



## Esquemas de sincronización para sistemas caóticos

JUAN ÁNGEL RODRÍGUEZ LIÑÁN\*, JESÚS DE LEÓN MORALES\*



El término sincronía significa literalmente "coincidencia en el tiempo" u "ocurriendo al mismo tiempo", y se refiere a la coincidencia de fenómenos y eventos en las ciencias naturales, ingeniería y en humanidades. La sincronización de sistemas implica realizar acciones para lograr que dos o más sistemas entren y permanezcan en un comportamiento común o "al mismo ritmo", lo cual ha sido muy interesante desde sus primeros hallazgos,<sup>1</sup> tanto por su análisis, como para el desarrollo de tecnologías derivadas de una adecuada manipulación de este fenómeno. Históricamente, la sincronización ha sido bien estudiada en general en sistemas electrónicos,<sup>2</sup> mecánicos,<sup>3</sup> acústicos,<sup>4</sup> biológicos, como la interacción entre las neuronas, y la sincronización del corazón y los pulmones,<sup>5</sup> por citar algunos. Sin embargo, en estos mismos campos existen sistemas particulares llamados caóticos, en los cuales no es evidente alcanzar y mantener un estado de sincronía. Esto se debe a que los sistemas caóticos son sistemas

dinámicos deterministas en los que la evolución de sus variables, con determinadas condiciones iniciales, es muy diferente a la evolución de las variables del mismo sistema ante a un pequeño cambio en sus condiciones iniciales. Esto ocurre en fenómenos como la turbulencia de fluidos, sistemas meteorológicos, sistemas mecánicos, eléctricos, procesos biológicos y otros,<sup>6,8</sup> Debido a su alta sensibilidad a las condiciones iniciales, es claro que dos sistemas caóticos aislados, aun siendo idénticos, no estarían en sincronía. A pesar de esto, un estudio de L.M. Pecora y T.L. Carroll<sup>9</sup> reveló que dos sistemas caóticos idénticos con una señal común de acoplamiento sí pueden evolucionar en sincronía (figura 1). Los esquemas y las técnicas de dicho estudio tienen una desventaja referente a que sistemas caóticos, aun siendo réplicas idénticas, en la práctica existen inexactitudes e incertidumbres en los parámetros y componentes de cada sistema, por lo cual, bajo esos esquemas, su sincronía no se garantiza en forma robusta.

Actualmente, la investigación y desarrollo de técnicas de sincronización apunta en dirección de

□ El presente artículo está basado en la investigación "Esquemas de sincronización para sistemas caóticos", galardonada con el Premio de Investigación UANL 2009 en la categoría de Ciencias Exactas, otorgado en sesión solemne del Consejo Universitario, en septiembre de 2009.

\* Centro de Innovación, Investigación y Desarrollo en Ingeniería y Tecnología / Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL. Correo electrónico: angel.rodriguezln@uanl.edu.mx, drjleon@gmail.com

esquemas de sincronización robusta para sistemas tanto idénticos como diferentes, con inexactitudes, con dinámicas desconocidas, de orden diferente, con información limitada o medición parcial de sus variables, entre otros.<sup>1</sup> Al respecto, debe considerarse que la sincronización puede lograrse en diferentes grados o tipos,<sup>10</sup> éstos son clasificados como sincronización idéntica, de fase, en atraso y en adelanto, generalizada, completa, parcial y en orden reducido.

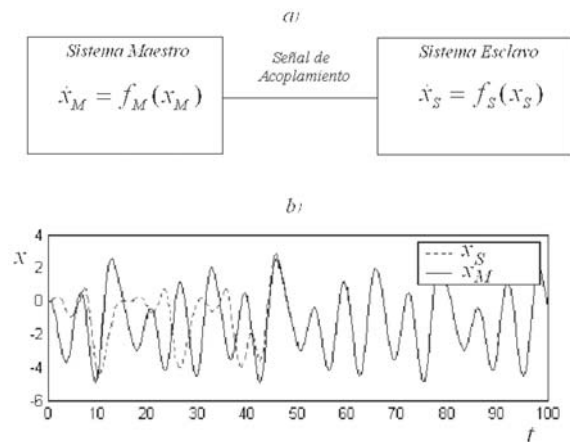


Fig. 1. Magnitudes máximas esperadas para sismos en la región central y este de los EE.UU.<sup>8</sup>

En este trabajo se aborda la sincronización unidireccional generalizada de orden reducido, la cual consiste en que todas las variables de un sistema esclavo se sincronicen, a través de un mapeo, con proyecciones de las variables de un sistema maestro; donde el esclavo es de menor orden que el maestro, dicho de otra manera, de menor cantidad de variables. Se aborda este tipo de sincronización porque es el tipo de problema que se presenta en sistemas o redes de sistemas que no son idénticos, sino de diferentes modelos y características, siguiendo a un sistema líder o maestro, como en tareas de robots múltiples,<sup>11</sup> navegación en formación de grupos de vehículos, sistemas láser,<sup>12</sup> procesos automatizados de manufactura y logística sincronizados.<sup>13</sup>

Un objetivo en este trabajo es detectar condiciones suficientes para garantizar la sincronización generalizada en orden reducido, considerando in-

certidumbre y dinámicas no modeladas. Además, se toma en cuenta que no se tienen disponibles o no son medibles todas las variables de los sistemas. Para ello se proponen esquemas basados en controladores y observadores de estado mediante técnicas de modos deslizantes para lograr la sincronización. Este artículo se organiza como sigue: en la siguiente sección se presenta la descripción del problema de sincronización. Luego se diseñan dos esquemas de control para sincronización basados en técnicas de modos deslizantes. Posteriormente se verifica el desempeño del esquema de sincronización, implementándolo en algunos casos de estudio. Además, se presenta una estrategia para la supresión de caos, el cual es otro problema importante que consiste en lograr que se elimine la dinámica caótica de un sistema. Se muestran resultados de la implementación del esquema de supresión mediante pruebas experimentales. Finalmente se exponen algunas conclusiones.

## Planteamiento del problema

Una pregunta interesante con respecto a los sistemas caóticos es: ¿cómo lograr que alcancen y mantengan un régimen de sincronía durante un intervalo de tiempo?, aun más: ¿es posible lograr la sincronización de dos sistemas que son distintos y de diferente orden? La metodología presentada en este artículo da una respuesta a estas preguntas para dos sistemas diferentes maestro-esclavo, para lo cual considérese lo siguiente:

Sea un sistema maestro:

$$\Sigma_M : \begin{cases} \dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)u_M \\ y_M = h_M(x_M) \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x_M = [x_{1,M}, x_{2,M}, \dots, x_{n_M,M}]^T \in \mathbf{P}^{n_M}$  es el vector de estado,  $u_M \in \mathbf{P}$  es una entrada,  $y_M \in \mathbf{P}$  es una variable de salida del sistema maestro,  $f_M$  y  $g_M$  son campos vectoriales suaves, y (1) tiene grado relativo  $r_M$ .

