficie topológica.

En la figura 6.28(a) se muestra la sección de Poincaré del atractor de la figura 6.27 donde se puede apreciar solamente los dos enrollamientos del atractor y en la figura 6.28(b) se visualiza el primer retorno de Poincaré del mismo atractor el cual se puede observar que el proceso que genera es el *tearing*.

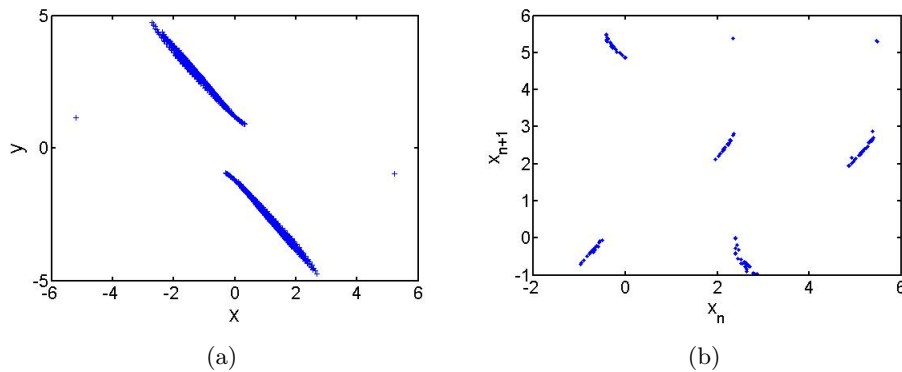


Figura 6.28: Mapas de Poincaré. a) Sección de Poincaré del atractor de la figura 6.27. b) Primer retorno de Poincaré del atractor de la figura 6.27 .

## 6.2. Análisis topológico de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ al cambio de orden del sistema

El análisis por teoría de nudos del atractor de Lorenz no es nuevo, Williams y Birman [46] fueron los pioneros en analizar teóricamente las orbitas cerradas (nudos) del atractor de Lorenz. Unos de los principales resultados obtenidos por Williams y Birman es que el atractor de Lorenz puede contener una gran cantidad de nudos y en especial a los nudos tóricos, cada nudo en el sistema de Lorenz es naturalmente orientado por el sentido del *semiflujo* sobre el *template*, por lo que los nudos generados en el atractor de Lorenz tienen una firma positiva, esto quiere decir que los nudos no son quiriales. En [5] analizan topológicamente un sistema de Lorenz ligeramente modificado al original, a este sistema le cambian el orden y proponen un *template* para las soluciones del sistema de orden-fraccionario.

En este apartado presentamos los resultados obtenidos del análisis por teoría de nudos de las trayectorias tridimensionales del atractor de Lorenz al cambio de orden del mismo, los resultados fueron obtenidos de forma numérica el cual explicará más adelante. Tal como se sabe, para un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras  $t$  cambia, el punto de  $R^3$  se mueve simultáneamente a lo largo de las trayectorias, definiendo un flujo o semiflujo  $\Phi_t : R^3 \rightarrow R^3$  para cada  $t \in R$ . Desde el punto de vista topológico, el semiflujo  $\Phi_t : R^3 \rightarrow R^3$  se define como una órbita cerrada donde puede habitar una infinidad de nudos disjuntos, tomando  $t$  como un parámetro. Por lo tanto, numéricamente,  $t$  es un parámetro de gran importancia para el estudio de los nudos en los sistemas dinámicos.

Por lo tanto, para caso práctico del estudio de los nudos, definimos el siguiente semiflujo:

$$\zeta_t : R^3 \rightarrow K; \quad t > 0 \quad \zeta_t \ni K$$

donde  $\zeta_t \subset \Phi_t$ , por lo que se supone que en  $\zeta_t$  existe un único nudo  $K$  en un tiempo  $t$  determinado. A continuación, proponemos una metodología simple para el análisis numérico de nudos generado en sistema dinámico complejo:

- A partir de la dinámica de un sistema extraemos la trayectoria de un determinado tiempo, la cual es  $\zeta_t \in \mathbb{R}^3$
- Suponemos que la trayectoria extraída en ese tiempo es cerrada ya que pertenece al *template* ( $\mathfrak{T}$ ) de todas las trayectorias cerradas del sistema  $\zeta_t \subset \Phi_t \subset \mathfrak{T}$ . Numéricamente, el programa utilizado para calcular el nudo de la trayectoria cierra la trayectoria a analizar.