Ahora, considere un sistema esclavo descrito por:

$$\Sigma_s : \begin{cases} \dot{x}_s = f_s(x_s) + g_s(x_s)u_s \\ y_s = h_s(x_s) \end{cases} \quad (2)$$

donde  $x_s = [x_{1,s}, x_{2,s}, \dots, x_{n_s,s}]^T \in \mathbf{P}^{n_s}$  es el vector estado,  $u_s \in \mathbf{P}$  es la entrada de control,  $y_s$  es una variable de salida,  $f_s$  y  $g_s$  son campos vectoriales suaves, el sistema (2) tiene grado relativo  $r_s$ .

Si estrictamente  $n_s < n_M$ , se llama sincronización en orden reducido. Sin embargo se estudiarán los casos  $n_s \leq n_M$ .

*Objetivo de sincronización generalizada con el mismo orden y en orden reducido:* dados dos sistemas caóticos, encontrar un control  $u_s$  para inducir los estados del sistema esclavo (2) a sincronizarse con algunas proyecciones, en sistemas de orden diferente, o a todas las componentes, en sistemas del mismo orden, de un mapeo del vector de estados del sistema maestro (1).

Con el fin de lograr este objetivo, se define el error de sincronización  $\varepsilon := x_s - \Phi(x_M)$ , donde  $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbf{P}^{n_s}$  es un mapeo con  $\Omega \subseteq \mathbf{P}^{n_M}$ . Esto se llama sincronización generalizada y está definida como sigue.

*Definición 1.*<sup>14</sup> Un sistema esclavo (2) exhibe sincronización generalizada con el sistema maestro (1), si existe un mapeo  $\Phi$ , tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s - \Phi(x_M)\| = 0 \quad (3)$$

$\forall t \geq 0$  y cualquier condición inicial  $\varepsilon(t_0) = x_s(t_0) - \Phi(x_M(t_0))$ .

La definición 1 implica  $x_s \rightarrow \Phi(x_M)$ , para cualquier diferencia inicial  $\varepsilon(t_0) = x_s(t_0) - \Phi(x_M(t_0))$ , lo cual se entiende como la sincronización generalizada del sistema (2) a una proyección del sistema (1).

## Metodología de solución propuesta

Ahora se presenta una solución al problema de la siguiente manera. El error dinámico de sincronización puede representarse como:

$$\Sigma_\varepsilon : \begin{cases} \dot{\varepsilon} = f_\varepsilon(\varepsilon) + g_\varepsilon(\varepsilon)u_s + q(\varepsilon, \xi(x_M, u_M)) \\ y_\varepsilon = h_\varepsilon(\varepsilon) \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\varepsilon \in \mathbf{P}^{n_s}$ ,  $y_\varepsilon$  es una función de salida del error de sincronización disponible para la retroalimentación,  $f_\varepsilon$  y  $g_\varepsilon$  son campos vectoriales suaves y  $q(\varepsilon, \xi(x_M, u_M))$  es un campo vectorial suave que contiene términos que dependen del error de sincronización  $\varepsilon$ , de los estados  $x_s$ ,  $x_M$  y de la entrada  $u_M$  contenidos en una función  $\xi$ , vista como una perturbación de (4).

El grado relativo<sup>15</sup> es un número entero igual al menor orden de la derivada temporal de la salida  $y_\varepsilon$  para la cual aparece explícitamente el control  $u_s$ . El sistema (4) tiene grado relativo  $r_s$ . Similarmemente, el índice característico de perturbación<sup>15</sup> es el número  $\nu$  de diferenciaciones de la salida  $y_s$  que se requieren para que aparezca explícitamente el término  $\xi$ .

Con base en un análisis<sup>15</sup> acerca de la relación entre el grado relativo y el índice de perturbación, se llega a la siguiente conclusión:

*Nota 1.* El caso  $\nu < r_s$  no se considerará, ya que no puede diseñarse un control que garantice el rechazo a la función  $\xi$ , a lo más se puede atenuar y, por tanto, no se garantiza que el error de sincronización  $\varepsilon$  tienda a cero. El caso  $\nu > r_s$  es trivial puesto que la función  $q(\varepsilon, \xi)$  no afecta el objetivo de control, de esta forma se puede lograr la sincronización. Entonces, el caso interesante es cuando  $\nu = r_s$ .

*Suposición 1.* El sistema (4) es de fase mínima.

*Suposición 2.* Para el sistema de error de sincronización (4), el índice característico de perturbación se supone  $\nu = r_s$ .

*Suposición 3.* El sistema esclavo tiene grado relativo completo  $r_s = n_s$ .

Luego, el sistema de error de sincronización (4) se puede transformar en un sistema, en nuevas coordenadas en la forma canónica de Brunovsky:

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{e} = A_e e + B_e [\beta(e)u_s + \xi(e, u_M)] \\ \dot{e}^\perp = \eta(e, e^\perp) \\ y_\varepsilon = C_e e \end{cases} \quad (5)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_e = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

donde  $\varepsilon := x_s - \Phi(x_M)$ ,  $e = [e, e^\perp]^T = \phi(\varepsilon) \in \mathbf{P}^{n_s}$  es el vector de error de sincronización en coordenadas transformadas,  $u_s \in \mathbf{P}$  es la entrada de control y  $y_\varepsilon \in \mathbf{P}$  es la salida tanto del sistema de error (4) como del sistema (5). Bajo la suposición 1,  $\beta(e) = L_{g_\varepsilon} L_{f_\varepsilon}^{r_\varepsilon - 1} h_\varepsilon$  y la función  $\xi(e, u_M) = L_{f_\varepsilon}^{r_\varepsilon} h_\varepsilon + L_{g_\varepsilon} L_{f_\varepsilon}^{r_\varepsilon - 1} h_\varepsilon$  se considera como un término de perturbación. La función  $\eta(e, e^\perp)$ , dada por  $L_{f_\varepsilon} e_j^\perp + L_{g_\varepsilon} e_j^\perp$  ( $1 \leq j \leq n_s - r_s$ ), representa la dinámica interna que se supone asintóticamente estable, esto es, el sistema es de fase mínima.<sup>15</sup>

Para obtener el cambio de coordenadas de (5) es necesario mantener las siguientes relaciones:

El nuevo error de sincronización está dado por  $e = \bar{z}_s - \phi_{proj}(\bar{z}_M)$ , donde  $\bar{z}_s = \bar{\phi}_s(x_s)$ , y  $\bar{z}_M = \bar{\phi}_M(x_M)$  son transformaciones de coordenadas originales a la forma Brunovsky basadas en geometría diferencial,<sup>15</sup> tanto del esclavo como del maestro, respectivamente;  $\phi_{proj}$  es el mapeo de proyección de la dimensión del maestro  $\mathbf{P}^{r_M}$  en la dimensión del esclavo  $\mathbf{P}^{r_s}$ . Este error de sincronización puede escribirse en función de las coordenadas originales  $x_s$  y  $x_M$  como sigue:  $e = \bar{\phi}_s(x_s) - \phi_{proj} \circ \bar{\phi}_M(x_M)$ . Entonces de la definición 1 se obtiene lo siguiente:

$$e = \bar{\phi}_s(x_s) - \phi_{proj} \circ \bar{\phi}_M(x_M)$$

$$\bar{\phi}_s^{-1}(e) = x_s - \bar{\phi}_s^{-1} \circ \phi_{proj} \circ \bar{\phi}_M(x_M)$$

$$\bar{\phi}_s^{-1}(e) = x_s - \Phi(x_M)$$

$$\bar{\phi}_s^{-1}(e) = \varepsilon$$

$$e = \bar{\phi}_s(\varepsilon)$$

Nota 2. La sincronización generalizada mediante  $\Phi$  de (2) con (1) puede resolverse estabilizando el error de sincronización  $e(t)$  del sistema (5) en el origen, equivalente a  $\varepsilon$  en el origen.

A partir de lo anterior y bajo la suposición 2 y que  $r_s \leq \nu$ , se ha obtenido un método para calcular el mapeo  $\Phi(\cdot)$ . Este método se resume de la siguiente manera:

1. Para el sistema maestro (1) se calcula el difeomorfismo

$$\bar{\phi}_M = [h_M(x_M), L_{f_M} h_M(x_M), \dots, L_{f_M}^{r_M - 1} h_M(x_M)]^T.$$

2. Para el sistema esclavo (2), se calcula el difeomorfismo

$$\bar{\phi}_s = [h_s(x_s), L_{f_s} h_s(x_s), \dots, L_{f_s}^{r_s - 1} h_s(x_s)]^T.$$

3. Se elige un mapeo de proyección lineal

$\phi_{proj} : \mathbf{P}^{r_M} \rightarrow \mathbf{P}^{r_s}$ , dado por:

$$\phi_{proj}(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r_s \times r_M} \quad (6)$$

para relacionar una a una, tanto a las salidas  $y_M$  y  $y_s$  como a sus derivadas, puesto que  $C_M = [10 \dots 0]$  y  $C_s = [10 \dots 0]$ .

4. Finalmente se calcula el mapeo dado por  $\Phi(\cdot) = \bar{\phi}_s^{-1} \circ \phi_{proj} \circ \bar{\phi}_M(\cdot)$ .

Es claro que algunos grados o tipos de sincronía de los ya mencionados están contenidos en este análisis, por tanto, se pueden abordar con esta misma metodología con mayor generalidad.

Esto es, la sincronía completa y exacta (idéntica) ocurre si  $n_s = n_M$ ,  $\Phi(\cdot)$  es el mapeo identidad y el vector de error completo es nulo  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , esto es,  $x_s = x_M$ . Si los sistemas son del mismo orden  $n_s = n_M$ , si el mapeo  $\Phi(\cdot)$  es el mapeo identidad y el vector de error completo  $\mathbf{e}$  converge a una vecindad alrededor del origen, esto es,  $x_s \approx x_M$ , entonces se logra sincronía completa y práctica. La sincronía parcial ocurre si  $n_s = n_M$ ,  $\Phi(\cdot)$  es el mapeo identidad, si al menos una componente del vector de error  $\mathbf{e}$  es nula, y al menos una componente no es nula. La sincronía proyectiva ocurre si  $n_s = n_M$ , el vector de error completo  $\mathbf{e}$  es nulo y  $\Phi(\cdot)$  es un mapeo de escalamiento, esto es,  $x_s = \alpha x_M$ , donde  $\alpha$  es un factor de escalamiento. La sincronía generalizada del mismo orden ocurre si  $n_s = n_M$ , si  $\Phi(\cdot)$  es invertible y  $\mathbf{e}$  es nulo, *i.e.*,  $x_s = \Phi(x_M)$ . La sincronía generalizada de orden reducido ocurre si el sistema esclavo es de menor orden que el maestro  $n_s < n_M$  ( $\Phi(\cdot)$  no es invertible) y el vector de error completo  $\mathbf{e}$  es nulo, esto es,  $x_s = \Phi(x_M)$ .

### Esquemas de control para sincronización

Puesto que la sincronización entre los sistemas caóticos (1) y (2) puede interpretarse como un problema de estabilización del sistema de error (5) en el origen. En esta sección se introducen algunos resultados conocidos para sistemas dinámicos con este objetivo.

En esta sección se consideran dos estrategias robustas de estabilización del sistema (5) en el origen, constituidas por: (i) Un controlador linealizante por retroalimentación de estado y un observador por modos deslizantes de alto orden que además identifica la función  $\xi$  para que sea cancelada por el controlador. (ii) Un controlador por modos deslizantes de alto orden cuasicontinuo y un diferenciador exacto robusto, esta técnica no identifica a la función  $\xi$  y el controlador cuasicontinuo no la requiere. Ambos casos pue-

den representarse en forma general por el esquema de la figura 2.

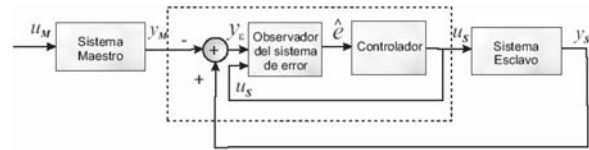


Fig. 2. Esquema para sincronización.

#### (i) Controlador linealizante por retroalimentación de estado y observador por modos deslizantes de alto orden

La técnica de linealización por retroalimentación de estado puede aplicarse con el propósito de estabilizar globalmente al sistema dinámico no lineal, mediante el control:

$$u_s = \frac{-\xi(e, u_M) + \sum_{i=1}^{n_s} k_i e_i}{\beta_s(e)} \quad (7)$$

donde los valores de las ganancias  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_s$ , son tales que  $s^{n_s} + k_{n_s} s^{n_s-1} + \dots + k_2 s + k_1 = 0$  sea un polinomio Hurwitz.