- La trayectoria  $\zeta_t \in \mathbb{R}^3$  se ingresa al programa *Knotplot* para calcular el nudo.

La metodología anterior también aplica para el sistema dinámico de orden fraccionario, ahora el semiflujo es  $\zeta_t^\alpha$  donde  $\alpha$  indica que la trayectoria viene de un sistema de orden-fraccionario.

Acorde a teoría de nudos, para que  $\zeta_t$  y  $\zeta_t^\alpha$  sean topológicamente equivalentes, se tiene que cumplir que  $K_1(\zeta_t) = K_2(\zeta_t^\alpha)$ , de lo contrario no son topológicamente equivalentes

▪ **Sistema de Lorenz**

A continuación, presentamos los resultados obtenidos trabajando con el sistema dinámico de Lorenz el cual esta dado por las ecuaciones (4.16) y (4.17). Para  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 98$ ,  $\beta = 8/3$  y para el intervalo de  $t = [1100, 1600]$  tenemos los siguientes resultados que se muestran en el cuadro 6.14: para el intervalo de  $t = [1100, 1700]$  los resultados se encuentran en el cuadro 6.15.

Cuadro 6.14: Resultados para  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 98$ ,  $\beta = 8/3$  y  $t = [1100, 1600]$

Orden del sistema	Polinomio de HOMFLY
$\alpha = (1, 1, 1)$	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$ (5 <sub>1</sub> )
$\alpha = (0.99, 0.99, 0.99)$	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$ (5 <sub>1</sub> )
$\alpha = (0.98, 0.98, 0.98)$	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$ (3 <sub>1</sub> )
$\alpha = (0.97, 0.97, 0.97)$	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$ (3 <sub>1</sub> )

Cuadro 6.15: Resultados para  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 98$ ,  $\beta = 8/3$  y  $t = [1100, 1700]$

Orden del sistema	Polinomio de HOMFLY
$\alpha = (1, 1, 1)$	$-l^{-10} - 5l^{-8} - 5l^{-6} + 5m^2l^{-8} + 10m^2l^{-6} - m^4l^{-8} - 6m^4l^{-6} + m^6l^{-6}$ (8 <sub>19</sub> )
$\alpha = (0.99, 0.99, 0.99)$	$-l^{-10} - 5l^{-8} - 5l^{-6} + 5m^2l^{-8} + 10m^2l^{-6} - m^4l^{-8} - 6m^4l^{-6} + m^6l^{-6}$ (8 <sub>19</sub> )
$\alpha = (0.98, 0.98, 0.98)$	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$ (5 <sub>1</sub> )
$\alpha = (0.97, 0.97, 0.97)$	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$ (3 <sub>1</sub> )

En el cuadro 6.16 presentamos los nudos obtenidos en el sistema de Lorenz de orden entero pero cambiando los intervalos de tiempo y con  $\rho = 28$ ; y en cuadro 6.17 con  $\rho = 99.96$

Como se puede observar en los resultados, hay una coincidencia con los nudos obtenidos tanto cambiando el orden, cambiando el intervalo de tiempo y cambiando el valor de  $\rho$ .