Con el fin de estimar todas las componentes de  $\xi$  e identificar la entrada desconocida  $\xi$ , se presenta el diseño de un observador por modos deslizantes de alto orden<sup>17</sup> para reconstruir los estados no medibles e identificar las entradas desconocidas con convergencia exacta en tiempo finito<sup>16,17</sup>, el cual está dado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_{r_1+1} M^{1/(r_1+1)} |\hat{e}_1 - e_1|^{r_1/(r_1+1)} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\lambda_{r_2} M^{1/r_2} |\hat{e}_2 - v_1|^{(r_2-1)/r_2} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1) + \hat{e}_3 = v_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{e}}_{r_s} = -\lambda_{r_s} M^{1/2} \underbrace{|\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}|^{1/2}}_{v_{r_s}} \text{sign}(\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}) + \hat{\xi} + u_s \\ \dot{\hat{\xi}} = -\lambda_1 M \text{sign}(\hat{\xi} - v_{r_s}) \end{cases} \quad (8)$$

donde  $\hat{e}_i$  es la estimación de  $e_i$ ,  $\hat{\xi}$  es el valor identificado de  $\xi$ , el parámetro  $M$  se elige como una constante suficientemente grande, particularmente  $M > \xi_1^+$  y las constantes  $\lambda_i$  se escogen recursivamente suficientemente grandes.<sup>16,18</sup> Entonces puede establecerse el siguiente resultado:

*Lema 1.* Considere el sistema (5) que satisface las suposiciones de que tiene grado relativo  $r_s$  con respecto a la función  $\xi(t)$ , la cual está acotada por  $|\xi(t)| \leq \xi^+$ . Entonces el sistema (8) es un observador para el sistema (5), donde el error de estimación  $(\tilde{e}, \tilde{\xi})^T = (e, \xi)^T - (\hat{e}, \hat{\xi})^T$  converge a cero en tiempo finito, esto es, los estados estimados  $\hat{e}_i$  convergen a los estados  $e_i$  y  $\hat{\xi}(t)$  a la función desconocida  $\xi(t)$ .

*Prueba.* Ver detalles en A. Rodríguez, J. De León, and L. Fridman.<sup>19</sup>

El siguiente resultado permite asegurar que se preserva la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando se reemplazan los estados en la ley de control (7) por sus valores estimados por el observador (8).

*Lema 2.* Considere el sistema (5) para el cual se diseña el control linealizante por retroalimentación (7). Suponga que se diseña el observador (8) con convergencia en tiempo finito. Entonces, el sistema aumentado en lazo cerrado es asintóticamente estable.

*Prueba.* Ver detalles en A. Rodríguez,<sup>4</sup> J. De León, and L. Fridman.<sup>19</sup>

**(ii) Controlador por modos deslizantes de alto orden cuasicontinuo y diferenciador exacto robusto**

Considérese la dinámica controlable del sistema (5) reescrita en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{e} = a_e(t, e) + b_e(t, e)u_s \\ \sigma = \sigma(t, e) \end{cases} \quad (9)$$

donde  $e \in \mathbb{P}^{r_s}$ ;  $a_e, b_e : \mathbb{P}^{r_s} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}^{r_s}$ , y  $\sigma : \mathbb{P}^{r_s} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  son funciones desconocidas suaves, además  $\sigma$  es la variable de salida y  $u_s \in \mathbb{P}$

es la variable de entrada. Al compararlo con el sistema (5) se tiene que  $b_e(t, e) = B_e \beta(e)$  y  $\sigma(t, e) = C_e e$ .

El objetivo es lograr que  $\sigma \equiv 0$  en tiempo finito y mantenerlo exactamente ahí mediante alguna retroalimentación. Dado que las derivadas temporales  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r_s-1)}$  son funciones continuas de la salida del sistema en lazo cerrado y la superficie de deslizamiento definida por:

$$\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r_s-1)} = 0 \quad (10)$$

es no vacía y consiste localmente de trayectorias de Filippov, el movimiento sobre (10) se llama modo  $r_s$ -deslizante (o deslizante de  $r_s$ -ésimo orden).<sup>18</sup> El control aparece explícitamente en la  $r_s$ -ésima derivada temporal de  $\sigma$ , la cual está dada por:

$$\sigma^{(r_s)} = h(t, e) + g(t, e)u_s \quad (11)$$

donde  $h(t, e) = \sigma^{(r_s)}|_{u_s=0}$ ,  $g(t, e) = (\partial/\partial u_s)\sigma^{(r_s)} \neq 0$ . Se supone que, para algún  $K_m, K_M, C > 0$ , se preserva la siguiente desigualdad:

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u_s} \sigma^{(r_s)} \leq K_M, \quad |\sigma^{(r_s)}|_{u_s=0} \leq C \quad (12)$$

A partir de (11) y (12), la inclusión diferencial de Filippov

$$\sigma^{(r_s)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u_s \quad (13)$$

significa que el conjunto vectorial del lado derecho se extiende dentro de las cotas  $C, K_m, K_M$ , en lugar de satisfacer un único punto o solución.<sup>20</sup> Así, la estabilización en tiempo finito de (13) en el origen resuelve el problema planteado simultáneamente para todos los sistemas (9) que satisfacen (12). Un controlador que permite estabilizar a (13) en tiempo finito corresponde al siguiente resultado:

*Teorema 1.*<sup>21</sup> El controlador:

$$u_s = -k\Psi_{r_s-1, r_s}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r_s-1)}) \quad (14)$$



es homogéneo  $r_s$ -deslizante y, con los parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r_s-1}$ ,  $k > 0$  elegidos suficientemente grandes, provee estabilidad en tiempo finito de (13) y (14). El modo  $r_s$ -deslizante estable en tiempo finito  $\sigma \equiv 0$  se establece en el sistema (9) y (14).

El controlador (14) es una función continua, excepto en la superficie (10) y requiere el cálculo en tiempo real de  $\sigma, \sigma, \dots, \sigma^{(r_s-1)}$ . Como se ha supuesto que no todos los estados están disponibles, se presenta un diferenciador, el cual es un sistema capaz de calcular las derivadas a partir del conocimiento de la variable  $\sigma$ . Un diferenciador de  $r_s$ -ésimo orden está dado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_{r_s+1} |\hat{e}_1 - e_1|^{r_s/(r_s+1)} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\lambda_{r_s} |\hat{e}_2 - v_1|^{(r_s-1)/r_s} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1) + \hat{e}_3 = v_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{e}}_{r_s} = -\lambda_2 |\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_{r_s} - v_{r_s-1}) + \hat{e}_{r_s+1} = v_{r_s} \\ \dot{\hat{e}}_{r_s+1} = -\lambda_1 M \text{sign}(\hat{e}_{r_s+1} - v_{r_s}) \end{cases} \quad (15)$$

donde los parámetros del diferenciador (15) se eligen de acuerdo a la condición  $|\sigma^{(r_s)}| \leq M$ , tal que  $M \geq C + kK_M$ . La convergencia del diferenciador en tiempo finito se establece tomando  $\lambda_i$  como en A. Levant.<sup>18</sup>

**Teorema 2.**<sup>18</sup> Siendo los parámetros  $\lambda_i$  apropiadamente elegidos, son ciertas las igualdades  $\hat{e}_i = e_i$  y  $\hat{e}_{i+1} = v_i = e_i^{(i)}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, r_s$ , en ausencia de ruido de entrada, después de un transitorio de tiempo finito.