Cuadro 6.16: Resultados para  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\alpha = (1, 1, 1)$

Intervalo de tiempo	Polinomio de HOMFLY
$t = [2700, 3900]$	$-l^{-10} - 5l^{-8} - 5l^{-6} + 5m^2l^{-8} + 10m^2l^{-6} - m^4l^{-8} - 6m^4l^{-6} + m^6l^{-6}$ (8 <sub>19</sub> )
$t = [2700, 3700]$	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$ (5 <sub>1</sub> )
$t = [2700, 3600]$	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$ (3 <sub>1</sub> )

Cuadro 6.17: Resultados para  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 99.96$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\alpha = (1, 1, 1)$

Intervalo de tiempo	Polinomio de HOMFLY
$t = [1100, 1700]$	$-l^{-10} - 5l^{-8} - 5l^{-6} + 5m^2l^{-8} + 10m^2l^{-6} - m^4l^{-8} - 6m^4l^{-6} + m^6l^{-6}$ (8 <sub>19</sub> )
$t = [1100, 1500]$	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$ (5 <sub>1</sub> )
$t = [1100, 1400]$	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$ (3 <sub>1</sub> )

■ Sistema de Li

A continuación, presentamos los resultados obtenidos trabajando con el sistema dinámico de Li el cual está dado por la ecuación (6.3), los resultados presentados fueron con orden fraccionario ya que con orden entero solo se encontró el *no nudo*. Los resultados fueron con orden  $\alpha = (1, 0.9, 1)$ , solamente se cambiaron los intervalos de tiempo, en el cuadro 6.18 se presentan los resultados del sistema de Li.

Cuadro 6.18: Resultados para  $a = 40$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0,16$ ,  $e = 0,65$ ,  $k = 55$ ,  $f = 20$  y  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0.9, 1)$

Intervalo de tiempo	Polinomio de HOMFLY
$t = [1400, 3000]$	$3l^4 + 2l^6 - 4m^2l^4 - m^2l^6 + m^4l^4$
$t = [1400, 3100]$	$5l^8 + 4l^{10} - 20m^2l^8 - 10m^2l^{10} + 21m^4l^8 + 6m^4l^{10} - 8m^6l^8 - m^6l^{10} + m^8l^8$
$t = [1400, 3200]$	$5l^8 + 4l^{10} - 20m^2l^8 - 10m^2l^{10} + 21m^4l^8 + 6m^4l^{10} - 8m^6l^8 - m^6l^{10} + m^8l^8$
$t = [1400, 3300]$	$5l^8 + 4l^{10} - 20m^2l^8 - 10m^2l^{10} + 21m^4l^8 + 6m^4l^{10} - 8m^6l^8 - m^6l^{10} + m^8l^8$
$t = [1400, 3400]$	$5l^8 + 4l^{10} - 20m^2l^8 - 10m^2l^{10} + 21m^4l^8 + 6m^4l^{10} - 8m^6l^8 - m^6l^{10} + m^8l^8$
$t = [1400, 3500]$	$5l^8 + 4l^{10} - 20m^2l^8 - 10m^2l^{10} + 21m^4l^8 + 6m^4l^{10} - 8m^6l^8 - m^6l^{10} + m^8l^8$
$t = [1400, 3600]$	$-6l^{10} - 5l^{12} + 3m^2l^{10} + 20m^2l^{12} - 56m^4l^{10} - 21m^4l^{12} + 36m^6l^{10} + 8m^6l^{12} - 10m^8l^{10} - m^8l^{12} + m^{10}l^{10}$
$t = [1400, 3700]$	$-6l^{10} - 5l^{12} + 3m^2l^{10} + 20m^2l^{12} - 56m^4l^{10} - 21m^4l^{12} + 36m^6l^{10} + 8m^6l^{12} - 10m^8l^{10} - m^8l^{12} + m^{10}l^{10}$
$t = [1400, 3700]$	$7l^{12} + 6l^{14} - 56m^2l^{12} - 35m^2l^{14} + 126m^4l^{12} + 56m^4l^{14} - 120m^6l^{12} - 36m^6l^{14} + 55m^8l^{12} + 10m^8l^{14} - 12m^{10}l^{12} - m^{10}l^{14} + m^{12}l^{12}$

Todos los nudos encontrados son tóricos, estos resultados congenian con la superficie de este atractor de orden fraccionario, ya que anteriormente se dio el resultado que el atractor de Li con este orden tiene una superficie tórica de *género* = 1.