Entonces, una solución al problema de sincronización para dos sistemas con diferente grado relativo se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 3.** Considere el sistema incierto (9) que satisface la desigualdad (12) y las suposiciones 1, 2, 3. El sistema incierto (9) en lazo cerrado con el control (14) y utilizando el diferenciador exacto robusto (15) es tal que el error de sincronización  $e$ , equivalente a  $\mathcal{E}$ , tiende a cero en tiempo finito.

*Prueba.* Ver detalles en A. Rodríguez, J. De León, L. Fridman.<sup>22</sup>

## Casos de estudio e implementación de los esquemas de sincronización

Ahora, con el fin de ilustrar la implementación de los esquemas presentados, se consideran los siguientes casos de estudio:

### Transductor electrostático no lineal – Eq. Duffing

El sistema maestro corresponde a un modelo de transductores electrostáticos no lineal de cuarto orden

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,M} = x_{2,M} \\ \dot{x}_{2,M} = -cx_{2,M} - d^2(x_{1,M} - x_{3,M} - x_{1,M}x_{3,M}) \\ \dot{x}_{3,M} = x_{4,M} \\ \dot{x}_{4,M} = -ax_{4,M} - x_{3,M} - x_{3,M}^3 + b(x_{1,M} + x_{1,M}^2/2) + u_e(t) \end{cases} \quad (16)$$

donde  $x_{i,M}$  son las variables de estado,  $a, b, c, d, f$  son parámetros del sistema, y  $u_e(t)$  es una excitación de entrada,  $y = x_{1,M}$  es la variable de salida medible.

El sistema esclavo corresponde a la conocida ecuación Duffing con dos entradas de excitación dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s} = x_{2s} \\ \dot{x}_{2s} = -\rho x_{2s} + \omega_0 x_{1s} - \gamma x_{1s}^3 + K_1 \cos(\omega_1 t) + K_2 \cos(\omega_2 t) + u_s \end{cases} \quad (17)$$

Donde  $x_{i,s}$  son las variables de estado,  $u_s$  es la entrada de control  $y = x_{1,s}$  es la variable de salida medible,  $\rho, \omega_0, \gamma$  son parámetros constantes del sistema,  $K_i$  y  $\omega_i$  son las amplitudes y frecuencias de las entradas de excitación, respectivamente.

Siguiendo el procedimiento presentado en este trabajo se calcula el mapeo  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x_M) &= \bar{\phi}_s^{-1} \circ \phi_{proj} \circ \bar{\phi}_M(x_M) = [\Phi_1(x_M), \Phi_2(x_M)]^T \\ \Phi(x_M) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,M} \\ x_{2,M} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces se implementa el esquema sincronización para el sistema (11) con un subsistema de (10).

La ley de control  $u_s$  está dada por:

$$u_s = -\dot{\xi} - k_1 e_1 - k_2 e_2 \quad (18)$$

Un observador que estima las variables  $e_1, e_2$  y la función  $\xi$  queda expresado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_3 M^{1/3} |\hat{e}_1 - e_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = \underbrace{-\lambda_2 M^{1/2} |\hat{e}_2 - v_1|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1)}_{v_2} + \hat{\xi} + u_s \\ \dot{\hat{\xi}} = -\lambda_1 M \text{sign}(\hat{\xi} - v_2) \end{cases} \quad (19)$$

El desempeño del esquema formado por el controlador (18) y observador (19) en lazo cerrado con los sistemas (16) y (17) está ilustrado en simulación con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a &= 0.03, b = 0.1, c = 0.3, d = 0.985, \rho = 1, \\ \omega_0 &= 10, \gamma = 100, K_1 = K_2 = 1, \omega_1 = 2, \omega_2 = 4, \\ M &= 1950, \lambda_3 = 3.0, \lambda_2 = 1.5, \lambda_1 = 1.1. \end{aligned}$$

La entrada de excitación fue  $u_e(t) = 0.35 \cos(t)$ . Las condiciones iniciales fueron  $x_M(0) = [0 \ 0]^T$  y  $x_s(0) = [0.1 \ 0]^T$ ,  $\hat{e}_1(0) = 4, \hat{e}_2(0) = -2$  y  $\hat{\xi}(0) = 1$ .

Los resultados de sincronización se muestran en la figura 3, al sincronizar el estado  $x_s$  con el mapeo  $\Phi(x_M)$  a partir de  $t=30$  segundos.

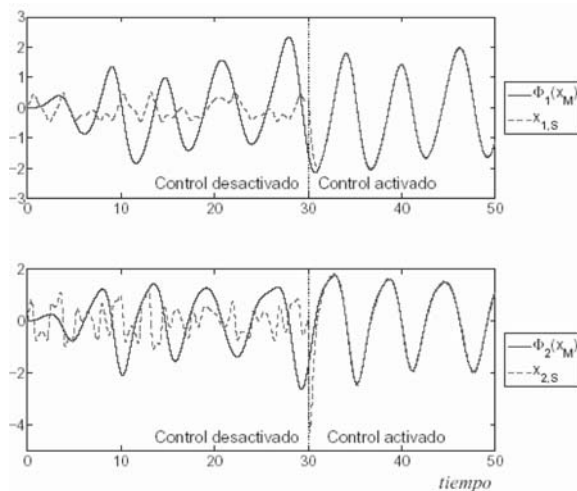


Fig. 3. Sincronización del sistema (16) y (17).

### Lorenz generalizado - Rössler

En este caso se sincronizan los siguientes sistemas caóticos. El sistema maestro está representado por el sistema generalizado de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,M} = -a_M x_{1,M} + a_M x_{2,M} + c_M x_{4,M} \\ \dot{x}_{2,M} = h_M x_{1,M} - x_{2,M} - x_{1,M} x_{3,M} \\ \dot{x}_{3,M} = -b_M x_{3,M} + x_{1,M} x_{2,M} \\ \dot{x}_{4,M} = -x_{1,M} - a_M x_{4,M} \end{cases} \quad (20)$$

donde  $x_M$  es el vector de estado,  $y_M = x_{1,M}$  es la salida medible,  $a_M, b_M, c_M,$  y  $h_M$  son coeficientes constantes.

El sistema esclavo está dado por el sistema Rössler:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,s} = -x_{2,s} - x_{3,s} \\ \dot{x}_{2,s} = x_{1,s} + a_s x_{2,s} \\ \dot{x}_{3,s} = x_{3,s} (x_{1,s} - c_s) + b_s + u_s \end{cases} \quad (21)$$

donde  $x_s$  es el vector de estado,  $y_s = x_{2,s}$  es la salida medible,  $u_s$  es la entrada de control;  $a_s, b_s$  y  $c_s$  son coeficientes constantes. Se calcula el mapeo  $\Phi: \mathbf{P}^4 \rightarrow \mathbf{P}^3$ , el cual es  $\Phi(x_M) =$

$$\begin{bmatrix} -(a_M + a_s) & a_M & 0 & c_M \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ (c_M - a_M(a_s + a_M + h_M) - 1) & a_M(1 + a_M + a_s) & a_M x_{1,M} & c_M(2a_M + a_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,M} \\ x_{2,M} \\ x_{3,M} \\ x_{4,M} \end{bmatrix}$$

El controlador cuasicontinuo estabilizante (14) calculado para el ejemplo es dado por:

$$u_s = -k \frac{[\hat{e}_3 + 2(|\hat{e}_2| + |\hat{e}_1|^{2/3})^{-1/2}(\hat{e}_2 + |\hat{e}_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{e}_1))]}{[|\hat{e}_3| + 2(|\hat{e}_2| + |\hat{e}_1|^{2/3})^{1/2}]} \quad (22)$$

Para estimar las funciones  $e_i$  en tiempo real, se diseña el diferenciador (15):



$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = -\lambda_4 |\hat{e}_1 - e_1|^{3/4} \text{sign}(\hat{e}_1 - e_1) + \hat{e}_2 = v_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\lambda_3 |\hat{e}_2 - v_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{e}_2 - v_1) + \hat{e}_3 = v_2 \\ \dot{\hat{e}}_3 = \underbrace{-\lambda_2 |\hat{e}_3 - v_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{e}_3 - v_2)}_{v_3} + \hat{e}_4 + u_s \\ \dot{\hat{e}}_4 = -\lambda_1 \text{sign}(\hat{e}_4 - v_3) \end{cases} \quad (23)$$

Se tomaron los siguientes parámetros para mostrar el desempeño en simulación:

$$\begin{aligned} a_M &= 1.0, b_M = 0.7, c_M = 1.5, h_M = 26, \\ a_s &= 0.2, b_s = 0.2, \text{ y } c_s = 5.7, \lambda_1 = 1.1M, \\ \lambda_2 &= 1.5M^{1/2}, \lambda_3 = 2.0M^{1/3}, \lambda_4 = 3.0M^{1/4}, \\ M &= 12000, k = 30. \text{ Las condiciones iniciales se } \\ &\text{ubicaron en } x_M(0) = (1, 0, -1, 1)^T, x_s(0) = (-1, 2, 2)^T, \\ &\hat{e}(0) = [0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned}$$

En la figura 4 se muestra la sincronización en tiempo finito del estado  $x_s$  con el mapeo  $\Phi(x_M)$ , accionado a partir de  $t=15$  segundos.

Con estos casos se muestra el buen desempeño de los esquemas para sincronización generalizada unidireccional en orden reducido.

### Supresión de dinámicas caóticas

Ahora se presentan algunos resultados relacionados con otro problema de control de caos: la supresión de caos. Por la cual se muestra que las trayectorias de un sistema caótico se estabilizan alrededor de algún punto de equilibrio, y es importante debido a que las oscilaciones erráticas de un sistema caótico son impredecibles y pueden causar daños. Actualmente es importante la supresión de caos para ayudar en tratamientos de desórdenes cardíacos<sup>23</sup> y epilepsia,<sup>7</sup> en sistemas de láser,<sup>24</sup> en mecatrónica,<sup>25</sup> entre otros.

### Sistemas caóticos de clase P

Malasoma<sup>26</sup> consideró los trabajos de J. Sprott,<sup>27</sup>

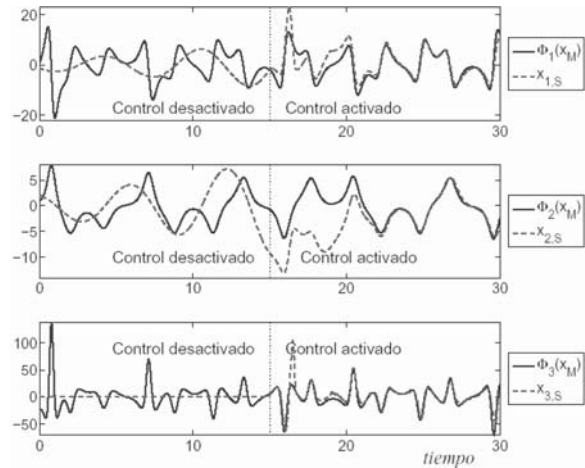


Fig. 4. Sincronización de los sistemas (20) y (21).

y reportó seis sistemas que satisfacen una ecuación  *jerk* , con soluciones caóticas. Estos sistemas se agrupan en la llamada clase P, la cual se reporta como la clase de sistemas caóticos más simples. Éstos son seis sistemas de tercer orden cuya ecuación diferencial contiene una no linealidad cuadrática:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = & x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_3 \\ \dot{x}_2 = & x_1 + 1 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2 \end{cases}$$

Todos los sistemas clase P son caóticos para el intervalo<sup>26</sup>  $2.0168 < \alpha < 2.0577$ .

**Ley de control para supresión en sistemas clase P**

A partir de resultados para estabilización de sistemas mediante métodos geométricos se obtiene lo siguiente: considere los sistemas caóticos clase P en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x; \alpha) + g(x; \alpha)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (24)$$

donde  $x$ ,  $u$ , y  $y$  son los vectores de estado, entrada y salida a controlar del sistema, respectivamente. Si el sistema tiene puntos de equilibrio en su dominio, y es de grado relativo pleno  $r=n$ , puede estabilizarse mediante un control por retroalimentación de estado descrito por:

$$u = \frac{-L_f^r h(x) - k_1 y - k_2 y^{(1)} - \dots - k_r y^{(r-1)}}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (25)$$

donde  $k_i$  ( $i=1,2,\dots,r$ ) deben ser tales que  $s^r + k_r s^{r-1} + \dots + k_2 s + k_1$  es un polinomio Hurwitz.

Esta ley de control requiere todas las variables de estado, así como el parámetro incierto  $\alpha$ . Sin embargo, se hace la suposición de que sólo se dispone de una salida medible  $y_m(t)$ . Entonces se presenta un observador adaptable para superar esta limitación, este observador estima tanto el estado como el parámetro desconocido.

$$\begin{cases} \dot{z} = A(u, y_m)z + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\theta \\ y_m = Cz \end{cases} \quad (26)$$

donde las componentes de  $z$ ,  $\varphi(u, y_m)$  y  $\Phi(u, y_m)$  son funciones continuas uniformemente acotadas dependientes de  $u, y_m$ , y  $\theta$  es un vector de parámetros constantes desconocidos. Ahora se

introducen algunas suposiciones requeridas.

*Suposición 4.*<sup>28</sup> Existe una matriz variante en el tiempo acotada  $K(t)$  tal que el sistema  $\dot{\eta} = (A(t) - K(t)C(t))\eta(t)$  es exponencialmente estable.