## Capítulo 7

# Conclusiones

En este trabajo de tesis se trabajó en el tema de cambios topológicos en sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$  al modificar el cambio de orden en el sistema y no en el cambio de parámetros. Se muestran los sistemas de Li, Chen, sistema autónomo cuadrático y Proto-Lorenz; donde se muestra que al cambio de orden del sistema la topología de su atractor cambió con respecto a su atractor original (sistema de orden entero) y por ende se generaron nuevos atractores. Los sistemas analizados por teoría de nudos, los resultados fueron que al cambiar el orden del sistema la trayectoria cambió con respecto al de orden entero; ese cambio se mostró con el polinomio del nudo encontrado. En la bibliografía está reportado el cambio de topología en la superficie de algunos sistemas como el de Lorenz al cambio de parámetros, pero no al cambio de orden. En trayectorias está reportado que el *holder* del sistema de Lorenz o Rossler cambia con respecto al cambio de orden pero en sí no muestran exactamente los cambios con respecto a los nudos.

En el capítulo 5 de esta tesis se expone el tema de Topología de sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$  donde se especifican las herramientas topológicas a usar para el análisis topológico a los sistemas dinámicos; las cuales son: las formas canónicas de los atractores, el retorno de Poincaré el cual nos confirma que hay un cambio en el *género* del atractor; y además se ve el de trayectorias en  $\mathbb{R}^3$  el cual sirve para el análisis por teoría de nudos. La simulación numérica de los sistemas fraccionarios se basó en el método de Grunwald-Letnikov, el cual se encuentra en el capítulo 4 de esta tesis; así también en este mismo capítulo se expone como se realiza el análisis de los puntos fijos que se usa en sistemas fraccionarios el cual se usó en el capítulo de resultados.

### 7.1. Trabajo a futuro.

- Usar teoría de control en sistemas dinámicos de orden entero y fraccionarios para modificar la topología de los atractores sin usar el cambio de orden o el cambio de parámetros.
- Simulación por medio circuitos electrónicos de los sistemas fraccionarios reportados en el capítulo de resultados y verificar que se generen los atractores que se muestran en el mismo capítulo.
- Del punto anterior implementar físicamente por medio de circuitos analógicos o microprocesadores.
- Implementar los sistemas fraccionarios reportados en este trabajo a la sincronización o encriptamiento de información.

# Bibliografía

- [1] T. Tsankov, R. Gilmore. Strange Attractors are Classified by Bounding Tori. *Physical Review Letters*, 2003.
- [2] T. Tsankov, R. Gilmore. Topological aspects of the structure of chaotic attractors in  $R^3$ . *Physical Review Letters*, 2003.
- [3] P.R. Cromwell. Knots and Links. *Cambridge University Press*, 2004
- [4] C. Letellier, T. Tsankov, G. Byrne and R. Gilmore *Physical Review E* **72**(2005) 026212.
- [5] C. Letellier and L. Aguirre, Dynamical analysis of fractional-order Rossler and modified Lorenz systems *Physical Review A* **377**(2013) 1707-1719.
- [6] C.C. Adams, R. Franzosa. Introduction to Topology: Pure and Applied. *Pearson Prentice Hall*, 2009.
- [7] V.G. Ivancevic, T.T. Ivancevic. Complex Nonlinearity. *Springer*, 2008.
- [8] J.R. Munkres. Topology. *Prentice Hall*, 2000.
- [9] M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. *Publish or Perish, Inc*, 1999.
- [10] K. Marathe. Topics in Physical Mathematics. *Springer*, 2010.
- [11] S. Waldmann. Topology: An Introduction. *Springer*, 2014.
- [12] H. Eschrig. Topology and Geometry for Physics. *Springer*, 2011.
- [13] V.I Arnold., S.M Gusein-Zade, A.N. Varchenko. Singularities of Differentiable Maps. *Birkhäuser*, 2000.

- [14] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu. Manifolds, Tensors Analysis, and Applications. *Springer-Verlag*, Second Edition.
- [15] D.L Ferrario, R.A. Piccinini. Simplicial Structures in Topology. *Springer*, 2011.
- [16] J.A. Ellis-Monaghan, I. Moffatt. Graphs on Surfaces: Dualities, Polynomials, and knots.. *Springer*, 2013.
- [17] R.H Crowell, R.H. Fox. Introduction to Knot Theory. *Springer-Verlag*, 1963.
- [18] C.C. Adams. The Knot Book. *W.H Freeman and Company* .
- [19] K.C. Millett Knotting of Regular Polygons in 3-space. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*.. 1994.
- [20] S. Negami. Ramsey Theorems for Knots, Links and Spatial Graphs. *W.H Freeman and Company* .
- [21] L.H. Kauffman. Knots and physics. *Series on Knots and Everything-Vol.1.* ,1991.
- [22] G.I. Bischi, A. Panchuk and D. Radi Qualitative theory of Dynamical Systems, tools and application for economic modelling, *Springer*, 2013.
- [23] R.W. Ghrist, P.J. Holmes and M.C. Sullivan, Knots and Links in Three-dimensional Flows, *Springer*, 1997.
- [24] R. Gilmore and M. Lefranc, The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland, *Wiley-Interscience*, 2002.
- [25] H. Broer and F. Takens, Dynamical systems and Chaos, *Springer*, 2011.
- [26] V.Z Grines, T.V. Medvedev and O.V.Pochinka, Dynamical System 2-and 3- Manifolds, *Springer*, 2016.
- [27] L. Barreira and C. Valls Dynamical Systems An introduction, *Springer*, 2015.
- [28] D.E. Rivas-Cisners, D.A. Diaz-Romero, C. Posadas-Castillo Estudio y Diagnóstico de Patologías Cardíacas Utilizando Teoría de Nudos, *Memorias del XVI congreso Latinamericano* 2014

- [29] M.S. Tavazoei and M. Heari, Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems, *Nonlinear Analysis* **69**(2008) 1299.
- [30] I. Petráš, fractional-Order control feedback control of a DC motor, *Journal of Electrical Engineering* **60**(2009) 117.
- [31] H. Sheng, YQ. Chen and TS. Qiu, Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing, (*Signals and Communication Technology, Springer, 2011*).
- [32] R. Magin, M.D. Ortigueira, I. Podlubny and J. Trujillo, On the fractional signals and systems, *Signal Processing* **91**(2011) 350.
- [33] I. Petráš, Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation, (*Nonlinear Physical Science, Springer, 2011*).
- [34] H. Broer and F. Takens, Dynamical Systems and Chaos, Vol. 172 (*Springer, 2011*), pp. 133-165.
- [35] V.E. Tarasov, Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, (*Nonlinear Physical Science, Springer, 2010*).
- [36] I. Petráš, Control of fractional-order Chua's system, *arXiv:nlin/0008029v1* (2000).
- [37] M.S. Tavazoei and M. Heari, *Physica D* **237**(2008) 2628.
- [38] R. Gilmore and M. Lefranc, The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland *WILEY*(2000).
- [39] Z. Ruo-Xun and Y. Shi-Ping Chaos in fractional-order generalized Lorenz system and its synchronization circuit simulation *WILEY*(2000).
- [40] Patrick Popescu-Pampu What is the Gneus? *Springer, 2016*.
- [41] D.Li, *Physics Letters A* **372**(2008) 387.
- [42] T.D. Letellier and R. Gilmore, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**(2009) 015101.
- [43] J. Lü and G. Chen, Generating multiscroll chaotic attractor: Theories, Methods and application, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16**(2006).

- [44] R.W. Ghrist and P.J. Holmes, An ODE whose solutions contain all knots and links *J. Bifurcation and Chaos*
- [45] R.W. Ghrist, *Chaos, Solitons & Fractals* **9**(1998) 583.
- [46] J.S. Birman and R.F. Williams, *Topology* **22**(1982) 47.
- [47] R.W. Ghrist, *Topology* **36**(1997) 423.
- [48] C. Adams and R. Franzosa, Introduction to Topology: Pure and Applied, 1st ed. (*Perason, 2008*), pp. 94-115, 256-258.
- [49] L. Wang, *Nonlinear Dyn* **56** (2009) 453.
- [50] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, (Springer-Verlag, 1990), pp. 27-38.