*Suposición 5.*<sup>28</sup> La solución de  $\dot{\Lambda}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t)$  es un término persistentemente excitado en el sentido que existen  $\alpha_1, \beta_1, T_1$ , tales que:

$$\alpha_1 I \leq \int_t^{t+T_1} \Lambda(\tau)^T C^T \Sigma C(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta_1 I \quad (27)$$

para alguna matriz definida positiva acotada  $\Sigma$ .

*Suposición 6.*<sup>29</sup> La entrada  $u$  es persistentemente excitada en el sentido de que existen  $\alpha_2, \beta_2, T_2 > 0$  y  $t_0 \geq 0$  tales que:

$$\alpha_2 I \leq \int_t^{t+T_2} \Psi_u(\tau, t)^T C^T \Sigma C(\tau) \Psi_u(\tau, t) d\tau \leq \beta_2 I \quad (28)$$

$\forall t \geq t_0$ , donde  $\Psi_u$  denota la matriz de transición para el sistema  $\dot{z} = Az$ ,  $y_m = Cz$  y  $\Sigma$  alguna matriz definida positiva acotada.

A partir de las condiciones de excitación (27) y (28) con  $K=S^{-1}C^T$ , donde  $S$  es solución de  $\dot{S} = -\rho S - A(u, y_m)^T S - SA(u, y_m) + C^T \Sigma C$ . Entonces, un observador adaptable para (24) está dado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A(u, y_m)\hat{z} + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\hat{\theta} \\ \quad + \{\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T + S_z^{-1} C^T\} \Sigma (y_m - C\hat{z}) \\ \dot{\hat{\theta}} = S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma (y_m - C\hat{z}) \\ \dot{\Lambda} = \{A(u, y_m) - S_z^{-1} C^T \Sigma C\} \Lambda + \Phi(u, y_m) \\ \dot{S}_z = -\rho_z S_z - A(u, y_m)^T S_z - S_z A(u, y_m) + C^T \Sigma C \\ \dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \end{cases} \quad (29)$$

donde  $S_z(0) > 0$  y  $S_\theta(0) > 0$ ,  $\tilde{n}_z$  y  $\tilde{n}_\theta$  son constantes positivas suficientemente grandes y  $\Sigma$  una matriz definida positiva.

*Teorema 4.*<sup>30</sup> Si se satisfacen las suposiciones 4, 5 y 6, entonces el sistema (29) es un observador adaptable para el sistema (26). Además, el vector

de error de estimación ( $e_z := \hat{z} - z, \varepsilon_\theta := \hat{\theta} - \theta$ ) converge exponencialmente a cero con una razón dada por  $\rho = \min(\rho_z, \rho_\theta)$ .

Por otro lado, note que un sistema clase P en la forma (24) puede transformarse en un sistema afín en el estado (26) mediante la transformación  $z=Q(x)$ , la cual existe y es invertible en la clase P.<sup>26</sup>

El esquema completo en lazo cerrado controlador, observador y planta se muestra en la figura 5. El análisis de estabilidad se resume en el siguiente resultado.

**Teorema 5.** Si el estado extendido  $Z = [z \ \theta]^T$  de lazo cerrado permanece para tiempo positivo en un conjunto compacto  $\Omega$  (el cual contiene el punto de equilibrio del controlador nominal)  $\forall Z(0) \in \Omega$ , el sistema completo en lazo cerrado es globalmente asintóticamente estable en  $\Omega \times P^n \times S_n^+, \forall Z(0) \in \Omega, \forall \hat{Z}(0) \in P^n, \forall S(0) > 0$ .

*Prueba.* Ver detalles en Ángel Rodríguez, Jesús de León, Ricardo Femat, Crescencio Hernández-Rosales.<sup>31</sup>

La implementación se realiza considerando el siguiente sistema caótico clase P:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (30)$$

donde sólo se mide  $y_m = x_2$ , el parámetro  $\alpha$  es constante y desconocido. La variable  $y_c = x_1$  es estabilizada en el origen.

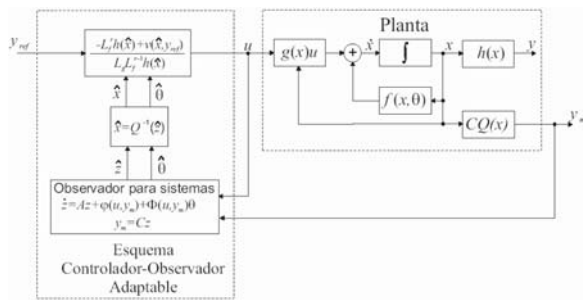


Fig. 5. Esquema control y observador para supresión de caos.

El sistema (30) se implementó electrónicamente con amplificadores operacionales y otros componentes. Se diseñó la ley de control (25) y el observador (26), y se implementaron mediante un sistema de adquisición de datos DSpace 1104. Las figuras 6 y 7 muestran, respectivamente, una foto del equipo experimental e imágenes del osciloscopio con las series de tiempo y con proyecciones del atractor caótico en dos planos durante los experimentos.

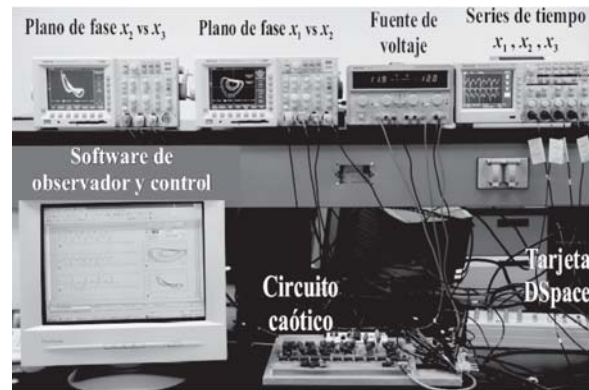


Fig. 6. Foto del equipo experimental.

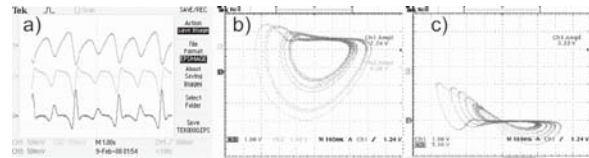


Fig. 7. Señales caóticas del circuito en osciloscopio.

La supresión de las oscilaciones caóticas se muestra en la figura 8, éstas se suprimen durante un intervalo predefinido en el que se aplica la señal de control. Al desactivar la señal de control, la dinámica caótica vuelve a aparecer.

## Conclusiones

En este trabajo se presentó y propuso una solución al problema de sincronización unidireccional generalizada de mismo orden y en orden reducido para una clase de sistemas. La sincronización puede lograrse si el índice característico de perturba-

ción es mayor o igual al grado relativo en el sistema de error de sincronización. Se ofreció un procedimiento para el cálculo sistemático de los mapeos requeridos en sincronización generalizada. Se ofrecieron dos esquemas de técnicas de control para sincronización y estimación de variables no medibles, para los cuales se obtuvieron condiciones suficientes de convergencia y estabilidad de lazo cerrado en tiempo finito. Se verificó el funcionamiento de los esquemas de sincronización implementándolos en algunos casos de estudio. Por otra parte, se presentó un esquema para supresión de oscilaciones caóticas, basado en un control retroalimentado y un observador adaptable, para el cual se ofrecieron condiciones suficientes de estabilidad en lazo cerrado. Los resultados de este esquema de supresión se verificaron exitosamente de forma experimental mediante osciladores electrónicos.

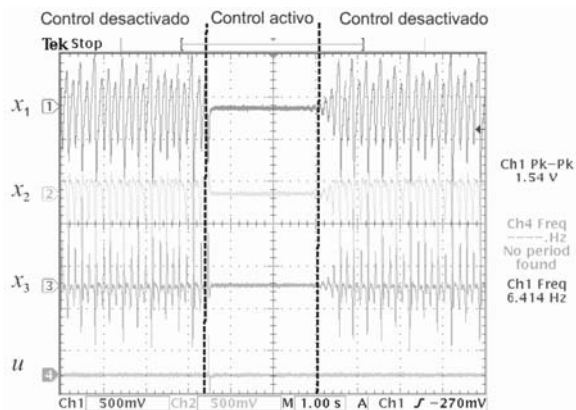


Fig. 8. Oscilaciones caóticas suprimidas en un intervalo de tiempo.

## Resumen

Se presenta una metodología y esquemas para lograr la sincronización unidireccional generalizada en orden reducido. Este esquema es útil para sincronizar sistemas distintos y de diferente orden. Se dan condiciones suficientes para garantizar la sincronización. Los esquemas presentados se basan en técnicas por modos deslizantes de alto or-

den; ofrecen, por tanto, convergencia en tiempo finito. Se presenta también un esquema para supresión de oscilaciones caóticas, basado en un controlador retroalimentado y un observador adaptable. Los resultados de estos esquemas se verifican al implementarlos experimentalmente mediante casos de estudio.

**Palabras clave:** Sincronización, Sistemas caóticos, Supresión de caos, Observadores por modos deslizantes, Control por retroalimentación.

## Abstract

A methodology and schemes are presented in order to achieve unidirectional generalized synchronization in reduced order. This scheme is useful to synchronize distinct systems with different order. Sufficient conditions are given to guarantee synchronization. The presented schemes are based on high order sliding-mode techniques, offering finite-time convergence. Moreover, a scheme, based on a feedback controller and an adaptive observer, is presented for chaos suppression. The results from these schemes are verified by implementing some cases experimentally.

**Keywords:** Synchronization, Chaotic systems, Chaos suppression, Sliding-modes observers, Feedback control.

## Referencias

1. C. Huygens. *Horoloquim oscillatorium*. Paris, France, 1673.
2. E.V. Appleton. The automatic synchronization of triode oscillator. *Proc. Cambridge Phil. Soc. (Math. and Phys. Sci.)*, 21:232-248, 1922.
3. I.I. Blekhnman. *Synchronization in Science and Technology*. ASME, New York, 1988.
4. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2001.
5. C. Schafer et al., "Synchronization in the human cardiorespiratory system", *Phys. Rev. E*, Vol. 60,

- No. 1, pp. 857-870, 1999.
6. E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmospheric Sci.*, 20(2):130-141, 1963.
  7. B.R. Andrievskii and A.L. Fradkov, "Control of chaos: Methods and applications", *Automation and Remote Control*, Vol. 64, No. 5, pp. 673-713, 2003.
  8. J.D. Phillips, "Deterministic chaos and historical geomorphology: A review and look forward", *Geomorphology*, Vol. 76, pp. 109-121, 2006.
  9. L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64, No. 8, pp. 821-824, 1990.
  10. R. Femat and G. Solís-Perales. On the chaos synchronization phenomena. *Physics Letters A*, 262:50-60, 1999.
  11. S. Dong and J.K. Mills. Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(4):498-510, 2002.
  12. R. McAllister, A. Uchida, R. Meucci, and Rajarshi-Roy. Generalized synchronization of chaos: Experiments on a two-mode microchip laser with optoelectronic feedback. *Physica D*, 195:244-262, 2004.
  13. M. Brunt. Coordination of Redundant Systems. Phd, Technical University of Delft, Delft, The Netherlands, 1998.
  14. S.S. Yang and C.K. Duan. Generalized synchronization in chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9(10):1703-1707, 1998.
  15. R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive, and Robust*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1995.
  16. L. Fridman, A. Levant, and J. Dávila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10):773-791, 2007.
  17. L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, and X.G. Yan. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5):399-413, 2008.
  18. A. Levant. High-order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76(9/10):924-941, 2003.
  19. A. Rodríguez, J. De León, and L. Fridman. Synchronization in Reduced-Order of Chaotic Systems via Control Approaches based on High-Order Sliding-Mode Observer. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 42, pp. 3219-3233, 2009.
  20. A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823-830, 2005.
  21. A. Levant. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1812-1816, November 2005.
  22. A. Rodríguez, J. De León, L. Fridman, Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers for reduced-order chaos synchronization, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43, pp. 948-961, 2008.
  23. G. Imponente, "Complex dynamics of the biological rhythms: gallbladder and heart cases", *Physica A*, Vol. 338, pp. 277-281, 2004.
  24. R. Meucci et al., "Global manifold control in a driven laser", *Physica D*, Vol. 189, pp. 70-80, 2004.
  25. O. Peñaloza, J. Alvarez, "Supresión de Caos en un manipulador planar subactuado", *Revista IEEE América Latina*, Vol. 2, No. 1, 2004.
  26. J.M. Malasoma, "A New Class of Minimal Chaotic Flows", *Phys. Lett. A*, Vol. 305, pp. 52-58, 2002.
  27. J.C. Sprott, "Simplest Dissipative Chaotic Flow", *Phys. Lett. A*, Vol. 228, pp. 271-274, 1997.
  28. Q. Zhang, "Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 47, No. 3, pp. 525-529, 2002.
  29. H. Hammouri and J. De León-Morales, "Observers synthesis for state affine systems", in *Proceedings of the 29th IEEE Conference of Decision and Control*, pp. 784-785, Honolulu, Hawaii, 1990.
  30. G. Besançon, J. De León, and O. Huerta. On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control*, 79(6):581-591, June 2006.
  31. Ángel Rodríguez, Jesús de León, Ricardo Femat, Crescencio Hernández-Rosales. "A dynamic parameter estimator to control chaos with distinct feedback schemes", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, Vol. 14, pp. 4280-4291, 2009.

*Recibido: 16 de agosto de 2009  
Aceptado: 10 de septiembre de 2009*